Unidade Acadêmica
de Matemática

Matemática e Estatística

Minicurso
Pré-Cálculo Diferencial e Integral

Ronaldo C. Silva

27 de abril de 2022

Ementa do curso de Cálculo Diferencial e Integral I

- Limite e continuidade
- Derivadas
- Aplicação de Derivadas
- Integral

Introdução

Dia 2

- Vários exemplos de funções
- estudo de imagem, limite, domínio entre outras coisas

Dia 3

- Limites laterais e ideia intuitiva de continuidade
- Funções trigonométricas

Aula 1 - Funções

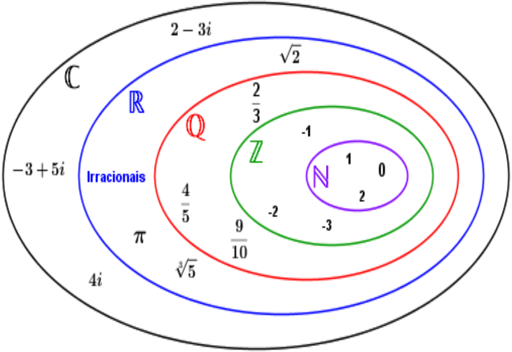
- Definição de função
- Gráfico de uma função
- Função bijetora e função inversa
- Função crescente e função decrescente, concavidade
- Função par e função impar
- Translação de gráficos
- Modelagem matemática

Motivação

Exemplos:

1. A temperatura de ebulição da água depende da altitude;
2. Os juros pagos sobre investimento dependem do tempo que o dinheiro permanece investido
3. A área de um círculo depende do raio desse círculo.
4. A distância que um objeto percorre a uma velocidade constante, a partir de um ponto inicial, ao longo de uma trajetória reta, depende do tempo transcorrido.

Conjuntos



$2-3i$
$\sqrt{2}$
$\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$
$\frac{2}{3}$
$\mathbb{Q}$
-1
$\mathbb{Z}$
1
0
$-3+5i$
Irracionais
$\mathbb{N}$
$\frac{4}{5}$
2
-2
-3
$\frac{9}{10}$
π
$\sqrt[3]{5}$
$4i$

Função

Matéria-prima: algodão.

Indústria têxtil

Produtos industrializados e resíduos (gases poluentes, esgoto industrial, etc.)

Produto final: roupas e tecidos.

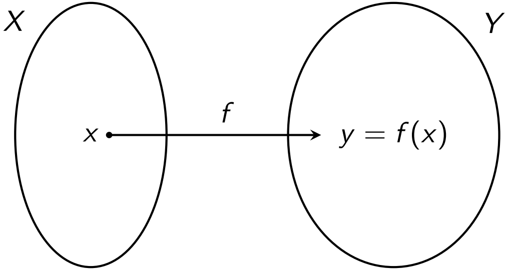
Fonte: https://commons.wikimedia.org

Função

Função

Definição

Uma **função** de um conjunto X para um conjunto Y é uma regra que associa a **cada** elemento $x \in X$ um **único** elemento $f(x) \in Y$.



Função

- Notação: $f : X \to Y$
- Nessa notação, o símbolo f representa a **função**.
- O conjunto X de todos os possíveis valores de entrada é chamado de **domínio**.
- O conjunto Y é chamado de **contra-domínio**.
- O conjunto

$$Im(f) = \{y \in Y; y = f(x) \text{ para algum } x \in X\}$$

é chamado de **imagem** da função f.

Função

No cálculo estamos interessados em **funções reais de uma variável real,** que são funções que tem domínio e contradomínio no conjunto dos números reais, ou seja,

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

onde $X = dom(f)$ é o domínio da função f.

Observação

Quando uma função for dada apenas pela sua lei de formação tomaremos para o domínio o maior subconjunto dos números reais para o qual a lei de formação pode ser aplicada e para o contradomínio o conjunto dos números reais.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei de formação

$$f(x) = x^2$$

- $f(0) = 0^2 = 0$, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$
- $f(-1) = (-1)^2 = 1$, $f(-2) = (-2)^2 = 4$, $f(-3) = (-3)^2 = 9$, ...
- $16 \in Im(f)$? Sim, pois $f(4) = 4^2 = 16$.
- $-1 \in Im(f)$? Não, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$.
- $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$

Exemplo: Considere a função definida pela lei de formação

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

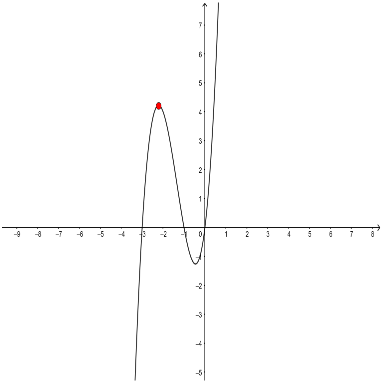
- $f(0) = \frac{2}{0^2-1} = -2$
- $f(2) = \frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3}$ e $f(-2) = \frac{2}{(-2)^2-1} = \frac{2}{3}$
- Ao tentarmos calcular $f(1)$ temos o seguinte problema:

$$f(1) = \frac{2}{1^2 - 1} = \frac{2}{0}$$

- Temos o mesmo problema ao tentar calcular $f(-1)$.
- $dom(f) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Gráfico

