Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Centro de Ciências e Tecnologias - CCT

Unidade Acadêmica de Matemática - UAMat

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Lista 3 - Aplicações da Derivada

1 - Um ponto P move-se ao longo do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ de tal modo que sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 5m/s. Qual a velocidade de y no instante em que $x = 10$m?

2 - Suponha que o raio r e a área $A = \pi r^2$ de um circulo sejam funções deriváveis de t. Escreva uma equação que relaciona a taxa de variação da área com a taxa de variação de r.

3 - Sejam x e y funções deriváveis de t e seja $s = \sqrt{x^2+y^2}$ a distância entre os pontos $(x, 0)$ e $(0, y)$ no plano xy.

a) Como $\dfrac{ds}{dt}$ se relaciona com $\dfrac{dx}{dt}$ se y é constante?

b) Como $\dfrac{ds}{dt}$ se relaciona com $\dfrac{dx}{dt}$ e $\dfrac{dy}{dt}$ se nem x nem y são constantes?

c) Como $\dfrac{dx}{dt}$ se relaciona com $\dfrac{dy}{dt}$ se s é constante?

4 - A área A de um triângulo, com lados de comprimento a e b formando um ângulo θ é dada por

$$A = \frac{1}{2}ab\ \mathrm{sen}\theta$$

a) Como $\dfrac{dA}{dt}$ se relaciona com $\dfrac{d\theta}{dt}$, se a e b são constantes?

b) Como $\dfrac{dA}{dt}$ se relaciona com $\dfrac{d\theta}{dt}$ e $\dfrac{da}{dt}$ se apenas b é constante?

c) Como $\dfrac{dA}{dt}$ se relaciona com $\dfrac{d\theta}{dt}$, $\dfrac{da}{dt}$ e $\dfrac{db}{dt}$ se nem a, nem b e nem θ são constantes?

5 - O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8cm/s e sua largura está aumentando a uma taxa de 3cm/s. Quando o comprimento for 20cm e a largura for 10cm quão rápido a área do retângulo está aumentando?

6 - Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de 6cm/s. A que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado for 16cm^2?

7 - Um tanque cilíndrico com raio de 5m está sendo cheio com água a uma taxa de 3m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?

8 - O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4mm/s. Quão rápido o volume está aumentando quando o diâmetro for 80mm?

9 - Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 30km/h e o outro viaja para o oeste a 72km/h. A qual taxa a distância entre os carros está aumentando duas horas depois?

10 - A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de 15cm/min enquanto a área do triângulo está aumentando a uma taxa de 2cm^2/min. A que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10cm e a área for 100cm^2?

11 - Uma partícula está se movimentando ao longo de uma hipérbole $xy = 8$. Quando atinge o ponto $(4, 2)$, a coordenada y está decrescendo a uma taxa de 3cm/s. Quão rápido a coordenada x do ponto está variando nesse momento?

12 - Dois lados de um triângulo têm 4m e 5m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de $0,06$rad/s. Encontre a taxa segundo a qual a área está crescendo quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for $\pi/3$.

13 - Um velocista corre numa pista circular com raio 100m numa velocidade constante 7m/s. O amigo do corredor está parado a uma distância de 200m do centro da pista. Quão rápido a distância entre os amigos está variando quando a distância entre eles é de 200m?

14 - O topo de uma escada desliza, por uma parede vertical a uma taxa de $0,15$m/s. No momento em que a base da escada está a 3m da parede, ela afasta-se da parede à velocidade de $0,2$m/s. Qual o comprimento da escada?

15 - Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de $1,5$m/s. Um holofote localizado no chão a 6m do caminho é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a 8m do ponto do caminho mais próximo da luz?

16 - Um homem começa a andar para o norte a $1,2$m/s a partir de um ponto P. Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a $1,6$m/s de um ponto 200m ao leste de P. A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 minutos após a mulher começar a andar?

17 - Está vazando água de um tanque em forma de um cone invertido a uma taxa de 10.000cm^3/min. Ao mesmo tempo, a água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6m de altura e diâmetro no topo de 4m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20cm^3/min quando a altura da água for 2m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque.

18 - Um balão está subindo verticalmente acima de uma estrada a uma velocidade constante de 1pé/s. quando ele está a 65pé acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de 17pé/s passa por baixo dele. A que taxa a distância entre a bicicleta e o balão aumentará 3 segundo depois?

