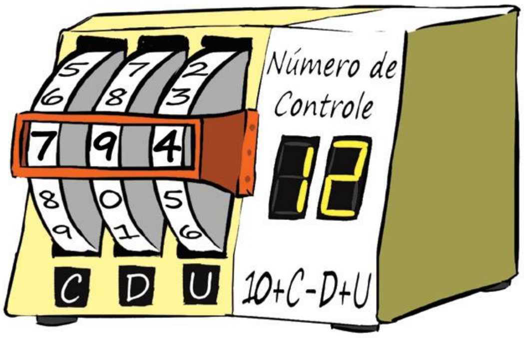
9ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

OBMEP 2013

Somando novos talentos para o Brasil



1. Na figura um aparelho com três discos **C** (centenas), **D** (dezenas) e **U** (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + \mathrm{C} - \mathrm{D} + \mathrm{U}$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é

$$10 + 7 - 9 + 4 = 12.$$

Quando giramos o disco **C** ou o disco **U**, o disco **D** gira junto; não é possível girar o disco **D** de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco **C** for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco **U** for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

a) Qual é o número de controle quando o visor mostra 804?

Resp.: quando o visor mostrar 804, o número de controle é

$$10 + \mathrm{C} - \mathrm{D} + \mathrm{U} = 10 + 8 - 0 + 4 = 22.$$

b) Quando o visor mostrava 690, girou-se um dos discos **C** ou **U** de uma unidade e o número de controle não se alterou. Qual passou a ser o número do visor?

Resp.: Quando o visor mostra 690, o número de controle é $10 + 6 - 9 + 0 = 7$. Mostramos na tabela abaixo todas as possibilidades de giro de uma unidade dos discos **C** e **U**:

	C	D	U	Controle
Posição inicial	6	9	0	7
C gira para 7	7	0	0	17
C gira para 5	5	8	0	7
U gira para 1	6	0	1	17
U gira para 9	6	8	9	17

Como o número de controle não mudou, vemos que o disco **C** foi girado para 5 e o número no visor passou a ser 580.

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos **C** ou **U?**

Resp.: Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco **C** para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$. O mesmo acontecerá com o disco **D**; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco **U** continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$.

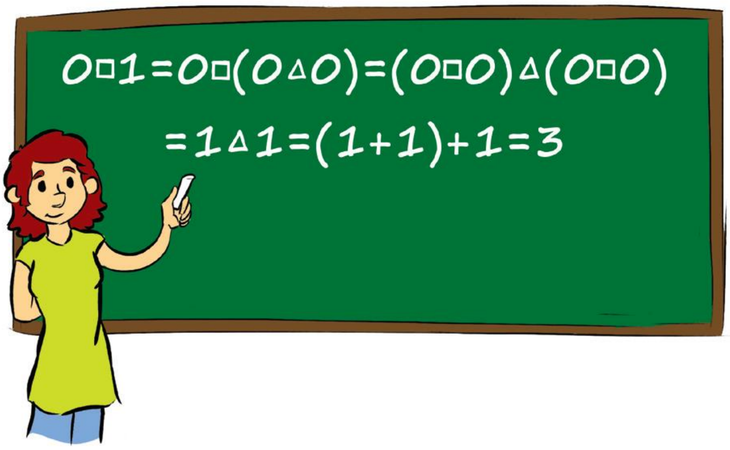
Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são
$1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo.
Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos **C** e **U**.

d) Explique por que é impossível, a partir do número 978 no visor, obter o número 555 através de giros dos discos **C** ou **U**?

Resp.: Quando o visor mostra 978, o número de controle é $10 + 9 - 7 + 8 = 20$; o item anterior mostra que, qualquer que seja o giro dos discos **C** e **U**, o algarismo das unidades do número de controle continuará a ser 0. Como o número de controle de 555 é $10 + 5 - 5 + 5 = 15$, não é possível obter 555 a partir de 978.

2. Hipácia criou duas novas operações com números naturais, indicadas por Δ e $\square$, com as seguintes propriedades:

- $a \,\Delta\, b = (a + b) + 1$
- $a \,\square\, b = b \,\square\, a$
- $0 \,\square\, 0 = 1$
- $a \,\square\, (b \,\Delta\, c) = (a \,\square\, b) \,\Delta\, (a \,\square\, b)$



Por exemplo, $0 \,\Delta\, 0 = (0 + 0) + 1 = 1$. Observe na ilustração como Hipácia calculou $0 \,\square\, 1$.

a) Calcule $2 \,\Delta\, 3$.

