ERA UMA VEZ
um blog que se faz (de) contas

ESTRATÉGIAS MATRICIAIS: EXPLORANDO A ÁLGEBRA LINEAR APLICADA À TEORIA DE JOGOS

Celine Ingrid Gomes dos Santos – Matemática, UFCG
celineingridgomess@hotmail.com
Programa de Educação Tutorial (PET) – Matemática e Estatística

A Álgebra Linear é um ramo da Matemática que estuda as propriedades dos espaços vetoriais e as transformações lineares. Essa área é fundamental para a resolução de problemas que envolvem sistemas lineares e Geometria Analítica.

Dentre as vastas aplicações aos diversos campos da ciência, destacamos que a Álgebra linear desempenha um papel importante na teoria de jogos. Por meio dela, é possível modelar e analisar as estratégias dos jogadores utilizando vetores, por exemplo. Além disso, cabe destacar, ainda, que "situações de conflito, ou qualquer outra forma de interação podem ser consideradas como jogos e as pessoas que participam desses eventos são chamados de jogadores." (SOARES, 2007, p. 9)

Os resultados, definições e exemplos contextualizados que serão apresentados aqui foram todos retirados das referências [1] e [2].

Vamos considerar um jogo genérico de parque de diversões em que dois oponentes, os quais chamaremos de L e C, escolhem estratégias distintas. Cada jogador possui uma roda estacionária com um ponteiro móvel fixado em seu centro, semelhante a um relógio.

Figura 1 – Roda das linhas de L

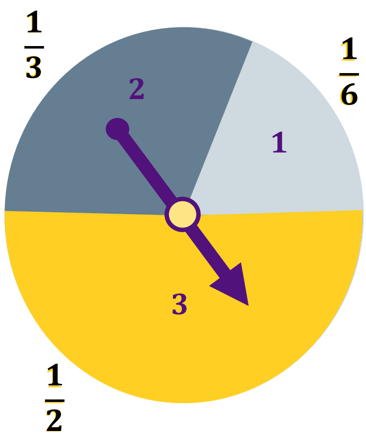
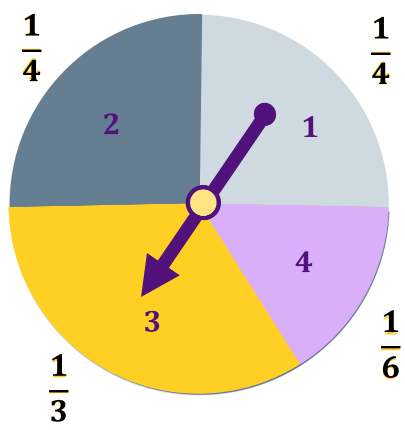


Figura 2 – Roda das colunas de C



Fonte: A autora.

Denominaremos a roda dos jogadores L e C como roda das linhas e roda das colunas, respectivamente. Desse modo, é perceptível que a roda das linhas é dividida em três setores, enquanto a das colunas é dividida em quatro.

Para jogar, cada um dos participantes gira o ponteiro de sua roda, até que ele pare em um dos setores aleatoriamente. O número do setor em que a roda parar é chamado de movimento do jogador. Assim, vemos que L tem três possíveis movimentos e C possui quatro. E, ainda, é importante destacar que os jogadores não têm controle dos seus movimentos, ou seja, o movimento é feito aleatoriamente, de acordo com o resultado da roleta.

De acordo com o movimento feito por cada jogador, o participante C faz um pagamento em dinheiro para L, conforme ilustra a tabela a seguir. Por exemplo, se o participante L fizer o movimento 1 e o participante C fizer o movimento 2, então C fará um pagamento de R$ 5,00 para L. Além disso, as entradas negativas da tabela indicam que o jogador C deve fazer um pagamento negativo ao seu oponente. Em outras palavras, L fará um pagamento positivo a C.