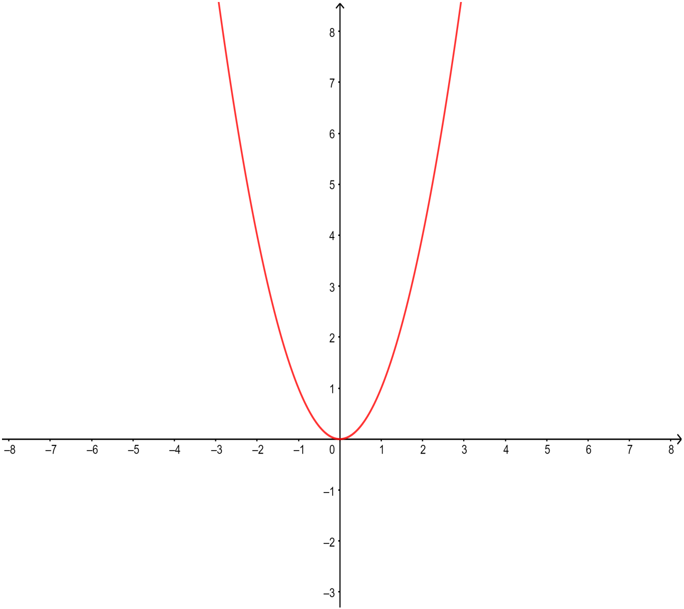
Também é possível visualizar uma função por meio de seu gráfico, se f é uma função com domínio X, seu **gráfico** é formado pelos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas sejam os pares "entrada-saída" formados pelos pontos da forma $(x, f(x))$.



Exemplo: Considere a função $f(x) = x^2$. Como

- $f(0) = 0^2 = 0$, então (0,0) pertence ao gráfico de $f(x) = x^2$
- $f(1) = 1^2 = 1$, então (1,1) pertence ao gráfico de $f(x) = x^2$
- $f(2) = 2^2 = 4$, então (2,4) pertence ao gráfico de $f(x) = x^2$
- $f(-1) = (-1)^2 = 1$, então (-1,1) pertence ao gráfico de $f(x) = x^2$
- $f(-2) = (-2)^2 = 4$, então (-2,4) pertence ao gráfico de $f(x) = x^2$
- $f(-3) = (-3)^2 = 9$, então (-3,9) pertence ao gráfico de $f(x) = x^2$

Gráfico da função $f(x) = x^2$



Exemplo: Considere a função $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$. Como

- $f(0) = \frac{2}{0^2-1} = -2$, então (0,-2) pertence ao gráfico de f
- $f(2) = \frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3}$, então $(2, \frac{2}{3})$ pertence ao gráfico de f
- $f(-2) = \frac{2}{(-2)^2-1} = \frac{2}{3}$, então (-2,$\frac{2}{3}$) pertence ao gráfico de f
- Lembrando que não existe $f(1)$ e $f(-1)$.

