Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Soluções não-negativas para problemas elípticos do tipo Kirchhoff envolvendo o expoente crítico de Sobolev

por

Francimário Souto Medeiros

sob orientação do

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira

Campina Grande - PB
outubro de 2017

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Francimário Souto Medeiros

Soluções não-negativas para problemas elípticos do tipo Kirchhoff envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Trabalho apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira

Orientador

Campina Grande, Outubro de 2017
Curso de Matemática, Modalidade Mestrado Acadêmico em Matemática

Soluções não-negativas para problemas elípticos do tipo Kirchhoff envolvendo o expoente crítico de Sobolev

por

Francimário Souto Medeiros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Examinador

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB
Examinador

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Outubro de 2017

Resumo

Estudamos a seguinte classe de problemas elípticos tipo Kirchhoff:

$$(P_\mu) \quad \begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u &= \mu g(x,u) + u^5 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e $a, b > 0$. Impondo condições sobre a não-linearidade $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e sobre o parâmetro $\mu > 0$, demonstramos a existência de soluções não-negativas não-triviais para (P_μ). Também demonstramos a existência de solucões não-negativas não-triviais para a seguinte classe de problemas elípticos tipo Kirchhoff:

$$(P_{\lambda,\mu}) \quad \begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u &= \lambda u^q + \mu u^3 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $a, b > 0$, $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros e $1 \leq q < 3$. As principais ferramentas utilizadas são o método variacional e o Lema de concentração de compacidade de Lions.

Palavras-chave: Problemas de valores de fronteira elípticos, problemas tipo Kirchhoff, métodos variacionais.

Abstract

We study the following class of Kirchhoff type elliptic problems:

$$(P_\mu) \quad \begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u &= \mu g(x,u) + u^5 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and $a, b > 0$. Under conditions on the nonlinearity $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ and on the parameter $\mu > 0$, we prove the existence of nontrivial nonnegative solutions for (P_μ). We also prove the existence of nontrivial nonnegative solutions for the following class of Kirchhoff type elliptic problems:

$$(P_{\lambda,\mu}) \quad \begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u &= \lambda u^q + \mu u^3 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $a, b > 0$, $\lambda, \mu > 0$ are parameters and $1 \leq q < 3$. The main tools used are the variational method and the Lions' Concentration Compactness Lemma.

Keywords: Elliptic boundary problems, Kirchhoff type problems, variational methods.

Dedicatória

A minha avó, Júlia (*In memoriam*), e a minha segunda mãe, Nena (*In memoriam*), mulheres fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, pela Sua infinita misericórdia, pelo dom da vida e por ter me dado forças para superar os obstáculos desta caminhada; e à Virgem Maria, que nunca cessou de interceder por mim.

Aos meus pais, Chiquinho e Preta, por todo esforço, sacrifício, doação e torcida depositados em mim para que eu chegasse até aqui.

À minha irmã, Fernanda, pelo estímulo nas adversidades e de sorrisos e risadas nos momentos felizes.

Ao professor Marcelo, pela paciência e dedicação, por sempre acreditar em meu potencial. Desde o apoio dado durante os momentos difíceis enfrentados na graduação, até sua excelente orientação no mestrado. Sem dúvidas, contribuiu muito para o desfecho deste ciclo. Serei sempre grato.

Aos professores Sibério e Marco Aurélio, que participaram da minha banca, por disponibilizaram seu tempo para leitura desta dissertação e pelas contribuições e sugestões dadas a este trabalho.

Aos professores Arimatéia e Vieira, por todo apoio aos longos destes 10 anos. Seja na OBMEP ou em minha vida pessoal, foram duas pessoas incríveis que levarei para minha vida. Minha gratidão sempre estará com vocês.

Aos ex-alunos do PIC-OBMEP, pela experiência e amizade adquiridas.

Aos professores e funcionários que fazem parte da UAMAT e, em especial, do PPGMat, por todos os ensinamentos, pela atenção e amizade ao longo destes anos.

Aos colegas e amigos da UAMat. Em especial, Bruna, Camila, Fran e Laise, pela companhia, pelas diversões, pelo incentivo e pelo apoio. Todos foram fundamentais para tornar melhor meu dia-a-dia na UFCG.

Aos amigos, que ao longo dos anos compartilharam comigo os sorrisos, as alegrias, e também estiveram ao meu lado nas adversidades e tribulações. Agradeço a paciência, o amor e o carinho de todos. Em especial: Kalliane, André e Lucas, pela extrema confiança. Amo vocês!

Ao apoio financeiro da CAPES.

À todos que contribuíram, de forma direta ou indireta, para concretização deste trabalho, muito obrigado!

