

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Matemática

A Desigualdade Isoperimétrica

por

Jogli Gidel da Silva Araújo

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em matemática.

Campina Grande, 2011.

A Desigualdade Isoperimétrica

por

Jogli Gidel da Silva Araújo

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima
Orientador

Sumário

1	Introdução	8
2	Séries de Fourier	11
2.1	Funções Periódicas	11
2.2	Convergência Pontual e Convergência Uniforme de Séries de Funções	12
2.3	Coeficientes de Fourier	15
2.4	Série de Fourier	20
2.5	Integração das Séries de Fourier	23
2.6	A Desigualdade de Bessel	26
2.7	Identidade de Parseval	29
3	Curvas Planas	31
3.1	O Teorema de Green	35
4	A Desigualdade Isoperimétrica	39
4.1	Demonstração Analítica	41
4.2	Demonstração Geométrica 1	43
4.3	Demonstração Geométrica 2	44
4.4	Aplicações	49
	Referências Bibliográficas	49

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um problema clássico do Cálculo Variacional, a Desigualdade Isoperimétrica. Esse problema afirma que, dentre todas as curvas planas fechadas e simples com o mesmo comprimento, aquela que limita a maior área é a circunferência. Para uma melhor compreensão dessa desigualdade, inserimos três demonstrações (analítica, geométrica 1 e 2), que juntamente com o Teorema de Green, Lema de Wirtinger e a identidade de Parseval, foram importantes na obtenção dos resultados.

Abstract

In this work we present a classic problem of variational calculus, the isoperimetric inequality. This problem states that among all closed planar curves and simple with the same length, one that limited area is the largest circumference. For better of Comprehension inequality, we insert three statements (analytic geometry 1 and 2), which with Green's Theorem, Wirtinger's Lemma and the identity of Parseval, were important in obtaining results.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus. Segundamente, agradeço a minha família e também aos professores:

-José Fernando Leite, um grande companheiro e amigo.

-Marco Aurélio, obrigado pelas dicas de Matemática.

-Daniel Cordeiro, muito obrigado pelas dicas de redação matemática e pela sua excelente orientação do grupo PET Matemática UFCG, na qual fiz parte, durante três anos.

-Antônio Pereira Brandão, muito obrigado pelas lições de Álgebra.

-Henrique Fernandes de Lima, na qual foi meu orientador de Iniciação Científica, e esse trabalho surgiu sob a sua orientação, e qualquer erro nesse trabalho é de minha inteira responsabilidade. Muito obrigado pela sua excelente orientação.

Também não poderia de falar em meus colegas do Grupo PET Matemática UFCG(Alan, André, Arthur, Maciene, Mário, Michel, Juarez, Lorena, Matheus e Paulo), também Jamilly, Maiara, Maria José, Nailton, Fabrício, José Marcos e Michel Barros, e também os professores e funcionários do DME.

Dedicatória

Aos meus pais, Josemir e Luciene.

Capítulo 1

Introdução

O Teorema da Desigualdade Isoperimétrica surge do seguinte problema:

"Dentre todas as curvas fechadas simples no plano, de mesmo comprimento L , qual limita a maior área?"

Esse problema e sua solução já eram conhecidos pelos gregos antigos, porém uma demonstração satisfatória de que a solução é uma circunferência, demorou um longo tempo para aparecer. Apenas em 1870, que K. Weierstrass (1815 – 1897) provou esse teorema. Segundo [6], a demonstração de Weierstrass era um tanto difícil, no sentido em que ela era um corolário de uma teoria que ele desenvolveu, para tratar problemas envolvendo maximização (ou minimização) de certas integrais. Esta teoria é o Cálculo das Variações e a Desigualdade Isoperimétrica (ou o problema isoperimétrico) é um exemplo típico dos problemas que por ela são tratados.

O Teorema da desigualdade isoperimétrica afirma que qualquer curva α fechada simples de comprimento L , aquela que limita a maior área é a circunferência, e mais, vale a seguinte desigualdade:

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

e ocorre a igualdade se, e somente se, α for uma circunferência. Se α for uma circunferência, então verifica-se que o seu raio é $\frac{L}{2\pi}$.

Escolhemos esse tema pelo fato de ser um problema clássico do Cálculo das Variações. Diante disso, o objetivo desse estudo é demonstrar analiticamente e geometricamente esse Teorema, usando tanto recursos da Análise e

Geometria Diferencial. Como aplicação, pretendemos também, demonstrar certos resultados clássicos de curvas no plano, tais como:

Proposição 10: Sejam uma reta r no plano e uma corda flexível C de comprimento L . Pousando C no plano de forma que suas extremidades estejam sobre r , obtemos uma figura limitada por r e por C e cuja área depende da forma que dermos à corda. Então a figura de área máxima entre todas as assim obtidas é um semicírculo com base em r .

Essa proposição evidencia que a Desigualdade isoperimétrica também é válida para curvas simples não fechadas, na verdade, a hipótese da curva ser simples e fechada é um caso mais geral, esse resultado acima se torna um caso particular.

Proposição 11: Dados dois pontos p e q no plano e uma corda flexível C de comprimento $L > |p - q|$, determine a figura de maior área entre aquelas limitadas por C e pelo segmento de reta pq .

A exigência de $L > |p - q|$ é pelo fato da região delimitada pelo segmento de reta pq e pela curva C não ser degenerada, ou até mesmo não fazer sentido.

Proposição 12: Seja α uma curva convexa regular de largura constante l que limita uma região de área A . Mostre que

$$A \leq \frac{\pi l^2}{4}$$

só havendo igualdade se α for uma circunferência.

O Teorema da Desigualdade Isoperimétrica pertence a um conjunto de teoremas clássicos da Geometria Diferencial, relativos à teoria global das curvas planas e que, possuem elevada importância no contexto das aplicações da referida teoria. Para a demonstração de tal resultado, utilizou-se alguns tópicos de Análise de Fourier e a teoria global das curvas planas, especialmente o Teorema de Green.

No capítulo 2 apresentaremos uma pequena introdução as séries de Fourier, no capítulo 3, apresentaremos as noções iniciais das curvas planas e no capítulo 4, a Desigualdade Isoperimétrica é demonstrada de três maneiras:

A primeira demonstração é feita numa abordagem analítica, na qual usamos os conceitos de séries de Fourier. A segunda demonstração é feita numa

abordagem geométrica 1, na qual usamos o Lema de Wirtinger e a identidade de Parseval. A terceira demonstração é feita numa abordagem geométrica 2, na qual usamos os conceitos iniciais de curvas planas e o Teorema de Green.

Capítulo 2

Séries de Fourier

Ao longo desse Capítulo, apresentaremos as Séries de funções, definindo Convergência Pontual e Convergência Uniforme, mostrando vários exemplos sobre esses tipos de convergência. A Série de Fourier é um tipo de Série de funções especial, pois a mesma tem várias propriedades interessantes dentre a qual mostraremos apenas uma no Teorema sobre Integração das Séries de Fourier. Primeiramente começaremos com a definição de funções periódicas.

2.1 Funções Periódicas

Definição 1. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica se existe um número real positivo T tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e o menor valor de T tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é chamado o período da função f .

Exemplo 1. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$ é periódica de período 2π .

Exemplo 2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - [x]$ é periódica de período 1, onde $[x]$ representa o maior inteiro menor do que ou igual a x .

Exemplo 3. O período da função $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ é $\frac{2L}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $L = 2n\pi$.