Tabela 1 – Pagamentos ao jogador L

		Movimento do jogador C			
		1	2	3	4
Movimento do jogador L	1	$R\$ 3$	$R\$ 5$	$-R\$ 2$	$-R\$ 1$
	2	$-R\$ 2$	$R\$ 4$	$-R\$ 3$	$-R\$ 4$
	3	$R\$ 6$	$-R\$ 5$	$R\$ 0$	$R\$ 3$

Perceba que a cada vez que é jogado, o ganho positivo de L é igual ao ganho negativo de C, e vice-versa. Devido a isso, esse tipo de jogo é chamado de jogo de matriz de duas pessoas com soma zero, uma vez que, ao somar os respectivos ganhos citados, o resultado é igual a zero.

Observe que a probabilidade do jogador fazer um determinado movimento é dado pela razão da área do setor correspondente pela área da roleta completa. Por exemplo, a probabilidade do jogador L fazer a jogada 1 é de $\frac{1}{6}$, e a probabilidade do jogador C fazer o movimento 3 é de $\frac{1}{3}$.

De modo geral, seja m o número de possíveis movimentos do jogador L e n o de C. Em um lance qualquer desse jogo, cada um dos jogadores faz um de seus possíveis movimentos e, assim, é feita uma compensação do jogador C para o L. Essa compensação pode ser em qualquer espécie de bem ao qual possamos atribuir um valor numérico.

Para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$, denote a_{ij} a compensação do jogador C para o jogador L, se o jogador L faz o movimento i e o jogador C faz o movimento j. Dessa forma, arranjamos essas mn compensações possíveis da forma mais natural: no formato de uma matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a qual será chamada $matriz\ de\ compensação$.

Suponha que cada jogador faz suas jogadas numa base probabilística. Denotando por

$$p_i = \text{probabilidade de que o jogador L faça o movimento } i$$
$$q_j = \text{probabilidade de que o jogador C faça o movimento } j,$$

temos

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1,$$
$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1.$$

Além disso, os vetores

$$p = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_m] \quad \text{e} \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

são chamados de estratégias dos jogadores L e C, respectivamente.

Ademais, de acordo com a Teoria das Probabilidades, se p_i e q_i são independentes, então o produto $p_i q_j$ será a probabilidade de L fazer o movimento i e C o movimento j, simultaneamente. Multiplicando cada possível compensação pela correspondente probabilidade e, logo após, somando todas as compensações possíveis, obtemos a compensação esperada para o jogador L, dada por

$$E(p,q) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + \cdots + a_{1n}p_1q_n + a_{21}p_2q_1 + \cdots + a_{mn}p_mq_n.$$

Além disso, também podemos expressá-la pelo produto de matrizes

$$E(p,q) = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_m] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Voltando ao parque de diversões, temos que

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } q = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Assim, a compensação esperada para o jogador L é

$$E(p,q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{13}{72} = 0{,}1805 \ldots.$$

ou seja, espera-se que L ganhe R$ 0,1805 do jogador C.

Teorema fundamental dos jogos com soma zero: Existem estratégias p^* e q^* tais que

$$E(p^*,q) \geq E(p^*,q^*) \geq E(p,q^*),$$

para quaisquer que sejam as estratégias p e q.

As estratégias p^* e q^* do Teorema são as melhores estratégias para os jogadores L e C, respectivamente.

Definição: Se p^* e q^* forem estratégias tais que

$$E(p^*,q) \geq E(p^*,q^*) \geq E(p,q^*),$$

para quaisquer que sejam as estratégias p e q, então dizemos que:

(i) p^* é uma $estratégia\ ótima\ para\ o\ jogador\ L$;

(ii) q^* é uma $estratégia\ ótima\ para\ o\ jogador\ C$;

(iii) a compensação esperada $E(p^*,q^*)$ é o $valor\ do\ jogo$.

Perceba que o artigo indefinido "uma" sugere que as estratégias ótimas não são necessariamente únicas e, de fato, isso realmente ocorre (consulte [2] para ver a demonstração desse fato). Entretanto, pode ser demonstrado que quaisquer dois pares de estratégias ótimas sempre resultam no mesmo valor do jogo. Assim, o valor de um jogo é a compensação esperada para o jogador L quando ambos os jogadores estiverem munidos de quaisquer duas estratégias ótimas possíveis.

