Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para Problemas Elípticos Semilineares

por

Franciery Chaves Silva [†]

sob orientação do

Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586e Silva, Franciery Chaves.

Existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos semilineares / Franciery Chaves Silva. – Campina Grande, 2017.

110 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro".

Referências.

1. Equação Elíptica Semilinear. 2. Sistema Elíptico Semilinear. 3. Métodos Variacionais. 4. Não Linearidade do Tipo Côncava e Convexa. I. Barreiro, José Lindomberg Possiano. II. Título.

CDU 517.956.2(043)

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para Problemas Elípticos Semilineares

por

Franciery Chaves Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB

Marcelo Carvalho Ferreira

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG

José Lindomberg P. Barreiro

Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2017

Dedicatória

Aos meus pais, Francisco Amaro e Raimunda Chaves.

Agradecimentos

Quero expressar meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em especial, à Deus, pelo dom da vida e por estar comigo em todos os momentos.

Aos meus pais, Francisco Amaro e Raimunda Chaves, por todo amor, carinho, confiança, atenção, dedicação e ensinamentos; esses foram essenciais para a concretização desse sonho.

Aos meus irmãos, Franciany Chaves e Francismael Chaves, e a minha tia, Terezinha Chaves, por todo amor, apoio, carinho e incentivo.

Aos meus sobrinhos, Mariany Stefane, Gabriel, Diogo e Wilian Davi, por todo amor e carinho.

Ao meu cunhado, Lindomar Silva, por todo apoio, carinho, atenção e incentivo.

Aos demais familiares por estarem presentes em todos os momentos da minha vida.

À minha melhor amiga, Gisane Fagundes, a qual foi uma das grandes responsáveis para a concretização dessa conquista.

À Eulalia Lucena, por toda atenção e carinho prestados nesse período que estive em Campina Grande.

Aos meus professores da Universidade Regional do Cariri, em particular a Ricardo Rodrigues de Carvalho e a Flávio França Cruz, por todo apoio, incentivo e pela oportunidade de ter sido bolsista.

Aos meus amigos da Universidade Regional do Cariri, em particular a Alancoc, Danilo e Keyson, por todo apoio, incentivo e todos os momentos de estudo.

Ao professor José Lindomberg, pela orientação, atenção, incentivo e confiança.

Aos meus professores da Universidade Federal de Campina Grande, em particular ao professor Marcelo Carvalho, por todo apoio, dedicação e paciência.

Aos meus amigos da Universidade Federal de Campina Grande, em particular a André Felipe, Arthur, Bruna, Camila, Daniela, Felipe, Geovany, Ismael, Laise, Lucas, Lucas Siebra, Marinho, Matheus, Otacilia, Thiago Felipe e Wellier, pelo apoio, incentivo, companhia, momentos de estudo e inúmeras risadas compartilhadas.

Aos membros da banca, por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora.

Aos funcionários da UAMat da Universidade Federal de Campina Grande, pela companhia e amizade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista.”

Bill Gates

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para os seguintes problemas:

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_λ}$$

onde $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, para $N \geq 3$, e as funções f e h satisfazem algumas condições, e

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(z)|u|^{p-2}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \text{ em } \Omega \\ -\Delta v = \mu h(z)|v|^{p-2}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \text{ em } \Omega \\ u = v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$E_{\lambda,\mu}$}$$

onde $\alpha > 1$, $\beta > 1$ e $2 < p < \alpha + \beta = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N > 4$, $\lambda, \mu > 0$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f, g, h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfazem algumas condições. Entre as principais ferramentas utilizadas estão o Princípio Variacional de Ekeland, Lema de Pierre-Louis Lions, Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e propriedades envolvendo Variedade de Nehari.

Palavras-chave: Equação Elíptica Semilinear, Sistema Elíptico Semilinear, Métodos Variacionais, Não Linearidade do Tipo Côncava e Convexa.

Abstract

In this dissertation, we present results of existence and multiplicity of positive solutions for the following problems:

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}, \text{ in } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_λ}$$

where $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ for $N \geq 3$ and the functions f and g satisfy some conditions, and

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(z)|u|^{p-2}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \text{ in } \Omega \\ -\Delta v = \mu h(z)|v|^{p-2}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \text{ in } \Omega \\ u = v = 0, \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$E_{\lambda,\mu}$}$$

where $\alpha > 1$, $\beta > 1$ and $2 < p < \alpha + \beta = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N > 4$, $\lambda, \mu > 0$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and $f, g, h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfy some conditions. Among the main tools used are the Ekeland's Variational Principle, Pierre-Louis Lions Lemma, Lagrange Multipliers Theorem and properties involving Nehari Manifold.

Keywords: Semilinear Elliptic Equations, Semilinear Elliptic Systems, Nehari Manifold, Concave and Convex Type Nonlinearity.

Sumário

Lista de Notações

u_+	$max\{u,0\} \geq 0$, chamada de parte positiva de u.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto de dualidade.
$supp(u)$	Suporte da função u.
$B_r^N(x)$	Bola aberta de centro $x \in \mathbb{R}^N$ e raio $r > 0$.
A^c	Complementar do conjunto A.
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_\Omega \|u\|^p dz < \infty$, $1 \leq p < \infty$.
$L^p_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_K \|u\|^p dz < \infty$, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, $1 \leq p < \infty$.
$H^1(\mathbb{R}^N)$	Espaço de Sobolev das funções em $L^2(\mathbb{R}^N)$ cujas derivadas fracas de primeira ordem estão em $L^2(\mathbb{R}^N)$.
$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$	Espaço das funções $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tais que $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
$H^{-1}(\mathbb{R}^N)$	Espaço dual de $H^1(\mathbb{R}^N)$.
H	$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
H^{-1}	Espaço dual de H.
C^k	Conjunto das funções k vezes continuamente diferenciáveis.
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega)$ tais que $supp(u) \subset\subset \Omega$.
$o_n(1)$	Sequência de números reais convergindo para 0 quando $n \to \infty$.
$o_\varepsilon(1)$	Sequência de números reais convergindo para 0 quando $\varepsilon \to \infty$.
$f(x) = O(\varepsilon^{N-2})$	Se $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \left\| \frac{f(x)}{\varepsilon^{N-2}} \right\| \leq C$, para algum $C \geq 0$.
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Denota o gradiente da função u.
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Denota o laplaciano de u.
$\|\|.\|\|$	Norma no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$.
$\|\|.\|\|_H$	Norma no espaço H.
$\|\|.\|\|_\#$	Norma no espaço $L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N)$.
$\|\|.\|\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$	Norma no espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$.
$\|\|.\|\|_\infty$	Norma no espaço $L^\infty(\Omega)$.
$\to, \rightharpoonup$	Convergência forte e fraca, respectivamente.

$\nrightarrow$	Não converge forte.
$\hookrightarrow$	Indica a imersão.
$2^* = \frac{2N}{N-2}$	Expoente crítico de Sobolev, $N \geq 3$.
(PS)	Palais-Smale.
$(PS)_c$	Sequência de Palais-Smale no nível c.
$q.s.$	Quase sempre, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula.
$\lvert\Omega\rvert$	Medida de Lebesgue do conjunto Ω.
$\blacksquare$	Fim de uma demonstração.

Introdução

Nesta dissertação, apresentamos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte equação elíptica semilinear envolvendo não-linearidade côncava e convexa

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \qquad (E_\lambda)$$

onde $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, para $N \geq 3$, e as funções f e h satisfazem as seguintes hipóteses:

(f_1) f é uma função contínua positiva em $\mathbb{R}^N$ e $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = f_\infty > 0$.

(f_2) existem k pontos $a^1, a^2, \ldots, a^k$ em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$f(a^i) = f_{max} = \max_{z\in\mathbb{R}^N} f(z), \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

e $f_\infty < f_{max}$.

(h_1) $h \in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $h > 0$.

Estudamos também a existência e multiplicidade de soluções positivas para o seguinte sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(z)|u|^{p-2}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \text{ em } \Omega \\ -\Delta v = \mu h(z)|v|^{p-2}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \text{ em } \Omega \\ u = v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (E_{\lambda,\mu})$$

onde $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $2 < p < \alpha + \beta = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N > 4$, $\lambda, \mu > 0$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f, g, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) f, g e h são funções contínuas e positivas em $\overline{\Omega}$.

(A2) existem k pontos $a^1, a^2, \ldots, a^k$ em Ω tais que

$$f(a^i) = \max_{z\in\Omega} f(z) = 1, \;\; 1 \le i \le k,$$

e para alguma $\sigma > N$,

$$f(z) - f(a^i) = o(|z-a^i|^{\sigma})$$

quando $z \to a^i$ uniformemente em i.

Para abordar tais problemas utilizamos o Método Variacional. Grosso modo, tal método consiste em encontrar pontos críticos do funcional associado ao problema em estudo. A multiplicidade de soluções para tais problemas está relacionada ao número de máximos isolados que a função f possui. De uma maneira geral, introduzimos uma função baricentro e, a partir dela, construímos vizinhanças na Variedade de Nehari associada ao funcional. Em seguida, em cada vizinhança, construímos sequências Palais-Smale para as quais vale a condição de Palais-Smale para o funcional associado, mostrando, assim, a existência de múltiplas soluções positivas.

Esta dissertação está dividida em dois capítulos e três apêndices organizados da seguinte maneira: no Capítulo 1, baseado no artigo de Lin [25], buscamos $k+1$ soluções positivas para o problema (E_λ). À princípio, faremos uma mudança de variável na equação (E_λ), a qual é transformada em

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\varepsilon z)u^{p-1} + \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)u^{q-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_ε}$$

onde $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ e $u(z) = \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} v(\varepsilon z)$. Depois, dedicamos ao estudo do funcional associado ao problema (E_ε) e a variedade de Nehari M_ε, a qual dividimos em duas partes M_ε^+ e M_ε^-. Em seguida, provamos a existência de uma solução positiva $u_0 \in M_\varepsilon^+$ para (E_ε). Finalmente, mostramos que a condição (f_2) garante a existência de k soluções positivas para (E_ε), isto é, existem, pelo menos, k pontos críticos $u_1, u_2, \ldots, u_k \in M_\varepsilon^-$ de J_ε tais que $J_\varepsilon(u_i) = \beta_\varepsilon^i$, para $1 \le i \le k$.

No Capítulo 2, baseado também no artigo de Lin [24], buscamos k soluções positivas para o sistema $(E_{\lambda,\mu})$. Primeiramente, estudamos a variedade de Nehari $M_{\lambda,\mu}$. Em seguida, provamos a existência de uma solução positiva $(u_0, v_0) \in M_{\lambda,\mu}$ de $(E_{\lambda,\mu})$. Por fim, mostramos que a condição (A2) garante a existência de k soluções positivas para $(E_{\lambda,\mu})$, isto é, existem, no mínimo, k pontos críticos $(u_i, v_i) \in M_{\lambda,\mu}$ de $J_{\lambda,\mu}$ tais que $J_{\lambda,\mu}(u_i, v_i) = \beta^i_{\lambda,\mu}$ para $1 \leq i \leq k$.

No Apêndice A, definimos à derivada de Fréchet, à derivada de Gateaux e mostramos que os funcionais associados aos problemas (E_ε) e $(E_{\lambda,\mu})$ são de classe C^1.

No Apêndice B, mostraremos que dois valores Palais-Smale em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para um funcional são iguais.

Por fim, no Apêndice C, traremos os principais resultados utilizados no decorrer da nossa dissertação.

Capítulo 1

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para uma Equação Elíptica Semilinear Envolvendo não Linearidade Côncava e Convexa

O objetivo deste capítulo é estudar a existência e multiplicidade de solução não negativa para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_λ}$$

onde $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, para $N \geq 3$, e as funções f e h satisfazem algumas condições. Este tipo de não linearidade caracteriza o Problema (E_λ) como do tipo côncava e convexa.

Problemas elípticos semilineares envolvendo não linearidade côncava e convexa em um domínio limitado vem sendo estudado intensamente na literatura. Em 1994, Ambrosetti-Brezis-Cerami [3] mostraram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = c|u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u, \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq q < 2 < p < 2^*$, tem, no mínimo, duas soluções positivas para $c > 0$ suficientemente pequeno. Resultados mais gerais do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = ch(z)|u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u, \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq q < 2 < p < 2^*$, foram feitas por Ambrosetti-Garcia-Peral em 1996 [4], Brown-Zhang [12] e de Figueiredo-Gosses-Ubilla [14], ambos em 2003.

Mais tarde, em 2006, Wu [31], utilizando a variedade de Nehari, provou que existem, pelo menos, duas soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda f(x) u^q, \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $0 \leq q < 1 < p < 2^*$, $\lambda > 0$ e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que muda de sinal em $\overline{\Omega}$.

Neste capítulo, trataremos da existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema (E_λ) em $\mathbb{R}^N$. Para o caso $q = \lambda = 1$ e $f \equiv 1$, Zhu [32] mostrou que o problema (E_λ) admite, pelo menos, duas soluções positivas em $\mathbb{R}^N$, onde a função h é não negativa, suficientemente pequena e tem decaimento exponencial. Sem a condição do decaimento exponencial, Cao-Zhou [13] e Hirano [19] provaram que o problema (E_λ) admite, pelo menos, duas soluções positivas em $\mathbb{R}^N$. Mudando a condição sobre a $f(z)$, Adachi-Tanaka [1], usando a ideia de categoria e o argumento minimax de Bahri-li's, afirmaram que o problema (E_λ) admite, no mínimo, quatro soluções positivas em $\mathbb{R}^N$, onde $f(z) \geq 1 - cexp(-(2+\delta)|z|)$, para algum c, $\delta > 0$ e $\|h\|_{H^{-1}} > 0$ suficientemente pequeno. Hsu-Lin em [20] estudaram que há, ao menos, quatro soluções positivas do caso geral

$$-\Delta u + u = f(z) u^{p-1} + \lambda h(z) u^{q-1} \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

1.1 O Funcional Energia Associado ao Problema e a Variedade de Nehari

Inicial, faremos uma mudança de variável na equação do problema (E_λ).

Lema 1.1 *Sejam $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ e $u(z) = \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} v(\varepsilon z)$. Então o problema (E_λ) é transformado em*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\varepsilon z) u^{p-1} + \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z) u^{q-1}, \ \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{E_ε}$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ e $u(z) = \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} v(\varepsilon z)$, então

$$\varepsilon^{-2} = \lambda \quad e \quad u(z)\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}} = v(\varepsilon z).$$

Assim, via mudança de variável, temos que a equação

$$-\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1},$$

isto é,

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial z_i^2} + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}$$

é equivalente a

$$-\varepsilon^{-2}\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} + \varepsilon^{-2}\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}} u = f(\varepsilon z)\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}} u^{p-1} + h(\varepsilon z)\varepsilon^{-\frac{2(q-1)}{p-2}} u^{q-1}.$$

Logo,

$$-\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}} \Delta u + \varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}} u = f(\varepsilon z)\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}} u^{p-1} + h(\varepsilon z)\varepsilon^{-\frac{2(q-1)}{p-2}} u^{q-1}. \tag{1.1}$$

Dividindo (1.1) por $\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}}$, temos

$$-\Delta u + u = f(\varepsilon z)u^{p-1} + \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)u^{q-1}.$$

Portanto, o problema (E_λ) é transformado em

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\varepsilon z)u^{p-1} + \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)u^{q-1}, \ \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

■

Considere o problema elíptico semilinear (E_ε), com $1 \leq q < 2 < p < 2^*$, para $N \geq 3$, onde f e h satisfazem as seguintes condições:

(f_1) f é uma função contínua positiva em $\mathbb{R}^N$ e $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = f_\infty > 0$.

(f_2) existem k pontos $a^1, a^2, \ldots, a^k$ em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$f(a^i) = f_{max} = \max_{z\in\mathbb{R}^N} f(z), \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

e $f_\infty < f_{max}$.

(h_1) $h \in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $h > 0$.

Associado ao problema (E_ε), temos o funcional energia $J_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz,$$

onde

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dz$$

é a norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

O funcional $J_\varepsilon \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ (Veja Apêndice A) com

$$\left\langle J'_\varepsilon(u), v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dz + \int_{\mathbb{R}^N} uv dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2} uv dz - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^{q-2} uv dz,$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.2 *Uma solução fraca para (E_ε) é uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dz + \int_{\mathbb{R}^N} uv dz = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2} uv dz + \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^{q-2} uv dz,$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Observação 1.3 *Uma solução fraca para (E_ε) é precisamente ponto crítico do funcional J_ε e reciprocamente.*

Seja

$$S = \sup_{u \in H^1(\mathbb{R}^N):\ \|u\|=1} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

a melhor constante de Sobolev para a imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, isto é, a menor constante positiva tal que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq S\|u\|, \tag{1.2}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$.

Para a equação elíptica semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\varepsilon z) u^{p-1}, \ \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_0}$$

definimos o funcional energia $I_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathrm{R}$ pondo

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz.$$

Como feito anteriormente, $I_\varepsilon \in C^1$ com

$$\langle I'_\varepsilon(u), u\rangle = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz.$$

Defina

$$\gamma_\varepsilon = \inf_{u\in N_\varepsilon} I_\varepsilon(u),$$

onde

$$N_\varepsilon = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_\varepsilon(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Note que:

$i)$ Se $f \equiv f_\infty$, definimos

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_\infty|u|^p dz,$$

com

$$\langle I'_\infty(u), u\rangle = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty|u|^p dz.$$

Temos, também,

$$\gamma_\infty = \inf_{u\in N_\infty} I_\infty(u),$$

onde

$$N_\infty = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_\infty(u), u\rangle = 0\right\}.$$

$ii)$ Se $f \equiv f_{max} > 0$, definimos

$$I_{max}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max}|u|^p dz,$$

com

$$\langle I'_{max}(u), u\rangle = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f_{max}|u|^p dz.$$

Temos, também,

$$\gamma_{max} = \inf_{u\in N_{max}} I_{max}(u),$$

onde

$$N_{max} = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_{max}(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Agora, definiremos as sequências de Palais-Smale (denotada por (PS)), valor Palais-Smale e a condição Palais-Smale em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para um funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, que serão úteis nas demonstrações seguintes.

Definição 1.4 *Para $\beta \in \mathbb{R}$, dizemos que:*

i) a sequência $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_\beta$ para J se

$$\begin{cases} J(u_n) = \beta + o_n(1), \\ J'(u_n) = o_n(1), \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

ii) β é um valor (PS) para J se existe uma sequência $(PS)_\beta$ para J.

iii) J satisfaz a condição $(PS)_\beta$ se toda sequência $(PS)_\beta$ para J possui uma subsequência convergente.

Pelo Corolário $B.8$, Apêndice B, temos

$$\gamma_{max} = \frac{p-2}{2p}\left(f_{max}S^p\right)^{-\frac{2}{p-2}} > 0. \tag{1.3}$$

Observe que J_ε não é limitado inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois para cada $u > 0$, temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(tu) &= \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &\leq \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz, \end{aligned}$$

donde

$$J_\varepsilon(tu) \to -\infty,$$

quando $t \to \infty$, uma vez que $p > 2$. Dessa forma, nenhuma minimização é possível em todo o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. O primeiro passo consiste em livrar-se dessa ilimitação, para isso restringiremos J_ε a um conjunto adequado onde ele torna-se limitado inferiormente.

Definição 1.5 *Suponha que $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ com $\varphi'(0) = 0$. Uma condição necessária para que $u \in X$ seja um ponto crítico de φ é que $\langle \varphi'(u), u\rangle = 0$. Esta condição define a Variedade de Nehari*

$$N := \left\{u \in X : \langle \varphi'(u), u\rangle = 0, u \neq 0\right\}.$$

Consideremos a Variedade de Nehari para o funcional J_ε

$$M_\varepsilon = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \left\langle J'_\varepsilon(u), u\right\rangle = 0\right\}, \tag{1.4}$$

onde

$$\langle J'_\varepsilon(u),u\rangle = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Lema 1.6 *O funcional energia J_ε é coercivo e limitado inferiormente em M_ε.*

Demonstração. Se $u \in M_\varepsilon$, então $\langle J'_\varepsilon(u),u\rangle = 0$. Dessa forma,

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz + \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz. \tag{1.5}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p}\left[||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz\right] - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2), com expoentes conjugados $\frac{p}{p-q}$ e $\frac{p}{q}$, temos que

$$J_\varepsilon(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \|h\|_\# \|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

onde $\|h\|_\#$ é a norma em $L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N)$. Daí, pela Imersão de Sobolev (Teorema C.7),

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \|h\|_\# S^q \|u\|^q \\ &= \frac{p-2}{2p}||u||^2 - \frac{p-q}{pq}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \|h\|_\# S^q \|u\|^q \\ &= \frac{\|u\|^q}{p}\left[\frac{p-2}{2}\|u\|^{2-q} - \frac{p-q}{q}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \|h\|_\# S^q\right]. \end{aligned}$$

Logo, como $q < 2$, temos que J_ε é coercivo e limitado inferiormente em M_ε. ∎

Para cada $u \in M_\varepsilon$, defina

$$\psi_\varepsilon(u) = \left\langle J'_\varepsilon(u),u\right\rangle.$$

Cálculos diretos, resulta que

$$\left\langle \psi'_\varepsilon(u),u\right\rangle = 2\|u\|^2 - p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - q\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Para $u \in M_\varepsilon$, temos por (1.5)

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle &= 2\|u\|^2 - p\left[\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz\right] - q\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz - (p-2)\|u\|^2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Por outro lado, e também por (1.5), podemos escrever

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle &= 2\|u\|^2 - p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - q\left[\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz\right] \\ &= (2-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Agora, dividiremos M_ε em três partes, a saber,

$$M_\varepsilon^+ = \left\{u \in M_\varepsilon \colon \left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle > 0\right\};$$

$$M_\varepsilon^0 = \left\{u \in M_\varepsilon \colon \left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle = 0\right\};$$

$$M_\varepsilon^- = \left\{u \in M_\varepsilon \colon \left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle < 0\right\};$$

este método é devido a Tarantello (veja [28]).

Primeiramente, necessitaremos de alguns Lemas que são essenciais para a demonstração do Teorema 1.18.