Devemos ter

$$\text{sen} \frac{n\pi(x + T)}{L} = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

onde T representa o período da função f . Assim, usando a fórmula de adição de arcos, temos:

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi(x+T)}{L} = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi T}{L} \right) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L}$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+T)}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{ então}$$

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Por hipótese, $L = 2nx$ se, e somente se, $x = \frac{L}{2n}$. Daí,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi T}{L} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{n\pi T}{L} = 1.$$

Usando a relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\cos^2 \frac{n\pi T}{L} + \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi T}{L} = 1 \Rightarrow 1 + \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi T}{L} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} = 0$$

Então o menor valor positivo $\frac{n\pi T}{L}$ tal que $\operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} = 0$ e $\cos \frac{n\pi T}{L} = 1$ é 2π , ou seja, $\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2L}{n}$.

2.2 Convergência Pontual e Convergência Uniforme de Séries de Funções

Definição 2. Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais definidas em um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$, convergirá pontualmente se, para cada $x_0 \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convergir.

Matematicamente, isso equivale a dizer o seguinte: Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe $N \in \mathbb{N}$, dependendo de ϵ e x_0 , tal que $|\sum_{j=n}^m u_j(x_0)| < \epsilon$ para todos $m > n \geq N$.

Exemplo 4. A série de funções não-negativas $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge pontualmente para a função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(0) = 0$ e $u(x) = 1 + x^2$ se $x \neq 0$.

Note que: Para cada $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ é uma série geométrica, pois $0 \leq x^2 < 1 + x^2 \implies 0 \leq \frac{x^2}{(1+x^2)} < 1$. Para maiores detalhes, recomendamos [4].

Definição 3. Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergirá uniformemente se, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$, dependendo apenas de ϵ e não de x , tal que $|\sum_{j=n}^m u_j(x)| < \epsilon$, para todos $m > n \geq N$.

Exemplo 5. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n(x) = \frac{x}{n^2}$ é uma sequência de funções definida em $[0, 1]$, que converge uniformemente.

De fato,

$$|\sum_{j=n}^m u_j(x)| \leq \sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Devo encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow \sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é dado. Daí, $\sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{m-n+1}{n^2} \leq \frac{2m}{n^2} \leq \frac{4m^2}{n^2} < \epsilon \Rightarrow n^2 > \frac{4m^2}{\epsilon} \Rightarrow n > \frac{2m}{\sqrt{\epsilon}}$. Logo tomo $N > \frac{2m}{\sqrt{\epsilon}}$ que existe pela Propriedade Arquimediana dos números reais. Para maiores detalhes, ver [4].

Verificando, temos:

$$n > N \implies n > N > \frac{2m}{\sqrt{\epsilon}} \implies n^2 > \frac{4m^2}{\epsilon} \implies \sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} \leq \frac{4m^2}{n^2} < \epsilon \implies |\sum_{j=n}^m u_j(x)| < \epsilon.$$

Exemplo 6. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_1(x) = x$, $u_n(x) = x^n - x^{n-1}$, $n > 1$, é uma função definida para $0 \leq x \leq 1$, converge pontualmente para cada $x \in [0, 1]$, mas não converge uniformemente.

De fato, a reduzida de ordem n , $U_n(x) = x^n$, convergirá para 0 se $0 \leq x < 1$, e para 1 se $x = 1$. Tal série não converge uniformemente, pois, dados $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ e $N \in \mathbb{N}$, tomamos $x = (2\epsilon)^{\frac{1}{N-1}}$ em $\sum_{j=N}^m u_j(x) = x^m - x^{N-1}$ e daí $|x^m - x^{N-1}| = |(2\epsilon)^{\frac{m}{N-1}} - 2\epsilon|$. Logo, se m for suficientemente grande, $(2\epsilon)^{\frac{m}{N-1}} < \epsilon$, e obtemos $|\sum_{j=N}^m u_j(x)| > \epsilon$ para $x = (2\epsilon)^{\frac{1}{N-1}}$.

Proposição 1. (Teste M de Weierstrass). Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um subconjunto I de \mathbb{R} . Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in I$, e que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniforme e absolutamente em I .

Demonstração.

Como $|u_n(x)| \leq M_n$, para todo $x \in I$, então $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, pelo critério de comparação para séries,

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ converge em módulo, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge absolutamente em I . Como $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, então dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N > n \Rightarrow |\sum_{j=N}^{\infty} M_j| < \epsilon$, para todo $x \in [0, 1]$. Consequentemente,

$|\sum_{j=N}^{\infty} u_j(x)| \leq |\sum_{j=N}^{\infty} M_j| < \epsilon$, para todo $x \in [0, 1]$, o que mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente. \square

Por que estudar convergência uniforme? A razão é que as séries que convergem uniformemente apresentam excelentes propriedades. Vejamos algumas delas, que enunciaremos a seguir sob forma de proposições, cujas demonstrações são omitidas. Para maiores detalhes, recomendamos [4].

Proposição 2. *Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.*

Proposição 3. *Suponhamos que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então*

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

Proposição 4. *Suponhamos que as funções $u_n(x)$ definidas em um intervalo I sejam continuamente deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0)$ convirja. Então*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Observações:

Vimos que a série de funções não-negativas $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge pontualmente para a função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(0) = 0$ e $u(x) = 1 + x^2$ se $x \neq 0$, temos que a série mencionada acima não converge uniformemente, pois a função f é descontínua no ponto $x = 0$, logo pela proposição 2 segue o resultado. Para maiores detalhes, recomendamos [4].

Definição: 4. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isso significa que o gráfico da função f é simétrico com relação ao eixo dos y . Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. E isso significa que o gráfico da f é simétrico com relação à origem.*

Ver [3].

Exemplo 7. As funções $f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$, $f(x) = x^{2n}$ para $n = 1, 2, \dots$ são funções pares.

Exemplo 8. As funções $f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$, $f(x) = x^{2n-1}$ para $n = 1, 2, \dots$ são funções ímpares.

A proposição seguinte, sobre funções pares e ímpares, é facilmente demonstrável. Recomendamos [3].

Proposição 5.

(i) A soma de duas funções pares é uma função par. A soma de duas funções ímpares é ímpar.

(ii) O produto de duas funções pares é uma função par.

(iii) O produto de duas funções ímpares é uma função par.

(iv) O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Esses conceitos serão usados para determinar os coeficientes da série de Fourier. Ver [3].

Na proposição seguinte usamos o fato de uma função ser integrável no sentido de integral de Riemann. Para maiores detalhes, recomendamos [4].

Proposição 6. (i) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-L}^L f = 2 \int_0^L f$$

(ii) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado, então

$$\int_{-L}^L f = 0$$

A demonstração da Proposição acima recomendamos [3].

2.3 Coeficientes de Fourier

Se uma função f for expressa por

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.1)$$

Espera-se que os coeficientes a_n e b_n estejam intimamente ligados à função f .

Como encontrar os valores de a_n e b_n ?

Primeiramente, vamos supor que a igualdade (1.1) seja válida, e mais, que a série em (1.1) convirja uniformemente. Segue da proposição 2 que a função f deve ser contínua, e consequentemente, pode ser integrada, pois toda função contínua é integrável. Ver [4].

A Série em (1.1) é periódica com período $2L$, pois o período (fundamental) de $\cos\frac{\pi x}{L}$ é $2L$, e $2L$ é período para as demais funções *seno* e *coseno* que aparecem na série. Ver [3].

Usando a proposição 3, podemos integrar ambos os lados de (1.1) para obter

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x)dx \\ &= \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos\frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx \right) \end{aligned}$$

Como $\int_{-L}^L \cos\frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx = 0$, então $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx$.

