Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias: um Resultado de Existência e Alguns Critérios não Usuais de Unicidade de Solução

por

Paulo Romero Ferreira Filho

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Abril, 2014

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Paulo Romero Ferreira Filho

Equações Diferenciais Ordinárias: um Resultado de Existência e Alguns Critérios não Usuais de Unicidade de Solução

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito para a obtenção do título de Bacharel em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB, 14 de abril, 2014
Curso de Matemática, modalidade Bacharelado

Equações Diferenciais Ordinárias: um Resultado de Existência e Alguns Critérios não Usuais de Unicidade de Solução

Paulo Romero Ferreira Filho

Trabalho de conclusão de curso defendido e aprovado em 14 de Abril de 2014, pela Comissão Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Orientador

Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro
Examinador

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira
Examinador

com nota igual a:

Dedicatória

Ao meu pai e também matemático, Paulo Romero Ferreira.

Agradecimentos

Agradeço à minha família e à todos os meus amigos pela presença e apoio constantes. Em especial, deixo minha maior gratidão aos meus amados pais, Paulo Romero Ferreira e Maria Marleide da Silva Ferreira.

Conteúdo

Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns dos mais conhecidos, embora pouco presentes na literatura, teoremas de existência e/ou unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, dentre eles os Teoremas de Picard, Peano e Osgood. Além disso, mostramos exemplos e consequências interessantes dos mesmos. Para tanto, introduzimos alguns resultados básicos de Topologia dos Espaços Métricos e Análise, sendo o Teorema do Ponto Fixo de Banach o resultado mais importante da parte introdutória, pois é ultilizado na demonstração do Teorema de Picard.

Abstract

In this work we present some of the most known, although not too much frequently in the literature, existence and uniqueness theorems for the first order Ordinary Differential Equations, such as the theorems of Picard, Peano and Osgood. Additionally, we present examples and interesting consequences of these theorems. To do so, we introduced some basic results of Metric Spaces Topology and Analysis, being the Banach's Fixed Point Theorem the most important result of the introduction, because it is used in the proof of the Picard's Theorem.

Capítulo 1

Introdução

O estudo das equações diferenciais é um ramo muito importante da matemática com diversas aplicações na física, engenharia e biologia. Tendo o início com os também criadores do cálculo, Newton ($1642 - 1727$) e Leibniz ($1646 - 1716$), no final do século XVII, esta área avançou significativamente com os trabalhos da família Bernoulli e posteriormente com Leonard Euler. Porém, mesmo depois de atrair a atenção dos matemáticos mais famosos dos últimos séculos, ainda é uma área de pesquisa com questões interessantes em aberto.

As equações diferenciais fornecem modelos teóricos para problemas dos mais simples, como o de um objeto em queda livre ou o movimento de um pêndulo, até os mais complexos que aparecem na mecânica quântica, por exemplo.

> *"Para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmicas, ou o aumento ou diminuição de populações, entre muitos outros, é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais"* (BOYCE, DIPRIMA).

Inicialmente, procurava-se sempre uma solução explícita em termos de funções elementares para uma equação diferencial. No entanto, logo se percebeu que o número de equações que possuíam solução explícita era bastante reduzido. Isso impulsionou uma busca por novos métodos de resolução e por novas funções que pudessem ser soluções dessas equações. É nesta época, por volta do século XIX, que surgem os teoremas de existência e unicidade de solução.

> *"A importância destes teoremas reside em que, sabendo-se a priori da existência de solução, sua busca através de processos informais se torna justificável e promissor, uma vez que a "solução" assim obtida pode ser verificada a posteriori. Os teoremas de existência e unicidade marcam, por assim dizer, o início da fase moderna, que realmente se define com Poincaré, no final do século XIX. Agora a atitude é bem diversa; há grande interesse nas questões qualitativas que são bastante importantes por seu intrínseco significado físico. Toma-se a atitude de retirar das equações diferenciais informações sobre o comportamento de suas soluções sem aquela preocupação de escrevê-las explicitamente"* (DE FIGUEIREDO, NEVES).

Neste contexto, um dos teoremas mais importantes é o Teorema de Picard que nos dá informações sobre existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

onde f é uma função de duas variáveis definida em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$.

Na demonstração do Teorema de Picard usamos um resultado importante sobre contrações que é o Teorema do Ponto Fixo de Banach (ver seção 2.7 ou referência [6]). Este teorema fornece também uma nova vestimenta para o método das aproximações sucessivas, conhecido e utilizado por muitos matemáticos do século XX.

Após o Teorema de Picard, outros critérios para existência e/ou unicidade surgiram em diversos resultados como o Teorema de Peano, a condição Osgood, entre outros.

Tendo em vista que os teoremas de unicidade são pouco discutidos em grande parte da literatura, este trabalho apresenta alguns resultados e teoremas de unicidade para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ou seja, equações da forma $y' = f(x, y)$, onde f é uma função real definida em algum aberto do $\mathbb{R}^2$. Mas, antes disso, no Capítulo 2, apresentaremos resultados básicos de Análise e Topologia dos Espaços Métricos, que serão relevantes e amplamente utilizados nos Capítulos 3 e 4, onde se encontram os principais resultados deste trabalho.

No Capítulo 3 demonstramos um teorema de existência e unicidade (Teorema de Picard) e em seguida algumas consequências do mesmo. No Capítulo 4 mostramos alguns critérios não usuais que garantem unicidade de solução, como a condição de Lipschitz na variável x, a condição Lipschitz unilateral, o Teorema de Peano e a condição de Osgood.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo realizaremos uma discussão concisa acerca de alguns resultados de Análise e Topologia dos Espaços Métricos. Mais detalhes sobre estes temas se encontram nas referências [3], [4], [5] e [6].

2.1 Espaços Métricos

Quando estudamos cálculo e, principalmente, análise real, percebemos que todos os processos de limites, tão fundamentais em matemática, dependem do fato de em $\mathbb{R}$ ser definida uma função distância d que, a cada par de pontos $x, y \in \mathbb{R}$, associa a distância $d(x, y) = |x - y|$ entre eles. Com o objetivo de generalizar a ideia de distância na reta para um conjunto X qualquer, criou-se o conceito de Espaço Métrico. Neste conjunto arbitrário X é definida uma métrica (ou função distância) d a qual goza das principais propriedades da métrica induzida pelo valor absoluto "$|\ |$" em $\mathbb{R}$. Vejamos a definição formal de espaço métrico.

Definição 2.1.1. (Espaço Métrico e Métrica) Um *espaço métrico* é um par (X, d), onde X é um conjunto não vazio e d é dita uma *métrica* em X (ou *função distância* em X), isto é, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que, para todos $x, y, z \in X$, tem-se:

1. $d(x, y) \geq 0$;

2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

3. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetria);

4. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (Desigualdade Triangular).

Nos exemplos de espaços métricos, em geral as propriedades de 1 a 3 são facilmente verificadas e a desigualdade triangular requer um pouco mais de trabalho.

Exemplo 2.1.1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é um espaço métrico, e definimos a métrica euclidiana como sendo

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2},$$

para quaisquer $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.1.2. (Espaço l^p) Seja $p \geq 1$ um número real fixo. Por definição, cada elemento do espaço l^p é uma sequência $x=(\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots)$ de números reais, ou complexos, de modo que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty.$$

A métrica em l^p é definida por

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $y=(\eta_j)$ e $\sum |\eta_j|^p < \infty$. No caso particular em que $p=2$, temos o conhecido espaço l^2 de Hilbert. Uma verificação para o fato da função d, definida acima, ser realmente uma métrica em l^p se encontra na referência [6].

2.2 Sequências

As sequências de números reais desempenham um importante papel no cálculo e na análise, e a métrica da reta nos permite definir o que é uma sequência convergente. No contexto de um espaço métrico qualquer (X,d), vamos considerar uma sequência (x_n) de elementos $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots \in X$ e utilizar a métrica d para definir convergência de sequências.

Definição 2.2.1. Uma sequência (x_n) de pontos de um espaço métrico (X, d) é *convergente* se existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Em outras palavras, dizemos que (x_n) *converge* para x, e escrevemos $x_n \to x$, quando dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Nestas condições, x é dito o *limite* da sequência (x_n).

2.2.1 Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos

Uma sequência de Cauchy em um espaço métrico (X, d) é definida de maneira análoga à definição no contexto da reta. Dizemos que uma sequência (x_n) de números reais é de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo $n_0 = n(\epsilon)$ tal que

$$m, n > n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \epsilon.$$

Em um contexto mais geral, temos a definição abaixo.

Definição 2.2.2. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é dita uma *sequência de Cauchy* se, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n(\epsilon)$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n > n_0.$$

Pela definição, notamos que em uma sequência de Cauchy os termos com índices suficientemente grandes estão arbitrariamente próximos. Deste modo, é natural intuir que toda sequência convergente é de Cauchy, o que de fato ocorre e é garantido pelo teorema abaixo.

