Unidade Acadêmica de Matemática

Matemática e Estatística

MINICURSO
Pré-Cálculo Diferencial e Integral

Petiano:
Pedro Vítor dos Santos Barbosa

29 de abril de 2022

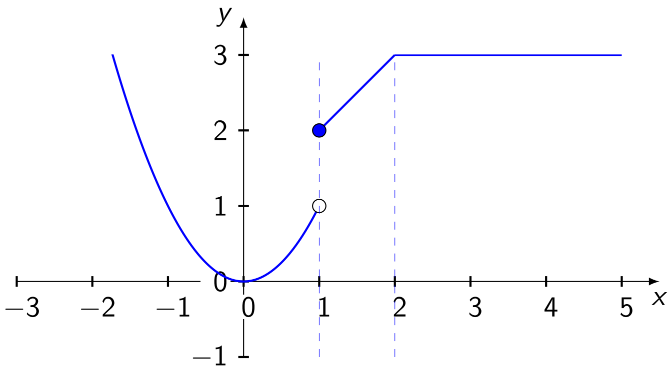
Aula 3

- Limites laterais e ideia intuitiva de continuidade.
- Funções trigonométricas.

Exemplo: Considere a função dada pela lei de formação

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ x + 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Conjunto limitado



Principais funções estudadas no cálculo

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$

Principais funções estudadas no cálculo

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

Como os limites laterais são diferentes, então não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

  Como os limites laterais são diferentes, então não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.
- Limites laterais em $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

Como os limites laterais são diferentes, então não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

- Limites laterais em $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

Como os limites laterais são iguais, então $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

Principais funções estudadas no cálculo

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

  Como os limites laterais são diferentes, então não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.
- Limites laterais em $x = 2$:

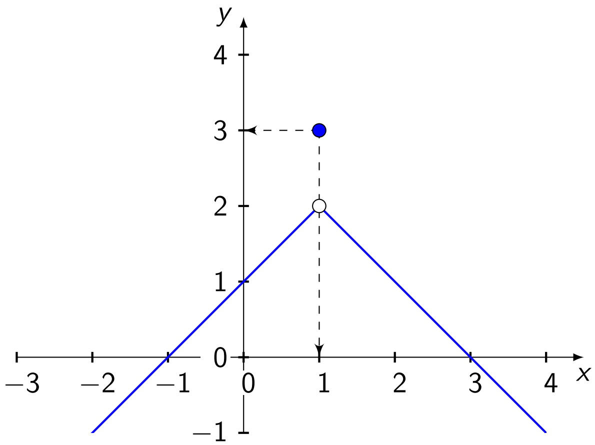
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

  Como os limites laterais são iguais, então $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.
- Limites no infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Exemplo: Considere a função dada pela lei de formação

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \ \text{se } x < 1 \\ 3-x, \ \text{se } x > 1 \\ 3, \ \text{se } x = 1 \end{cases}$$


y
4
3
2
1
0
−1
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x

Principais funções estudadas no cálculo

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 2) \cup \{3\}$

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 2) \cup \{3\}$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 2) \cup \{3\}$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

Como os limites laterais são iguais, então $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 2) \cup \{3\}$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

Como os limites laterais são iguais, então $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

- Limites no infinito:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Principais funções estudadas no cálculo

- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 2) \cup \{3\}$
- Limites laterais em $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

  Como os limites laterais são iguais, então $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.
- Limites no infinito:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Observe que $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.

Continuidade

Uma função $y = f(x)$ é contínua em um ponto a pertencente ao seu domínio se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

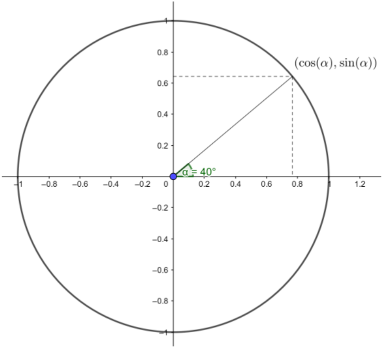
Uma função f é dita contínua se é contínua em todo ponto do seu domínio.

Exemplo: Determine o valor de L para que a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x < 1 \\ 3-x, \text{ se } x > 1 \\ L, \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

seja contínua em todo o seu domínio.

Considere um círculo centrado na origem de raio 1.