Sumário

Índice de Notações

Definições e Notações Gerais:

- Nesta dissertação, C denota constantes positivas genéricas, as quais podem variar de linha para linha;
- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado;
- $B_r(x)$ é a bola aberta de centro x e raio $r > 0$;
- A^c denota o conjunto complementar ao conjunto $A \in \mathbb{R}^N$ com relação ao $\mathbb{R}^N$;
- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável à Lebesgue, então $\left|\Omega\right|$ denota a medida de Lebesgue de Ω;
- A expressão *q.s.* é uma abreviação para *quase sempre*;
- $\operatorname{supt}(u)$ denota o suporte da função u;
- Dado $x \in \mathbb{R}^N$ e $A \subset \mathbb{R}^N$, definimos

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} \{\|x - a\|\} \, ;$$

- $f = o(g)$, quando $x \to x_0$, se $f(x)/g(x) \to 0$, $x \to x_0$;
- $f = O(g)$, quando $x \to x_0$, se existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ para todo x suficientemente próximo de x_0;
- O símbolo $\to$ significa convergência em norma;
- O símbolo $\rightharpoonup$ significa convergência fraca;

- $X \hookrightarrow Y$ denota que X está imerso continuamente em Y;
- X' denota o espaço dual do espaço normado X, isto é, o conjunto de todos os funcionais lineares limitados definidos em X;
- Se $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, então u_- e u_+ denotam as partes negativa e positiva de u respectivamente. Ou seja,

$$u_-(x) = \min\big\{0, -u(x)\big\} \text{ e } u_+(x) = \max\big\{0, u(x)\big\}.$$

Espaços de Funções:

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas;
- $C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega);\ u$ é k-vezes continuamente diferenciável$\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \geq 1} C^k(\Omega)$;
- $C_0^\infty(\Omega) = \big\{u \in C^\infty(\Omega);\ \mathrm{spt}(u) \subset \Omega$ é compacto$\big\}$;
- Se $1 \leq p < \infty$, definimos
$$L^p(\Omega) = \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_\Omega |u|^p < \infty\right\}$$
munido da norma
$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$
- $L^\infty(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável; $\exists\, c > 0$ tal que $|u(x)| \leq c,$ q.s. em $\Omega\}$ munido da norma
$$|u|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u|;$$
- Se $1 \leq p \leq \infty$, definimos
$$W^{1,p}(\Omega) = \big\{u \in L^p\big(\Omega\big);\ u_{x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, N\big\}$$
munido da norma
$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}};$$
- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$;
- $H^{-1}(\Omega)$ representa o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$;
- $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}}$;
- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \big\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N);\ |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\big\}$ munido da norma
$$\|u\|_{D^{1,2}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Introdução

Nos últimos anos, considerável atenção tem sido dada a problemas não-locais do tipo Kirchhoff. Tais problemas possuem em comum um termo da forma

$$M(\|u\|^2),$$

onde $M\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função denominada *função de Kirchhoff*, usualmente tomada na literatura como

$$M(t) = a + bt,\ a, b > 0, \quad \text{ou} \quad M \text{ limitada.}$$

Devido a serem problemas não-locais, os problemas do tipo Kirchhoff são matematicamente mais complexos, incentivando assim o seu estudo. Além disso, possuem motivação física. Com efeito, historicamente surgiram a partir da versão estacionária da equação de Kirchhoff

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = g(x,u) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \text{ em } \Omega, \\ u_t(x,0) = u_1(x), \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto limitado, $T > 0$ e $M(t) = a + bt,\ a, b > 0$. Esta equação é uma forma mais geral do modelo proposto por Kirchhoff em [13],

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \tag{2}$$

onde L denota o comprimento de uma corda, E o módulo de Young do material do qual a corda é feita, h a área da seção transversal da corda, ρ a densidade de massa e P_0 a tensão inicial. A equação (2) é uma extensão da equação clássica da corda vibrante, proposta por d'Alembert no século XVIII, porque a mesma descreve a vibração de uma corda elástica levando em consideração a mudança no comprimento da mesma durante o movimento.

Quando uma corda elástica com extremidades fixas é submetida a vibrações transversais, seu comprimento varia de acordo com o tempo, o que acarreta mudanças na tensão da corda. Este fenômeno motivou Kirchhoff em 1876 (veja [13]) a propor uma correção não-linear à equação clássica de d'Alembert. Depois disso, vários físicos consideraram estas equações em suas pesquisas, teóricas e/ou experimentais, na teoria de vibrações não-lineares.

Entre os primeiros estudos envolvendo equações do tipo Kirchhoff, especificamente equações hiperbólicas quasilineares, estão Bernstein [7] e Pohozaev [29]. Entretanto, o problema (1) só veio receber grande atenção após Lions [19]. Em seu trabalho, Lions utilizou pioneiramente argumentos de Análise Funcional não-linear para atacar problemas não-locais do tipo Kirchhoff. Para um panorama geral, consulte Arosio [5].

Nesta dissertação, estudamos a existência de soluções não-negativas para classe de problemas

$$(P_\mu) \quad \begin{cases} -\left(a+b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u &= \mu g(x,u)+u^5 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $a, b > 0$, $\mu > 0$ é um parâmetro e a não-linearidade $g\colon \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é superlinear, subcrítica à Sobolev e satisfaz outras hipóteses que serão enunciadas posteriormente. Tal classe foi abordada por Naimen em [22]. Outrossim, consideramos a existência de soluções não-negativas para a classe de problemas

$$(P_{\lambda,\mu}) \quad \begin{cases} -\left(a+b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u &= \lambda u^q+\mu u^3 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $a, b > 0$, $\lambda, \mu > 0$ são paramêtros e $1 \le q < 3$. Tal classe foi abordada por Naimen em [23].