Gráfico da função $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$

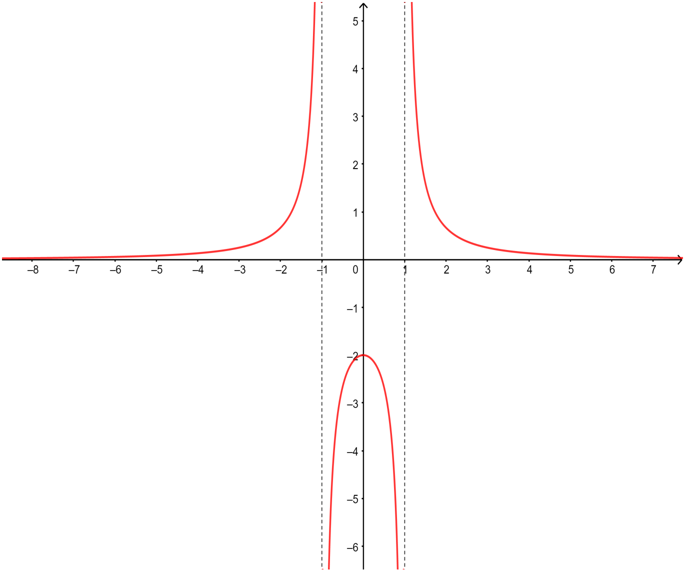
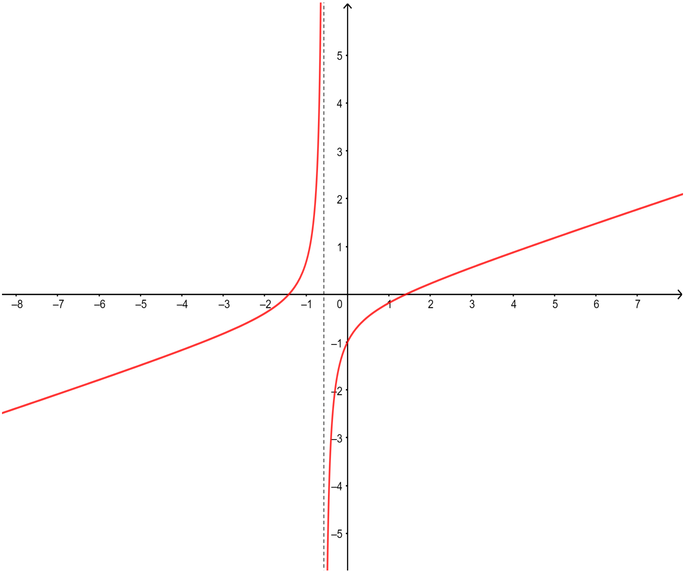
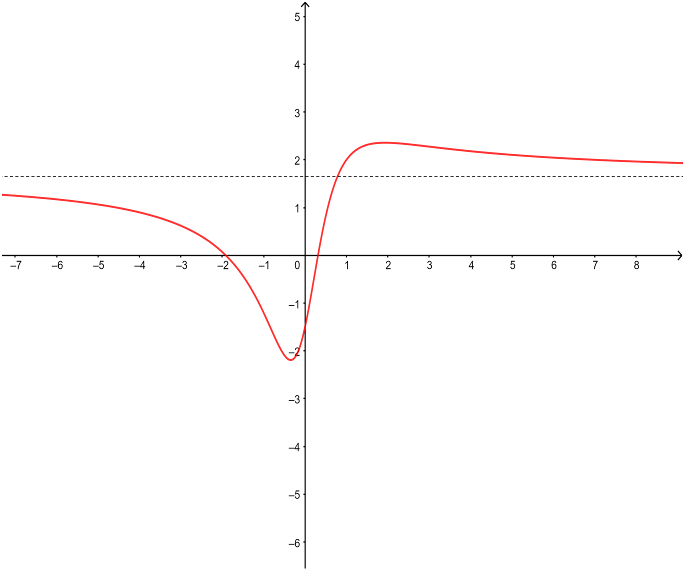


Gráfico da função $f(x) = \frac{2x^2-4}{7x+4}$



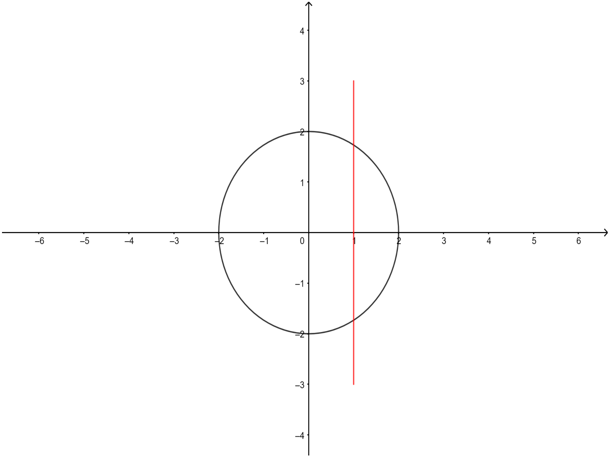
Exemplo: Considere a função $f(x) = \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$



Teste da Reta Vertical

Nem toda curva será o gráfico de uma função.
Uma função f pode ter apenas um valor $f(x)$ para cada x em seu domínio, portanto nenhuma **reta vertical** poderá cruzar a curva da função mais de uma vez.

Exemplo: O circulo de raio 2 não é o gráfico de nenhuma função

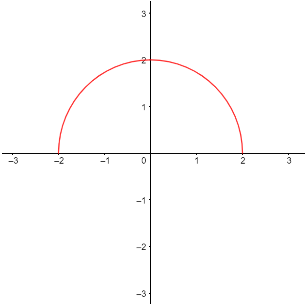


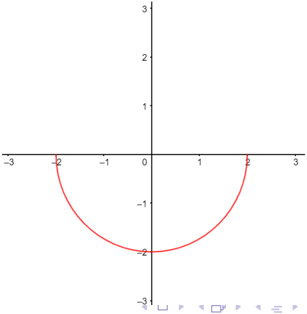
Gráfico

Sabemos que o circulo de raio 2 é dado pela equação $x^2 + y^2 = 4$. Podemos escrever

$$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Com isso, temos definidas duas funções cujo gráficos
São os semicírculos $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

