Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística
Curso de Graduação em Matemática

A função de van der Waerden: funções contínuas sem derivada em ponto algum são mais frequentes do que pensamos!

por

Lorena Brizza Soares Freitas

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB

Novembro de 2011

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística

Lorena Brizza Soares Freitas

A função de van der Waerden: funções contínuas sem derivada em ponto algum são mais frequentes do que pensamos!

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande, 25 de Novembro de 2011
Curso de Matemática, modalidade Bacharelado

A função de van der Waerden: funções contínuas sem derivada em ponto algum são mais frequentes do que pensamos!

Lorena Brizza Soares Freitas

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 25 de Novembro de 2011, pela Comissão Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Orientador

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Examinador

Com nota igual a: —-

Dedicatória

À minha mãe Lourdes, minhas tias Solange e Edna e minha irmã Larisse.

Agradecimentos

Inicialmente agradeço à Deus que me concedeu a vida, minha família e meus amigos.

À minha mãe Lourdes, um exemplo de mulher e mãe, pelo apoio nas minhas escolhas, por todos os ensinamentos e pelo esforço e dedicação direcionados a mim e a minha irmã.

À minha irmã Larisse por me fazer sorrir a cada volta pra casa e também pela boa influência que fez de mim o que sou hoje.

Às minhas tias Solange e Edna, companheiras de minha mãe, que ao vir morar em Campina contribuíram, sem saber, para minha educação e meu futuro.

Ao meu pai Francisco Sales por sempre ressaltar o valor da educação e da perseverança no estudo.

Aos meus irmãos Gabriela, Virgínia, Felipe e Débora pela alegria nas férias e pela experiência de ser, mesmo em momentos pontuais, uma irmã mais velha.

Aos meus avós maternos, José e Maria, os quais tenho muito amor e admiração. Aos meus avós paternos Gaudêncio e Otacília *(in memorian)* que, apesar do pouco contato, se fizeram sempre presentes.

Agradeço à toda minha família, meu alicerce, ao meu tio Hermógenes, meus primos Layo e Lavyk e minhas primas Juliana e Fabiana.

Através do nome de Ranielly Oliveira, Millena Nunes, Renata Melo, Amanda Rodrigues, Jhéssika Angell, Melqui Lima, Michael Souto e Marcus Marinho, agradeço aos meus amigos que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação e compartilharam comigo várias experiências, dias regados a boas conversas e muitas risadas.

À Brauna Nascimento e Marcella Lima minhas companheiras, amigas e irmãs no curso que, mesmo com a distância devido a nossas escolhas, sempre foram presentes e me mostraram que num ambiente tão competitivo como a universidade pode sim existir amizade verdadeira e duradoura.

Ao meu amigo Michel Barros que muito me ajudou nessa última etapa da graduação, tirando dúvidas, resolvendo exercícios, compartilhando almoços e caminhadas para o CX e por me ajudar a digitar e preparar os gráficos deste trabalho.

Aos meus irmãos do PET-Matemática Alan Guimarães, André Ramalho, Arthur Cavalcante, Jogli Gidel, Juarez Brito, Maciene Reis, Mário Alves, Michell Dias, Matheus Motta, Paulo Romero e Ygor Torquato, um agradecimento especial carregado de amor, carinho e saudade antecipada. Vocês, sem dúvida, ficarão para sempre em minha vida e espero que um dia sejamos colegas de trabalho. Sentirei falta dessa família a cada dia.

Em especial, agradeço a José Guimarães de Carvalho Neto, a quem direciono o meu amor e a ideia de futuro. Muito obrigada por cada dia que passamos juntos em Campina Grande, pela presença na ausência e pela grande ajuda com a leitura deste trabalho.

Agradeço aos professores do Effort Idiomas, em especial a Sayonara Oliveira pela contribuição e pela paciência ao me ensinar uma nova língua.

À todos os professores do DME, em especial a José Luiz, Marco Aurélio e Brandão que foram extremamente importantes na minha graduação. Os dois primeiros me despertaram o interesse desde o início do curso e o último me ensinou, além da Álgebra, a ter perseverança e comprometimento com a profissão.

Ao professor Severino Horácio pela imensa colaboração e disponibilidade no Projeto de Iniciação Científica.

À todos os funcionários do DME, Severina (Du), Dalva, Suênia, Dona Argentina *(in memorian)*, Claudiana (Aninha), Andrezza, Sóstenes (Totinha), David, Renato, Rodrigo e Rafael, agradeço por sempre me ajudar, por todos os bons dias e por tornar o ambiente do Departamento tão organizado e alegre.

Terei eterna gratidão ao meu orientador e tutor do PET-Matemática Daniel Cordeiro de Morais Filho por ter acreditado e confiado em mim nesses 3 anos. Por toda paciência, incentivo, amizade e conselhos. Agradeço de coração por ter me adotado como "filha" na graduação.

Por fim, agradeço às minhas escolhas que me trouxeram até aqui.

Sumário

Resumo

Neste trabalho mostraremos que existem funções contínuas reais que não possuem derivada em ponto algum, através da função construída pelo matemático van der Waerden. Para demonstrar tal fato, introduzimos alguns conceitos e resultados básicos da Análise Matemática. Além disso, demonstraremos um resultado interessante mostrando que funções deste tipo são densas no conjuntos das funções contínuas. Nossa demonstração é baseada no Teorema de Baire e alguns conceitos de Topologia dos Espaços Métricos.

Abstract

In this work we show that there are real continuous functions that do not have derivative at any point, through the function constructed by the mathematician van der Waerden. To prove this fact, we introduce some basic concepts and results of Mathematical Analysis. Furthermore, we prove an interesting result showing that such functions are dense in the set of bounded fuctions. Our prove is based on the Theorem of Baire and some concepts of Topology of Metric Spaces.

Capítulo 1

Introdução

Dos conceitos de continuidade e diferenciabilidade apresentados no Cálculo Diferencial muitos problemas naturais surgiram. Um destes problemas é provado nos cursos de Análise, a saber, diferenciabilidade implica em continuidade.

Além disso, podemos nos perguntar se a recíproca do fato anterior vale, ou seja, se toda função contínua é diferenciável. A resposta para essa pergunta é não, basta tomar como exemplo a função $f(x) = |x|$. Sabemos que no ponto $x = 0$, esta função, apesar de contínua, não é diferenciável. Ainda, utilizando a função módulo como protótipo e usando a ideia de uma função cujo gráfico tem a forma serrilhada, (vide figura 2.1 no capítulo 2) podemos verificar que existem funções contínuas que não possuem derivadas em um número infinito de pontos.

Com esses exemplos notamos facilmente, que continuidade não implica em diferenciabilidade. Mas será que existe um função contínua que não possui derivada em ponto algum? O que sua intuição diz?

Muitos acreditavam que a resposta à primeira pergunta era afirmativa e que as funções contínuas tinham derivadas num número signicativo de pontos, A. M. Àmpere (1775-1836), por exemplo, em trabalho publicado em 1806 tentou dar justificativas teóricas deste fato. Contudo, até o início do século XIX os principais conceitos do Cálculo ainda não tinham uma fundamentação lógica adequada e o trabalho de Àmpere falhou nisso (vide [1]).

Em 1872, K. Weierstrass (1815-1897) publicou um trabalho que surpreendeu a comunidade matemática provando que essa conjectura era falsa, ou seja, que existiam funções contínuas sem derivada em ponto algum. Mais precisamente, ele construiu um exemplo de uma função contínua que não era diferenciável em nenhum ponto. Esse não foi o primeiro exemplo de uma função com tais propriedades, com o tempo, foram encontrados exemplos datados de antes do de Weierstrass, como os do matemático tcheco B. Bolzano (1781-1849), em torno de 1830 (vide [1]).

Após o exemplo de Weierstrass, vários outros matemáticos deram suas contribuições construindo exemplos de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto (vide [1]). Um deles foi van der Waerden e a função por ele construída é foco do presente trabalho que se subdivide em 8 Capítulos.

Este primeiro tratando da introdução ao documento. O Capítulo 2 faz um apanhado histórico acerca de funções contínuas sem derivada. Enquanto que o Capítulo 3 apresenta alguns conceitos de Análise na Reta. No quarto Capítulo exibimos gráficos com o objetivo de dar uma ideia sobre o comportamento de funções deste tipo, e no seguinte, o Capítulo 5, demonstramos que a função construída por van der Waerden é, de fato, contínua em todos os pontos, mas não possui derivada em nenhum. Temos no Capítulo 6 alguns conceitos e resultados da Topologia dos Espaços Métricos, inclusive o Teorema de Baire, utilizado no Capítulo 7 para demonstramos que o conjunto das funções contínuas sem derivada é denso no conjunto das funções contínuas limitadas. Por fim, no Capítulo 8 apresentamos as considerações finais do trabalho.

Capítulo 2

Nota Histórica

A possibilidade de traçar uma curva sobre uma folha de papel sem levantar o lápis, ideia intuitiva de continuidade, foi formalizada pelo matemático frânces Augustin Cauchy (1789-1857). Ele definiu que uma função $f(x)$ é contínua se um acréscimo infinitamente pequeno da variável x resultar num crescimento infinitamente pequeno da própria função. Formalmente, temos

Definição 2.0.1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua num ponto $a \in X$ quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Sabemos que a noção de diferenciabilidade estende a noção de continuidade, sendo a derivada de uma função em um ponto a dada por:

$$f'(a) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando esse limite existir.

Deste modo, uma função é diferenciável (derivável) em a se ela possuir uma derivada $f'(a)$. E, quando isso acontece, o valor da derivada $f'(a)$ é igual á inclinação da reta tangente que passa por a na curva associada à função f.

Em geral, as funções contínuas clássicas são altamente regulares, isto é, deriváveis e possuem tangentes em todos os pontos. Mas existem funções contínuas que não são deriváveis em nenhum de seus pontos (veja [8]). No capítulo 5 daremos um exemplo desse tipo de função.