É importante observar que ambas as classes de problemas que consideramos envolvem não-linearidades críticas. As pesquisas com problemas envolvendo o expoente crítico de Sobolev ganharam impulso com o seminal trabalho de Brezis & Nirenberg em [8]. Eles analisaram a existência de solução para o problema

$$(P_{BN}) \quad \begin{cases} -\Delta u &= u^{2^*-1}+f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u &> 0 \qquad\qquad\quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $f\colon \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ possui crescimento subcrítico. Devido à falta de compacidade da imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega),$$

problemas como (P_{BN}) apresentam maior dificuldade para demonstrar a existência de solução do que aqueles que envolvem apenas crescimento subcrítico. Vale ressaltar que a originalidade do trabalho de Brezis & Nirenberg veio do fato de usarem funções extremais da desigualdade de Sobolev para localizar, adequadamente, o nível do passo da montanha associado ao problema.

Os problemas (P_μ) e ($P_{\lambda,\mu}$) possuem, além das dificuldades oriundas das não-linearidades críticas, aquelas provenientes dos coeficientes não locais $M(\|u\|^2)$. Em problemas do tipo Kirchhoff, tais coeficientes têm efeitos em resultados de existência de solução, o que os tornam ainda mais atraentes. Alguns resultados interessantes podem ser vistos em [1, 2, 3, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 32, 34].

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentamos pré-requisitos necessários para um bom entendimento do texto, como por exemplo, as noções de sequência e de funcional Palais-Smale, o Teorema do Passo da Montanha e o Lema de Lions acerca de concentração de compacidade.

No Capítulo 2, consideramos a classe de problemas (P_μ) e demonstramos a existência de soluções fracas não-negativas não-triviais. São levados em conta dois conjuntos de hipóteses para a não-linearidade g. Em cada um desses conjuntos é comum o fato de g ser superlinear e subcrítica. Por exemplo, supondo adicionalmente as duas hipóteses abaixo:

- Existe $4 < \theta < 6$ tal que

$$g(x,t)t - \theta G(x,t) \geq 0, \; \forall x \in \Omega, t \geq 0,$$

- Existe $\omega \subset \Omega$ aberto não-vazio tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(x,t)}{t^3} = \infty \quad \text{uniformemente em} \quad \omega,$$

Naimem demonstrou (Teorema 2.1 desta dissertação) que (P_μ) possui uma solução fraca não-negativa para todo $\mu > 0$.

Alguns resultados interessantes para (P_μ) foram obtidos em [2, 10, 11, 32]. Em [11, 32], ambos consideram $g(x,u) = |u|^{q-1}u$, para $0 < q < 1$. Figueiredo e Santos Junior em [11] demonstraram a existência de infinitas soluções para (P_μ), se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno. A teoria do gênero de Krasnoselskii e o Lema de concentração de compacidade de Lions são os ingredientes principais. Sun e Liu em [32] demonstraram a existência de uma solução positiva para (P_μ), também se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno. A demonstração utiliza o método de Nehari, o Princípio Variacional de Ekeland e o Lema de concentração de compacidade. Os resultados obtidos por Alves, Corrêa e Figueiredo em [2] e Figueiredo em [10] estão relacionados com o Teorema 2.2 desta dissertação, o qual afirma que, sob um conjunto de hipóteses para a não-linearidade g mais fraco do que o descrito acima, a saber,

- Existe $2 < \theta < 6$ tal que
$$g(x,t)t - \theta G(x,t) \geq 0, \, \forall x \in \Omega, t \geq 0,$$
- Existe $\omega \subset \Omega$ aberto não-vazio e $I \subset (0, \infty)$ intervalo tal que
$$g(x,t) > 0, \, \forall x \in \omega, t \in I,$$

existe uma constante $\mu_* \geq 0$ tal que o problema (P_μ) tem uma solução não-negativa para todo $\mu > \mu_*$. Em particular, Figueiredo em [10] considera o caso em dimensão geral ($N \geq 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$), onde utiliza um método de truncamento apropriado para demonstrar um resultado análogo ao Teorema 2.2 para esse problema não-local mais geral. Outros trabalhos importantes envolvendo expoente crítico no $\mathbb{R}^3$ que podem ser citados aqui são Li [15, 16] e Nie [25]. Considerando $\Omega = \mathbb{R}^N$, alguns resultados importantes foram obtidos em [3, 27, 34].

No Capítulo 3, consideramos a existência de soluções em $H_0^1(\Omega)$ para a classe de problemas $(P_{\lambda,\mu})$. Supondo $0 < \lambda < a\lambda_1$ e $q = 1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, seguindo Naimen [23] demonstramos que a existência de soluções não-negativas não-triviais para $(P_{\lambda,\mu})$ ocorre se, e somente se, $\mu > bS^2$, onde S é a melhor constante da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Além disso, na última seção deste capítulo, ainda seguindo Naimen [23], demonstramos a existência de soluções não-negativas não-triviais para $(P_{\lambda,\mu})$ no caso restante, isto é, quando $1 < q < 3$. Neste caso, em particular, utilizamos como ferramenta um importante resultado de Jeanjean em [12] para assegurar a ocorrência de sequências (PS) limitadas.