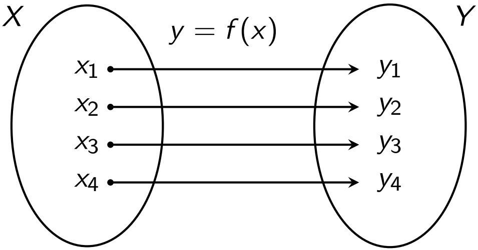




Função Bijetora e função inversa

Uma função $f : X \to Y$ é dita:

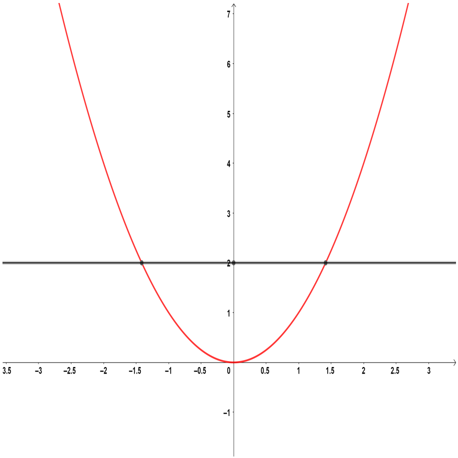
- **Injetora** se $x_1 \neq x_2$ implicar $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- **Sobrejetora** se $Im(f) = Y$,
- **Bijetora** se é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.



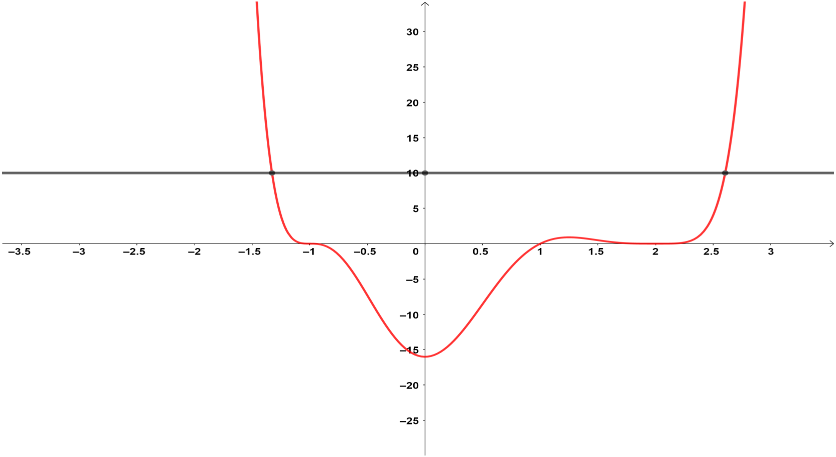
Observação (Teste da reta horizontal)

Uma função $y = f(x)$ é injetora se, e somente se, cada reta horizontal intercepta o gráfico de f no máximo uma vez.

Exemplo: Pelo teste da reta horizontal, podemos concluir que a função $f(x) = x^2$ não é injetora.

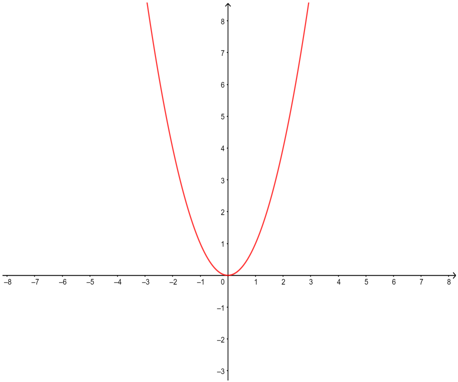


Exemplo: Considere a função $f(x) = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$



Exemplo: Considere a função $f(x) = x^2$.

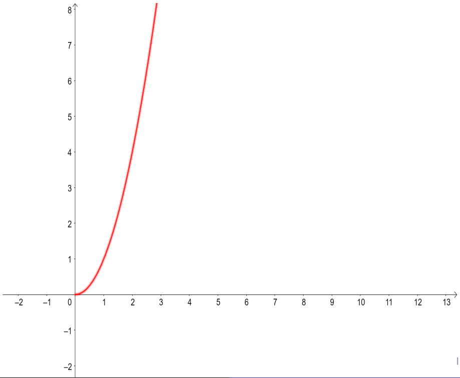
- f não é injetora, pois $1 \neq -1$ e $f(1) = f(-1) = 1$
- f não é sobrejetora, pois $-1 \notin Im(f) = \mathbb{R}_+$.



Função bijetora e função inversa

Exemplo: Considere a função $f(x) = x^2$.

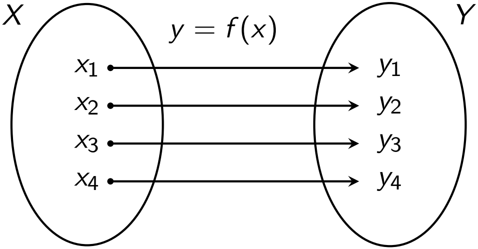
- Alterando o domínio de f para $\mathbb{R}_+$, temos que f é injetora.
- Alterando o contradomínio de f para $\mathbb{R}_+$, então f será sobrejetora. Portanto, a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetora.



