Aplicações do Teorema de Bolzano-Weierstrass

Cecília Nunes Magalhães*
Unidade Acadêmica de Matemática
Universidade Federal de Campina Grande
Campina Grande, Brasil

Pammella Queiroz de Souza†
Unidade Acadêmica de Matemática
Universidade Federal de Campina Grande
Campina Grande, Brasil

Resumo

Em matemática, o Teorema de Bolzano-Weierstrass é um teorema fundamental na análise real. Esse teorema é extremamente útil em cálculo, topologia e outros ramos da matemática, pois fornece uma maneira eficaz de provar a existência de limites, derivadas, integrais, certos tipos de soluções e outros objetos importantes na matemática. Muito embora este resultado tenha uma relevante importância, sabemos que houve uma sólida e importante construção para chegar no atual reconhecimento deste resultado.

Em primeiro lugar, é sabido que há inúmeras diferenças entre o cálculo da época de Isaac Newton e Gottfried Leibniz e o cálculo que veio depois da época de Augustin-Louis Cauchy e Bernard Bolzano, e uma dessas diferenças recai no conceito de função. Por volta de 1700, o cálculo lidava com a noção de variáveis e pelos anos 1800 já se usava a ideia de função. A palavra função apareceu, pela primeira vez, em um artigo escrito por Leibniz em 1692, onde ele chamava de funções as quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva, tais como: coordenadas, tangentes, subtangentes, normas, raios de curvatura, etc. Todavia, foi juntamente com Johann Bernoulli que o conceito e a simbologia usados para representar funções ficaram estabelecidos.

Finalmente, em 1718, Bernoulli definiu o conceito formalmente pela primeira vez, e essa definição foi usada e padronizada por Leonhard Euler em sua obra *Introduction in Analysin Infinitorum* (1748) da seguinte maneira: "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica formada de qualquer modo por tal quantidade variável e por números ou quantidades constantes".

Visto que a ideia de função é essencial para os principais conceitos da análise matemática, o Teorema de Bolzano-Weierstrass entra neste contexto por ser um dos componentes-chaves da análise matemática. Deste modo, a aplicabilidade de tal teorema se dá tanto na matemática pura quanto na matemática aplicada.

Diante disso, sabe-se que a noção de continuidade é um dos pontos centrais da Topologia e tem diversas aplicações, tanto na Matemática, quanto em outras áreas da ciência. Intuitivamente, uma função é contínua num ponto de seu domínio quando seu gráfico não apresenta "salto" ou "interrupção" nesse ponto. De fato, essa ideia intuitiva precisa ser esclarecida com um certo rigor e as propriedades mais elementares da continuidade de uma função estudadas em detalhes. Daí, o Teorema de Bolzano-Weierstrass surge como uma ferramenta poderosa em diversos aspectos.

Esse trabalho, fruto de uma iniciação científica que está em andamento, tem o objetivo de investigar e apresentar Aplicações do Teorema de Bolzano-Weierstress, donde diz que dada uma sequência limitada, estando seus elementos confinados a um intervalo $[a, b]$, eles são forçados a se acumularem em um ou mais "lugares" desse intervalo.

Teorema 1. **(*Bolzano-Weierstress*)** Toda sequência limitada (a_n) possui uma subsequência convergente.

*e-mail: `cecilia.nunes@estudante.ufcg.edu.br`, Parcialmente financiada pelo MEC/FNDE/PET
†e-mail: `pammellaqueiroz@gmail.com`, Apoiada pela Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ), CNPq, Termo de Outorga n^o 3183/2021

Como consequência deste Teorema, enunciaremos aqui alguns resultados que serão úteis na prova das aplicações do Teorema de Bolzano-Weierstress.

Teorema 2. Seja f uma função contínua definida no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Então f atinge seu máximo e seu mínimo.

Teorema 3.(*Teorema do Valor Intermediário*) Seja f uma função contínua definida sobre um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ e $f(a) < f(b)$. Então, para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < r < f(b)$, existe um elemento $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = r \cdot r$, é considerado um valor intermediário.

Teorema 4. (*Teorema de Transporte de Intervalos*) Seja f uma função contínua definida no intervalo limitado e fechado $[a, b]$. Então o conjunto de imagens de f é o intervalo limitado e fechado

$$\left[\min_{x \in [a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x) \right].$$

Colorário 5. (*Soluções de Equações*) Seja f uma função contínua definida no intervalo limitado e fechado $[a, b]$ e $f(a)f(b) \leq 0$. Assim, a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $[a, b]$.

Apresentaremos agora algumas aplicações do Teorema 1 aplicado a funções contínuas sobre o intervalo $[a, b]$.

Aplicação 1. Seja $h : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Então, a equação $x = h(x)$ tem, pelo menos, uma solução $\widehat{x}$ em $[0, 1]$, com $\widehat{x}$ sendo um ponto fixo de h. De modo mais geral, seja $g : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua e sobrejetiva. Então, a equação $g(x) = h(x)$ tem, pelo menos, uma solução em $[0, 1]$.

Aplicação 2.

i) Seja I um intervalo e $f : I \to J$ uma função contínua e injetiva. Então f é estritamente monótona.

ii) Seja I um intervalo e $f : I \to J$ seja uma função contínua e bijetiva. Assim, sua função inversa $f^{-1} : J \to I$ é contínua.

Palavras-chave: Teorema de Bolzano-Weierstress; Aplicações; Funções.

Referências

[1] STUBBE, J. Analysis I for Engineers. Suíça: EPFL SB MATHGEOM, 2015.

[2] LIMA, E. L. Curso de Análise; v.1. 13 ed. Rio de Janeiro: Associação Insituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

[3] FIGUEIREDO, D. G. Análise I. 2.ed. Riod de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1996.

[4] BARONI, R. L. S.; GARCIA, S. C. O. Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.