Unidade Acadêmica
de Matemática

Matemática e Estatística

MINICURSO
Pré-Cálculo Diferencial e Integral

Petiano:
Juan Pablo França Alves Cantalice

28 de abril de 2022

Sumário

- Limites
- Exemplos de funções
- Estudo das funções apresentadas e seus respectivos gráficos

Seja f(x) definida em um intervalo aberto em torno de um ponto a (exceto talvez em a). Se os valores de f(x)
ficam arbitrariamente próximos a L quando x
fica suficientemente próximo de a dizemos que f tem limite L quando x se tende a a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Limites Laterais

- Limite Lateral à direita: Os valores de x se aproximam de a por valores maiores do que a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

- Limite Lateral à esquerda: Os valores de x se aproximam de a por valores menores do que a

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

- O Limite (bilateral) existe se, e somente se, os limites laterais existem e são iguais, ou seja,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Limites no infinito e limites infinitos

- Limite no infinito: Os valores de x não se aproximam de um valor fixo a e sim
ficam arbitrariamente "longe da origem"

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

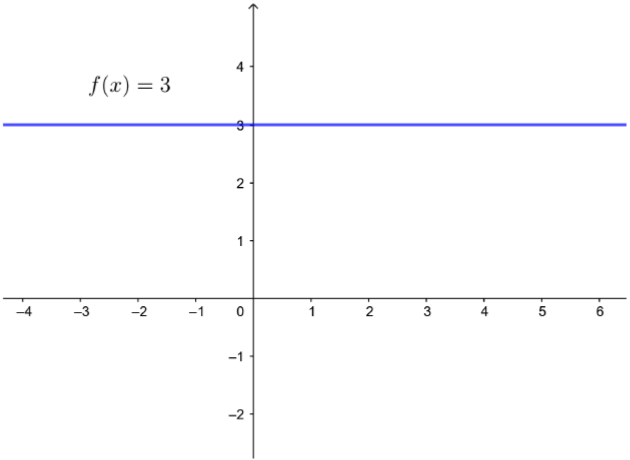
- Limite infnito: Os valores de f(x) não se aproximam de um valor L e sim arbitrariamente "longe da origem"

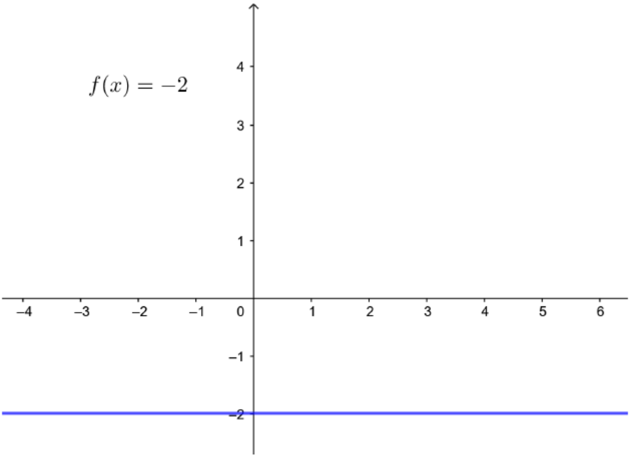
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Função constante: É uma função que associa todo ponto do seu domínio a um único número real a, ou seja,

$$f(x) = a$$

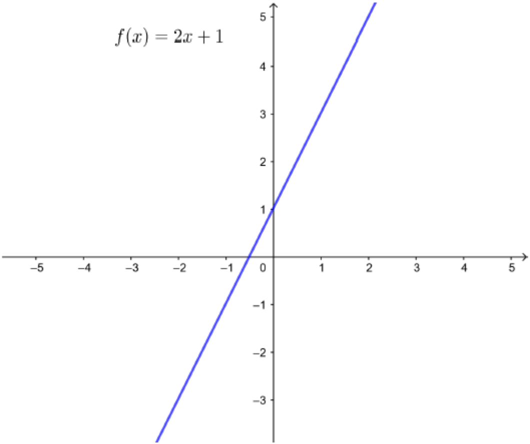
- $dom(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \{a\}$
- O gráfico de f é uma reta paralela ao eixo x na altura a.
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