Teorema 2.2.1. Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, com $x_n \to x$. Isto significa que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pela desigualdade triangular, para $m, n > n_0$, obtemos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. $\square$

Uma pergunta bastante natural é: vale a recíproca do teorema acima? A resposta é não. Existem sequências de Cauchy definidas em um espaço métrico (X, d) que não convergem para um elemento de X. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.1. Considere a sequência $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, definida da seguinte forma: para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $r_n \in (\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{n})$, o que é possível porque $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Temos $r_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Além disso, (r_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$, o que é possível pela propriedade arquimediana dos números reais. Assim,

$$\begin{aligned} m, n > n_0 \implies & (\sqrt{2}, \sqrt{2} + \tfrac{1}{m}), (\sqrt{2}, \sqrt{2} + \tfrac{1}{n}) \subset (\sqrt{2}, \sqrt{2} + \tfrac{1}{n_0}) \\ \implies & |r_m - r_n| < \tfrac{1}{n_0} < \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, temos uma sequência de Cauchy de números racionais que converge para um número irracional. Isto ocorre porque $\mathbb{Q}$ não é um *espaço métrico completo.*

Definição 2.2.3. Um espaço métrico (X, d) é dito *completo* se toda sequência de Cauchy em X converge.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, munido da métrica induzida pelo valor absoluto $|\ |$, é um espaço métrico completo (ver [4]).

Um outro exemplo de espaço métrico completo é o espaço $C[a, b]$ das funções reais contínuas definidas no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Devido à relevância do espaço $C[a, b]$ para este trabalho, o mesmo será discutido com mais detalhes na Seção 2.6.

2.2.2 Sequências de Funções e Convergência Uniforme

Considere $X \subset \mathbb{R}$ e F como sendo o conjunto de todas as funções reais definidas em X, ou seja,

$$F = \{f; f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Considerando uma sequência $(f_n) = (f_1, f_2, \dots)$ em F, podemos definir dois tipos de convergência.

Definição 2.2.4. Uma sequência de funções $(f_n) \subset F$ converge *pontualmente*, ou *simplesmente*, para a função $f : X \to \mathbb{R}$ se dados $\epsilon > 0, x \in X$, existe $n_0 = n(x, \epsilon)$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definição 2.2.5. Uma sequência de funções $(f_n) \subset F$ converge *uniformemente* para a função $f : X \to \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n(\epsilon)$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in X$.

Na definição de convergência pontual, dados $\epsilon > 0$ e $x \in X$, podemos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$. Caso seja possível achar um n_0 que sirva para todo $x \in X$, a convergência é uniforme.

Já que estamos falando de *sequências* de funções, podemos falar de *sequências de Cauchy*.

Definição 2.2.6. Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

qualquer que seja $x \in X$.

Na demonstração abaixo, faremos uso do fato que $\mathbb{R}$ é completo.

Teorema 2.2.2. Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Supondo inicialmente que $f_n \to f$ uniformemente, por definição, seja qual for $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $x \in X$. Daí, tomando $m, n > n_0$ e utilizando a desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Portanto, (f_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, suponha que (f_n) é de Cauchy. Para cada $x \in X$, a sequência de números reais $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy e consequentemente converge, pois $\mathbb{R}$ é completo. Então, digamos $f_n(x) \to f(x) \in \mathbb{R}$. Deste modo podemos definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Devemos mostrar que $f_n \to f$ uniformemente. Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Passando ao limite quando $n \to \infty$ na expressão acima, obtemos: $|f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall x \in X$, desde que $m > n_0$. □

A convergência uniforme tem propriedades bastante interessantes (ver mais detalhes na referência [4]). Um resultado importante que será utilizado posteriormente é o teorema a seguir.

Teorema 2.2.3. Se $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma sequência de funções contínuas em X convergindo uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$, então f é contínua em X. Em outras palavras, convergência uniforme preserva continuidade.

Demonstração. Como $f_n \to f$ uniformemente, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \tag{2.1}$$

para todo $x \in X$. Ademais, dado $a \in X$ arbitrário e fixando $m > n_0$, a continuidade de f_m nos garante a existência de um $\delta_m > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta_m \Longrightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.2}$$

Assim, fazendo uso das desigualdades (2.1), (2.2) e da desigualdade triangular, obtemos, para $x \in X, |x - a| < \delta_m$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(a) + f_m(a) - f(a)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

2.3 Bolas, Conjuntos Abertos, Fechados e Compactos

Nesta seção definiremos alguns conceitos básicos amplamente utilizados no estudo dos espaços métricos.

Definição 2.3.1. Dados um espaço métrico (M, d) e um ponto $a \in M$, chamamos de *bola aberta* com centro em a e raio $r > 0$ o conjunto

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

De modo análogo, definimos a *bola fechada* $B[a, r] = \overline{B(a, r)}$ e a *esfera* $S[a, r]$, ambas com centro a e raio r, como

$$B[a, r] = \overline{B(a, r)} = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}$$

e

$$S[a, r] = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Segue diretamente da definição que $B[a, r] = B(a, r) \cup S[a, r]$.

Definição 2.3.2. Dizemos que um subconjunto A de um espaço métrico M é *aberto* se, para cada $x \in A$, existe uma bola aberta de centro x e raio r tal que $B(x, r) \subset A$. Chamamos de *vizinhança* de $a \in A$ qualquer conjunto V que contenha uma bola centrada em a, isto é, $B(a, r) \subset V$.

Definição 2.3.3. Dizemos que um subconjunto F de um espaço métrico M é *fechado* se seu complementar $M - F$ é aberto.

No contexto de um espaço métrico qualquer, um conjunto F é fechado se, e somente se, toda sequência convergente de elementos de F converge para um elemento de F, isto é, dada $(x_n) \subset F$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $x \in F$. Chamamos de fecho de um conjunto A, denotando por $\overline{A}$, o conjunto de todos os limites de sequências de elementos de A, ou seja,

$$\overline{A} = \left\{a; \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n, \ (a_n) \subset A\right\}.$$

Definição 2.3.4. Um subconjunto L de um espaço métrico M é dito *limitado* quando está contido em alguma bola de centro a e raio $r > 0$, isto é, $L \subset B(a, r)$ para algum $a \in M$ e algum $r > 0$.

Definição 2.3.5. Uma *cobertura aberta* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é uma família $A = (A_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ de conjuntos abertos tais que $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda$. Uma *subcobertura* de X é uma subfamília $A' = (A_\lambda)_{\lambda\in\Gamma'}$, $\Gamma' \subset \Gamma$, tal que ainda vale $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Gamma'} A_\lambda$

Definição 2.3.6. Uma conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ é *compacto* se toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita ou, equivalentemente, se K for fechado e limitado.

2.4 Conexidade

Uma *cisão* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ com $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

Obviamente, uma cisão para qualquer conjunto é $X = X \cup \emptyset$, sendo esta chamada de *cisão trivial* de X. Note que nestas condições A e B são simultaneamente abertos e fechados em X.

Definição 2.4.1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *conexo* quando só admite a cisão trivial. Quando X admite uma cisão não trivial dizemos que ele é um conjunto *desconexo.*

Teorema 2.4.1. Um subconjunto da reta $\mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, for um intervalo.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $I \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo. Sendo assim, devem existir $a, b \in I$ e $c \notin I$ com $a < c < b$ e, daí, fazendo $A = I \cap (-\infty, c]$ e $B = I \cap [c, +\infty)$, $I = A \cup B$ é uma cisão não trivial pois $a \in A \neq \emptyset \neq B \ni b$. Logo, I é desconexo.
($\Longleftarrow$) Suponha que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e, por absurdo, vamos admitir que I possui uma cisão não trivial $I = A \cup B$. Tomando $a \in A$ e $b \in B$, digamos $a < b$, devemos ter $[a, b] \subset I$. Fazendo $c = \frac{a+b}{2} \in I$, então $c \in A$ ou $c \in B$. Caso $a \in A$, defina $a_1 = c$ e $b_1 = b$, caso contrário $a_1 = a$ e $b_1 = c$. Assim $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. Tomando agora $c_1 = \frac{a_1+b_2}{2} = \frac{a+b}{2^2}$ e repetindo o processo anterior, obtemos $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Prosseguindo desta forma, teremos uma sequência de intervalos encaixados

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

com $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $a_n \in A$ e $b_n \in B$. Temos:

$$a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b.$$

Como $(a_n), (b_n)$ são monótonas e limitadas, $d = \lim a_n = \sup\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ e $d' = \lim b_n = \inf\{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Mas,

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \Longrightarrow d = d'.$$

Logo, como $a_n \leq d = d' \leq b_n$, vale $d \in [a_n, b_n]$ para todo n e, além disso, $d \in \overline{A}$ e $d \in \overline{B}$. Absurdo. $\square$

Teorema 2.4.2. Se $X = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda$, onde cada X_λ é conexo e existe $a \in X_\lambda$ para todo $\lambda \in \Gamma$, então X é conexo.

Demonstração. Considerando $X = A \cup B$ uma cisão qualquer de X e supondo $a \in A$, temos que $X_\lambda = (A \cap X_\lambda) \cup (B \cap X_\lambda)$ é uma cisão para todo $\lambda \in \Gamma$. Como X_λ é conexo, esta cisão deve ser trivial. Mas $a \in A$, o que obriga $B \cap X_\lambda = \emptyset$ seja qual for $\lambda \in \Gamma$. Portanto,

$$B = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} (B \cap X_\lambda) = \emptyset$$

e a cisão $X = A \cup B$ é trivial. $\square$

2.5 Funções Contínuas

A continuidade é um dos assuntos centrais na teoria dos espaços métricos. Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre funções contínuas, nos atendo à funções reais de uma ou duas variáveis também reais, que serão úteis ao longo das seções subsequentes.

Definição 2.5.1. Sejam $(M, d), (M_1, d_1)$ espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $f : M \to M_1$ é *contínua em um ponto* $a \in M$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in M, d(x, a) < \delta \Longrightarrow d_1(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Dizemos que f é *contínua* em M se for contínua em todo $a \in M$.

Em outras palavras, f é contínua em $a \in M$ se dada uma bola aberta centrada em $f(a)$, $B(f(a), \epsilon)$, existe uma bola aberta centrada em a, $B(a, \delta)$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$.

