Unidade Acadêmica de Matemática

Matemática e Estatística

Uma Construção Axiomática do Conjunto dos Números Naturais

Alunos:
Glêison Correia
Juan Pablo
Matheus Amorim
Pedro Vítor

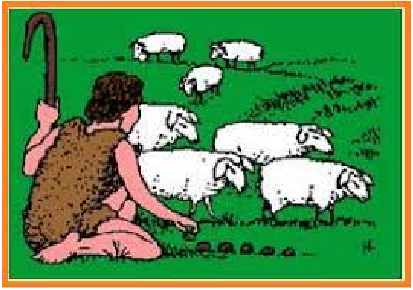
7 de julho de 2021

Números Naturais

Números Naturais

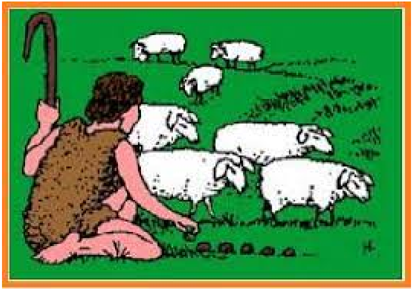
A ideia de número número natural sempre esteve associado à ideia de quantidade e à necessidade de contagem.

A ideia de número número natural sempre esteve associado à ideia de quantidade e à necessidade de contagem.



Números Naturais

A ideia de número número natural sempre esteve associado à ideia de quantidade e à necessidade de contagem.



O matemático alemão Leopold Kronecker disse certa vez que Deus fez os números naturais, e o resto é obra dos homens (MILIES; COELHO, 1998, p.178)

Quem foi Giuseppe Peano?

Quem foi Giuseppe Peano?

- Logicista e matemático italiano, nasceu em 27 de Agosto de 1858 em Spinetta, e faleceu em Turim em 20 de Abril de 1932.

Quem foi Giuseppe Peano?

- Logicista e matemático italiano, nasceu em 27 de Agosto de 1858 em Spinetta, e faleceu em Turim em 20 de Abril de 1932.
- Da sua vasta obra científica, uma grande parte foi dedicada à matemática e à lógica, sendo a restante parte consagrada à filosofia e à construção da interlíngua.

Quem foi Giuseppe Peano?

- Logicista e matemático italiano, nasceu em 27 de Agosto de 1858 em Spinetta, e faleceu em Turim em 20 de Abril de 1932.
- Da sua vasta obra científica, uma grande parte foi dedicada à matemática e à lógica, sendo a restante parte consagrada à filosofia e à construção da interlíngua.
- A obra "Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita"de 1889.

- Segundo Brandt (2013, p.13), Peano não define os números naturais admitindo sua existência, ele exibe algumas propriedades que eles possuem (axiomas) e constrói sua teoria a partir delas embasado no fato de que o conjunto dos números naturais pode ser ordenado.

Pequena revisão sobre função

Pequena revisão sobre função

Definição

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chamamos de função de A em B a relação f definida a partir de A que relaciona cada elemento x do conjunto A a um único elemento $f(x)$ do conjunto B

Pequena revisão sobre função

Definição

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chamamos de função de A em B a relação f definida a partir de A que relaciona cada elemento x do conjunto A a um único elemento $f(x)$ do conjunto B

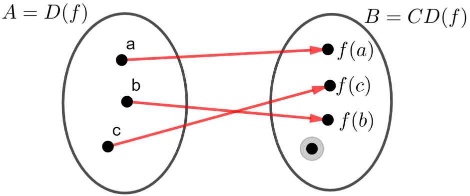
$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

Pequena revisão sobre função

Definição

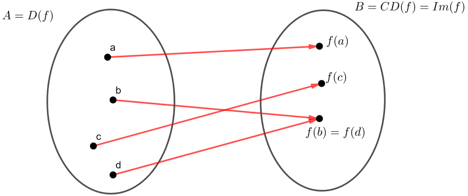
Dados dois conjuntos A e B não vazios, chamamos de função de A em B a relação f definida a partir de A que relaciona cada elemento x do conjunto A a um único elemento $f(x)$ do conjunto B

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

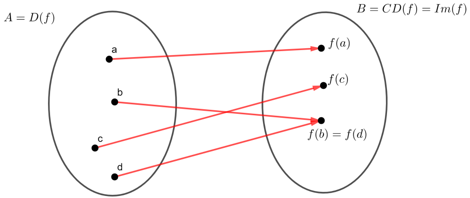


Quando a imagem da função f é exatamente o contradomínio, dizemos que f é sobrejetora.

Quando a imagem da função f é exatamente o contradomínio, dizemos que f é sobrejetora.

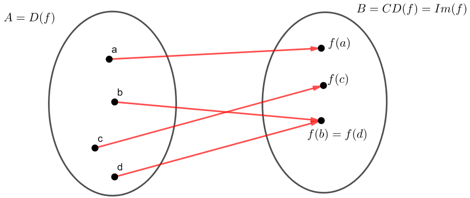


Quando a imagem da função f é exatamente o contradomínio, dizemos que f é sobrejetora.