19 - Um menino empina uma pipa a 300 pés de altura; o vento afasta a pipa horizontalmente em relação ao menino a uma velocidade de 25 pés/s. A que taxa ele deve soltar a linha, quando a pipa está a 500 pés de distância?

20 - Um avião voo horizontalmente a uma altitude de $2km$, a $800km/h$, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a $3km$ além da estação.

21 - Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

(a) Encontre, caso exista, os máximos e mínimos (local e absoluto) de f.

(b) Determine os valore máximos e mínimos de f em $[-2, 3]$. Em que pontos esses valores são atingidos?

22 - Determine os pontos de máximos e mínimos (local e global) das funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

(b) $f(x) = xe^{-2x}$

(c) $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

23 - Determine os extremos relativos, os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 19$

(b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x$

24 - Determine dois números positivos cuja a soma seja 4 e tal que a soma do cubo do menor com o quadrado do maior seja mínima.

25 - Qual é o paralelepípedo retangular de base quadrada e volume 8 m^3 que tem a menor área total?

26 - Uma caixa em forma de paralelepípedo deve ter comprimento igual ao dobro da largura. Se a soma da altura com a largura deve ser $48cm$, calcule seus valores para que o volume seja máximo.

27 - Quais devem ser as dimensões de uma pastagem retangular de 10.000 m^2 de área, feita à margem de um rio reto para que o gasto com a cerca seja o menor possível sabendo que não é necessário fazer cerca ao longo do rio?

28 - Utilizando 50 metros de cerca (reta) já existente, deseja-se cerca um retângulo de 10.000 metros quadrados de área. Quais devem ser as dimensões desse retângulo para minimizar a cerca a ser feita?

29 - Determinar a área da maior pastagem retangular que pode ser cercada fazendo 600 metros de cerca e utilizando 100 metros de cerca (reta) já existente.

30 - Suponha que a área total de um tambor cilíndrico sem tampa deve ser 3π m^2. Determine o raio da base e a altura do mesmo para que sua capacidade seja o maior possível. Qual é essa capacidade?

31 - Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

32 - Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

33 - Se 1.200 cm^2 de um material estiver disponível para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa. Encontre o maior volume possível para a caixa.

34 - Encontre o ponto sobre a reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo da origem.

35 - Encontre os pontos da elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

36 - Um fazendeiro quer cercar uma área de 15.000 m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize os custos da cerca?

37 - Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

38 - Você está preparando um pôster retangular para conter 50 pol^2 de material impresso, com margens superior e inferior de 4 pol cada e margens à direita e à esquerda de 2 pol cada. Que dimensões gerais minimizarão a quantidade de papel a ser utilizada?

39 - Você planeja fechar um canto do primeiro quadrante com um segmento de reta de 20 unidade de comprimento, que vai de $(a, 0)$ a $(0, b)$. Mostre que a área do triângulo determinada pelo segmento é máxima quando $a = b$.

40 - Que valor de a faz $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ ter:

$a)$ um mínimo local em $x = 2$?

$b)$ um ponto de inflexão quando $x = 1$?

41 - Quais valores de a e b fazem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ter

$a)$ um máximo local em $x = -1$ e um mínimo local em $x = 3$?

$b)$ um mínimo local em $x = 4$ e um ponto de inflexão em $x = 1$?

42 - Calcule os limites:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$

$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$

$d)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$

$e)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{3x}}$

$f)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{\ln(x)}}$

$g)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right)$

$h)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3 e^{-4x}$

$i)$ $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\ln(x)$

$j)$ $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^x$

$k)$ $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen}(x)}$

$l)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x}$

$m)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\ln(sec(x))}$

$n)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^{\sin(x)} - 1}{x}$

$o)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

$p)$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+2x)}{\ln x}$

$q)$ $\lim_{x\to +\infty} (\ln(2x) - \ln(x+1))$

$r)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x2^x}{2^x - 1}$

43 - Use a regra de L'Hopital para calcular os limites:

$a)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$

$b)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$

$c)$ $\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg}(2x)\operatorname{sen}(6x)$

$d)$ $\lim_{x\to +\infty} x\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$e)$ $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec}x - \operatorname{cotg}x)$

$f)$ $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}x - \dfrac{1}{x}\right)$

$g)$ $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

$h)$ $\lim_{x\to +\infty} (x - \ln x)$

$i)$ $\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$

$j)$ $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$

$k)$ $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

$l)$ $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

$m)$ $\lim_{x\to +\infty}\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

$n)$ $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg}(2x))^x$

$o)\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$p)\ \lim_{x\to0^+} (1+\mathrm{sen}(4x))^{\mathrm{cotg}x}$

$q)\ \lim_{x\to+0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\mathrm{sen}x}\right)$

$r)\ \lim_{x\to0^+} x^r \ln x$, com $r>0$

$s)\ \lim_{x\to\pi/2^-} (\cos x)^{\cos x}$

$t)\ \lim_{x\to+\infty} (e^x + x)^{1/x}$

44 - Esboce o gráfico.