Teorema 2.5.1. Sejam $(M,d),(M_1,d_1)$ e (M_2,d_2) espaços métricos. Se as funções $f : X \subset M \to M_1$ e $g : Y \subset M_1 \to M_2$, com $f(X) \subset Y$, são contínuas, então a composta $g \circ f$ também é contínua.

Demonstração. Dados $\epsilon > 0$ e $a \in X$ e sendo $b = f(a)$, como g é contínua, existe $\eta > 0$ tal que

$$y \in Y, d_1(y,b) < \eta \Longrightarrow d_2(g(y), g(b)) < \epsilon.$$

Pela continuidade de f, correspondente ao $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, d(x,a) < \delta \Longrightarrow d_1(f(x), f(a)) < \eta.$$

Logo, sempre que $x \in X, d(x,a) < \delta$, teremos $f(x) \in Y$, $d_1(f(x), f(a)) < \eta$, o que implica

$$d_2(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon.$$

□

Agora vamos considerar funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, com imagens reais, e a métrica d induzida pela norma euclidiana no $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2},$$

para quaisquer $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Obviamente, quando restringimos d aos pontos da forma $(x,0),(y,0) \in \mathbb{R}^2$, vale

$$d((x,0),(y,0)) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|.$$

Teorema 2.5.2. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a = (x_0,y_0) \in \Omega$, então f é limitada em uma vizinhança de a.

Demonstração. Como f é contínua em a, tomando $\epsilon = 1$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta &\implies |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < 1 \\ &\implies |f(x,y)| < 1 + |f(x_0,y_0)|. \end{aligned}$$

Assim, considerando $K = 1 + |f(x_0,y_0)|$, temos $|f(x,y)| < K$ sempre que $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta) \cap \Omega$. □

Teorema 2.5.3. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ e $f(x_0, y_0) < k$ para algum $k \in \mathbb{R}$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x, y) < k$ para todo $(x, y) \in \Omega$ com $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$, ou seja, f assume valores menores que k em uma vizinhança de (x_0, y_0).

Demonstração. Se $f(x_0, y_0) < k$, tome $\epsilon = k - f(x_0, y_0) > 0$. Sendo f contínua em (x_0, y_0), existe $\delta > 0$ tal que

$$(x, y) \in \Omega, |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon,$$

ou seja, $f(x_0, y_0) - \epsilon < f(x, y) < f(x_0, y_0) + \epsilon$. Mas, $f(x_0, y_0) + \epsilon = k$. Portanto, $f(x, y) < k$ para todo $(x, y) \in \Omega$ com $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$. $\square$

Podemos mostrar de um modo análogo que se $f(x_0, y_0) > k$, existe uma vizinhança de (x_0, y_0) tal que $f(x, y) > k$ para todo (x, y) nesta vizinhança. Desta maneira, sempre que $f(x_0, y_0) \neq k$ e f for contínua em (x_0, y_0), existirá uma vizinhança deste ponto na qual f é sempre diferente de k.

Quando o domínio de f é algum subconjunto da reta $\mathbb{R}$ e não o plano $\mathbb{R}^2$, os resultados dos 2 teoremas anteriores continuam valendo e as demonstrações são análogas.

2.5.1 Funções Contínuas em Conjuntos Compactos

Funções contínuas em conjuntos compactos possuem propriedades bastante interessantes, como, por exemplo, o fato de Imf ser também um conjunto compacto e f assumir seus valores máximo e mínimo neste conjunto.

Teorema 2.5.4. Se $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e X é compacto, então $f(X)$ é compacto.

Demonstração. A fim de mostrarmos que $f(X) \subset \mathbb{R}$ é compacto, vamos considerar uma cobertura aberta $A = (A_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$, com $f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda$. Assim, dado $x \in X$, existe $A_{\lambda(x)}$ tal que $f(x) \in A_{\lambda(x)}$. Como $A_{\lambda(x)}$ é aberto, existe $\epsilon > 0$ de modo que $J = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset A_{\lambda(x)}$. Pela continuidade de f, podemos encontrar $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tal que

$$y \in X \cap B(x, \delta) \Longrightarrow f(y) \in J \Longrightarrow f(y) \in A_{\lambda(x)}.$$

Assim, temos uma cobertura $X \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \delta)$. Como X é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $X \subset B(x_1, \delta_1) \cup B(x_2, \delta_2) \cup \cdots \cup B(x_n, \delta_n)$ e, consequentemente, $f(X) \subset A_{\lambda(x_1)} \cup \cdots \cup A_{\lambda(x_n)}$. Logo, $f(X)$ é compacto. $\square$

O mesmo resultado do teorema anterior continua valendo caso X seja um compacto da reta. A demonstração é análoga, bastando considerar intervalos $I_x = (x-\delta, x+\delta)$ invés de bolas $B(x,\delta)$.

Corolário 2.5.1. Toda função contínua $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (analogamente, $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) definida em um conjunto compacto X é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo, isto é, existem $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ tais que $f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2)$ para todo $(x, y) \in X$ (analogamente, existem $x_1, x_2 \in X$ com $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in X \subset \mathbb{R}$).

Demonstração. Pelo teorema anterior, $f(X)$ é compacto. Como $f(X)$ é limitado, este conjunto possui ínfimo e supremo. Além disso, $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$, pois podemos encontrar sequências $(x_n), (y_n) \subset X$, com $x_n \to \inf f(X)$ e $y_n \to \sup f(X)$, e X é fechado. Assim, existem $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ tais que $f(x_1, y_1) = \inf f(X)$ e $f(x_2, y_2) = \sup f(X)$ (analogamente, existem $x_1, x_2 \in X \subset \mathbb{R}$ com $f(x_1) = \inf f(X)$, $f(x_2) = \sup f(X)$). $\square$

No que segue, faremos uso sem fazer demonstração prévia de resultados bastante conhecidos desde os cursos de cálculo, como, por exemplo, o teorema fundamental do cálculo, os fatos de que toda função contínua é integrável, toda função derivável é contínua, toda função com derivada não negativa é não decrescente, entre outros.

2.6 Espaço $C[a,b]$ de Funções Contínuas

Na presente seção, discutiremos algumas propriedades do espaço métrico $C[a,b]$, que consiste no conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Dadas $f, g \in C[a,b]$, considere

$$||f-g||_\infty = \max_{x\in I} |f(x) - g(x)|.$$

Como $[a,b]$ é um compacto, todas as funções de $C[a,b]$ assumem o máximo e o mínino e, portanto, faz sentido esta definição para $|| \, ||_\infty$. Vamos verificar que $|| \, ||_\infty$ é uma métrica em $C[a,b]$.

Sejam $f, g \in C[a,b]$:

1. Sabemos que $|f(x) - g(x)| \geq 0, \forall x \in I$, logo $\max_{x\in I} |f(x) - g(x)| \geq 0$;

2. Se $||f-g||_\infty = 0$, devemos mostrar que $f = g$. De fato, supondo que $f \neq g$, existiria $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Ora,

$$f(x_0) \neq g(x_0) \Longrightarrow f(x_0) - g(x_0) \neq 0 \Longrightarrow |f(x_0) - g(x_0)| > 0$$

e, consequentemente, teríamos $||f-g||_\infty = \max_{x\in I} |f(x) - g(x)| > 0$. A recíproca é imediata;

3. Como
$$|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|, \forall x \in I,$$
devemos ter $||f-g||_\infty = ||g-f||_\infty$;

4. Sendo $f, g, h \in C[a,b]$, temos, para todo $x \in I$:

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \max_{x\in I} |f(x) - h(x)| + \max_{x\in I} |h(x) - g(x)| \\ &= ||f-h||_\infty + ||h-g||_\infty. \end{aligned}$$

Aplicando o máximo, obtemos:

$$||f-g||_\infty \leq ||f-h||_\infty + ||h-g||_\infty,$$

o que prova a desigualdade triangular.

Logo, $(C[a,b], ||\ ||_\infty)$ é um espaço métrico.

2.6.1 Completude de $C[a,b]$

Tendo em vista que $C[a,b]$ é um espaço métrico, podemos falar em sequências de Cauchy e nos indagar se este espaço é completo. O próximo teorema garante que sim.

Teorema 2.6.1. O espaço de funções contínuas $(C[a,b], ||\ ||_\infty)$ é completo.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C[a,b]$. Para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$m, n > n_0 \Longrightarrow ||f_m - f_n||_\infty = \max_{x\in I} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Mas, qualquer que seja $x \in I$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq ||f_m - f_n||_\infty < \epsilon. \tag{2.3}$$

Isso mostra que a sequência de funções (f_n) é uma sequência de Cauchy (Definição 2.2.6) no espaço de funções $F = \{f; f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$, definido na seção 2.2.2. Pelo Teorema 2.2.2, $f_n \to f$ $(f : I \to \mathbb{R})$ uniformemente e, desde que cada $f_n : I \to \mathbb{R}$ é contínua, o Teorema 2.2.3 garante que f também é contínua, ou seja, $f \in C[a,b]$. Devemos mostrar que $f_n \to f$ na métrica $|| \ ||_\infty$. De fato, como todas as funções envolvidas na desigualdade (2.3) são contínuas e ela é válida para todo $x \in I$ e $m, n > n_0$, podemos tomar o limite quando $n \to \infty$, aplicar o máximo e assim obter:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon \quad &\Longrightarrow \quad |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon \\ &\Longrightarrow \quad \max_{x\in I} |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon \\ &\Longrightarrow \quad ||f_m - f||_\infty \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $f_n \to f$ também na métrica $|| \ ||_\infty$, mostrando que $C[a,b]$ é completo. □

Na demonstração do teorema acima, vimos que toda sequência de funções que converge para f na métrica $|| \ ||_\infty$, converge uniformemente também para f na métrica induzida por $| \ |$. Por conta deste fato, a métrica $|| \ ||_\infty$ definida em $C[a,b]$ é também chamada de *métrica da convergência uniforme.*

2.7 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Dizemos que $x_0 \in X$ é um ponto fixo da aplicação $f : X \to X$ se $f(x_0) = x_0$. O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um resultado importante na teoria dos espaços métricos, garantindo a existência e unicidade de pontos fixos de certas aplicações.