Além de Naimen, Nie [25] também trata de problemas tipo Kirchhoff com expoente crítico em $\mathbb{R}^4$. A classe $(P_{\lambda,\mu})$ também é considerada por Figueiredo [10], nos casos $N \geq 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Em seu trabalho, Figueiredo mostra que $(P_{\lambda,\mu})$ com $1 < q < 3$ e $\mu > 0$ possui solução, se $\lambda > 0$ é suficientemente grande.

Para finalizar a dissertação, construímos dois apêndices para abarcar cálculos que julgamos muito técnicos para constar do corpo do texto. No Apêndice A, demonstramos que os funcionais energia presentes nos Capítulos 2 e 3 são continuamente diferenciáveis e, adicionalmente, estabelecemos a equivalência entre os pontos críticos de tais funcionais com as soluções fracas do problemas considerados. Isso assegura que o método variacional pode ser efetivamente utilizado. No Apêndice B, calculamos em detalhes o valor de uma integral importante para a demonstração do Lema 3.10 no Capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços de Funções e resultados usados

Nesta seção, apresentamos os espaços de funções com os quais trabalharemos, assim como aqueles resultados sobre tais espaços que serão utilizados. Mais detalhes acerca do que é exposto aqui pode ser encontrado em [9].

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável. Dado $1 \leq p < \infty$, os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ são definidos como*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u\colon \Omega \to \mathbb{R} \textit{ mensurável; } \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\}$$

com a norma

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ é definido como

$$L^\infty(\Omega) = \{ u\colon \Omega \to \mathbb{R} \textit{ mensurável; } \exists\, c > 0 \textit{ tal que } |u(x)| \leq c, \textit{ q.s. em } \Omega \}$$

com a norma

$$|u|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u|.$$

Teorema 1.1 (convergência dominada de Lebesgue)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e (u_j) uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que*

(i) $u_j(x) \to u(x)$ q.s. em Ω, quando $j \to \infty$;

(ii) Existe $v \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo j,

$$|u_j(x)| \leq v(x) \text{ q.s. em } \Omega.$$

Então, $u \in L^1(\Omega)$ e $u_j \to u$ em $L^1(\Omega)$, quando $j \to \infty$, isto é,

$$\int_\Omega |u_j - u|\, dx \to 0,\ j \to \infty.$$

Observação 1.1. *Ainda nas hipóteses do teorema anterior, obtemos que*

$$\int_\Omega u_j\, dx \to \int_\Omega u\, dx,\ j \to \infty.$$

Observação 1.2. *Resultado análogo ao teorema anterior em $L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, é igualmente válido.*

Teorema 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e (u_j) uma sequência em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, tal que*

$$u_j \to u \text{ em } L^p(\Omega),\ j \to \infty.$$

Então, existe uma subsequência (u_{j_k}) e uma função $v \in L^p(\Omega)$ tal que

(i) $u_{j_k}(x) \to u(x)$ q.s. em Ω, quando $k \to \infty$;

(ii) Para todo k, $|u_{j_k}(x)| \leq v(x)$ q.s. em Ω.

Teorema 1.3 (Hölder)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [1]. Então, $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\left| \int_\Omega uv\, dx \right| \leq |u|_p |v|_q.$$

Definição 1.2. *Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mensurável e $1 \leq p \leq \infty$, os (primeiros) espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ são definidos como*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega);\ u_{x_i} \in L^p(\Omega),\ i = 1, \ldots, N \right\},$$

*onde u_{x_i} denota a i-*ésima derivada parcial fraca *de u, ou seja,*

$$\int_\Omega u \varphi_{x_i}\, dx = -\int_\Omega u_{x_i} \varphi\, dx,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

[1] Incluso $p = 1$ e $q = \infty$.

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *o vetor*

$$\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_N})$$

é denominado o gradiente fraco de u. *Neste caso, claramente* $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$ *e sobre os espaços* $W^{1,p}(\Omega)$ *consideramos a norma*

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nesta dissertação, estaremos interessados no caso em que $p = 2$, isto é,

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Podemos mostrar que ambos $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ são espaços de Hilbert com normas provenientes dos produtos internos

$$(u, v)_2 = \int_\Omega uv \, dx, \ \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

e

$$(u, v)_{1,2} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx, \ \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

respectivamente.

O seguinte subespaço de $H^1(\Omega)$, qual seja,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}},$$

desempenhará um papel importante. É esse o espaço que conterá as "soluções" dos problemas que consideraremos adiante.

Proposição 1.4 (Desigualdade de Poincaré). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado. Então, existe uma constante* $C > 0$ [2] *tal que*

$$\int_\Omega u^2 \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observamos que devido a desigualdade de Poincaré

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

[2]Podemos mostrar que a constante ótima para esta desigualdade é $\frac{1}{\lambda_1}$, onde λ_1 é o primeiro autovalor correspondente ao operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet homogênea.

define uma norma sobre $H_0^1(\Omega)$, denominada *norma do gradiente*, equivalente à norma herdada de $H^1(\Omega)$. É esta a norma que consideraremos sobre $H_0^1(\Omega)$.

Qualquer função $u \in H^1(\Omega)$ pode ser decomposta na forma

$$u = u_+ - u_-,$$

onde u_- e u_+ são funções não-negativas, a saber,

$$u_- = \min\{0, -u\} \ \text{ e } \ u_+ = \max\{0, u\},$$

denominadas *parte negativa* e *parte positiva* de u respectivamente.