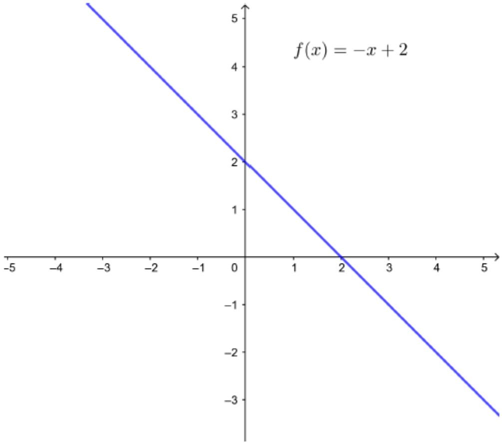

$f(x) = 3$
4
3
2
1
0
−1
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6


$f(x) = -2$
4
3
2
1
0
−1
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6

Função Afim: É uma função cuja a lei de formação é dado por um polinômio de grau 1, ou seja, $f(x) = ax + b$, com a $a \neq 0$.

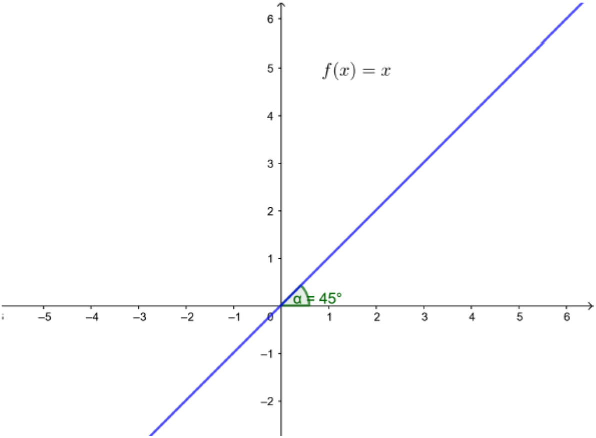
- $dom(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \mathbb{R}$
- o gráfico de uma função afim é uma reta,
- Se a > 0, então f é uma função crescente,
- Se a < 0, então f é uma função decrescente
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$


$f(x) = 2x + 1$
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5



$f(x) = -x + 2$
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

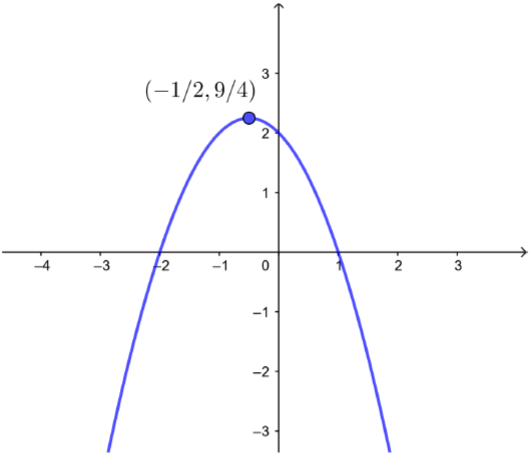
Considere a função afim $f(x) = ax + b$, com a $a \neq 0$. Se $\mathrm{b} = 0$, então a função $f(x) = ax$ é chamada de função linear e seu gráfico é uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.
Dentro das funções lineares, destacamos a função identidade, cuja lei de formação é $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}$, e seu gráfico é a reta que passa pela origem formando um ângulo de $45°$ com o eixo 0x.