Definição 2.7.1. Seja $M = (M, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $f : M \to M$ é dita uma *contração* em M se existe um número real positivo $\alpha < 1$ tal que, para todos $x, y \in M$,

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq \alpha d(x, y). \tag{2.4}$$

Como $0 < \alpha < 1$, a desigualdade (2.4) mostra que a distância entre as imagens de dois pontos quaisquer por f é menor ou igual à distância entre esses pontos. Por isso o nome "contração". De posse da Definição 2.7.1, vamos demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Teorema 2.7.1. (Teorema do Ponto Fixo de Banach ou Princípio da Contração) Considere $M = (M, d)$ um espaço métrico completo, com $M \neq \emptyset$. Se $f : M \to M$ é uma contração em M, então f possui um único ponto fixo.

Demonstração. Como f é uma contração, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, tal que

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq \alpha d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Tome $x_0 \in M$, arbitrário, e considere a sequência $(x_n) \subset M$ definida da seguinte forma:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \ldots, x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0), \ldots. \tag{2.5}$$

Vamos mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Para tanto, faremos uso de (2.4) e (2.5). Tem-se:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d\left(f(x_m), f(x_{m-1})\right) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d\left(f(x_{m-1}), f(x_{m-2})\right) \leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Considerando $n > m$, utilizando o resultado acima, a desigualdade triangular e a fórmula para soma dos termos de uma progressão geométrica, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m \left(\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \left(\frac{\alpha^m}{1-\alpha} \right) d(x_1, x_0), \qquad (2.6) \end{aligned}$$

valendo a desigualdade (2.6) porque $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 1-\alpha^{n-m} < 1$. Pelo fato de α e $d(x_1, x_0)$ serem constantes, tomando m suficientemente grande e $n > m$, podemos tornar a expressão em (2.6) menor que qualquer $\epsilon > 0$ dado. Logo, a sequência (x_n) é de Cauchy.

Como, por hipótese, M é completo, podemos supor $x_n \to x \in M$. Vamos mostrar que x é um ponto fixo de f. De fato,

$$d\left(x, f(x)\right) \leq d(x, x_m) + d\left(x_m, f(x)\right) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x).$$

Donde,

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} d(x, f(x)) = d(x, f(x)) \leq 0$$

e, portanto,

$$x = f(x).$$

Para mostrar a unicidade de x, suponha que exista $y \in M$ tal que $f(y) = y$. Sendo assim,

$$d(x, y) = d\left(f(x), f(y)\right) \leq \alpha d(x, y),$$

o que implica $x = y$, pois, caso fosse $x \neq y$ teríamos $d(x, y) > 0$ e, consequentemente,

$$1 = \frac{d(x, y)}{d(x, y)} \leq \alpha.$$

Um absurdo, pois $\alpha < 1$, por hipótese. □

A figura abaixo mostra os gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x}$, que é uma contração para $x \in [a, +\infty), a > 0$ (ver referência [4]), e $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ que é uma contração para todo $x \in \mathbb{R}$. Estes gráficos foram construídos utilizando o software Geogebra e neles estão destacadas sequências de pontos $(P_n), (Q_n)$ que convergem para os pontos fixos de f e g, respectivamente. Partimos dos valores $x_0 = 10$ e $y_0 = 8$ e seguimos o mesmo algoritmo apresentado na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, isto é, definimos $P_n = (f^{n-1}(10), f^n(10))$ e $Q_n = (g^{n-1}(8), g^n(8))$.

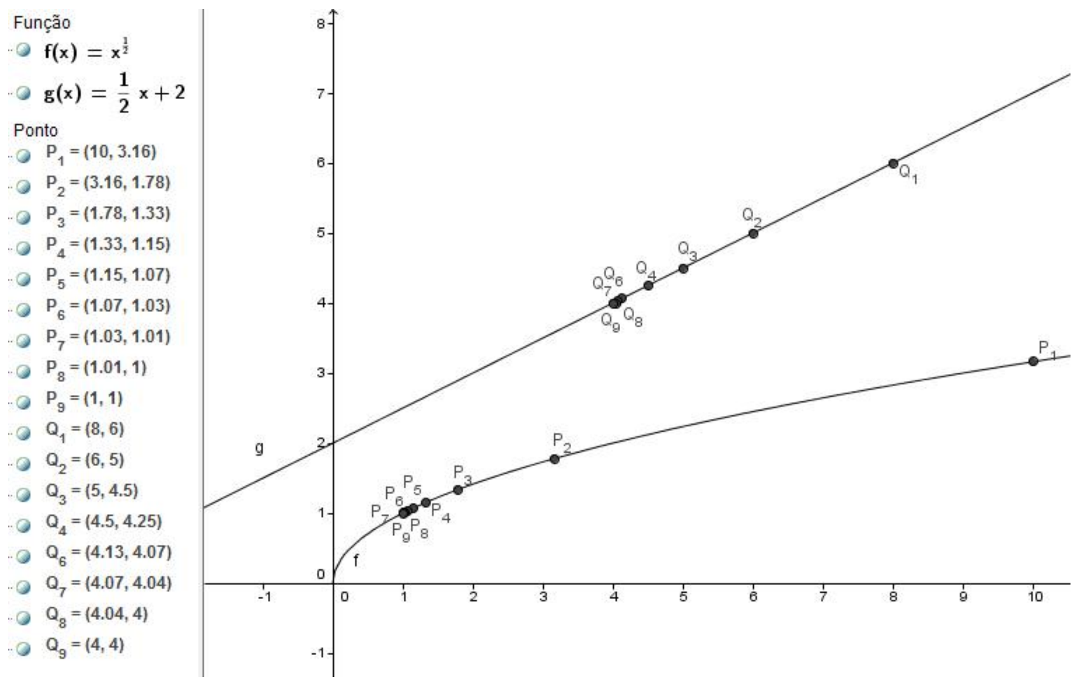

Figura 2.1: Pontos Fixos das Contrações $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 1$, e $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Solução

3.1 EDO's e Equações Integrais

Uma *Equação Diferencial Ordinária* ou, abreviadamente, EDO, é uma equação que envolve uma função incógnita y de uma variável, um número finito de suas derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, e a variável dependente x, ou seja, uma equação do tipo:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{3.1}$$

onde F é uma função de $n+2$ variáveis. Dizemos que n é a *ordem* da EDO (3.1). De um modo geral, a ordem de uma equação diferencial ordinária é a derivada de maior ordem da função y que aparece na mesma.

Como já foi comentado, muitos problemas físicos são compreendidos graças às EDO's. Um bom exemplo de um fenômeno modelado por uma EDO é a corrente i em circuito RLC, que é constituído por um resistor, um indutor, um capacitor e uma fonte de tensão alternada ligados em série. Temos que i é dada pela seguinta equação diferencial de 2ª ordem:

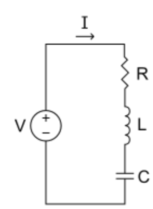

Figura 3.1: Circuito RLC

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}V'(t),$$

onde R é a resistência, L a indutância, C a capacitância e V é a tensão em função do tempo.

A famosa 2ª lei de Newton também pode ser expressa na forma de uma EDO:

$$\vec{F} = m\frac{d^2}{dt^2}\big(\vec{r}(t)\big),$$

onde $\vec{F}$ é a força que atua sobre uma partícula, m sua massa e $\vec{r} = \vec{r}(t)$ a posição da partícula no instante t.

Neste capítulo daremos início ao estudo das condições que garantem existência e unicidade de um problema de valor inicial (PVI). Um dos principais resultados, neste contexto, é o Teorema de Picard.

Vamos considerar uma equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y' = f(x, y), \tag{3.2}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que uma função diferenciável $y = \phi(x)$ definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ é uma solução de ((3.2)) se:

$$(x, \phi(x)) \in \Omega \text{ e } \phi'(x) = f(x, \phi(x)), \forall x \in I.$$

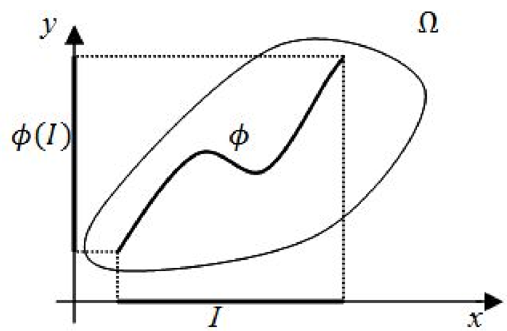

Figura 3.2: Uma solução de $y' = f(x, y)$

Quando é dado um ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$, definimos o *Problema de Valor Inicial* (PVI) como sendo

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Para resolver o PVI, devemos encontrar uma função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ que satisfaz (3.2) e $\phi(x_0) = y_0$.