Resp.: De acordo com a definição, temos:

$$2 \,\Delta\, 3 = (2 + 3) + 1 = 6.$$

b) Calcule $0 \,\square\, 3$.

Resp.: Primeiro desenvolvemos dois exemplos que Hipácia mostra, temos:

$$0 \,\Delta\, 0 = (0 + 0) + 1 = 1$$

$$0 \,\square\, 1 = 0 \,\square\, (0 \,\Delta\, 0) = (0 \,\square\, 0) \,\Delta\, (0 \,\square\, 0) = (1 \,\Delta\, 1) = (1 + 1) + 1 = 3$$

Com isso,

$0 \,\square\, 3 = 0 \,\square\, (1 \,\Delta\, 1) = (0 \,\square\, 1) \,\Delta\, (0 \,\square\, 1) = 3 \,\Delta\, 3 = (3+3) + 1 = 7.$

Portanto, $0 \,\square\, 3 = 7$.

c) Calcule $2 \,\square\, 3$.

Resp.: Inicialmente calculamos

$$2 \,\square\, 3 = 3 \,\square\, 2 = 3 \,\square\, (0 \,\Delta\, 1) = (3 \,\square\, 0) \,\Delta\, (3 \,\square\, 1) = 7 \,\Delta\, (3 \,\square\, 1)$$

Para continuar, é necessário calcular $(3 \,\square\, 1)$, o que fazemos a seguir;

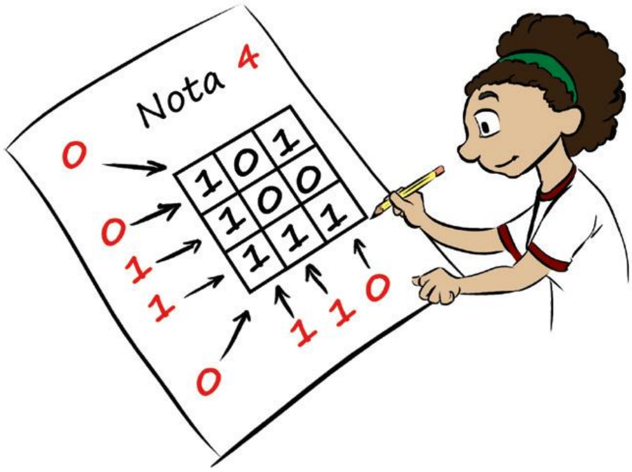
$$(3 \,\square\, 1) = 3 \,\square\, (0 \,\Delta\, 0) = (3 \,\square\, 0) \,\Delta\, (3 \,\square\, 0) = 7 \,\Delta\, 7 = (7 + 7) + 1 = 15$$

Finalmente, temos

$$2 \,\square\, 3 = 7 \,\Delta\, (3 \,\square\, 1) = 7 \,\Delta\, 15 \; (7 + 15) + 1 = 23.$$

3. Helena brinca com tabuleiros 3×3, preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

- ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar;
- em seguida, ela calcula a *nota* do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu.



Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 4.

a) Qual é a nota do tabuleiro abaixo?

1			
1	0	0	1
1	1	1	1
0	0	0	0
	1	1	0

Resp.: No tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. A nota do mesmo é 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 5.

b) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.

Resp.: Abaixo temos 4 tabuleiros com nota 8

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	1	0
1	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

É possível mostrar que estes são os únicos tabuleiros como nota 8; deixamos isso como exercício.

c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

Resp.: Ao trocar o número de um dos cantos do tabuleiro, soma-se 1 (caso a troca tenha sido de 0 para 1) ou subtrai-se 1 (caso a troca tenha sido de 1 para 0) aos totais de linha, da coluna e da diagonal que se encontram nesse canto. Assim, das oito somas (três linhas, três colunas e duas diagonais), três trocam de paridade e as outras não mudam. Observamos agora que:

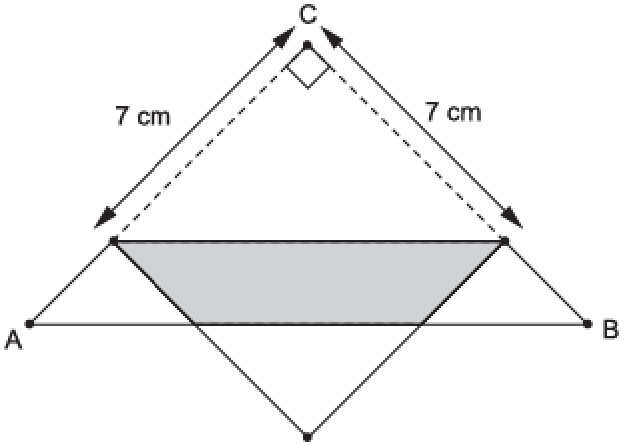
- se essas três somas são ímpares, após a troca a nota diminuirá de 3;
- se duas dessas somas são pares e uma é ímpar, após a troca a nota aumentará de 1;
- se duas dessas somas são ímpares e uma é par, após a troca a nota diminuirá de 1;
- se essas três somas são pares, após a troca a nota aumentará de 3.

Em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3.

d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

Resp.: Para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ possibilidades. O item anterior mostra que, uma vez essas casas preenchidas, há apenas uma maneira de preencher a casa do canto superior direito de modo que a nota desse tabuleiro seja ímpar, e concluímos que o número de tabuleiros de nota ímpar é 256.
Alternativamente, podemos concluir do item anterior que se um tabuleiro tem nota par (ou ímpar), ao trocar o algarismo da casa do canto superior direito teremos um tabuleiro de nota ímpar (ou par). Isso mostra que a cada tabuleiro de nota par corresponde um de nota ímpar e vice-versa, ou seja, o número de tabuleiros de nota ímpar (ou par) é a metade do número total de tabuleiros, que é $\frac{2^9}{2} = 2^8$.

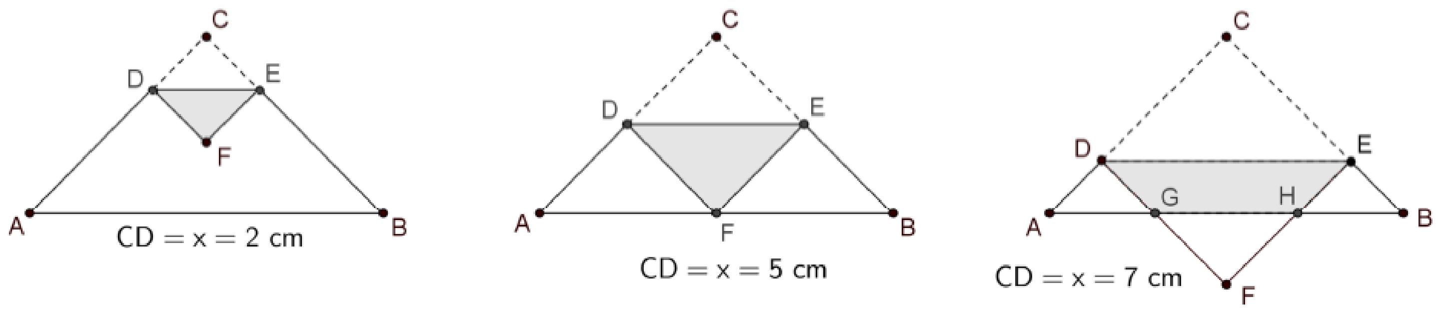
4. A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm^2, da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm^2, é $f(7)$.



a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.

Resp.: Para simplificar a exposição, vamos indicar a área de uma figura colocando seu nome entre parênteses; por exemplo, (*ABC*) denota a área do triângulo *ABC* (em cm^2).

A figura abaixo ilustra $x = 2$, $x = 5$ e $x = 7$; nelas F representa a posição de *C* após a dobra.