$f(x) = x$
α = 45°
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
−1
−2

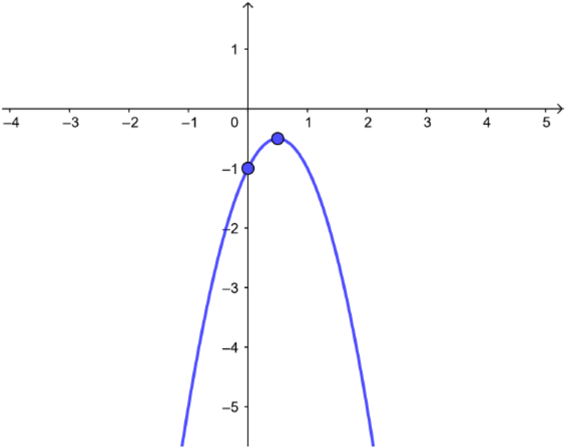
Função Quadrática: É uma função cuja a lei de formacão é dado por um polinômio de grau 2, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a $a \neq 0$.

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- o gráfico de f(x) é uma parábola:
  - Se a $>$ 0, então a parábola tem concavidade voltada para cima,
  - Se a $<$ 0, então a parábola tem concavidade voltada para baixo,
  - Raízes (pontos onde a parábola intersecta o eixo 0x): Fórmula de báskara
  - Cordenadas do vértice: $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

Exemplo: Considere a função $f(x) = -x^2 - x + 2$. Verifiquemos a concavidade, raízes, vértice e esbocemos o gráfico.



Exemplo: Considere a função $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$. Verifiquemos a concavidade, raízes, vértice e esbocemos o gráfico.



- Se a > 0, então:
  - f é decrescente de $(-\infty, \frac{-b}{2a})$ e f é crescente de $(\frac{-b}{2a}, +\infty)$
  - $Im(f) = (\frac{-\Delta}{4a}, +\infty)$
- Se a < 0, então:
  - f é crescente de $(-\infty, \frac{-b}{2a})$ e f é decrescente de $(\frac{-b}{2a}, +\infty)$
  - $Im(f) = (-\infty, \frac{-\Delta}{4a})$

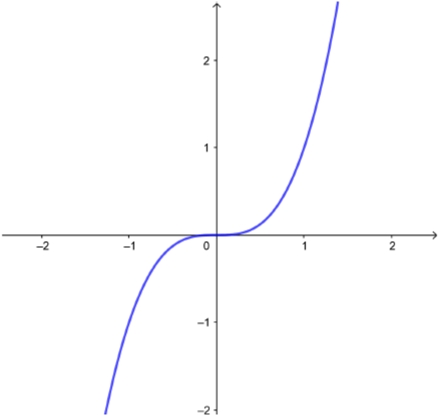
Exemplos interessantes: $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ e $f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 - 3$

Funções Polinomiais: É uma função cuja a lei de formação é um polinômio, ou seja,

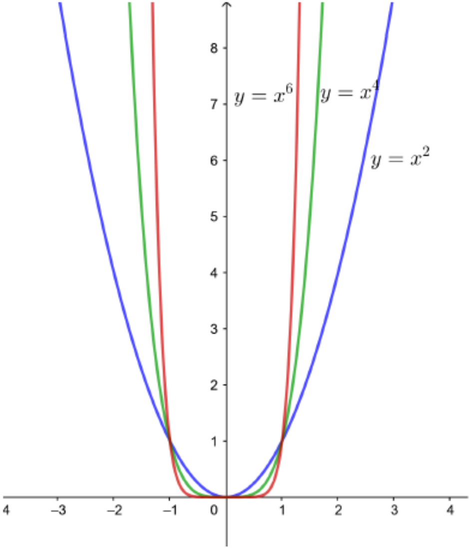
$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

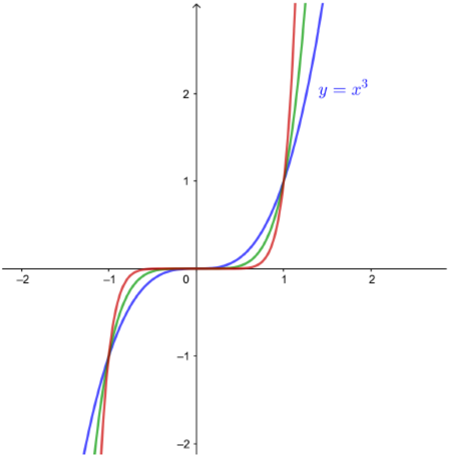
- $dom(f) = \mathbb{R}$
- Qual é o gráfico de uma função polinomial ?
- Para calcular o limite de uma função polinomial basta calcular a sua imagem no ponto, ou seja,
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
- A função potência $f(x) = a^n$ é um tipo particular de função polinomial na qual já estudamos alguns de seus casos.