Lema 1.7 *Seja* $\alpha = \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}$. *Suponha* (f_1), (f_2) *e* (h_1). *Se*

$$0 < \alpha < \alpha_0 = (p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \left[(p-q)S^2\right]^{\frac{q-p}{p-2}} \|h\|_{\#}^{-1}, \tag{1.9}$$

então $M_\varepsilon^0 = \emptyset$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $M_\varepsilon^0 \neq 0$. Seja $u \in M_\varepsilon^0$. Como $u \in M_\varepsilon^0$, temos por (1.7) e (1.8),

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \frac{p-q}{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz. \end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{p-q}{p}+\frac{q}{p}=1$, segue da Desigualdade de Hölder (Teorema C.2), que

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq \frac{p-q}{p-2}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h(\varepsilon z)|^{\frac{p}{p-q}}dz\right)^{\frac{p-q}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \\ &= \left(\frac{p-q}{p-2}\right)\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\|h\|_{\#}\|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

De (1.9), obtemos

$$\|u\|^2 \leq \frac{p-q}{p-2}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\|h\|_{\#}S^q\|u\|^q$$

implicando

$$\|u\|^{2-q} \leq \left(\frac{p-q}{p-2}\right)\alpha\|h\|_{\#}S^q,$$

e, daí,

$$\alpha \geq \frac{p-2}{(p-q)\|h\|_{\#}S^q}\|u\|^{2-q}. \tag{1.10}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N}f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &\leq \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N}f_{max}|u|^p dz \\ &= \frac{p-q}{2-q}f_{max}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

Novamente, por (1.9), temos

$$\|u\|^2 \leq \frac{p-q}{2-q}f_{max}S^p\|u\|^p$$

implicando

$$\|u\|^{2-p} \leq \frac{p-q}{2-q}f_{max}S^p$$

e, assim,

$$\|u\|^{p-2} \geq \frac{2-q}{p-q}(f_{max})^{-1}S^{-p},$$

ou seja,

$$\|u\| \geq \left(\frac{2-q}{p-q}(f_{max})^{-1}S^{-p}\right)^{\frac{1}{p-2}}. \tag{1.11}$$

Logo, combinando (1.10) e (1.11), temos

$$
\begin{aligned}
\alpha &\geq \frac{p-2}{(p-q)\,\|h\|_{\#}S^q}\left(\frac{2-q}{(p-q)f_{max}}S^{-p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\\
&= (p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\left[(p-q)S^2\right]^{\frac{q-p}{p-2}}\|h\|_{\#}^{-1} = \alpha_0,
\end{aligned}
$$

que é uma contradição, pois $0 < \alpha < \alpha_0$. ∎

O Lema seguinte mostra que minimizantes em M_ε são pontos críticos para J_ε.

Lema 1.8 *Suponha que u_0 é um minimizante local de J_ε em M_ε e $u_0 \notin M_\varepsilon^0$. Então, $J_\varepsilon'(u_0) = 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Se u_0 é um minimizante local para J_ε sobre M_ε, então u_0 é solução do seguinte problema de otimização: minimizar $J_\varepsilon(u)$ sujeito à restrição $\psi_\varepsilon(u) \neq 0$. Assim, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema C.10), existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $J_\varepsilon'(u_0) = \mu\psi_\varepsilon'(u_0)$. Logo,

$$
0 = \langle J_\varepsilon'(u_0), u_0\rangle = \mu\langle \psi_\varepsilon'(u_0), u_0\rangle,
$$

pois $u_0 \in M_\varepsilon$. Porém, como $u \notin M_\varepsilon^0$, temos $\langle \psi_\varepsilon'(u_0), u_0\rangle \neq 0$, o que implica $\mu = 0$. Portanto, $J_\varepsilon'(u_0) = 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. ∎

Lema 1.9 *Valem as seguintes desigualdades:*

i) $\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz > 0$, *para cada* $u \in M_\varepsilon^+$;

ii) $\|u\| < \left(\frac{p-q}{p-2}\alpha\|h\|_{\#}S^q\right)^{\frac{1}{2-q}}$, *para cada* $u \in M_\varepsilon^+$;

iii) $\|u\| > \left(\frac{2-q}{(p-q)(f_{max})S^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}$, *para cada* $u \in M_\varepsilon^-$;

iv) Se $0 < \alpha = \left(\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right) < \frac{q}{2}\alpha_0$, *então existe uma constante positiva* $d_0 = d_0(\alpha, p, q, S, \|h\|_{\#}, f_{max})$ *tal que* $J_\varepsilon(u) > d_0 > 0$, *para cada* $u \in M_\varepsilon^-$.

Demonstração. *i)* Por (1.7), temos

$$
(p-q)\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}h(\varepsilon z)|u|^q dz - (p-2)\|u\|^2 = \langle \psi_\varepsilon'(u), u\rangle,\ u \in M_\varepsilon.
$$

Para $u \in M_\varepsilon^+$, temos

$$
(p-q)\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}h(\varepsilon z)|u|^q dz - (p-2)\|u\|^2 > 0,
$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz > \frac{p-2}{p-q}\varepsilon^{\frac{2(q-p)}{p-2}} \|u\|^2 > 0. \tag{1.12}$$

ii) De (1.12),

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &< \frac{p-q}{p-2}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \frac{p-q}{p-2}\alpha \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz. \end{aligned}$$

Daí, como fora feito no Lema 1.7, temos

$$\|u\|^{2-q} < \frac{p-q}{p-2}\alpha \|h\|_{\#} S^q,$$

ou seja,

$$\|u\| < \left(\frac{p-q}{p-2}\alpha \|h\|_{\#} S^q\right)^{\frac{1}{2-q}}.$$

iii) Para cada $u \in M_\varepsilon^-$, segue de (1.8), que

$$0 > (2-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(\varepsilon z)|u|^p dz.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &< \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &\leq \frac{p-q}{2-q} f_{max} \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \left(\frac{p-q}{2-q}\right) f_{max} S^p \|u\|^p . \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u\|^{2-p} < \frac{p-q}{2-q} f_{max} S^p$$

o que implica

$$\|u\|^{p-2} > \frac{2-q}{(p-q) f_{max} S^p}$$

e, portanto,

$$\|u\| > \left(\frac{2-q}{(p-q) f_{max} S^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \text{ para } u \in M_\varepsilon^-.$$

iv) Para cada $u \in M_\varepsilon^- \subset M_\varepsilon$, de (1.6), da Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e juntamente com as Imersões de Sobolev (Teorema C.7),

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &\geq \frac{\|u\|^q}{p}\left[\frac{p-2}{2}\|u\|^{2-q}-\frac{p-q}{q}\alpha\|h\|_\# S^q\right]. \end{aligned}$$

Por (iii), segue que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &> \frac{1}{p}\left[\frac{2-q}{(p-q)f_{max}S^p}\right]^{\frac{q}{p-2}}\left[\frac{p-2}{2}\left(\frac{2-q}{(p-q)f_{max}S^p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}-\frac{p-q}{q}\alpha\|h\|_\# S^q\right] \\ &= \frac{(p-q)}{p}\left[\frac{2-q}{(p-q)f_{max}S^p}\right]^{\frac{q}{p-2}}\|h\|_\# S^q\left[\frac{p-2}{2}\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\frac{1}{\left((p-q)S^2\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\|h\|_\#}-\frac{\alpha}{q}\right] \\ &= \frac{1}{p}\left[\frac{2-q}{(p-q)f_{max}S^p}\right]^{\frac{q}{p-2}}(p-q)\|h\|_\# S^q\left[\frac{\alpha_0}{2}-\frac{\alpha}{q}\right]=d_0>0, \end{aligned}$$

pois $\alpha<\frac{q}{2}\alpha_0$. Portanto, para $0<\alpha<\frac{q}{2}\alpha_0$ e $u\in M_\varepsilon^-$, temos que $J_\varepsilon(u)>0$. ■

Definiremos agora uma função e mostraremos que tal função atinge um máximo. Essa informação será útil para a demonstração do Lema (1.11).

Lema 1.10 *Para cada $u\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ fixada, defina $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por*

$$k(t)=k_u(t)=t^{2-q}\|u\|^2-t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^N}f(\varepsilon z)|u|^p dz, \tag{1.13}$$

para $t\geq 0$. Então, $k(t)$ tem um único ponto crítico

$$\bar{t}=\bar{t}(u)=\left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N}f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{1}{p-2}}$$

que é um ponto de máximo global. Além disso,

$$k(\bar{t})\geq(p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}(p-q)^{\frac{q-p}{p-2}}S^{\frac{p(q-2)}{p-2}}\|u\|^q. \tag{1.14}$$

Demonstração. Note que $k(0)=0$. Como $p-q>2-q$, pois $1\leq q<2<p<2^*$, temos que $k(t)>0$ para $t\approx 0^+$ e $k(t)\to-\infty$ quando $t\to\infty$. Então, sendo $k(t)$ uma função contínua, temos que $k(t)$ atinge seu valor máximo em $t>0$. Derivando (1.13), obtemos

$$\begin{aligned} k'(t) &= (2-q)t^{2-q-1}\|u\|^2-(p-q)t^{p-q-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &= (2-q)t^{-(q+1)}t^2\|u\|^2-(p-q)t^{-(q+1)}t^p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &= (2-q)t^{-(q+1)}\|tu\|^2-(p-q)t^{-(q+1)}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|tu|^p dz \\ &= t^{-(q+1)}\left[(2-q)\|tu\|^2-(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|tu|^p dz\right], \end{aligned} \tag{1.15}$$

para $t>0$. Se $t_0>0$ é ponto crítico de $k(t)$, temos

$$0=k'(t_0)=(2-q)t_0^{1-q}\|u\|^2-(p-q)t_0^{p-q-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz,$$

como $t_0^{1-q}\neq 0$, obtemos

$$(2-q)\|u\|^2-(p-q)t_0^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz=0.$$

Daí,

$$t_0=\left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{1}{p-2}}=\bar{t}, \tag{1.16}$$

sendo $\bar{t}$ o único ponto crítico de $k(t)$. Ou seja, $k'(\bar{t})=0$. Cálculos análogos, mostram que $k'(t)>0$ em $0<t<\bar{t}$ e $k'(t)<0$ em $t>\bar{t}$. Portanto, $k(t)$ atinge o seu máximo em $\bar{t}$. Além disso,

$$\begin{aligned} k(\bar{t}) &= \left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{2-q}{p-2}}\|u\|^2-\left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{p-q}{p-2}}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &= \left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{2-q}{p-2}}\|u\|^2-\left[\frac{2-q}{p-q}\|u\|^2\right]^{\frac{p-q}{p-2}}\left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \\ &= \left[\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\|u\|^{\frac{2(p-q)}{p-2}}-\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\|u\|^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right]\left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e pela Imersão de Sobolev (Teorema C.7), vem

$$\begin{aligned} k(\bar{t}) &\geq \left[\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} - \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\right] \|u\|^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \left(\frac{1}{f_{max}S^p\|u\|^p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \\ &= \frac{(2-q)^{\frac{2-q}{p-2}}}{(p-q)^{\frac{p-q}{p-2}}} \left[\frac{1}{(p-q)^{-1}} - (2-q)\right] \|u\|^q \left(\frac{1}{f_{max}S^p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$k(\bar{t}) \geq (p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} (p-q)^{\frac{q-p}{p-2}} S^{\frac{p(q-2)}{p-2}} \|u\|^q.$$

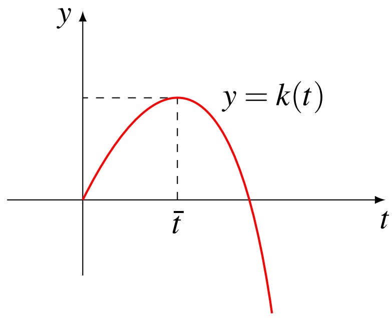

Figura 1.1: Gráfico de $y = k(t)$

■

Lema 1.11 *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ fixada, temos que:*

i) Se $\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz = 0$, então existe um único número positivo $t^- = t^-(u) > \bar{t}$ tal que $t^-u \in M_\varepsilon^-$ e $J_\varepsilon(t^-u) = \sup_{t\geq 0} J_\varepsilon(tu)$;

ii) Se $0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right) < \alpha_0$ e $\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz > 0$, então existem números positivos unicamente determinados

$$t^+ = t^+(u) < \bar{t} < t^- = t^-(u)$$

tais que $t^+u \in M_\varepsilon^+$, $t^-u \in M_\varepsilon^-$,

$$J_\varepsilon(t^+u) = \inf_{0\leq t\leq \bar{t}} J_\varepsilon(tu) \quad e \quad J_\varepsilon(t^-u) = \sup_{t\geq \bar{t}} J_\varepsilon(tu).$$

Demonstração. $i)$ Sabemos que $k(t)$ é crescente para $t < \bar{t}$, $k(t)$ é decrescente para $t > \bar{t}$, $k(\bar{t}) > 0$ e $\lim_{t\to\infty} k(t) = -\infty$. Então, como $k(t)$ é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um único $t^- > \bar{t}$ tal que

$$k(t^-) = 0 = \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz \ \text{ e } \ k'(t^-) < 0.$$

Observe que para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\langle J_\varepsilon'(tu), tu\rangle &= \|tu\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|tu|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|tu|^q dz \\
&= t^2\|u\|^2 - t^p \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - t^q \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\
&= t^q \left[t^{2-q}\|u\|^2 - t^{p-q} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \right] \\
&= t^q k(t).
\end{aligned}$$

Assim, para $t = t^-$, obtemos

$$\langle J_\varepsilon'(t^- u), t^- u\rangle = (t^-)^q [k(t^-)] = 0,$$

donde, $t^- u \in M_\varepsilon$. Segue de (1.7) e (1.15) que,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\varepsilon'(t^- u), t^- u\rangle &= (2-q)\|t^- u\|^2 - (p-q) \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|t^- u|^p dz \\
&= (t^-)^{q+1}[k'(t^-)] < 0.
\end{aligned}$$

ou seja, $t^- u \in M_\varepsilon^-$.

Mostraremos agora que $J_\varepsilon(t^- u) = \sup\limits_{t \geq 0} J_\varepsilon(tu)$. Observe que

$$J_\varepsilon(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_\varepsilon(tu) &= t\|u\|^2 - t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - t^{q-1} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\
&= t^{q-1} \left[t^{2-q}\|u\|^2 - t^{p-q} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \right].
\end{aligned}$$

Por hipótese $\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz = 0$, logo

$$\frac{d}{dt} J_\varepsilon(tu) = t^{q-1} k(t).$$

Como $k(t)>0$, $0<t<\bar{t}<t^{-}$, $k(t)$ é decrescente em $(\bar{t},\infty)$ e $k(t^{-})\leq 0$ segue que

$$\frac{d}{dt}J_{\varepsilon}(tu)\begin{cases} >0 & , \text{ em } (0,t^{-}) \\ =0 & , \text{ em } t^{-} \\ <0 & , \text{ em } (t^{-},\infty) \end{cases}.$$

Assim, $J_{\varepsilon}(tu)$ é crescente em $(0,t^{-})$, $\frac{d}{dt}J(t^{-}u)=0$ e $J_{\varepsilon}(tu)$ é decrescente em (t^{-},∞), logo t^{-} é o único ponto crítico de $J_{\varepsilon}(tu)$, o qual é ponto de máximo. Portanto, $J_{\varepsilon}(t^{-}u)=\sup\limits_{t\geq 0}J_{\varepsilon}(tu)$.

$ii)$ Como $k(0)=0$ e $\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz>0$, pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e a Imersão de Sobolev (Teorema C.7),

$$k(0)=0<\alpha\int_{\mathbb{R}^N}h(\varepsilon z)|u|^q dz<\alpha\|h\|_{\#}S^q\|u\|^q.$$

Assim, para $0<\alpha<\alpha_0$ aplicando (1.9) e (1.14), concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha\int_{\mathbb{R}^N}h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &< \left[(p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}[(p-q)S^2]^{\frac{q-p}{p-2}}\|h\|_{\#}^{-1}\right]\|h\|_{\#}S^q\|u\|^q \\ &= (p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}(p-q)^{\frac{q-p}{p-2}}S^{\frac{p(q-2)}{p-2}}\|u\|^q \\ &\leq k(\bar{t}). \end{aligned}$$

Sendo $k(t)$ contínua, crescente em $(0,\bar{t})$ e decrescente em $(\bar{t},-\infty)$ segue do Teorema do Valor Intermediário que existem únicos t^{+} e t^{-} onde $0<t^{+}<\bar{t}<t^{-}$, tais que

$$k(t^{+})=\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz=k(t^{-})$$

e

$$k'(t^{-})<0<k'(t^{+}).$$

Analogamente ao que foi feito no item (i), temos que $t^{+}u\in M_{\varepsilon}^{+}$, $t^{-}u\in M_{\varepsilon}^{-}$,

$$J_{\varepsilon}(t^{+}u)\leq J_{\varepsilon}(tu)\leq J_{\varepsilon}(t^{-}u),$$

para cada $t \in [t^+, t^-]$ e

$$J_\varepsilon(t^+u) \leq J_\varepsilon(tu),$$

para cada $t \in [0, \bar{t}]$. Portanto,

$$J_\varepsilon(t^+u) = \inf_{0 \leq t \leq \bar{t}} J_\varepsilon(tu) \quad \text{e} \quad J_\varepsilon(t^+u) = \sup_{t \geq \bar{t}} J_\varepsilon(tu).$$

■

Aplicando o Lema 1.7 ($M_\varepsilon^0 = \emptyset$ para $0 < \alpha < \alpha_0$), podemos escrever $M_\varepsilon = M_\varepsilon^+ \cup M_\varepsilon^-$, onde

$$M_\varepsilon^+ = \left\{ u \in M_\varepsilon \colon\, (2-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz > 0 \right\}$$

e

$$M_\varepsilon^- = \left\{ u \in M_\varepsilon \colon\, (2-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz < 0 \right\}.$$

Como J_ε é limitado inferiormente em M_ε, podemos definir

$$\alpha_\varepsilon = \inf_{u \in M_\varepsilon} J_\varepsilon(u), \quad \alpha_\varepsilon^+ = \inf_{u \in M_\varepsilon^+} J_\varepsilon(u) \quad \text{e} \quad \alpha_\varepsilon^- = \inf_{u \in M_\varepsilon^-} J_\varepsilon(u).$$

Lema 1.12 *Temos:*

i) Se $0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \right) < \alpha_0$*, então* $\alpha_\varepsilon \leq \alpha_\varepsilon^+ < 0$*;*

ii) Se $0 < \alpha < \frac{q}{2}\alpha_0$*, então* $\alpha_\varepsilon^- \geq d_0 > 0$ *para alguma constante* $d_0 = d_0(\varepsilon, p, q, S, \|h\|_\#, f_{max})$*.*

Demonstração. *i*) Seja $u \in M_\varepsilon^+$. Por (1.7), temos

$$(p-2)\|u\|^2 < (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Como $u \in M_\varepsilon^+$, por (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &< \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\frac{p-2}{p-q}\right]\|u\|^2 \\ &= -\frac{(2-q)(p-2)}{2pq}\|u\|^2, \end{aligned}$$

daí,

$$J_\varepsilon(u) < 0.$$

Portanto, $\alpha_\varepsilon^+ < 0$. Como $M_\varepsilon^+ \subset M_\varepsilon$, segue da definição de ínfimo que

$$\alpha_\varepsilon \leq \alpha_\varepsilon^+ < 0.$$

ii) Seja $u \in M_\varepsilon^-$. Como $0 < \alpha < \frac{q}{2}\alpha_0$, pela demonstração do Lema 1.9 (iv), temos que $J_\varepsilon(u) > d_0 > 0$ para alguma constante $d_0 = d_0(\varepsilon, p, q, S, \|h\|_\#, f_{max})$. Aplicando a definição de α_ε^-, resulta

$$\alpha_\varepsilon^- \geq d_0 > 0.$$

■

O Lema seguinte mostra a existência de sequências minimizantes (PS) para J_ε em M_ε, M_ε^+ e M_ε^-. Omitiremos a demonstração, pois as ideias são semelhantes ao Lema 1.25.

Lema 1.13 *i) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha_\varepsilon}$ em M_ε para J_ε;*

ii) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha_\varepsilon^+}$ em M_ε^+ para J_ε;

iii) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha_\varepsilon^-}$ em M_ε^- para J_ε.

1.2 Existência de uma Solução Positiva

A fim de provar a existência de soluções positivas, mostraremos primeiro que J_ε satisfaz a condição $(PS)_\beta$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para $\beta \in \left(-\infty, \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}\right)$, onde $\alpha = \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}$ e C_0 é definida no Lema seguinte.

Lema 1.14 *Suponha que h satisfaz (h_1) e $0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q}{p-2}}\right) < \alpha_0$. Se $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_\beta$ para J_ε em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $J_\varepsilon'(u) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$J_\varepsilon(u) \geq -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} \geq -C_0',$$

onde

$$C_0 = \frac{(2-q)[(p-q) \parallel h \parallel_\# S^q]^{\frac{2}{p-q}}}{2pq(p-2)^{\frac{q}{2-q}}}$$

e

$$C_0' = \frac{(p-2)(2-q)^{\frac{p}{p-2}}}{2pq[f_{max}(p-q)]^{\frac{2}{p-2}} S^{\frac{2p}{p-2}}}.$$

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_\beta$ para J_ε em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Afirmamos que $J_\varepsilon'(u) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. De fato, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $\langle u_n, v\rangle \to \langle u_0, v\rangle$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v dz \to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dz$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n v dz \to \int_{\mathbb{R}^N} u v dz.$$

Pela Imersão de Sobolev (Teorema C.7), temos que $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim, decorre do Teorema de Vainberg (Teorema C.4) que $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$ e existe $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Daí

$$|u_n(x)|^{p-2} u_n(x) v(x) \to |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left| |u_n(x)|^{p-2} u_n(x) v(x) \right| = |u_n(x)|^{p-1} |v(x)| \leq g(x)^{p-1} |v(x)|,$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, temos que $g^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^{p-1} |v| dz \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} g^p dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

onde usamos Desigualdade de Hölder (Teorema C.2). Logo, como f é uma função contínua segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.3) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z) |u_n|^{p-2} u_n v dz \to \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z) |u|^{p-2} u v dz.$$

Sendo h uma função limitada, mostra-se de maneira análoga ao que foi feito acima que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z) |u_n|^{q-2} u_n v dz \to \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z) |u|^{q-2} u v dz.$$

Portanto, $\langle J'_\varepsilon(u_n), v\rangle \to \langle J'_\varepsilon(u), v\rangle$, ou seja, $J'_\varepsilon(u_n) \to J'_\varepsilon(u)$. Sendo $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_\beta$ para J_ε em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $J'_\varepsilon(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Assim, pela unicidade do limite, temos que $J'_\varepsilon(u) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, completando a afirmação.

