Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Centro de Ciências e Tecnologias - CCT

Unidade Acadêmica de Matemática - UAMat

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Lista 1- Limite e Continuidade

1 - Calcule os limites:

$a)\ \lim\limits_{x\to -1}(3x^2-7x-4)$

$b)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-12x+36}{x-5}$

$c)\ \lim\limits_{x\to -3}\log(x^4-3x+10)$

$d)\ \lim\limits_{x\to \pi}\cos x\,\mathrm{sen}(x+\pi)$

$e)\ \lim\limits_{x\to -2}\sqrt{5x^2+3x+2}$

$f)\ \lim\limits_{x\to -\pi}e^{senx}$

2 - Para cada função a seguir, calcule $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, caso exista.

$(a)\ f(x)=\begin{cases}3-x^2, \text{ se } x<0\\ 2x, \text{ se } x\geq 0\end{cases}$ com $a=0$.

$(b)\ f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$ com $a=4$.

$(c)\ f(x)=\begin{cases}x^2-4x-1, & \text{se } x<2\\ 2-x, & \text{se } x>2\end{cases}$ com $a=2$.

$(d)\ f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{se } x<-1\\ -x, & \text{se } x>-1\\ 0, & \text{se } x=-1\end{cases}$ com $a=-1$.

$(e)\ f(x)=(x+3)\dfrac{|x+2|}{(x+2)}$ com $a=-2$.

$(f)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ com $a=1$.

3 - Use o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\left[\sqrt{x^3+x^2}\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]=0.$$

4 - Seja f uma função tal que $4x-9\leq f(x)\leq x^2-4x+7$, para $x\geq 0$. Calcule $\lim_{x\to 4} f(x)$.

5 - Seja g uma função tal que $2x\leq g(x)\leq x^4-x^2+2$, para todo x. Calcule $\lim_{x\to 1} g(x)$.

6 - Mostre que $\lim_{x\to 0} x^4\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$.

7 - Considere a função

$$f(x)=\frac{2x+12}{|x+6|}$$

$a)$ Esboce o gráfico de f.

$b)$ Calcule $\lim_{x\to -6^+} f(x)$ e $\lim_{x\to -6^-} f(x)$.

$c)$ Existe o $\lim_{x\to -6} f(x)$? Justifique.

8 - Seja $f(x)=2x+|x-3|$. Existe $\lim_{x\to 3} f(x)$? Justifique.

9 - Considere a função

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$$

Calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

10 - Calcule os limites:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-14}{x-2}$

$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+x-6}{x+2}$

$d)$ $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{5x^3+23x^2+24x}{x^2-x-12}$

$e)\ \lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+65x^2+63x-1}{x+1}$ $\qquad$ $f)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-3x^2-4}{x-2}$

$g)\ \lim_{x\to 4} \dfrac{2x^3-13x^2+17x+12}{x^2-6x+8}$ $\qquad$ $h)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-x^3-5x^2+5}{x^2+x-2}$

$i)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$ $\qquad$ $j)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^3-a^3}{h}$

$k)\ \lim_{t\to 1} \dfrac{t^4-1}{t-1}$ $\qquad$ $l)\ \lim_{t\to 1} \dfrac{t^5-1}{t-1}$

11 - Calcule os limites:

$a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{16-x}-4}{x}$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x\to 27} \dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$

$c)\ \lim_{x\to 9} \dfrac{x^2-9x}{\sqrt{x}-3}$ $\qquad$ $d)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

$e)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[6]{x}-1}$ $\qquad$ $f)\ \lim_{x\to 32} \dfrac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32}$

$g)\ \lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2(x-3)}-2}{x-5}$ $\qquad$ $h)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{a-\sqrt{a^2+h}}, (a>0)$

$i)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ $\qquad$ $j)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

$k)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$ $\qquad$ $l)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

$m)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$ $\qquad$ $n)\ \lim_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{4}}{x+4}$

$o)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$ $\qquad$ $p)\ \lim_{x\to 16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