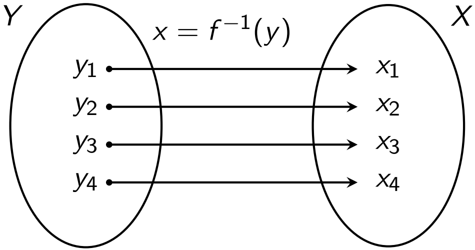
Função bijetora e função inversa

Suponha que $f : X \to Y$ é uma função bijetora. A função inversa $f^{-1} : Y \to X$ é definida por

$$f^{-1}(y) = x \textbf{ se } f(x) = y.$$



X
Y
y = f(x)
x1 x2 x3 x4
y1 y2 y3 y4



Y
X
x = f−1(y)
y1 y2 y3 y4
x1 x2 x3 x4

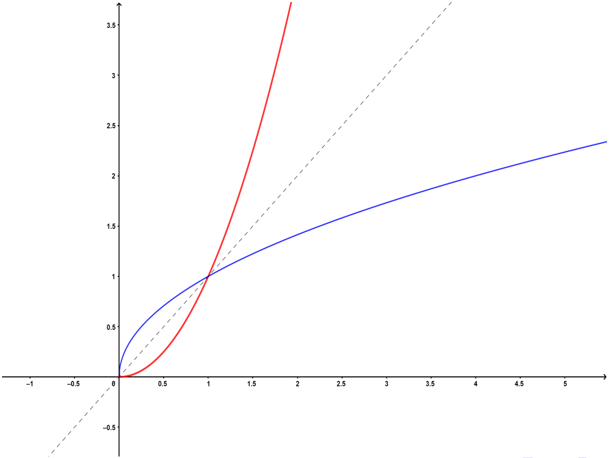
Função bijetora e função inversa

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x$, então f é bijetiva e sua inversa é definida por $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x + 1$, então f é bijetiva e sua inversa é definida por $f^{-1}(x) = x - 1$.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x + 1$, então f é bijetiva e sua inversa é definida por $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

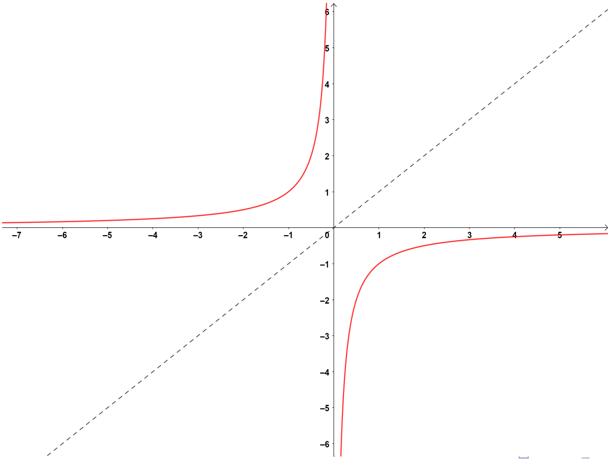
Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$. Como vimos f é bijetora. Sua inversa é a função $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



Função bijetora e função inversa

Observação

O gráfico de uma $f(x)$ e da sua inversa $f^{-1}(x)$ são simétricos com relação a reta identidade.



Função crescente e função decrescente

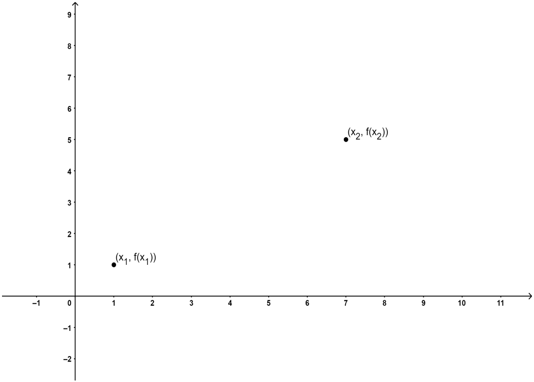
- Uma função $y = f(x)$ é **crescente** se:

$$x_1 < x_2, \text{ então } f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Uma função $y = f(x)$ é **decrescente** se:

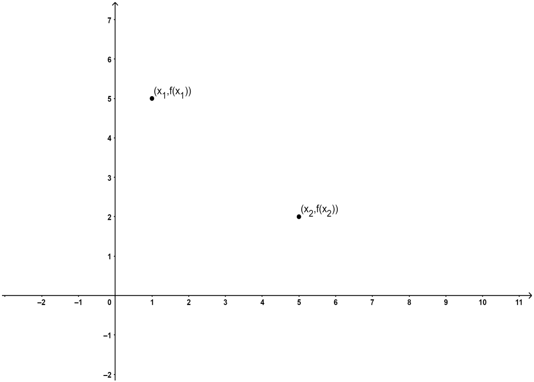
$$x_1 < x_2, \text{ então } f(x_1) \geq f(x_2).$$