Podemos mostrar que $u_-, u_+ \in H^1(\Omega)$ e, além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$, então igualmente $u_-, u_+ \in H_0^1(\Omega)$. É evidente que u_- e u_+ satisfazem

$$(u_-, u_+)_2 = 0,$$

ou seja, são ortogonais em $L^2(\Omega)$. Além disso, como

$$\nabla u_- = \begin{cases} 0, & \text{se } \ u \geq 0 \\ -\nabla u, & \text{se } \ u < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } \ u \geq 0 \\ 0, & \text{se } \ u < 0, \end{cases}$$

podemos também concluir que u_- e u_+ são ortogonais em $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

No que segue, denotamos

$$2^* = \begin{cases} \infty, \text{ se } N = 1 \text{ ou } N = 2 \\ \frac{2N}{N-2}, \text{ se } N > 2. \end{cases}$$

Teorema 1.5 (imersões contínuas de Sobolev)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 2$, é limitado e com fronteira suave, as seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ 1 \leq p \leq 2^*.$$

Teorema 1.6 (imersões compactas de Rellich-Kondrachov)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 2$, é limitado e com fronteira suave, as seguintes imersões são compactas:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ 1 \leq p < 2^*.$$

Outro espaço a ser considerado nesta dissertação será

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N), N \geq 3;\ |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Este também é um espaço de Hilbert com norma proveniente do produto interno

$$(u,v)_{D^{1,2}} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \ \forall \, u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Podemos mostrar que

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N),$$

mas não compactamente, e que a melhor constante

$$S = \inf_{\substack{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*} \, dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} \tag{1.1}$$

para esta imersão é realizada pela função [3]

$$U(x) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{[1+|x|^2]^{\frac{N-2}{2}}}.$$

1.2 Fréchet e Gâteaux diferenciabilidade

No que segue, X denota um espaço de Banach munido da norma $\| \cdot \|$, $U \subset X$ um aberto e $J \colon U \to \mathbb{R}$ um funcional.

Definição 1.3. *Dizemos que J é Fréchet-diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X'$ tal que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{J(u+v) - J(u) - Av}{\|v\|} = 0. \tag{1.2}$$

O único elemento de X' tal que (1.2) é válida é denominada a diferencial de Fréchet de J em u, e denotada por $J'(u)$ ou por $dJ(u)$. Ou seja,

$$J(u+v) - J(u) - J'(u)v = o(\|v\|), \ \|v\| \to 0.$$

Se J é Fréchet-diferenciável em U, ou seja, J é Fréchet-diferenciável em todo ponto $u \in U$, a aplicação

$$\begin{aligned} J' \colon U &\to X' \\ u &\mapsto J'(u) \end{aligned}$$

é denominada a diferencial de Fréchet de J. Dizemos que J é de classe C^1 ou continuamente diferenciável em U, e denotamos por $J \in C^1(U)$, se J' é contínua.

[3] vide [33]

Exemplo 1.1. *Sejam $X = H$ um espaço de Hilbert e*

$$J(u) = \|u\|^2, \; \forall u \in H.$$

Então, $J \in C^1(H)$ e, além disso,

$$J'(u)v = 2(u, v),$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno sobre H.

De fato, como

$$J(u+v) - J(u) = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 = 2(u,v) + \|v\|^2, \; \forall u, v \in H,$$

o limite em (1.2) segue imediatamente. Para concluir que $J \in C^1(H)$, sejam (u_j) uma sequência em H e $u \in H$ com $u_j \to u$ em H, quando $j \to \infty$. Então, para $v \in H$ com $\|v\| = 1$, temos

$$|(J'(u_j) - J'(u))v| = 2|(u_j - u, v)| \leq 2\|u_j - u\|.$$

Daí

$$\|J'(u_j) - J'(u)\|_{H'} \leq 2\|u_j - u\|,$$

donde segue que

$$J'(u_j) \to J'(u) \text{ em } H', \; j \to \infty,$$

mostrando a continuidade de J'.

A próxima proposição lista propriedades de funcionais Fréchet-diferenciáveis.

Proposição 1.7. *Assuma que I e J são diferenciáveis em $u \in U \subseteq X$. Então, as seguintes propriedades valem:*

1. *Se a e b são números reais, $aI + bJ$ é diferenciável em u e*

$$(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u);$$

2. *O produto IJ é diferenciável em u e*

$$(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u);$$

3. *Se $\varphi \colon \mathbb{R} \to U$ é diferenciável em t_0 e $u = \varphi(t_0)$, então a composição $\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\nu(t) = I(\varphi(t))$ é diferenciável em t_0 e*

$$\nu'(t_0) = I'(u)(\varphi'(t_0));$$

4. *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um aberto, $f\colon A \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $I(u_0) \in A$, então a composição $K(u) = f(I(u))$ é definida em uma vizinhança aberta V de u_0, é diferenciável em u_0, e*

$$K'(u_0) = f'(I(u_0))I'(u_0).$$

Uma noção mais fraca de diferenciabilidade é dada a seguir.