Na função potência, para n=3, temos o seguinte gráfico:



- A medida que a potência n aumente, mais a curva se achata sobre o eixo 0x no intervalo (-1; 1) e mais rápido a curva sobe fora desse intervalo:
- Se n é par: $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- Se n é impar: $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$


$y = x^6$
$y = x^4$
$y = x^2$
8
7
6
5
4
3
2
1
4
–3
–2
–1
0
1
2
3
4

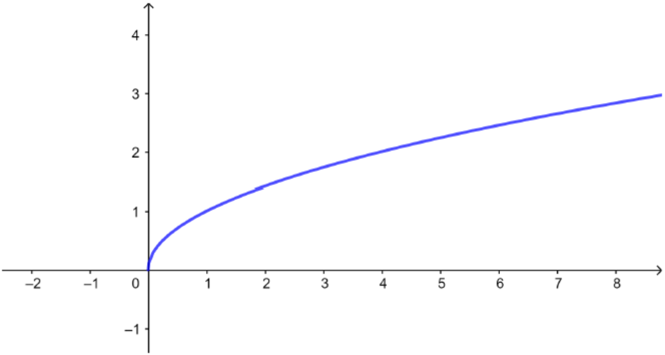

$y = x^3$
2
1
0
-1
-2
-2
-1
1
2

Função raiz quadrada: $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

- $dom(f) = \mathbb{R}_+$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$,
- f é uma função crescente
- $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$

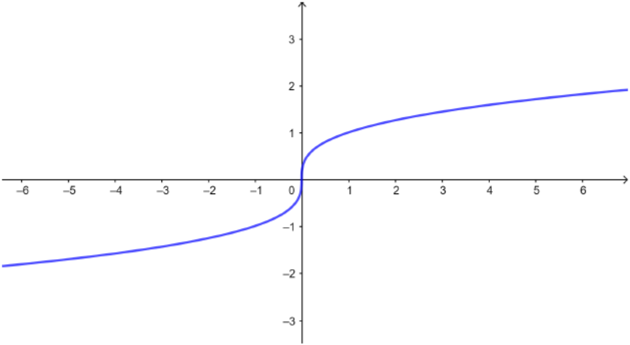


Função raiz cúbica: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

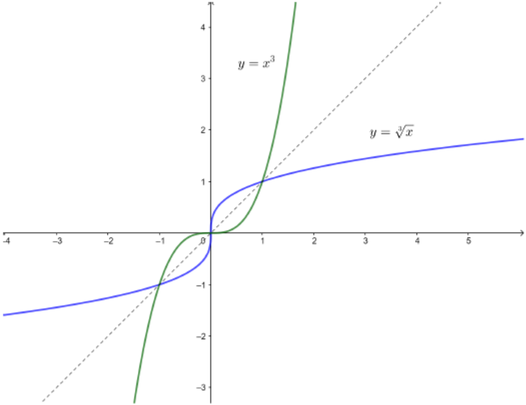
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$,
- f é uma função crescente
- $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x} = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

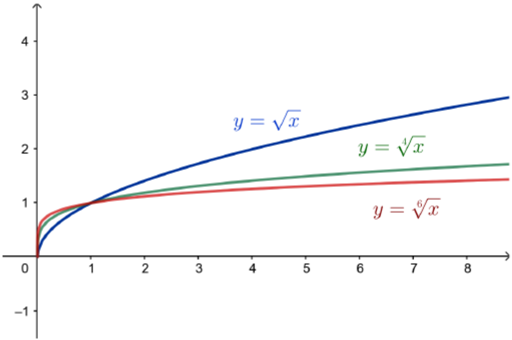
Gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$