Assim, obtemos $\langle J'_\varepsilon(u), u\rangle = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z) |u|^p dz = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z) |u|^q dz.$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e as Imersões de Sobolev (Teorema C.7), temos que

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz\\
&\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{p-q}{pq}\right)\alpha\|h\|_{\#}\|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\
&\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{p-q}{pq}\right)\alpha\|h\|_{\#}S^q\|u\|^q\\
&= \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{p-2}{pq}\right)\left[\left(\frac{p-q}{p-2}\right)\alpha\|h\|_{\#}S^q\|u\|^q\right].
\end{aligned}$$

Daí, pela Desigualdade de Young (Teorema $C.1$), com expoentes conjugados $\frac{2}{q}$ e $\frac{2}{2-q}$, temos

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u) &\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{p-2}{pq}\right)\left[\frac{q\|u\|^2}{2}+\left(\frac{p-q}{p-2}\alpha\|h\|_{\#}S^q\right)^{\frac{2}{2-q}}\frac{2-q}{2}\right]\\
&= \left(\frac{p-2}{2p}-\frac{q(p-2)}{2pq}\right)\|u\|^2-\left(\frac{(p-2)(p-q)^{\frac{2}{2-q}}}{pq(p-2)^{\frac{2}{2-q}}}\right)\left(\alpha\|h\|_{\#}S^q\right)^{\frac{2}{2-q}}\left(\frac{2-q}{2}\right) \qquad (1.17)\\
&= -\frac{(2-q)[(p-q)\|h\|_{\#}S^q]^{\frac{2}{2-q}}}{2pq(p-2)^{\frac{q}{2-q}}}\alpha^{\frac{2}{2-q}}\\
&= -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}.
\end{aligned}$$

Além disso, como por hipótese $0<\alpha<\alpha_0=(p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}[(p-q)S^2]^{\frac{q-p}{p-2}}\|h\|_{\#}^{-1}$, segue de (1.17) que

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u) &> -\frac{(p-2)(p-q)^{\frac{2}{2-q}}}{2pq(p-2)^{\frac{2}{2-q}}}\left[(p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}[(p-q)S^2]^{\frac{q-p}{p-2}}\|h\|_{\#}^{-1}\|h\|_{\#}S^q\right]^{\frac{2}{2-q}}(2-q)\\
&= -\frac{(p-2)(2-q)^{\frac{p}{p-2}}(p-q)^{\frac{-2}{p-2}}S^{\frac{-2p}{p-2}}}{2pq(f_{max})^{\frac{2}{p-2}}}\\
&= -\frac{(p-2)(2-q)^{\frac{p}{p-2}}}{2pq[f_{max}(p-q)]^{\frac{2}{p-2}}S^{\frac{2p}{p-2}}}\\
&= -C_0'.
\end{aligned}$$

■

Lema 1.15 *Se $\{u_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência $(PS)_\beta$ para o funcional J_ε, então $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ $(PS)_\beta$ para J_ε. Então, $J_\varepsilon(u_n)=\beta+$

$o_n(1)$ e $J'_\varepsilon(u_n) = o_n(1)$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\begin{aligned} |\beta| + c_n + \frac{d_n\|u_n\|}{p} &\geq J_\varepsilon(u_n) + \frac{1}{p}\langle J'_\varepsilon(u_n), u_n\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u_n|^q dz \\ &\geq \frac{p-2}{2p}\|u_n\|^2 - \frac{p-q}{pq}\alpha\|h\|_\# S^q\|u_n\|^q, \end{aligned}$$

onde $c_n = o_n(1)$ e $d_n = o_n(1)$ quando $n \to \infty$. Como $1 \leq q < 2$, segue-se da desigualdade acima que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

Lema 1.16 *Suponha que f e h satisfazem (f_1) e (h_1). Se $0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right) < \alpha_0$, então J_ε satisfaz a condição $(PS)_\beta$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para $\beta \in \left(-\infty, \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}\right)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ $(PS)_\beta$ para J_ε. Pelo Lema anterior $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência limitada. Uma vez que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, o qual é um espaço reflexivo, pelo Teorema C.8, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e uma $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Lema 1.14, temos que

$$J'_\varepsilon(u) = 0 \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Usando as Imersões de Sobolev, temos

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ para algum } 1 \leq s < 2^*$$

e

$$u_n \to u \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Usando o Lema de Brézis-Lieb (Teorema C.5), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n - u|^p dz = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz + o_n(1) \tag{1.18}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz = \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n|^q dz - \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz + o_n(1). \tag{1.19}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{1.20}$$

De fato, como $h \in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\sigma > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\int_{[B_r^N(0)]^c} h(\varepsilon z)^{\frac{p}{p-q}} dz < \sigma.$$

Temos,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \right| \ \leq \ \int_{B_r^N(0)} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz + \int_{[B_r^N(0)]^c} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz.$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e o Teorema de Imersão de Sobolev (Teorema C.7), temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \right| \ &\leq \ \|h\|_{\#} \left(\int_{B_r^N(0)} (|u_n - u|^q)^{\frac{p}{q}} dz \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{[B_r^N(0)]^c} h(\varepsilon z)^{\frac{p}{p-q}} dz \right)^{\frac{p-q}{p}} \|u_n - u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \ \|h\|_{\#} \left(\int_{B_r^N(0)} |u_n - u|^p dz \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\quad + S^q \left(\int_{[B_r^N(0)]^c} h(\varepsilon z)^{\frac{p}{p-q}} dz \right)^{\frac{p-q}{p}} \|u_n - u\|^q.
\end{aligned}$$

Como $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \right| \leq C^{'}\sigma + o_n(1), \ \text{ para todo } \ \sigma > 0.$$

Sendo assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \right| \leq C^{'}\sigma.$$

Fazendo $\sigma \to 0$, concluímos que para n suficientemente grande

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz = o_n(1),$$

completando a afirmação.

Afirmamos, também, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n-u|^p dz = \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u_n-u|^p dz + o_n(1). \tag{1.21}$$

Com efeito, por (f_1), dado $\varsigma > 0$, existe $R > 0$ tal que $|f(\varepsilon z) - f_\infty| < \varsigma$, para todo $|z| > R$. Então,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n-u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u_n-u|^p dz\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \big(f(\varepsilon z) - f_\infty\big)|u_n-u|^p dz\right| \\
&\leq \int_{[B_R^N(0)]^c} \big|f(\varepsilon z) - f_\infty\big||u_n-u|^p dz \\
&\quad + \int_{B_R^N(0)} \big|f(\varepsilon z) - f_\infty\big||u_n-u|^p dz \\
&\leq C\varsigma + \|f(\varepsilon) - f_\infty\|_\infty \int_{B_R^N(0)} |u_n-u|^p dz.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima e usando o fato de $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n-u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u_n-u|^p dz\right| \leq C\varsigma, \text{ para todo } \varsigma > 0.$$

Como $\varsigma > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n-u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u_n-u|^p dz = o_n(1),$$

demonstrando o que queríamos.

Seja $p_n = u_n - u$. Suponha que $p_n \nrightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Temos

$$\|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n\rangle = \langle u_n - u, u_n - u\rangle = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u_n, u\rangle.$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos $\langle u_n, u\rangle = \|u\|^2 - \frac{1}{2}o_n(1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|p_n\|^2 &= \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\|u\|^2 + o_n(1) \\
&= \|u_n\|^2 - \|u\|^2 + o_n(1).
\end{aligned}$$

Por (1.18) - (1.21), deduzimos que:

$$\begin{aligned}
\|p_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u_n|^q dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz + o_n(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n - u|^p dz + o_n(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |p_n|^p dz + o_n(1).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
I_\infty(p_n) &= \frac{1}{2}\|p_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |p_n|^p dz \\
&= \frac{1}{2}\|p_n\|^2 - \frac{1}{p}\|p_n\|^2 + o_n(1) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|p_n\|^2 + o_n(1) > 0.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema B.5, existe uma sequência $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$s_n = 1 + o_n(1), \qquad s_n p_n \subset N_\infty \quad \text{e} \quad I_\infty(s_n p_n) = I_\infty(p_n) + o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\gamma_\infty &\leq I_\infty(s_n p_n) \\
&= I_\infty(p_n) + o_n(1) \\
&= J_\varepsilon(u_n) - J_\varepsilon(u) + o_n(1) \\
&= \beta - J_\varepsilon(u) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Daí, como $\beta < \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}$ e $J_\varepsilon(u) \geq -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}$ (veja Lema 1.14), segue-se que

$$\begin{aligned}
\gamma_\infty &< \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} + C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} + o_n(1) \\
&= \gamma_\infty + o_n(1),
\end{aligned}$$

que é um absurdo. Portanto, $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, demonstrando que J_ε satisfaz a condição $(PS)_\beta$. ■

Observação 1.17 *Da expressão de* C_0' *no Lema* 1.14 *e de* (1.3)*, temos*

$$\begin{aligned} C_0' &= \frac{(p-2)(2-q)^{\frac{p}{p-2}}}{2pq[f_{max}(p-q)]^{\frac{2}{p-2}}S^{\frac{2p}{p-2}}} \\ &= \frac{2-q}{q}\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2}{p-2}}\left[\frac{p-2}{2p(f_{max})^{\frac{2}{p-2}}S^{\frac{2p}{p-2}}}\right] \\ &= \frac{2-q}{q}\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2}{p-2}}\gamma_{max} \\ &< \gamma_{max} < \gamma_\infty. \end{aligned}$$

Daí, como $-C_0' \leq -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}$*, desde que* $0 < \alpha < \alpha_0$*, temos* $0 < \gamma_\infty - C_0' \leq \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}$*. Donde,*

$$\gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} > 0,$$

para $0 < \alpha < \alpha_0$.

Pelo Lema 1.13 (i), existe uma $\{u_n\} \subset M_\varepsilon$ sequência $(PS)_{\alpha_\varepsilon}$ para J_ε. Então, provaremos que (E_ε) admite uma solução positiva u_0 em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.18 *Suponha que* (f_1) *e* (h_1) *valem. Se* $0 < \alpha\left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right) < \alpha_0$*, então existe, pelo menos, uma solução positiva* u_0 *de* (E_ε) *em* $\mathbb{R}^N$*. Além disso, temos que* $u_0 \in M_\varepsilon^+$ *e*

$$J_\varepsilon(u_0) = \alpha_\varepsilon = \alpha_\varepsilon^+ \geq -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}. \tag{1.22}$$

Demonstração. Pelo Lema 1.13 (i), existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset M_\varepsilon$ para J_ε tal que

$$J_\varepsilon(u_n) = \alpha_\varepsilon + o_n(1) \quad \text{e} \quad J_\varepsilon'(u_n) = o_n(1) \ \text{ em } \ H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Lema 1.12 (i) e a observação 1.17, temos

$$\alpha_\varepsilon < 0 < \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}.$$

Assim, pelo Lema 1.16, existem uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela continuidade de J_ε temos que $J_\varepsilon(u_n) \to J_\varepsilon(u_0)$. Mas $J_\varepsilon(u_n) \to \alpha_\varepsilon$ quando $n \to \infty$, pois $\{u_n\}$ é uma sequência minimizante para J_ε em M_ε. Pela unicidade do limite temos $J_\varepsilon(u_0) = \alpha_\varepsilon$. Logo, pelo Lema 1.8, temos que u_0 é ponto crítico para o funcional J_ε e, portanto, uma solução de (E_ε) em $\mathbb{R}^N$.

Afirmação: $u_0 \in M_\varepsilon^+$. De fato, caso contrário, u_0 deveria estar em M_ε^-, visto que, pelo Lema

1.7, $M_\varepsilon^0 = \emptyset$. Observe que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_0|^q dz > 0,$$

pois, caso contrário,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_0|^q dz = 0,$$

então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.3), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_n|^q dz = \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_0|^q dz = 0,$$

o que implica, juntamente com (1.5),

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz + o_n(1).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u_n|^q dz \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p}\|u_n\|^2 + o_n(1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 + o_n(1), \end{aligned}$$

implicando que $\lim\limits_{n\to\infty} J_\varepsilon(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 > 0$, pois $p > 2$, que é uma contradição, pois $J_\varepsilon(u_n) \to \alpha_\varepsilon < 0$. Pelo Lema 1.11 (ii) existem números positivos $t^+ < \bar{t} < t^- = 1$ tais que $t^+u_0 \in M_\varepsilon^+$, $t^-u_0 \in M_\varepsilon^-$ e

$$J_\varepsilon(t^+u_0) < J_\varepsilon(t^-u_0) = J_\varepsilon(u_0) = \alpha_\varepsilon,$$

contradição, pois $J_\varepsilon(t^+u_0) \geq \alpha_\varepsilon^+ \geq \alpha_\varepsilon$. Daí, $u_0 \in M_\varepsilon^+$ e $-C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} \leq J_\varepsilon(u_0) = \alpha_\varepsilon = \alpha_\varepsilon^+$, completando a afirmação.

Como $J_\varepsilon(|u_0|) = J_\varepsilon(u_0)$ podemos assumir sem perda de generalidade que u_0 é não negativa e, pelo Princípio do Máximo (Teorema C.13), concluímos que u_0 é solução positiva de (E_ε) em $\mathbb{R}^N$. $\blacksquare$

1.3 Existência de Múltiplas Soluções Positivas

No que segue, assumiremos que f e h satisfazem (f_1), (f_2) e (h_1). Seja $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a única solução positiva, radialmente simétrica, da equação (E_0) em $\mathbb{R}^N$ para $f = f_{max}$. Temos as seguintes propriedades (veja [6], [7], [17] ou [23])

i) $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $0 < \theta < 1$ e $\lim\limits_{|z|\to\infty} w(z) = 0$;

ii) Para qualquer $\varepsilon > 0$, existem números positivos c_1, c_2^ε e c_3^ε tais que, para todo $z \in \mathbb{R}^N$,

$$c_2^\varepsilon exp(-(1-\varepsilon)|z|) \le w(z) \le c_1 exp(-|z|)$$

e

$$|\nabla w(z)| \le c_3^\varepsilon exp(-(1-\varepsilon)|z|).$$

Para $1 \le i \le k$, definimos

$$w_\varepsilon^i(z) = w\left(z - \frac{a^i}{\varepsilon}\right), \text{ onde } f(a^i) = f_{max}.$$

Claramente, $w_\varepsilon^i(z) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 1.11 (ii), existe um único número $(t_\varepsilon^i)^- > 0$ tal que

$$(t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i \in M_\varepsilon^- \subset M_\varepsilon, \text{ para } 1 \le i \le k.$$

Agora, provaremos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{t\ge 0} (J_\varepsilon(t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i) \le \gamma_{max} \text{ uniformemente em } i.$$

Lema 1.19 *Temos:*

i) Existe um número t_0 tal que para todo $0 \le t \le t_0$ e qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) < \gamma_{max} \text{ uniformemente em } i;$$

ii) Existem números positivos t_1 e ε_1 tal que para qualquer $t > t_1$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, vale

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) < 0 \text{ uniformemente em } i.$$

Demonstração. $i)$ Como J_ε é contínua em $H^1(\mathbb{R}^N)$, w_ε^i é uniformemente limitada em

$H^1(\mathbb{R}^N)$ e para qualquer $\varepsilon > 0$ e $\gamma_{max} > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que para $0 \leq t \leq t_0$,

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) < \gamma_{max}, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

ii) Como f é contínua, existe $r_0 > 0$ tal que $f(z) \geq \frac{f_{max}}{2}$, para $z \in B_{r_0}^N(a^i)$ uniformemente em i. Então, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) &= \frac{t^2}{2}\|w_\varepsilon^i\|^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)(w_\varepsilon^i)^p dz - \frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)(w_\varepsilon^i)^q dz \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|w_\varepsilon^i\|^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)(w_\varepsilon^i)^p dz \\
&= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_\varepsilon^i|^2 + (w_\varepsilon^i)^2) - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)(w_\varepsilon^i)^p dz \\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w|^2 + w^2)dz - \frac{t^p}{p}\int_{B_1^N(0)} f(\varepsilon z + a^i)w^p dz \\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w|^2 + w^2)dz - \frac{t^p}{2p}\int_{B_1^N(0)} f_{max}w^p dz,
\end{aligned}$$

o que implica que $J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$, pois $p > 2$. Assim, existe $t_1 > 0$ tal que para qualquer $t > t_1$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) < 0 \text{ uniformemente em } i.$$

■

Lema 1.20 *Suponha* (f_1), (f_2) *e* (h_1). *Se*

$$0 < \alpha\left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right) < \frac{q}{2}\alpha_0,$$

então

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{t \geq 0} J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \leq \gamma_{max} \textit{ uniformemente em } i.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.19, basta mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \leq \gamma_{max} \text{ uniformemente em } i.$$

Sabemos que $\sup_{t \geq 0} I_{max}(tw) = \gamma_{max}$. Para $t_0 < t < t_1$, temos

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) = \frac{1}{2}\|tw_\varepsilon^i\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)(tw_\varepsilon^i)^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)(tw_\varepsilon^i)^q dz.$$

Como $w_\varepsilon^i(z) = w\left(z - \frac{a^i}{\varepsilon}\right)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right|^2 + w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)^2\right]dz - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz \\
&\quad -\frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz.
\end{aligned}
$$

Usando o fato do $\mathbb{R}^N$ ser invariante por translação, temos

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2 + w^2] - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max} w^p dz + \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max} w^p dz \\
&\quad -\frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz - \frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz \\
&= I_{max}(tw) + \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(f_{max} - f(\varepsilon z)\right)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz \\
&\quad -\frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz \\
&\leq \gamma_{max} + \frac{t_1^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(f_{max} - f(\varepsilon z)\right)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz - \frac{t_0^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\left(f_{max} - f(\varepsilon z)\right)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz = \int_{\mathbb{R}^N}\left(f_{max} - f(\varepsilon z + a^i)\right) w^p dz = o_\varepsilon(1),
$$

quando $\varepsilon \to 0^+$ uniformemente em i e

$$
\alpha\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz \leq \varepsilon^{\frac{2(p-2)}{p-q}}\|h\|_\# S^q\|w\|^q = o_\varepsilon(1),
$$

quando $\varepsilon \to 0^+$, então

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sup_{t_0\leq t\leq t_1} J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \leq \gamma_{max},
$$

donde,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sup_{t\geq 0} J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \leq \gamma_{max} \;\text{ uniformemente em }\; i.
$$

■

Aplicando os resultados dos Lemas 1.11, 1.12 (ii) e 1.20, podemos deduzir que

$$
0 < d_0 \leq \alpha_\varepsilon^- \leq \gamma_{max} + o_\varepsilon(1), \;\text{ quando }\; \varepsilon \to 0^+.
$$

Como $\gamma_{max} < \gamma_\infty$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\gamma_{max} < \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}, \text{ para qualquer } \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{1.23}$$

Como os pontos de máximos a^1, a^2, ..., a^k da função f são distintos, iremos fixar $0 < \rho_0 < 1$ de modo que

$$\overline{B^N_{\rho_0}(a^i)} \cap \overline{B^N_{\rho_0}(a^j)} = \emptyset, \text{ para } i \neq j \text{ e } 1 \leq i, j \leq k,$$

onde $\overline{B^N_{\rho_0}(a^i)} = \{z \in \mathbb{R}^N : |z - a^i| \leq \rho_0\}$ e $f(a^i) = f_{max}$. Defina

$$K = \{a^i \ : \ 1 \leq i \leq k\}$$

e

$$K_{\frac{\rho_0}{2}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B^N_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)}.$$

Suponha que

$$\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B^N_{\rho_0}(a^i)} \subset B^N_{r_0}(0), \text{ para algum } r_0 > 0.$$

Seja

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon : \ H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} &\to \mathbb{R}^N \\ u &\mapsto Q_\varepsilon(u) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z)|u|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz}, \end{aligned}$$

onde $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\chi(z) = z$ para $|z| \leq r_0$ e $\chi(z) = \dfrac{r_0 z}{|z|}$ para $|z| > r_0$.

Lema 1.21 *Existe $0 < \varepsilon^0 \leq \varepsilon_0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$, então $Q_\varepsilon\left((t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon\right) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$ para cada $1 \leq i \leq k$.*

Demonstração. Como

$$Q_\varepsilon((t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z)|(t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |(t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon|^p dz} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z)\left|w\left(z - \frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left|w\left(z - \frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right|^p dz} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z + a^i)|w(z)|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |w(z)|^p dz},$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $Q_\varepsilon((t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon) \to a^i$ quando

$\varepsilon \to 0^+$. Portanto, existe $\varepsilon^0 > 0$ tal que

$$Q_\varepsilon((t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i) \in K_{\frac{\rho_0}{2}},$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon^0$ e para cada $1 \leq i \leq k$. ■

Lema 1.22 *Existe um número* $\bar{\delta} > 0$ *tal que se* $u \in N_\varepsilon$ *e* $I_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \bar{\delta}$*, então* $Q_\varepsilon(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$*, para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{u_n\} \subset N_{\varepsilon_n}$ tais que

$$\varepsilon_n \to 0, \quad I_{\varepsilon_n}(u_n) = \gamma_{max} + o_n(1), \text{ quando } n \to \infty \tag{1.24}$$

e

$$Q_{\varepsilon_n}(u_n) \notin K_{\rho_0/2} \text{ para todo } n \in \mathbb{R}^N. \tag{1.25}$$

Temos que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, se para alguma subsequência tivéssemos $\|u_n\| \to +\infty$, então acarretaria $I_{\varepsilon_n}(u_n) \to +\infty$, o que contraria (1.24). Suponha que $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Como

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z)|u_n|^p dz, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

pois $u_n \in N_{\varepsilon_n}$, e

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon_n}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z)|u_n|^p dz \\ &= \gamma_{max} + o_n(1), \end{aligned}$$

concluímos que

$$\gamma_{max} + o_n(1) = I_{\varepsilon_n}(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z)|u_n|^p dz = o_n(1),$$

que é um absurdo, pois $\gamma_{max} > 0$. Assim,

$$u_n \nrightarrow 0 \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N). \tag{1.26}$$

Aplicando o Lema de Lions (Teorema C.9), existe uma constante $d_0 > 0$ e uma sequência

$\{\overline{z_n}\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1^N(\overline{z_n})} |u_n(z)|^2 dz \geq d_0 > 0. \tag{1.27}$$

Com efeito, se (1.27) não ocorresse, teríamos

$$\int_{B_1^N(\bar{z_n})} |u_n(z)|^2 dz \to 0.$$

Consequentemente, como $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema de Lions, teríamos $\{u_n\} \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, o que contradiz (1.26).

