Axiomas de separação em grupos topológicos

Jonas Barros Lima de Medeiros*
Unidade Acadêmica de Matemátia
Universidade Federal de Campina Grande
Campina Grande-PB, Brasil

Antônio Pereira Brandão Júnior†
Unidade Acadêmica de Matemática
Universidade Federal de Campina Grande
Campina Grande-PB, Brasil

Resumo

Um espaço topológico é um par (X, τ), onde X é um conjunto e τ é uma coleção de subconjuntos de X, que contém X e o vazio, e é fechado para união qualquer e interseção finita. Essa coleção é também conhecida como a família de abertos de X, e os complementares desses conjuntos são chamados de fechados. Ademais, sendo X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função, dizemos que f é contínua quando a pré-imagem de um subconjunto aberto $B \subset Y$ por f é um aberto de X. Já um grupo topológico é um par (G, τ), onde G é um grupo e τ uma topologia tal que a inversão e a operação de G são contínuas.

Para espaços topológicos, podemos considerar os *Axiomas de Separação*:

- T_0 : para cada par de pontos distintos x e y pertencentes ao espaço, existe um conjunto aberto U contendo x, mas não contendo y, ou vice-versa;
- T_1 : para cada par de pontos distintos x e y pertencentes ao espaço, existem conjuntos abertos U e V tais que U contém x, mas não contém y, e V contém y, mas não contém x;
- T_2 : *(Axioma de Hausdorff)* para cada par de pontos distintos x e y pertencentes ao espaço, existem conjuntos abertos U e V disjuntos, tais que $x \in U$ e $y \in V$;
- T_3: é T_1 e para cada ponto x do espaço e para cada conjunto fechado F que não contém x, existem conjuntos abertos U e V disjuntos, tais que $x \in U$ e $F \subset V$;
- T_4: é T_1 e para cada par de conjuntos fechados disjuntos A e B do espaço, existem conjuntos abertos U e V disjuntos, tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Dos Axiomas supracitados, destacamos o Axioma T_2 (de Hausdorff). Sob esta hipótese garante-se, por exemplo, a *unicidade de limite de sequências convergentes*. Vale ressaltar que é sempre verdade:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Todavia, é possível encontrar contraexemplos de espaços topológicos para os quais as recíprocas não são verdadeiras, mostrando que em geral as implicações contrárias não valem. Por outro lado, para grupos topológicos temos as equivalências:

$$T_0 \iff T_1 \iff T_2 \iff T_3,$$

o que exibiremos no presente trabalho.

Palavras-chave: Axiomas de Separação; Topologia; Grupos; Grupos topológicos; Espaços topológicos.

Referências

[1] J. Dugundji, *Topology*, Ally and Bacon, Inc., Boston, 1996.

[2] D. Dikranjan, *Introduction to Topological Groups*, Notas, Madri, 2007.

*e-mail: `jonas.lima@estudante.ufcg.edu.br`
†e-mail: `brandao@mat.ufcg.edu.br`