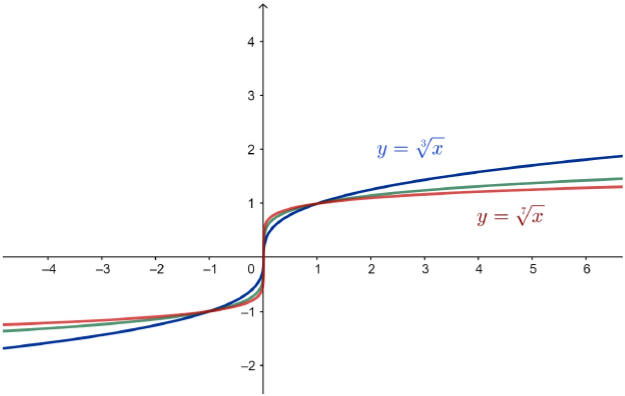
Observação: A função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é a inversa da função $g(x) = x^3$.



Gráficos das função $f(x) = \sqrt[n]{x}$, com n par



Gráficos das função $f(x) = \sqrt[n]{x}$, com n impar

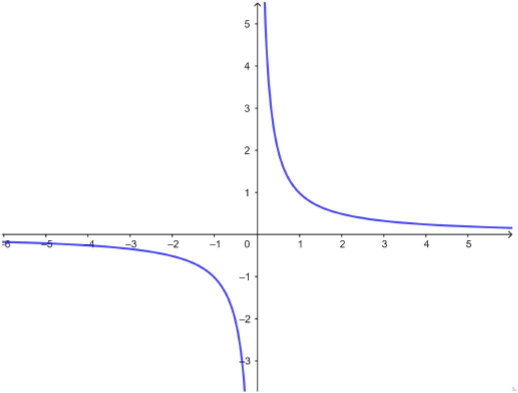


Funcão reciproca: $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow R$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

- $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e $Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$,
- f é uma função decrescente
- f é uma função impar
- A reta y $= 0$ é uma assintota horizontal e a reta x $= 0$ é uma assintota vertical ao gráfico de f.

Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



O que é uma assintota ?

Primeiro, o que acontece se escolhermos um valor razoávelmente grande para x e aplicarmos na função ? Pelo gráfico, parece que a imagem vai para zero.
O que acontece é que o nossa imagem sempre irá ficar próximo de zero, mas nunca irá encostar no eixo x, nesse caso dizemos que o eixo x é uma assintota da função.
Ou seja, podemos dizer que uma assíntota horizontal ou vertical nada mais é do que uma reta imaginária que delimita a aproximação de uma função no gráfico à medida que ela cresce ou decresce.

Limites da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$

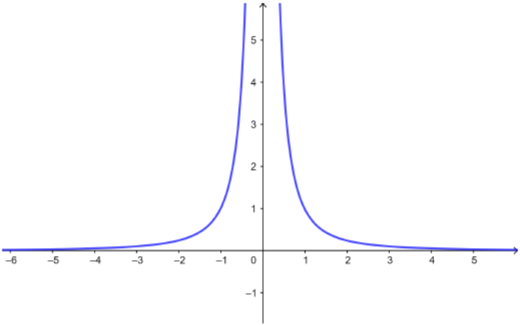
- Para todo $a \neq 0$, temos $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$
- Limites laterais em 0:
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
- Limites no infinito:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Função recíproca: $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

- $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e $Im(f) = (0, +\infty)$
- f é crescente em (-∞,0) e decrescente em (0,+∞)
- f é uma função par
- A reta y $=$ 0 é uma assintota horizontal e a reta x $=$ 0 é uma assintota vertical ao gráfico de f.

Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Limites da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

- Para todo $a \neq 0$, temos $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2}$
- Limites laterais em 0:
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = -\infty$$
- Limites no infinito:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Função exponencial: Seja $0 < a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a^x$$

É chamada de função exponencial de base a.

- Como $a^0 = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$, então o gráfico de f passa pelo ponto $(0, 1)$.
- Como a > 0, então $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Se $a > 1$, então a função exponencial é crescente
- Se $0 < a < 1$, então a função exponencial é decrescente.