Seja $v_n(z) = u_n(z + \widetilde{z_n})$. Então, existe uma subsequência $\{v_n\}$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando um cálculo similar ao Lema 1.11, existe uma sequência $\{s_{max}^n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\widetilde{v_n} = s_{max}^n v_n \in N_{max}$$

e

$$0 < \gamma_{max} = \inf_{u \in N_{max}} I_{max}(u) \leq I_{max}(\widetilde{v_n}) \leq I_{\varepsilon_n}(s_{max}^n u_n) \leq \sup_{t \geq 0} I_{\varepsilon_n}(t u_n) = I_{\varepsilon_n}(u_n) = \gamma_{max} + o_n(1),$$

onde a última iguadade segue de (1.24). Assim,

$$\{s_{max}^n u_n\} \subset N_{max} \quad \text{e} \quad I_{\varepsilon_n}(s_{max}^n u_n) \to \gamma_{max}.$$

Logo, podemos supor que $\{s_{max}^n\}$ satisfaz $s_{max}^n \to s_0$, para algum $s_0 > 0$. Então, existem subsequências $\{\widetilde{v_n}\}$ e $\widetilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $\widetilde{v_n} \rightharpoonup \tilde{v}(= s_0 v)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por (1.27), temos $\tilde{v} \neq 0$. Além disso, podemos obter que

$$\widetilde{v_n} \to \tilde{v} \ \text{ em } \ H^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$I_{max}(\tilde{v}) = \gamma_{max}.$$

Agora, queremos mostrar que existe uma subsequência $\{z_n\} = \{\varepsilon_n \tilde{z}_n\}$ tal que $z_n \to z_0 \in K$.

Afirmação 1: $\{z_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$. Suponha por contradição que $|z_n| \to \infty$, então

$$
\begin{aligned}
\gamma_{max} &= I_{max}(\tilde{v}) \\
&< I_\infty(\tilde{v}) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\|\tilde{v}_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z + z_n)|\tilde{v}_n|^p dz\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{(s_{max}^n)^2}{2}\|u_n\|^2 - \frac{(s_{max}^n)^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z)|u_n|^p dz\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} I_{\varepsilon_n}(s_{max}^n u_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} I_{\varepsilon_n}(u_n) = \gamma_{max}.
\end{aligned}
$$

Donde, $\gamma_{max} < \gamma_{max}$, o que é um absurdo.

Afirmação 2: $z_0 \in K$. De fato, suponha que $z_0 \notin K$, isto é, $f(z_0) < f_{max}$. Então, usando os mesmos argumentos acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\gamma_{max} &= I_{max}(\tilde{v}) \\
&= \frac{1}{2}\|\tilde{v}\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max}|\tilde{v}|^p dz \\
&< \frac{1}{2}\|\tilde{v}\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(z_0)|\tilde{v}|^p dz \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\|\tilde{v}_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z + z_n)|\tilde{v}_n|^p dz\right] \\
&= \gamma_{max},
\end{aligned}
$$

acarretando $\gamma_{max} < \gamma_{max}$, o que é um absurdo. Como $v_n \to v \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$
\begin{aligned}
Q_{\varepsilon_n}(u_n) &= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon_n z)|v_n(z-\tilde{z}_n)|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(z-\tilde{z}_n)|^p dz} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon_n z + \varepsilon_n \tilde{z}_n)|v_n|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dz}.
\end{aligned}
$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$,

$$
Q_{\varepsilon_n}(u_n) \to z_0 \in K_{\frac{\rho_0}{2}},
$$

que é uma contradição com (1.25). Portanto, existe um número $\bar{\delta} > 0$ tal que se $u \in N_\varepsilon$ e

$I_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \bar{\delta}$, tem-se

$$Q_\varepsilon(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}} \text{ para qualquer } 0 < \varepsilon < \varepsilon^0.$$

■

De (1.23), escolha $0 < \delta_0 < \bar{\delta}$ tal que

$$\gamma_{max} + \delta_0 < \gamma_\infty - C_0 \alpha^{\frac{2}{2-q}} \text{ para qualquer } 0 < \varepsilon < \varepsilon^0. \tag{1.28}$$

Para cada $1 \leq i \leq k$, defina as vizinhanças em M_ε^-,

$$O_\varepsilon^i = \left\{ u \in M_\varepsilon^- \ : \ |Q_\varepsilon(u) - a^i| < \rho_0 \right\}$$

e suas fronteiras

$$\partial O_\varepsilon^i = \left\{ u \in M_\varepsilon^- \ : \ |Q_\varepsilon(u) - a^i| = \rho_0 \right\}.$$

Considere também os números

$$\beta_\varepsilon^i = \inf_{u \in O_\varepsilon^i} J_\varepsilon(u) \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}_\varepsilon^i = \inf_{u \in \partial O_\varepsilon^i} J_\varepsilon(u).$$

Lema 1.23 *Se $u \in M_\varepsilon^-$ e $J_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{2}$, então existe um número $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon^0$ tal que $Q_\varepsilon(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$ para qualquer $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$.*

Demonstração. Usando um cálculo similar ao que foi feito para obter (1.16), obtemos um único número positivo

$$s_\varepsilon^u = \left(\frac{\|u\|^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz} \right)^{\frac{1}{p-2}}$$

tal que $s_\varepsilon^u u \in N_\varepsilon$.

Afirmação: $s_\varepsilon^u < c$, para alguma constante $c > 0$ (independente de u). Como $u \in M_\varepsilon^- \subset M_\varepsilon$, então $\langle J_\varepsilon'(u), u \rangle = 0$. Além disso, temos também

$$0 < d_0 \leq \alpha_\varepsilon^- \leq J_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 < d_0 &\leq J_\varepsilon(u) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &\leq \frac{p-2}{2p}\|u\|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|u\|^2 \geq \frac{p-2}{2p} d_0 = c_1 > 0. \tag{1.29}$$

Como J_ε é coercivo em M_ε e $J_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{2}$, então temos que existe uma constante $c_2 > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|^2 < c_2. \tag{1.30}$$

Logo, por (1.29) e (1.30), temos

$$0 < c_1 \leq \|u\|^2 < c_2. \tag{1.31}$$

Provaremos agora que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} > c_3 > 0. \tag{1.32}$$

De fato, suponha que (1.32) não ocorre, logo existe uma sequência $\{u_n\} \subset M_\varepsilon^-$ tal que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = o_n(1) \text{ quando } n \to \infty.$$

Por (1.8) e (1.29),

$$\frac{2-q}{p-q} < \frac{\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz}{\|u_n\|^2} \leq \frac{f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{c_1} = o_n(1),$$

que é uma contradição, pois $\frac{2-q}{p-q} > 0$. Segue então que (1.32) vale.

Assim, por (1.31), (1.32) e da expressão de s^u_ε, existe $c > 0$ (independente de u) tal que $s^u_\varepsilon < c$, completando a demonstração da afirmação.

Agora, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2} &\geq J_\varepsilon(u)=\sup_{t\geq 0} J_\varepsilon(tu)\geq J_\varepsilon(s_\varepsilon^u u)\\
&= \frac{1}{2}\|s_\varepsilon^u u\|^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u|^p dz-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u|^q dz\\
&\geq I_\varepsilon(s_\varepsilon^u u)-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u|^q dz.
\end{aligned}
$$

Da desigualdade acima, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon(s_\varepsilon^u u) &\leq \gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}+\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u|^q dz\\
&\leq \gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}+\alpha\|h\|_\# S^q\|s_\varepsilon^u u\|^q\\
&< \gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}+\alpha c^q(c_2)^{\frac{q}{2}}\|h\|_\# S^q,
\end{aligned}
$$

onde $\alpha=\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}$. Daí, existe $0<\bar{\varepsilon}<\varepsilon^0$ tal que, para $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$,

$$
I_\varepsilon(s_\varepsilon^u u)\leq \gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2},\ \text{ onde }\ s_\varepsilon^u u\in N_\varepsilon.
$$

Pelo Lema 1.22, obtemos

$$
Q_\varepsilon(s_\varepsilon^u u)=\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\chi(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u(z)|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|s_\varepsilon^u u(z)|^p dz}\in K_{\frac{\rho_0}{2}},
$$

para qualquer $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$ ou $Q_\varepsilon(u)\in K_{\frac{\rho_0}{2}}$, para qualquer $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$. ■

Aplicando o Lema acima, obtemos que

$$
\tilde{\beta}_\varepsilon^i\geq \gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}\ \text{ para qualquer }\ 0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}. \tag{1.33}
$$

Com efeito, se (1.33) não vale, segue da definição de $\tilde{\beta}_\varepsilon^i$ que existe $u\in\partial O_\varepsilon^i$ tal que $J_\varepsilon(u)<\gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}$. Assim, pelo Lema 1.23, temos que $Q_\varepsilon(u)\in K_{\rho_0/2}$, para todo $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, então

$$
Q_\varepsilon(u)\in\overline{B^N_{\frac{\rho_0}{2}}(a^j)},
$$

para algum $j\in\{1,\dots,k\}$, que é uma contradição, pois $|Q_\varepsilon(u)-a^j|=\rho_0$. Portanto, (1.33) vale.

Pelo Lema 1.21, existe $\varepsilon^0 > 0$ tal que

$$Q_\varepsilon((t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i) \in K_{\rho_0/2},$$

para cada $1 \leq i \leq k$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$. Segue da definição de $K_{\rho_0/2}$ que $(t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i \in O_\varepsilon^i$. Usando a definição de β_ε^i, o Lema 1.20 e a equação (1.28), obtemos

$$\beta_\varepsilon^i = \inf_{u \in O_\varepsilon^i} J_\varepsilon(u) \leq J_\varepsilon((t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i) \leq \sup_{t \geq 0} J_\varepsilon(t w_\varepsilon^i) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{3} < \gamma_\infty - C_0 \alpha^{\frac{2}{2-q}}, \tag{1.34}$$

para qualquer $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$.

Lema 1.24 *Dado $u \in O_\varepsilon^i$, então existem $\eta > 0$ e um funcional diferenciável*

$$l : B(0, \eta) \subset H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^+$$

tais que

$$l(0) = 1, \quad l(v)(u - v) \in O_\varepsilon^i, \ \ \textit{para qualquer} \ \ v \in B_\eta(0)$$

e

$$\langle l'(v), \phi \rangle \mid_{(l,v)=(1,0)} = \frac{\langle \psi_\varepsilon'(u), \phi \rangle}{\langle \psi_\varepsilon'(u), u \rangle}, \tag{1.35}$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $\psi_{\varepsilon(u)} = \langle J_\varepsilon'(u), u \rangle$.

Demonstração. Para $u \in O_\varepsilon^i$, defina uma função $F : \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por

$$F(\tau, w) = \langle J_\varepsilon'(\tau(u - w)), \tau(u - w) \rangle.$$

Logo, pela definição de J_ε',

$$F(\tau, w) = \|\tau(u - w)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|\tau(u - w)|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|\tau(u - w)|^q dz$$

e, assim,

$$F(\tau, w) = \tau^2 \|u - w\|^2 - \tau^p \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u - w|^p dz - \tau^q \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u - w|^q dz.$$

Daí,

$$\begin{aligned} F(1, 0) &= \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \langle J_\varepsilon'(u), u \rangle = 0 \end{aligned}$$

(pois $u \in M_\varepsilon^-$ $(u \in M_\varepsilon)$). Derivando F em relação a τ, obtemos

$$\frac{d}{d\tau}F(\tau,w) = 2\tau\|u-w\|^2 - p\tau^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u-w|^p dz - q\tau^{q-1}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u-w|^q dz.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}F(1,0) &= 2\|u-w\|^2 - p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - q\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \langle \psi_\varepsilon'(u), u\rangle \neq 0 \ \ (u \in M_\varepsilon^-).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w}F(\tau,w)(\phi) &= -2\tau^2(u-w/\phi) + p\tau^p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u-w|^{p-2}(u-w)\phi dz \\ &\quad + q\tau^q\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u-w|^{q-2}(u-w)\phi dz.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial w}F(1,0)(\phi) = -2(u/\phi) + p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}u\phi dz + q\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^{q-2}u\phi dz.$$

Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existem $\eta > 0$ e uma função diferenciável $l : B_\eta(0) \subset H_0^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ tais que $l(0) = 1$, $F(l(v), v) = 0$, para todo $v \in B_\eta(0)$ e

$$\langle l'(0), \phi\rangle = \frac{-\frac{\partial F}{\partial w}(1,0)}{\frac{dF}{d\tau}(1,0)} = \frac{\langle \psi_\varepsilon'(u), \phi\rangle}{\langle \psi_\varepsilon'(u), u\rangle}.$$

■

Lema 1.25 *Para cada $1 \le i \le k$, existe uma sequência $(PS)_{\beta_\varepsilon^i}$, $\{u_n\} \subset O_\varepsilon^i$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para J_ε.*

Demonstração. Para cada $1 \le i \le k$, por (1.33) e (1.34),

$$\beta_\varepsilon^i \le \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{3} < \delta_{max} + \frac{\delta_0}{2} = \tilde{\beta}_\varepsilon^i,$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, ou seja,

$$\beta_\varepsilon^i < \tilde{\beta}_\varepsilon^i, \ \ \text{para qualquer } \ 0 < \varepsilon < \varepsilon^*. \tag{1.36}$$

Então,

$$\beta_\varepsilon^i = \inf_{u \in O_\varepsilon^i \cup \partial O_\varepsilon^i} J_\varepsilon(u),$$

para qualquer $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$.

Considere $\{u_n^i\} \subset O_\varepsilon^i \cup \partial O_\varepsilon^i$ uma sequência minimizante para β_ε^i. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (Teorema C.11), existe uma subsequência $\{u_n^i\}$ tal que

$$J_\varepsilon(u_n^i) = \beta_\varepsilon^i + \frac{1}{n}$$

e

$$J_\varepsilon(u_n^i) \leq J_\varepsilon(u) + \frac{\|w - u_n^i\|^2}{n}, \text{ para qualquer } w \in O_\varepsilon^i \cup \partial O_\varepsilon^i. \tag{1.37}$$

Usando (1.36), podemos assumir que $u_n^i \in O_\varepsilon^i$, para n suficientemente grande. Pelo Lema 1.24, existem $\eta_n^i > 0$ e um funcional diferenciável

$$l_n^i : B(o, \eta_n^i) \subset H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^+$$

tais que

$$l_n^i(0) = 1, \quad l_n^i(v)(u_n^i - v) \in O_\varepsilon^i, \ v \in B_{\eta_n^i}(0)$$

e

$$\langle l'(v), \phi \rangle \mid_{(l,v)=(1,0)} = \frac{\langle \psi_\varepsilon'(u), \phi \rangle}{\langle \psi_\varepsilon'(u), u \rangle}. \tag{1.38}$$

Seja $v_\sigma = \sigma v$ com $\|v\| = 1$ e $0 < \sigma < \eta_n^i$. Então,

$$v_\sigma \in B_{\eta_n^i}(0) \quad \text{e} \quad w_\sigma := l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - v_\sigma) \in O_\varepsilon^i.$$

Desde que J_ε é de classe C^1, segue de (1.37) que

$$\begin{aligned}
\frac{\|w_\sigma - u_n^i\|_H}{n} &\geq J_\varepsilon(u_n^i) - J_\varepsilon(w_\sigma) \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} J_\varepsilon(t u_n^i + (1-t) w_\sigma) dt \\
&= \int_0^1 J_\varepsilon'(t u_n^i + (1-t) w_\sigma)(u_n^i - w_\sigma) dt \\
&= \langle J_\varepsilon'(t_0 u_n^i + (1-t_0) w_\sigma), u_n^i - w_\sigma \rangle, \ \ onde \ \ t_0 \in (0,1) \\
&\geq \langle J_\varepsilon'(t u_n^i), u_n^i - w_\sigma \rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|).
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de w_σ, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|w_\sigma - u_n^i\|_H}{n} &\geq \langle J_\varepsilon'(tu_n^i), u_n^i - l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - v_\sigma)\rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|) \\
&= \langle J_\varepsilon'(tu_n^i), u_n^i - l_n^i(v_\sigma)u_n^i - l_n^i(v_\sigma)v_\sigma\rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|) \\
&= \langle J_\varepsilon'(tu_n^i), l_n^i(v_\sigma)\sigma v\rangle + \langle J_\varepsilon'(tu_n^i), u_n^i(1 - l_n^i)\rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|).
\end{aligned}$$

Fazendo $\sigma \to 0$, temos $l_n^i(v_\sigma) \to l_n^i(0) = 1$ e, daí

$$|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| \leq \sigma l_n^i(\sigma v)\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|),$$

onde $\frac{o(\|u_n^i - w_\sigma\|)}{\|u_n^i - w_\sigma\|} \to 0$, quando $\sigma \to 0$. Assim,

$$|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| \leq \frac{\|w_\sigma - u_n^i|(\frac{1}{n} + |o(1)|)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|}.$$

Como $w_\sigma = l_n^i(u_n^i - v_\sigma)$, segue que

$$|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| \leq \frac{\|l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - v_\sigma) - u_n^i\|(\frac{1}{n} + |o(1)|)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|}.$$

Sabendo-se que $v_\sigma = \sigma v$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| &\leq \frac{\|l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - \sigma v) - u_n^i\| \left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|} \\
&= \frac{\|u_n^i(l_n^i(\sigma v) - 1) - \sigma v l_n^i(\sigma v)\| \left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|}.
\end{aligned}$$

Como $l_n^i(0) = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| &\leq \frac{\|u_n^i(l_n^i(\sigma v) - l_n^i(0)) - \sigma v l_n^i(\sigma v)\| \left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|} \\
&\leq \frac{\|u_n^i\||l_n^i(\sigma v) - l_n^i(0)| - \sigma\|v\||l_n^i(\sigma v)|}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|}\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right) \\
&= \left(\frac{\|u_n^i\||l_n^i(\sigma v) - l_n^i(0)|}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|} + 1\right)\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right).
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\sigma \to 0$ e observando que $(\|u_n^i\|)$ é limitada, obtemos

$$|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| \leq (C\|(l_n^i)'(0)\| + 1)\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right).$$

onde $o(1) \to 0$ quando $\sigma \to 0$.

Mostraremos agora que $\|(l_n^i)'(0)\| \leq c$. Dada $\phi \in C_0^\infty$, temos

$$\left|\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), \phi\rangle\right| \leq 2|(u_n^i|\phi)| + p\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^{p-2}u_n^i\phi dz\right| + q\left|\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_n^i|^{q-2}u_n^i\phi dz\right|.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a limitação de $(\|u_n^i\|)$, temos $|(u_n^i|\phi)| \leq \|u_n^i\|\|\phi\| \leq C_1\|\phi\|$. Usando a Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e as Imersões de Sobolev (Teorema C.7),

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^{p-2}u_n^i\phi dz\right| \leq f_{max}\|u_n^i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p-1}\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_2\|\phi\|.$$

e

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_n^i|^{q-2}u_n^i\phi dz\right| \leq \alpha\|h\|_\infty\|u_n^i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p-1}\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\|\phi\|.$$

Logo,

$$\left|\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), \phi\rangle\right| \leq C_4\|\phi\|. \tag{1.39}$$

Afirmamos que

$$\left|\left\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), u_n\right\rangle\right| > C_5. \tag{1.40}$$

Como $u_n^i \in M_\varepsilon^- \subset M_\varepsilon$, temos

$$\left\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), u_n^i\right\rangle = (2-q)\|u_n^i\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^p dz.$$

De (1.31)

$$0 < c_1 \leq \|u\| < c_2, \text{ para todo } u \in M_\varepsilon^-,$$

donde

$$\|u_n^i\|^2 > C_6$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^p dz \leq f_{max}\|u_n^i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq f_{max}S^p\|u_n^i\|^p < f_{max}S^p c_2^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), u_n^i\right\rangle\right| &= \left|(2-q)\|u_n^i\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^p dz\right| \\
&\geq \left|(2-q)\|u_n^i\|^2\right| - \left|(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^p dz\right| \\
&> (2-q)C_6 - (p-q)f_{max}S^p c_2^p = C_5,
\end{aligned}$$

mostrando (1.40). Então, de (1.39) e (1.40), temos

$$\left|\langle (l_n^i(0))', \phi\rangle\right| = \left|\frac{\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), \phi\rangle}{\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), u_n^i\rangle}\right| \leq \frac{C_4}{C_5}\|\phi\|.$$

e, portanto, de (1.35) $\|(l_n^i)'(0)\|$ é limitada para todo n e i e, consequentemente, $J_\varepsilon'(u_n^i) = o_n(1)$ fortemente em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. ■

Usando os resultados mostrados anteriormente, mostraremos que a equação (E_λ) tem $k+1$ soluções positivas em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.26 *Suponha que* (f_1)*,* (f_2)*,* (h_1) *e que existe um número positivo* $\lambda^*(\lambda^* = (\varepsilon^*)^2)$ *tal que para* $\lambda > \lambda^*$*, então a equação* (E_λ) *tem* $k+1$ *soluções positivas em* $\mathbb{R}^N$*.*

Demonstração. Para cada $1 \leq i \leq k$, existe uma sequência $\{u_n\} \subset M_\varepsilon^-$ $(PS)_{\beta_\varepsilon^i}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para J_ε. De (1.34), temos

$$\beta_\varepsilon^i < \gamma_\infty - c_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}.$$

Como J_ε satisfaz a condição $(PS)_\beta$ para todo $\beta \in (-\infty, \gamma_\infty - c_0\alpha^{\frac{2}{2-q}})$, então J_ε tem, pelo menos, k pontos críticos em M_ε^- para $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$. Seja $u_+ = max\{u, 0\}$. Substituindo os termos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz$$

do funcional por

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)u_+^p dz \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)u_+^q dz,$$

respectivamente, segue que a equação (E_λ) tem k soluções não negativa em $\mathbb{R}^N$. Aplicando o Princípio do Máximo (Teorema C.13) e o Teorema 1.18, a equação (E_λ) tem $k+1$ soluções positivas em $\mathbb{R}^N$. ■

Capítulo 2

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para um Sistema Elíptico Semilinear

Neste Capítulo vamos estabelecer resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para o sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(z)|u|^{p-2}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \ \text{em } \Omega \\ -\Delta v = \mu h(z)|v|^{p-2}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \ \text{em } \Omega \\ u = v = 0, \ \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad (E_{\lambda,\mu})$$

onde $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $2 < p < \alpha+\beta = 2^*$, $N > 4$, $\lambda, \mu > 0$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f, g, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(A1) f, g e g são funções contínuas e positivas em $\overline{\Omega}$.

(A2) existem k pontos $a^1, a^2, \ldots, a^k$ em Ω tais que

$$f(a^i) = \max_{z\in\Omega} f(z) = 1, \ 1 \le i \le k,$$

e para alguma $\sigma > N$,

$$f(z) - f(a^i) = o(|z - a^i|^{\sigma}),$$

quando $z \to a^i$ uniformemente em i.

Estudos recentes têm investigado os sistemas elípticos com expoentes subcríticos ou críticos e provado a existência de pelo menos uma solução positiva ou a existência de pelo menos duas soluções positivas para esses problemas.