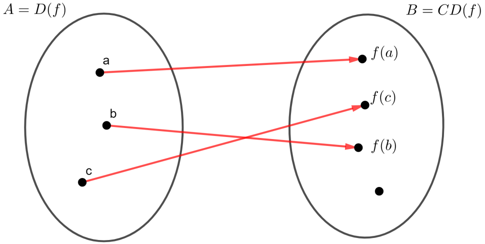


Se valer a seguinte afirmação $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, quaisquer que seja x e y elementos de A, dizemos que f é injetora

Quando a imagem da função f é exatamente o contradomínio, dizemos que f é sobrejetora.

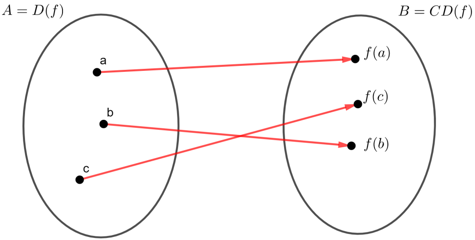


Se valer a seguinte afirmação $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, quaisquer que seja x e y elementos de A, dizemos que f é injetora



Quando uma função é injetora e sobrejetora, dizemos que f é bijetora.

Quando uma função é injetora e sobrejetora, dizemos que f é bijetora.



Sucessor de um número natural

Sucessor de um número natural

"O sucessor de um número natural é obtido somando-se 1 a esse número." (Bianchini, 2018)

O sucessor de 4 é 5, pois $4 + 1 = 5$.

0

$$0 \longrightarrow 1$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow \ldots$$

Axiomas

Axiomas

Existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ verificando:

Axiomas

Existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ verificando:

Axiomas

Existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ verificando:

A_1 s é injetora;

Axiomas

Existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ verificando:

A_1 s é injetora;

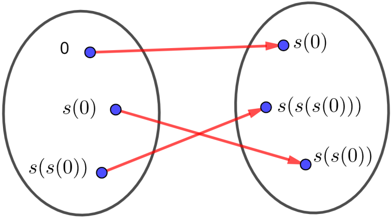
A_2 Existe um elemento em $\mathbb{N}$, que denotaremos por 0, em que não está na imagem de s, isto é, $0 \notin Im(s)$.

Axiomas

Existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ verificando:

A_1 s é injetora;

A_2 Existe um elemento em $\mathbb{N}$, que denotaremos por 0, em que não está na imagem de s, isto é, $0 \notin Im(s)$.



A_3 Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfaz (i) e (ii) abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

A_3 Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfaz (i) e (ii) abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

(i) $0 \in X$;

A_3 Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfaz (i) e (ii) abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

(i) $0 \in X$;

(ii) Se k $\in X$, então $s(k) \in X$

A_3 Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfaz (i) e (ii) abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

(i) $0 \in X$;

(ii) Se k $\in X$, então $s(k) \in X$

- $\mathbb{N}$ é chamado de *Conjunto de Números Naturais*.

A_3 Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfaz (i) e (ii) abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

(i) $0 \in X$;

(ii) Se k $\in X$, então $s(k) \in X$

- $\mathbb{N}$ é chamado de *Conjunto de Números Naturais*.
- Pelo axioma A_2 podemos concluir que $\mathbb{N} \neq \varnothing$.

A_3 Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfaz (i) e (ii) abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

(i) $0 \in X$;

(ii) Se k $\in X$, então $s(k) \in X$

- $\mathbb{N}$ é chamado de *Conjunto de Números Naturais*.
- Pelo axioma A_2 podemos concluir que $\mathbb{N} \neq \emptyset$.
- Como $s(0) \neq 0$, então $\mathbb{N}$ contém pelo menos dois elementos: 0 e $s(0)$

A_3 Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfaz (i) e (ii) abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

(i) $0 \in X$;

(ii) Se k $\in X$, então $s(k) \in X$

- $\mathbb{N}$ é chamado de *Conjunto de Números Naturais*.
- Pelo axioma A_2 podemos concluir que $\mathbb{N} \neq \varnothing$.
- Como $s(0) \neq 0$, então $\mathbb{N}$ contém pelo menos dois elementos: 0 e $s(0)$
- Por s ser uma função injetora temos que $s(0) \neq s(s(0))$, e por A_2, $s(s(0)) \neq 0$, então acrescentamos mais um elemento em $\mathbb{N}$.

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO: Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n e suponhamos que:

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO: Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n e suponhamos que:

(a) $P(0)$ é verdadeira.

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO: Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n e suponhamos que:

(a) $P(0)$ é verdadeira.

(b) $P(k)$ ser verdadeira implica $P(k+1)$ ser verdadeira, em que k é um número natural.

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO: Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n e suponhamos que:

(a) $P(0)$ é verdadeira.