Definição 1.4. *Dizemos J é Gâteaux-diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X'$ tal que, para todo $v \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = Av \tag{1.3}$$

O único elemento de X' satisfazendo (1.3) é denominado a diferencial de Gâteaux de J em u, e denotado por $J'_G(u)$. Se J é Gâteux-diferenciável em U, a aplicação diferencial de Gâteux correspodente é denotada por J'_G.

A importância da diferencial de Gâteux é clara a partir do seguinte resultado.

Proposição 1.8. *Suponha que J é Gâteaux-diferenciável em U e que J'_G é contínua em $u \in U$. Então, J é também Fréchet-diferenciável em u e*

$$J'_G(u) = J'(u).$$

Em consequência, J é continuamente Gâteux-diferenciável em U se, e só se, J é continuamente Fréchet-diferenciável em U.

1.3 O Teorema do Passo da Montanha

Devido a Ambrosetti & Rabinowitz [4], o Teorema do Passo da Montanha é um marco na história da Teoria dos Pontos Críticos e cujo desenvolvimento esteve fortemente relacionado a busca de pontos críticos do tipo sela. Nesta seção, X denota um espaço de Banach, $J \in C^1(X)$ é um funcional e (u_j) uma sequência em X.

Definição 1.5. *Dizemos que (u_j) é uma sequência $(PS)_c$ para J ou uma sequência (PS) no nível c para J*

$$J(u_j) \to c \ \text{ e } \ J'(u_j) \to 0, \ j \to \infty.$$

Enunciamos agora uma condição de compacidade sobre o funcional J devida a Palais & Smale [26].

Definição 1.6 (Condição (PS))**.** *Dizemos que J é um funcional (PS) ou satisfaz a condição (PS) se toda sequência $(PS)_c$ para J (qualquer $c \in \mathbb{R}$) possui uma subsequência convergente.*

Observação 1.3. *Uma condição de compacidade mais fraca sobre J é a seguinte: fixado $c \in \mathbb{R}$, dizemos que J é um funcional (PS) no nível c ou satisfaz a condição $(PS)_c$ se sequências $(PS)_c$ para J possuem subsequências convergentes.*

A proposição abaixo é evidente.

Proposição 1.9. *Suponha que J satisfaz a condição (PS). Se existe uma sequência $(PS)_c$ para J, então c é um valor crítico de J.*

Definimos agora uma importante condição geométrica.

Definição 1.7 (Geometria do passo da montanha)**.** *Dizemos que J satisfaz a geometria do passo da montanha se existem $u_0, u_1 \in X$ e $r > 0$ com $\|u_1 - u_0\| > r$ tais que*

$$\inf_{\|u-u_0\|=r} J(u) > \max\left\{J(u_0), J(u_1)\right\}.$$

Se J satisfaz a geometria do passo da montanha, então está bem definido o *nível do passo da montanha*, isto é,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J\left(\gamma(t)\right),$$

onde

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], X\right); \gamma(0) = u_0 \text{ e } \gamma(1) = u_1\right\}.$$

Utilizando o Lema de Deformação em [35, página 38], podemos demonstrar o próximo resultado, denominado algumas vezes na literatura *o Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS)*.

Teorema 1.10. *Suponha que J satisfaz a geometria do passo da montanha. Então, existe uma sequência (PS) para J no nível do passo da montanha.*

O Teorema do Passo da Montanha pode ser agora formulado.

Teorema 1.11 (Passo da montanha, [4])**.** *Suponha que J satisfaz a geometria do passo da montanha e que J é um funcional (PS) (ou pelo menos, J é um funcional (PS) no nível do passo da montanha). Então, o nível do passo da montanha é um nível crítico para J.*

1.4 Convergência fraca e resultados usados

A noção seguinte será muito importante no estudo da existência de soluções para os problemas que consideraremos e permeará todo o texto.

Definição 1.8. *Sejam H um espaço de Hilbert e (x_j) uma sequência em H. Dizemos que (x_j) converge fraco para $x \in H$, e denotamos por*

$$x_j \rightharpoonup x, \ j \to \infty,$$

se

$$\langle x_j, y \rangle \to \langle x, y \rangle, \ j \to \infty, \ \forall\, y \in H,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno sobre H.

Exemplo 1.2. *Considere o espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$. Dada a sequência $(u_j) \subset H^1(\Omega)$, temos que $u_j \rightharpoonup u \in H^1(\Omega)$ se, e somente se,*

$$\int_\Omega (\nabla u_j \cdot \nabla v + u_j v)\ dx \to \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\ dx, \ \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Exemplo 1.3. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$, então*

$$u_j \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega) \iff \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla v \, dx \to \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1.12. *Sejam H um espaço de Hilbert [4] e (x_j) uma sequência limitada em H. Então, existe uma subsequência (x_{j_k}) que converge fraco em H, isto é, existe $x \in H$ tal que*

$$x_{j_k} \rightharpoonup x \text{ em } H, \ k \to \infty.$$

Proposição 1.13. *Sejam H um espaço de Hilbert e (x_j) uma sequência em H tal que*

$$x_j \rightharpoonup x \text{ em } H \quad \text{e} \quad \|x_j\| \to \|x\|, \ j \to \infty.$$

Então,

$$x_j \to x \text{ em } H, \ j \to \infty.$$

[4] De fato, é suficiente que H seja um *espaço reflexivo*, ou seja, que $H = H''$ em um certo sentido. Porém, não convém aqui entrar nesse contexto.