Função crescente

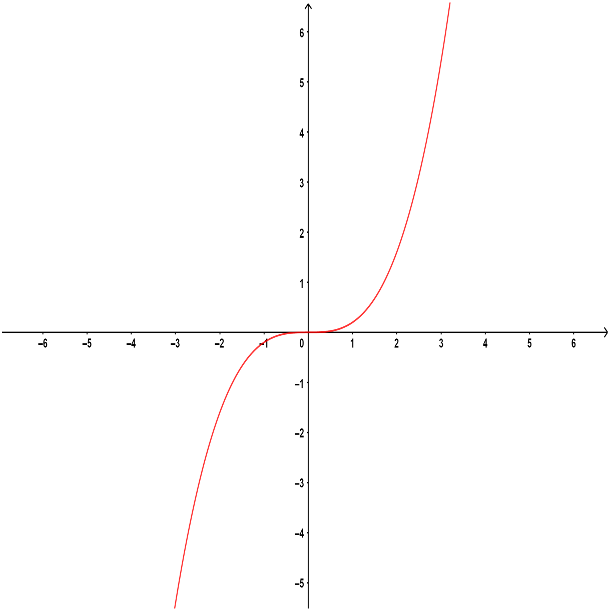


O gráfico de uma função crescente "aumenta" da esquerda para a direita.