(b) $P(k)$ ser verdadeira implica $P(k+1)$ ser verdadeira, em que k é um número natural.

Então $P(n)$ é verdadeiro para todo número natural n.

Teorema 1.

Se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é a função sucessor, então, tem-se:*

Teorema 1.

Se $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função sucessor, então, tem-se:

(i) $s(n) \neq n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(nenhum número natural é sucessor de si mesmo);*

Teorema 1.

Se $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função sucessor, então, tem-se:

(i) $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(nenhum número natural é sucessor de si mesmo);*

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ *(0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)*

Teorema 1.

Se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é a função sucessor, então, tem-se:*

(i) $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(nenhum número natural é sucessor de si mesmo);*

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ *(0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)*

Demonstração 1.

Teorema 1.

Se $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função sucessor, então, tem-se:

(i) $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(nenhum número natural é sucessor de si mesmo);*

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ *(0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)*

Demonstração 1.

(i) *Seja* A *o subconjunto de* $\mathbb{N}$ *constituído dos elementos* $n \in \mathbb{N}$ *tais que* $s(n) \neq n$. *Usaremos o Princípio da Indução para mostrarmos que* $A = \mathbb{N}$, *ou seja,* $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.

Se $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função sucessor, então, tem-se:

(i) $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(nenhum número natural é sucessor de si mesmo);*

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ *(0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)*

Demonstração 1.

(*i*) *Seja A o subconjunto de* $\mathbb{N}$ *constituído dos elementos* $n \in \mathbb{N}$ *tais que* $s(n) \neq n$. *Usaremos o Princípio da Indução para mostrarmos que* $A = \mathbb{N}$, *ou seja,* $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

a) Por A_2 *temos que* $0 \notin Im(s)$, *assim,* $s(0) \neq 0$, *e portanto,* $0 \in A$.

Teorema 1.

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função sucessor, então, tem-se:

(i) $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(nenhum número natural é sucessor de si mesmo);*

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ *(0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)*

Demonstração 1.

(i) *Seja* A *o subconjunto de* $\mathbb{N}$ *constituído dos elementos* $n \in \mathbb{N}$ *tais que* $s(n) \neq n$. *Usaremos o Princípio da Indução para mostrarmos que* $A = \mathbb{N}$, *ou seja,* $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

a) Por A_2 *temos que* $0 \notin Im(s)$, *assim,* $s(0) \neq 0$, *e portanto, 0* $\in A$.

b) Suponha por hipótese de indução que $k \in A$, *assim,* $s(k) \neq k$. *Como, pelo* A_1, s *é injetora, obtemos que* $s(s(k)) \neq s(k)$ *e, portanto,* $s(k) \in A$.

Teorema 1.

Se $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função sucessor, então, tem-se:

(i) $s(n) \neq n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(nenhum número natural é sucessor de si mesmo);*

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ *(0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)*

Demonstração 1.

(i) *Seja A o subconjunto de $\mathbb{N}$ constituído dos elementos $n \in \mathbb{N}$ tais que $s(n) \neq n$. Usaremos o Princípio da Indução para mostrarmos que $A = \mathbb{N}$, ou seja, $s(n) \neq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

a) Por A_2 temos que $0 \notin Im(s)$, assim, $s(0) \neq 0$, e portanto, 0 $\in A$.

b) Suponha por hipótese de indução que $k \in A$, assim, $s(k) \neq k$.Como, pelo A_1, s é injetora, obtemos que $s(s(k)) \neq s(k)$ e, portanto, $s(k) \in A$.

Assim, pelo princípio da indução, $A = \mathbb{N}$.

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ (0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ (0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)

Demonstração 2.

Novamente, usaremos o Princípio da Indução no conjunto $A = \{0\} \cup Im(s)$ *(*$\subset \mathbb{N}$*).*

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ (0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)

Demonstração 2.

Novamente, usaremos o Princípio da Indução no conjunto $A = \{0\} \cup Im(s)$ $(\subset \mathbb{N})$.

a) Note que $0 \in A$.

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ (0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)

Demonstração 2.

Novamente, usaremos o Princípio da Indução no conjunto $A = \{0\} \cup Im(s)$ ($\subset \mathbb{N}$).

a) Note que $0 \in A$.

b) Agora suponha por hipótese de indução que $k \in A$. Como o $s(k) \in Im(s) \subset A$.

(ii) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ (0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.)

Demonstração 2.

Novamente, usaremos o Princípio da Indução no conjunto $A = \{0\} \cup Im(s)$ $(\subset \mathbb{N})$.

a) Note que $0 \in A$.

b) Agora suponha por hipótese de indução que $k \in A$. *Como o* $s(k) \in Im(s) \subset A$.

Assim, $A = \mathbb{N}$ *e como* $0 \notin Im(s)$ *por* A_2*, então* $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

Adição de números naturais

Definição 1.