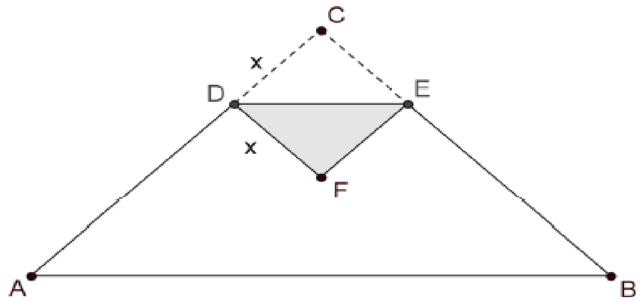
Como o triângulo *ABC* é retângulo em *C* e a dobra é paralela ao lado *AB*, segue que *CDFE* é um quadrado de lado *CD* = x cm; a área do triângulo *DEF* é metade da área do quadrado de lado *CDFE*. Temos (*CDFE*) = x^2 e então (*DEF*) = $\frac{x^2}{2}$.

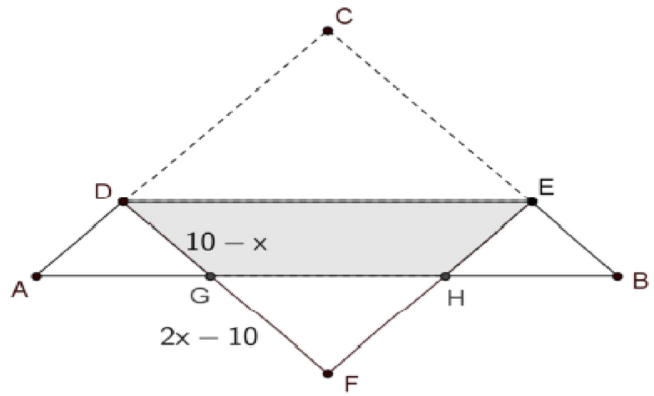
Para $x = 2$ o triângulo *DEF* representa a região de sobreposição, logo, $f(2) = \frac{2^2}{2} = 2$; analogamente, temos $f(5) = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}$.

No caso $x = 7$, a área de sobreposição, representada pelo trapézio $DEHG$, é igual a $(DEF) - (GHF)$. O triângulo ADG é isósceles com $AD = DG = 3$ cm; como $DF = 7$ temos $GF = 4$. Logo $(DEHG) = (DEF) - (GHF) = \frac{7^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \frac{33}{2}$ cm^2, ou seja, $f(7) = \frac{33}{2}$.

b) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.

Resp.: A figura abaixo, à esquerda, ilustra a região de sobreposição para $0 < x \leq 5$; à direita temos a região de sobreposição para $5 < x < 10$.



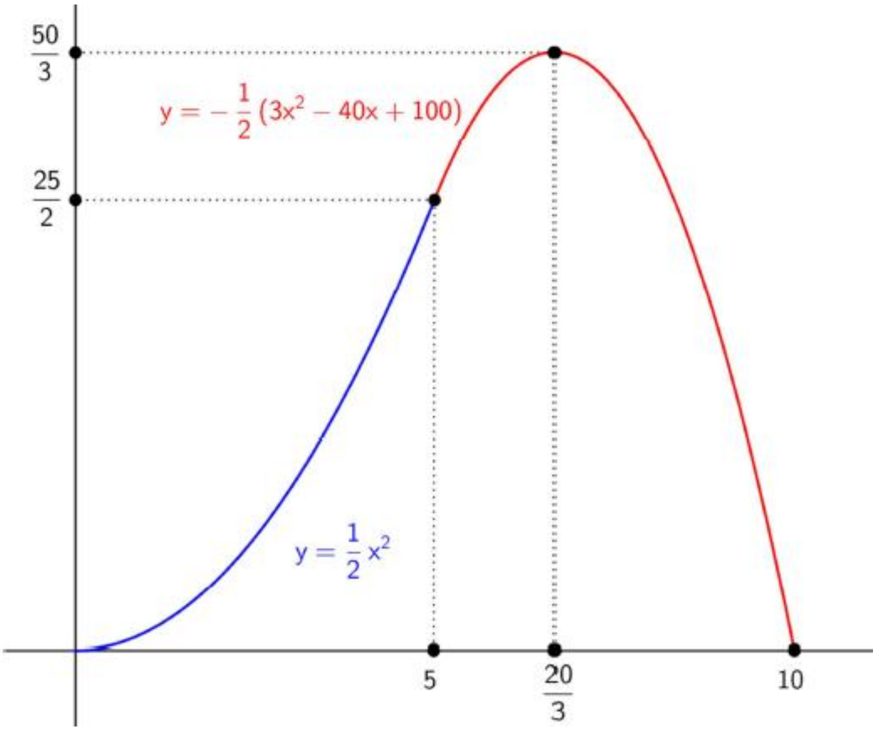


No primeiro caso, $CDFE$ é um quadrado de lado x e a área de DEF é metade da área desse quadrado, ou seja, $f(x) = \frac{x^2}{2}$. No segundo caso, o triângulo ADG é isósceles com $AD = DG = 10 - x$; logo $GF = DF - DG = x - (10 - x) = 2x - 10$ e temos

$$f(x) = (DEHG) = (DEF) - (GHF) = \frac{x^2}{2} - \frac{(2x-10)^2}{2} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 40x - 100).$$