Gráfico de $f(x) = a^x$, para $a > 1$.

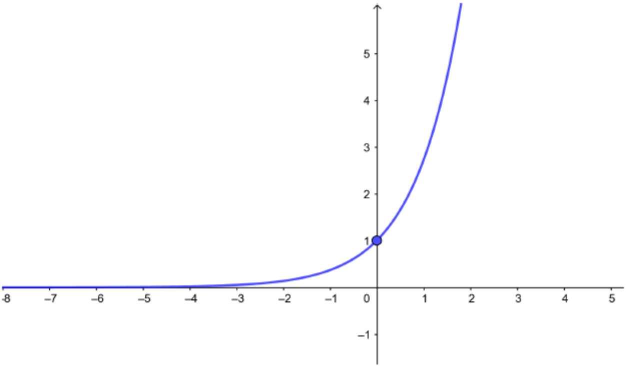
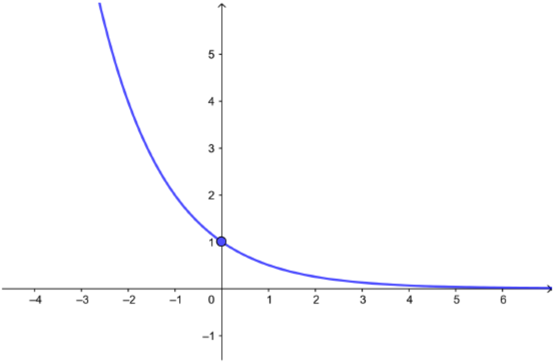


Gráfico de $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$.



Limites da função $f(x) = a^x$

- $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$
- Se a > 1, então
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$
- Se $0 <$ a < 1:
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

Propriedades da exponencial

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$

Pelo Teste da reta horizontal, temos que a função exponencial $f(x) = a^x$ é injetora. Restringindo o contradomínio da função a $(0,+\infty)$, que é a sua imagem, temos que $f(x) = a^x$ também seria sobrejetora. Portanto, a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow (0, +\infty) \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

é uma bijeção.
A inversa da função exponencial de base a é chamada de função logarítmica de base a que é definida por:

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a(x) \end{aligned}$$

onde $\log_a(x)$ se $a^y = x$

Exemplos:

- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$
- $\log_5 25 = 2$, pois $5^2 = 25$
- $\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$
- $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$
- $\log_3 1 = 0$, pois $3^0 = 1$
- $\log_4 4 = 1$, pois $4^1 = 4$

- Como $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$ para todo a, então o gráfico da função logaritmica passa pelo ponto $(1, 0)$.
- Se a > 1, então $f(x) = \log_a x$ é uma função crescente
- Se $0 <$ a < 1, então $f(x) = \log_a x$ é uma função decrescente.

Gráfico de $f(x) = \log_a x$, para $a > 1$.

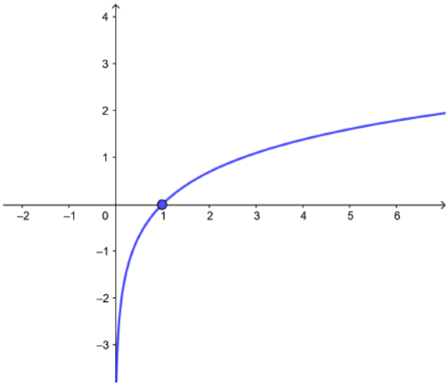
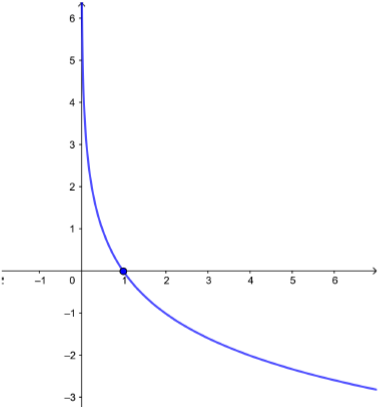


Gráfico de $f(x) = \log_a x$, para $0 < a < 1$.