Definição: Uma entrada a_{rs} de uma matriz de compensação A é denominada $ponto\ de\ sela$ se a_{rs} for a menor entrada em sua linha e a maior entrada em sua coluna, simultaneamente. Dizemos que um jogo cuja matriz de compensação possui um ponto de sela é estritamente determinado.

Exemplo: Na matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 9 & 10 & 7 & 9 \\ 10 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

o número 7 na entrada a_{33} é ponto de sela.

Se uma matriz possuir um ponto de sela a_{rs}, as estratégias ótimas para os jogadores são as seguintes:

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Também é possível mostrar que o valor de um jogo estritamente determinado é simplesmente o valor numérico do ponto de sela a_{rs}. Ademais, pode ocorrer de uma matriz de compensação possuir vários pontos de sela, no entanto, a unicidade do valor de um jogo garante que o valor numérico de todos os pontos de sela é o mesmo.

Exemplo – Estratégias ótimas para maximizar uma audiência: Duas redes de televisão competidoras, L e C, estão planejando levar ao ar programas de uma hora de duração em um mesmo horário. A rede L pode utilizar um de três programas possíveis e a rede C pode utilizar um de quatro programas possíveis. Nenhuma das redes sabe qual programa a outra vai levar ao ar. Ambas as redes contratam o mesmo instituto de pesquisa de opinião para lhes dar uma estimativa de como as diversas possibilidades de transmitir os dois programas vão dividir a audiência. O instituto dá às redes a Tabela 2, cuja (i, j) −ésima entrada é a porcentagem da audiência que assistirá à rede L se o programa i da rede L competir, em termos de audiência, com o programa j da rede C. Qual programa cada rede deveria levar ao ar para maximizar a audiência?

Tabela 2 – Porcentagem de audiência para a rede L

		Programa da rede C			
		1	2	3	4
Programa da rede L	1	60	20	30	55
	2	50	75	45	60
	3	70	45	35	30

Podemos construir a matriz de compensação do jogo de duas pessoas com soma zero,

$$\begin{bmatrix} 60 & 20 & 30 & 55 \\ 50 & 75 & 45 & 60 \\ 70 & 45 & 35 & 30 \end{bmatrix},$$

em que a (i, j) −ésima entrada da matriz é a porcentagem da audiência que a rede C perde para a rede L se os programas i da rede L e j da rede C competirem entre si. Perceba que a entrada $a_{23} = 45$ é um ponto de sela da matriz de compensação. Portanto, a estratégia ótima para a rede L é levar ao ar o programa 2 e a estratégia ótima para a rede C é levar ao ar o programa 3. Se assim o for, teremos 45% da audiência para a rede L e, consequentemente, 55% para a rede C.

Exemplo (Cara ou coroa): Considere o jogo de cara ou coroa com a seguinte matriz de compensação:

Jogador C

$$\text{Jogador L} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & K \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ K \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Perceba que esse jogo não é estritamente determinado, uma vez que a matriz não possui ponto de sela. Dessarte, precisamos analisar a situação sob uma ótica diferente.

A priori, vamos supor que o jogo é jogado repetidamente e que os jogadores tentam determinar suas melhores jogadas. Então, o jogador L tenta maximizar suas vitórias, enquanto que o jogador C tenta minimizar suas perdas.

Suponhamos, ainda, que, ao jogar repetidamente, L sempre escolha a primeira linha (sempre mostre a face cara) na esperança de que o jogador C escolha sempre a primeira coluna (mostre a face cara), garantindo, assim, seu ganho de $R\$\ 1,00$. Entretanto, quando o jogador C notar que L sempre escolhe a primeira linha, ele decide escolher a segunda coluna, resultando em uma perda de $R\$\ 1,00$ para L. Analogamente, temos o caso em que L sempre escolhe a segunda linha.

Podemos concluir, dessa forma, que cada jogador precisa impedir o outro jogador de descobrir qual vai ser sua jogada. Essa situação diverge do que acontece em jogos estritamente determinados.

REFERÊNCIAS

[1] ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra Linear com aplicações. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
[2] SOARES, Velani Dasi. **Uma Introdução à Teoria de Jogos.** Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, p. 93. 2007.