Pode-se também calcular $(DEGH) = (ABC) - (DEC) - (ADG) - (EBH) = (ABC) - (DEC) - 2(ADG)$; deixamos esse cálculo para o(a) leitor(a).

c) Faça o gráfico de $f(x)$ em função de x.

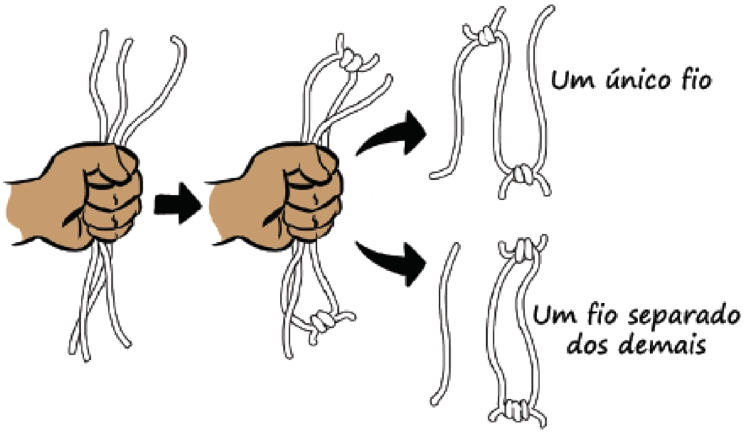


d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

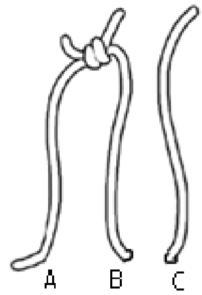
Resp.: Observamos primeiro que $-\frac{1}{2}(3x^2 - 40x + 100) = -\frac{1}{2}(3x - 10)(x - 10)$; essa fatoração pode ser obtida a partir das raízes de $3x^2 - 40x + 100$, que são $\frac{10}{3}$ e 10.

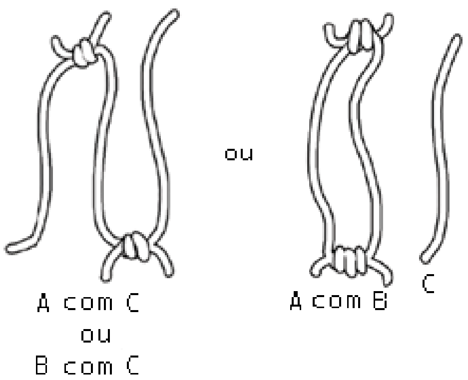
Quando $0 < x \leq 5$ o maior valor de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ é $f(5) = \frac{25}{2}$. Por outro lado, quando $5 < x < 10$ o maior valor de $f(x) = -\frac{1}{2}(3x - 10)(x - 10)$ é atingido no vértice da parábola, cuja abscissa é o ponto médio das raízes, ou seja, é $\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} + 10\right) = \frac{20}{3}$; temos $f\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{50}{3}$. Como $f(5) = \frac{25}{2} < \frac{50}{3} = f\left(\frac{20}{3}\right)$, o maior valor possível da área de sobreposição é $\frac{50}{3}$.

5. Homero segura um número ímpar de barbantes idênticos e pede para Sofia amarrar pares de pontas ao acaso, de cada lado de sua mão, até que sobre somente uma ponta de cada lado. A figura ilustra o procedimento para três barbantes.



a) Com três barbantes, qual é a probabilidade de que todos os barbantes fiquem em um único fio?