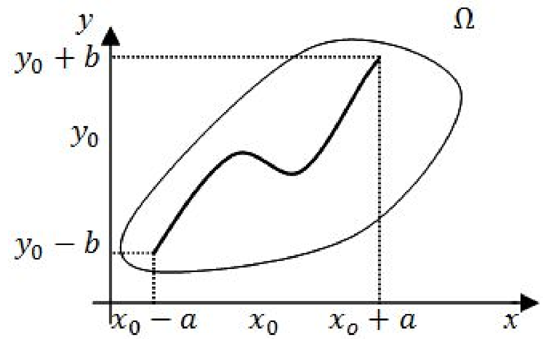

Figura 3.3: Solução do PVI (3.3)

Exemplo 3.1.1. Vamos considerar o PVI

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Note que a função $f(x, y) = y$ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$ e sua derivada parcial $f_y(x, y) = 1$ também é contínua em todo o plano. Sendo $\phi(x) = ke^x, \forall x \in \mathbb{R}$, é fácil verificar que $\phi' = \phi$. Para determinarmos a solução do PVI, devemos encontrar o valor de k para o qual $\phi(0) = 1$. Assim,

$$ke^0 = 1 \Longrightarrow k = 1.$$

Logo, a solução do PVI é a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = e^x$. Além disso, afirmamos que essa solução é única. Este fato será justificado mais adiante.

Exemplo 3.1.2. Considere o seguinte PVI

$$y' = |y|^{\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 0.$$

Neste caso, embora $f(x, y) = |y|^{\frac{1}{2}}$ seja contínua em $\mathbb{R}^2$, f_y não está definida em $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Nota-se facilmente que $\phi(x) \equiv 0$ é solução deste PVI. No entanto, a função

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & x \geq 0 \\ \\ -\frac{1}{4}x^2, & x < 0 \end{cases}$$

também é solução, ou seja, encontramos duas soluções distintas para o mesmo PVI. Isto ocorre, justamente, pelo fato de f_y não estar definida em $(0, 0)$. Temos que f é contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \neq \mathbb{R}^2$. Ver Teorema 3.3.1.

Na demonstração do Teorema de Picard, que será apresentada na próxima seção, não trabalharemos diretamente com um problema de valor inicial dado, mas com uma equação integral equivalente. O próximo lema garante a equivalência entre os dois problemas.

Lema 3.1.1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Uma função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução do PVI (3.3) se, e somente se, é uma solução da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right) ds, \quad \forall x \in I. \tag{3.4}$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $\phi : I \to \mathbb{R}$ é solução da equação integral (3.4). Então ϕ é diferenciável e, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, \phi(s)\right) ds\right) = f(x, \phi(x)).$$

Além disso,

$$\phi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f\left(s, \phi(s)\right) = y_0.$$

Portanto, ϕ é solução do PVI (3.3). Reciprocamente, se $\phi : I \to \mathbb{R}$ é solução de (3.3), então ϕ é diferenciável e, por hipótese, sua derivada $f(x, \phi(x))$ é contínua, consequentemente, integrável. Novamente pelo teorema fundamental do cálculo obtemos:

$$\phi(x) - \phi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))ds \Longrightarrow \phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))ds.$$

Logo, ϕ é solução da equação integral (3.4). □

3.2 Condição de Lipschitz na Variável y

Outro resultado importante para a demonstração do teorema de Picard é o Lema 3.2.1 que apresentaremos a seguir. Mas antes vamos definir as Condições de Lipschitz na variável y e na variável x.

Definição 3.2.1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que f satisfaz a *Condição de Lipschitz na variável* y, ou que f é *lipschitziana* em relação a variável y, se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(x,y) - f(x,t)| \leq K|y-t|,$$

para quaisquer $(x,y),(x,t) \in X$.

Definição 3.2.2. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que f satisfaz a *Condição de Lipschitz na variável* x, ou que f é *lipschitziana* em relação a variável x, se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(x,y) - f(t,y)| \leq K|x-t|,$$

para quaisquer $(x,y),(t,y) \in X$.

Lema 3.2.1. (Condição de Lipschitz na Variável y) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com derivada parcial $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. Dado um retângulo $R = [a,b] \times [c,d] \subset \Omega$, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \tag{3.5}$$

para todos $(x,y_1),(x,y_2) \in R$

Demonstração. Dados $(x,y_1),(x,y_2) \in R$, o segmento de reta $[x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]$, $0 \leq \lambda \leq 1$, está contido em R. Assim, pelo teorema do valor médio

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = f_y(x,\xi)(y_1 - y_2),$$

com $\xi \in [y_1, y_2]$ (supondo, sem perda de generalidade, que $y_1 \leq y_2$). Como R é compacto e f_y é contínua, podemos tomar

$$K = \max\{|f_y(x,y)|; (x,y) \in R\}.$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |f_y(x,\xi)||y_1 - y_2| \\ &\leq K|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

□

3.3 Teorema de Picard

O principal resultado deste capítulo é o teorema abaixo, pois, sob certas hipóteses, garante existência e unicidade de solução para um PVI.

Teorema 3.3.1. (Teorema de Picard) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com derivada parcial $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também contínua. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto $I \ni x_0$ e uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$, que é solução do PVI

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, podemos transformar o PVI (3.6) na equação integral (3.4) e nos concentrarmos na resolução desta última.

Como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, podemos tomar $a, b > 0$ tais que o retângulo

$$R = \{(x,y); |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja contido em Ω. Ademais, R é compacto e f é contínua, por hipótese, logo f é limitada em R e podemos considerar

$$M = \max\{|f(x,y)|; (x,y) \in R\}.$$

Sendo

$$0 < \overline{a} \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

e

$$I = [x_0 - \overline{a}, x_0 + \overline{a}],$$

definimos o conjunto $C_{(x_0,y_0)}$ de todas as funções contínuas $g : I \to \mathbb{R}$ tais que $g(x_0) = y_0$ e $|g(x) - y_0| \leq b$. É fácil ver que $(C_{(x_0,y_0)}, || \ ||_\infty) \subset (C[x_0 - \overline{a}, x_0 + \overline{a}], || \ ||_\infty)$ é um espaço métrico completo. Graficamente, queremos em $(C_{(x_0,y_0)}, || \ ||_\infty)$ todas as funções contínuas cujos gráficos passam por (x_0, y_0) e estão contidos no retângulo R.

Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \Psi : C_{(x_0,y_0)} &\longrightarrow C_{(x_0,y_0)} \\ y &\longmapsto \Psi(y) = g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \end{aligned}$$

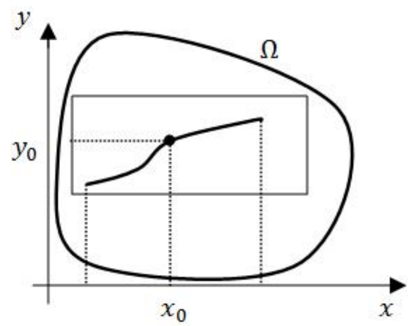

Figura 3.4: Função contínua com $g(x_0) = y_0$

Observe que $\Psi(y)$ está bem definida e é uma função derivável em I. De fato, f é contínua em Ω e, como $y \in C_{(x_0,y_0)}$, temos $(x, y(x)) \in \Omega$ para todo $x \in I$. Assim, $f(x, y(x))$ é contínua, consequentemente, integrável e $\Psi(y) = g(x)$ é uma primitiva para a mesma. Além disso,

$$\begin{aligned} g(x_0) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s))ds \\ &= y_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |g(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f\,(s, y(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f\,(s, y(s))\,| ds \\ &\leq M \int_{x_0}^{x} ds \\ &\leq M|x - x_0| \leq M\overline{a} \\ &\leq b. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\Psi(y) = g \in C_{(x_0,y_0)}$.

As soluções para o PVI (3.6) são tais que $\Psi(g) = g$, ou seja, são os pontos fixos de Ψ.

A fim de podermos aplicar o Teorema do Ponto Fixo, devemos mostrar que Ψ é uma contração. Temos, para quaisquer $g_1, g_2 \in C_{(x_0,y_0)}$,

$$\begin{aligned} |\Psi(g_1) - \Psi(g_2)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] \right| ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))| \, ds. \end{aligned}$$

Pela condição de Lipschitz (Lema 3.2.1), existe $K > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\Psi(g_1) - \Psi(g_2)| &\leq K \int_{x_0}^{x} |g_1(s) - g_2(s)| \, ds \\ &\leq K||g_1 - g_2||_\infty \int_{x_0}^{x} ds \\ &\leq K\overline{a}||g_1 - g_2||_\infty. \end{aligned}$$

Para que Ψ seja uma contração, basta valer $K\overline{a} < 1$. Portanto, tomamos $\overline{a} < \frac{1}{K}$ também e, pelo teorema do ponto fixo de Banach, Ψ possui um único ponto fixo e o teorema de Picard fica demonstrado. □

Estabelecido este importante resultado, ficam justificados os fatos do PVI do Exemplo 3.1.1 possuir solução única e o do Exemplo 3.1.2 não.

Na demonstração do Teorema de Picard, partindo da hipótese f_y contínua, conseguimos mostrar que f satisfaz a Condição de Lipschitz na variável y em uma vizinhança compacta de (x_0, y_0), e utilizamos este fato para prosseguir com a demonstração. Sendo assim, podemos enunciar a seguinte versão do Teorema de Picard, que aparece frequentemente na literatura.

Teorema 3.3.2. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e lipschitziana em relação a variável y em uma vizinhança compacta de (x_0, y_0). Então, existem um intervalo aberto $I \ni x_0$ e uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$, que é solução do PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

3.4 Algumas Consequências do Teorema de Picard

A seguir estabeleremos alguns resultados que são consequências do Teorema de Picard.