Como já foi dito, é fácil dar exemplos de funções contínuas que não tenham derivadas em um número infinito de pontos. Tomando a função módulo como base, basta considerar uma função cujo gráfico é uma serra, como vemos a seguir

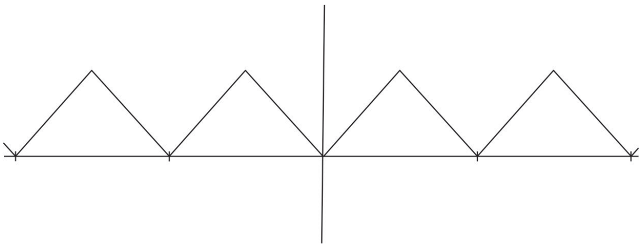


Figura 2.1:

Bernhard Bolzano (1781-1849) foi o primeiro a construir um exemplo de tais funções, contudo, seu trabalho não foi amplamente difundido, sendo conhecido muito tempo após sua morte.

Em 1872, Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) relata em um artigo que o matemático alemão Riemann (1826-1866), em 1861, contou a seus estudantes que a função contínua

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n^2 x)}{n^2} \tag{2.1}$$

não tem derivada em ponto algum. Não tendo conseguido demonstrar este fato, Weierstrass construiu o seu próprio exemplo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x) \tag{2.2}$$

onde, $b \in (0,1)$, a é um inteiro ímpar com $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ (vide [4]).

Weierstrass foi um matemático alemão, professor na Universidade de Berlim. Filho de um oficial alfandegário. Quando jovem, demonstrou habilidade em línguas e no trato com os números. Porém, por influência do pai, ingressou em um Programa de estudo de leis e comércio da Universidade de Bonn.

Em 1839, Weierstrass entrou para a Academia de Münster, com objetivo de obter um título em educação do ensino secundário. Neste ambiente conheceu o matemático Christof Gudermann (1798-1852), por quem foi orientado. As ideias de Gudermann influenciaram muito o trabalho de Karl, que nos 15 anos seguintes à sua formatura, ensinou alemão, caligrafia, geografia e matemática em uma escola secundária. Por ser

Figura 2.2: Karl Weierstrass (1815-1897)

um professor secundário, muito do seu trabalho de pesquisa matemática foi ignorado por bastante tempo.

Somente em 1854 publicou um artigo de maior importância que lhe deu fama matemática internacional. No mesmo ano recebeu da Universidade de Königsberg, um título de doutor honorário, e, em 1856, teve início sua carreira como professor da Universidade de Berlim.

O trabalho de Weiestrass forneceu as bases da teoria das funções analíticas. Weierstrass foi um pioneiro da moderna análise matemática e orientador da matemática Sofia Vasilyevna Kovalevskaja (1850-1891), a primeira mulher a obter um título de doutora em matemática e a segunda na história a obter um título de doutora a nível mundial.[2]

Outro exemplo de funções contínuas sem derivada foi dado pelo matemático van der Waerden (1903-1996) em 1930:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \{10^n x\}$$

onde, $\{x\}$ é a distância de x ao inteiro mais próximo de x.

Figura 2.3: van der Waerden (1903-1996)

Bartel Leendert van der Waerden foi o popularizador da Álgebra Moderna no século XX através de seu famoso livro Modern Algebra. Após escrever seu livro, van der Waerden se dedicou a explicar a matemática da Mecânica Quântica, especialmente àqueles pontos relacionados ao papel da Teoria dos Grupos.

Esta última é foco deste trabalho, e será melhor apresentada no capitulo 5. A seguir, no Capítulo 3, mostraremos alguns resultados básicos de Análise Matemática.

Capítulo 3

Conceitos Básicos

O presente Capítulo trata de alguns conceitos básicos necessários para a melhor compreensão acerca desse trabalho. Para uma leitura mais completa vide [6].

3.1 Séries Numéricas

Definição 3.1.1. Seja (a_n) uma sequência de números reais. Definimos a *série* dos termos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

A partir da sequência a_n formamos uma nova sequência (s_n) cujos elementos são as somas

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, ..., s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

que chamaremos de *reduzidas.* A parcela a_n é chamada o n-ésimo termo ou termo geral da série $\sum a_n$.

Além disso, se existir o limite

$$s = \lim s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + ... + a_n),$$

diremos que a série $\sum a_n$ é *convergente* e o limite s será chamado a *soma* da série. Escreveremos então

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Caso contrário, ou seja, se a sequência das reduzidas não convergir, diremos que a série $\sum a_n$ é *divergente*.

Uma condição necessária para a convergência de uma série é que o seu termo geral tenda para zero. Esse fato é demonstrado no seguinte teorema.

Teorema 3.1.1. Se $\sum a_n$ é uma série convergente, então $\lim a_n = 0$.

Demonstração. Considere $s_n = a_1+a_2+...+a_n$. Sendo $\sum a_n$ convergente, por definição, existe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Além disso, temos também $s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Logo

$$\begin{aligned} 0 &= s - s \\ &= \lim s_n - \lim s_{n-1} \\ &= \lim(s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim a_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim a_n = 0.$$

□

Exemplo 3.1.1. A recíproca do Teorema 3.1.1 é falsa. O contraexemplo clássico é a *série harmônica*

$$\sum \frac{1}{n}.$$

Seu termo geral, $\frac{1}{n}$ tende para zero, mas a série diverge. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Segue-se que $\lim s_{2^n} = +\infty$ e, por conseguinte $\lim s_n = +\infty$. Resulta daí que, para $0 < r < 1$, a série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^r}$$

diverge, pois $\frac{1}{n^r} > \frac{1}{n}$ para todo $n > 1$.

Exemplo 3.1.2. Prova-se facilmente que a *série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é divergente quando $|a| \geq 1$, pois neste caso o termo geral não tende para zero. Quando $|a| < 1$ a série geométrica converge, sendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Uma série $\sum a_n$ pode divergir por dois motivos. Ou porque as reduzidas $s_n = a_1 + ... + a_n$ não são limitadas ou porque elas oscilam. Quando os termos da série têm todos o mesmo sinal, esta última possibilidade não ocorre, pois, neste caso, as reduzidas formam uma sequência monótona. Temos então o seguinte teorema

Teorema 3.1.2. Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, as reduzidas $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ formam uma sequência limitada, isto é, se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $a_1 + ... + a_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponha que $\sum a_n$ converge e tome $\varepsilon = 1$, daí existe $n_0 \in N$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_1 + a_2 + ... + a_n - s| < 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n < s + 1 = k$. Reciprocamente, como $a_n \geq 0$, temos $s_1 \geq s_2 \geq ...$, logo as reduzidas formam uma sequência monótona. Supondo então que existe $k > 0$ tal que $a_1 + ... + a_n < k$ segue que $\sum a_n$ é convergente, pois t oda sequência monótona limitada é convergente). □

Corolário 3.1.1. (Critério da Comparação) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c.b_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de $\sum b_n$ implica a convergência de $\sum a_n$, enquanto que a divergência de $\sum a_n$ acarreta a de $\sum b_n$.

Exemplo 3.1.3. Se $r > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ converge. Como os termos desta série são positivos, a sequência de suas reduzidas é crescente e, consequentemente, monótona. Deste modo, para provar que tal sequência é limitada basta obter uma subsequência limitada. Tomaremos as reduzidas de ordem $m = 2^n - 1$. Para cada uma delas vale

$$\begin{aligned} s_m &= 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + ... + \frac{1}{(2^n-1)^r} \\ &< 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)^r}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2^r}\right). \end{aligned}$$

Como $r > 1$, temos $2/2^r < 1$, logo a série geométrica

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{2^r}\right)$$

converge para uma soma c. Assim $s_m < c$ para todo $m = 2^n - 1$. Concluímos então que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$$

é convergente quando $r > 1$. Pois já vimos que para $r \leq 1$ ela é divergente.

Definição 3.1.2. Uma série $\sum a_n$ chama-se absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é uma série convergente.

Exemplo 3.1.4. Toda série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Quando $-1 < a < 1$ a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é absolutamente convergente. Mas nem toda série convergente é absolutamente convergente. O exemplo típico de uma série convergente $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n| = +\infty$ é dado por

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

Suas reduzidas de ordem par são

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 - \frac{1}{2}, \quad s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \\ s_6 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right), \quad etc. \end{aligned}$$

Tem-se $s_2 < s_4 < s_6 < ... < s_{2n}$. Além disso, as reduzidas de ordem ímpar são

$$s_1 = 1, \quad s_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \quad s_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \quad etc.$$

Portanto, $s_1 > s_3 > s_5 > ... > s_{2n-1}$. Logo existem $s' = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ e $s'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$, pois toda sequência monótona limitada é convergente. Como $s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1}$, e

$$\frac{1}{2n+1} \to 0,$$

quando $n \to \infty$, segue-se que $s' = s''$. A série dada é convergente, mas não absolutamente convergente, pois, como já provamos, a série hamônica $\sum \frac{1}{n}$ é divergente.

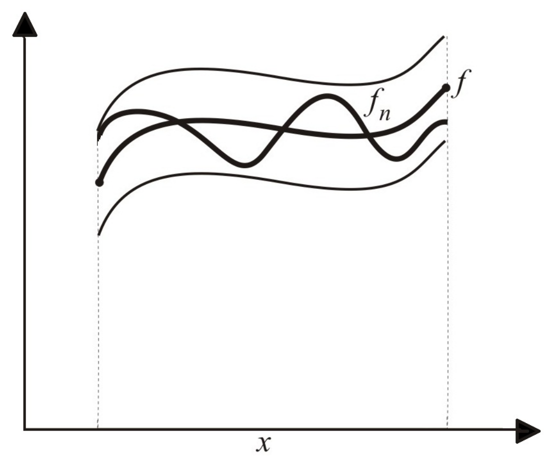
3.2 Sequências e Séries de Funções

Consideraremos agora as sequências e as séries cujos termos são funções. Ao contrário das sequências de números reais, para as quais existe uma única noção de limite, há maneiras diferentes de definir a convergência de uma sequência de funções, porém, trataremos aqui apenas da convergência uniforme. No que segue nos baseamos em [6] e [9].

3.2.1 Convergência Uniforme

Definição 3.2.1. Seja X um conjunto de números reais. Uma *sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n definida em X e tomando valores reais. Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge *uniformemente* para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Interpretemos esta definição geometricamente. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chamaremos de faixa de raio ε, com amplitude 2ε, em torno de faixa do gráfico de f ao conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $x \in X$ e $|y - f(x)| < \varepsilon$, ou seja, $f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$, sendo $\varepsilon > 0$.