$q)\ \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$

$r)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

$s)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$

$t)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

12 - Calcule

$a)\ \lim_{x\to +\infty} (x^4-3x+2)$

$b)\ \lim_{x\to +\infty} (5-4x+x^2-x^5)$

$c)\ \lim_{x\to -\infty} 3x^3+2x+1$

$d)\ \lim_{x\to +\infty} x^3-2x+3$

$e)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$

$f)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^2+x+3}$

$g)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3+7x-3}{x^4-2x+3}$

$h)\ \lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x+3}{x+1}$

$i)\ \lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^4-2x+3}{3x^4+7x-1}$

$j)\ \lim_{x\to -\infty} \dfrac{5-x}{3+2x}$

$k)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2}$

$l)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{2+x}{3+x^2}$

13 - Calcule

$a)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$

$b)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$

$c)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^3+x+2}}$

$d)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2+4}}{\sqrt{x^3+x-1}}$

$e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x+10}$

$f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+x+1}}{x^2-5}$

$g)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}{x}$

$h)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}$

$i)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+x}-3x$

$j)\ \lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+2x}$

$k)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

$l)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

$m)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

$n)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+x^2}{2x-x^2}$

14 - Calcule

$a)\ \lim_{x\to3^+} \frac{5}{3-x}$

$b)\ \lim_{x\to3^-} \frac{4}{x-3}$

$c)\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{4}{2x-1}$

$d)\ \lim_{x\to0^+} \frac{2x+1}{x}$

$e)\ \lim_{x\to0^-} \frac{x-3}{x^2}$

$f)\ \lim_{x\to0^+} \frac{3}{x^2-x}$

$g)\ \lim_{x\to0^-} \frac{3}{x^2-x}$

$h)\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{3x+1}{4x^2-1}$

$i)\ \lim_{x\to1^-} \frac{2x+3}{x^2-1}$

$j)\ \lim_{x\to1^+} \frac{2x+3}{x^2-1}$

$k)\ \lim_{x\to3^+} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

$l)\ \lim_{x\to-1^+} \frac{2x+1}{x^2+x}$

$m)\ \lim_{x\to0^+} \frac{2x+1}{x^2+x}$

$n)\ \lim_{x\to1^+} \frac{3x-5}{x^2+3x-4}$

$o)\ \lim_{x\to0^+} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

$p)\ \lim_{x\to-1^+} \frac{3x^2-4}{1-x^2}$

15 - Calcule usando os limites fundamentais.

$a)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 x}{x^2}$

$b)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x}{x\sec x}$

$c)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\text{tg}x}$

$d)\ \lim_{x\to 0}(x\cdot\sec x\cdot \text{cosec}x)$

$e)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(3x)}{x}$

$f)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x}{x}$

$g)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\text{sen}x}$

$h)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\text{tg}x\text{sen}x}$

$i)\ \lim_{x\to +\infty} x\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$j)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

$k)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{x+x\cos x}{\text{sen}x\cos x}$

$l)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+\text{sen}x}{2x}$

$m)\ \lim_{x\to 1}\dfrac{\text{sen}(x-1)}{x-1}$

$n)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(1-\cos x)}{1-\cos x}$

16 - Encontre as assíntotas ao gráfico da função:

$a) f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

$b) f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$

$c) f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

$d)\ f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

17 - Verifique se cada função a seguir é contínua no ponto a indicado:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{se } x\leq 1\\ 4, & \text{se } x>1\end{cases}\qquad \text{em } a=1.$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{se } x<2\\ x-5, & \text{se } x>2\\ 0, & \text{se } x=2\end{cases}\qquad \text{em } a=2.$$

$c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}x}{x}, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\text{tg}x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ com $a = 0$.

$d)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, & \text{se } x < 3 \\ \dfrac{\text{sen}(x-3)}{x-3}, & \text{se } x > 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ com $a = 3$.

$e)\ f(x) = \begin{cases} x - x^2, & \text{se } x < -2 \\ x^3 + 2, & \text{se } x > -2 \\ 3, & \text{se } x = -2 \end{cases}$ com $a = -2$.

18 - Determine o valor de L para que as funções abaixo sejam contínuas.

$(a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$.

$(b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$.

$(c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}, & \text{se } x \neq 5 \\ L, & \text{se } x = 5 \end{cases}$ com $p = 5$.

19 - Determine os valores de a e b para que a função seja contínua para qualquer x.

$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x < 3 \\ 2ax, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < -2 \\ bx^2, & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} a^2x - 2a, & \text{se } x \geq 2 \\ 12, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x \leq -1 \\ ax - b, \quad \text{se } -1 < x < 1 \\ 3, \quad \text{se } \ x \geq 1 \end{cases}$$

$$e)\ f(x) = \begin{cases} ax + 2b, \text{ se } x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, \quad \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, \quad \text{se } \ x > 2 \end{cases}$$

20 - Mostre que a função $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ possui uma raiz no intervalo $(1, 2)$.

