O TEOREMA DOS ZEROS DE HILBERT

Lívia Tito Ribeiro[1] - livia.tito@estudante.ufcg.edu.br
Thyago Santos de Souza[1] - thyago@mat.ufcg.edu.br

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Neste estudo, exploramos o Teorema dos Zeros de Hilbert e sua aplicação na Geometria Algébrica. Realizamos uma revisão abrangente das principais definições e resultados teóricos que formam a base para a compreensão desse teorema e sua relevância na solução de problemas geométricos. Destacamos a importância da teoria de ideais, variedades algébricas, corpos algebricamente fechados e espaços afins. Além disso, abordamos teoremas importantes, como o Teorema da Base de Hilbert, que se mostrou essencial para a demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert, nosso objetivo principal. Este trabalho, conduzido como parte de um trabalho de iniciação científica, representa uma contribuição significativa para a formação acadêmica da autora discente e os resultados obtidos ampliaram sua compreensão teórica e prática do Teorema dos Zeros de Hilbert, abrindo caminho para futuras pesquisas e avanços na área. Em resumo, este estudo destaca a importância de estabelecer uma base teórica sólida para a abordagem de teoremas importantes, como o Teorema dos Zeros de Hilbert, e demonstra a relevância desse teorema na Geometria Algébrica.*

Palavras-chave*: Teorema dos Zeros de Hilbert; Álgebra Comutativa; Introdução à Geometria Algébrica*

1. Introdução

O Teorema dos Zeros de Hilbert, ou Nullstellensatz Hilberts, como é conhecido em alemão, estabelece uma conexão entre variedades algébricas e ideais em anéis de polinômios sobre corpos algebricamente fechados. É um resultado de destaque na Geometria Algébrica, revelando vínculos entre a álgebra e a geometria.

O objetivo central deste trabalho é apresentar uma das versões desse teorema, assim como sua demonstração, e destacar uma aplicação relevante. Para essa análise, tomamos como base principalmente as referências (BORGES; TENGAN, 2015), (ATIYAH; MACDONALD, 1969) e (FULTON, 2008).

Iniciaremos apresentando as principais definições e resultados fundamentais necessários para a compreensão do assunto deste trabalho. Isso inclui a teoria de ideais em anéis de polinômios e variedades algébricas, que são conceitos importantes para o entendimento deste Teorema.

Na sequência, discutiremos a importância do Teorema da Base de Hilbert como um componente essencial na demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert, evidenciando seu papel na construção de argumentos matemáticos coerentes.

Além disso, exploraremos o Teorema dos Zeros de Hilbert examinando suas implicações na Geometria Algébrica e destacando sua relevância na conexão entre variedades algébricas e ideais de polinômios.

Finalmente, apresentaremos uma aplicação prática do Teorema dos Zeros de Hilbert no contexto da Geometria Algébrica, a correspondência entre variedades algébricas e ideais radicais.

2. Metodologia

Este trabalho decorre de uma iniciação científica e tem como principal objetivo a demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert e a apresentação de uma aplicação na Geometria Algébrica. A metodologia adotada é composta pelas seguintes etapas:

Começamos com uma revisão bibliográfica abrangente, que engloba desde os conceitos básicos, como tipos e propriedades de ideais de polinômios sobre anéis comutativos, definição de variedades algébricas afins e ideais de definição, até resultados mais complexos, como o Teorema da Base de Hilbert. Essa revisão fornece uma base sólida para a compreensão da demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert, permitindo uma análise mais clara do resultado.

Em seguida, avançamos para a demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert, seguindo uma abordagem detalhada. Esta etapa é essencial para a compreensão completa desse teorema. Além da demonstração, exploramos uma aplicação deste teorema na Geometria Algébrica. Demonstrando, assim, como esse teorema desempenha um papel importante na conexão entre álgebra e geometria.

A metodologia é concluída com a síntese das conclusões e implicações do trabalho, destacando a relevância teórica e prática do Teorema dos Zeros de Hilbert e sua aplicação. Além disso, todas as fontes consultadas ao longo da pesquisa serão devidamente referenciadas, garantindo a integridade do trabalho.

3. Resultado e discussão

Nesta seção, destacamos as principais definições e resultados estudados durante a realização do trabalho. Esses conceitos são fundamentais para alcançar o objetivo da demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert e para uma melhor compreensão da aplicação deste teorema na Geometria Algébrica.

Dessa forma, enfatizamos a importância das definições e resultados apresentados a seguir, pois eles constituem a base teórica essencial para a consecução de nossos objetivos neste estudo.

Definição 1 (Corpo algebricamente fechado)**.** Um corpo k é considerado corpo algebricamente fechado se, para todo polinômio não constante $f(x) \in k[x]$, existe um elemento $a \in k$ tal que $f(a) = 0$.

Definição 2 (Espaço Afim)**.** Seja k um corpo. O espaço afim n-dimensional (sobre k) é definido por

$$\mathbb{A}_k^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in k, i = 1, \dots n\}$$

Simplesmente, $\mathbb{A}_k^n$ é o conjunto $k^n = k \times k \times \cdots \times k, n$ vezes (produto cartesiano, considerado sem estrutura de espaço vetorial).