A adição de dois números naturais, m e n, é designada por $m+n$ e definida recursivamente do seguinte modo:

$$\begin{cases} m+0=m; \\ m+s(n)=s(m+n) \end{cases}$$

Veja que:

$$m+s(0)=s(m+0)=s(m)$$

Temos ainda:

$$m+s(s(0))=s(m+s(0))=s(s(m))$$

De fato, para cada m natural fixado arbitrariamente, definimos o conjunto $S_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n \text{ está definida}\}$.
Temos que $0 \in S_m$ e se $k \in S_m$, então $s(k) \in S_m$, pois

$$m + s(k) = s(m + k)$$

Logo, por $A_3, S_m = \mathbb{N}$. Como m é arbitrário, temos o resultado.

Adição de números naturais

Definição 2.

Indicaremos por 1 *(lê-se "um") o número natural que é sucessor de* 0, *ou seja,* $1 = s(0)$.

Proposição 1.

Para todo natural m, *tem-se* $s(m) = m + 1$ *e* $s(m) = 1 + m$.
Portanto, $m + 1 = 1 + m$.

Demonstração 3.

Primeira igualdade: $m + 1 = m + s(0) = s(m + 0) = s(m)$.
Segunda igualdade: *Consideremos o conjunto* $A = \{m \in \mathbb{N} \mid s(m) = 1 + m\}$. *Veja que* $0 \in A$, *pois*

$$s(0) = 1 = 1 + 0$$

. *Seja* $m \in A$, *então* $s(m) = 1 + m$ *e daí*

$$s(s(m)) = s(1 + m) = 1 + s(m),$$

Ou seja, $s(m) \in A$. *Assim, pelo axioma* A_3, *temos* $A = \mathbb{N}$.

Adição de números naturais

Passaremos a adotar a notação indo-arábica (de base dez) para os elementos de $\mathbb{N}$.
Já temos os símbolos 0 e $1 = s(0)$. Definimos:

$$\begin{aligned} \mathrm{s}(1) &= 2 \\ \mathrm{s}(2) &= 3 \\ \mathrm{s}(3) &= 4 \\ \mathrm{s}(4) &= 5 \end{aligned}$$

e assim por diante. Então, vemos que $\mathbb{N}$ contém o conjunto

$$\{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), ...\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Adição de números naturais

Passaremos a adotar a notação indo-arábica (de base dez) para os elementos de $\mathbb{N}$.
Já temos os símbolos 0 e $1 = s(0)$. Definimos:

$$\begin{aligned} \mathrm{s}(1) &= 2 \\ \mathrm{s}(2) &= 3 \\ \mathrm{s}(3) &= 4 \\ \mathrm{s}(4) &= 5 \end{aligned}$$

e assim por diante. Então, vemos que $\mathbb{N}$ contém o conjunto

$$\{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\mathbb{N}$ contém outros elementos além desses?

Teorema 2.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Demonstração 4.

Seja S o conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$. S foi construído como um subconjunto de $\mathbb{N}$ que contém 0 e o sucessor de qualquer elemento nele contido. Pelo Princípio da Indução, $S = \mathbb{N}$

Adição de números naturais

Ilustraremos agora algumas adições em $\mathbb{N}$, utilizando a notação anterior:

1. $1 + 1 = s(1) = 2.$
2. $2 + 1 = s(2) = 3.$
3. $2 + 2 = 2 + s(1) = s(2 + 1) = s(2 + s(0)) = s(s(2 + 0)) = s(s(2)) = s(3) = 4.$
4. $0 + 2 = 0 + s(1) = s(0 + 1) = s(1 + 0) = s(1) = 2.$

Composição Iterada de funções

Definição 3.

Seja f uma função de um conjunto X nele próprio e Id_X é a função identidade no conjunto X:

$$f^0 = Id_X \text{ e para } n \geq 1, f^n = f \circ (f^{n-1}).$$

Assim, temos $f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ (f \circ f)$ etc. A função f^n se diz a n-ésima iterada de f, também se diz que f foi iterada n vezes.

Adição de números naturais

Exercício 1.

Mostre por indução que, para m e n naturais, vale a igualdade $m + n = s^n(m)$, isto é, somar n a m é somar 1 a m iteradamente n vezes.

Demonstração 5.

Seja $A = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n = s^n(m)\}$, *temos que* $m + 0 = m = s^0(m)$, *logo* $0 \in A$. *Então dado* $n \in A$, *temos*

$$m + s(n) = s(m + n) = s(s^n(m)) = s^{n+1}(m)$$

Ou seja, $s(n) \in A$. *Logo, por* A_3, $A = \mathbb{N}$.

Exercício 2.

Assumindo conhecido o sistema indo-arábico, efetue:

1) $3 + 4$
2) $27 + 12$

Exercício 3.

Assumindo conhecido o sistema indo-arábico, efetue:

1) $3 + 4$
2) $27 + 12$

Demonstração 6.