Para obter os demais coeficientes, exploramos a mesma ideia e usamos as relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} = 0, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

De fato, a função $g(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}$ é ímpar. Segue do Cálculo que:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx &= 0. \text{ Ademais,} \\ \int_{-L}^L \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx &= L, \text{ se } n=m \in \mathbb{N} \text{ e} \\ \int_{-L}^L \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx &= 0, \text{ se } m \neq n, \quad m,n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

De fato, se $n = m$, então

$$\begin{aligned}&\int_{-L}^L \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \int_{-L}^L \cos^2\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \int_{-L}^L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{-L}^L \cos\frac{2n\pi x}{L}dx \\ &= L\end{aligned}$$

Usando a relação da trigonometria (transformação de soma em produto), temos

$$(I) \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \text{ para todo } p, q \in \mathbb{R}.$$

Considere $m \neq n$, com m e $n \in \mathbb{N}$. O nosso objetivo é transformar $\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}$ como soma de funções trigonométricas usando (I).

Assim, chame

$$\frac{p+q}{2} = \frac{n\pi x}{L} \quad \text{e} \quad \frac{p-q}{2} = \frac{m\pi x}{L}$$

obtendo o sistema abaixo:

$$\begin{aligned}p+q &= \frac{2n\pi x}{L} \quad \text{e} \quad p-q = \frac{2m\pi x}{L} \Rightarrow \\ 2p &= \frac{2n\pi x + 2m\pi x}{L} \Rightarrow p = \frac{n\pi x + m\pi x}{L} = \frac{(n+m)\pi x}{L}.\end{aligned}$$

Consequentemente, $q = \frac{(n-m)\pi x}{L}$.

Por (I), segue que:

$$\begin{aligned} \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} &= 2 \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} \right] &= \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{L}{(n+m)\pi} \left[\text{sen} \frac{(n+m)\pi x}{L} \right]_{-L}^L + \frac{1}{2} \frac{L}{(n-m)\pi} \left[\text{sen} \frac{(n-m)\pi x}{L} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{1}{2} \frac{L}{(n+m)\pi} \left[\text{sen} \frac{(n+m)\pi L}{L} + \text{sen} \frac{(n+m)\pi L}{L} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{L}{(n-m)\pi} \left[2 \text{sen} \frac{(n-m)\pi L}{L} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{L}{(n+m)\pi} [\text{sen}(n+m)\pi + \text{sen}(n+m)\pi] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{L}{(n-m)\pi} [\text{sen}(n-m)\pi + \text{sen}(n-m)\pi] \\ &= \frac{L \text{sen}(n+m)\pi}{(n+m)\pi} + \frac{L \text{sen}(n-m)\pi}{(n-m)\pi}. \\ &= L \left[\frac{\text{sen}(n+m)\pi}{(n+m)\pi} + \frac{\text{sen}(n-m)\pi}{(n-m)\pi} \right] \\ &= L \left[\frac{\text{sen}(n+m)\pi}{(n+m)\pi} - \frac{\text{sen}(m-n)\pi}{(n-m)\pi} \right] \\ &= L \left[\frac{\text{sen}(m+n)\pi}{(m+n)\pi} - \frac{\text{sen}(m-n)\pi}{(n-m)\pi} \right]. \end{aligned}$$

Se $m+n$ for par, com $m, n \in \mathbb{N}$, então $m+n = 2k$ para um certo $k \in \mathbb{Z}$. Como $2(k-n)$ é par, então $m+n-2n = m-n$ também será par, logo

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

Se $m + n$ for ímpar, então $m - n$ também será ímpar, logo

$$\frac{\text{sen}(m+n)\pi}{(m+n)\pi} = \frac{\text{sen}(m-n)\pi}{(n-m)\pi}$$

Portanto,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0.$$

Em qualquer caso, $\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$. Analogamente, mostra-se que $\int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = L$, se $n = m \in \mathbb{N}$ e $\int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = 0$, se $n \neq m$ com $n, m \in \mathbb{N}$.

Agora, multiplicando (1.1) por $\cos \frac{(n\pi x)}{L}$, para $m \in \mathbb{N}$ fixado, e integrando, obtemos:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L \quad (2).$$

De modo semelhante, segue que

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L \quad (3)$$

Finalmente, de (2) e (3), temos as seguintes relações:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{sendo } n \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{sendo } n \in \mathbb{N} \quad (5).$$

Agora estamos em condições de dar uma boa definição. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável (isto é, cujo módulo é integrável) em cada intervalo limitado, em particular, $\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$. Para maiores detalhes, ver [4].

Os números a_n , para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e b_n , $n \in \mathbb{N}$ dados em (2) e (3) são definidos como os coeficientes de Fourier da função f . Para maiores detalhes, recomendamos [3].

2.4 Série de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ integrável e absolutamente integrável, assim podemos calcular seus coeficientes de Fourier. E assim podemos escrever,

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

o que significa que a expressão do lado direito é a série de Fourier da função f .

Uma questão natural surge imediatamente. Que relação há entre f e sua série de Fourier? Seria bom se fosse igualdade! Infelizmente isso não acontece sempre, ver [3]. E algo mais grave pode acontecer: a série de Fourier pode até divergir.

Exemplo 9. Calcule a série de Fourier da função f definida por:

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ f(x) = 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

onde f é periódica de período 2π .

Primeiramente calcularemos os coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1$$

e para $n \neq 0$, temos:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \quad \text{ou}$$

$$b_{2k} = 0 \quad \text{e} \quad b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots$$

A série de Fourier será

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \text{sen}(2k-1)x$$

Exemplo 10. Use os resultados do exemplo anterior para mostrar a validade da série de Leibniz

No ponto $x = \frac{\pi}{2}$, a série de Fourier é igual a 1, em virtude do teorema de Fourier, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \text{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right], \quad \text{ou seja,} \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right], \quad \text{ou finalmente,} \\ \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \end{aligned}$$

que é conhecida como a série de Leibniz. Para mais detalhes, ver [3].

Definição: 5. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades, todas de primeira espécie, em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$, e existem os limites

$$f(a_j + 0) \rightarrow f(x) \text{ quando } x \rightarrow a_j^+ \quad \text{e} \quad f(a_j - 0) \rightarrow f(x) \text{ quando } x \rightarrow a_j^-$$

Observação:

Toda função contínua é seccionalmente contínua. A função $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ não é seccionalmente contínua, pois sua descontinuidade em $x = 0$ é de segunda espécie.

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{se } x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{n} & \text{se } \frac{1}{(n+1)} \leq x < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ f(x) = 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua, pois apesar das descontinuidades serem de primeira espécie, há um número infinito de descontinuidades no intervalo

$(0, 1)$.

Exemplos de funções seccionalmente contínua.

1) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - [x]$.

2) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $|x|$, para $|x| \leq 1$ e periódica de período 2.

Definição: 6. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

Observações: A derivada f' não está definida em todos os pontos, mas certamente $f'(x)$ não existe nos pontos x onde f é descontínua; e mais, $f'(x)$ pode não existir, mesmo em alguns pontos onde f é contínua. Daremos alguns exemplos.

Exemplo 11. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - [x]$ é seccionalmente diferenciável.

Exemplo 12. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2 definida por:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

não é seccionalmente diferenciável, pois nos pontos onde f' é descontínua, a descontinuidade é de segunda espécie.

Para maiores detalhes, recomendamos [4].

Proposição 7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é,

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Para a demonstração da Proposição acima, ver [3].