A condição $|f_n - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ significa que o gráfico da função f_n está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f. Assim, dizer que $f_n \to f$

uniformemente em X significa afirmar que, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todas as funções f_n, com $n > n_0$, têm seus gráficos contidos na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

Exemplo 3.2.1. Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, sejam (a_n) uma sequência de números reais com $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função. Podemos considerar a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = a_n \cdot g(x)$ e a função $f : X \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a \cdot g(x)$. Se $a_n \neq a$ para uma infinidade de valores de n então $f_n \to f$ uniformemente em X se, e somente se, g for limitada. Com efeito, se tivermos $|g(x)| < k$ para todo $x \in X$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Logo $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |a_n - a|\,|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon$, para todo $x \in X$, o que prova a uniformidade da convergência. Reciprocamente, se g não é limitada em X, a convergência $f_n \to f$ não é uniforme. De fato, seja $\varepsilon = 1$ e como $a_n \to a$ dado n_0, existe $n > n_0$ tal que $a_n \neq a$. Sendo g ilimitada em X, podemos encontrar $x \in X$ tal que $|g(x)| \geq \dfrac{1}{|a_n - a|}$. Para tais n e x temos

$$\begin{aligned} |a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| &= |a_n - a| \cdot |g(x)| \\ &\geq |a_n - a| \cdot \frac{1}{|a_n - a|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3.2.2 Séries de Funções

Seja (f_n) uma sequência de funções e f uma função. Admitindo que f e todas as funções f_n são definidas no mesmo conjunto X. A soma $f = \sum f_n$ de uma série é um caso particular de um limite de sequência de funções $f = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, onde $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$. Tem sentido, portanto, dizer que a série $\sum f_n$ converge uniformemente.

Reciprocamente, todo limite $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ de uma sequência de funções $\varphi_n \to \mathbb{R}$ também pode ser obtido como soma de uma série. Basta pôr $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, $f_3 = \varphi_3 - \varphi_2$,..., tem-se então:

$$f_1 + f_2 + ... + f_n = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1 + ... + \varphi_n - \varphi_{n-1} = \varphi_n.$$

Diante disso, dizemos que $f = \sum f_n$ converge uniformemente em X se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o resto $r_n(x)$ definido por $r_n(x) = f(x) - (f_1(x) +$

$... + f_n(x))$, cumpre a condição $|r_n(x)| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ e todo $x \in$ X.

Um meio de verificar se uma série convergente uniformemente em um conjunto X é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 3.2.1. (Teste M de Weierstrass) Seja (f_n) uma sequência de funções definidas num conjunto X, e suponha que (a_n) é uma sequência de números tais que $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo x em X. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Então para cada x em X, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em X para a função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Demonstração. Para cada x em X, temos:

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

assim, como por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, segue, pelo critério da comparação que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge. Consequentemente $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente. Além disso, para todo x em X, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - [f_1(x) + ... + f_n(x)]| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\ &= \left| \lim_{r \to \infty} \sum_{n=N+1}^{r} f_n(x) \right|, \end{aligned}$$

Como a função módulo é contínua, segue

$$\begin{aligned} |f(x) - [f_1(x) + ... + f_n(x)]| &= \lim_{r \to \infty} \left| \sum_{n=N+1}^{r} f_n(x) \right| \\ &\leq \lim_{r \to \infty} \sum_{n=N+1}^{r} |f_n(x)| \\ &\leq \lim_{r \to \infty} \sum_{n=N+1}^{r} a_n \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ deve ser tão pequeno quanto desejarmos, daí basta escolher N suficientemente grande, donde segue o resultado. □

Exemplo 3.2.2. A série

$$\sum_n \frac{sen(nx)}{n^2}$$

converge uniformemente em $\mathbb{R}$, pois

$$\left|\frac{sen(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, como $\sum \frac{1}{n^2}$ é uma série convergente de números reais pelo Exemplo 3.1.3, segue do Teste M de Weierstrass o resultado.

Teorema 3.2.2. Suponha que (f_n) é uma sequência de funções que são contínuas em $[a, b]$ e que (f_n) converge uniformemente para f em $[a, b]$. Então f é contínua em $[a, b]$.

Demonstração. Para cada $x \in [a, b]$ devemos provar que f é contínua em x. Considere $x \in [a, b]$ e seja $\varepsilon > 0$. Como por hipótese (f_n) converge uniformemente para f em $[a, b]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $x \in [a, b]$.

Em particular, para todo h tal que $x + h$ está em $[a, b]$, temos

$$|f_{n_0+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.1}$$

e

$$|f(x + h) - f_{n_0+1}(x + h)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.2}$$

Sendo f_n contínua, existe $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$

$$|f_{n_0+1}(x + h) - f_{n_0+1}(x + h)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.3}$$

Daí, para $|h| < \delta$ temos

$$
\begin{aligned}
&|f(x+h) - f(x)| = \\
&= |f(x+h) - f_{n_0+1}(x+h) + f_{n_0+1}(x+h) + f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x) - f(x)| \\
&\leq |f(x+h) - f_{n_0+1}(x+h)| + |f_{n_0+1}(x+h) + f_{n_0+1}(x)| + |f_{n_0+1}(x) - f(x)|,
\end{aligned}
$$

segue de (3.1), (3.2) e (3.3) que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em x.

□

Corolário 3.2.1. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f em $[a, b]$. Se cada (f_n) é contínua em $[a, b]$, então f é contínua em $[a, b]$.

Demonstração. Se cada f_n é contínua, então cada $f_1 + ... + f_n$ também é contínua e f é o limite uniforme da sequência $f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3 + ...$, logo f é contínua, pelo Teorema 3.2.2. □

A seguir daremos uma ideia para construir funções contínuas sem derivada.

Capítulo 4

Uma breve ideia

Já vimos exemplos no Capítulo 2, de funções contínuas que não possuem derivadas em ponto algum, mas o que faz com que isso ocorra?

Observando o gráfico abaixo podemos notar que os pontos onde f não é derivável

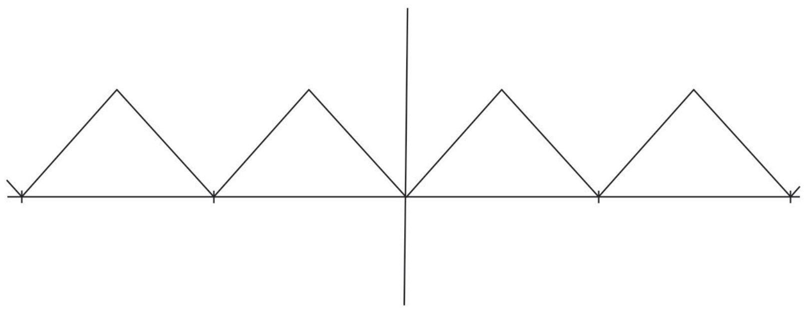


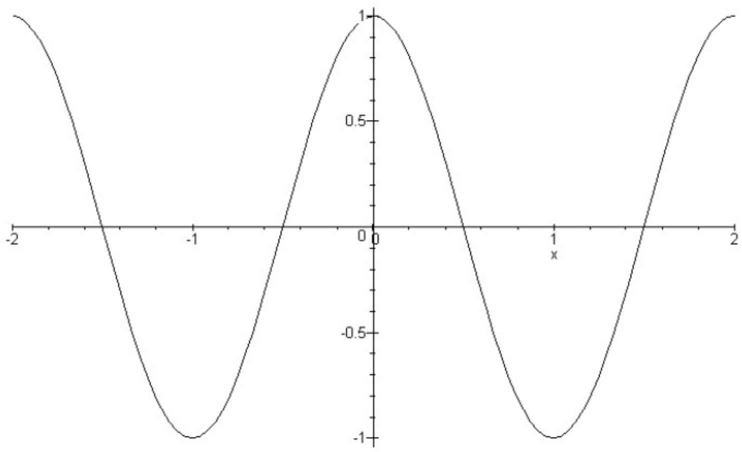
Figura 4.1:

são justamente os pontos no qual o gráfico apresenta "bicos", já que neles é impossível traçar uma reta tangente, logo, construir funções contínuas não deriváveis em nenhum de seus pontos é construir funções cujo gráficos possuem "bicos" em todos os pontos.

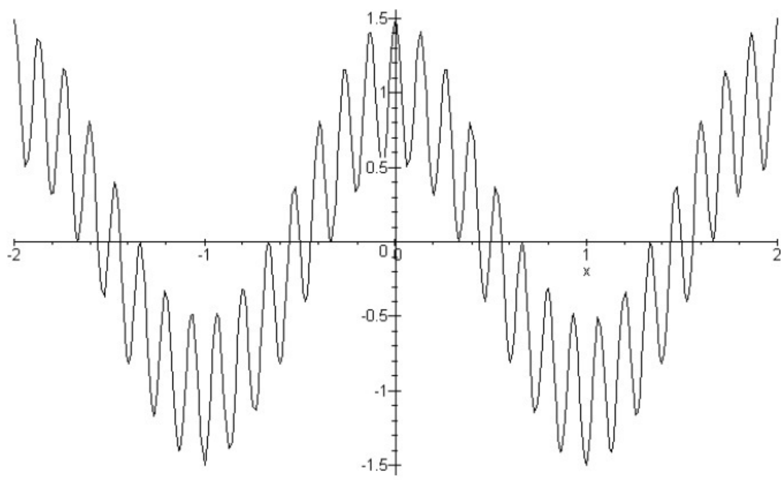
Observe isso nos gráficos das iteradas da função de Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n cos(15^n \pi x) \tag{4.1}$$

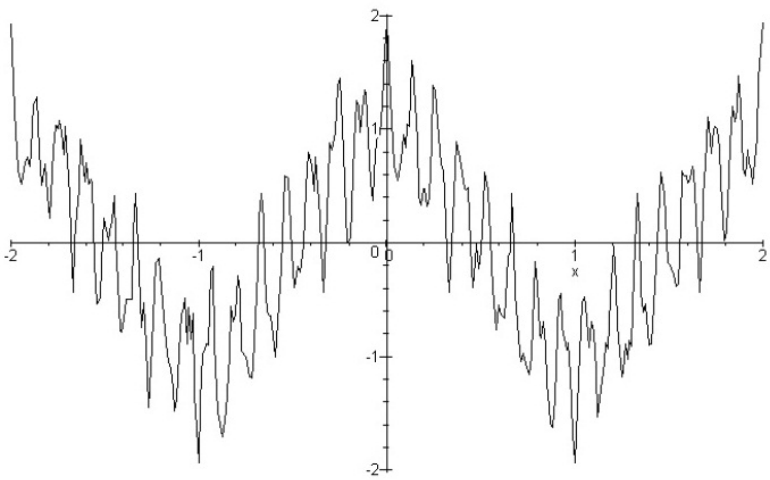
.