Definição 3 (Variedade Algebrica Afim)**.** Uma variedade algébrica afim X definida por um ideal $I \subsetneq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é o conjunto

$$X = V(I) = \{p \text{ em } A_k^n \mid f(p) = 0, \text{ para todo } f \text{ em } I\}.$$

Definição 4 (Ideal de definição)**.** O ideal de definição da variedade algébrica afim X, é denotado por $\mathfrak{I}(X)$. Este ideal é o conjunto de todos os polinômios $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tais que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para todo ponto $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$.

Teorema 1 (Teorema da base de Hilbert)**.** Seja A um anel noetheriano. Então, o anel de polinômios $A[x]$ é noetheriano.

Lema 1 (Lema de Zariski)**.** Seja $k \subseteq L$ uma extensão de corpos tal que L é finitamente gerado como k-álgebra, ou seja, existem $a_1, \dots, a_n \in L$ satisfazendo $L = k[a_1, \dots, a_n]$. Então $k \subseteq L$ é algébrica.

Proposição 1. Seja k corpo algebricamente fechado. Todo ideal maximal $\mathfrak{M} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ é da forma

$$\mathfrak{M} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n),$$

para certos $a_1, \dots, a_n \in k$.

Teorema 2. Se k é um corpo algebricamente fechado e se $I \subsetneq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um ideal próprio, então $V(I) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja $I \subsetneq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ um ideal próprio, então existe $\mathfrak{M} \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ maximal tal que $I \subseteq \mathfrak{M}$. Logo $V(\mathfrak{M}) \subseteq V(I)$. Pela proposição 1, existem $a_1, \dots, a_n \in k$ tais que $\mathfrak{M} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Portanto,

$$\begin{aligned} V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) &\subseteq V(I) \\ \Rightarrow \{p\} &\subseteq V(I), \end{aligned}$$

com $p = (a_1, \dots, a_n)$. Portanto, $V(I) \neq \emptyset$ ■

Teorema dos Zeros de Hilbert (Nullstellensatz). Seja k um corpo algebricamente fechado e seja $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Então

$$\mathfrak{I}(V(I)) = \sqrt{I}$$

Demonstração. Seja $h \in \sqrt{I}$, então existe $m >> 0$ tal que $h^m \in I$. Seja $p \in V(I)$ arbitrário. Logo,

$$\begin{aligned} (h^m)(p) &= 0 \\ \Rightarrow (h(p))^m &= 0 \\ \Rightarrow h(p) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $h \in \mathfrak{I}(V(I))$.

Reciprocamente, tome $g \in \mathfrak{I}(V(I))$. Pelo Teorema 1 podemos escrever geradores $I = (f_1, \ldots, f_r) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$. Agora, considere o ideal

$$J = (f_1, \ldots, f_r, tg - 1) \subset k[x_1, \ldots, x_n, t]$$

onde t é uma indeterminada sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$. Considere também a variedade correspondente

$$V(J) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}.$$

Note que os polinômios $f_1, \ldots, f_r$ e $tg - 1$ não têm zeros em comum em $\mathbb{A}_k^{n+1}$ e, pelo Teorema 2, podemos escrever

$$1 = \sum_{i=1}^{r} H_i f_i + G(tg - 1),$$

com $H_i, G \in k[x_1, \ldots, x_n, t]$. Aplicando um homomorfismo de anéis adequado, obtemos a igualdade

$$1 = \sum_{i=1}^{r} H_i \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{g} \right) f_i + G \left(\frac{1}{g} g - 1 \right).$$

Multiplicando por uma potência apropriada de g, obtemos

$$g^s = \sum_{i=1}^{r} L_i f_i,$$

com $L_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Portanto, $g \in \sqrt{I}$. ■

Corolário 1. Tem-se a seguinte bijeção

$$\{\text{Variedades algébricas em } \mathbb{A}_k^n\} \longleftrightarrow \{\text{Ideais radicais em } k[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Em resumo, os resultados estudados representam um avanço significativo na compreensão e aplicação do Teorema dos Zeros de Hilbert na Geometria Algébrica. Essas descobertas não apenas enriquecem nosso conhecimento teórico, mas também fornecem uma fundamentação consistente para abordar problemas geométricos.

4. Conclusões

Neste estudo, demonstramos o Teorema dos Zeros de Hilbert e uma de suas aplicações na Geometria Algébrica. O trabalho abrangeu uma revisão das principais definições e resultados teóricos que constituiram a base essencial para a compreensão desse teorema e de sua relevância na resolução de problemas geométricos.

Em particular, destacamos a importância da base teórica nos estudos iniciais como ideais, variedades algébricas, corpos algebricamente fechados e espaços afins. Esses conceitos desempenharam um papel muito importante na análise do Teorema dos Zeros de Hilbert, permitindo uma boa compreensão de suas implicações na Geometria Algébrica.

Esse trabalho foi conduzido no contexto de uma iniciação científica e resultou em uma contribuição significativa para formação acadêmica da discente. Os resultados obtidos ampliam sua compreensão teórica e prática desse teorema, abrindo oportunidades para futuras pesquisas na área.

Referências

ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1969. Citado na página 1.

BORGES, H.; TENGAN, E. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Citado na página 1.

FULTON, W. *Algebraic Curves*: An introduction to algebraic geometry. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 2008. Citado na página 1.