Proposição 8. (*Unicidade da Série de Fourier*). Sejam f e g funções periódicas de período $2L$ e de quadrado integrável em $[-L, L]$ (termo que definiremos mais adiante). Suponha que suas séries de Fourier sejam as mesmas. Então $f = g$ (ou seja, $f(x) = g(x)$ em todos os pontos de continuidade de f e g)

Ver [3].

2.5 Integração das Séries de Fourier

Se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for igual à sua série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

a qual se supõe convergir uniformemente, de acordo com a Proposição 2, segue que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right)$$

Teorema 1. *Teorema sobre a integração das Séries de Fourier.*

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua e seja

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

sua série de Fourier. Então, a série pode ser integrada termo a termo, e o valor da série integrada é a integral de f , mais precisamente,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_a^b \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right).$$

Demonstração. Mostraremos que a expressão acima será válida mesmo se a série de Fourier não convergir uniformemente para f , ou mesmo se a série de Fourier não convergir para f . O que indica de que a série de Fourier é um tipo muito especial de série, rica de propriedades interessantes. Inicialmente considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua. Definimos a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pela expressão

$$F(x) = \int_0^x \left[F(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$$

a qual é contínua. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $F'(x)$ existe em todos os pontos x onde f é contínua e, além disso, $F'(x) = f(x)$ nesses pontos. Assim, $F'(x)$ é seccionalmente contínua. Observe que F é periódica de período $2L$. De fato,

$$F(x + 2L) - F(x) = \int_x^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$$

onde usamos, para escrever a última igualdade, os fatos de que $f(t) - \frac{a_0}{2}$ é periódica de período $2L$ e de que:

$$\int_{a-L}^{a+L} g = \int_{-L}^L g$$

para toda função g periódica de período $2L$ e todo número real a fixado. Note que

$$F(x + 2L) - F(x) = 0 \quad \text{pois} \quad \int_{-L}^L f(t) dt = a_0 L = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt$$

Em resumo, a função F definida por

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$$

é contínua, tem derivadas F' contínua por partes e é periódica de período $2L$. Logo pelo Teorema de Fourier, temos:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

onde os coeficientes de Fourier A_n e B_n são dados por:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ se } n \geq 0$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ se } n \geq 1$$

Agora usaremos a fórmula de integração por partes para relacionar os coeficientes de Fourier da F com aqueles da f .

$$A_n = \frac{1}{L} \left[F(x) \frac{L}{n\pi} \sen \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right] \quad \text{ou seja}$$

$$A_n = \frac{-L}{n\pi} b_n \quad n \geq 1$$

Analogamente,

$$B_n = \frac{1}{L} \left[-F(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

e daí, usando o fato de que $F(L) = F(-L)$, obtemos

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n \quad \text{com } n \geq 1$$

Para calcular o coeficiente A_0 , fazemos $x = 0$ na expressão abaixo:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

e obtemos a seguinte expressão, lembrando que $F(0) = 0$:

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{ou seja, } A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (2.2)$$

Agora usando as seguintes relações abaixo, temos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \end{aligned}$$

E as expressões abaixo para os coeficientes de Fourier de F .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{-L}{n\pi} b_n \quad \text{com } n \geq 1 \\ B_n &= \frac{L}{n\pi} a_n \quad \text{com } n \geq 1 \quad \text{e} \\ A_0 &= \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^x f = \frac{a_0}{2} dt + \frac{L}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

que também pode ser escrita como

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^x b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \right).$$

A expressão acima fornece a seguinte expressão:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right).$$

Fazendo-se $x = a$ e $x = b$ e, subtraindo-se as expressões obtidas, demonstramos o Teorema sobre a Integração de Séries de Fourier. \square

2.6 A Desigualdade de Bessel

Definição: 7. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de quadrado integrável se f e $|f|^2$ forem integráveis.

Exemplo 13. Se f for limitada e integrável a Riemann, então f será de quadrado integrável. De fato,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(b - a)$$

onde $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

Exemplo 14. Se f não for limitada pode acontecer que f seja integrável mas $|f|^2$ não seja. Tome um exemplo

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2; \int_0^1 |x^{-1/2}|^2 dx = \int_0^1 x^{-1} dx = \infty$$

Exemplo 15. Se $|f|^2$ for integrável então f é necessariamente integrável.

Primeiramente provemos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais de funções contínuas num intervalo compacto.

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do \mathbb{R}^n , segue que:

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para demonstrá-la, considere a seguinte expressão:

$$\sum_{j=1}^n (a_j + t b_j)^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2t \sum_{j=1}^n a_j b_j + t^2 \sum_{j=1}^n b_j^2$$

Note que o primeiro membro da expressão acima é ≥ 0 seja qual for $t \in \mathbb{R}$. Analisando agora o segundo membro da expressão acima, temos um trinômio do segundo grau em t . O fato é que esse trinômio é sempre ≥ 0 , o que implica que seu discriminante seja ≤ 0 , ou seja,

$$\left(2 \sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 - 4 \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right) \leq 0$$

o que demonstra a veracidade da última expressão mencionada. Agora considere duas funções f, g de quadrado integrável definidas num compacto $[a, b]$ e que toma valores em \mathbb{R} . Usando a expressão provada recentemente e fazendo:

$$a_j = \int_a^b f(x) dx \quad e \quad b_j = \int_a^b g(x) dx,$$

temos a seguinte relação:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

Logo, fazendo $g(x) = 1$, obtemos:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a)^{1/2} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

o que demonstra o exemplo mencionado acima.

Uma sucessão (f_n) de funções de quadrado integráveis, em um compacto $[a, b]$, converge, em média quadrática, para uma função f de quadrado integrável se

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow 0$.

A expressão

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$$

é chamada o erro médio quadrático, na aproximação de f por f_n . Mostremos agora que as reduzidas $s_n(x)$ da série de Fourier de uma função f de quadrado integrável são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam f em média quadrática. Mais precisamente, considere um polinômio de ordem n :

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right)$$

e designemos por

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx \text{ e } e_n^* = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx$$

Em resumo, o que devemos provar é que $e_n \leq e_n^*$. Para mostrar essa desigualdade acima é preciso recorrer as relações de ortogonalidade e as expressões dos coeficientes de Fourier. Daí,

$$e_n^* = \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - La_0 c_0 - 2L \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k).$$

E daí, completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned} e_n^* &= \frac{L}{2} (c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 + \\ &+ \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Para maiores detalhes, recomendamos [1]. Note que o menor valor de e_n^* será obtido quando $c_0 = a_0$, $c_k = a_k$, $d_k = b_k$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Neste caso, vê-se que e_n^* coincide com e_n .

Portanto,

$$e_n \leq e_n^*$$

Para obter a Desigualdade de Bessel, observamos que $e_n^* \geq 0$, para qualquer escolha dos coeficientes c_n e d_n . Portanto,

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

e daí,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

Por esse fato se justifica a Desigualdade de Bessel que mostraremos abaixo:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

Teorema 2. (Teorema de Fejér). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua, periódica de período $2L$. Então, (i) para cada x ,*

$$a_n(x) \rightarrow \frac{1}{2}[f(x+0) - f(x-0)]$$

E a sucessão (a_n) converge uniformemente para f em todo intervalo fechado I que não contenha pontos de descontinuidade de f , onde a_n é a média aritmética dos termos de uma série telescópica cujas reduzidas são: $a_{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$ e $a_{2n} = \frac{n}{2n}$.

Para maiores detalhes recomendamos [3].