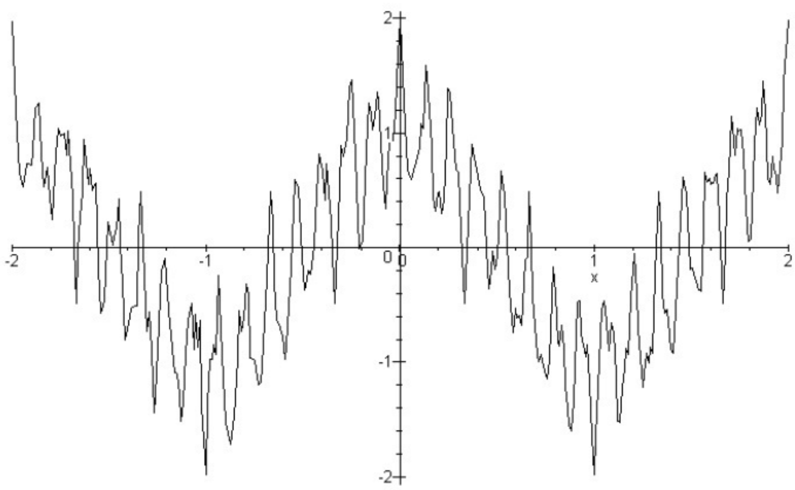
$n = 0$



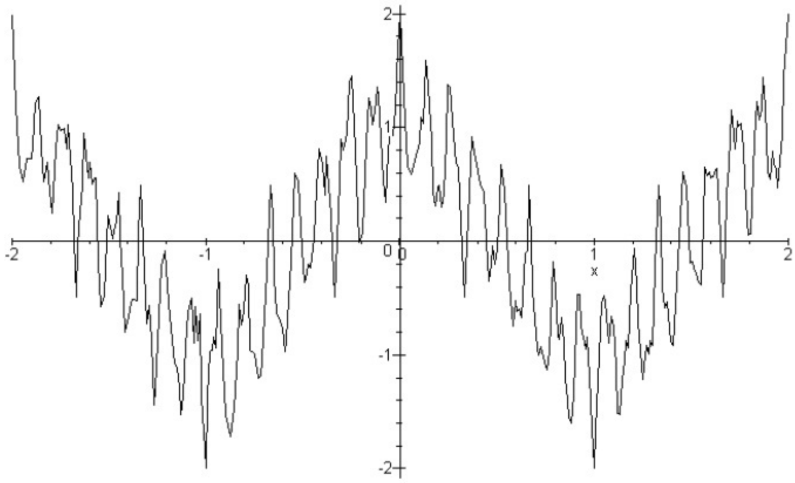
$n = 1$



$n = 4$



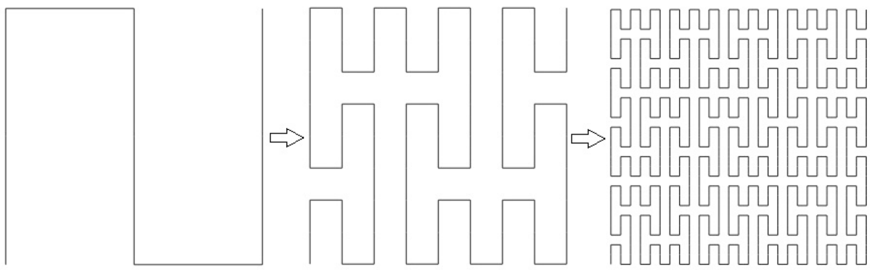
$n = 6$



$n = 10$

Note que a cada iteração o gráfico dessa função apresenta mais pontos onde f não é derivável. Ao passar o limite quando $n \to \infty$ f não vai possuir derivada em nenhum ponto.

Nessa mesma direção, Peano (1858 - 1932) construiu uma curva definida por um processo infinito de iteração, contínua e não derivável em nenhum ponto e que, "no infinito", preenche todo o plano de dimensão 2. Observe como é construída essa curva. (veja [8])



Von Koch também elaborou uma curva em forma de floco de neve, essa curva é denominada por "curva de Koch". [8]

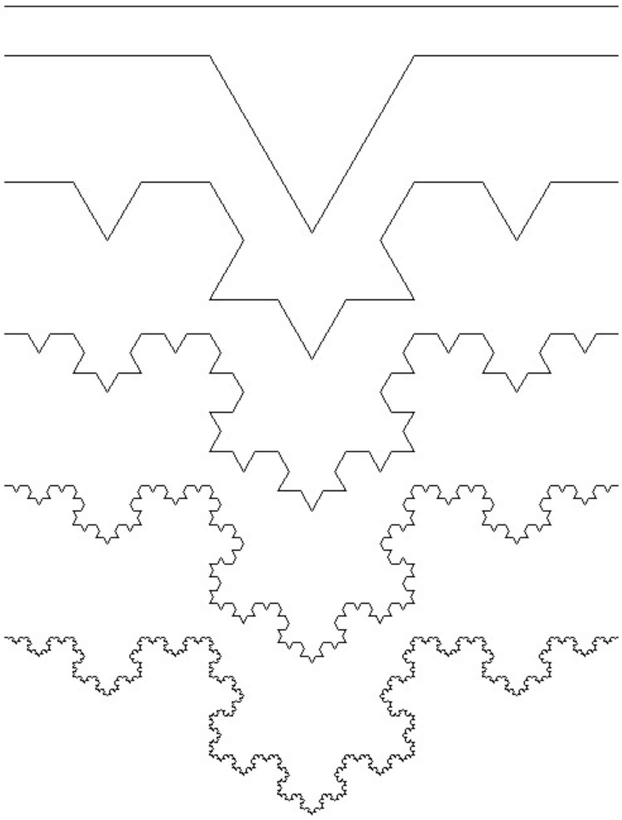


Figura 4.2: Floco de Neve de Koch

A seguir provaremos que a função construída por van der Waerden, citada no Capítulo 2, é contínua em todos os seus pontos, mas não é derivável em nenhum.

Capítulo 5

A função de van der Waerden

5.1 O Teorema

Nosso objetivo é provar o seguinte teorema:

Teorema 5.1.1. Seja $\{x\}$ a distância de x para o inteiro mais próximo. A função de van der Waerden

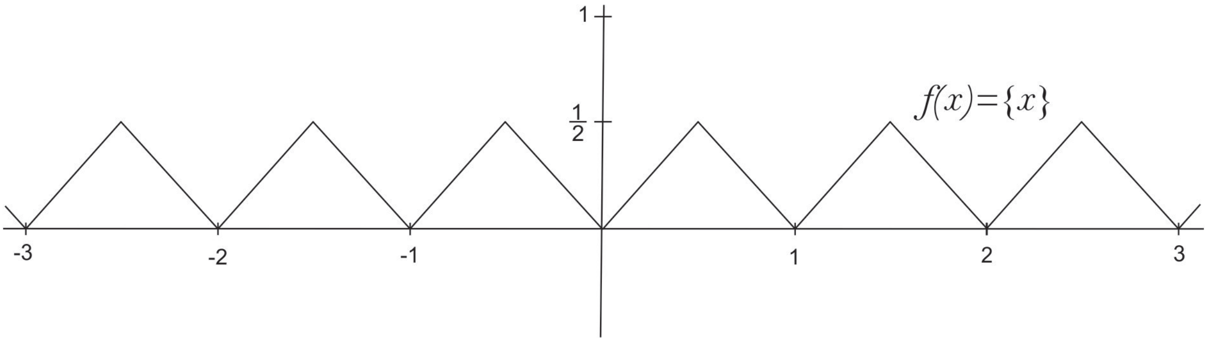
$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\left\{10^n x\right\}$$

é contínua em todo ponto, porém não é diferenciável em nenhum.

5.2 Demonstração

5.2.1 Continuidade

Seja $\{x\}$ a distância de x para o inteiro mais próximo. Observe o gráfico da função $f(x)=\{x\}$:

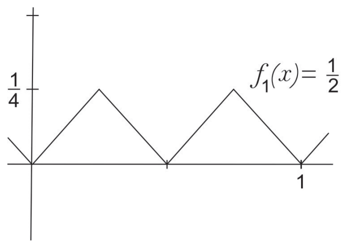


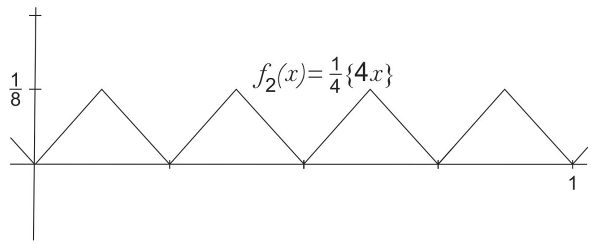
Agora defina

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}\{10^n x\}.$$

As seguintes figuras mostram as funções f_1 e f_2, mas para tornar a visualização do gráfico mais simples substituímos 10^n por 2^n. Ou seja, os gráficos a seguir são da função f definida por:

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n}\{2^n x\}.$$





A cada iteração o gráfico fica com 2^n "dentes" e, no caso da função de van der Waerden teremos a cada iteração 10^n "dentes", ou seja, o gráfico f_1 terá 10 dentes, o gráfico de f_2 possuirá 100 dentes e assim sucessivamente.

Observe que a sequência de funções

$$f_n = \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

foi definida de forma que podemos aplicar o Teste M de Weierstrass (Teorema 3.2.1). Claramente temos, para todo x:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{10^n} \cdot 1.$$

Além disso, sabemos que, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ converge, pois é uma série geométrica de razão menor que 1. Então, pelo Teorema 3.2.2 , $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente. Daí, como $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f e cada função f_n é contínua, temos pelo Corolário 3.2.1 que a função

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n\} \end{aligned}$$

é também contínua.