Para cada ângulo α, definimos as funções seno e cosseno em função das coordenadas do ponto (x, y):

$$x = cos(\alpha) \text{ e } y = sen(\alpha)$$

Valores das funções seno e cosseno:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cosseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

Propriedades das funções seno e cosseno

Propriedades das funções seno e cosseno

- Seno e cosseno são funções limitadas:

$$-1 \leq sen(x) \leq 1 \;\text{ e }\; -1 \leq cos(x) \leq 1$$

Propriedades das funções seno e cosseno

- Seno e cosseno são funções limitadas:

$$-1 \leq sen(x) \leq 1 \ \text{ e } \ -1 \leq cos(x) \leq 1$$

- Seno e cosseno são funções periódicas de período 2π:

$$sen(x + 2\pi) = sen(x) \ \text{ e } \ cos(x + 2\pi) = cos(x)$$

Propriedades das funções seno e cosseno

- Seno e cosseno são funções limitadas:

$$-1 \leq sen(x) \leq 1 \ \text{ e } \ -1 \leq cos(x) \leq 1$$

- Seno e cosseno são funções periódicas de período 2π:

$$sen(x + 2\pi) = sen(x) \ \text{ e } cos(x + 2\pi) = cos(x)$$

- Cosseno é uma função par:

$$cos(-x) = cos(x), \ \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Propriedades das funções seno e cosseno

- Seno e cosseno são funções limitadas:

$$-1 \leq sen(x) \leq 1 \ \text{ e } \ -1 \leq cos(x) \leq 1$$

- Seno e cosseno são funções periódicas de período 2π:

$$sen(x + 2\pi) = sen(x) \ \text{ e } cos(x + 2\pi) = cos(x)$$

- Cosseno é uma função par:

$$cos(-x) = cos(x), \ \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- Seno é uma função ímpar:

$$sen(-x) = -sen(x), \ \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Sinal das funções seno e cosseno:

	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
seno	$+$	$+$	-	-
cosseno	$+$	-	-	$+$

Sinal das funções seno e cosseno:

	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
seno	crescente	decrescente	decrescente	crescente
cosseno	decrescente	decrescente	crescente	crescente

Gráfico da função Seno

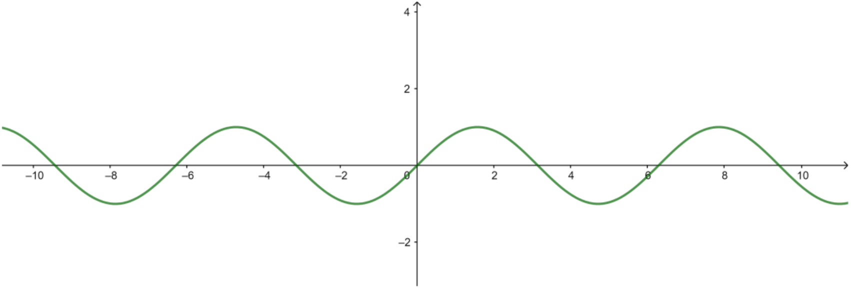
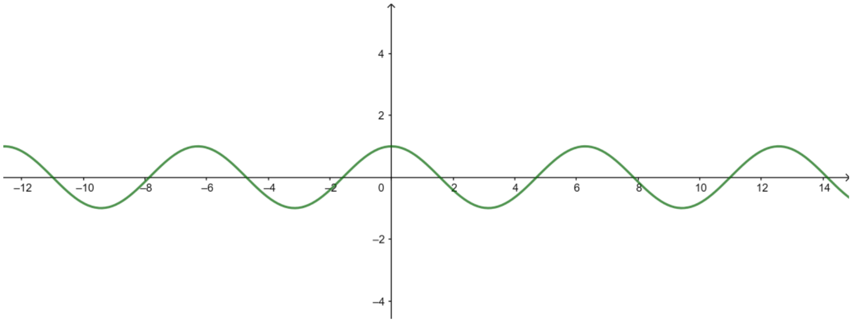


Gráfico da função Cosseno



Outras funções trigonométricas:

Outras funções trigonométricas:

- Função tangente: $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$

Outras funções trigonométricas:

- Função tangente: $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$

$$dom(tg(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Outras funções trigonométricas:

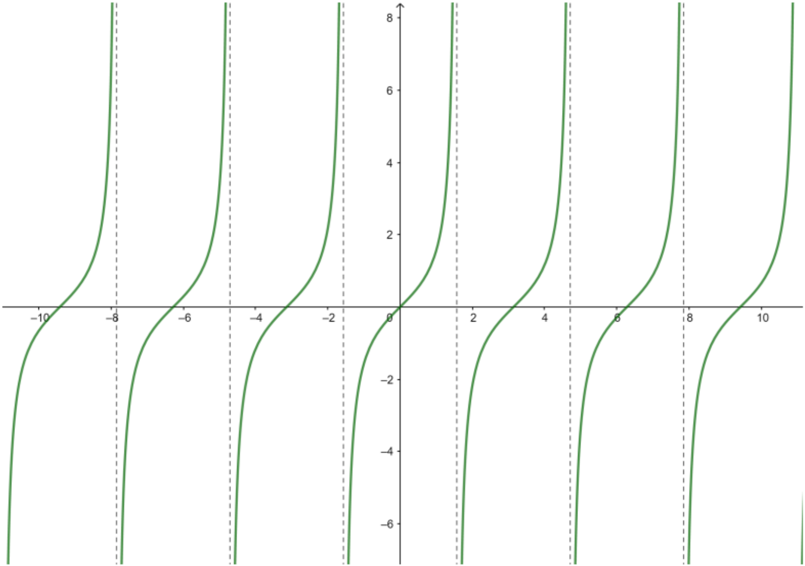
- Função tangente: $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$

$$dom(tg(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sinal da função tangente:

	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
seno	+	+	-	-
cosseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-

Funções Trigonométricas



- Função cotangente: $cotg(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$

$$dom(cotg(x)) = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- Função cotangente: $cotg(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$

$$dom(cotg(x)) = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- Função secante: $sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$

$$dom(sec(x)) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- Função cotangente: $cotg(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$

$$dom(cotg(x)) = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- Função secante: $sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$

$$dom(sec(x)) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- Função cossecante: $cosec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$

$$dom(cosec(x)) = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

identidades trigonométricas

- (Relação Fundamental da Trigonometria):

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

identidades trigonométricas

- (Relação Fundamental da Trigonometria):

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

- $sen(x \pm y) = sen(x)cos(y) \pm sen(y)cos(x)$

identidades trigonométricas

- (Relação Fundamental da Trigonometria):

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

- $sen(x \pm y) = sen(x)cos(y) \pm sen(y)cos(x)$
- $cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \pm sen(y)sen(x)$

- $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$

Funções Trigonométricas

- $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$
- $cotg^2(x) + 1 = cosec^2(x)$

Funções Trigonométricas

- $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$
- $cotg^2(x) + 1 = cosec^2(x)$
- $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$

Funções Trigonométricas

- $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$
- $cotg^2(x) + 1 = cosec^2(x)$
- $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
- $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$

Funções Trigonométricas

- $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$
- $cotg^2(x) + 1 = cosec^2(x)$
- $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
- $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$
- $cos^2(x) = \dfrac{1 + cos(2x)}{2}$

Funções Trigonométricas

- $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$
- $cotg^2(x) + 1 = cosec^2(x)$
- $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
- $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$
- $cos^2(x) = \dfrac{1 + cos(2x)}{2}$
- $sen^2(x) = \dfrac{1 - cos(2x)}{2}$

Limites de funções trigonométricas

Limites de funções trigonométricas

- $\lim_{x \to a} sen(x) = sen(a)$ e $\lim_{x \to a} cos(x) = cos(a)$

Limites de funções trigonométricas

- $\lim_{x\to a} sen(x) = sen(a)$ e $\lim_{x\to a} cos(x) = cos(a)$
- $\lim_{x\to a} tg(x) = tg(a)$ para $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Limites de funções trigonométricas

- $\lim_{x \to a} sen(x) = sen(a)$ e $\lim_{x \to a} cos(x) = cos(a)$
- $\lim_{x \to a} tg(x) = tg(a)$ para $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- Para $a \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{Z}\}$, temos

$$\lim_{x \to a^-} tg(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to a^+} tg(x) = -\infty$$

Limites de funções trigonométricas

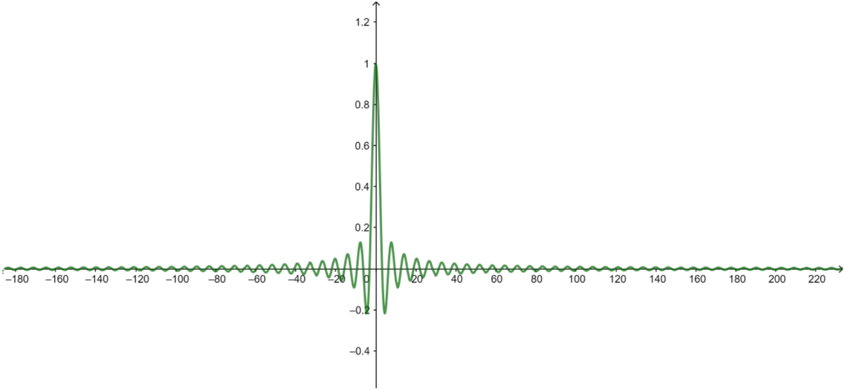
- $\lim_{x\to a} sen(x) = sen(a)$ e $\lim_{x\to a} cos(x) = cos(a)$
- $\lim_{x\to a} tg(x) = tg(a)$ para $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Para $a \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{Z}\}$, temos

$$\lim_{x\to a^-} tg(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to a^+} tg(x) = -\infty$$

- Não existem limites no infinito para as funções trigonométricas.