Neste capítulo, construiremos k sequências de Palais-Smale compactas que são adequadamente localizadas em correspondência com os k pontos máximos de f. Sob as hipóteses $(A1)-(A3)$, mostraremos que existem ao menos k soluções positivas do sistema elíptico $(E_{\lambda,\mu})$ para $\lambda,\mu>0$ suficientemente pequenos.

2.1 O Funcional Energia Associado ao Problema e a Variedade de Nehari

Considere o espaço $H=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ com a norma

$$\|(u,v)\|_H=\left[\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dz\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Associado ao problema $(E_{\lambda,\mu})$, consideramos o funcional $J_{\lambda,\mu}$ de classe C^1 (Veja Apêndice A), para $(u,v)\in H$,

$$J_{\lambda,\mu}(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz-\frac{1}{p}\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz.$$

Primeiramente definiremos solução fraca para o problema $(E_{\lambda,\mu})$.

Definição 2.1 *Uma solução fraca para $(E_{\lambda,\mu})$ é um vetor $(u,v)\in H$ que satisfaz*

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi_1+\nabla v\nabla\varphi_2)dz &- \lambda\int_\Omega g(z)|u|^{p-2}u\varphi_1dz-\mu\int_\Omega h(z)|v|^{p-2}v\varphi_2dz-\\ &- \frac{\alpha}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta\varphi_1dz-\frac{\beta}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v\varphi_2dz=0,\end{aligned}$$

para todo $(\varphi_1,\varphi_2)\in H$, ou seja, é um ponto crítico do funcional $J_{\lambda,\mu}$.

Considere a Variedade de Nehari para o funcional $J_{\lambda,\mu}$

$$M_{\lambda,\mu}=\left\{(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}:\ \left\langle J'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle=0\right\},\tag{2.1}$$

onde

$$\left\langle J'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle=\|(u,v)\|_H^2-\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz-\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz.\tag{2.2}$$

Observe que a Variedade de Nehari $M_{\lambda,\mu}$ contém todas as soluções não negativas de $(E_{\lambda,\mu})$.

Sejam S a melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}}} \left(= \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dz}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} |u|^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}}} \right) > 0,$$

onde $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \colon \nabla u \in (L^2(\mathbb{R}^N))^N\right\}$ e

$$S_{\alpha,\beta} = \inf_{u,v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|(u,v)\|_H^2}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta} dz\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}. \tag{2.3}$$

Lema 2.2 *Se $\alpha+\beta \leq 2^*$, então existe uma constante positiva tal que*

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta} dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \leq C\|(u,v)\|_H.$$

Consequentemente, $S_{\alpha,\beta}$ está bem definida e $S_{\alpha,\beta} > 0$.

Demonstração. Pela definição de S, para todo $(u,v) \in H$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta} dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} &\leq \left[\int_{\Omega} (\max\{|u|,|v|\})^{\alpha+\beta} dz\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq \left[\int_{\Omega} \left(|u|^{\alpha+\beta} + |v|^{\alpha+\beta}\right) dz\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq \left[2\max\left\{\int_{\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dz, \int_{\Omega} |v|^{\alpha+\beta} dz\right\}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\int_{\Omega} |v|^{\alpha+\beta} dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right] \\
&\leq \frac{2^{\frac{1}{\alpha+\beta}}}{S} \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dz + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dz\right] \\
&= \frac{2^{\frac{1}{2(\alpha+\beta)}}}{S^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dz\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{2(\alpha+\beta)}}}{S^{\frac{1}{2}}} \|(u,v)\|_H.
\end{aligned}$$

■

De acordo com Alves, de Morais Filho e Souto (Veja Teorema 5, [2]), temos que

$$S_{\alpha,\beta} = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] S, \tag{2.4}$$

onde $\alpha+\beta = 2^*$. Observe que S é independente do domínio e nunca é atingido exceto quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ (Ver Proposição 1.43, [30]). Além disso, S é atingido pela função (Ver Teorema 1.42, [30])

$$U(z) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{(1+|z|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

e

$$\|\nabla U\|_{L^2}^2 = \|U\|_{L^{2^*}}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}}.$$

Note que $\varepsilon^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ é uma solução da seguinte equação

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1}, \ \mathbb{R}^N \\ u > 0, \ \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

O funcional energia associado ao problema é dado por

$$I_{max}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dz$$

e

$$\gamma_{max} = \inf_{u \in N_{max}} I_{max}(u)$$

onde

$$N_{max} = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ \{0\} : \ \left\langle I'_{max}(u), u \right\rangle = 0 \right\}.$$

Além disso, temos que

$$\gamma_{max} = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} > 0.$$

Para $\lambda = \mu = 0$, o sistema elíptico semilinear $(E_{\lambda,\mu})$ toma a forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \text{ em } \Omega; \\ -\Delta v = \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \text{ em } \Omega; \\ (u,v) \in H, \end{cases} \tag{$E_{0,0}$}$$

e o funcional energia associado é dado por

$$J_{0,0}(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz$$

e

$$\theta_{0,0} = \inf_{(u,v)\in N_{0,0}} J_{0,0}(u,v),$$

onde

$$M_{0,0} = \left\{(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}:\ \left\langle J'_{0,0}(u,v),(u,v)\right\rangle = 0\right\}.$$

Note que se $f(a^i) = \max_{z\in\Omega} f(z) = 1$, definimos

$$J_{max}(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dz$$

e

$$\theta_{max} = \inf_{(u,v)\in M_{max}} J_{max}(u,v),$$

onde

$$M_{max} = \left\{(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}:\ \left\langle J'_{max}(u,v),(u,v)\right\rangle = 0\right\}.$$

Agora, mostraremos um resultado que é essencial para os resultados posteriores.

Lema 2.3 *Seja $D\subset\mathbb{R}^N$ um domínio suave (possivelmente limitado). Se $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(D)$ e $u_n \to u$, $v_n \to v$ q.s. em D, então*

$$\lim_{n\to\infty}\int_D |u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz = \lim_{n\to\infty}\int_D |u_n|^\alpha|v_n|^\beta dz - \int_D |u|^\alpha|v|^\beta dz.$$

Demonstração. Vamos analisar a diferença

$$\int_D |u_n|^\alpha|v_n|^\beta dx - \int_D |u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dx.$$

Obeserve primeiro que

$$\begin{aligned}\int_D |u_n|^\alpha|v_n|^\beta dx - \int_D |u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dx &= \int_D (|u_n|^\alpha|v_n|^\beta - |u_n-u|^\alpha|v_n|^\beta)dx\\ &\quad + \int_D (|u_n-u|^\alpha|v_n|^\beta - |u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta)dx.\end{aligned}$$

Defina $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ por

$$F(t) = |u_n-tu|^\alpha|v_n|^\beta.$$

Então,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \alpha|u_n - tu|^{\alpha-2}(u_n - tu)|v_n|^{\beta}(-u), \ t \in [0,1].$$

Temos

$$\int_D (|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta} - |u_n - u|^{\alpha}|v_n|^{\beta})dx \ = \ -\int_D [F(1) - F(0)]dx.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}\int_D (|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta} - |u_n - u|^{\alpha}|v_n|^{\beta})dx &= -\int_D \left[\int_0^1 \frac{dF}{dt}dt\right] \\ &= \int_D \int_0^1 \alpha|u_n - tu|^{\alpha-2}(u_n - tu)|v_n|^{\beta} u dt dx.\end{aligned}$$

Analogamente, defina $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$G(t) = |u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta}.$$

Então,

$$\frac{dG(t)}{dt} = \beta|u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv)(-v), \ t \in [0,1].$$

Também, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{aligned}\int_D (|u_n - u|^{\alpha}|v_n|^{\beta} - |u_n - u|^{\alpha}|v_n - v|^{\beta})dx &= -\int_D [G(1) - G(0)]dx \\ &= -\int_D \left[\int_0^1 \frac{dG}{dt}dt\right] \\ &= \int_D \int_0^1 \beta|u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv) v dt dx.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_D |u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}dx - \int_D |u_n - u|^{\alpha}|v_n - v|^{\beta}dx &= \alpha \int_D \int_0^1 |u_n - tu|^{\alpha-2}(u_n - tu)|v_n|^{\beta} u dx dt \\ &\quad + \beta \int_D \int_0^1 |u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv) v dx dt\end{aligned} \tag{2.5}$$

e daí,

$$\int_D |u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}dx - \int_D |u_n - u|^{\alpha}|v_n - v|^{\beta}dx = \alpha \int_D \int_0^1 f_n u dx dt + \beta \int_D \int_0^1 g_n v dx dt,$$

onde

$$f_n = |u_n - tu|^{\alpha-2}(u_n - tu)|v_n|^{\beta} \text{ e } g_n = |u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv),$$

$t \in [0,1]$. Como,

$$f_n \to (1-t)^{\alpha-1}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}$$

e

$$g_n \to 0 \text{ q.s. em } D \times (0,1),$$

e, além disso,

$$\int_D \int_0^1 |f_n|^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} dxdt \leq \left(\int_D \int_0^1 |u_n - tu|^{\alpha+\beta} dxdt \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}} \left(\int_D \int_0^1 |v_n|^{\alpha+\beta} dxdt \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \leq C$$

e

$$\int_D \int_0^1 |g_n|^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} dxdt \leq \left(\int_D \int_0^1 |u_n - u|^{\alpha+\beta} dxdt \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \left(\int_D \int_0^1 |v_n - tu|^{\alpha+\beta} dxdt \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}} \leq C,$$

concluímos que

$$f_n \rightharpoonup (1-t)^{\alpha-1}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta} \text{ e } g_n \rightharpoonup 0 \text{ em } L^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(D \times (0,1)).$$

Logo,

$$\alpha \int_D \int_0^1 f_n u dxdt \to \alpha \int_D \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}|u|^{\alpha}|v|^{\beta} dxdt = \int_D |u|^{\alpha}|v|^{\beta} dx \tag{2.6}$$

e

$$\beta \int_D \int_0^1 g_n v dxdt \to 0. \tag{2.7}$$

Portanto, inserindo (2.6) e (2.7) em (2.5), obtemos o desejado. ■

Note que $J_{\lambda,\mu}$ é ilimitado inferiormente em H, pois $J_{\lambda,\mu}(tu) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$. O Lema seguinte, mostra que $J_{\lambda,\mu}$ é limitado inferiormente na Variedade de Nehari $M_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.4 *O funcional energia $J_{\lambda,\mu}$ é limitado inferiormente em $M_{\lambda,\mu}$.*

Demonstração. Para $(u,v) \in M_{\lambda,\mu}$, temos

$$\left\langle J'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v) \right\rangle = 0.$$

Dessa forma,

$$\|(u,v)\|_H^2=\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz+\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,\mu}(u,v) &= \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz-\frac{1}{p}\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz\\
&= \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz-\frac{1}{p}\left[\|(u,v)\|_H^2-\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz\right]\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|(u,v)\|_H^2+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz\\
&> 0.
\end{aligned}$$

■

Sendo $J_{\lambda,\mu}$ limitada inferiormente em $M_{\lambda,\mu}$, podemos definir

$$\theta_{\lambda,\mu}=\inf_{(u,v)\in M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v).$$

Lema 2.5 *Temos*

i) Existem números positivos σ e d_0 tais que $J_{\lambda,\mu}(u,v)\geq d_0$ para $\|(u,v)\|_H=\sigma$;

ii) Existe $(\bar{u},\bar{v})\in H\backslash\{(0,0)\}$ tal que

$$\|(\bar{u},\bar{v})\|_H>\sigma \ \ e \ \ J_{\lambda,\mu}(\bar{u},\bar{v})<0.$$

Demonstração. *i*) Por (A2), temos que $f(z)\leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,\mu}(u,v) &= \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz-\frac{1}{p}\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz\\
&\geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dz-\frac{1}{p}\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz.
\end{aligned}$$

Afirmação 1: $\displaystyle\int_\Omega(|u|^\alpha|v|^\beta)dz\leq\left(\frac{\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dz}{S_{\alpha,\beta}}\right)^{\frac{2^*}{2}}$. De fato, se $\displaystyle\int_\Omega(|u|^\alpha|v|^\beta)dz=0$, a afirmação vale. Caso contrário, consideramos

$$a=\left(\int_\Omega(|u|^\alpha|v|^\beta)dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\neq 0.$$

Então, $\left(\frac{u}{a},\frac{v}{a}\right)$ é tal que

$$\int_\Omega \left(\left|\frac{u}{a}\right|^\alpha \left|\frac{v}{a}\right|^\beta \right) dz = 1.$$

Daí, pela definição de $S_{\alpha,\beta}$ (Equação (2.3)), obtemos

$$S_{\alpha,\beta} \leq \int_\Omega \left(\nabla\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \nabla\left(\frac{v}{a}\right)^2 \right) dz = \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dz}{\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}.$$

o que prova a afirmação.

Afirmação 2: $\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p) dz \leq Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}} (\lambda+\mu) \|(u,v)\|_H^p$, onde $Max = max\{\|g\|_\infty, \|h\|_\infty\}$. De fato, temos

$$\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p) dz \leq \lambda \|g\|_\infty \int_\Omega |u|^p dz + \mu \|h\|_\infty \int_\Omega |v|^p dz,$$

pois $|g(z)| \leq \|g\|_\infty$ e $|h(z)| \leq \|h\|_\infty$, uma vez que g e h são funções continuas em $\overline{\Omega}$. Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2), com expoentes conjugados $\frac{2^*}{2^*-p}$ e $\frac{2^*}{p}$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p) dz &\leq \lambda \|g\|_\infty \left[\int_\Omega 1 dz\right]^{\frac{2^*}{2^*-p}} \left[\int_\Omega (|u|^p)^{\frac{2^*}{p}} dz\right]^{\frac{p}{2^*}} \\
&\quad + \mu \|h\|_\infty \left[\int_\Omega 1 dz\right]^{\frac{2^*}{2^*-p}} \left[\int_\Omega (|v|^p)^{\frac{2^*}{p}} dz\right]^{\frac{p}{2^*}} \\
&= \lambda \|g\|_\infty |\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} \left[\int_\Omega |u|^{2^*} dz\right]^{\frac{p}{2^*}} + \mu \|h\|_\infty |\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} \left[\int_\Omega |v|^{2^*} dz\right]^{\frac{p}{2^*}}.
\end{aligned}$$

Da definição de S, segue que

$$\int_\Omega |u|^{2^*} dz \leq S^{\frac{-2^*}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dz\right)^{\frac{2^*}{2}} \quad \text{e} \quad \int_\Omega |v|^{2^*} dz \leq S^{\frac{-2^*}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dz\right)^{\frac{2^*}{2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p) dz &\leq \lambda \|g\|_\infty |\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} S^{\frac{-p}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dz\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\quad + \mu \|h\|_\infty |\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} S^{\frac{-p}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dz\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Considerando $Max = \max\{\|g\|_\infty, \|h\|_\infty\}$, obtemos

$$\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz \le Max|\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)\|(u,v)\|_H^p,$$

completando a demonstração da afirmação.

Das afirmações 1 e 2, vem

$$J_{\lambda,\mu}(u,v) \ge \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}S_{\alpha,\beta}^{\frac{-2^*}{2}}\|(u,v)\|_H^{2^*} - \frac{1}{p}Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{p}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)\|(u,v)\|_H^p.$$

Escolhendo $\sigma > 0$ de modo que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}S_{\alpha,\beta}^{\frac{-2^*}{2}}\sigma^{2^*-2} - \frac{1}{p}Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{p}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)\sigma^{p-2} = \frac{1}{4},$$

obtemos da desigualdade acima

$$J_{\lambda,\mu}(u,v) \ge \frac{1}{4}\sigma^2 := d_0,$$

para $\|(u,v)\|_H = \sigma$, concluindo a demonstração do item i).

ii) Considere $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$. Como

$$J_{\lambda,\mu}(tu,tv) = \frac{t^2}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz - \frac{t^p}{p}\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz$$

e $2 < p < 2^*$, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} J_{\lambda,\mu}(tu,tv) = -\infty.$$

Para $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$ fixado, existe $\bar{t} > 0$ tal que

$$\|(\bar{t}u,\bar{t}v)\|_H > \sigma \;\text{ e }\; J_{\lambda,\mu}(\bar{t}u,\bar{t}v) < 0.$$

Para concluir a demonstração do resultado basta tomar $(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{t}u,\bar{t}v)$. ■

Como no Capítulo 1, defina a função

$$\Psi_{\lambda,\mu}(u,v) = \left\langle J'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle.$$

Assim, para $(u,v)\in M_{\lambda,\mu}$, de (2.2), resulta

$$\begin{aligned}\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle &= 2\|(u,v)\|_H^2-2^*\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz-p\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz\\ &= (2^*-p)\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz-(2^*-2)\|(u,v)\|_H^2. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle=(2-p)\|(u,v)\|_H^2+(p-2^*)\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz<0. \qquad (2.9)$$

Vamos mostrar agora que mínimos em $M_{\lambda,\mu}$ são pontos críticos para $J_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.6 *Seja $(u_0,v_0)\in M_{\lambda,\mu}$ satisfazendo*

$$J_{\lambda,\mu}(u_0,v_0)=\min_{(u,v)\in M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v)=\theta_{\lambda,\mu}.$$

Então, (u_0,v_0) é solução de $(E_{\lambda,\mu})$.

Demonstração. Por (2.9) ,

$$\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle<0,$$

para $(u,v)\in M_{\lambda,\mu}$. Como

$$J_{\lambda,\mu}(u_0,v_0)=\min_{(u,v)\in M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu},$$

pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema C.10), existe $\tau\in\mathbb{R}$ tal que

$$J'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0)=\tau\psi'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0)\in H^{-1}.$$

Daí,

$$0=\left\langle J'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0),(u_0,v_0)\right\rangle=\tau\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0),(u_0,v_0)\right\rangle.$$

Sendo $\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle<0$, segue que $\tau=0$ e, assim, $J'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0)=0$ em H^{-1}. Portanto, (u_0,v_0) é uma solução não trivial de $(E_{\lambda,\mu})$ e $J_{\lambda,\mu}(u_0,v_0)=\theta_{\lambda,\mu}$. ∎

Lema 2.7 *Para cada $(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}$, existe um número positivo $t_{u,v}$ tal que $(t_{u,v}u,t_{u,v}v)\in M_{\lambda,\mu}$ e $J_{\lambda,\mu}(t_{u,v}u,t_{u,v}v)=\sup_{t\geq 0}J_{\lambda,\mu}(tu,tv)$.*

Demonstração. Para cada $(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}$ fixado, considere a função $\xi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$

definida por

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= J_{\lambda,\mu}(tu,tv) \\
&= \frac{t^2}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz - \frac{t^p}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz.
\end{aligned}
$$

Como $\xi(0)=0$, $\xi(t)>0$ para $t>0$ suficientemente pequeno e $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=-\infty$, pelo Lema 2.3 (i), temos que $\sup\limits_{t\geq 0}\xi(t)$ é atingido para algum $t_{\lambda,\mu}>0$. Isso significa que $\xi'(t_{u,v})=0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
0=\xi'(t_{u,v}) &= J'_{\lambda,\mu}(t_{u,v}u,t_{u,v}v)(u,v) \\
&= \frac{1}{t_{u,v}}\left\langle J'_{\lambda,\mu}(t_{u,v}u,t_{u,v}v),(t_{u,v}u,t_{u,v}v)\right\rangle
\end{aligned}
$$

e, portante, $(t_{u,v}u,t_{u,v}v)\in M_{\lambda,\mu}$. ■

Observação 2.8 *O Lema 2.5 (i) e o Lema 2.7 indicam que* $\theta_{\lambda,\mu}\geq d_0>0$ *para alguma constante* d_0.

2.2 Sobre Sequências de Palais-Smale

A aplicação do Princípio Variacional de Ekeland nos dá o seguinte resultado, cuja demostração será omitida pois as ideias são semelhantes ao Lema 1.25.

Lema 2.9 *Existe uma sequência* $\{(u_n,v_n)\}\subset M_{\lambda,\mu}$ *que é* $(PS)_{\theta_{\lambda,\mu}}$ *para o funcional* $J_{\lambda,\mu}$.

Provaremos agora que $J_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_\gamma$ em H para $\gamma\in\left(0,\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}\right)$.

Lema 2.10 $J_{\lambda,\mu}$ *satisfaz a condição* $(PS)_\gamma$ *em* H *para* $\gamma\in\left(0,\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}\right)$.

Demonstração. Seja $\{(u_n,v_n)\}$ uma sequência $(PS)_\gamma$ em H para $J_{\lambda,\mu}$. Então,

$$
\begin{cases}
J_{\lambda,\mu}(u_n,v_n)=\gamma+o_n(1) \\
J'_{\lambda,\mu}(u_n,v_n)=o_n(1), \text{ em } H^{-1}.
\end{cases}
$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\gamma + c_n + \frac{d_n\|(u_n,v_n)\|_H}{p} &\geq J_{\lambda,\mu}(u_n,v_n) - \frac{1}{p}\left\langle J'_{\lambda,\mu}(u_n,v_n),(u_n,v_n)\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|(u,v)\|_H^2 + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega f(z)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dz \\
&\geq \frac{p-2}{2p}\|(u,v)\|_H^2,
\end{aligned}$$

onde $c_n = o_n(1)$ e $d_n = o_n(1)$ quando $n \to \infty$. Como $2 < p < 2^*$, segue-se que $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em H. Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{(u_n,v_n)\}$, e $(u,v) \in H$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Da Imersão de Sobolev (Teorema C.7), temos

$$u_n \to u, v_n \to u \ \text{ em } \ L^s(\Omega) \ \text{ para algum } \ 1 \leq s < 2^*.$$

Pelo Teorema de Veinberg (Teorema C.4),

$$u_n \to u, v_n \to v \ \text{ q.s. em } \ \Omega.$$

Logo, $J'_{\lambda,\mu}(u,v) = 0$ em H^{-1}.