1) $3 + 4 = s^4(3) = s(s(s(s(3)))) = 7.$
2) $27 + 12 = s^{12}(27) = s(s(s(...s(27)...))) = 39.$

Adição de números naturais

Teorema 3.

Sejam m, n e p números naturais arbitrários. São verdadeiras as afirmações:

i) *Propriedade associativa da adição:* $m + (n + p) = (m + n) + p$.

ii) *Propriedade comutativa da adição:* $m + n = n + m$.

iii) *Lei do cancelamento da adição:* $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.

Demonstração 7.

i) *Fixemos os naturais m e n e apliquemos indução sobre p.* *Seja* $A_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} \mid m + (n + p) = (m + n) + p\}$ *Temos* $0 \in A_{(m,n)}$, *pois* $m + (n + 0) = (m + n) + 0$. *Assim, se* k *pertencer a* $A_{(m,n)}$, $s(k)$ *também pertence, pois*

$$m+(n+s(k)) = m+s(n+k) = s(m+(n+k)) = s((m+n)+k)$$

$$= (m + n) + s(k).$$

Portanto, $A_{(m,n)} = \mathbb{N}$. *Como m e n são arbitrários, obtemos* (i).

Observação 1.

Com a utilização de cuidadosos argumentos utilizando indução, é possível provar a lei associativa generalizada da adição. Por exemplo, a adição de naturais $a+b+c+d$ *pode ser interpretada como* $((a+b)+c)+d$ *ou* $a+((b+c)+d)$ *etc.*

Exercício 4.

Mostre que $m + 0 = 0 + m$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração 8.

Seja $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 0 + m = m + 0\}$, *temos que* $0 \in A$, *pois* $0 + 0 = 0 + 0$. *Daí, dado* $m \in A$ *temos:*

$$0 + s(m) = s(0 + m) = s(m + 0) = m + s(0)$$

$$= m + 1 = s(m) = s(m) + 0$$

Portanto, $A = \mathbb{N}$.

Adição de números naturais

Agora provaremos a propriedade comutativa da adição.

Demonstração 9.

Fixando arbitrariamente $m \in \mathbb{N}$*, seja* $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n + m = m + n\}$*, temos, pelo exercício anterior que* $0 \in C$*. Agora supondo que* $n \in C$*, sabemos que*

$$m + s(n) = s(m + n) = s(n + m) = n + s(m) = n + (m + 1)$$

$$= n + (1 + m) = (n + 1) + m = s(n) + m$$

Portanto, $C = \mathbb{N}$*. Como m é arbitrário, obtemos o resultado.*

Adição de números naturais

Por último, mostraremos a lei do cancelamento da adição.

Demonstração 10.

Fixando arbitrariamente m *e* $n \in \mathbb{N}$*, seja*

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid m + p = n + p \Rightarrow m = n\},$$

temos $0 \in A$*, já que* $\{m + 0 = n + 0 \Rightarrow m = n\}$*. Assim, dado* $p \in A$*, temos*

$$m + s(p) = n + s(p) \Rightarrow s(m + p) = s(n + p)$$

$$\Rightarrow m + p = n + p \Rightarrow m = n.$$

Portanto, $A = \mathbb{N}$*. Como* m *e* n *são arbitrários, obtemos o resultado.*

Proposição 2.

Suponha que exista $u \in \mathbb{N}$ *tal que* $m + u = m$ *(ou que* $u + m = m$*), para todo* $m \in \mathbb{N}$. *Então* $u = 0$. *Assim,* 0 *é o único elemento neutro para a operação de adição.*

Proposição 3.

Suponha que exista $u \in \mathbb{N}$ tal que $m + u = m$ (ou que $u + m = m$), para todo $m \in \mathbb{N}$. Então $u = 0$. Assim, 0 é o único elemento neutro para a operação de adição.

Demonstração 11.

Para um tal u, temos: $0 = 0 + u = u$.

Multiplicação de números naturais

Definição 4.

A multiplicação de dois números naturais, m e n, é designada por $m \cdot n$ e definida recursivamente do seguinte modo:

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \end{cases}$$

Notação: $m \cdot n = mn$.

Teorema 4.

Para m, n, e p naturais arbitrários, valem as proposições abaixo:

1. $mn \in \mathbb{N} =$, *isto é, a multiplicação é de fato uma operação em* $\mathbb{N}$;
2. *Existência do elemento neutro multiplicativo:* $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$;
3. *Distributividade:* $m(n + p) = mn + mp$ *e* $(n + p)m = nm + pm$;
4. *Associatividade:* $m(np) = (mn)p$.
5. *Comutatividade:* $mn = nm$.

Demonstração 12.

1. De fato, para cada m natural fixado arbitrariamente, definimos o conjuntos $S_m = \{n \in \mathbb{N} | mn \quad \text{está definido}\}$, temos que $0 \in S_m$ $(m \cdot 0 = 0)$ e se $k \in S_m$ então $s(k) \in S_m$, pois $m \cdot s(k) = m \cdot (k+1) = m \cdot k + m$, logo $S_m = \mathbb{N}$.