2.7 Identidade de Parseval

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, onde $f, |f|$ e $|f|^2$ são integráveis, vimos nas seções anteriores que se podem calcular seus coeficientes de Fourier a_n e b_n . Assim

$$\frac{1}{2}(a_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n)^2 + (b_n)^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

As assertivas abaixo são equivalentes, para maiores detalhes, veja [3].

$$e_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

A segunda relação é conhecida como a identidade de Parseval. Mostraremos que $e_n \rightarrow 0$, ou seja,

$$\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

para toda função f de quadrado integrável em $[-L, L]$. Consequentemente que a identidade de Parseval é válida para tais f .

Proposição 9. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, e de quadrado integrável em $[-L, L]$. Então a série de Fourier da f converge em média quadrática para f , ou seja, a relação abaixo é válida*

$$\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Provemos o Teorema no caso de f ser contínua. Pelo Teorema de Fejér, a sucessão (a_n) das médias aritméticas das reduzidas s_n converge uniformemente para f em $[-L, L]$, isto é,

$$\max |a_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$ e $-L \leq x \leq L$.

Como $\int_{-L}^L |a_n - f(x)|^2 dx \leq 2L[\max |a_n(x) - f(x)|]^2$, onde $-L \leq x \leq L$ e

$$\int_{-L}^L |a_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

e a_n um polinômio trigonométrico de ordem n , temos, pelos resultados anteriores que:

$$\int_{-L}^L |a_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |a_n(x) - f(x)|^2 dx$$

que juntamente com a relação obtida anterior a essa, dá a veracidade do limite abaixo:

$$\int_{-L}^L |a_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

ou seja, a validade do teorema. Sendo assim fica provado a Identidade de Parseval. \square

Capítulo 3

Curvas Planas

Esse capítulo tem um caráter de revisão, servindo para coligir conceitos e resultados na forma que usaremos posteriormente. Aqui daremos um enfoque um pouco técnico do ponto de vista matemático e que, pressupomos que as manipulações feitas aqui sejam de domínio satisfatório. Ver [1].

Definição: 8. *Um caminho é uma função contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Um caminho α é fechado se $\alpha(a) = \alpha(b)$; e é simples se $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, para $a < t_1 < t_2 < b$. O conjunto C dos pontos imagens do caminho é chamado uma curva: $C = \alpha(t) = (x(t), y(t)) : t \in [a, b]$. Assim a cada caminho corresponde uma curva.*

Uma curva pode ser determinada por caminhos diferentes, veja

$$\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha_1(t) = \alpha(t^2) \quad e$$
$$\alpha_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha_2 = \alpha(\varphi(t))$$

onde $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é uma bijeção contínua, são caminhos diferentes e determinam a mesma curva; neste caso, cada um dos caminhos que determina a curva é chamado uma parametrização da curva. Uma curva é fechada ou simples se ela corresponde a um caminho fechado ou simples, respectivamente.

Definição: 9. *Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ será de variação limitada se existir uma constante positiva M tal que, para qualquer partição*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

do intervalo $[a, b]$, tenhamos

$$\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M.$$

A menor das constantes M que pode ser usada na desigualdade acima, para todas as partições, é chamada a variação de f em $[a, b]$.

Definição: 10. Uma curva C é retificável se ela corresponder a um caminho $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que é uma função de variação limitada, a variação de C é o comprimento L da curva C .

Observação: O comprimento da curva C é o *sup* dos comprimentos das poligonais com vértices na curva C .

Definição: 11. Uma curva é seccionalmente diferenciável se ela tiver uma parametrização $(x(t), y(t))$, onde as funções $x(t)$ e $y(t)$ são seccionalmente diferenciáveis.

Para curvas seccionalmente diferenciáveis C , pode-se provar que seu comprimento é dado por:

$$L = \int_a^b [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2} dt$$

onde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é um caminho que define C ; e nessa demonstração, está contido o fato de podermos na integral acima tomar qualquer parametrização da curva C . Dada uma curva seccionalmente diferenciável C , de comprimento L , corresponde a um caminho $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, o parâmetro s , comprimento de arco, é definido por

$$s(t) = \int_a^t [x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2]^{1/2} d\tau$$

Logo $s : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é uma bijeção diferenciável, e portanto para a curva C pode-se usar uma parametrização $\alpha_*(s) = (x_*(s), y_*(s))$, onde $s \in [0, L]$, sendo $x_*(s) = x(t(s))$ e $y_*(s) = y(t(s))$, ou equivalentemente, $x(t) = x_*(s(t))$ e $y(t) = y_*(s(t))$. Logo,

$$x'(t) = x'_*(s(t))s'(t) \quad \text{e} \quad y'(t) = y'_*(s(t))s'(t)$$

Daí, segue que

$$x'_*(s)^2 + y'_*(s)^2 = 1$$

onde $s \in [0, L]$.

Provaremos na seção Abordagem Geométrica que a área englobada por uma curva fechada, simples e seccionalmente diferenciável é dada por:

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)dt$$

Definição: 12. *Curvas regulares são aquelas cujo vetor velocidade nunca se anula e por isso têm uma direção tangente bem definida em cada instante.*

Daqui em diante, a menos de menção em contrário, entendemos por curva uma curva parametrizada regular de classe C^∞ .

Exemplo 16. *O exemplo mais simples de curva é uma reta $p + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, parametrizada com velocidade constante não-nula \vec{v} .*

Exemplo 17. *Outros exemplos*

$$\begin{aligned} \text{A circunferência} & : (\cos t, \sin t), \\ \text{a hélice} & : (\cos t, \sin t, t) \quad e \\ \text{o trevo} & : (\cos(3t)\cos t, \cos(3t)\sin t). \end{aligned}$$

Como calcular o comprimento de uma curva? Suponhamos que a curva esteja definida num intervalo fechado $[a, b]$, e tomemos uma partição arbitrária $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ desse intervalo. O somatório

$$\sum_{i=1}^m |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

representa o comprimento da linha poligonal obtida substituindo, para cada $1 \leq i \leq m$, o traço da curva no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ pelo segmento de reta que une $\alpha(t_{i-1})$ a $\alpha(t_i)$. Quanto mais estreitos e numerosos forem os intervalos da partição tanto melhor o somatório deve aproximar o comprimento da curva. O limite desses somatórios quando o máximo das diferenças $t_i - t_{i-1}$ tende para zero é dado pela integral abaixo, que é definido como o comprimento $l(\alpha)$ da curva α

$$l(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

Definição: 13. *Um caminho suave por partes em \mathbb{R} é uma coleção finita de caminhos suaves $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo: $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n - 1$.*

Usaremos a notação $\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$ quando nos referirmos a caminhos suaves por partes.