Limite trigonométrico fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \to \infty} \frac{sen(x)}{x} = 0$$

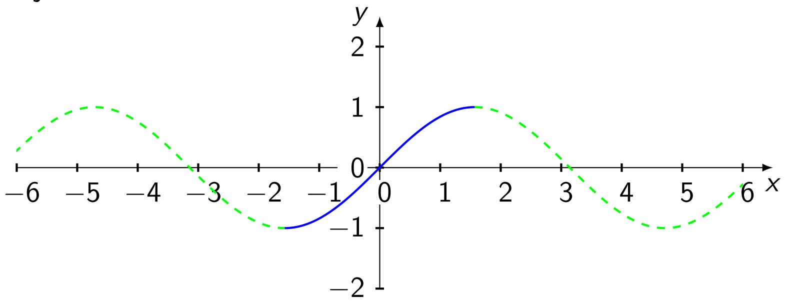


Funções trigonométricas inversas

Função arco-seno: A função seno definida em

$$\begin{array}{cccc} \text{sen:} & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & [-1, 1] \\ & \theta & \rightarrow & sen(\theta) \end{array}$$

é bijetora.



Sua inversa é a função arco-seno que é definida por:

$$\begin{array}{rccc} \text{arcsen:} & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ & x & \to & arcsen(x) \end{array}$$

onde $arcsen(x) = \theta$ se $sen(\theta) = x$. Por exemplo:

Sua inversa é a função arco-seno que é definida por:

$$\begin{array}{rccc} \text{arcsen:} & [-1,1] & \rightarrow & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ & x & \rightarrow & arcsen(x) \end{array}$$

onde $arcsen(x) = \theta$ se $sen(\theta) = x$. Por exemplo:

- $arcsen(0) = 0$, pois $sen(0) = 0$

Sua inversa é a função arco-seno que é definida por:

$$\begin{array}{rccc} \text{arcsen:} & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ & x & \to & arcsen(x) \end{array}$$

onde $arcsen(x) = \theta$ se $sen(\theta) = x$. Por exemplo:

- $arcsen(0) = 0$, pois $sen(0) = 0$
- $arcsen(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, pois $sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

Sua inversa é a função arco-seno que é definida por:

$$\begin{array}{rcl} \text{arcsen:} \quad [-1,1] & \rightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \rightarrow & arcsen(x) \end{array}$$

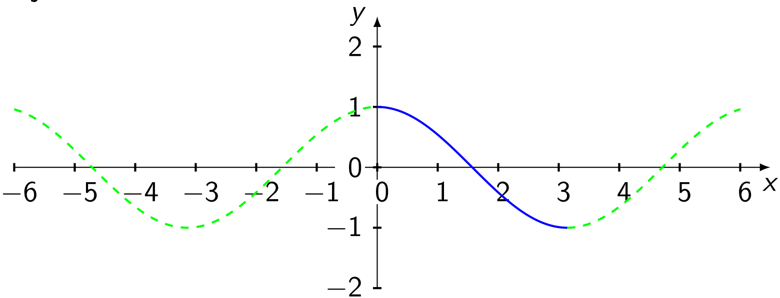
onde $arcsen(x) = \theta$ se $sen(\theta) = x$. Por exemplo:

- $arcsen(0) = 0$, pois $sen(0) = 0$
- $arcsen(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, pois $sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$
- $arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$, pois $sen(\frac{\pi}{2}) = 1$

Função arco-cosseno: A função cosseno definida em

$$\begin{array}{rccc} \cos\colon & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & \theta & \to & cos(\theta) \end{array}$$

é bijetora.



Sua inversa é a função arco-cosseno que é definida por:

$$\begin{array}{rccc} \text{arccos:} & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \to & arccos(x) \end{array}$$

onde $arccos(x) = \theta$ se $cos(\theta) = x$. Por exemplo:

Sua inversa é a função arco-cosseno que é definida por:

$$\begin{array}{rccc} \text{arccos:} & [-1, 1] & \rightarrow & [0, \pi] \\ & x & \rightarrow & arccos(x) \end{array}$$

onde $arccos(x) = \theta$ se $cos(\theta) = x$. Por exemplo:

- $arccos(1) = 0$, pois $cos(0) = 1$

Sua inversa é a função arco-cosseno que é definida por:

$$\begin{array}{rccc} \text{arccos:} & [-1,1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ & x & \rightarrow & arccos(x) \end{array}$$

onde $arccos(x) = \theta$ se $cos(\theta) = x$. Por exemplo:

- $arccos(1) = 0$, pois $cos(0) = 1$
- $arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, pois $cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

Sua inversa é a função arco-cosseno que é definida por:

$$\begin{array}{rccc} \text{arccos:} & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \to & arccos(x) \end{array}$$

onde $arccos(x) = \theta$ se $cos(\theta) = x$. Por exemplo:

- $arccos(1) = 0$, pois $cos(0) = 1$
- $arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, pois $cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
- $arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$, pois $cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$