Resp.: Após amarrar dois barbantes do lado de cima da mão, temos a situação da figura à direita. Os possíveis resultados após amarrar duas pontas do outro lado da mão são mostrados na figura à esquerda. Temos 2 possibilidades para o caso da esquerda (barbantes unidos em um único fio) e 1 possibilidade para o caso da direita, num total de $2 + 1 = 3$. Assim, a probabilidade de formar um único fio é $\frac{2}{3}$.

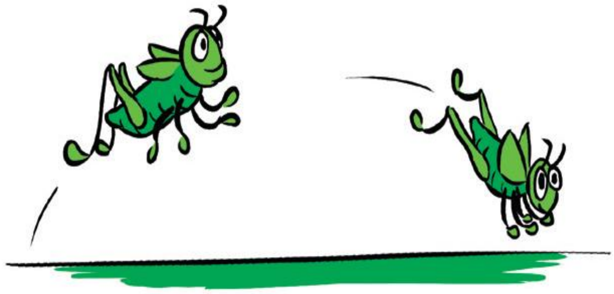
Podemos expressar esse raciocínio dizendo que, uma vez dado um nó do lado de cima da mão, a ponta solta em cima tem 3 escolhas: ficar sozinha ou unir-se a uma das outras duas. Em 2 dessas escolhas (unir-se a uma das outras duas) é formado um único fio, ou seja, a probabilidade de formar um único fio é $\frac{2}{3}$.

b) Com cinco barbantes, qual é a probabilidade de que um dos pedaços originais de barbante fique separado dos demais?

Resp.: Como na 2.ª solução do item (a), vamos supor que as pontas dos barbantes do lado de cima da mão sejam rotulados com as letras A, B, C, D e E e as pontas correspondentes do outro lado com A', B', C', D' e E'. Para dar os nós em cima da mão, basta escolher a ponta que vai ficar solta (5 possibilidades) e amarrar as quatro duas a duas (3 possibilidades; por exemplo, se A ficou solta, as possibilidades são (BC, DE), (BD, CE) e (BE, CD). O mesmo ocorre do outro lado da mão, e segue que temos $(5 \times 3)^2$ possibilidades para dar nós de ambos os lados da mão. Haverá um barbante isolado quando a ponta solta do lado de baixo for a ponta correspondente á ponta solta do lado de cima; isso ocorre uma vez a cada escolha de como amarrar os barbantes na parte de cima, num total de $(5 \times 3) \times 3$ (5×3 escolhas da ponta solta na parte de baixo, uma para cada possibilidade de dar nós na parte de cima, e 3 escolhas de como amarrar as outras quatro pontas). Logo, a probabilidade de que um dos pedaços originais de barbante fique separado dos demais é $\frac{(5\times3)\times3}{(5\times3)^2} = \frac{1}{5}$.

c) Com cinco barbantes, qual a probabilidade de que os barbantes fiquem unidos em um único fio?

Resp.: Supomos aqui também que as pontas dos barbantes do lado de cima da mão sejam rotuladas com as letras A, B, C, D e E e as pontas correspondentes do outro lado com A', B', C', D' e E'. Já vimos que o número de maneiras de dar dois nós de ambos os lados da mão é $(5 \times 3)^2$. Para cada maneira de amarrar os barbantes na parte de cima (5×3 possibilidades), haverá um único fio quando a ponta da parte de baixo correspondente à ponta solta em cima for unida a uma das outras quatro (4 possibilidades) e, depois disso, a outra ponta (em baixo) do barbante de três fios assim formado for unida a uma das restantes (2 possibilidades). Logo a probabilidade de os barbantes formarem um único fio é $\frac{(5\times3)\times4\times2}{(5\times3)^2} = \frac{8}{15}$.



6. Dois grilos, Adonis e Basílio, pulam sempre para a frente; Adonis só dá pulos de 1 cm ou 8 cm e Basílio só dá pulos de 1 cm ou 7 cm. Eles percorrem qualquer distância com o menor número de pulos possível. Por exemplo, Adonis percorre 16 cm com apenas dois pulos de 8 cm cada, enquanto Basílio precisa de quatro pulos, sendo dois de 7 cm e outros dois de 1 cm. Por outro lado, para percorrer 15 cm, Adonis precisa de oito pulos, sendo um de 8 cm e sete de 1 cm, enquanto Basílio precisa de apenas três pulos, sendo dois de 7 cm e um de 1 cm.