   Inicialmente, vemos que $n \cdot 1 = n \cdot (0+1) = n \cdot 0 + n = n$. Por indução, vamos mostrar que $1 \cdot n = n$, assim $1 \cdot 0 = 0$ e sob hipótese de que $1 \cdot n = n$, então $1 \cdot (n+1) = 1 \cdot n + 1 = n + 1$ como queríamos.

Demonstração 13.

2 *Seja m e n naturais fixados arbitrariamente e usemos indução em p. Seja $P_{m,n}(p)$ a afirmação $m(n+p) = mn + mp$. Mostraremos que o conjunto $A_{m,n} = \{p \in \mathbb{N} | P_{m,n}$ é verdadeiro$\}$ é $\mathbb{N}$. Temos:*

1. $m(n+0)$ *e* $mn + m0 = mn + 0 = mn$ *logo* $m(n+0) = mn + m0$, *ou seja,* $P_{m,n}(0)$ *é verdadeiro.*
2. $m(n+(p+1)) = m((n+p)+1) = m(n+p) + m = (mn+mp) + m = mn + (mp+m) = mn + (m(p+1))$, *ou seja,* $p \in A_{m,n}$ *acarreta* $p+1 \in A_{m,n}$.

Logo, concluímos por indução que $A_{m,n} = \mathbb{N}$.

Demonstração 14.

3. *Por indução sobre* p*, note que* $m(n0) = m0 = 0$ *e* $(mn)0 = 0$*, daí* $m(n0) = (mn)0$*. Sob hipótese de que* $m(np) = (mn)p$ *temos que* $m(n(p+1)) = m(np) + mn = (mn)p + mn = (mn)(p+1)$*. Indutivamente provamos a igualdade.*
4. *Por indução sobre* n*, temos que* $m0 = 0 = 0m$*. Ademais, se* $mn = nm$ *for verdadeiro, então* $m(n+1) = mn + m = nm + m = (n+1)m$*. Logo indutivamente a igualdade vale para todo natural.*

Observação 2.

$0 \cdot m = 0$. *De fato,* $0 \cdot 0 = 0$ *e supondo que a igualdade vale para* m, *note que* $0 \cdot (m+1) = 0 \cdot m + 0 = 0 + 0 = 0$, *ou seja, a igualdade é válida para* $m+1$. *Portanto , por indução, a igualdade é válida para todo natural.*

$\square$

Observação 3.

Note que 1 é o único elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{N}$. *De fato, sejam* 1 *e* p *neutros multiplicativos de* $\mathbb{N}$ *então* $1 = 1p = p$, *ou seja,* $p = 1$ *e o neutro é único.*

Proposição 4.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *tais que* $m + n = 0$, *então* $m = n = 0$

Demonstração 15.

5 *Suponhamos* $n \neq 0$. *Então* $n = s(n') = n' + 1$, *para algum* $n' \in \mathbb{N}$. *Temos* $0 = m + n = m + (n' + 1) = (m + n') + 1 = s(m + n')$. *Absurdo, pois 0 não é sucessor de nenhum número natural. Logo* $n = 0$ *e provamos o resultado.* $\square$

Proposição 5.

$m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0$ *ou* $n = 0$ *para todo natural.*

Demonstração 16.

Suponha $n \neq 0$. *Daí* $n = n' + 1$ *para algum* $n' \in \mathbb{N}$, *consequentemente* $m \cdot (n' + 1) = m \cdot n' + m = 0$, *ou seja , pela proposição anterior* $m = 0$. *Analogamente, podemos supor* $m \neq 0$ *chegaremos que* $n = 0$.

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

A relação de ordem em $\mathbb{N}$ nos permitirá comparar os números naturais, formalizando a ideia intuitiva de que 0 é menor do que 1, que é menor do que 2, e assim por diante.

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Definição 5.

Uma relação binária R em um conjunto não vazio A diz-se uma relação de ordem em A quando satisfizer as condições seguintes, para quaisquer $x, y, z \in A$:

i) reflexividade: xRx.

ii) antissimetria: se xRy e yRx, então $x = y$.

iii) transitividade: se xRy e yRz, então xRz.

Um conjunto não vazio A, munido de uma relação de ordem, diz-se um conjunto ordenado.
Definiremos agora uma relação de ordem em $\mathbb{N}$ através da operação da adição, tomando-o, portanto, um conjunto ordenado.

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Definição 6.

Dados $m,n \in \mathbb{N}$, dizemos que mRn se existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$

Exemplo

$1R3$, pois $3 = 1 + 2$; $2R2$, pois $2 = 2 + 0$

Exercício 5.

Mostre que R é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$.

Definição 7.