Definição: 14. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ é um caminho suave em U , $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, definimos a integral de f ao longo de γ (ou integral de linha de f ao longo de γ) por:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} u dx + v dy = \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) + v(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

Se $\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$ é um caminho suave por partes em U , a integral de f ao longo desse caminho é definida por:

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \dots + \int_{\gamma_n} f.$$

Por exemplo, se $f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ e γ é o caminho $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ então:

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t + \cos t \sin t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Se $f(x, y) = (x^2, y^2)$ e o caminho γ é o caminho suave por partes dado por $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$, onde $\gamma_1(t) = (1, t)$, $\gamma_2(t) = (-t, 1)$, $\gamma_3(t) = (-1, -t)$ e $\gamma_4(t) = (t, -1)$, para $-1 \leq t \leq 1$, então:

$$\int_{\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4} f = \int_{-1}^1 t^2 dt - \int_{-1}^1 t^2 dt - \int_{-1}^1 t^2 dt + \int_{-1}^1 t^2 dt = 0$$

As integrais de linha são sensíveis à orientação ou sentido de percurso do caminho, isto é, se γ^- denota o caminho reverso de γ então

$$\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f$$

De fato, se $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ é dado por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ temos que $\gamma^-(t) = (x(a+b-t), y(a+b-t))$ e daí

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f &= \int_a^b -[u(x(a+b-t), y(a+b-t))x'(a+b-t)] dt + \\ &+ \int_a^b -[v(x(a+b-t), y(a+b-t))y'(a+b-t)] dt. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $s = a + b - t$, a integral fica

$$\int_a^b [u(x(s), y(s))x'(s) + v(x(s), y(s))y'(s)] ds = - \int_{\gamma} f.$$

Definição: 15. Uma curva fechada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ diz-se convexa se, para cada $s_0 \in [a, b]$, a curva estiver toda do mesmo lado da tangente a α no ponto $\alpha(s_0)$.

Exemplo 18. A curva $\alpha(t) = (t, t^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é convexa.

Definição: 16. A largura de uma curva plana, numa dada direção é a largura mínima entre as faixas que contém a curva e que são limitadas por retas ortogonais a essa direção.

Exemplo 19. A largura de uma circunferência de raio r é exatamente o seu diâmetro.

Trabalharemos com casos bem particulares, em situações onde a curva é convexa. No caso de α ser uma curva convexa, há exatamente duas retas tangentes a α que são ortogonais a v (embora cada uma delas possa ser tangente a α em mais que um ponto), e $l(v)$ é a distância entre essas retas.

Teorema 3. O perímetro de qualquer curva de largura constante l é igual a πl .

A demonstração do teorema acima recomendamos [1].

3.1 O Teorema de Green

Um instrumento fundamental de que necessitaremos é o Teorema de Green, também conhecido como Teorema de Stokes no plano. Começaremos então considerando os ingredientes que compoem esse resultado.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio, uma aplicação com derivadas parciais.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

contínuas em todos os pontos de U .

Definição: 17. Suponha que $U \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio e seja $V \subset U$ um subconjunto fechado e limitado, cuja fronteira ∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes e tal que $V - \partial V$ é um domínio. Para cada uma dessas curvas, adotamos o sentido de percurso para o qual o interior de V está sempre à esquerda quando a percorremos. Nessas condições, dizemos que V e ∂V tem orientação compatível.

Teorema 4. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um domínio e $f : U \subset \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave. Seja $V \subset U$ um subconjunto satisfazendo:*

- (i) V é fechado e limitado.
- (ii) a fronteira ∂V de V consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes, $\partial V = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ e
- (iii) $V - \partial V$ é um domínio. Suponha que V e ∂V tem orientação compatível. Então, escrevendo $f(x, y) = (u(x, y))$, temos que

$$\int_{\partial V} f = \int_{\partial V} u dx + v dy = \int \int_V \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

Demonstração. Veja que $\int_{\partial V} f$ significa a soma

$$\int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f \quad (3.1)$$

sobre todas as curvas de Jordan (ver [5]) que compoem a fronteira de V , orientadas compativelmente com V . Segundo [5], a demonstração desse resultado exige mais instrumentos do que temos a disposição, sendo assim, iremos demonstrá-lo numa versão simples. Supomos que V pode ser dado, simultaneamente, das seguintes maneiras:

$$V = (x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \quad (3.2)$$

onde g_1 e g_2 são funções cujos gráficos são curvas suaves por partes;

$$V = (x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \quad (3.3)$$

onde h_1 e h_2 são funções cujos gráficos são curvas suaves por partes.

O leitor pode pensar em subconjuntos do plano que podem ser divididos em regiões satisfazendo as relações (3.2) e (3.3) e aplicar o teorema a elas, convencendo-se assim da generalidade da demonstração nesse caso simples, segundo [5].

Para V dado na forma (3.2), a fronteira consiste dos quatro caminhos

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, g_1(t)), & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t) &= (b, t), & g_1(b) \leq t \leq g_2(b) \\ \gamma_3(t) &= (t, g_2(t)), & a \leq t \leq b \\ \gamma_4(t) &= (a, t), & g_1 \leq t \leq g_2(t) \end{aligned}$$

Para que V e ∂V tenha orientação compatível devemos ter

$$\partial V = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-$$

Agora

$$\int_{\partial V} u dx = \int_{\gamma_1} u dx + \int_{\gamma_2} u dx + \int_{\gamma_3^-} u dx + \int_{\gamma_4^-} u dx$$

mas para γ_2 e γ_4 temos $x'(t) = 0$, pois iremos considerar que γ_2 e γ_4 sejam curvas verticais. Portanto as integrais de linha são nulas ao longo desses caminhos. Assim,

$$\int_{\partial V} u dx = \int_{\gamma_1} u dx + \int_{\gamma_3^-} u dx.$$

Por um lado, essas se expressam por:

$$\int_{\gamma_1} u dx = \int_a^b u(t, g_1(t)) dt \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_3^-} u dx = - \int_a^b u(t, g_2(t)) dt$$

e temos

$$\int_{\partial V} u dx = \int_a^b [u(t, g_1(t)) - u(t, g_2(t))] dt.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int \int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [u(x, g_2(x)) - u(x, g_1(x))] dx. \end{aligned}$$

e trocando x por t nessa última expressão, concluímos que

$$\int_{\partial V} u dx = \int \int_V - \frac{\partial u}{\partial y} dx dy.$$

Já para V dado na forma (3.3), a fronteira consiste dos caminhos

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, c), \quad h_1(c) \leq t \leq h_2(c) \\ \gamma_2(t) &= (h_2(t), t), \quad c \leq t \leq d \\ \gamma_3(t) &= (t, d), \quad h_1(d) \leq t \leq h_2(d) \\ \gamma_4(t) &= (h_1(t), t), \quad c \leq t \leq d. \end{aligned}$$

e para que V e ∂V tenha orientação compatível, devemos ter

$$\partial V = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-$$

Como anteriormente,

$$\int_{\partial V} v dy = \int_{\gamma_1} v dy + \int_{\gamma_2} v dy + \int_{\gamma_3^-} v dy + \int_{\gamma_4^-} v dy$$

para γ_1 e γ_3 temos $y'(t) = 0$ e portanto as integrais de linha são nulas ao longo desses caminhos. Daí,

$$\int_{\partial V} v dy = \int_{\gamma_2} v dy + \int_{\gamma_4^-} v dy.$$

Cada uma dessas integrais se expressam por:

$$\int_{\gamma_2} v dy = \int_c^d v(h_2(t), t) dt \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_4^-} v dy = - \int_c^d v(h_1(t), t) dt$$

e temos

$$\int_{\partial V} v dy = \int_c^d [v(h_2(t), t) - v(h_1(t), t)] dt$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int \int_V \frac{\partial v}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \\ &= \int_c^d [v(h_2(y), y) - v(h_1(y), y)] dy \end{aligned}$$

trocando y por t nessa última expressão, obtemos:

$$\int_{\partial V} v dy = \int \int_V \frac{\partial v}{\partial x} dx dy.$$

Finalmente, como o conjunto V que estamos considerando pode ser dado simultaneamente nas formas (3.2) e (3.2), temos que valem (3.3) e (3.4). Somando essas expressões ficamos com

$$\int_{\partial V} f = \int_{\partial V} u dx + v dy = \int \int_V \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

□

Capítulo 4

A Desigualdade Isoperimétrica

Primeiramente começamos pelo Lema de Wirtinger, que será uma ferramenta importante na demonstração do Teorema da Desigualdade Isoperimétrica.