5.2.2 Diferenciabilidade

Ideia da demonstração:

Provaremos que f não é derivável em qualquer ponto a da reta. Para isso, exibiremos uma sequência particular (h_m) que se aproxima de 0 tal que o limite

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m} \tag{5.1}$$

não existe. Note que quando m tende ao infinito h_m se aproxima de 0, logo se o limite (5.1) não existir podemos concluir que a derivada também não existe em ponto algum a da reta.

Um pequeno truque:

Vamos considerar apenas os números a tais que $0 \leq a \leq 1$, para podermos trabalhar com sua expansão decimal, já que a função $\{x\}$ é periódica, com periodo igual 1.

Considere a expansão decimal de a

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4...$$

onde os $a_i \in \{1, ..., 9\}$.

A escolha da sequência:

Defina

$$h_m = \begin{cases} 10^{-m} & \text{se} \quad a_m \neq 4 \quad \text{ou} \quad 9 \\ -10^{-m} & \text{se} \quad a_m = 4 \quad \text{ou} \quad 9 \end{cases}$$

(a razão para essas duas exceções serão esclarecidas brevemente).

Exemplo 5.2.1.
Se $a = 0{,}34587159...$ então $h_m = (10^{-1}, -10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, -10^{-8}, ...)$
Se $a = 0{,}12948725...$ então $h_m = (10^{-1}, 10^{-2}, -10^{-3}, -10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, ...)$

Note agora, que para um a qualquer tem-se:

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \cdot \frac{\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}}{\pm 10^{-m}} = \tag{5.2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \pm 10^{m-n}\left[\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}\right] \tag{5.3}$$

Para sabermos se (5.3) converge precisamos analisar inicialmente a diferença

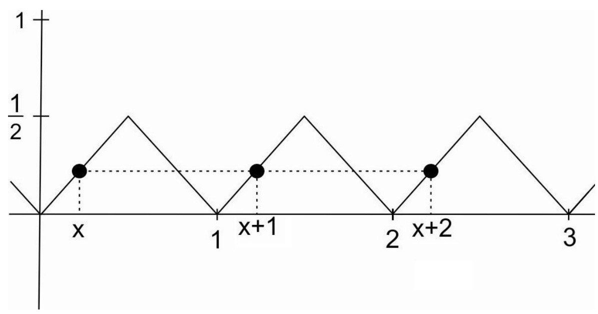
$$\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}.$$

Quanto vale $\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}$?

Vamos analisar a diferença $\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}$ a partir de dois casos

1º caso: $n \geq m$

Note que quando $n \geq m$ o produto $10^n h_m = \pm 10^{n-m} \in \mathbb{Z}$. Vamos analisar o que acontece com a função $\{x\}$ quando é somado a um ponto qualquer um inteiro. Observe o seguinte gráfico:



Observe que ao somar um número inteiro à função o valor que ela assume é igual ao valor assumido sem somar o inteiro. Daí, como $10^n h_m$ é inteiro a diferença

$$\begin{aligned}\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\} &= \{10^n a + 10^n h_m)\} - \{10^n a\}\\ &= \{10^n a\} - \{10^n a\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

2º caso: $n < m$

Inicialmente vamos escrever as seguintes equações e analisar em que circunstâncias elas são satisfeitas.

$$10^n a = inteiro + 0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... \tag{5.4}$$

$$10^n\left(a + h_m\right) = inteiro + 0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...\left(a_m \pm 1\right)... \tag{5.5}$$

Considere o seguinte exemplo que ilustra a escolha de $h_m = -10^m$ quando $a_m = 9$

Exemplo 5.2.2. Sendo $n = 2 < 4 = m$ e $a = 0{,}15728643...$ em (5.4) e (5.5), temos:

$$h_4 = 10^{-4}$$

$$10^2 a = 15 + 0{,}728643...$$

$$10^2(a + h_4) = 15 + 0{,}728643... + 0{,}01 = 15 + 0{,}738643...$$

Observe que ao algarismo $a_4 = 2$ foi acrescentado uma unidade e os outros algarismos de a não mudaram. Agora suponha $h_4 = 10^{-4}$ e $a = 0{,}15798643...$, ou seja, mantemos o h_4 e mudamos apenas o a_4. Daí:

$$10^2 a = 15 + 0,798643...$$

$$10^2(a + h_4) = 15 + 0{,}798643... + 0{,}01 = 15 + 0{,}808643...$$

Note que, com essa mudança, (5.5) não foi satisfeita. Deste modo é preciso fazer uma modificação no h_4. Vamos então considerar $-h_4 = 10^{-4}$ pois $a_4 = 9$. Assim obtemos:

$$10^2 a = 15 + 0{,}798643...$$

$$10^2(a + h_4) = 15 + 0{,}798643... - 0,01 = 15 + 0{,}788643...$$

Fazendo isto (5.5) é satisfeita. Portanto, para que (5.5) seja verdadeira é essencial escolhermos $h_m = -10^{-m}$ quando $a_m = 9$

Agora quando

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... \leq \frac{1}{2}, \tag{5.6}$$

teremos,

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)... \leq \frac{1}{2}. \tag{5.7}$$

Antes disso, para facilitar o entendimento, observe o seguinte exemplo, mostrando que para (5.6) e (5.7) serem satisfeitas é necessário que escolhamos $h_m = -10^{-m}$ quando $a_m = 4$

Exemplo 5.2.3. Considerando $a = 0{,}713282165...$ e $n = 2 < 3 = m$, temos:

$$0{,}3282165... \leq \frac{1}{2}$$

e,

$$0{,}(3+1)28265... = 0{,}4283165... \leq \frac{1}{2}.$$

Mas, se $a = 0{,}714282165...$ e $n = 2 < 3 = m$, teremos:

$$0{,}4282165... \leq \frac{1}{2}$$

porém,

$$0{,}(4+1)28265... = 0{,}5283165... > \frac{1}{2}.$$

Assim, para que (5.7) satisfeita é necessário seja retirada uma unidade de a_m em vez de acrescentar uma unidade à a_m, por isso vamos refazer os cálculos escolhendo $h_3 = -10^{-3}$.

Daí, temos:

$$0{,}4282165... \leq \frac{1}{2}$$

e,

$$0{,}(4-1)28265... = 0{,}3283165... \leq \frac{1}{2}$$

Em geral, para que (5.7) seja satisfeita sempre que

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... \leq \frac{1}{2}$$

é necessário que no caso especial, em que $m = n + 1$, nós escolhamos $h_m = -10^{-m}$ quando $a_m = 4$.

Analogamente, se

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... > 1/2$$

então,

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)... > 1/2.$$

A partir disso, podemos concluir, que o inteiro mais próximo de $0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m...$ é igual ao inteiro mais próximo $0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)...$.

Logo, quando

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... \leq \frac{1}{2}$$

obteremos:

$$\begin{aligned}
\{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)...\} - \{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m...\} &= \\
(0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)... - 0) - (0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... - 0) &= \\
0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)... - 0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... &= \\
\pm 0{,}\ \underbrace{00...01}_{n-m\ casas} &= \\
\pm 10^{n-m}.
\end{aligned}$$

E, quando

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... > \frac{1}{2}$$

temos:

$$\begin{aligned}
\{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)...\} - \{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m...\} &= \\
(1 - 0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)...) - (1 - 0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m...) &= \\
0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)... - 0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m... &= \\
\pm 0{,}\ \underbrace{00...01}_{n-m\ casas} &= \\
\pm 10^{n-m}.
\end{aligned}$$

Em qualquer caso,

$$\{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)...\} - \{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m...\} = \pm 10^{n-m}.$$

Sabendo deste fato, iremos agora, analisar a diferença $\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}$. Note que,

$$\begin{aligned}\{10^n\,(a+h_m)\} &= \{inteiro + 0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)...\}\\ &= \{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...(a_m \pm 1)...\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\{10^n a\} &= \{inteiro + 0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m...\}\\ &= \{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m...\}\,.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\} &= \{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m \pm 1...\} - \{0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...a_m...\}\\ &= \pm 10^{n-m}.\end{aligned}$$

Podemos concluir então então que, para $n \geq m$ temos:

$$\pm 10^{m-n}[\{10^{m-n}\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}] = \pm 10^{m-n} \cdot 0 = 0.$$

E, para $n < m$, segue:

$$\pm 10^{m-n}[\{10^{m-n}\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}] = \pm 10^{m-n} \cdot \pm 10^{n-m} = \pm 1.$$

Em qualquer caso,

$$\frac{f(a+h_m) - f(a)}{h_m} = \sum_{n=1}^{\infty} \pm 10^{m-n}\,[\{10^n\,(a+h_m)\} - \{10^n a\}]$$

é a soma de $m-1$ números, para cada um é igual a ± 1. Agora somando 1 ou -1 a um número ele muda de par para ímpar e vice-versa. A soma de $m-1$ números cada um igual a 1 ou -1 é então um inteiro par se m é ímpar, e é um inteiro ímpar se m é par. Consequentemente a sequência de razões

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

não converge, já que é uma sequência de inteiros que se alternam em par ou ímpar. Portanto, a função f não é derivável em nenhum ponto.

Gráficos das Iteradas da Função de van der Waerden

Podemos notar, através dos gráficos a seguir que, de fato, essa função não possui derivada em ponto algum. Basta observar que a cada iteração o gráfico da função de van der Waerden apresenta mais "bicos" .