Seja $p_n = (u_n - u, v_n - v)$. Como no Capítulo 1, temos

$$\|p_n\|_H^2 = \|(u_n,v_n)\|_H^2 - \|(u,v)\|_H^2 + o_n(1).$$

Pelo Lema 2.3, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|p_n\|_H^2 &= \int_\Omega f(z)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dz - \int_\Omega (\lambda g(z)|u_n|^p + \mu h(z)|v_n|^p)dz - \int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz \\
&\quad + \int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz + o_n(1) \\
&= \int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz + o_n(1). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Além disso, também pelo Lema 2.3, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|p_n\|_H^2 &- \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz = \\
&= \frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 + o_n(1) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz \\
&= \frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dz \\
&\quad + \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz + o_n(1) \\
&= J_{\lambda,\mu}(u_n,v_n) - J_{\lambda,\mu}(u,v) + o_n(1) \\
&= \gamma - J_{\lambda,\mu}(u,v). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Por (2.10), podemos supor que

$$\|p_n\|_H^2 \to l \ \text{ e } \ \int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz \to l, \qquad (2.12)$$

quando $n \to \infty$. Observe que

$$S_{\alpha,\beta} = \inf_{u,v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|(u,v)\|_H^2}{\left(\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}, \qquad (2.13)$$

quando $\alpha+\beta = 2^*$. Seja $l > 0$. Por (2.13), obtemos

$$S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega |u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|(u_n-u,v_n-v)\|_H^2.$$

Como $f(z) \leq 1$ (veja hipótese (A2)), temos

$$S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega |u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Assim,

$$S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|(u_n-u,v_n-v)\|_H^2,$$

o que implica

$$S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|p_n\|_H^2.$$

Passando ao limite, quando $n \to \infty$, vem

$$S_{\alpha,\beta}\, l^{\frac{2}{2^*}} \leq l.$$

Isto implica $l \geq (S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$. Assim, por (2.11) e (2.12), obtemos que

$$\gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) l + J_{\lambda,\mu}(u,v).$$

Como $J_{\lambda,\mu}(u,v) \geq d_0$ (veja Lema 2.5), $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} = \frac{1}{N}$ e $l \geq (S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$, vem

$$\gamma \geq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}},$$

o que é uma contradição, pois $\gamma < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$. Logo, $l = 0$ e, portanto, $(u_n, v_n) \to (u,v)$ em H. ■

2.3 Existência de uma Solução Positiva

Como mencionado anteriormente

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}}.$$

é a melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, temos que

$$U(z) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{[1+|z|^2]^{\frac{N-2}{2}}}$$

é um minimizante de S (Ver Teorema 1.4.2, [30]) e $\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|U\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = S^{\frac{N}{2}}$. Seja $\eta_i \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \eta_i \leq 1, \ |\nabla \eta_i| \leq c; \\ \eta_i(z) = 1, \ |z - a^i| < \frac{\rho_0}{2}; \\ \eta_i(z) = 0, \ |z - a^i| > \rho_0, \end{cases}$$

onde $1 \leq i \leq k$. Para $1 \leq i \leq k$ defina

$$u^i_\varepsilon(z) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta_i(z) U\left(\frac{z - a^i}{\varepsilon}\right) = \frac{c_1 \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \eta_i(z)}{[\varepsilon^2 + |z - a^i|^2]^{\frac{N-2}{2}}}, \tag{2.14}$$

onde $c_1 = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}$ e $\varepsilon > 0$.

O próximo Lema garante que, fixado $\varepsilon_0 > 0$, $\theta_{\lambda,\mu}$ pertence ao intervalo onde vale a condição (PS) para $J_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.11 *Se existe* $0 < \varepsilon_0 < \min\{1, \rho_0/2\}$ *tal que se* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, então*

$$\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\mu}(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i) < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$$

uniformemente em i. Além disso, temos que

$$0 < \theta_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}.$$

Demonstração. Usaremos os seguintes fatos sobre as funções u_ε^i (para demonstração ver Brezis-Nirenberg [11], Struwe [27] ou Willem [30])

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon^i\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 = \|U\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2 + O(\varepsilon^{N-2}) \\ \|\nabla u_\varepsilon^i\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla U\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + O(\varepsilon^{N-2}). \end{cases} \tag{2.15}$$

Para $N > 4$ e $0 < \varepsilon < \frac{\rho_0}{2}$,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^i\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{B_{\rho_0/2}(a^i)} \left[\varepsilon^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{z-a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p + O(\varepsilon^{N-2}) \\ &\geq c\varepsilon^\theta + O(\varepsilon^{N-2}), \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $\theta = N - \frac{(N-2)p}{2}$.

Inicialmente, consideramos o funcional $J_{0,0} : H \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_{0,0}(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz.$$

Passo I: Mostrar que $\sup_{t\geq 0} J_{0,0}(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i) \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2})$.

De acordo com a condição (A2), como $\sigma > N$, obtemos que

$$\left(\int_\Omega f(z)(u_\varepsilon^i)^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}} = \|U\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2 + O(\varepsilon^{N-2}). \tag{2.17}$$

Com efeito, por (2.14), temos que

$$\|f(x)^{\frac{1}{2^*}} u_\varepsilon^i\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} = \int_\Omega f(z)(u_\varepsilon^i)^{2^*} dz = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N \eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2 + |z-a^i|^2)^N} dz.$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz = \varepsilon^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^N[N(N-2)]^{\frac{N}{2}}}{(1+|y|^2)^N}dz = \|U\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Combinando as igualdades acima, temos

$$\begin{aligned}
\|U\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} - \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N\eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N - f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N\eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N - f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N\eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz \\
&\quad + \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N - f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N\eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|U\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} - \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz + \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{o(|z-a^i|^\sigma)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N}{|z-a^i|^{2N}}dz + \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{o(|z-a^i|^\sigma)}{|z-a^i|^{2N}}dz \\
&= c_1^{2^*}\varepsilon^N N\omega_N \int_{\rho/2}^{\infty} \frac{r^{N-1}}{r^{2N}}dr + \int_0^{\rho/2} \frac{o(r^\sigma)r^{N-1}}{r^{2N}}dr \\
&= c_1^{2^*}\varepsilon^N\omega_N(\rho/2)^{-N} + \frac{o(1)(\rho/2)^{\sigma-N}}{\sigma-N} \leq C_2 = Const.,
\end{aligned}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária do $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$0 \leq 1 - \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}$$

isto é,

$$1 - C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq 1. \tag{2.18}$$

Agora, seja ε suficientemente pequeno tal que $C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} < 1$, então por (2.18) podemos deduzir que:

$$1 - C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \left(1 - C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2}_{L^{2^*}(\Omega)}\|U\|^{-2}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq 1,$$

implicando que

$$\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} - C_2\|U\|^{2-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|f(x)^{\frac{1}{2^*}} u^i_\varepsilon\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leq \|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)},$$

ou seja,

$$\left(\int_\Omega f(z)(u^i_\varepsilon)^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}} = \|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2}),$$

provando o que queríamos.

Usando (2.15) e (2.17), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|\nabla u^i_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\left(\int_\Omega f(z)(u^i_\varepsilon)^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}}} &= \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})} \\
&= \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} - \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} + \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})}. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&\frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})} - \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} = \\
= \;& \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + \|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} O(\varepsilon^{N-2}) - \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} O(\varepsilon^{N-2})}{\left(\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O\left(\varepsilon^{N-2}\right)\right)\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} \\
= \;& \frac{\left(\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) O(\varepsilon^{N-2})}{\left(\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})\right)\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} \\
= \;& O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}$$

Assim, por (2.19),

$$\begin{aligned}
\frac{\|\nabla u^i_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\left(\int_\Omega f(z)(u^i_\varepsilon)^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}}} &= \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} + O(\varepsilon^{N-2}) \\
&= S + O(\varepsilon^{N-2}), \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

pois U é um minimizante de S.

Vamos mostrar agora que

$$\max_{t\geq 0}\left(\frac{a}{2}t^2 - \frac{b}{2^*}t^{2^*}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{a}{b^{2/2^*}}\right)^{\frac{N}{2}},$$

para alguns $a > 0$ e $b > 0$. Seja $\varphi(t) = \frac{a}{2}t^2 - \frac{b}{2^*}t^{2^*}$. Derivando $\varphi(t)$, obtemos $\varphi'(t) = at - bt^{2^*-1}$. Como $2^* > 2$, temos que $2^* - 1 > 1$, então $at - bt^{2^*-1} = 0$ implica $t(a - bt^{2^*-2}) = 0$. Assim, os possíveis pontos críticos para φ são:

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Mas como $\varphi(t) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$, temos $\varphi(0) \leq \varphi\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\right)$. Portanto, segue que $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é o ponto de máximo de φ. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0}\left(\frac{a}{2}t^2 - \frac{b}{2^*}t^{2^*}\right) &= \frac{a}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{2^*-2}} - \frac{b}{2^*}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{2^*-2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{a^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{b^{\frac{2}{2^*-2}}} - \frac{1}{2^*}\frac{a^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{b^{\frac{2}{2^*-2}}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\frac{a^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{b^{\frac{2}{2^*-2}}} \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{a}{b^{2/2^*}}\right)^{\frac{N}{2}},
\end{aligned}$$

mostrando o que queríamos. Por (2.20), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} J_{0,0}(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon) &= \sup_{t\geq 0}\left[\frac{1}{2}\|(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon)\|^2_H - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon|^\alpha |t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon|^\beta dz\right] \\
&= \sup_{t\geq 0}\left[\frac{t^2}{2}(\alpha+\beta)\|\nabla u^i_\varepsilon\|^2_{L^2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\int_\Omega f(z)(u^i_\varepsilon)^{2^*}dz\right] \\
&= \frac{1}{N}\left[\frac{(\alpha+\beta)\|\nabla u^i_\varepsilon\|^2_{L^2}}{\left(\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\int_\Omega f(z)(u^i_\varepsilon)^{2^*}dz\right)^{2/2^*}}\right]^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{1}{N}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{N}{2}}\left(S + O(\varepsilon^N - 2)\right)^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{1}{N}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{N}{2}}\left(S^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^N - 2)\right) \\
&= \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

A última igualdade segue da Equação (2.4).

Passo II: Como $J_{\lambda,\mu}$ é contínua em H, $J_{\lambda,\mu}(0,0) = 0$ e $\{(\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, \sqrt{\beta}u^i_\varepsilon)\}$ é uniformemente limitada em H para todo $0 < \varepsilon < \min\{1, \rho_0/2\}$, então existe $t_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \varepsilon < \min\{1, \rho_0/2\}$,

$$\sup_{0\le t\le t_0} J_{\lambda,\mu}(t\sqrt{\alpha}w_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}w_\varepsilon^i) < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} \text{ uniformemente em } i.$$

De acordo com a condição (A1), $g_{inf} = \inf_{z\in\bar{\Omega}} g(z) > 0$ e $h_{inf} = \inf_{z\in\bar{\Omega}} h(z) > 0$. Aplicando o resultado do Passo I e (2.16), temos para $N > 4$ que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\ge t_0} J_{\lambda,\mu}(t\sqrt{\alpha}w_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}w_\varepsilon^i) &\le \sup_{t\ge t_0} J_{0,0}(t\sqrt{\alpha}w_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}w_\varepsilon^i)\\
&\quad -\frac{t_0^p}{p}\int_\Omega \big(\lambda g(z)|\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i|^p + \mu h(z)|\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i|^p\big)dz\\
&\le \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2}) - \frac{t_0^p}{p}(\lambda+\mu)m\int_{B_{\rho_0/2}(a^i)} (u_\varepsilon^i)^p dz\\
&\le \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2}) - \frac{t_0^p}{p}cm(\lambda+\mu)\varepsilon^\theta,
\end{aligned}$$

onde $m = \min\{\alpha^{p/2}g_{inf}, \beta^{p/2}h_{inf}\}$ e $\theta = N - \frac{(N-2)p}{p}$. Como $2 < p < 2^*$, então $0 < \theta < 2 < N-2$ para $N > 4$. Escolha $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < min\{1, \rho_0/2\}$ e

$$O(\varepsilon^{N-2}) - \frac{t_0^p}{p}cm(\lambda+\mu)\varepsilon^\theta < 0 \text{ para todo } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Segue que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\sup_{t\ge t_0} J_{\lambda,\mu}\big(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i\big) < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} \text{ uniformemente em } i.$$

Passo III: O Lema 2.7 mostra que existe $t_\varepsilon^i > 0$ tal que $\big(t_\varepsilon^i\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t_\varepsilon^i\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i\big) \in M_{\lambda,\mu}$, com $1 \le i \le k$. Para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, pela observação (2.8), temos que

$$0 < \theta_{\lambda,\mu} \le J_{\lambda,\mu}\big(t_\varepsilon^i\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t_\varepsilon^i\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i\big) = \sup_{t\ge 0} J_{\lambda,\mu}\big(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i\big) < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}.$$

■

Teorema 2.12 *O sistema $(E_{\lambda,\mu})$ admite, pelo menos, uma solução positiva $(u_0, v_0) \in M_{\lambda,\mu}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.9 existe uma sequência minimizante $\{(u_n, v_n)\} \subset M_{\lambda,\mu}$ para $J_{\lambda,\mu}$ tal que

$$J_{\lambda,\mu}(u_n, v_n) = \theta_{\lambda,\mu} + o_n(1) \quad \text{e} \quad J'_{\lambda,\mu}(u_n, v_n) = o_n(1) \text{ em } H^{-1}.$$

Como

$$0 < \theta_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}},$$

pelo Lema 2.10, existe uma subsequência $\{(u_n,v_n)\}$ e $(u_0,v_0) \in H$ tais que $(u_n,v_n) \to (u_0,v_0)$ em H. De maneira análoga ao Teorema 1.18, mostra-se que (u_0,v_0) é uma solução não trivial de $(E_{\lambda,\mu})$ e $J_{\lambda,\mu}(u_0,v_0) = \theta_{\lambda,\mu}$. Como $J_{\lambda,\mu}(u_0,v_0) = J_{\lambda,\mu}(|u_0|,|v_0|)$ e $(|u_0|,|v_0|) \in M_{\lambda,\mu}$, pelo Lema 2.6, podemos supor que $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$. Aplicando o Princípio do Máximo segue que $u_0 > 0$ e $v_0 > 0$ em Ω e, portanto, uma solução positiva para o sistema $(E_{\lambda,\mu})$. ∎

2.4 Existência de Múltiplas Soluções Positivas

Nesta seção demonstraremos que o problema $(E_{\lambda,\mu})$ possui pelo menos k soluções positivas. A ideia central é construir vizinhanças em $M_{\lambda,\mu}$ e, em cada vizinhança, uma sequência (PS) fortemente convergente.

Como no Capítulo 1, podemos escolher $0 < \rho_0 < 1$ de modo que

$$\overline{B_{\rho_0}(a^i)} \cap \overline{B_{\rho_0}(a^j)} = \emptyset$$

para $i \neq j$ e $1 \leq i,j \leq k$,

$$\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B_{\rho_0}(a^i)} \subset \Omega \quad \text{e} \quad f(a^i) = \max_{z\in\Omega} f(z) = 1.$$

Defina

$$K = \{a^i; 1 \leq i \leq k\}$$

e

$$K_{\frac{\rho_0}{2}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)}.$$

Suponha que $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B_{\rho_0}(a^i)} \subset B_{r_0}(0)$ para algum $r_0 > 0$. Seja Q definido por

$$Q(u,v) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz}{\displaystyle\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta},$$

onde $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\chi(z) = z$ para $|z| \leq r_0$ e $\chi(z) = \frac{r_0 z}{|z|}$ para $|z| > r_0$.

Para cada $1 \leq i \leq k$, defina as vizinhanças em $M_{\lambda,\mu}$

$$O^i_{\lambda,\mu} = \left\{u \in M_{\lambda,\mu} \colon |Q(u,v) - a^i| < \rho_0\right\}$$

e suas fronteiras

$$\partial O^i_{\lambda,\mu} = \left\{u \in M_{\lambda,\mu} \colon |Q(u,v) - a^i| = \rho_0\right\}.$$

Considere também os números

$$\beta^i_{\lambda,\mu} = \inf_{(u,v)\in O^i_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v) \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}^i_{\lambda,\mu} = \inf_{(u,v)\in \partial O^i_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v).$$

Usando o Lema 2.7, para cada $1 \leq i \leq k$ existe $t^i_\varepsilon > 0$ tal que $(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) \in M_{\lambda,\mu}$. Temos então, o seguinte resultado:

Lema 2.13 *Existe $\varepsilon^0 \in (0,\varepsilon_0)$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$, então $Q(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$ para cada $1 \leq i \leq k$.*

Demonstração. Seja $\Omega_\varepsilon = \{x \colon \varepsilon x + a^i \in \Omega\}$. Como

$$\begin{aligned} Q(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z)|t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon|^\alpha |t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon|^\beta dz}{\displaystyle\int_\Omega |t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon|^\alpha |t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon|^\beta dz} \\ &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z)|t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha}|^\alpha |u^i_\varepsilon|^\alpha |t^i_\varepsilon \sqrt{\beta}|^\beta |u^i_\varepsilon|^\beta dz}{\displaystyle\int_\Omega |t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha}|^\alpha |u^i_\varepsilon|^\alpha |t^i_\varepsilon \sqrt{\beta}|^\beta |u^i_\varepsilon|^\beta dz} \\ &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z)|\varepsilon^{\frac{2-N}{N}} \eta_i(z) U(\frac{2-a^i}{\varepsilon})|^{2^*} dz}{\displaystyle\int_\Omega |\varepsilon^{\frac{2-N}{N}} \eta_i(z) U(\frac{2-a^i}{\varepsilon})|^{2^*} dz} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \chi(\varepsilon x + a^i)\eta_i(\varepsilon x + a^i)|U(x)|^{2^*} dx}{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \eta_i(\varepsilon x + a^i)|U(x)|^{2^*} dx} \end{aligned}$$

segue, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que $Q(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) \to a^i$ quando $\varepsilon \to 0^+$. Portanto, existe $\varepsilon^0 \in (0,\varepsilon_0)$ tal que

$$Q(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) \in K_{\frac{\rho_0}{2}},$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ e cada $1 \leq i \leq k$. ∎

Os Lemas seguintes nos ajudaram provar que $\beta^i_{\lambda,\mu} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,\mu}$ para λ,μ suficientemente pequeno.

Lema 2.14 $\theta_{max} = \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$.

Demonstração. Usando a mesma argumentação do Passo I do Lema 2.11, obtemos que

$$\sup_{t\geq 0} J_{max}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2})$$

uniformemente em i. Similarmente ao Lema 2.7, existe uma sequência $\{s^i_{max}\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\left(s^i_{max}\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, s^i_{max}\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \in M_{max}$ e, segue da definição de θ_{max} que

$$\theta_{max} \leq J_{max}\left(s^i_{max}\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, s^i_{max}\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) = \sup_{t\geq 0} J_{max}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2}).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ na desigualdade acima, temos que $\theta_{max} \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$. Para provar a outra desigualdade considere $\{(u_n, v_n)\} \subset M_{max}$ uma sequência minimizante de θ_{max} para J_{max}. Assim,

$$\|(u_n, v_n)\|^2_H = \int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dz$$

e

$$\theta_{max} = \frac{1}{2}\|(u_n, v_n)\|^2_H - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dz + o_n(1) = \frac{1}{N}\|(u_n, v_n)\|^2_H + o_n(1).$$

Podemos supor que $\|(u_n, v_n)\|^2_H \to l$ e $\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dz \to l$ quando $n \to \infty$, onde $l = N\theta_{max} > 0$. Pela definição de $S_{\alpha,\beta}$,

$$S_{\alpha,\beta} l^{\frac{2}{2^*}} \leq l.$$

Isto implica que $S_{\alpha,\beta} \leq l^{\frac{2}{N}} = (N\theta_{max})^{\frac{2}{N}}$, isto é,

$$\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{N/2} \leq \theta_{max}.$$

∎

Lema 2.15 $\theta_{0,0} = \theta_{max}$

Demonstração. Como $f(z) \leq \max_{z\in\Omega} f(z) = 1$, então $\theta_{max} \leq \theta_{0,0}$. Pelo Passo I do Lema 2.11, $\sup_{t\geq 0} J_{0,0}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2})$ uniformemente em i. Similarmente ao Lema 2.7, temos que existe uma sequência $\{s^i_\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left(s^i_{max}\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, s^i_{max}\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \in M_{0,0}$$

e

$$
\begin{aligned}
\theta_{0,0} &\leq J_{0,0}\left(s^i_{max}\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, s^i_{max}\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right)\\
&= \sup_{t\geq 0} J_{0,0}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right)\\
&\leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2})\\
&= \theta_{max} + O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}
$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos que $\theta_{0,0} \leq \theta_{max}$. ■

Lema 2.16 *Existe um número δ_0 tal que se $(u,v) \in M_{0,0}$ e $J_{0,0}(u,v) \leq \theta_{0,0} + \delta_0$, então $Q(u,v) \in K_{\rho_0/2}$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{(u_n,v_n)\} \subset M_{0,0}$ tal que

$$J_{0,0}(u_n,v_n) = \theta_{0,0} + o_n(1) \ \text{ quando } n \to \infty \quad \text{e} \quad Q(u_n,v_n) \notin K_{\rho_0/2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando cálculo similar ao Lema 2.7, existe uma sequência $\{s^n_{max}\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $(s^n_{max}u_n, s^n_{max}v_n) \in M_{max}$ e

$$
\begin{aligned}
0 &< \theta_{max} \leq J_{max}(s^n_{max}u_n, s^n_{max}v_n) \leq J_{0,0}(s^n_{max}u_n, s^n_{max}v_n) \leq \sup_{t\geq 0} J_{0,0}(tu_n, tv_n)\\
&= J_{0,0}(u_n,v_n) = \theta_{0,0} + o_n(1)
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (Teorema C.11), existe uma sequência $(PS)_{\theta_{max}}$, $\{(U_n,V_n)\}$, para o funcional J_{max} com

$$\|(U_n - s^n_{max}u_n, V_n - s^n_{max}v_n)\|_H = o_n(1).$$

Afirmamos que $\int_\Omega |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz \nrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Caso contrário, como

$$\|(U_n,V_n)\|^2_H = \int_\Omega |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz + o_n(1),$$

teríamos

$$\theta_{max} + o_n(1) = J_{max}(U_n,V_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz + o_n(1) = o_n(1),$$

que é uma contradição, pois $\theta_{max} > 0$.

Considere a função de concentração de Lévy dada por

$$Q_n(\lambda) := \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,\lambda)} |u_n|^{2^*}.$$

Como $\displaystyle\int_\Omega |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz \nrightarrow 0$ quando $n \to \infty$, existem sequências $\{\sigma_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{y_n\} \subset \Omega$ tais que

$$\int_{B_{\sigma_n}(y_n)} |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz \geq c_0, \tag{2.22}$$

para alguma constante $c_n > 0$. Seja

$$\big(\tilde{U}_n(z), \tilde{V}_n(z)\big) = \big(\sigma_n^{\frac{N-2}{2}} U_n(\sigma_n z + y_n), \sigma_n^{\frac{N-2}{2}} V_n(\sigma_n z + y_n)\big).$$

Então, podemos obter

$$\frac{1}{\sigma_n} dist(y_n, \partial\Omega) \to \infty, \ \ n \to \infty.$$

Ademais, existe uma subsequência $\big\{\big(\tilde{U}_n(z), \tilde{V}_n(z)\big)\big\}$ e $\big(\tilde{U}, \tilde{V}\big) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{U}_n \to \tilde{U}$ e $\tilde{V}_n \to \tilde{V}$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Por (2.22), $\tilde{U} \neq 0$ e $\tilde{V} \neq 0$. Uma vez que Ω é um domínio limitado e $\{y_n\} \subset \Omega$, existe uma sequência $\{\sigma_n\}$ tal que $\sigma_n \to 0$. Suponha que a subsequência $y_n \to y_0 \in \overline{\Omega}$ quando $n \to \infty$.