Lema 1 (Wirtinger). *Seja f uma função de classe C^1 , periódica de período 2π , e tal que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Então,*

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt,$$

e a igualdade vale se, e somente se, existirem a e b tais que $f(t) = acost + bsent$.

Demonstração. Seja

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a expansão de f em série de Fourier. Como f é uma função de classe C^1 , então f' é uma função contínua. Daí,

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nt - na_n \sin nt).$$

Agora calcularemos o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(t)dt$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dt + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) dt \end{aligned}$$

Ora,

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) dt = 0, \text{ e}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dt = \pi a_0.$$

Por hipótese,

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Daí, concluímos que $a_0 = 0$. Sendo assim a função f se reduz a:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Usando agora a formula de Parseval, temos:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2). \quad (4.2)$$

Ajustando (1) e (2) , segue que

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2), \quad \text{e}$$

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

Daqui vem

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt - \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \geq 0.$$

E a igualdade so ocorre se $a_n = b_n = 0$ para qualquer $n > 1$. Então, a função f se reduz simplesmente a $f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t$. Ver [2]. \square

Teorema 5 (Desigualdade Isoperimétrica). *Seja α uma curva fechada simples e regular, de perímetro L , e que limita uma região Ω de área A . Então,*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

e somente há igualdade quando α é uma circunferência.

Iremos fazer três demonstrações do Teorema acima.

4.1 Demonstração Analítica

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideremos o teorema acima no caso de curvas C seccionalmente diferenciáveis. Seja

$$\alpha_*(s) = (x_*(s), y_*(s)) \quad \text{com } s \in [0, L]$$

uma parametrização de C usando o comprimento de arco. Fazendo $t = \frac{s}{L}$ obtemos a parametrização

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{com } t \in [0, 1]$$

onde $x(t) = x_*(tL)$ e $y(t) = y_*(tL)$. Logo em vista da relação abaixo:

$$x'_*(s)^2 + y'_*(s)^2 = 1, \quad s \in [0, L]$$

temos,

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = L^2$$

Como as funções $x(t)$ e $y(t)$ são periódicas de período 1 e seccionalmente diferenciáveis, usando o teorema de Fourier, temos

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t) \quad \text{e}$$

$$y(t) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos 2n\pi t + \gamma_n^* \sin 2n\pi t)$$

Daí,

$$x'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi (-a_n \sin 2n\pi t + b_n \cos 2n\pi t)$$

$$y'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi (-\gamma_n \sin 2n\pi t + \gamma_n^* \cos 2n\pi t)$$

Pela identidade de Parseval, temos as seguintes relações:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2) = 2 \int_0^1 |x'(t)|^2 dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (\gamma_n^2 + (\gamma_n^*)^2) = 2 \int_0^1 |y'(t)|^2 dt$$

Usando novamente a relação abaixo

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = L^2$$

temos o seguinte:

$$2(\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \gamma_n^2 + (\gamma_n^*)^2) = L^2$$

Por outro lado, usando novamente a identidade de Parseval e o seguinte resultado que enunciaremos abaixo (para ver a sua demonstração, recomendamos [3]). Se f e g são periódicas de período $2L$ e seccionalmente contínuas, é verdade que:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}a_0\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\gamma_n + b_n\gamma_n^*)$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f e γ_n e γ_n^* os de g . Usando esses dois fatos mencionados acima, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(a_n\gamma_n^* - \gamma_nb_n) = 2 \int_0^1 x(t)y'(t)dt$$

Das seguinte relações abaixo que obtemos no decorrer da demonstração

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)dt$$

$$2(\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \gamma_n^2 + (\gamma_n^*)^2) = L^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(a_n(\gamma_n^*)^2 - \gamma_nb_n) = 2 \int_0^1 x(t)y'(t)dt$$

obtemos a seguinte relação

$$L^2 - 4\pi A = 2(\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - \gamma_n^*)^2 + (nb_n + \gamma_n^*)^2 + (n^2 - 1)(\gamma_n^2 + (\gamma_n^*)^2)]$$

o que implica a desigualdade isoperimétrica procurada, ou seja,

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

E a igualdade só ocorre(e esse é o caso da curva de máxima área com dado perímetro) se

$$a_1 = \gamma_1^*, b_1 = -\gamma_n \quad \text{e} \quad \gamma_n = \gamma_n^* = a_n = b_n = 0 \quad \text{para} \quad n > 1.$$

Voltando as expressões abaixo

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t) \quad \text{e}$$

$$y(t) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos 2n\pi t + \gamma_n^* \sin 2n\pi t)$$

podemos ver que $(x(t), y(t))$ é a representação paramétrica de um círculo. \square

Observação: O caso geral de uma curva retificável pode ser tratado aproximando-se por curvas seccionalmente diferenciáveis, que podemos tomar como poligonais.

4.2 Demonstração Geométrica 1

Demonstração. Não há perda de generalidade em supor que $L = 2\pi$. Assim, seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, com $s \in [0, 2\pi]$. Com uma translação, podemos fazer com que seja $\int_0^{2\pi} x(s) ds = 0$. Constata-se que essa translação faz com que a integral anterior seja zero, pois, basta fazer $\bar{x}(s) = x(s) - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x(s) ds$.

Suponha agora que $\alpha(s)$ percorra a fronteira Ω no sentido positivo. Aplicando o *Teorema de Green*, temos:

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

ao campo $(P, Q) = (0, x)$, obtemos:

$$A = \int_0^{2\pi} xy ds \quad \text{e}$$

$$2\pi = L = \int_0^{2\pi} ((x')^2 + (y')^2) ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 2\pi - 2A &= \int_0^{2\pi} ((x')^2 + (y')^2)ds - \int_0^{2\pi} 2xy'ds \\
 &= \int_0^{2\pi} ((x')^2 + (y')^2 - 2xy')ds \\
 &= \int_0^{2\pi} ((x')^2 - (x)^2 + (x)^2 + (y')^2 - 2xy')ds \\
 &= \int_0^{2\pi} ((x')^2 - (x)^2)ds + \int_0^{2\pi} (x - y')^2ds
 \end{aligned}$$

Como $(x - y')^2 \geq 0$, então a segunda integral é ≥ 0 e pelo *Lema de Wirtinger*, a primeira integral é ≥ 0 . Logo, $2\pi - 2A \geq 0$, ou seja, $A \leq \pi$.

Para que haja igualdade é necessário e suficiente que ambas as integrais sejam zero, daí,

$$\int_0^{2\pi} (x - y')^2 ds = 0 \iff y'(s) = x(s), \forall s \in [0, 2\pi].$$

Pelo *Lema de Wirtinger*, temos $x(s) = a\cos(s) + b\sin(s)$. Daí,

$$\begin{cases} x(s) &= a\cos(s) + b\sin(s) \\ y(s) &= x'(s) \\ &= a\sin(s) - b\cos(s) + c \end{cases}$$

e α é então a circunferência unitária com centro em $(0, c)$. Ver [2]. \square

4.3 Demonstração Geométrica 2

Demonstração. Utilizaremos a seguinte fórmula para a área A limitada por uma curva simples fechada com orientação positiva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde

$t \in [a, b]$ é um parâmetro.

$$\begin{aligned} A &= - \int_a^b y(t)x'(t)dt \\ &= \int_a^b x(t)y'(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - yx')dt \end{aligned} \tag{4.3}$$

A segunda fórmula é consequência da primeira.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_a^b xy' dt &= \int_a^b (x'y + xy' - x'y)dt \\ &= \int_a^b [(xy)' - x'y]dt \\ &= \int_a^b (xy)'dt - \int_a^b x'ydt \\ &= xy \Big|_a^b - \int_a^b x'ydt \\ &= xy(b) - xy(a) - \int_a^b x'ydt \\ &= - \int_a^b x'ydt, \end{aligned}$$

pois

$$0 = xy(b) - xy(a),$$

já que a curva que estamos considerando é fechada.