1.5 O Lema de concentração de compacidade de Lions

No que segue, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto,

$$K(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ contínua; supt } u \subset \Omega \text{ compacto}\}$$

$$\text{e } \ BC(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ contínua; } u \text{ é limitada}\}\,.$$

Sobre $BC(\Omega)$, consideramos a norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

e denotamos por

$$C_0(\Omega) = \overline{K(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

Definição 1.9. *Uma medida finita sobre Ω é um elemento $\eta \in C_0(\Omega)'$. A norma de uma medida finita η é definida como*

$$\|\eta\| = \sup_{\substack{\varphi\in C_0(\Omega)\\ \|\varphi\|_\infty=1}} |\eta(\varphi)|.$$

O espaço das medidas finitas sobre Ω é denotado por $\mathcal{M}(\Omega)$.

Exemplo 1.4. *Sejam $p \in [1,\infty)$ e $u \in L^p(\Omega)$. Então,*

$$\begin{aligned} \eta_u\colon C_0(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \eta_u(\varphi) = \int_\Omega \varphi |u|^p\,dx, \end{aligned}$$

é uma medida finita sobre Ω, a qual também denotaremos por $\eta_u = |u|^p\,dx$.

Definição 1.10. *Sejam (η_j) uma sequência em $\mathcal{M}(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dizemos que η_j converge fracamente para η, e denotamos por $\eta_j \rightharpoonup \eta$, quando $j \to \infty$, se*

$$\eta_j(\varphi) \to \eta(\varphi),\ j \to \infty,\ \ \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Exemplo 1.5. *Sejam $p \in [1,\infty)$, (u_j) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{M}(\Omega)$. Então,*

$$|u_j|^p\,dx \rightharpoonup \eta \iff \int_\Omega \varphi |u_j|^p\,dx \to \eta(\varphi),\ \ \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Definição 1.11. *Dizemos $\eta \in \mathcal{M}(\Omega)$ é não-negativa se*

$$\eta(\varphi) \geq 0, \ \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

O subespaço de $\mathcal{M}(\Omega)$ formado pelas medidas finitas e não-negativas é denotado por $\mathcal{M}^+(\Omega)$.

Proposição 1.14. *Se (u_j) é uma sequência limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então, a menos de subsequência, existem $\eta, \nu \in M^+(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$\eta_j = |\nabla u_j|^2 \, dx \rightharpoonup \eta \quad e \quad \nu_j = |u_j|^{2^*} \, dx \rightharpoonup \nu \ \ em \ \ \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).$$

Sabemos que a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ não é compacta. Em [20], Pierre Louis Lions, forneceu uma descrição completa desse fato no que é hoje o seu mais celebrado Teorema. Uma demonstração dele pode ser encontrada em Struwe [31].

Teorema 1.15 (Lema de concentração de compacidade de Lions)**.** *Seja (u_j) uma sequência em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_j \rightharpoonup u \quad em \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \ j \to \infty.$$

Suponha que

$$\begin{aligned} \eta_j &= |\nabla u_j|^2 \, dx \rightharpoonup \eta, \ j \to \infty, \\ \nu_j &= \ \ |u_j|^{2^*} \, dx \rightharpoonup \nu, \ j \to \infty, \end{aligned}$$

onde η e ν são medidas não-negativas e "finitas" em $\mathbb{R}^N$. Então,

1. *Existem um conjunto no máximo enumerável $\mathcal{I}$, uma família $\{x_k\}_{k \in \mathcal{I}}$ de pontos distintos em $\mathbb{R}^N$ e uma família $\{\nu_k\}_{k \in \mathcal{I}}$ de números positivos tal que*

   $$\nu = |u|^{2^*} \, dx + \sum_{k \in \mathcal{I}} \nu_k \delta_{x_k},$$

   onde δ_x denota a medida do delta de Dirac concentrada em $\mathbb{R}^N$ com massa 1.

2. *Além disso,*

   $$\eta \geq |\nabla u|^2 \, dx + \sum_{k \in \mathcal{I}} \eta_k \delta_{x_k},$$

   para alguma família $\{\eta_k\}_{k \in \mathcal{I}}$ de números positivos satisfazendo

   $$S \, (\nu_k)^{2/2^*} \leq \eta_k, \quad \forall \, k \in \mathcal{I},$$

onde S é a constante de Sobolev definida em (1.1). *Em particular,*

$$\sum_{k \in \mathcal{I}} (\nu_k)^{2/2^*} < \infty.$$

Observação 1.4. *Devido à imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, utilizaremos adiante que se (u_j) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$, então (u_j) é uma sequência limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. A Proposição 1.14 assegura então que o Lema de concentração de compacidade de Lions pode ser aplicado a sequência (u_j).*

Capítulo 2

Problemas elípticos do tipo Kirchhoff envolvendo uma não-linearidade crítica no $\mathbb{R}^3$

2.1 Introdução

Neste capítulo, consideramos a questão da existência de solução não-negativa em $H_0^1(\mathbb{R}^3)$ para a seguinte classe de problemas

$$(P_\mu) \qquad \begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u &= \mu g(x,u) + u^5 \text{ em } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nesta classe de problemas $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $a, b > 0$, $\mu > 0$ é um parâmetro e a não-linearidade $g\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(g_1) g é contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $g(x,t) \geq 0$ se $t \geq 0$ e $g(x,t) = 0$ se $t \leq 0$ para todo $x \in \Omega$;

(g_2) Temos que $g(x,t) = o(t)$, quando $t \to 0^+$, e $g(x,t) = o(t^5)$, quando $t \to \infty$, uniformemente em Ω,

e mais um par adequado de hipóteses para cada uma das seções deste capítulo, as quais serão enunciadas abaixo. A classe de problemas acima foi considerado por Naimen em [22].