21 - Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = -x^2 + 4$. Mostre que existe $x \in (0, 2)$ tal que $f(x) = g(x)$.

22 - Prove que a equação $\text{sen} x - \ln x = 0$ possui uma solução no intervalo $(1, e)$, onde e é a constante de Euler.

Gabarito

1. *a*) 6 *b*) $-\dfrac{16}{3}$ *c*) 2 *d*) 0 *e*) 4 *f*) 1

2. (*a*) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$ e não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(*b*) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} f(x) = 5$.

(*c*) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -5$ e não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$.

(*e*) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -1$ e não existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

(*f*) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\sqrt{2}$ e não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

4. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 7$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$.

7. (*b*) $\lim\limits_{x\to -6^+} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to -6^-} f(x) = -2$. (*c*) Não existe $\lim\limits_{x\to -6} f(x)$.

8. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$.

9. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

10. *a*) 9 *b*) 0 *c*) -7 *d*) -3 *e*) -64 *f*) 20 *g*) $\frac{9}{2}$ *h*) $\dfrac{-8}{3}$
i) $2a$ *j*) $3a^2$ *k*) 4 *l*) 5

11. *a*) $-\dfrac{1}{8}$ *b*) $\dfrac{1}{27}$ *c*) 54 *d*) $\dfrac{2}{3}$ *e*) $\dfrac{9}{2}$ *f*) $\dfrac{1}{80}$ *g*) $\dfrac{1}{2}$ *h*) $-2a$
i) $\dfrac{2}{3}$ *j*) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ *k*) $\dfrac{1}{6}$ *l*) 2 *m*) $\dfrac{2}{3}$ *n*) $-\dfrac{1}{16}$ *o*) 1 *p*) $\dfrac{1}{128}$
q) $\sqrt[3]{3}$ *r*) $\dfrac{1}{4}$ *s*) $\dfrac{1}{12}$ *t*) $\dfrac{1}{8}$

12. *a*) $+\infty$ *b*) $-\infty$ *c*) $-\infty$ *d*) $+\infty$ *e*) $\dfrac{5}{6}$ *f*) $+\infty$ *g*) 0
h) 2 *i*) $\dfrac{1}{3}$ *j*) $-\dfrac{1}{2}$ *k*) 0 *l*) 0

13. $a)$ 0 $b)$ $\frac{1}{2}$ $c)$ 0 $d)$ 1 $e)$ 1 $f)$ 0 $g)$ -1 $h)$ 1 $i)$ $\frac{1}{6}$
$j)$ -1 $k)$ 3 $l)$ -3 $m)$ 1 $n)$ -1

14. $a)$ $-\infty$ $b)$ $-\infty$ $c)$ $+\infty$ $d)$ $+\infty$ $e)$ $-\infty$ $f)$ $-\infty$ $g)$ $+\infty$
$h)$ $+\infty$ $i)$ $-\infty$ $j)$ $+\infty$ $k)$ $+\infty$ $l)$ $+\infty$ $m)$ $+\infty$ $n)$ $-\infty$
$o)$ $+\infty$ $p)$ $-\infty$

15. $a)$ 2 $b)$ 1 $c)$ 1 $d)$ 1 $e)$ 3 $f)$ 1 $g)$ 0 $h)$ 3
$i)$ 1 $j)$ 0 $k)$ 2 $l)$ 0 $m)$ 1 $n)$ 1

16.$a)$ Assíntota horizontal: $y = 0$ e Assíntotas verticais: $x = 1$ e $x = -1$.

$b)$ Assíntota horizontal: $y = 3$ e Assíntota vertical: $x = 1$.

$c)$ Assíntota horizontal: $y = 0$ e Assíntotas verticais: $x = 1$ e $x = -2$.

$d)$ Assíntota horizontal: Não existe, e Assíntota vertical: $x = -1$.

17. $a)$ f é contínua em 1 $b)$ f não é contínua em 2 $c)$ f é contínua em 0
$d)$ f é contínua em 3 $e)$ f não é contínua em -2

18. (a) 12 (b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{2}$

19. $a)$ $a = \frac{4}{3}$ (b) $b = -\frac{1}{2}$ (c) $a = -2$ ou $a = 3$ (d) $a = \frac{5}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$
(e) $a = -\frac{3}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$

21. Dica: Considere a função $h(x) = f(x) - g(x)$.