Afirmação: $y_0 \in K$. De fato, uma vez que $J_{0,0}(s^n_{max} u_n, s^n_{max} v_n) = \theta_{max} + o_n(1)$ e $\|(U_n - s^n_{max} u_n, V_n - s^n_{max} v_n)\|_H = o_n(1)$ quando $n \to \infty$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e de $\dfrac{1}{\sigma_n} dist(y_n, \partial\Omega) \to \infty$ quando $n \to \infty$, que

$$\begin{aligned}
(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} &= \int_\Omega f(z) |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz + o_n(1) \\
&= \int_\Omega f(z) \left| \frac{1}{\sigma_n^{\frac{N-2}{2}}} \tilde{U}_n\left(\frac{z - y_n}{\sigma_n}\right) \right|^\alpha \left| \frac{1}{\sigma_n^{\frac{N-2}{2}}} \tilde{V}_n\left(\frac{z - y_n}{\sigma_n}\right) \right|^\beta dz + o_n(1) \\
&= \frac{1}{\sigma_n^{\frac{N-2}{2}(\alpha+\beta)}} \int_\Omega f(z) \left| \tilde{U}_n\left(\frac{z - y_n}{\sigma_n}\right) \right|^\alpha \left| \tilde{V}_n\left(\frac{z - y_n}{\sigma_n}\right) \right|^\beta dz + o_n(1) \\
&= \frac{1}{\sigma_n^{\frac{N-2}{2}\frac{2N}{N-2}}} \int_\Omega f(z) \left| \tilde{U}_n\left(\frac{z - y_n}{\sigma_n}\right) \right|^\alpha \left| \tilde{V}_n\left(\frac{z - y_n}{\sigma_n}\right) \right|^\beta dz + o_n(1) \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_n}\right)^N \int_\Omega f(z) \left| \tilde{U}_n\left(\frac{z - y_n}{\sigma_n}\right) \right|^\alpha \left| \tilde{V}_n\left(\frac{z - y_n}{\sigma_n}\right) \right|^\beta dz + o_n(1) \\
&= \int_\Omega f(\sigma_n z + y_n) |\tilde{U}_n(z)|^\alpha |\tilde{V}_n(z)|^\beta dz + o_n(1) \\
&= f(y_0) (S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}},
\end{aligned}$$

ou seja, $f(y_0) = 1$ e, portanto, $y_0 \in K$.

Uma vez que $\|(U_n - s^n_{max}u_n, V_n - s^n_{max}v_n)\|_H = o_n(1)$ e $\tilde{U}_n \to \tilde{U}$ e $\tilde{V}_n \to \tilde{V}$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\begin{aligned}
Q(u_n, v_n) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z)|s^n_{max}u_n|^\alpha |s^n_{max}v_n|^\beta dz}{\displaystyle\int_\Omega |s^n_{max}u_n|^\alpha |s^n_{max}v_n|^\beta dz} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)^N \int_\Omega \chi(z) \left|\tilde{U}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^\alpha \left|\tilde{V}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^\beta dz}{\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)^N \int_\Omega \left|\tilde{U}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^\alpha \left|\tilde{V}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^\beta dz} + o_n(1) \\
&= y_0 + o_n(1)
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, donde $Q(u_n, v_n) \in K_{\rho_0/2}$, o que é uma contradição, pois supomos que $Q(u_n, v_n) \notin K_{\rho_0/2}$. Portanto, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $(u, v) \in M_{0,0}$ e $J_{0,0}(u, v) \leq \theta_{max} + \delta_0$, então $Q(u, v) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$. ∎

Lema 2.17 *Se $(u, v) \in M_{\lambda,\mu}$ e $J_{\lambda,\mu}(u, v) \leq \theta_{0,0} + \frac{\delta_0}{2}$, então existe um número Λ^* tal que*

$$Q(u, v) \in K_{\frac{\rho_0}{2}} \ \ \textit{para} \ \ 0 < \lambda + \mu < \Lambda^*.$$

Demonstração. De modo análogo ao Lema 2.7, existe um único número positivo

$$s = s(u, v) = \left(\frac{\|(u, v)\|_H^2}{\displaystyle\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz} \right)^{\frac{N-2}{4}}$$

tal que $(su, sv) \in M_{0,0}$.

Afirmação: Existe $\Lambda > 0$ tal que se $0 < \lambda + \mu < \Lambda$, então $s < C$ para alguma constante $C > 0$ (independente de u e v). Do Lema (2.15), $\theta_{0,0} = \theta_{max}$, daí por hipótese

$$\theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} = \theta_{0,0} + \frac{\delta_0}{2} \geq J_{\lambda,\mu}(u, v).$$

Para $(u, v) \in M_{\lambda,\mu}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} &\geq J_{\lambda,\mu}(u, v) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|(u, v)\|_H^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) \int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz \\
&\geq \frac{p-2}{2p} \|(u, v)\|_H^2
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|(u,v)\|_H^2 \leq \frac{2p}{p-2}(\theta_{max}+\delta_0/2) = C_1, \tag{2.23}$$

e, lembrando que existe $d_0 > 0$ tal que $d_0 \leq \theta_{\lambda,\mu}$ (veja observação 2.8), temos

$$\begin{aligned} 0 < d_0 &\leq \theta_{\lambda,\mu} \leq J_{\lambda,\mu}(u,v) \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\|(u,v)\|_H^2 - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz \\ &\leq \frac{1}{N}\|(u,v)\|_H^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|(u,v)\|_H^2 \geq N d_0 = C_2. \tag{2.24}$$

Além disso, como $(u,v) \in M_{\lambda,\mu}$, segue de (2.2) que

$$\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz = \|(u,v)\|_H^2 - \int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz$$

Da Afirmação 2, na demonstração do Lema 2.5 (i), vem

$$\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz \geq \|(u,v)\|_H^2 - Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)\|(u,v)\|_H^p,$$

onde $Max = \{\|g\|_\infty, \|h\|_\infty\}$. Assim, por (2.23), (2.24), temos que

$$\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz \geq C_2 - Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu) C_1^{\frac{p}{2}}.$$

Podemos então escolher $\Lambda > 0$ tal que para $0 < \lambda+\mu < \Lambda$

$$\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz \geq C_2 - Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}} \Lambda C_1^{\frac{p}{2}}. \tag{2.25}$$

Logo, por (2.23), (2.24), (2.25) e da expressão de s, existe $C > 0$ (independente de u e v) tal que $s < C$ para todo $0 < \lambda+\mu < \Lambda$, demonstrando a afirmação.

Note que

$$\begin{aligned} \theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} &\geq J_{\lambda,\mu}(u,v) = \sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\mu}(tu,tv) \geq J_{\lambda,\mu}(su,sv) \\ &= \frac{1}{2}\|(su,sv)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|su|^\alpha |sv|^\beta dz - \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|su|^p + \mu h(z)|sv|^p)dz \\ &\geq J_{0,0}(su,sv) - \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|su|^p + \mu h(z)|sv|^p)dz. \end{aligned}$$

implicando

$$\begin{aligned}
J_{0,0}(su,sv) &\leq \theta_{max}+\frac{\delta_0}{2}+\frac{1}{p}\int_\Omega(\lambda g(z)|su|^p+\mu h(z)|sv|^p)dz\\
&\leq \theta_{max}+\frac{\delta_0}{2}+Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}}S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)\|(su,sv)\|_H^p\\
&< \theta_{max}+\frac{\delta_0}{2}+Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}}S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)C^pC_1^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Então, existe $\Lambda^*\in(0,\Lambda)$ tal que $0<\lambda+\mu<\Lambda^*$

$$J_{0,0}(su,sv)\leq\theta_{max}+\frac{\delta_0}{2}\ \text{ , onde } (su,sv)\in M_{0,0}.$$

Portanto, pelo Lema (2.16), obtemos

$$Q(u,v)=Q(su,sv)\in K_{\frac{\rho_0}{2}}\ \text{ para } 0<\lambda+\mu<\Lambda^*.$$

■

De acordo com os Lemas 2.11 e 2.13, existe $0<\varepsilon^0\leq\varepsilon_0$ tal que

$$\beta^i_{\lambda,\mu}\leq J_{\lambda,\mu}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon,t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right)<\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}\ \text{ para todo } 0<\varepsilon<\varepsilon^0. \tag{2.26}$$

Aplicando o Lema 2.17, concluímos que

$$\tilde{\beta}^i_{\lambda,\mu}\geq\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}+\frac{\delta_0}{2},\ \text{ para todo } 0<\lambda+\mu<\Lambda^*. \tag{2.27}$$

Para cada $1\leq i\leq k$, por (2.26) e (2.27), obtemos

$$\beta^i_{\lambda,\mu}<\tilde{\beta}^i_{\lambda,\mu}\ \text{ para todo } 0<\lambda+\mu<\Lambda^*.$$

Daí,

$$\beta^i_{\lambda,\mu}=\inf_{(u,v)\in O^i_{\lambda,\mu}\cup\partial O^i_{\lambda,\mu}}J_{\lambda,\mu}(u,v),\ \text{ para todo } 0<\lambda+\mu<\Lambda^*.$$

O Lema seguinte é de suma importância para a demonstração do Teorema 2.19, porém não será demonstrado aqui, pois é análogo ao Lema 1.25.

Lema 2.18 *Para cada $1\leq i\leq k$, existe uma sequência $(PS)_{\beta^i_{\lambda,\mu}}$, $\{(u_n,v_n)\}\subset O^i_{\lambda,\mu}$, em H para $J_{\lambda,\mu}$.*

Teorema 2.19 *Existe um número positivo Λ^* tal que $(E_{\lambda,\mu})$ admite, pelo menos, k soluções positivas para quaisque $\lambda,\mu > 0$ satisfazendo $0 < \lambda+\mu < \Lambda^*$.*

Demonstração. Para cada $1 \leq i \leq k$, existe uma sequência $(PS)_{\beta^i_{\lambda,\mu}} \subset O^i_{\lambda,\mu}$ em H para $J_{\lambda,\mu}$. Por (2.26), temos

$$\beta^i_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}.$$

Note que $J_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_\gamma$, para $\gamma \in \left(-\infty, \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}\right)$. Portanto, temos que $J_{\lambda,\mu}$ tem, ao menos, k pontos críticos em $M_{\lambda,\mu}$ para todo $\lambda,\mu > 0$ satisfazendo $0 < \lambda+\mu < \Lambda^*$. Sejam $u_+ = max\{u,0\}$ e $v_+ = max\{v,0\}$. Substituindo os termos $\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz$ e $\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz$ do funcional por $\int_\Omega f(z)u_+^\alpha v_+^\beta dz$ e $\int_\Omega(\lambda g(z)u_+^p + \mu h(z)v_+^p)dz$, respectivamente, segue-se então que $(E_{\lambda,\mu})$ tem k soluções não negativas. Aplicando o Princípio do Máximo, $(E_{\lambda,\mu})$ admite pelo menos k soluções positivas. ∎

Apêndice A

Funcionais Diferenciáveis

Definição A.1 *Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional, onde X é um espaço normado. Diremos que J é diferenciável à Fréchet em $u \in X$ se existe $A \in X^{'}$ tal que, para $v \in X$, temos*

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{\|v\|}\left[J(u+v) - J(u) - Av\right] = 0.$$

Definição A.2 *Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional, onde X é um espaço normado. Diremos que J é diferenciável à Gateaux em $u \in X$ se existe $A \in X^{'}$ tal que, para $v \in X$, temos*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[J(u+tv) - J(u)\right] = Av.$$

A derivada de Gateaux de J em u é denotada por $J'(u)$.

Observação A.3 *Se J tem derivada à Gateaux contínua em X, então $J \in C^1(X, \mathbb{R}^N)$.*

Considere o funcional $J_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Lema A.4 *O funcional $J_\varepsilon \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.*

Demonstração. Considere os funcionais I_1, I_2 e I_3 definidos por

$$I_1(u) = \frac{1}{2}||u||^2, \quad I_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \quad \text{e} \quad I_3(u) = \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Afirmação 1: O funcional I_1 é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. De fato, seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$
\begin{aligned}
I_1'(u)v &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\|u+tv\|^2-\|u\|^2}{t}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\|u\|^2+2t\langle u,v\rangle+t^2\|v\|^2-\|u\|^2}{t}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}2\langle u,v\rangle+t\|v\|^2\\
&= \langle u,v\rangle,
\end{aligned}
$$

onde $\langle u,v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla v+uv)\,dz$. Assim, I_1 é diferenciável à Gateaux e $I_1'(u)v = \langle u,v\rangle$. Provaremos agora a continuidade da derivada de Gateaux de I_1'. Para isso, devemos mostrar que $I_1'(u_n)\to I_1'(u)$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, quando $u_n\to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, ou equivalentemente,

$$\|I_1'(u_n)-I_1'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}\to 0, \text{ quando } n\to+\infty.$$

Considere uma sequência $\{u_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n\to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dados arbitrariamente $\varepsilon>0$ e $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|v\|\le 1$, para n suficientemente grande, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\left(I_1'(u_n)-I_1'(u)\right)v\right| &= |I_1'(u_n-u)v|\\
&= |\langle u_n-u,v\rangle|\\
&= \|u_n-u\|\|v\|\\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

o que implica

$$\|I_1'(u_n)-I_1'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{v\in H^1(\mathbb{R}^N):\ \|v\|\le 1}\left|\left(I_1'(u_n)-I_1'(u)\right)v\right|<\varepsilon,$$

ou seja,

$$\|I_1'(u_n)-I_1'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}\to 0, \text{ quando } n\to+\infty,$$

donde concluímos que I_1' é contínua. Consequentemente, $I_1\in C^1(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$.

Afirmação 2: O funcional I_2 é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$. De fato, consideremos a seguinte função $\zeta:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $\zeta(s)=\frac{1}{p}f(\varepsilon z)|u+stv|^p$, onde $t\in\mathbb{R}$ é tal que $0<|t|<1$ e $u,v\in H^1(\mathbb{R})$. Assim,

i) $\zeta(1)=\frac{1}{p}f(\varepsilon z)|u+tv|^p$;

ii) $\zeta(0) = \frac{1}{p}f(\varepsilon z)|u|^p$;

iii) $\zeta'(s) = f(\varepsilon z)|u+stv|^{p-2}(u+stv)tv$.

Como ζ é diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$\zeta(1) - \zeta(0) = \zeta'(\delta)$$

e segue

$$\frac{1}{p}f(\varepsilon z)|u+stv|^p - \frac{1}{p}f(\varepsilon z)|u|^p = f(\varepsilon z)|u+\delta tv|^{p-2}(u+\delta tv)tv.$$

Daí,

$$\frac{1}{p}f(\varepsilon z)\left(\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\right) = f(\varepsilon z)|u+\delta tv|^{p-2}(u+\delta tv)v.$$

Agora, passando ao limite, quando $t \to 0$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{p}f(\varepsilon z)\left(\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\right) = f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uv.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p}f(\varepsilon z)\left(\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\right)\right| &= |f(\varepsilon z)||u+\delta tv|^{p-1}|v| \\
&\leq |f(\varepsilon z)|\left(|u|| + |\delta||t||v|\right)^{p-1}|v| \\
&\leq M\left(|u|| + |\delta||t||v|\right)^{p-1}|v| \\
&\leq M\left(|u| + |v|\right)^{p-1}|v|
\end{aligned}$$

Como $u,v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $u,v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Decorre disso que $|u|+|v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim, $(|u|+|v|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Usando a Desigualdade de Hölder com expoentes conjugados $\frac{p}{p-1}$ e p, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|u|+|v|)^{p-1}|v|dz \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|(|u|+|v|)^{p-1}\right|^{\frac{p}{p-1}}dz\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Assim, $M(|u|+|v|)^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.3), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}dz &= \int_{\mathbb{R}^N}\lim_{t\to 0}\frac{1}{p}f(\varepsilon z)\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uvdz.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uvdz.$$

Consequentemente, existe a derivada de Gateaux em u, com

$$I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uvdz.$$

Provaremos agora a continuidade da derivada de Gateaux de I_2'. Para isso, devemos mostrar que $I_2'(u_n) \to I_2'(u)$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, quando $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, com $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Das Imersões de Sobolev (Teorema C.7), segue que $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Teorema de Vainberg (Teorema C.4), existem uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$ e $|u(x)| \leq g(x)$ q.s em $\mathbb{R}^N$. Para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|v\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \left|\left(I_2'(u_n) - I_2'(u)\right)v\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^{p-2}u_n v dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uvdz\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)\left(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right)|v|dz\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\varepsilon z)|\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right||v|dz. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) com expoentes conjugados $\frac{p}{p-1}$ e p, obtemos

$$\left|\left(I_2'(u_n) - I_2'(u)\right)v\right| \leq M\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando as Imersões de Sobolev (Teorema C.7), temos

$$\begin{aligned} \left|\left(I_2'(u_n) - I_2'(u)\right)v\right| &\leq M\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} dz\right)^{\frac{p-1}{p}} S\|v\| \\ &\leq MS\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

Além disso, como $u_n(x) \to u(x)$ q.s em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right| \to 0 \text{ q.s em } \mathbb{R}^N.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.3), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} \to 0.$$

Logo,

$$\left|\left(I_2'(u_n) - I_2'(u)\right)v\right| \to 0.$$

Como

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{v \in H^1(\mathbb{R}^N):\ \|v\| \leq 1} \left|\left(I_2'(u_n) - I_2'(u)\right)v\right|,$$

temos

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

donde concluímos que I_2' é contínua. Consequentemente, $I_2 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Afirmação 3: O funcional I_3 é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. A demonstração desta afirmação segue exatamente os mesmos passos da afirmação 2.

Portanto, das afirmações 1, 2 e 3, concluímos que $J_\varepsilon \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. ■

Lema A.5 *O funcional* $J_{\lambda,\mu} \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Demonstração. A demonstração deste Lema segue os mesmos passos do Lema A.4. ■

Apêndice B

Sobre Valores Palais-Smale

Neste Apêndice provaremos que dois valores (PS) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para o funcional I_{max} são iguais. Tais resultados são importantes no estudo de existência de soluções de problema do tipo (E_{max}).

Seja $I_{max} : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional energia de classe C^1 definido por

$$I_{max}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max}|u|^p dz$$

e

$$\gamma_{max} = \inf_{u \in N_{max}} I_{max}(u),$$

onde

$$N_{max} = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_{max}(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Considere o problema de maximização sujeito à um vínculo

$$\alpha_{max} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}}. \tag{B.1}$$

Das Imersões de Sobolev, concluímos que $\alpha_{max} > 0$.

Lema B.1 *α_{max} é um valor (PS) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência maximizante de S. Então,

$$\|u_n\| = 1, \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

e

$$\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = S + o_n(1).$$

Temos

$$\begin{aligned} I_{max}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p} f_{max} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p} f_{max} \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$v_n = \left(f_{max} S^p\right)^{\frac{1}{2-p}} u_n.$$

Observe que

$$\|v_n\|^2 = \left|\left(f_{max} S^p\right)^{\frac{1}{2-p}}\right|^2 \|u_n\| = \left(f_{max} S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} \tag{B.3}$$

e

$$\begin{aligned} \|v_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \left|\left(f_{max} S^p\right)^{\frac{1}{2-p}}\right|^p \|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &= \left(f_{max} S^p\right)^{\frac{p}{2-p}} S^p + o_n(1) \\ &= \left(f_{max}\right)^{\frac{p}{2-p}} S^{\frac{2p}{2-p}} + o_n(1) \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} f_{max}\|v_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= (f_{max})^{\frac{2}{2-p}} S^{\frac{2p}{2-p}} + o_n(1) \\ &= \left(f_{max} S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} + o_n(1). \end{aligned}$$

De $(B.2)$, $(B.3)$ e $(B.4)$, resulta

$$I_{max}(v_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max} S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} + o_n(1) = \alpha_{max} + o_n(1).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, defina

$$T_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p-2} v_n \varphi dz.$$

Considere $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\psi\| = 1$. Assim,

$$\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq S$$

e

$$
\begin{aligned}
|T_n(\psi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p-2} v_n \psi dz \right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p-1} S \\
&= \left[(f_{max})^{\frac{1}{2-p}} S^{\frac{2}{2-p}} \right]^{p-1} S + o_n(1) \\
&= (f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}} S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Donde,

$$
\|T_n\|_{H^{-1}} \leq (f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}} S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1). \tag{B.4}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
T_n\left(\frac{v_n}{\|v_n\|} \right) &= \frac{1}{\|v_n\|} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dz \\
&= \frac{\left(f_{max}\right)^{\frac{p}{2-p}} S^{\frac{2p}{2-p}} + o_n(1)}{\left(f_{max} S^p\right)^{\frac{1}{2-p}}} \\
&= (f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}} S^{\frac{p}{p-1}} + o_n(1).
\end{aligned} \tag{B.5}
$$

De $(B.4)$ e $(B.5)$, concluímos que

$$
\|T_n\|_{H^{-1}} = (f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}} S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1).
$$

Como T_n é um funcional linear contínuo, pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema C.12), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$
T_n(\varphi) = \langle w_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla \varphi + w_n \varphi), \ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)
$$

e

$$
\|w_n\| = \|T_n\|_{H^{-1}}.
$$

Como

$$\begin{aligned}\left\langle I'_{max}(v_n),\varphi\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v_n\nabla\varphi+v_n\varphi)-f_{max}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{p-2}v_n\varphi\\ &= \langle v_n,\varphi\rangle - f_{max}T_n(\varphi)\\ &= \langle v_n,\varphi\rangle - f_{max}\langle w_n,\varphi\rangle\\ &= \langle v_n - f_{max}w_n,\varphi\rangle .\end{aligned}$$

Daí,

$$\left|\left\langle I'_{max}(v_n),\varphi\right\rangle\right| = \|v_n - f_{max}w_n\|. \tag{B.6}$$

Observe que

$$\|v_n - f_{max}w_n\|^2 = \|v_n\|^2 - 2f_{max}\langle w_n, v_n\rangle + (f_{max})^2\|w_n\|^2.$$

Temos

- $f_{max}\langle w_n, v_n\rangle = f_{max}T_n(v_n) = f_{max}\|v_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = f_{max}(f_{max})^{\frac{p}{2-p}}S^{\frac{2p}{2-p}} = (f_{max}S^p)^{\frac{2}{2-p}}.$
- $f_{max}\|w_n\| = f_{max}(f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}}S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1) = (f_{max})^{\frac{1}{2-p}}S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1).$
- $\|v_n\|^2 = \left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}}.$

Das igualdades acima,

$$\|v_n - f_{max}w_n\|^2 = o_n(1).$$

De $(B.6)$, vem

$$\left|\left\langle I'_{max}(v_n),\varphi\right\rangle\right| \leq \|v_n - f_{max}w_n\|^2 = o_n(1),$$

para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\| = 1$. Portanto,

$$I'_{max}(v_n) = o_n(1) \text{ em } H^{-1},$$

demonstrando o resultado. ■

Agora considere o problema de minimização

$$\gamma_{max} = \inf_{u\in N_{max}} I_{max}(u)$$

onde $N_{max} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_{max}(u), u\rangle\}$.

