Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas Aplicações

Thiago Ferreira da Cruz[1] **- thiagofc781@gmail.com**
Romildo Nascimento de Lima[2] **- romildo@mat.ufcg.br**

[1]UFCG/CCT/UAMAT/ Bolsista PET-Matemática-UFCG/FNDE

Resumo: *A Topologia tem um papel extremamente relevante na ligação e interação com todas as áreas da Matemática, em especial, com a Análise. Um dos grandes resultados vistos na nesta área consiste no Teorema do Ponto Fixo de Banach. Traremos neste trabalho, algumas aplicações deste Teorema para demostrar existência e unicidade de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Integrais, além de demonstrar o Teorema da Função Implícita. Para realização deste estudo foram feitas pesquisas bibliográficas e leituras em livros textos. Os conhecimentos de tais pesquisas são consolidados através de seminários realizados semanalmente. Os resultados aqui demonstrados são possíveis quando trabalhamos com contrações em espaços métricos completos, uma vez que, o Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante a existência de um único ponto fixo para tal contração. As principais referências utilizadas foram (HONIG, 2011),(LIMA, 2009), (LIMA, 2005) e (SCARDUA, 2015).*
Palavras-chave: *Ponto Fixo; Aplicações; Existência e unicidade de solução.*

1. Introdução

Dentro da Matemática, a Topologia tem um papel extremamente relevante na ligação e interação com todas as áreas da Matemática, tratando-se de uma ferramenta indispensável ao estudo de seus mais diversos ramos. Neste trabalho, estudamos uma aplicação na Análise Real, especificamente, o famoso Teorema do Ponto Fixo de Banach. Iremos apresentar algumas aplicações envolvendo este resultado, como o Teorema de Picard, existência e unicidade de soluções de Equações Integrais de Fredholm e o Teorema da Função implícita. Para realização deste trabalho foram necessários estudos sobre: espaços métricos, contrações, sequências, função lipschitziana, ponto fixo, espaços métricos completos etc.

2. Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido a partir do estudo realizado na Iniciação Científica, ainda em andamento, que é uma das atividades do PET-Matemática-UFCG, sendo desenvolvida através de seminários semanais expostos pelo aluno em reuniões com o professor orientador. Nestes seminários, orientador e orientando debatem sobre um assunto previamente determinado. Para estudo dos temas propostos na atividade foram feitas leituras de livros textos e revisão bibliográficas.

3. Resultado e discussão

Teorema 1. ***(Teorema do Ponto Fixo de Banach)*** Toda contração $f : M \to M$, de um espaço métrico completo M, possui um único ponto fixo. Dado qualquer ponto $x_0 \in M$, a sequência $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$, $\ldots$, $x_n = f^n(x_0)$, $\ldots$ converge para o ponto fixo de f.

Demonstração. Tomando arbitrariamente $x_0 \in M$ e pondo $x_n = f(f^{n-1}(x_0))$. Mostremos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Por hipótese, f é uma contração, logo para quaisquer $x, y \in M$ temos

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y),$$

com $0 < k < 1$. Então, dados $x_1, x_2 \in M$

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1) \leq k \cdot d(x_0, x_1) \quad \Rightarrow \quad d(x_1, x_2) \leq k \cdot d(x_0, x_1).$$

Continuando o processo sucessivamente e utilizando indução, chegamos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Da desigualdade triangular temos,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

Logo, temos a seguinte desigualdade

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq (k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{n+p-1}) \cdot d(x_0, x_1)$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) \leq k^n \cdot (1 + k + k^2 + \ldots + k^{p-1}) \cdot d(x_0, x_1).$$

Note que $(1 + k + k^2 + \ldots + k^{p-1})$ é uma série geométrica, com soma parcial $\dfrac{1-k^p}{1-k}$, assim

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k}\right) \cdot d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1)$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1)$$

Quando $n \to \infty$, tendo em vista que $0 < k < 1$, temos que k^n tende a zero, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$$

Assim, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Sendo M completo, tem-se que toda sequência de Cauchy é convergente, ou seja, existe $x \in M$ tal que $x = \lim x_n$. Ainda mais,

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$$

$$\Rightarrow f(x) = x,$$

isto é, x é um ponto fixo de f.