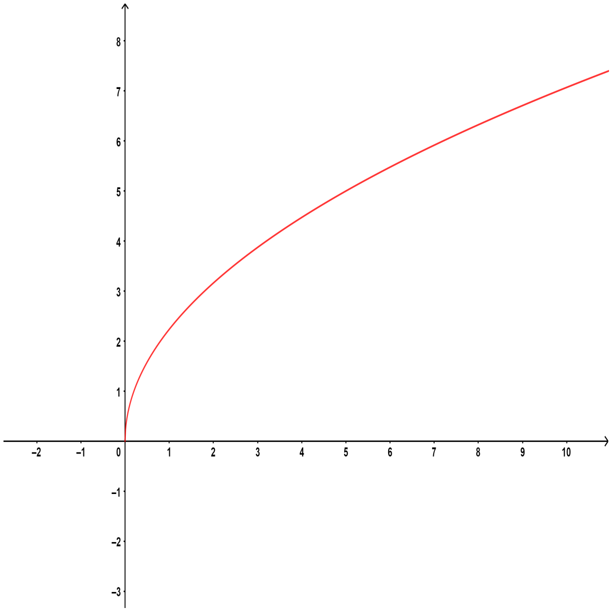
Função decrescente

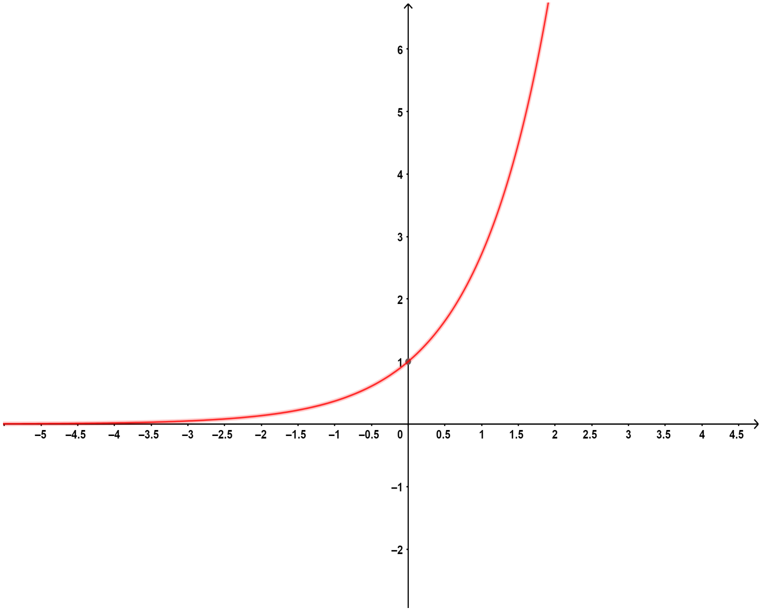


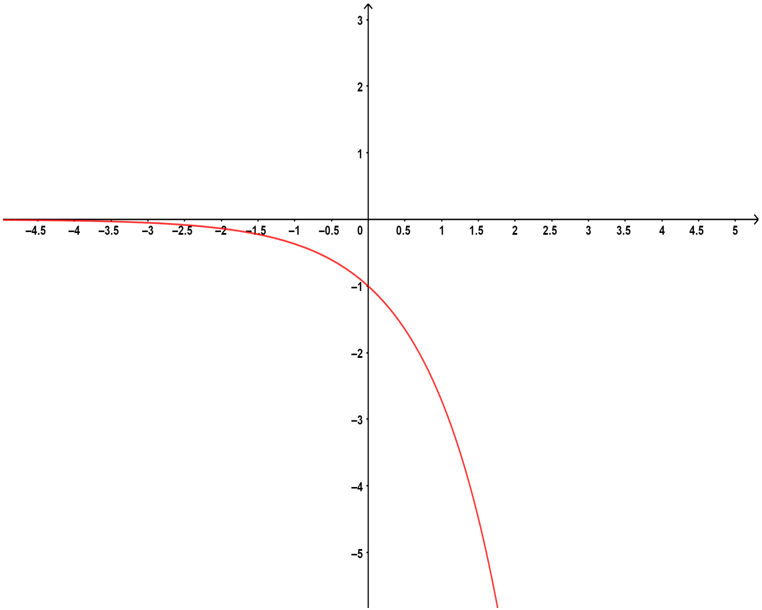
O gráfico de uma função decrescente “diminui” da esquerda para a direita.



−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
−1
−2
−3
−4
−5


8
7
6
5
4
3
2
1
–1
–2
–3
–2
–1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−5
−4.5
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5


−4.5
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5

Função crescente e função decrescente em um intervalo

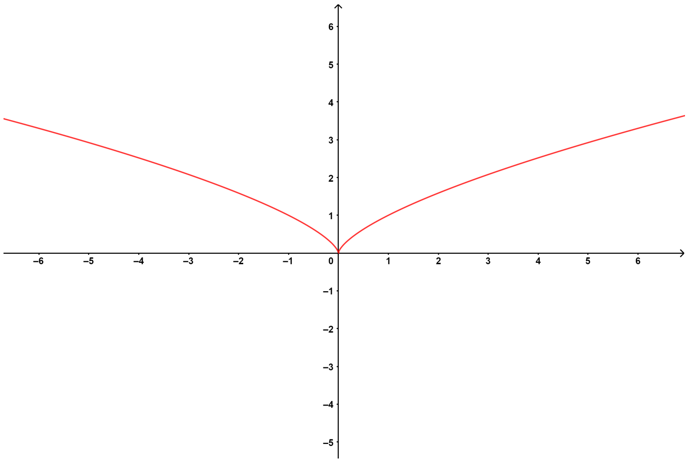
- Uma função f é crescente em um intervalo I se para cada

$$x_1,\, x_2 \in I, \text{ com } x_1 < x_2 \text{ temos } f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Uma função f é decrescente em um intervalo I se para cada

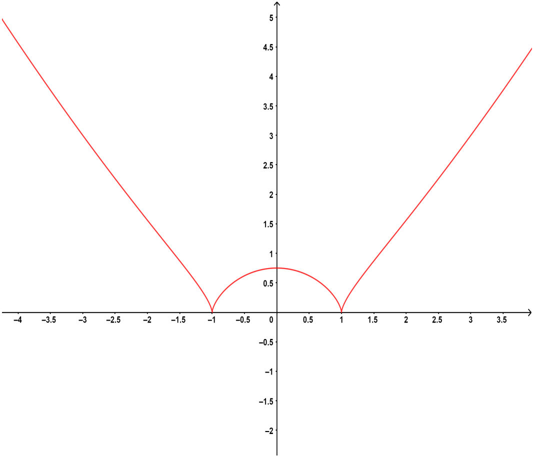
$$x_1,\, x_2 \in I, \text{ com } x_1 < x_2 \text{ temos } f(x_1) \geq f(x_2).$$

Exemplo: Considere a função $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.



f é decrescente em $(-\infty,\ 0)$ e f é crescente em $(0,\ \infty)$.

Exemplo: Considere a função $f(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$.



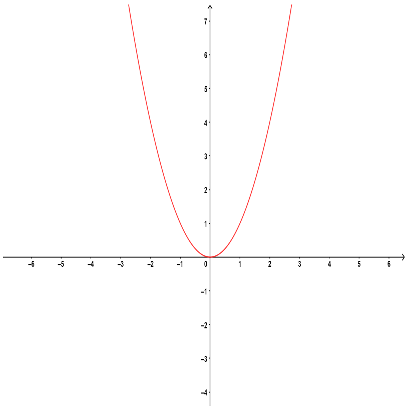
f é crescente em $(-1,\, 0) \cup (1,\, \infty)$ e f é decrescente em $(-\infty,\, 1) \cup (0,\, 1)$.