$a)\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$b)\ f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$c)\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$d)\ f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

$e)\ f(x) = e^{-x^2}$

$f)\ f(x) = x^4 - 2x^2$

$g)\ f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}$

$h)\ f(x) = xe^{-3x}$

$i)\ f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$

$j)\ f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$k)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

GABARITO

01. $-\dfrac{100}{(101)^2}$m/s   02. $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi r\dfrac{dr}{dt}$

03. (a) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{dx}{dt}$ $b)$ $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{dy}{dt}$ $c)$ $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dt}$

04. $a)$ $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$ $b)$ $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}b\text{sen }\theta\dfrac{da}{dt} + \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

$c)$ $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}b\text{sen }\theta\dfrac{da}{dt} + \dfrac{1}{2}a\text{sen }\theta\dfrac{db}{dt} + \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

05. 140cm^2/s   06. 48cm^2/s   07. $\dfrac{3}{25\pi}$m/mim   08. 25.600 mm^3/s.   09. 78km/h

10. $-1,6$cm/mim   11. 6 cm/s   12. $0,3$m^2/s   13. $\dfrac{7}{4}\sqrt{15} \approx 6,78$ m/s   14. 5m

15. $0,09$ rad/mim   16. $\dfrac{8064}{\sqrt{8334400}} \approx 2,79$m/s   17. $\dfrac{800.000}{9}\pi + 10.000$cm^3/mim.

18. 11pés/s   19. 20pés/s   20. $\frac{800\sqrt{5}}{3}km/h$ 21. (a) 0 é ponto de máximo local e 2 é ponto de mínimo local.

(b) $f(-2) = -17$ e valor de mínimo de f em $[-2,3]$ e $f(0) = f(3) = 3$ é valor de máximo de f em $[-2,3]$.

22. (a) 1 é ponto de máximo local e -1 é ponto de mínimo local.

(b) 1/2 é ponto de máximo global.

(c) $\dfrac{\pi}{4}$ é ponto de máximo global e π é ponto de mínimo global.

(d) 0 é ponto de máximo local e $\dfrac{2}{3}$ é ponto de mínimo local.

23. (a) f cresce par $x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$ e f decresce para $x \in (-1,3)$.

Pontos críticos: -1 e 3. Máximo local: -1. Mínimo local: 3.

(b) f cresce par $x \in (-2,1) \cup (2,+\infty)$ e f decresce para $x \in (-\infty,-2) \cup (1,2)$.

Pontos críticos: -2, 1 e 2. Máximo local: 1. Mínimo local: -2 e 2.

24. $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{3}$. 25. cubo de aresta 2. 26. largura: 32, comprimento: 64 e altura: 16.

27. $50\sqrt{2}$ e $100\sqrt{2}$. 28. um quadrado de 100 m de lado. 29. 30.625 m^2.
30. 1, 1 e πm^3. 31. $(2,2)$ 32. r^2 330. 4.000cm^3 34. $\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$

35. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ 36. 150m e 100m

37. Um quadrado de lado $r\sqrt{2}$. 38. 9×18 pol 40. $a)a = 16$ $b)a = -1$
41. $a)a = -3$ e $b = -9$ $b)a = -3$ e $b = -24$.
42. (a) 2 (b) $\frac{99}{10}$ (c) $+\infty$ (d) $+\infty$ (e) 0 (f) e^2 (g) $+\infty$ (h) 0
(i) 0 (j) 1 (k) 1 (l) 1 $m)$ 2 $n)$ $\ln(3)$ $o)$ 2 $p)$ 1 $q)$ $\ln(2)$ $r)$ $\frac{1}{\ln(2)}$.

43. (a) 1/2 (b) 1 (c) 3 (d) 1 (e) 0 (f) 0 (g) 1/2 (h) ∞ (i) 1
(j) 1 (k) $1/e$ (l) e^{-2} (m) e^6 (n) 1 (o) 0 (p) e^4 (q) ∞ (r) 0 (s) 1
(t) e