Indicando por $\mathrm{A}(d)$ e $\mathrm{B}(d)$, respectivamente, o número de pulos que Adonis e Basílio dão para percorre d centímetros, temos $\mathrm{A}(15) = 8$, $\mathrm{B}(15) = 3$, $\mathrm{A}(16) = 2$ e $\mathrm{B}(16) = 4$.

a) Complete a tabela abaixo.

d: distância em cm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathrm{A}(d)$: número de pulos de Adonis	1														8	2
$\mathrm{B}(d)$: número de pulos de Basílio	1														3	4

Resp.: Seja n a distância a ser percorrida por Adonis e Basílio. O algoritmo da divisão de Euclides nos permite escrever $n = 8\mathrm{a} + \mathrm{r} = 7\mathrm{b} + \mathrm{s}$ onde $0 \leq \mathrm{r} \leq 7$ e $0 \leq \mathrm{s} \leq 6$; segue que $\mathrm{A}(n) = \mathrm{a} + \mathrm{r}$ e $\mathrm{B}(n) = \mathrm{b} + \mathrm{s}$. por exemplo, $14 = 8 \times 1 + 6 = 7 \times 2 + 0$, donde $\mathrm{A}(14) = 1 + 6 = 7$ e $\mathrm{B}(14) = 2 + 0 = 2$. O restante da tabela pode ser preenchido analogamente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathrm{A}(n)$	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	2
$\mathrm{B}(n)$	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4

b) Encontre um número d entre 200 e 240 tal que $B(d) < A(d)$ (isto é, encontre uma distância entre 200 cm e 240 cm tal que, para percorrê-la, Basílio dá menos pulos do que Adonis).

Resp.: Para achar um desses números, basta fazer uma tabela como a do item anterior para valores de n entre 200 e 240.

n	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213
$A(n)$	25	26	27	28	29	30	31	32	26	27	28	29	30	31
$B(n)$:	32	33	34	29	30	31	32	33	34	35	30	31	32	33

n	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227
$A(n)$	32	33	27	28	29	30	31	32	33	34	28	29	30	31
$B(n)$:	34	35	36	31	32	33	34	35	36	37	32	33	34	35

n	228	229	230	**231**	232	233	234	235	236	237	**238**	**239**	240
$A(n)$	32	33	34	**35**	29	30	31	32	33	34	**35**	**36**	30
$B(n)$:	36	37	38	**33**	34	35	36	37	38	39	**34**	**35**	36

Essa tabela mostra que 231, 238 e 239 são os valores de n entre 200 e 240 tais que $A(n) > B(n)$. Observamos que a feitura dessa tabela não é tão trabalhosa como parece, pois o padrão dos valores de $A(n)$ e $B(n)$ é claro; por exemplo, basta calcular $A(n)$ para os múltiplos de 8 e a linha correspondente a $A(n)$ é preenchida como segue:

n	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$	$8(k+1)$
$A(n)$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	$k+5$	$k+6$	$k+7$	$k+1$

Observação análoga vale para a linha correspondente a $B(n)$.

c) Encontre o maior número d tal que $\mathrm{B}(d) = \mathrm{A}(d)$.

Resp.: Das expressões $n = 8\mathrm{a} + \mathrm{r} = 7\mathrm{b} + \mathrm{s}$ temos $\mathrm{A}(n) = \mathrm{a} + \mathrm{r} = \frac{n-\mathrm{r}}{8} + \mathrm{r} = \frac{n+7\mathrm{r}}{8}$ e $\mathrm{B}(n) = \mathrm{b} + \mathrm{s} = \frac{n-\mathrm{s}}{7} + \mathrm{s} = \frac{n+6\mathrm{s}}{7}$. Desse modo, $\mathrm{A}(n) = \mathrm{B}(n)$ se escreve como $\frac{n+7\mathrm{r}}{8} = \frac{n+6\mathrm{s}}{7}$; simplificando essa expressão chegamos a $n = 49\mathrm{r} - 48\mathrm{s}$. O maior valor possível para $49\mathrm{r} - 48\mathrm{s}$ é obtido colocando $\mathrm{r} = 7$ e $\mathrm{s} = 0$, ou seja, o número procurado é $d = 49 \times 7 = 343$.

Fica como exercício para o(a) leitor(a) mostrar que $\mathrm{A}(n) < \mathrm{B}(n)$ para $n > 343$.