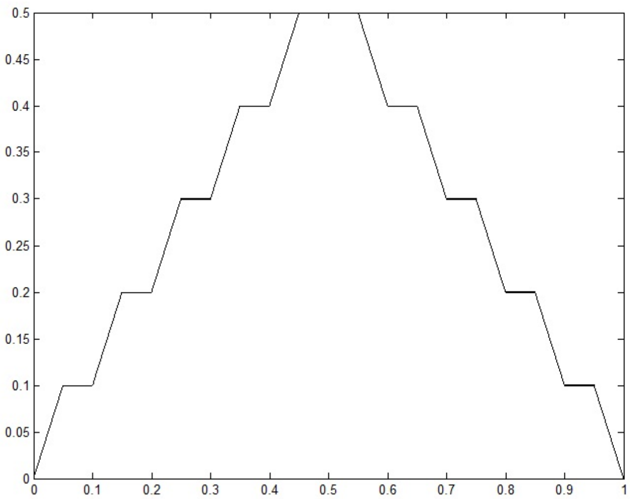


Figura 5.1: $\sum_{n=1} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$

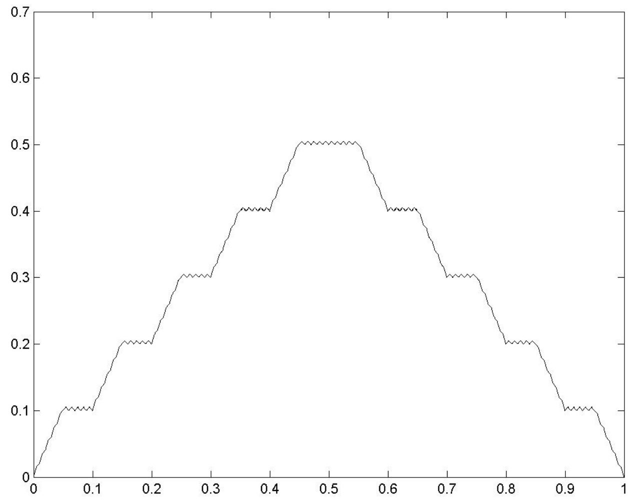


Figura 5.2: $\sum_{n=1}^{n=10} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$

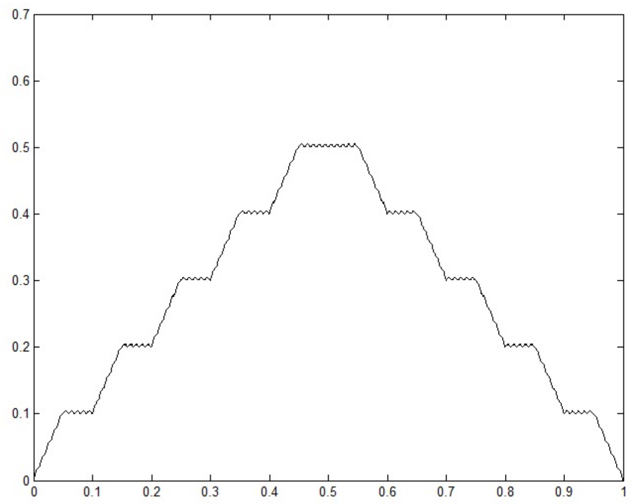


Figura 5.3: $\sum_{n=1}^{n=60} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$

Observe que a cada iteração a função de van der Waerden apresenta mais pontos nos quais ela é descontínua .

No Capítulo 7 apresentaremos um resultado mais geral para funções contínuas reais sem derivada, no qual, utilizaremos o Teorema de Baire, enunciado no Capítulo a seguir.

Capítulo 6

Espaços Métricos

Demonstraremos no próximo Capítulo que o conjunto das funções contínuas sem derivada é denso no conjunto das funções contínuas limitadas. Porém alguns conceitos de Topologia, tratados a seguir, serão necessários para demonstrá-lo. No que segue, nos baseamos em [7]

6.1 Espaços Métricos

Definição 6.1.1. Uma *métrica* num conjutno M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$ chamado de *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in M$:

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4)$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Diante disso, definimos um *espaço métrico* como sendo um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

Podemos citar os seguintes exemplos de espaços métricos:

Exemplo 6.1.1. A *métrica zero-um.* Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$ pondo $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x, x) = 0$.

Exemplo 6.1.2. A *reta* ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é um exemplo de espaço métrico, inclusive, um dos mais importantes. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$. Mostraremos que d é uma métrica. De fato, dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

d1) $d(x, x) = |x - x| = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) = |x - y| > 0$;

d3) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$;

d4)$d(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

Esta é chamada *métrica usual* da reta.

Exemplo 6.1.3. Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ é dita limitada quando existe uma constante $k = k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Indicaremos por $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$. Definiremos então, uma métrica em $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$ considerando, para $f, g \in \mathscr{B}(X; \mathbb{R})$ arbitrárias,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| .$$

Provemos que d é de fato uma métrica: seja $f, g, h \in \mathscr{B}(X; \mathbb{R})$, temos

d1) $d(f, f) = \sup_{x \in X} |f(x) - f(x)| = 0$;

d2) Se $f \neq g$ então existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, daí $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &\geq |f(x_0) - g(x_0)| \\ &> 0; \end{aligned}$$

d3)

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| \\ &= d(g, f); \end{aligned}$$

d4)

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sup_{x\in X} |f(x)-h(x)| \\ &= \sup_{x\in X}(|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|) \\ &\leq (\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|) + (\sup_{x\in X}|g(x)-h(x)|) \\ &= d(f,g)+d(g,h). \end{aligned}$$

Esta métrica é chamada de *métrica do sup*.

6.2 Bolas e esferas

A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos. Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$ definimos:

Definição 6.2.1. A *bola aberta* de centro a e raio r como sendo o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja,

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

A *bola fechada* de centro a e raio r como sendo o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que ou igual a r. Ou seja,

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

A *esfera* de centro a e raio r como sendo o conjunto $S(a;r)$ formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x,a) < r$. Assim,

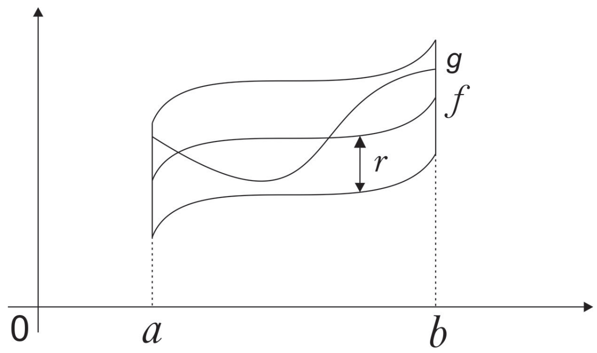
$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Observe os seguintes exemplos:

Exemplo 6.2.1. Se M é munido da métrica zero-um, então, para todo $a \in M$, tem-se $B(a;r) = B[a;r] = M$ se $r > 1$ e $B(a;r) = B[a;r] = a$ se $r < 1$. Por outro lado, $B(a;1) = a$ e $B[a;1] = M$. Consequentemente, $S(a;r) = \emptyset$ se $r \neq 1$, enquanto $S(a;1) = M - \{a\}$.

Exemplo 6.2.2. Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$, pois a condição $|x-a| < r$ equivale a $a - r < x < a + r$. Analogamente, $B[a; r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$ e a esfera $S(a; r)$ tem apenas dois pontos: $a - r$ e $a + r$.

Exemplo 6.2.3. Seja $f \in B([a, b]; \mathbb{R})$. Na métrica do sup, a condição para que uma função limitada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ pertença à bola fechada $B[f; r]$ é que $|f(x) - g(x)| \leq r$ para todo $x \in [a, b]$. Para interpretar este fato geometricamente consideremos o gráfico de f, isto é, o subconjunto $G(f)$ do plano $\mathbb{R}^2$, formado pelos pontos $(x, f(x))$, onde $x \in [a, b]$. Chamaremos de *faixa de amplitude* $2r$ em torno de $G(f)$ ao conjunto dos pontos (x, y) tais que $x \in [a, b]$ e $f(x) - r \leq y \leq f(x) + r$. As funções $g \in B[f; r]$ são aquelas cujos gráficos estão contidos na faixa de amplitude $2r$ em torno do gráfico de f.



Quanto à bola aberta, se $g \in B(f; r)$ então o gráfico está contido na "faixa aberta", formada pelos pontos (x, y) tais que $x \in [a, b]$ e $f(x) - r < y < f(x) + r$.

6.3 Conjuntos Fechados

Definição 6.3.1. Um ponto a diz-se aderente a um subconjunto X de um espaço métrico M quando para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. O conjunto $\overline{X}$ dos pontos aderentes de X é chamado de fecho de X. Dizemos então que X é fechado quando $X = \overline{X}$.

Definição 6.3.2. Um subconjunto $X \subset M$ diz-se *denso* em M quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X, ou seja, dado $a \in M$, para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

Exemplo 7. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, o mesmo ocorre para o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais. O interessante nesse fato, é notar que, apesar de ser difícil encontrar número irracionais na reta, eles estão em maior quantidade do que os números racionais, a demonstração deste fato pode ser encontrada em [6].

6.4 Espaços Métricos Completos

6.4.1 Sequências de Cauchy

Definição 6.4.1. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Intuitivamente, os termos da sequência de Cauchy vão se tornar cada vez mais próximos um dos outros, à medida que cresce o índice n. E quando os termos de uma sequência se aproximam de um ponto fixado, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros. Como podemos notar na seguinte proposição

Proposição 6.4.1. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Suponha que $\lim x_n = a$ em M daí, por definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Considerando então $m, n > n_0$ temos,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

A recíproca para a proposição anterior nem sempre é válida.

Exemplo 6.4.1. Considere uma sequência de números racionais (x_n) convergindo para um número irracional a. Sendo convergente em $\mathbb{R}$, segue-se da Proposição anterior que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Proposição 6.4.2. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$. Assim, o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$ é limitado, pois $n_0 + i > n_0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, assim, $0 \leq d(x_{n_0+i}, x_{n_0+j}) < 1$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Segue-se que

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$$

é limitado. □

Exemplo 6.4.2. Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Basta considerar a sequência alternada $(1, 0, 1, 0, ...)$ na reta. Note que esta sequência é limitada, porém não é de Cauchy, pois $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo n.

Diante da definição de sequência de Cauchy podemos definir Espaço Métrico Completo.

Definição 6.4.2. Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M converge para um ponto $a \in M$.

Proposição 6.4.3. A reta é um espaço métrico completo.

Demonstração. Seja x_n uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Considerando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Temos,

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_1, x_2, ...\} \\ X_2 &= \{x_2, x_3, ...\} \\ X_3 &= \{x_3, x_4, ...\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ e os conjuntos X_n são limitados. Seja $a_n = inf X_n$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \ldots \leq b = \sup X_1$. Como toda sequência limitada de números reais é convergente, existe o número $a = \lim a_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Para provar isto, basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n), ou seja, que dados $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Ora sendo $a = \lim a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Como $a_m = \inf X_m$, temos por definição de ínfimo que existe $n \geq m$ tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. □

Segue da proposição anterior o resultado:

Proposição 6.4.4. O conjunto $C = \mathscr{C}_0(I;\mathbb{R})$ das funções contínuas limitadas $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I = [a,b]$ é completo.