Para $m,n \in \mathbb{N}$, se mRn, onde R é a relação da definição anterior, dizemos que m é menor do que ou igual a n e passaremos a escrever o símbolo $\leq$ no lugar de R: assim, $m \leq n$ significará mRn. (A expressão "m é menor ou igual a n", embora gramaticalmente incorreta, é de uso corrente desde o Ensino Fundamental.)

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Notação:

1. Se $m \leq n$, mas $m \neq n$, escrevemos $m < n$ e dizemos que m é menor do que n.

2. Escrevemos $n \geq m$ como alternativa a $m \leq n$. Leremos n é maior do que ou igual a m.

3. Escrevemos $n > m$ corno alternativa a $m < n$. Leremos n é maior do que m.

Exercício 6.

Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 0$.Em particular, $1 > 0$.

Demonstração 17.

Seja $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $n = 0 + p$ para algum $p \in \mathbb{N}^*$, daí temos $n > 0$. Em particular, de fato, $1 > 0$.

Exercício 7.

Mostre que $s(n) > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração 18.

Sabemos que se tomarmos $n = 0$, $s(0) > 0$, isto é $1 > 0$ (Como vimos no exercício anterior). Se supormos que $s(n) > n$, concluimos então que $s(n+1) > n+1$. Vejamos:
Por hipótese de indução, $s(n) > n \Rightarrow s(n) = n + p$, onde $p \in \mathbb{N}^*$, dai obtemos pela propriedade cancelativa
$1 + s(n) = n + p + 1 \Rightarrow 1 + s(n) > n + 1 \Rightarrow s(n+1) > n + 1$.

Proposição 6 (Lei da Tricotomia).

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos que uma, e apenas uma, das relações seguintes ocorre:

i $m < n$;
ii $m = n$;
iii $m > n$.

Demonstração 19.

Mostremos inicialmente que duas dessas relações não podem ocorrer simultaneamente. Depois, mostraremos que uma delas necessariamente ocorre. É claro que (i) e (ii), bem como (ii) e (iii), são incompatíveis, por definição. Quanto a (i) e (iii) ocorrendo simultaneamente, teríamos: $n = m + p$ e $m = n + p'$, com $p, p' \neq 0$,de onde obtemos:
$n = (n + p') + p = n + (p' + p)$.
Cancelando n, obtemos $p + p' = 0$. Segue que $p = p' = 0$, uma contradição.

Demonstração 20.

Mostremos agora que uma das três relações acontece. Seja m *um natural arbitrário e consideremos o conjunto* $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = m \text{ ou } x > m \text{ ou } x < m\}$*. Vamos provar, por indução sobre* x*, que* $M = \mathbb{N}$*.*

Temos que $0 \in M$*, pois* $0 = m$ *ou* $0 \neq m$*. No último caso, pelo Exercício 27,* $m > 0$*.*

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Demonstração 21.

Mostremos agora que a hipótese $k \in M$ *acarreta* $k+1 \in M$. *Devemos considerar três situações:*

- $k = m$. *Neste caso,* $k+1 = m+1$, *de onde* $k+1 > m$ *e, portanto,* $k+1 \in M$.
- $k > m$. *Neste caso, existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $k = m+p$. *Então* $k+1 = (m+p)+1 = m+(p+1)$,*de onde* $k+1 > m$ *e, daí,* $k+1 \in M$.
- $k < m$. *Neste caso, existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $m = k+p$. *Como* $p \neq 0$, *então* $p = p'+1, p' \in \mathbb{N}$. *Logo* $m = k+(p'+1) = k+(1+p') = (k+1)+p'$, *Se* $p' = 0$,*então* $m = k+1$ *e* $k+1 \in M$. *Se* $p' \neq 0$, *então* $m > k+1$ *e* $k+1 \in M$.

Assim, pelo Princípio da Indução, $M = \mathbb{N}$.

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Uma relação de ordem que satisfaz à lei da tricotomia é chamada de relação de ordem total.

Teorema 5 (Compatibilidade da relação de ordem com as operações em $\mathbb{N}$).

Sejam a, b e c naturais quaisquer. São válidas as seguintes implicações:
i) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$; ii) $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.

Demonstração 22.

(i) $a \leq b \Leftrightarrow$ *existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $b = a + p$. *Segue daí que:*

$$b + c = (a + p) + c = a + (p + c) = a + (c + p) = (a + c) + p$$

de onde obtemos $b + c \geq a + c$.

Exercício 8.

Demonstre (ii) do teorema anterior.

Demonstração 23.

$a \leq b \Rightarrow b = a + p, p \in \mathbb{N}$. $bc = (a + p)c = (ca) + cp$ *de onde temos* $bc \geq ac$.

Teorema 6 (Lei do cancelamento da multiplicação).

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, *com* $c \neq 0$, *tais que* $ac = bc$. *Então* $a = b$.

Demonstração 24.

Se $a > b$, *teríamos* $ac > bc$ *pelo exercício anterior, o que contraria a suposição de que* $ac = bc$.