Lema 3.4.1. Considere as mesmas hipóteses do Teorema de Picard. Se $\phi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $\phi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ são soluções do PVI (3.3), então $\phi_1 = \phi_2$ em $I_1 \cap I_2$.

Demonstração. Temos $x_0 \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Considere o conjunto

$$J = \{x \in I_1 \cap I_2; \quad \phi_1(x) = \phi_2(x)\}.$$

Vamos mostrar que J é aberto e fechado em $I_1 \cap I_2$. Considerando uma sequência (x_n) de elementos de J, com $x_n \to x \in I_1 \cap I_2$, temos $\phi_1(x_n) = \phi_2(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Passando ao limite $n \to \infty$ e usando o fato que ϕ_1 e ϕ_1 são deriváveis, particularmente contínuas, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_2(x_n) \quad &\Longrightarrow \quad \phi_1(\lim_{n\to\infty} x_n) = \phi_2(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &\Longrightarrow \quad \phi_1(x) = \phi_2(x). \end{aligned}$$

Donde $x = \lim x_n \in J$ e, portanto, J é fechado. Agora, dado $x_1 \in J$, pelo Teorema de Picard, existe uma única solução $\phi : I \to \mathbb{R}$, com $I \subset I_1 \cap I_2$, para o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_1) = \phi_1(x_1) = \phi_2(x_1). \end{cases}$$

Ora, é fácil ver que as restrições $\phi_1|_I$ e $\phi_2|_I$ também são soluções do PVI acima. Assim, pela unicidade de ϕ, concluímos que $\phi = \phi_1 = \phi_2$ em I, ou seja, $I \subset J$ e por conseguinte J é aberto em $I_1 \cap I_2$. Como $J \neq \emptyset$ é aberto e fechado no conexo $I_1 \cap I_2$, pelo Teorema 2.4.1, devemos ter $J = I_1 \cap I_2$. $\square$

A importância do lema acima se apoia no fato de que, dadas duas soluções de um PVI nas hipóteses do Teorema de Picard, elas são apenas restrições de uma solução definida em um intervalo maior. No contexto do lema, o PVI tem solução ϕ definida no intervalo $I_1 \cup I_2 \supset I_1, I_2$, com $\phi|_{I_1} = \phi_1$ e $\phi|_{I_2} = \phi_2$. De um modo geral, sempre podemos estender a solução do PVI para um intervalo maximal I, ou seja, dada uma solução ψ definida em um intervalo J, existe uma solução $\phi : I \supset J \to \mathbb{R}$ tal que $\phi|_J = \psi$. Este resultado é apresentado no teorema a seguir.

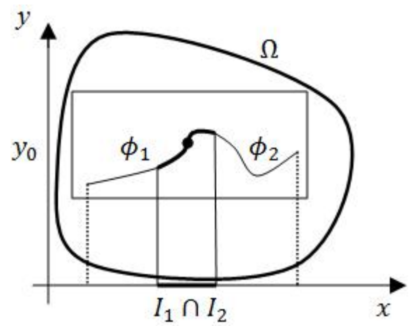

Figura 3.5: $\phi_2 = \phi_1$ em $I_1 \cap I_2$

Teorema 3.4.1. Toda solução do PVI (3.3) pode ser estendida a um intervalo maximal.

Demonstração. Considere $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ a família de todas as soluções do PVI, sendo cada ϕ_λ definida em um intervalo $I_\lambda \ni x_0$, e tome

$$I = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda.$$

Defina a função $\phi : I \to \mathbb{R}$ pondo para cada $x \in I$, $\phi(x) = \phi_\lambda(x)$, desde que $x \in I_\lambda$ para algum $\lambda \in \Gamma$. Pelo lema anterior, não importa a escolha do intervalo que contém x, pois, se $x \in I_i \cap I_j$ para determinados $i, j \in \Gamma$, teremos $\phi_i(x) = \phi_j(x)$. Logo, ϕ está bem definida. Temos que ϕ é solução do PVI, pois cada ϕ_λ é solução e I é um intervalo, já que é uma união de intervalos abertos que têm um ponto comum (Teorema 2.4.2). Supondo $I = (a, b)$, podendo ser $a = \infty$ ou $b = \infty$, afirmamos que I é maximal. De fato, se existisse uma solução $\overline{\phi}$ definida em um intervalo $\overline{I} \supset I$, $\overline{I}$ conteria uma das extremidades de I, digamos $b \in \overline{I}$. Pelo Teorema de Picard, a solução de

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(b) = \overline{\phi}(b) \end{cases}$$

estaria definida em um intervalo $J = (b - \overline{a}, b + \overline{a}) \subset \overline{I}$. Daí, $\psi : (a, b + \overline{a}) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{se } x \in I \\ \overline{\phi}(x), & \text{se } x \in [b, b + \overline{a}) \end{cases},$$

seria solução do PVI inicial. Um absurdo, pois I é a união de todos os intervalos abertos contendo x_0 nos quais o PVI tem solução, e $\overline{I}$ contém propriamente I. □

Lema 3.4.2. *(Lema de Gronwall).* Sejam $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas não negativas e $c > 0$ uma constante. Se

$$v(x) \leq c + \int_a^x u(t)v(t)dt,$$

então

$$v(x) \leq ce^{\int_a^x u(t)dt}.$$

Demonstração. Sendo $V(x) = c + \int_a^x u(t)v(t)dt$, temos

$$v(x) \leq V(x)$$

e, como u e v são não negativas,

$$\int_a^x u(t)v(t)dt \geq 0, \qquad a \leq x \leq b,$$

o que implica $V(x) \geq c > 0$. Daí,

$$V'(x) = u(x)v(x) \leq u(x)V(x) \Longrightarrow \frac{V'(x)}{V(x)} \leq u(x).$$

Integrando esta última desigualdade, temos:

$$\int_a^x \frac{V'(t)}{V(t)}dt \leq \int_a^x u(t)dt \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{V(x)}{V(a)}\right) \leq \int_a^x u(t)dt$$

$$\Longrightarrow \quad V(x) \leq V(a)e^{\int_a^x u(t)dt}.$$

Note que $V(a) = c \neq 0$ e, portanto, temos o resultado. □

Teorema 3.4.2. *(Dependência Contínua).* Mesmas hipóteses do Teorema de Picard. Se ϕ e ψ são soluções de $y' = f(x, y)$ definidas em $[x_0, x_1]$, então existe $K > 0$ tal que

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq K|\phi(x_0) - \psi(x_0)|e^{K(x-x_0)}.$$

Demonstração. Sendo $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ soluções de $y' = f(x,y)$, pelo lema 3.2.1, sabemos que existe $K > 0$ tal que

$$|f(x,\phi(x)) - f(x,\psi(x))| \leq K|\phi(x) - \psi(x)|, \forall x \in [x_0, x_1].$$

Além disso,

$$\phi'(x) - \psi'(x) = f(x,\phi(x)) - f(x,\psi(x)).$$

Integrando a identidade acima, obtemos:

$$\phi(x) - \psi(x) = \phi(x_0) - \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \psi(x)| &\leq |\phi(x_0) - \psi(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))|dt \\ &\leq |\phi(x_0) - \psi(x_0)| + \int_{x_0}^{x} K|\phi(t) - \psi(t)|dt. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall, temos:

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq |\phi(x_0) - \psi(x_0)|e^{K(x-x_0)}.$$

□

Uma observação acerca do Teorema da Dependência Contínua é que, se ϕ é uma solução do PVI (3.3) definida no intervalo $[x_0, x_1]$, então dada uma sequência de condições iniciais (y_n), com $y_n \to y_0 = \phi(x_0)$, a sequência das soluções ϕ_n de $y' = f(x,y), y(x_0) = y_n$, converge uniformemente para ϕ. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |y_n - y_0| = |\phi_n(x_0) - \phi(x_0)| < \frac{\epsilon}{e^{K(x_1-x_0)}}.$$

Pela Dependência Contínua,

$$\begin{aligned} |\phi_n(x) - \phi(x)| &\leq |\phi_n(x_0) - \phi(x_0)|e^{K(x-x_0)} \\ &\leq |\phi_n(x_0) - \phi(x_0)|e^{K(x_1-x_0)} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $x \in [x_0, x_1]$ e $n > n_0$. Logo, $\phi_n \to \phi$ uniformemente em $[x_0, x_1]$.

Capítulo 4

Mais Casos que Garantem Unicidade

Nesta seção discutiremos mais algumas condições que garantem existência e unicidade para o problema de valor inicial (3.3). O teorema abaixo apresenta uma equivalência que amplia a quantidade de PVI's dos quais podemos concluir a existência de uma única solução ainda fazendo uso do Teorema de Picard.

Teorema 4.0.3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua em Ω. Se $f(x_0, y_0) \neq 0$, então

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

tem solução única se, e somente se,

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{f(x,y)}, \\ x(y_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

tem solução única.

Demonstração. Uma vez que f é contínua e $f(x_0, y_0) \neq 0$, existe uma vizinhança Ω_0 de (x_0, y_0) tal que f tem o mesmo sinal de $f(x_0, y_0)$, logo $f(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in \Omega_0$. Consequentemente, $\frac{1}{f}$ tem sinal constante em Ω_0. Também vamos considerar Ω_0 de modo que $\frac{1}{f}$ é limitada.