Basta provarmos a unicidade. Ora, suponha que existem $x, y \in M$, com $x \neq y$, tais que $f(x) = x$ e $f(y) = y$ então

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) < d(x, y),$$

um absurdo. Portanto, existe um único ponto fixo.

■

Como consequência do teorema anterior, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.2. Seja $T : X \to X$ tal que, para algum m, a iterada T^m é uma contração. Então T tem um e um só ponto fixo.

Teorema 2. ***(Teorema de Picard)*** Seja f contínua e lipschtziana com relação à segunda variável em $I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em $I_a \times B_b$, existe uma única solução de

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

em I_α, onde $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

Demonstração. Se f é lipschitziana na segunda variável, então existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq K|(z_1 - z_2)|.$$

Considere o espaço métrico completo $E = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$. Seja $u \in E$, defina $Tu : E \to E$ por

$$(Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

Note que, Tu é contínua, pois é diferenciável. Ademais, $T(E) \subset E$. De fato, para todo $t \in I_\alpha$ tem-se

$$|(Tu)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s))| \, ds \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Logo, $Tu \in E$. Agora, observe que dados $u, v \in E, t \in I_\alpha$, provemos que

$$|(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \leq \frac{K^m |t - t_0|^m}{m!} \|u - v\|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Para $m = 1$ é válido pois

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, v(s)| \, ds \leq K \int_{t_0}^{t} |u(s) - v(s)| \, ds \leq K|t - t_0| \cdot \|u - v\|.$$

Suponha que o resultado é válido para um determinado m, isto é,

$$|(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \leq \frac{K^m |t - t_0|^m}{m!} \|u - v\|,$$

provemos que vale para $m + 1$.

Com efeito,

$$|(T^{m+1} u)(t) - (T^{m+1} v)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, T^m u(s)) - f(s, T^m v(s))| \, ds \leq K \int_{t_0}^{t} |(T^m u)(s) - (T^m v)(s)| \, ds$$

por hipótese de indução, segue

$$|(T^{m+1} u)(t) - (T^{m+1} v)(t)| \leq \frac{K^{m+1}}{m!} \|u - v\| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^m \, ds = \frac{K^{m+1} |t - t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \|u - v\|.$$

Portanto, o resultado é válido para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Logo, podemos concluir que

$$\|(T^m u) - (T^m v)\| \leq \frac{K^m \alpha^m}{m!} \|u - v\|,$$

como $\dfrac{K^m \alpha^m}{m!} \to 0$, pois o crescimento fatorial é maior que o exponencial, assim, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que T^m será uma contração, logo o resultado segue do Corolário 1.1. Temos que T terá um único ponto fixo que é solução do P.V.I. inicial.

■

Teorema 3. ***(Equação Integral de Fredholm)*** Consideremos a equação integral, conhecida como equação integral de Fredholm, da seguinte forma

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_{a}^{b} k(t, s) y(s) \, ds$$

onde $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\|k\| \leq M$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b - a)}$, dada $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ existe uma e só uma $u \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, que é uma solução da equação integral.

Demonstração. Tomemos $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ que é um espaço métrico completo. Seja $T : E \to E$ tal que

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_{a}^{b} k(t, s) x(s) \, ds.$$

onde $t \in [a, b]$. Mostremos que T é uma contração.