Funções pares e ímpares

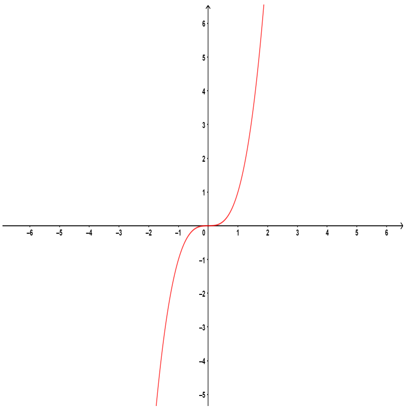
- Uma função $y = f(x)$ é par se $f(-x) = f(x)$, para todo x.
- Uma função $y = f(x)$ é impar se $f(-x) = -f(x)$, para todo x.

Observação

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e o gráfico de uma função impar é simétrico em relação a origem.



-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7



-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Translação de gráficos

Translação vertical: $y = f(x) + k$

- Se $k > 0$: translada o gráfico k unidades **para cima**.
- Se $k < 0$: translada o gráfico $|k|$ unidades **para baixo**.

Translação Horizontal: $y = f(x + h)$

- Se $h > 0$: translada o gráfico h unidades **para a esquerda**.
- Se $h < 0$: translada o gráfico $|h|$ unidades **para a direita**.

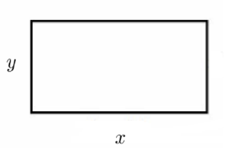
Mudança horizontal, vertical e reflexão

Para c > 1 :

- $y = cf(x)$: alonga o gráfico de f verticalmente;
- $y = \frac{1}{c}f(x)$: comprime o gráfico de f verticalmente;
- $y = f(cx)$: comprime o gráfico de f horizontalmente;
- $y = f(x/c)$: alonga o gráfico de f horizontalmente;
- $y = -f(x)$: reflete o gráfico de f em torno do eixo x;
- $y = f(-x)$: reflete o gráfico de f em torno do eixo y;

Exemplo: Um retângulo tem perímetro de 20 m. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

Solução: Seja x e y os lados do retângulo.



Como o perímetro é 20 m, então $2x + 2y = 20$ e a área é $A = xy$. Queremos escrever a área como uma função de x ou y.

Escrevendo,

$$y = 10 - x$$

e substituindo na expressão da área, temos:

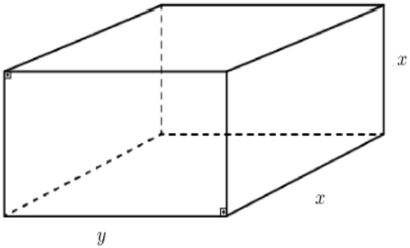
$$\begin{aligned} A &= xy \\ &= x(10 - x) \\ &= 10x - x^2 \end{aligned}$$

Então, a área é dada em função do lado x do retângulo por:

$$A(x) = 10x - x^2$$

.

Exemplo: Suponha que uma caixa d'água (sem tampa) deve ter o formato de um paralelepípedo reto retângulo, ter altura igual a largura e que a soma das áreas de sua parede (incluindo o fundo) seja $6m^2$. Escreva o volume da caixa como função de uma da altura.



Modelagem Matemática

O volume da caixa é dado por

$$V = xy \cdot x = x^2 y$$

Como a soma das áreas das paredes (incluindo o fundo) é

$$3xy + 2x^2 = 6$$

Assim,

$$y = \frac{6 - 2x^2}{3x}$$

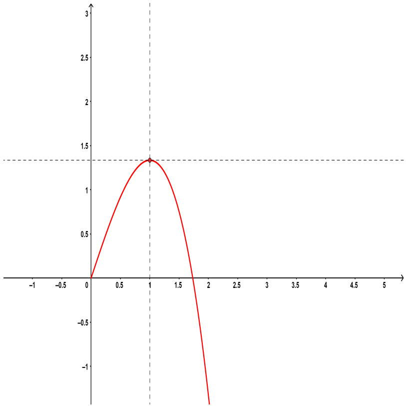
Substituindo no volume, temos o volume como uma função de x:

$$V(x) = x^2\left(\frac{6-2x^2}{3x}\right) = \frac{6x-2x^3}{3}$$

$$V(x) = 2x - \frac{2}{3}x^3$$

Exemplo: Suponha que uma caixa d'água (sem tampa) deve ter o formato de um paralelepípedo reto retângulo, ter altura igual a largura e que a soma das áreas de sua parede (incluindo o fundo) seja $6m^2$.Determine suas dimensões para que sua capacidade seja a maior possível.

Solução: Abaixo temos o gráfico da função $V(x) = 2x - \frac{2}{3}x^3$ encontrada no exemplo anterior



Função

Analisando o gráfico da função que fornece o volume em função do lado x, temos que o volume é máximo quando $x = 1$. Assim,

$$y = \frac{6 - 2(1)^2}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3}$$

Logo, as dimensões para que o volume seja máximo são $x = 1$ e $y = \frac{4}{3}$.

Muito obrigado pela atenção!

Qualquer dúvida pode entrar em contato:

ronaldo.costa@estudante.ufcg.edu.br