Se $\phi : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $I \times \phi(I) \subset \Omega_0$, é uma solução de (4.1), então $\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \neq 0$. Daí, pelo Teorema da Função Inversa, ϕ

possui inversa $X : J = \phi(I) \to I, J \ni y_0$, e

$$\begin{aligned} X'(y) &= \frac{1}{\phi'(X(y))} \\ &= \frac{1}{\phi'(x)} \\ &= \frac{1}{f(x,\phi(x))}. \end{aligned}$$

Juntando isto com o fato de $\phi(x_0) = y_0 \Rightarrow X(y_0) = x_0$, concluímos que X é solução de (4.2). Analogamente, se $X : J \to \mathbb{R}$, J um intervalo com $X(J) \times J \subset \Omega_0$, é solução de (4.2), temos $X'(y) = \frac{1}{f(X(y),y)} \neq 0$, Logo, X admite inversa $\phi : I = X(J) \to J, x_0 \in I$, e

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{1}{X'(\phi(x))} \\ &= \frac{1}{X'(y)} \\ &= f(x,\phi(x)). \end{aligned}$$

Como também vale $\phi(x_0) = y_0$, ϕ é solução de (4.1).

Para mostrar a unicidade, suponha que ϕ é solução única de (4.1) definida em um intervalo $I = [x_0 - \overline{a}, x_0 + \overline{a}]$. Já vimos que ϕ^{-1} é solução de (4.2). Agora, qualquer solução X de (4.2) definida em $\overline{J} = [y_0 - \overline{b}, y_0 + \overline{b}] \subset (J)$ tem inversa X^{-1} solução de (4.1). Como ϕ é única, devemos ter $X^{-1} = \phi$ em $X^{-1}(\overline{J}) \subset I$. De modo análogo provamos que unicidade em (4.2) acarreta unicidade para (4.1). □

Exemplo 4.0.1. Considerando o mesmo PVI do exemplo (3.1.1), vimos que $\phi(x) = e^x$ é solução única do mesmo. Ademais, $f(x,y) = y \Rightarrow f(0,1) = 1 \neq 0$. Logo, pelo teorema anterior $\psi(y) = \ln y$ é solução única do PVI

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{y}, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

4.1 Condição de Lipschitz na Variável x

Nas condições do Teorema de Picard, vimos que a função f satisfaz a condição Lipschitz na variável y. Agora apresentaremos um teorema que garante existência e unicidade quando, dentre outras hipóteses, f satisfaz a condição Lipschitz na variável x.

Teorema 4.1.1. Sejam Ω uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(x_0, y_0) \neq 0$ e f satisfaz a condição de Lipschitz em relação a primeira variável, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, y) - f(x, y)| \leq K|t - x|,$$

para quaisquer $(t, y), (x, y) \in \Omega$, então (4.1) tem solução única.

Demonstração. A continuidade de f implica na existência de uma vizinhança $\Omega_0 \subset \Omega$ de (x_0, y_0) onde $|f| \geq |f(x_0, y_0)/2| = r > 0$. Assim, para $(x, y), (t, y) \in \Omega_0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(x,y)} - \frac{1}{f(t,y)} \right| &= \frac{|f(t,y) - f(x,y)|}{|f(x,y)f(t,y)|} \\ &\leq \frac{K}{r^2}|x - t|. \end{aligned}$$

Logo, como $\frac{1}{f}$ é Lipschitz na variável x, o Teorema de Picard garante que o PVI (4.2) possui solução única (lembremos que x é variável dependente em (4.2)) e, pelo teorema anterior, (4.1) tem solução única. □

Corolário 4.1.1. Sejam Ω uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(x_0, y_0) \neq 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em Ω, então (4.1) tem solução única.

Demonstração. Seja C uma vizinhança compacta de (x_0, y_0), $C \subset \Omega$. Nestas condições, tome $K = \sup\{|f_x(x, y)|; (x, y) \in C\}$. Dados $(x, y), (t, y) \in C$, pelo teorema do valor médio, existe r entre x e t tal que

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(t,y)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(r, y) \right| |x - t| \\ &\leq K|x - t|. \end{aligned}$$

Isto é, f é Lipschitz na variável x. Pelo teorema anterior, (4.1) tem solução única. □

Exemplo 4.1.1. O problema de valor inicial

$$y' = \cos x + xy^{\frac{1}{3}} = f(x,y), \quad y(0) = 0,$$

possui solução única. Note que f_y não está definida em $(0,0)$ e, deste modo, f não satisfaz as hipóteses do Teorema de Picard, porém a função $f_x(x,y) = -\sin x + y^{\frac{1}{3}}$ é contínua em todo plano e $f(0,0) = 1 \neq 0$. Portanto, f satisfaz as hipóteses do corolário anterior.

Corolário 4.1.2. Seja $f : (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ contínua, $\epsilon > 0$. Se $f(y_0) \neq 0$, então o problema autônomo

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

tem solução única.

Exemplo 4.1.2. No caso em que f não depende apenas de y, a hipótese $f(x_0, y_0) \neq 0$ não é suficiente para garantir a unicidade de (4.1). De fato, o PVI

$$\begin{cases} y' = 3(y-x)^{\frac{2}{3}} + 1, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

não possui solução única, uma vez que $\phi(x) = x$ e $\psi(x) = x^3 + x$ são soluções de (4.4) definidas em toda reta. Note que f_x não é contínua em todo $\mathbb{R}^2$ e, assim, (4.4) não satisfaz as hipóteses do Corolário 4.1.1.

O teorema abaixo pode ser demonstrado diretamente a partir do Corolário 4.1.2, mas o demonstraremos de outra maneira.

Teorema 4.1.2. Seja f uma função contínua em $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$. Se o PVI

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

tem pelo menos duas soluções em qualquer vizinhança de x_0, então $f(y_0) = 0$.

Demonstração. Sejam ϕ e ψ duas soluções de (4.5) distintas definidas em $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e vamos supor, por absurdo, que $f(y_0) \neq 0$. Sendo assim, a continuidade de f garante a existência de uma vizinhança $V = (y_0 - \epsilon_1, y_0 + \epsilon_1)$, $\epsilon_1 \leq \epsilon$, tal que f possui o mesmo sinal de $f(y_0)$ em V e, portanto, podemos definir $\frac{1}{f}$ contínua em V. Considerando $\overline{I} = (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1), \delta_1 \leq \delta$, de modo que $\phi(\overline{I}), \psi(\overline{I}) \subset V$, faz sentido definirmos

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{1}{f(t)} dt. \tag{4.6}$$

Como $\frac{1}{f}$ é não nula e com sinal constante em V, a integral acima é diferente de zero se for não degenerada, ou seja, caso $\phi(t) \neq \psi(t)$ para algum $t \in \overline{I}$. Isto ocorre pois estamos supondo ϕ, ψ soluções distintas. No entanto, sendo G uma primitiva da integral na igualdade (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} F(x) = G(\psi(x)) - G(\phi(x)) &\implies F'(x) = G'(\psi(x))\psi'(x) - G'(\phi(x))\phi'(x) \\ &\implies F'(x) = \frac{\psi'(x)}{f(\psi(x))} - \frac{\phi'(x)}{f(\phi(x))} = 1 - 1 \\ &\implies F'(x) = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in V$. Logo, $F(x) = c$ (constante). Por outro lado,

$$F(x_0) = \int_{\phi(x_0)}^{\psi(x_0)} \frac{1}{f(t)} dt = \int_{y_0}^{y_0} \frac{1}{f(t)} dt = 0,$$

implicando $F(x) \equiv 0$. Uma contradição que adveio da suposição $f(y_0) \neq 0$. Portanto, devemos ter $f(y_0) = 0$. □

4.2 Condição Lipschitz Unilateral

Teorema 4.2.1. Considere o PVI (3.3). Se f satisfaz a condição Lipschitz unilateral

$$[f(x, y_1) - f(x, y_2)]\,(y_1 - y_2) \leq K|y_1 - y_2|^2,$$

para quaisquer $(x, y_1), (x, y_2) \in \Omega,\ K > 0$, então (3.3) tem no máximo uma solução em $I = [x_0, x_0 + \overline{a}]$.

Demonstração. Considere ϕ, ψ soluções de (3.3) e a função $r(x) = |\phi(x) - \psi(x)|^2 = (\phi(x) - \psi(x))^2$, todas definidas em $I = [x_0, x_0 + \overline{a}]$. Temos:

$$\begin{aligned} r'(x) &= 2(\phi(x) - \psi(x))(\phi'(x) - \psi'(x)) \\ &= 2(\phi(x) - \psi(x))(f(x, \phi(x)) - f(x, \psi(x))) \\ &\leq 2K|\phi(x) - \psi(x)|^2 \\ &= 2Kr(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}(r(x)e^{-2Kx}) = e^{-2Kx}(r'(x) - 2Kr(x)) \leq 0$$

e, consequentemente, $r(x)e^{-2Kx}$ é não crescente. Juntando isto com o fato de $r(x),\ e^{-2Kx} \geq 0$, temos

$$0 \leq r(x)e^{-2Kx} \leq r(x_0)e^{-2Kx_0} = 0$$

para todo $x \geq x_0$. Portanto, sempre que $x \geq x_0$,

$$\begin{aligned} r(x)e^{-2Kx} = 0 &\implies r(x) = 0 \\ &\implies \phi(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

□

4.3 Teorema de Unicidade de Peano

Teorema 4.3.1. Seja $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua no retângulo $R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0, y_0 + b]$ e tal que

$$y_1, y_2 \in [y_0, y_0 + b], y_2 > y_1 \Rightarrow f(x, y_1) \geq f(x, y_2), \tag{4.7}$$

para todo $x \in [x_0, x_0 + a]$. Então o PVI (4.1) tem no máximo uma solução em $[x_0, x_0 + a]$.