Demonstração. Seja (f_n) um sequência de Cauchy em C. Esta sequência é limitada, logo existe $c > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq c$ para todo $x \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Fixando arbitrariamente $x \in I$ a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe, para cada $x \in [a,b]$, o limite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, escreveremos, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Como $|f_n(x)| \leq c$, como a função módulo é contínua, temos

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)| \leq c.$$

Logo $f \in C$. Resta mostrar que $f_n \to f$ uniformemente em $\mathbb{R}$. Ora, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para qualquer $x \in I$. Fazendo $m \to \infty$ nesta última desigualdade, e, sendo a função módulo contínua, concluímos que $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in I$, daí segue o resultado. □

6.5 O Teorema de Baire

Definição 6.5.1. Definimos o diâmetro de um conjunto limitado $X \subset M$ como sendo o número real

$$diam(X) = \sup\{d(x,y); x, y \in X\}.$$

A seguinte proposição generaliza o "princípio dos intervalos encaixantes", um importante fato sobre números reais.

Proposição 6.5.1. Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados não-vazios $F_n \subset M$, com $\lim_{n\to\infty} diam F_n = 0$, existe um ponto $a \in M$ tal que

$$\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que M seja completo e considere uma sequência (F_n) satisfazendo as condições acima. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhamos um ponto $x_n \in F_n$. Logo, temos uma sequência (x_n) em M, tal que $m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_n$.

Ora,para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow diam\ F_n < \varepsilon$. Então, $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$, e portanto (x_n) é um sequência de Cauchy em M. Seja então $\lim x_n = a \in M$. Dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, temos para todo $n \geq p$, $x_n \in F_p$, donde $a = \lim x_n \in F_p$, ou seja, $a \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Afirmamos que não pode existir dois pontos $a \neq b$ nesta interseção, pois, se existissem teríamos $d(a, b) \leq \lim_{n\to\infty} diam\ F_n = 0$ para todo n. Logo,

$$\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}.$$

Reciprocamente, suponhamos que a interseção de toda sequência decrescente de fechados não-vazios cujos diâmetros tendem a zero é um ponto de M, provaremos que M é completo. Com efeito, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideremos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Observe que,

$$X_1 = \{x_1, x_2, ...\}$$

$$X_2 = \{x_2, x_3, ...\}$$

$$X_3 = \{x_3, x_4, ...\}$$

$$\vdots$$

Logo, $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$. E, como $X_n \subset \overline{X_n}$ para todo n, segue que $(\overline{X_n})$ é uma sequência decrescente de fechados não-vazios. Além disso, temos $0 = \lim_{n\to\infty} diam X_n = \lim_{n\to\infty} diam(\overline{X_n})$. Logo existe $a \in M$ tal que $\cap \overline{X_n} = \{a\}$. Como $a \in \overline{X_n}$ para todo n, segue-se que qualquer bola aberta de centro a contém pontos x_n com indíces arbitrariamente grande, ou seja, a é limite de uma subsequência de (x_n). Como esta sequência é de Cauchy, concluímos que $a = \lim x_n$. $\square$

Definiremos agora uma classe de conjuntos que, num certo sentido, são insignificantes dentro do espaço métrico que os contém. Tal definição é bastante importante para o entendimento do Teorema de Baire.

Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $X \subset M$, para ser considerado insignificante do ponto de vista topológico, deve, antes de tudo, ter interior vazio. Ou, equivalentemente, seu complementar $M - X$ deve ser denso em M. Além disso, esta noção deve ser definida de tal modo que todo subconjunto e toda reunião enumerável de conjuntos topologicamente insignificantes ainda tenham esta propriedade.

Não bastaria definir como insignificante um conjunto cujo interior fosse vazio pois $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ têm interior vazio, enquanto sua reunião é toda a reta, que não possui interior vazio.

Uma ideia melhor seria considerar como insignificante um conjunto $X \subset M$ cujo fecho $\overline{X}$ tivesse interior vazio em M. De fato, se $int\overline{X} = \emptyset$ e $int\overline{Y} = \emptyset$ então $int\overline{X \cup Y} = int\overline{X} \cup \overline{Y} = \emptyset$.

Mesmo assim, não é verdade que $int\overline{X_n} = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implique que $X = \cup X_n$ ainda goze dessa propriedade $int\overline{X} = \emptyset$. Basta tomar o conjunto $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ..., r_n\} = \cup\{r_n\}$ dos números racionais. Note que, para cada n, o fecho $\{r_n\}$ tem interior vazio, mas $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

A definição correta para conjunto insignificante é a seguinte.

Definição 6.5.2. Um subconjunto X de um espaço métrico M, diz-se magro em M quando é uma reunião enumerável, $X = \cup X_n$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $int\overline{X_n} = \emptyset$

Para cada X seja magro em M, é necessário e suficiente que $X \subset \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ onde $F_1, ..., F_n, ...$ são fechados com interior vazio em M.

Antes de enunciar e demonstrar o Teorema de Baire, um dos mais férteis da teoria dos Espaços Métricos, vamos falar um pouco sobre a história do matemático que dá nome a esse Teorema.

René-Louis Baire (1874 - 1932) foi um matemático francês, filho de um alfaiate. Baire foi um dos três filhos de uma família de classe trabalhadora pobre em Paris. Ele iniciou os seus estudos, quando entrou no Liceu Lakanal através de uma bolsa de estudos. Em 1890, Baire entrou na seção especial de matemática do Lycée Henri IV e enquanto estava lá, preparou-se para o exame para a École Normale Supérieure e para a École Polytechnique. Como passou nos dois exames, decidiu entrar na École Normale Supérieure em 1891.

Em 1901 Baire foi nomeado para a Universidade de Montpellier, como "Maître de conférences" . E logo no ano 1904 foi premiado com um Peccot Foundation Fellowship para passar um semestre numa universidade e desenvolver suas habilidades como professor, e optou pela Collège de France, tendo leciononado a cadeira de Análise. No ano de 1905 ingressou na Faculdade de Ciências de Dijon, sendo promovido,em 1907, a professor de Análise em Dijon, onde continuou suas investigações na referida disciplina

[3].

Figura 6.1: Baire, René-Louis (1874 - 1932)

Teorema 6.5.1. (Teorema de Baire) Seja M um espaço métrico completo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Todo conjunto magro em M tem interior vazio;

(ii) Se $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio, então $intF = \emptyset$;

(iii) Se $A_n \subset M$ é um aberto denso de M, então $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M.

Demonstração - Equivalências. Inicialmente demonstraremos que as afirmações acima são equivalentes:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Suponhamos que cada F_n fechado, assim temos, por definição, $\overline{F_n} = F_n$. Além disso, como $int\overline{F_n} = intF_n = \emptyset$, segue que F é um conjunto magro. De (i) concluímos que $intF = \emptyset$. Reciprocamente, considere X um conjunto magro daí $X \subset F$, onde F satisfaz as condições de (ii) daí, $intX \subset intF$, logo, $intF = \emptyset$, logo $intX = \emptyset$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

Defina $F_n = A_n^c$. Como A_n é aberto, F_n é fechado. Além disso, como $intF_n = \emptyset$, temos $intA_n^c = \emptyset$, ou melhor, $\overline{A_n} = M$. Logo A_n é um aberto denso de M. Daí, por (ii) segue

$$
\begin{aligned}
&intF = \emptyset \Rightarrow \\
&int\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset \Rightarrow \\
&int\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \emptyset \Rightarrow \\
&int(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \emptyset \Rightarrow \\
&\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} = M.
\end{aligned}
$$

Portanto $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M.

Reciprocamente, considere $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio. Escrevendo $A_n = F_n^c$, segue que A_n é aberto em M. Além disso,

$$int(A_n^c) = intF_n = \emptyset,$$

assim, $\overline{A_n} = M$, ou seja, A_n é denso de M. Logo, por (iii), $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M. Ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} = M \Rightarrow \\
&int(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \emptyset \Rightarrow \\
&int\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \emptyset \Rightarrow \\
&int\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset \Rightarrow \\
&intF = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar. □

Demonstração - Teorema de Baire. Como as afirmações são equivalente, provaremos, agora, a terceira destas afirmações. Seja $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ subconjuntos abertos densos no espaço métrico completo M. Queremos provar que $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M, ou seja, que toda bola aberta B_1 em M contém algum ponto de A. Ora, como A_1 é aberto e denso, $B_1 \cap A_1$ é aberto e não vazio, logo contém uma bola aberta B_2, a qual podemos supor tão pequena que seu raio não exceda $\frac{1}{2}$ e seu fecho esteja contido em $B_1 \cap A_1$. Por sua vez, A_2 sendo aberto e denso, $B_2 \cap A_2$ é aberto e não-vazio. Logo existe uma bola aberta B_3, de raio inferior a $\frac{1}{3}$, com $\overline{B_3} \cup A_2 \cap B_2$. Prosseguindo assim, obtemos uma sequência $\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset ... \supset \overline{B_n} \supset ...$, com $\overline{B_{n+1}} \cup B_n \cap A_n$ e $diam B_n \to 0$. Pela proposição 6.5.1, existe $a \in M$ tal que $a = \cap \overline{B_n}$. A relação $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap A_n$ mostra que a pertence a todos os A_n. Logo $a \in A \cap B_1$, como queríamos demonstrar. □

6.6 Compacidade na reta

Os teoremas a seguir são resultados clássicos sobre a Topologia na Reta e serão usados na demonstração apresentada no próximo Capítulo.

Teorema 6.6.1. Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente

Demonstração. Seja $x_n \in [a, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Observe que,

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_1, x_2, ...\} \\ X_2 &= \{x_2, x_3, ...\} \\ X_3 &= \{x_3, x_4, ...\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ e $X_n \subset [a, b]$. Seja $a_n = \inf X_n$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \ldots \leq b$. Como toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente, existe o número $a = \lim a_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Para provar isto, basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n), ou seja, que dados $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Com efeito, sendo $a = \lim a_n$, existe $n_0 > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a < a + \varepsilon$. Como $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, temos por definição de ínfimo que existe $n \geq n_0$ tal que $a_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. □

Teorema 6.6.2. Toda aplicação contínua $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I = [a, b]$, é uniformemente contínua.