Lema B.2 *Para $u \in N_{max}$, tem-se*

$$\|u\| \geq d,$$

para alguma constante $d > 0$.

Demonstração. Seja $u \in N_{max}$. Então, $\langle I'_{max}(u), u\rangle = 0$. Assim,

$$\|u\|^2 - f_{max}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz,$$

o que implica

$$\|u\|^2 = f_{max}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz = f_{max}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|^2 \leq f_{max}C\|u\|^p.$$

Daí,

$$\|u\|^{p-2} \geq \frac{1}{f_{max}C},$$

implicando

$$\|u\| \geq \left(\frac{1}{f_{max}C}\right)^{\frac{1}{p-2}} = d.$$

■

Observação B.3 $\gamma_{max} > 0$.

Demonstração. Com efeito, para $u \in N_{max}$,

$$\begin{aligned} I_{max}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}f_{max}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz \\ &= \frac{p-1}{2p}\|u\|^2 \\ &\geq \frac{p-1}{2p}d^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\gamma_{max} > 0$. ■

Suponha, agora, as seguintes condições:

$f1)$ $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo $|f(x,t)| \leq C\big(|t|^{q-1} + |t|^{p-1}\big)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, onde C é uma constante positiva.

$f2)$ $f(x,t) = o(|t|^{q-1})$ com $t \to 0$ uniformemente em x.

$f3)$ Existe uma constante positiva $\beta > q$ tal que

$$0 < \beta F(x,t) \leq t f(x,t), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } t \neq 0,$$

onde $F(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,s)ds.$

$f4)$ Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ a função $\dfrac{f(x,t)}{|t|^{q-1}}$ é crescente em t em $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$.

Seja $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional de classe C^1 definido por

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx,$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Considere a Variedade de Nehari dada por

$$N = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\} : \left\langle I'(u), u \right\rangle = 0\}.$$

Lema B.4 *Sob as condições $(f1) - (f4)$ para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ existe um único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in N$. Além disso, o máximo de $I(tu)$ para $t > 0$ é atingido em $t = t_u$.*

Demonstração. Fixado $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ arbitrário, consideremos a função $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = I(tu)$. Note que $\varphi(0) = 0$ e que φ verifica a geometria do passo da montanha, ou seja, $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t) < 0$ para $t > 0$ grande. Logo, o máximo de $\varphi(t)$ em $[0, +\infty)$ é atingido em algum ponto $t_u = t(u) > 0$ e, portanto,

$$\varphi(t_u) = I'(t_u u) = 0.$$

Seja $v = t_u u$. Então, $I'(v)v = 0$, donde $v \in N$. O próximo passo consiste em provar a unicidade de t_u. Considere a função $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(t) = I(tv)$. Assim,

$$\psi(1) = I(v) = \varphi(t_u) = \max_{t \geq 0} \varphi(t) = \max_{t \geq 0} I(tu) = \max_{s \geq 0} I(st_u u) = \max_{s \geq 0} I(su) = \max_{t \geq 0} \psi(t).$$

Logo,

$$0 = \psi(1) = I'(v)v,$$

consequentemente,

$$\|v\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v)v.$$

Agora, supondo $t \geq 1$, resulta

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= I'(tv)v \\ &= t\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tv)v \\ &= t\left[\|v\|^2 - \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,tv)v\right].\end{aligned}$$

Afirmação: $f(x,v)v < \frac{1}{t}f(x,tv)v$. Com efeito, para $v > 0$, sendo $t > 1$, tem-se que $tv > v$ e por $(f4)$,

$$\frac{f(x,tv)}{|tv|} > \frac{f(x,v)}{|v|}$$

ou

$$\frac{f(x,tv)v}{t} > f(x,v)v. \tag{B.7}$$

Se $v < 0$, então $tv < v$ e novamente por $(f4)$

$$\frac{f(x,tv)}{|tv|} < \frac{f(x,v)}{|v|}$$

implicando

$$\frac{f(x,tv)}{-tv} < \frac{f(x,v)}{-v}.$$

Daí,

$$\frac{f(x,tv)v}{t} > f(x,v)v. \tag{B.8}$$

O resultado segue de $(B.7)$ e $(B.8)$. Da afirmação, $\psi' < 0$ para $t > 1$. De maneira análoga concluímos que $\psi' > 0$ se $t \in (0,1)$. Provando que o número positivo t_u satisfazendo $\varphi'(tu) = I'(t_u u) = 0$ é único, finalizando a demonstração do Lema. ■

Teorema B.5 *Sejam $\beta > 0$ e $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência para I_{max} tal que $I_{max}(u_n) = \beta + o_n(1)$ e $\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1)$. Então, existe uma sequência $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $s_n = 1 + o_n(1)$, $\{s_n u_n\} \subset N_{max}$ e $I_{max}(s_n u_n) = \beta + o_n(1)$.*

Demonstração. Pelo Lema B.2, existe $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\{s_n u_n\} \subset N_{max}$. Assim,

$$\langle I_{max}(s_n u_n), s_n u_n\rangle = 0,$$

ou seja,

$$s_n^2\|u_n\|^2 = f_{max} s_n^p \|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Mas, por hipótese, $\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, o que implica

$$s_n^2\|u_n\|^2 = s_n^p\|u_n\|^2 + o_n(1)$$

ou

$$s_n^2(1 - s_n^{p-2})\|u_n\|^2 = o_n(1).$$

Como $I_{max} = \beta + o_n(1)$ e $\beta > 0$, então $s_n \neq 0$.

Afirmação: Existe $C > 0$ tal que $\|u_n\| \geq C$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, suponha por contradição que existe um subsequência tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0.$$

Então, $I_{max}(u_n) = o_n(1)$, mas isto contradiz $\beta > 0$.

Logo, devemos ter $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Da definição de I_{max} e do fato $s_n = 1 + o_n(1)$, concluímos que $I_{max}(s_n u_n) = \beta + o_n(1)$. ■

Teorema B.6 *Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_{\gamma_{max}}$ para I_{max} se, e somente se, $I_{max}(u_n) = \gamma_{max} + o_n(1)$ e $\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1)$. Em particular, toda sequência minimizante $\{u_n\} \subset N_{max}$ de γ_{max} é uma $(PS)_{\gamma_{max}}$ sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}. Consequentemente, γ_{max} é um valor $(PS)_{\gamma_{max}}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}.*

Demonstração. Suponha que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_{\gamma_{max}}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}. Então, claramente

$$\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1).$$

Reciprocamente, se $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é tal que

$$I_{max} = \gamma_{max} + o_n(1)$$

e

$$\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1), \tag{B.9}$$

então

$$I_{max}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p} f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \gamma_{max} + o_n(1).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p}\|u_n\|^2 = \gamma_{max} + o_n(1),$$

o que implica
$$\|u_n\|^2 = \frac{2p}{p-1}\gamma_{max} + o_n(1). \tag{B.10}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$T_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2}u_n\varphi, \text{ para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Seja $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\psi\| = 1$. Então, existe t_ψ tal que $t_\psi\psi \in N_{max}$ e, assim,

$$\|t_\psi\psi\|^2 = f_{max}\|t_\psi\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Daí,
$$t_\psi^2 = f_{max}t_\psi^p\|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

ou seja,
$$t_\psi = \left(f_{max}\|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right)^{-\frac{1}{p-2}}. \tag{B.11}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\gamma_{max} &\leq I_{max}(t_\psi\psi)\\ &= \left(\frac{p-2}{2p}\right)t_\psi^2\|\psi\|^2\\ &= \frac{p-2}{2p}t_\psi^2.\end{aligned}$$

Por $(B.11)$,
$$\gamma_{max} \leq \frac{p-2}{2p}\left(f_{max}\|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right)^{-\frac{2}{p-2}}.$$

Assim,
$$\left(f_{max}\|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{2}{p-2}} \leq \frac{p-2}{2p}\frac{1}{\gamma_{max}},$$

o que implica

$$\begin{aligned}\|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{f_{max}}\left(\frac{p-2}{2p}\frac{1}{\gamma_{max}}\right)^{\frac{p-2}{2}}\\ &= \frac{1}{f_{max}}\left(\frac{2p}{p-2}\gamma_{max}\right)^{\frac{2-p}{2}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = (f_{max})^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{2p}{p-2}\gamma_{max}\right)^{\frac{2-p}{2}}.$$

De $(B.9)$, temos

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p} f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \gamma_{max} + o_n(1).$$

Assim,

$$\frac{1}{2} f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1) - \frac{1}{p} f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \gamma_{max} + o_n(1),$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \gamma_{max} + o_n(1),$$

implicando

$$\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{2p}{p-1}\frac{1}{f_{max}}\gamma_{max} + o_n(1).$$

Note que

$$\begin{aligned}
|T_n(\psi) &\leq \|u_n\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \left(\frac{1}{f_{max}}\frac{2p}{p-1}\gamma_{max}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left((f_{max})^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{2p}{p-2}\gamma_{max}\right)^{\frac{2-p}{2p}}\right) + o_n(1) \\
&= \frac{1}{f_{max}}\left(\frac{2p}{p-1}\gamma_{max}\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|T_n\|_{H^{-1}} \leq \frac{1}{f_{max}}\left(\frac{2p}{p-1}\gamma_{max}\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1).$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema C.12), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$T_n(\varphi) = \langle w_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla\varphi + w_n\varphi)$$

e

$$\|w_n\| = \|T_n\|_{H^{-1}} = \frac{1}{f_{max}}\left(\frac{2p}{p-1}\gamma_{max}\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1). \tag{B.12}$$

Temos

$$\langle w_n, u_n\rangle = T_n(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dz = \frac{1}{f_{max}}\frac{2p}{p-1}\gamma_{max} + o_n(1). \tag{B.13}$$

Por $(B.10)$, $(B.12)$ e $(B.13)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_n - f_{max}w_n\|^2 &= \|u_n\|^2 - 2f_{max}\langle w_n, u_n\rangle + f_{max}^2\|w_n\|^2 \\
&= \frac{2p}{p-1}\gamma_{max} - 2\frac{2p}{p-1}\gamma_{max} + \frac{2p}{p-1}\gamma_{max} + o_n(1) \\
&= o_n(1).
\end{aligned}$$

Para $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\psi\| = 1$, vem

$$\begin{aligned}
\left\langle I'_{max}(u_n), \psi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla \psi + u_n \psi) - f_{max}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2}u_n\psi \\
&= \langle u_n, \psi\rangle - f_{max}T_n(\psi) \\
&= \langle u_n, \psi\rangle - \langle f_{max}w_n, \psi\rangle \\
&= \langle u_n - f_{max}w_n, \psi\rangle .
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|I'_{max}(u_n)\| \leq \|u_n - f_{max}w_n\| = o_n(1)$$

e, portanto,

$$I'_{max} = o_n(1).$$

■

Teorema B.7 *Seja $\beta > 0$ um valor (PS) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}. Então,*

i) $\beta \geq \alpha_{max}$*;*

ii) $\beta \geq \gamma_{max}$.

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ uma sequência $(PS)_\beta$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max} com $\beta > 0$. Então,

$$I_{max} = \beta + o_n(1)$$

e

$$\|u_n\|^2 - f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = o_n(1).$$

$i)$ Temos que

$$\|u_n\| \geq \frac{1}{S}\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{f_{max}}\|u_n\|^2\right)^{\frac{1}{p}} + o_n(1).$$

Logo,

$$\|u_n\|^{\frac{p-2}{p}} \geq \frac{1}{S}\frac{1}{(f_{max})^{1/p}} + o_n(1),$$

ou seja,

$$\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{S^p}\frac{1}{f_{max}}\right)^{\frac{1}{p-2}} + o_n(1) = \left(f_{max}S^p\right)^{\frac{1}{2-p}} + o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\beta + o_n(1) &= I_{max}(u_n) \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p}f_{max}\|u_n\|^p \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} + o_n(1)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\beta \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} = \alpha_{max}.$$

ii) Existe $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\{s_n u_n\} \subset N_{max}$ e $I_{max}(s_n u_n) = \beta + o_n(1)$. Mas, por definição,

$$\gamma_{max} \leq I_{max}(s_n u_n) = \beta + o_n(1).$$

Passando ao limite,

$$\gamma_{max} \leq \beta.$$

■

Corolário B.8 $\gamma_{max} = \alpha_{max} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}}$.

Demonstração. Segue diretamente do Lema $B.1$, Teorema $B.6$ e Teorema $B.7$. ■

Apêndice C

Resultados Importantes

Neste Apêndice traremos alguns resultados que foram úteis para o entendimento do trabalho. Primeiramente, definiremos os Espaços L^p e em seguida listaremos alguns resultados básicos usados referentes aos mesmos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Dado $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ são definidos como

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \colon \, u \ \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \ \text{ é mensurável e } \ \exists C > 0 \ \text{ tal que } \ |u(x)| \leq C \ \text{ q.s. em } \ \Omega \},$$

com a norma

$$\|u\|_\infty = \inf\{ C \colon \, |u(x)| \leq C \ \text{ q.s. em } \ \Omega \},$$

onde consideramos a classe das funções iguais q.s. Então, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach separável, para $1 \leq p < \infty$, e reflexivo para $1 < p < \infty$ (veja [10], pág. 103).

Teorema C.1 (Desigualdade de Young) *Sejam A e B números não negativos e $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ tais que p e q são conjungados, isto é,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [8]. ■

Teorema C.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p$ e $v \in L^q$ com $1 < p < \infty$ tais que p e q são conjugados. Então, $uv \in L^1$ e*

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Demonstração. Ver [8]. ■

Teorema C.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (u_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para uma função real mensurável u. Se existe uma função integrável v tal que $|u_n| \leq v$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então u é integrável e é válido*

$$\int u \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int u_n \, d\mu.$$

Demonstração. Ver [8], Teorema 5.6, p. 44. ■

Teorema C.4 (Teorema de Vainberg) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$, tais que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então, existe uma subsequência $(u_{n_i}) \subseteq (u_n)$ e $g \in L^p(\Omega)$, satisfazendo:*

i) $u_{n_i}(x) \to u(x)$ *q.s. em* Ω*;*

ii) $|u_{n_i}(x)| \leq g(x)$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver [10], Teorema 4.9. ■

Teorema C.5 (Lema de Brezis-Lieb) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto aberto e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ em que $1 \leq p < \infty$. Se*

i) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$*;*

ii) $u_n \to u$ *q.s. em* Ω.

Então,

$$\lim_{n \to \infty} [\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p] = \|u\|_p^p.$$

Demonstração. Ver [30], Lema 1.32, pág. 21. ■

Agora, definiremos os Espaços de Sobolev e enunciaremos alguns resultados usados referente a esses espaços.

Dados $k \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo formado por todas as funções de $L^p(\Omega)$ que admitem derivadas parciais fracas até ordem k em $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq k\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Define-se também

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ são de Banach separáveis, para $1 \leq p < \infty$, e reflexivos, para $1 < p < \infty$ (veja [18]). Para $p = 2$, o espaço $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com norma proveniente do seguinte produto interno

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Quando $p = 2$ e $k = 1$, temos o espaço de Hilbert

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}}.$$

Observação C.6 *O espaço $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ coincide com $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema C.7 (Teorema de Imersão de Sobolev) *Temos*

i) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Então

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in \left[1, 2^* = \frac{2N}{N-2}\right].$$

A imersão é compacta se, e somente se, $q \in [1, 2^*)$.

ii) Seja $N \geq 3$. Então

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } q \in [2, 2^*].$$

A imersão nunca é compacta.

Ressaltamos que a continuidade da imersão acima é expressa explicitamente pela de-

sigualdade da forma

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq S||u||, \text{ para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde S é uma constante que não depende de u.

[Ver [5]].

Teorema C.8 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $\{u_n\}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ em } E.$$

Demonstração. Ver [9], Teorema III.27, pág. 50. ■

Teorema C.9 (Lema de Pierre-Louis Lions) *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \to 0, \quad n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Ver [30], Lema 1.21. ■

Por fim, apresentaremos alguns teoremas importantes que nos ajudaram a compreender os resultados.

Teorema C.10 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam E um espaço de Banach e $J, F \in C^1(E, \mathbb{R})$. Se J é limitado inferiormente no conjunto $M = \{u \in E : F(u) = 0\}$ e valem as propriedades:*

i) $F'(u) \neq 0$, *para todo* $u \in M$,

ii) Existe $u_0 \in M$ *tal que* $J(u_0) = \min_{u \in M} J(u)$.

Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

O número $\lambda \in \mathbb{R}$ é denominado multiplicador de Lagrange.

Demonstração. Ver [21], Proposição 14.3, pág. 55. ■

Teorema C.11 (Principio Variacional de Ekeland) *Seja $J : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $J \not\equiv +\infty$, semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que*

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon$$

e

$$J(u_\varepsilon) - \varepsilon d(x, u_\varepsilon) < J(x),$$

para todo $x \in X$, $x \neq u_\varepsilon$.

Demonstração. Ver [16], pág. 35. ■

Teorema C.12 (Teorema de Representação de Riesz) *Todo funcional linear limitado* f *sobre um espaço de Hilbert pode ser representado em termos do produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle z, x \rangle$$

onde z *é unicamente determinado e verifica* $\|f\| = \|z\|$.

Demonstração. Ver [9]. ■

Teorema C.13 (Princípio do Máximo) *Se* u *é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $f \geq 0$, *então* $u \geq 0$; *e se* u *atinge mínimo, então* $u \equiv 0$.

Demonstração. Ver [21]. ■

Referências Bibliográficas

[1] ADACHI, S.; TANAKA, K. Four positive solutions for the semilinear elliptic equation: $-\Delta u + u = a(x)u^p + f(x)$ em $\mathbb{R}^N$. *Calc Var Partial Diff Edu*. 11, 63-95 (2000).

[2] ALVES, C. O.; de MORAIS FILHO, D. C.; SOUTO, M. A. S. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents. *Nonlinear Anal*. 42, 771-787 (2000).

[3] AMBROSETTI, A.; BREZIS, H.; CERAMI, G. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *Journal of Functional Analysis*. 122, 519-543 (1994).

[4] AMBROSETTI, A.; GARCIA AZORERO, J.; PERAL ALONSO, I. Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations. *Journal of Functional Analysis*. 137, 219-242 (1996).

[5] BADIALE, M.; SERRA, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Springer: New York, 2011.

[6] BAHRI, A.; LI, Y. Y. On a Min-max Procedure for the Existence of a Positive Solution for Certain Scalar Field Equations in $\mathbb{R}^N$. *Rev. Mat. Iberoamericana*. 6, 1-15 (1990).

[7] BAHRI, A.; LIONS, P. L. On the Existence of a Positive Solution of Semilinear Elliptic Equations in Unbounded Domains. *Ann. Inst. Henri Poincaré Anal Nonlinéaire* 14, 365-413 (1997).

[8] BARTLE, R. G. *Elements of Integration*. John Wiley & Sons: New York, 1966.

[9] BREZIS, H. *Análisis Funcional, Teoria y Aplicaciones*. Versiõn Española de Juan Ramón Esteban. Alianza: Madrid, 1984.

[10] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer: New York, 2010.

[11] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communs Pure Appl. Math*. 36, 437-477 (1983).

[12] BROWN, K. J.; ZHANG, Y. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function. *Journal Differential Equations*. 193, 481-499 (2003).

[13] CAO, D. M.; ZHOU, H. S. Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$. *Proc Roy Soc Edinburgh, Sect A*. 126, 443-463 (1996).

[14] de FIGUEIREDO, D. G.; GOSSES, J. P.; UBILLA, P. Local Superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems. *Journal of Functional Analysis*. 199, 452-467 (2003).

[15] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics*, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[16] FERREIRA, M. C. *Existência de Soluções Via Métodos Variacionais para uma classe de Problemas Quasilineares com Expoentes Variáveis.* Tese (Doutorado em Matemática). Universidade Federal da Paraíba/Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande. 2014.

[17] GIDAS, B; NI, W. M.; NIRENBERG, L. Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle. *Commun Math Phys*. 68, 209-243 (1979).

[18] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. Elliptic partial differential equations of second order. *Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[19] HIRANO, N. Existence of entire positive solutions for nonhomogeneous elliptic equations. *Nonlinear Anal*. 29, 889-901 (1997).

[20] HSU, T. S.; LIN, H. L. Four positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in $\mathbb{R}^N$. *J Math Anal Appl*. 365, 758-775 (2010).

[21] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques: et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, 1993.

[22] KESAVAN, S. *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*. Hindustan Book Agency: India, 2004.

[23] KWONG, M. K. Uniqueness of Positive Solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ em $\mathbb{R}^N$. *Arch Ration Mech Anal*. 105, 234-266 (1989).

[24] LIN, H. Multiple positive solutions for semilinear elliptic systems. *J Math Anal Appl*. 391, 107-118 (2012).

[25] LIN, H. Multiple positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in $\mathbb{R}^N$. *Boundary Value Problems*. 2012(24), 1-17 (2012).

[26] REIS, F. P. P. *Soluções Positivas de um Sistema Elíptico Semilinear nos Casos Críticos e Supercrítico*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, (2011).

[27] STRUWE, M. *Variational Methods*, second edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1996.

[28] TARANTELLO, G. On Nonhomogeneous Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent. *Ann. Inst. Henri Poincaré Anal Non Linéaire*. 9, 281-304 (1992).

[29] WANG, H. C. Palais-Smale approaches to semilinear elliptic equations in unbounded domains. *Electron J Diff Equ Monogragh*. 142 (2006).

[30] WILLEM, M. *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[31] WU, T. On Semilinear Elliptic Equations Involving Concave-Convex Nonlinearities and Sign-Changing Weight Function. *J . Math. Anal. Appl*. 318, 253–27 (2006).

[32] ZHU, X. P. A perturbation result on positive entire solutions of a semilinear elliptic equation. *J Diff Equ*. 92, 163-178 (1991).