O caso $a < b$ *é análogo. Logo, pela lei da tricotomia,* $a = b$.

Teorema 7.

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. *Então* $a < b$ *se, e somente se,* $a + 1 \leq b$.

Demonstração 25.

$a < b \Rightarrow b = a + p$, *para algum* $p \in \mathbb{N}, p \neq 0$.
Temos: $p = s(q) = q + 1$, *para um certo* $q \in \mathbb{N}$. *Então*

$$b = a + p = a + (q + 1) = a + (1 + q) = (a + 1) + q \Rightarrow b \geq a + 1.$$

A recíproca é imediata.

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Da relação de ordem em $\mathbb{N}$ e suas propriedades, decorre que $0 < 1 < 2 < 3 < ...$, ou seja, se $a \in \mathbb{N}$, então $a < s(a)$, pois $s(a) = a + 1$.

Além disso, não há naturais compreendidos entre a e $s(a)$,

Assim, vemos que os axiomas de Peano e suas consequências realmente cumprem o objetivo de tomar rigoroso o conceito de número natural

Formalmente, dizemos que um elemento a de um conjunto ordenado A é um menor elemento de A, se $a \leq x$, para todo $x \in A$. Quando um conjunto ordenado. A admite um menor elemento, este elemento é único (verifique isso!) e é também chamado de elemento mínimo de A. Ele se denota por $minA$. De modo similar, define-se maior elemento ou elemento máximo de um conjunto ordenado A, denotado por $maxA$.

Teorema 8 (Princípio da Boa Ordem:).

Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.

Demonstração 26.

Seja S *um tal subconjunto de* $\mathbb{N}$ *e consideremos o conjunto* $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x, \text{ paratodo } x \in S\}$. *Claro que* $0 \in M$. *Como* $S \neq \emptyset$, *tome* $s \in S$. *Então* $s + 1 \notin M$, *pois* $s + 1$ *não é menor ou igual a* s. *Assim,* $M \neq \mathbb{N}$. *Como* $0 \in M$ *e* $M \neq N$, *deve existir* $m \in M$ *tal que* $m + 1 \notin M$, *caso contrário, pelo Princípio de Indução,* M *deveria ser* $\mathbb{N}$.

Afirmamos que um tal m *é o menor elemento de* S, *isto é,* $m = minS$.

Como $m \in M$, *então* $m \leq x$, *para todo* $x \in S$. *Só falta verificar que* $m \in S$. *Vamos supor o contrário, que* $m \notin S$. *Então* $m < x$, *para* $x \in S$.

Pelo teorema anterior, teríamos $m + 1 \leq x$, *para todo* $x \in S$, *do que resultaria* $m + 1 \in M$, *em contradição com a escolha de* m. *Logo* $m \in S$, *como queriamos.*

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Observe que o Teorema 7 não se aplica, por exemplo, ao conjunto dos números racionais: é possível determinar um número racional imediatamente maior do que 1?

o Princípio da Indução e o da Boa Ordem são proposições matemáticas equivalentes.

Exercício 9.

Sejam x *e* y *números naturais. Mostre que:*

1. $x + y = 1 \Rightarrow x = 1$ *ou* $y = 1$.

2. Se $x \neq 0, y \neq 0$ *e* $x + y = 2$, *então* $x = y = 1$.

3. $xy \neq 0 \Rightarrow x \leq xy$.

Demonstração 27 (Idéia da demonstração).

1. Por absurdo e testamos os vários casos.

2. Análogo ao 1.

3. Como $xy \neq 0$, *então* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$.
$xy = xy \Rightarrow x(1 + y') = xy \Rightarrow x + xy' = xy$. *Dai,* $xy \geq x$.

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Exercício 10.

Seja X um subconjunto de $\mathbb{N}$ satisfazendo (i) e (ii) abaixo. Mostre que $\{a, a+1, a+2, ...\} \subset X$:
$(i) a \in X \qquad (ii) n \in X \Rightarrow n+1 \in X$

Demonstração 28.

Vamos aplicar o PIC em $Y = \{m \in \mathbb{N} \mid a+m \in X\}$.
Para $m = 0$, temos que realmente vale, pois $a+0 = a$ donde por $i) a \in X$. Supondo que $k \in Y$, para $k+1$ temos

$$a + k + 1 = n + 1$$

onde $a + k = n$, que por $ii) n \in X$, e ainda $n+1 \in X$, logo $a, a+1, a+2, ... \subset X$.

Referência Bibliográficas:

- BRANDT, D. C. *Análise matemática*, Indaial, Uniasselvi, (2013).
- FERREIRA, J. A. *Construção dos Números*, 2. ed.,SBM, (2011).
- LIMA, E. L. *Curso De Análise*, 12. ed., São Paulo: IMPA, (2010).
- MILIES, C. P.; COELHO S. P. *Números: Uma introdução à Matemática*, 1. ed., São Paulo: Ed Edusp, (1998).