Demonstração. Com efeito, se f não fosse uniformemente contínua existiriam $\varepsilon > 0$ e $x_n, y_n \in [a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Passando a uma subsequência, se necessário, vamos supor que existe $\lim x_n = x \in [a,b]$, pois $[a,b]$ é fechado, então $\lim y_n = x$. Daí como f é contínua, temos

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

Contradição!. Portanto f é uniformemente contínua. □

Utilizando os conceitos apresentados neste capítulo iremos demonstrar que o conjunto $\mathscr{D}$ das funções contínuas que não possuem derivada em ponto algum é denso no conjunto $C = \mathscr{C}_0(I;\mathbb{R})$ das funções contínuas limitadas.

Capítulo 7

O conjunto $\mathscr{D}$ é denso no conjunto $\mathscr{C}_0(I;\mathbb{R})$

Usaremos agora o Teorema de Baire para mostrar que o conjunto $\mathscr{D}$ das funções contínuas reais sem derivada em ponto algum do intervalo onde são definidas é denso no conjunto $\mathscr{C}_0(I;\mathbb{R})$ das funções contínuas limitadas $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I = [a, b]$.

Teorema 7.0.3. Dado qualquer intervalo $I = [a, b]$, sejam $C = \mathscr{C}_0(I;\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas limitadas $f : I \to \mathbb{R}$, com a métrica do sup, e $\mathscr{D}$ o conjunto das funções contínuas sem derivada em ponto algum de $[a, b]$. $\mathscr{D}$ é denso em $C = \mathscr{C}_0(I;\mathbb{R})$.

Demonstração. Basta provar que o conjunto das funções contínuas $f : I \to \mathbb{R}$ que não possuem derivada em ponto algum do intervalo I contém uma interseção enumerável de abertos densos em C.

No que se segue, sempre que escrevermos $f(t+h)$, estaremos supondo que $t+h \in I$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideraremos o conjunto

$$A_n = \left\{ f \in C;\ \forall t \in I,\ \exists h; \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n \right\}.$$

Segue-se imediatamente da definição de derivada que se $f \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então f não possui derivada em ponto algum do intervalo $[a, b]$.

Assim, basta mostrar que cada conjunto A_n é aberto e denso em C. Com efeito, sabemos que C é um espaço métrico completo, logo, pela afirmação (iii) do Teorema de Baire, a interseção $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ será um conjunto denso em C, sendo $\mathscr{D} = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$

1. Cada A_n é aberto em C.

Seja $f \in A_n$. Para todo $t \in I$, existe h tal que

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| > n \Rightarrow$$

$$|f(t+h)-f(t)| > n|h|.$$

Considerando então,

$$\xi(t,h) = |f(t+h)-f(t)| - n\,|h|\,,$$

temos, $\xi(t,h) > 0$.

Afirmação 1. Podemos obter $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $t \in I$ existe h com $\xi(t,h) > \varepsilon$.

De fato, caso contrário existiria, para $k \in \mathbb{N}$, algum ponto $t_k \in I$ tal que $\xi(t_k,h) \leq \frac{1}{k}$ seja qual for h. Como toda sequência em $I = [a,b]$ possui uma subsequência convergente, passando pois a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $t_k \to t_0 \in [a,b]$. Como ξ é contínua, concluímos que para todo h, $\xi(t_0,h) = \lim_{k\to\infty} \xi(t_k,h) \leq \lim \frac{1}{k} = 0$ o que é uma contradição, pois $\xi(t,h) > 0$, para todo $t \in I$.

Afirmação 2. Obtido $\varepsilon > 0$, afirmamos que $g \in C$, $\|g-f\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow g \in A_n$.

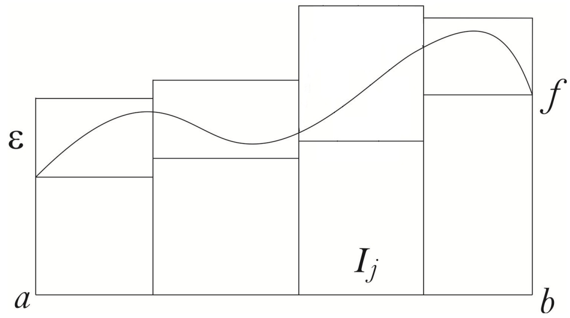
Com efeito, para todo $t \in I$ existe h tal que

$$\begin{aligned} n\cdot|h| + \varepsilon &< |f(t+h)-f(t)| \leq |f(t+h)-g(t+h)| + \\ &+ |g(t+h)-g(t)| + |g(t)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + |g(t+h)-g(t)| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

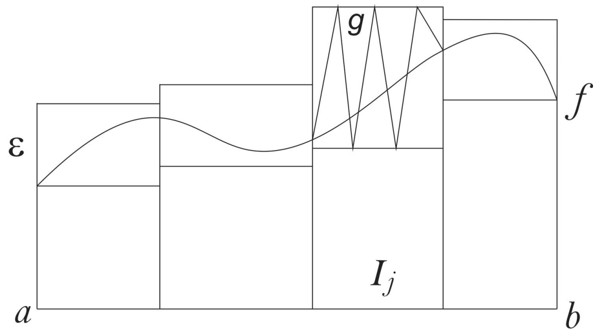
ou seja, $|g(t+h)-g(t)| > n\cdot|h|$. Isto mostra que $g \in A_n$. Daí, dado $\varepsilon > 0$ $g \in C$, $B(g,\frac{\varepsilon}{2}) \subset A_n$, portanto A_n é aberto em C.

2. Cada A_n é denso em C.

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $f \in C$, mostraremos que existe $g \in A_n$ tal que $\|g-f\| < \varepsilon$. De fato, como toda função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, temos, pela continuidade uniforme de f, existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Portanto, se subdividirmos o intervalo $[a,b]$ num número finito de subintervalos $I_1, I_2, ..., I_r$, de comprimentos menores do que δ, o gráfico de f em cada um desses subintervalos cabe um retângulo de altura menor do que ε.



Construimos agora uma função contínua $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, cumprindo as condições $\|g - f\| < \varepsilon$ e $g \in A_n$, fazendo com que g coincida com f nas extremidades de cada intervalo I_j e, no interior de cada I_j, o gráfico de g tem a forma de uma serra cujos dentes têm arestas com inclinação maior do que n e estão contidos num retângulo de base I_j e altura menor do que ε que contenha o gráfico de $f\big|I_j$.



Isto conclui nossa demonstração. $\square$

Capítulo 8

Considerações Finais

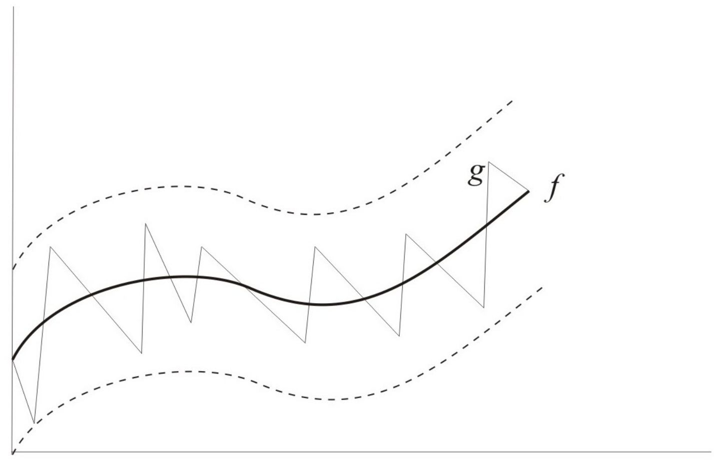
O presente trabalho teve como objetivos mostrar que a função de van der Waerden é contínua em todos os pontos, mas não possui derivada em nenhum e que o conjunto das funções contínuas sem derivada é denso no conjunto das funções contínuas limitas.

Notamos que a existência de funções desse tipo foi por muito tempo desconsiderada, sendo demonstrada em 1872, pelo grande matemático Karl Weierstrass. A função construída por Weierstrass surpreendeu a comunidade matemática, apesar dele não ter sido o pioneiro neste tipo de construção o seu exemplo foi o primeiro a ser amplamente difudindo.

Inicialmente, para atingirmos nosso objetivo foi utilizada uma função construída pelo matemático van der Waerden em 1930. Para demonstrarmos que, de fato, a função de van der Waerden era contínua em todos os pontos, mas não possuia derivada em nenhum, utilizamos alguns conceitos básicos de Análise Real, inclusive um teorema criado por Weierstrass, e os aplicamos em uma demonstração acessível e bastante peculiar.

Apesar da existência de funções deste tipo ferir nossa intuição conseguimos mostrar, através do Teorema de Baire, sem usar uma função específica, que o conjunto das funções contínuas sem derivada é denso no conjunto das funçoes contínuas limitadas, deste modo, concluímos dada uma função f contínua limitada e uma faixa contendo-a, existe nesta faixa uma função g também é contínua, mas que não possui derivada em nenhum ponto.

Este fato é ilustrado no gráfico a seguir



Referências Bibliográficas

[1] Araújo, M. A *Um estudo sobre funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto*,Revista Famat, nº 13, (2009)

[2] *Biografia de Weierstrass.* Acessado em 28/04/2011. http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Weierstrass.htm

[3] *Biografia de Baire.* Acessado em 10/10/2011. https://sites.google.com/site/desmatematicos/matematicos/baire-rene-louis-1874—1932

[4] *Curvas planares contínuas que não admitem reta tangente em ponto algum de seu traço* Acessado em 15/09/2011. http://www.ici.unifei.edu.br/luisfernando/arq_pdf/minicurso/capitulo3.pdf.

[5] *Curvas planares contínuas que não admitem reta tangente em ponto algum de seu traço* Acessado em 15/09/2011. http://www.ici.unifei.edu.br/luisfernando/arq_pdf/minicurso/capitulo5.pdf.

[6] Lima, E. L. *Curso de Análise*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, (2009)

[7] Lima, E. L. *Espaços Métricos*, 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, (2009)

[8] Martinez, J. L., *A ciência do Infinito*,Scientific American (Sciam), edição especial n. 15, Editora Duetto. 10-11

[9] Spivak, M., *Calculus*, Addison Wesley Publishing , 419-423, (1973)