Limites da função logarítmica

- $\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$
- Se a $>$ 1, então

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

- Se 0 $<$ a $<$ 1:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$$

Propriedades do Logaritmo:

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

Exponencial e Logaritmo natural

- Constante de Euler: É um número irracional que vale aproximadamente

$$e \approx 2,718281828459045235360287$$

- Função exponencial natural:

$$f(x) = e^x$$

- Função Logarítmica natural:

$$f(x) = \log_e x = \ln x$$

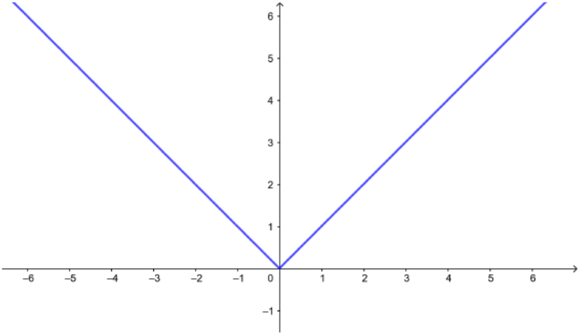
Funções definidas por mais de uma sentença

Exemplo: Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

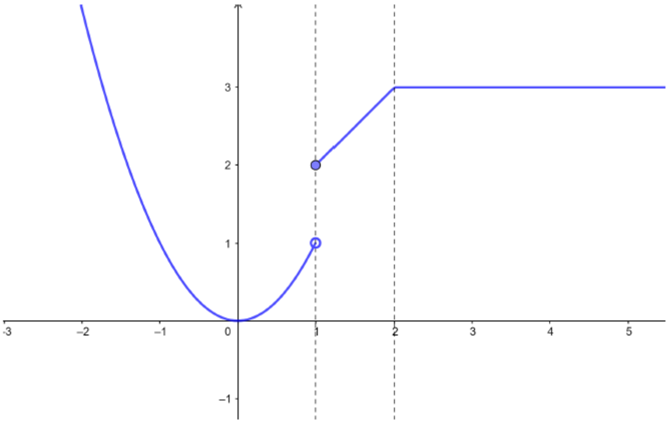
- $dom(f) = \mathbb{R} e Im(f) = \mathbb{R}_+$
- $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = -\infty$

Gráfico de $f(x) = |x|$



Exemplo: Considere a função dada pela lei de formação

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \ \text{se } x < 1 \\ x + 1, \ \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3, \ \text{se } x > 2 \end{cases}$$



3
2
1
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$
- Limites laterais em x=1:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

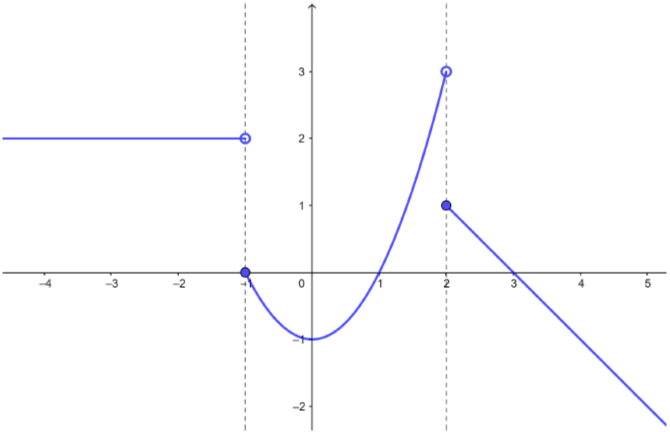
  Como os limites laterais são diferentes, então não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
- Limites laterais em x=2:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$$

  Como os limites laterais em x=2 são iguais, então $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.
- Limites no infinito:
  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

Exemplo: Considere a função dada pela lei de formação

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -1 \\ x^2 - 1, \text{ se } -1 \leq x < 2 \\ -x + 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$



3
2
1
0
−1
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 3)$
- Limites laterais em $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$$

- Limites laterais em x=2:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

  Como os limites laterais são diferentes, então não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$

- Limites no infinito:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$