De fato, dados $u, v \in E$ temos

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| = \left| \lambda \int_a^b k(t,s)[u(s) - v(s)]\, ds \right|.$$

Pela propriedade de norma segue

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| &\leq |\lambda| \left| \int_a^b k(t,s)[u(s) - v(s)]\, ds \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |k(t,s)[u(s) - v(s)]|\, ds \\ &\leq |\lambda| \int_a^b \|k\| \cdot |u(s) - v(s)|\, ds \end{aligned}$$

Como $\|k\| \leq M$ e $|u(s) - v(s)| \leq \|u - v\|$ para todo $s \in [a,b]$ temos

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| &\leq |\lambda| \int_a^b M\|u - v\|\, ds \\ &= |\lambda| M \|u - v\| \int_a^b ds \\ &= |\lambda| M \|u - v\|(b - a). \end{aligned}$$

Por hipótese, temos $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, isto é, $0 < c = |\lambda| M(b-a) < 1$, temos

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq c||u - v||.$$

Por definição de supremo, temos

$$\|Tu - Tv\| \leq c\|u - v\|.$$

com $0 < c < 1$, ou seja, T é uma contração.

Logo, pelo Teorema do Ponto fixo de Banach, existe uma e só uma função $u \in E$ tal que

$$(Tu)(t) = u(t),$$

isto é,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)u(s)\, ds.$$

■

Teorema 4. ***(Teorema da Função Implícita)*** Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em relação à segunda variável. Suponhamos que existam constantes reais m, M tais que $0 < m \leq f'_y(x,y) \leq M$, para qualquer $(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$. Então existe uma e uma só função $u \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ tal que $f(x, u(x)) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração. Seja $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ com a distância usual. Para $u \in E$, seja Tu definida por

$$(Tu)(x) = u(x) - \frac{1}{M} f(x, u(x)).$$

Note que $Tu \in E$ pois é a soma de funções contínuas. Ademais, se $u, v \in E$ e $x \in [a,b]$ temos

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = \left| u(x) - v(x) - \frac{1}{M}[f(x, u(x)) - f(x, v(x))] \right|$$

Pelo Teorema do valor médio, sendo f contínua e derivável na segunda varável, então existe $c \in [u(x), v(x)]$ tal que

$$f(x, u(x)) - f(x, v(x)) = (u(x) - v(x)) \cdot f'_y(x, c).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \left| u(x) - v(x) - \frac{1}{M}[u(x) - v(x)] f'_y(x, c) \right| \\ &= \left| [u(x) - v(x)] \cdot \left(1 - \frac{f'_y(x, c)}{M} \right) \right|. \end{aligned}$$

Por hipótese, temos $0 < m \leq f'_y(x, y) \leq M$, assim

$$0 \leq 1 - \frac{f'_y(x, c)}{M} \leq 1 - \frac{m}{M} < 1.$$

Daí, segue

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \leq |u(x) - v(x)| \left(1 - \frac{m}{M} \right) \leq \left(1 - \frac{m}{M} \right) \|u - v\|.$$

E, portanto,

$$\|Tu - Tv\| \leq \left(1 - \frac{m}{M} \right) \|u - v\|.$$

Concluímos que T é uma contração, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma e só uma u tal que $(Tu)(x) = u(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} (Tu)(x) &= u(x) - \frac{1}{M} f(x, u(x)) \\ u(x) &= u(x) - \frac{1}{M} f(x, u(x)) \\ f(x, u(x)) &= 0. \end{aligned}$$

■

4. Conclusões

Apresentamos nesse texto, uma demonstração do Teorema do Ponto Fixo, além disso, apresentamos 3 aplicações desse teorema. Devido a importância, bem conhecida, das aplicações apresentadas fica provada a importância do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Esperamos que após o estudo desse resumo, o leitor possa avançar nos estudas da Matemática, em especial, para aqueles interessados no estudo das Equações Diferenciais.

Referências

HONIG, S. C. *Aplicações de Topologia à Análise*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. Citado na página 1.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. Citado na página 1.

LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. Citado na página 1.

SCARDUA, B. *Equações Ordinárias e Aplicações*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015. 282 p. Citado na página 1.