

PET MATEMÁTICA-UFCG

Atividade Dirigida de Aprendizagem - Fórmula de Cardano-Tartaglia para equações cúbicas - Parte 1

Petianos: Agner da Silveira Alves e Ayala Fernando Campos Barbosa.

Tutor: Daniel Cordeiro de Moraes Filho.



Guerra dos cubos

"Essa fórmula é minha!" ; "Você me deu, agora é ciência!"

Imagem gerada, com a orientação dos autores, por IA (ChatGPT).

I. Um pouco da história da resolução de equações algébricas do terceiro grau

Os babilônios, por volta de 1700 a.C, já resolviam problemas que buscavam dois valores quaisquer tendo conhecimento da soma e do produto desses números, o que os levava a um pensamento bem semelhante ao pensamento algébrico de resolução de equações do segundo grau, mas não igual. Tempo depois, os gregos, devido ao fascínio com a geometria, desenvolveram métodos para lidar com raízes irracionais a partir de processos geométricos. Durante a Idade Média, matemáticos como Fibonacci (1170-1250) e Al-Khwārizmī (780-850) avançaram no desenvolvimento do que hoje conhecemos por álgebra, mas a solução para equações cúbicas permaneceu desconhecida. No século XV, o Frei Luca Pacioli (1445-1517), em sua obra *Summa de Aritmética e Geometria* (1494), afirmou que a resolução da equação do terceiro grau era impossível, o que, sem dúvidas, motivou futuras pesquisas. Por volta de 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, descobriu uma forma para resolver equações do tipo $x^3 + qx + p = 0$, mas não publicou sua descoberta. Ferro compartilhou o método apenas com seus alunos Antonio Maria Fiore (século XV - XVI)¹ e Annibale Della Nave (século XV - XVI)², que, mais tarde viria a ser seu genro.



Figura 1. Fiore desafiando Tartaglia.

Imagem gerada, com a orientação dos autores por IA (ChatGPT).

Girolamo Cardano (1501-1576), interessado na solução, convenceu Tartaglia a revelar o método em 1539, sob juramento de sigilo. Mais tarde, Cardano e seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565), descobriram que Ferro havia sido o verdadeiro inventor da fórmula, ao examinar manuscritos de Annibale Della Nave. Considerando que o juramento não se aplicava à descoberta original de Ferro, Cardano publicou a fórmula em *Ars Magna* (CARDANO, 1993).



Cardano convencendo Tartaglia de revelar a solução da equação do terceiro grau.

Imagem gerada, com a orientação dos autores, por IA (ChatGPT).

¹ Datas de nascimento e morte não foram encontradas.

² Datas de nascimento e morte não foram encontradas.



Tartaglia, em resposta à atitude de Cardano, escreve "Quesiti et Inventioni Diverse", onde ataca Cardano diretamente.

Imagem gerada, com a orientação dos autores, por IA (ChatGPT).

Tartaglia, indignado com a quebra do sigilo, publica os *Quesiti et Inventioni Diverse* (1546), onde narra sua perspectiva da história e ataca Cardano diretamente por sua publicação. Ferrari, defendendo seu mestre, respondeu a Tartaglia com panfletos, iniciando uma disputa pública que durou do início do ano 1547 até a metade do ano 1548. O conflito culminou em um duelo matemático entre Tartaglia e Ferrari em Milão, no qual, embora não tenha se definido um vencedor, as autoridades acadêmicas de Brescia julgaram o desempenho de Tartaglia insatisfatório e findaram seu contrato.

II. Encontre, você mesmo, a fórmula de Cardano-Tartaglia da solução de uma equação do terceiro grau

(1) Primeiramente, vamos considerar a forma mais geral da equação do terceiro grau, dada por

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (1)$$

onde $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_3 \neq 0$.

(1.1) Siga os seguintes passos para encontrar a fórmula de Cardano-Tartaglia:

(1.1.1) Convença que basta considerar equações do terceiro grau cujo **polinômio** envolvido é **mônico**, ou seja, equações do terceiro grau em que o coeficiente de x^3 é igual a 1:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (2)$$

onde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

(1.1.2) Os polinômios (1) e (2) são os mesmos?

(1.2) Dada a equação (2), verifique por meio da substituição $x = y - \frac{a}{3}$, que basta estudar e encontrar soluções de equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0, \quad (3)$$

onde $p, q \in \mathbb{R}$.

(1.2.1) Qual a potência da equação (2) que nos livramos com essa mudança de incógnita?

(1.2.2) O que ocorre se uma solução da equação (3) for $x = 0$? Responda usando um resultado do tipo “se, e somente se”.

(1.2.3) Convença de que, agora por diante, basta reduzir a busca por soluções da equação (3), procurando apenas soluções x não nulas.

(2) O artifício que Tartaglia e Cardano realizaram partiu da busca por uma solução do tipo $x = u + v \neq 0$, ou seja, seguindo o que eles fizeram, você encontrará soluções x , procurando u e v , tais que $x = u + v$ seja solução da equação (3).

(2.1) Sendo assim, faça a substituição $x = u + v$ na equação (3), para encontrar

$$[u^3 + v^3 + q] + [(3uv + p)(u + v)] = 0. \quad (4)$$

(2.2) Encontre os valores mais simples da soma $u^3 + v^3$ e do produto uv para que a igualdade da equação (4) seja satisfeita. Não complique!³

(2.3) Usando o item (2.2), encontre o valor de u^3v^3 .

(2.4) Note que, agora, temos u e v tais que são conhecidos a soma $u^3 + v^3$ e o produto u^3v^3 , então, escreva as expressões da soma e do produto de u^3 e de v^3 em função de p e de q .

³ Caso não consiga, consulte a dica no final do guia.

(2.5) Vê-se desde o Ensino Básico que quando se conhece a soma $x_1 + x_2 = A$ e o produto $x_1.x_2 = B$, por exemplo, de dois números quaisquer x_1 e x_2 , é possível escrever uma equação, na incógnita w , para qual esses dois números são raízes. Escreva essa equação.

(3) Usando os itens (2.2) e (2.4) prove, agora, que u^3 e v^3 são as raízes da seguinte equação do segundo grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (5)$$

(3.1) Resolva a equação do segundo grau (5), e encontre os valores de u^3 e v^3 , em função de p e de q . Não tenha medo de fazer esses cálculos, parece ter uma cara esquisita, mas é assim mesmo!

(3.2) Agora que temos os valores de u^3 e v^3 , encontre os valores de u e v .

(3.3) *Gran finale*: finalmente encontre a fórmula de Cardano-Tartaglia para as soluções de uma equação do terceiro grau, basta encontrar a soma:

$$x = u + v. \quad (6)$$

Dica histórica! Visualize a equação (4) como $0 + 0 = 0$

Eis a Solução Final: a Fórmula de Cardano-Tartaglia

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$



Imagem gerada, com a orientação dos autores, por IA (ChatGPT).

Referências

CARDANO, G. *Ars Magna: or the rules of algebra*. Nova Iorque: Dover Publication, INC, 1993.

LIMA, E. L. A equação do terceiro grau. 1987. Disponível em <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo01.pdf>. Acesso em: 21 de maio de 2025.

TARTAGLIA, N. *Quesiti et inventioni diverse*. Veneza: Venturino Ruffinelli, 1546.