Demonstração. Suponha ϕ e ψ duas soluções distintas para PVI (4.1), ou seja, existe $s \in (x_0, x_0+a]$ tal que $\phi(s) \neq \psi(s)$, digamos $\phi(s) > \psi(s)$. Seja $r = \sup\{x \in [x_0, s);\ \phi(x) = \psi(x)\}$. Note que $r \in \{x \in [x_0, s);\ \phi(x) = \psi(x)\}$, pois este conjunto é limitado, não vazio e $r = \lim_{n\to\infty} x_n$, onde $\phi(x_n) = \psi(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, como ϕ, ψ são contínuas, temos $\phi(r) = \psi(r)$. É correto afirmar que

$$\phi(x) > \psi(x),\ \forall x \in (r, s).$$

De fato, se existisse $t \in (r, s)$ com $\phi(t) \leq \psi(t)$, então

$$\phi(t) - \psi(t) \leq 0 < \phi(s) - \psi(s)$$

e, pelo teorema do valor intermediário, haveria um $z \in (r, s)$ tal que $\phi(z) - \psi(z) = 0$, o que implicaria $\phi(z) = \psi(z)$, contradizendo o fato de que r

é o maior valor em $[x_0, s)$ no qual ϕ e ψ coincidem. Logo, devemos ter $\phi(x) > \psi(x)$, $\forall x \in (r, s)$ e, por (4.7),

$$f(x, \psi(x)) \geq f(x, \phi(x)),$$

ou seja,

$$\psi'(x) \geq \phi'(x), \ \forall x \in (r, s).$$

Assim, a função $g(x) = \phi(x) - \psi(x)$ é não crescente. Uma vez que $g(r) = 0$, devemos ter $g(x) \leq 0$ para todo $x \in (r, s)$, ou seja, $\phi(x) \leq \psi(x)$. Absurdo, pois foi demonstrado que $\phi > \psi$ em (r, s). Como esta contradição surgiu por termos suposto inicialmente que ϕ e ψ eram distintas, concluímos que $\phi = \psi$ em $[x_0, x_0 + a]$. □

Vemos que o Teorema de Peano não garante existência de solução, ele nos assegura que, caso exista solução, ela é única.

4.4 Condição de Osgood

Nas condições do Teorema de Picard, vimos que a função f satisfaz a condição Lipschitz na segunda variável e, na Seção (4.1), vimos alguns teoremas de existência e unicidade quando f é lipschitziana na primeira variável. Agora apresentaremos a condição de Osgood, uma condição mais geral que a condição Lipschitz.

Seja f contínua em um retângulo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que f satisfaz a condição de Osgood se

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq w(|y_1 - y_2|), \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R, \tag{4.8}$$

onde $w : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ é uma função não decrescente, com $w(0) = 0$, $w(x) > 0$ para todo $x > 0$ e, além disso, vale

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dt}{w(t)} = +\infty. \tag{4.9}$$

Se tomarmos $w(t) = Kt$, $K > 0, t \geq 0$, temos: $w(0) = 0$, $w(t) > 0$ para todo t positivo e

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dt}{Kt} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{K}(\ln 1 - \ln \epsilon) = +\infty.$$

Logo, se f é uma função que satisfaz

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|,$$

então basta considerar $w(t) = Kt$ e, assim,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq w(|y_1 - y_2|),$$

ou seja, se f é Lipschitz na segunda variável, f também satisfaz a condição de Osgood, mostrando que esta é mais fraca que a Lipschitz.

Se $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaz a desigualdade

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|^p,$$

para quaisquer $(x,y_1),(x,y_2) \in R$, $p > 1$, então f satisfaz a condição de Osgood. Neste caso, basta considerarmos $w(t) = Kt^p, t \geq 0$.

Lema 4.4.1. Seja $w : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ a mesma função da condição de Osgood definida anteriormente. Se $\phi : [0,a] \to \mathbb{R}$ é uma função não negativa e contínua, então

$$\phi(x) \leq \int_0^x w(\phi(t))dt, \quad 0 \leq x \leq a, \tag{4.10}$$

implica $\phi(x) = 0$ em $[0,a]$.

Demonstração. Defina $\Phi(x) = \max\{\phi(t);\ \ 0 \leq t \leq x\}$ e suponha, por absurdo, que $\Phi(y) > 0$ para algum $y \in (0,a]$. Definida desta forma, Φ é contínua e, assim, existe uma vizinhança $V = (y-\delta, y+\delta) \cap (0,a]$ de y tal que $\Phi > 0$ em V.

Dado $x \in [0,a]$, temos que

$$\phi(x) \leq \Phi(x)$$

e existe $x_0 \leq x$ com

$$\phi(x_0) = \Phi(x),$$

pois ϕ é contínua e $[0,x]$ é compacto, consequentemente, ϕ assume o máximo em algum ponto deste intervalo. Além disso, usando $\phi(x) \leq \Phi(x)$, a desigualdade (4.10) e os fatos de w ser não negativa e não decrescente, obtemos:

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \phi(x_0) &\leq \int_0^{x_0} w(\phi(t))dt \\ &\leq \int_0^{x} w(\phi(t))dt \\ &\leq \int_0^{x} w(\Phi(t))dt,\end{aligned}$$

isto é, Φ também satisfaz (4.10). Definindo agora

$$\overline{\Phi}(x) = \int_0^x w(\Phi(t))dt,$$

temos $\overline{\Phi}(0) = 0$ e $\Phi(x) \leq \overline{\Phi}(x)$. Sendo w não decrescente,

$$\overline{\Phi}'(x) = w(\Phi(x)) \leq w(\overline{\Phi}(x)).$$

Considere $[y_1, y_2] \subset V$ e $z = \sup\left\{x \in [0, y_1); \overline{\Phi}(x) = 0\right\}$. Temos $\Phi(x) > 0$ para todo $x \in [y_1, y_2]$ e $\overline{\Phi} > 0$ em $(z, y_1]$, o que implica $\overline{\Phi}(x) > 0$ seja qual for $x \in (z, y_2]$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{y_1 \to z^+} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\overline{\Phi}'(x)}{w(\overline{\Phi}(x))}dx &\leq \lim_{y_1 \to z^+} \int_{y_1}^{y_2} dx \\ &= y_2 - z \\ &\leq a.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\overline{\Phi}'(x)}{w(\overline{\Phi}(x))}dx = \int_{\epsilon}^{\alpha} \frac{dt}{w(t)},$$

onde $\epsilon = \overline{\Phi}(y_1)$ e $\alpha = \overline{\Phi}(y_2)$. Perceba que $y_1 \to z^+ \Rightarrow \epsilon \to 0^+$ e, assim,

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\overline{\Phi}'(x)}{w(\overline{\Phi}(x))}dx \to \infty$$

quando $y_1 \to z^+$. Uma contradição que surgiu por supormos $\Phi(y) > 0$. Portanto, $\Phi \equiv 0$ em $[0, a]$ e, por conseguinte, $\phi \equiv 0$ em $[0, a]$. $\square$

Teorema 4.4.1. Seja $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua no retângulo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, satisfazendo a condição de Osgood. Então, o PVI (4.1) tem no máximo uma solução em $I = [x_0 - a, x_0 + a]$.

Demonstração. Suponha ϕ e ψ duas soluções do PVI definidas em I. Vamos mostrar inicialmente que $\phi = \psi$ em $[x_0, x_0 + a]$. Usando a hipótese de ϕ e ψ serem soluções do PVI e a desigualdade (4.8), temos:

$$\begin{aligned} |\phi(x_0 + x) - \psi(x_0 + x)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+x} [f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t))]\, dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+x} |f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t))| dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+x} w\left(|\phi(t) - \psi(t)|\right) dt. \end{aligned}$$

Fazendo $t = z + x_0$, obtemos:

$$|\phi(x_0 + x) - \psi(x_0 + x)| \leq \int_0^x w\left(|\phi(z + x_0) - \psi(z + x_0)|\right) dz.$$

Logo, definindo

$$\Phi(x) = |\phi(x + x_0) - \psi(x + x_0)|,$$

pelo lema anterior devemos ter $\Phi \equiv 0$ em $[0, a]$ e, portanto, $\phi = \psi$ em $[x_0, x_0 + a]$. De maneira análoga, mostra-se que $\phi = \psi$ também em $[x_0 - a, x_0]$ □

De maneira semelhante ao Teorema de Peano, o teorema anterior garante apenas unicidade de solução.

Bibliografia

[1] DE FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas*, 2ª Edição, IMPA, 2005.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno*, 8ª edição, LTC, 2006.

[3] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*, 5ª edição. IMPA, 2013.

[4] LIMA, E. L., *Curso de Análise Vol. 1*. 13ª edição, IMPA, 2011.

[5] LIMA, E. L., *Curso de Análise Vol. 2*. 11ª edição, IMPA, 2010.

[6] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library, University of Windsor, 1989.

[7] CID, J. A.; POUSO, R. L., *Does Lipschitz with Respect to t Imply Uniqueness for the Differential Equation* $x' = f(x,t)$*?*, JSTOR. Revista: The Mathematical Association of America. vol-116. 61-66. 2009.

[8] GRIPA, G., *The Flow Associated to Weakly Differentiable Vector Fields.* Tese de Dorado - Universitat Zurich, 2007.

[9] DO NASCIMENTO, M. L., *Unicidade e Discretização para Problemas de Valor Inicial.* Dissertação de Mestrado - UFRN, 2013.