A terceira fórmula é a soma das outras duas dividido por 2. Provemos a primeira fórmula

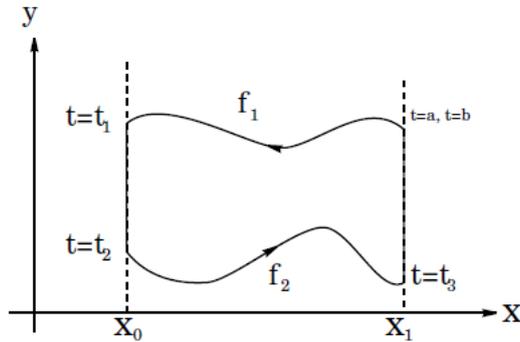


Figura 1:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx. \quad (4.4)$$

Como a curva tem orientação positiva,então

$$\begin{aligned} A &= - \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt \\ &= - \int_a^b y(t)x'(t)dt \end{aligned}$$

pois $x'(t) = 0$ ao longo dos segmentos paralelos ao eixo Oy .

Note de (4.4) que

$$f_1(x) = y \quad \text{e} \quad x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t)dt.$$

Daí,

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = - \int_a^{t_1} yx'(t)dt$$

Agora considere duas retas paralelas r_1 e r_2 que não intersectam a curva fechada C . Denotaremos as retas r'_1 e r'_2 como sendo as tangentes à curva C obtidas quando transladarmos a reta r_1 da esquerda para à direita e quando transladarmos a reta r_2 da direita para à esquerda, respectivamente. Observe a figura 2.

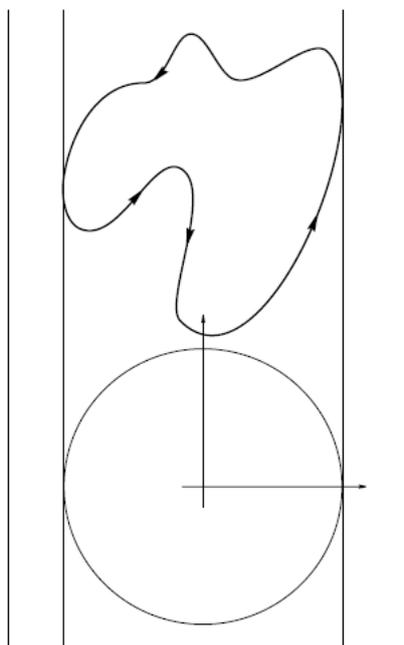


Figura 2

Agora considere o movimento destas retas até que elas toquem C pela primeira vez.

Assim C está totalmente contida na faixa limitada por r'_1 e r'_2 . Agora considere um círculo S^1 que seja tangente a r'_1 e r'_2 e que não intersecte C .

Parametrize C pelo comprimento de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, de modo que C tenha orientação positiva e os pontos de tangência com r'_1 e r'_2 sejam respectivamente, $s = 0$ e $s = s_1$. Assim

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), s \in [0, l]$$

Daí,

$$A = \int_0^l xy' ds, \quad \bar{A} = \pi r^2 = - \int_0^l \bar{y}x' ds.$$

$$\begin{aligned}
A + \pi r^2 &= \int_0^l xy' ds - \int_0^l \bar{y}x' ds \\
&= \int_0^l (xy' - \bar{y}x') ds \\
&= \int_0^l [(x', y') \cdot (-\bar{y}, x)] ds.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
A + \pi r^2 &\leq \int_0^l |\alpha'| |\bar{\alpha}| ds \\
&= \int_0^l |\bar{\alpha}| ds \\
&= lr.
\end{aligned}$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha' = \frac{1}{r}(-\bar{y}, \bar{x})$, ou seja, $(x', y') = \frac{1}{r}(-\bar{y}, \bar{x})$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^l [(x', y') \cdot (-\bar{y}, \bar{x})] ds &= \int_0^l r(x'^2 + y'^2) ds \\
&= \int_0^l r|\alpha'|^2 ds \\
&= rl
\end{aligned}$$

Observe o fato de que dados $a, b \leq 0$ tem-se $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Daí,

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2} \cdot (A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2} lr \Rightarrow \sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2} lr \Rightarrow \pi A r^2 \leq \frac{1}{4} l^2 r^2.$$

Logo

$$4\pi A \leq l^2.$$

Portanto

$$l^2 - 4\pi A \geq 0.$$

□

4.4 Aplicações

Veremos que o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica também é válida para curvas por partes, sendo assim, enunciaremos as proposições sobre esse Teorema com suas devidas demonstrações.

Proposição 10. *São dadas uma reta r no plano e uma corda flexível C de comprimento L . Pousando C no plano de forma a que suas extremidades estejam sobre r , obtemos uma figura limitada por r e por C e cuja área depende da forma que dermos à corda. Mostre que a figura de área máxima entre todas as assim obtidas é um semicírculo com base em r .*

Demonstração. Tomando a reta r como eixo de rotação, rebata a figura limitada por r e C no semiplano oposto à essa figura.

Suponha por contradição que essa figura com área máxima não seja um semicírculo, assim, se rebatermos a mesma no eixo r , obtemos uma curva fechada simples com área máxima e que não é um círculo. Absurdo!, pois contradiz o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica. \square

Proposição 11. *Dados dois pontos p e q no plano e uma corda flexível C de comprimento $L > |p - q|$, determine a figura de maior área entre aquelas limitadas por C e pelo segmento de reta pq .*

Demonstração. Afirmação: A curva obtida com as condições estabelecidas é um arco de círculo.

Se $L \leq |p - q|$, então a curva C não delimita área. Construa uma curva C' com comprimento fixo L' tal que a curva $C \cup C' = S$ seja fechada, simples e regular. Pelo Teorema da Desigualdade Isoperimétrica, a área máxima que a curva S pode delimitar é quando S for uma circunferência. Logo segue que a curva estabelecida na proposição acima é um arco de círculo. \square

Proposição 12. *Seja α uma curva convexa regular de largura constante l que limita uma região de área A . Mostre que*

$$A \leq \frac{\pi l^2}{4} \tag{4.5}$$

só havendo igualdade se α for uma circunferência.

Essa proposição é consequência imediata do Teorema 3. Veja [1].

Referências Bibliográficas

- [1] Araújo, P: *Geometria Diferencial*, IMPA; Rio de Janeiro, 2004.
- [2] Carmo, M. P. : *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática; Rio de Janeiro, 2005.
- [3] Djairo Guedes de, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais/Djairo Guedes de Figueiredo.4 ed.Rio de Janeiro:IMPA*, 2009.
- [4] Elon Lages, *Curso de Análise; v.1.12.ed.Rio de Janeiro:Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada*, 2008.
- [5] Marcio G, :*Cálculo em uma variável complexa/Marcio Gomes Soares.4.ed.Rio de Janeiro :IMPA*, 2007.
- [6] C.G.T de A e Saldanha, N, C - A Desigualdade Isoperimétrica. *Matemática Universitária* número 15, dezembro de 1993.