Observação 2.1. *A hipótese* (g_2) *significa que*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{g(x,t)}{t}=0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty}\frac{g(x,t)}{t^5}=0,\ \forall x\in\Omega,$$

ou seja,

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0 \text{ tal que } 0<t<\delta\Rightarrow g(x,t)<\varepsilon t,\forall x\in\Omega$$

e

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,R>0 \text{ tal que } t>R\Rightarrow g(x,t)<\varepsilon t^5,\forall x\in\Omega.$$

Na segunda seção deste capítulo, além das hipóteses (g_1) e (g_2), consideramos também as hipóteses:

(g_3) Existe uma constante $4<\theta<6$ tal que

$$g(x,t)t-\theta G(x,t)\geq 0,\ \forall x\in\Omega, t\geq 0,$$

onde

$$G(x,t)=\int_0^t g(x,s)\,ds.$$

(g_4) Existe um aberto não-vazio $\omega\subset\Omega$ tal que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(x,t)}{t^3}=\infty$$

uniformemente em ω.

Observação 2.2.

1. *A hipótese* (g_3) *é uma condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz;*

2. *A hipótese* (g_4) *significa que*

$$\forall M>0,\exists\,R>0 \text{ tal que } t>R\Rightarrow g(x,t)>Mt^3,\forall x\in\omega.$$

Dizemos que u é uma *solução fraca* de (P_μ) se u satisfaz

$$\left(a+b\|u\|^2\right)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla h\,dx-\mu\int_\Omega g(x,u)h\,dx-\int_\Omega u^5h\,dx=0,\ \forall h\in H_0^1(\Omega).$$

O principal resultado a ser demonstrado na segunda seção é:

Teorema 2.1. *Sejam $a, b > 0$. Então, se g satisfaz $(g_1) - (g_4)$, o problema (P_μ) tem solução não-negativa para todo $\mu > 0$.*

Na terceira seção deste capítulo, além das hipóteses (g_1) e (g_2), consideramos também as seguintes hipóteses:

(g_5) Existe uma constante $2 < \theta < 6$ tal que

$$g(x,t)t - \theta G(x,t) \geq 0, \ \forall x \in \Omega, t \geq 0.$$

(g_6) Existe um aberto não-vazio $\omega \subset \Omega$ e um intervalo $I \subset (0, \infty)$ tal que

$$g(x,t) > 0, \ \forall x \in \omega, t \in I.$$

Observação 2.3. *As hipóteses (g_5) e (g_6) são mais fracas que (g_3) e (g_4), respectivamente. De fato, é óbvio que (g_5) é mais fraca que (g_3). Sobre a hipótese (g_6) ser mais fraca que (g_4), considerando o item 2 da Observação 2.2, existe $R > 0$ tal que $g(x,t) > t^3 > 0$, se $x \in \omega$ e $t > R$. Isso mostra que (g_6) é válida para ω dado em (g_4) e $I = (R, \infty)$.*

O principal resultado a ser demonstrado na terceira seção é:

Teorema 2.2. *Sejam $a, b > 0$. Então, se g satisfaz (g_1), (g_2), (g_5) e (g_6), existe uma constante $\mu_* \geq 0$ tal que o problema (P_μ) tem uma solução não-negativa para todo $\mu > \mu_*$.*

Vamos definir agora uma classe de problemas auxiliares que ajudará no estudo do problema (P_μ). Considere a seguinte classe de problemas:

$$(P_\mu)_A \quad \begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right) \Delta u &= \mu g(x,u) + u_+^5 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dizemos que u é uma *solução fraca* de $(P_\mu)_A$ se u satisfaz

$$\left(a + b\|u\|^2\right) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx - \mu \int_\Omega g(x,u) h \, dx - \int_\Omega u_+^5 h \, dx = 0, \ \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Proposição 2.3. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução não-trivial de $(P_\mu)_A$. Então, u é solução não-negativa não-trivial de (P_μ).*

Demonstração. Suponhamos que u é uma solução não-trivial de $(P_\mu)_A$. Logo,

$$\left(a+b\|u\|^2\right)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla h\,dx-\mu\int_\Omega g(x,u)h\,dx-\int_\Omega u_+^5 h\,dx=0,\ \forall h\in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $h=u_-$, obtemos

$$\left(a+b\|u\|^2\right)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_-\,dx-\mu\int_\Omega g(x,u)u_-\,dx-\int_\Omega u_+^5 u_-\,dx=0.$$

Como u_+ e u_- são ortogonais em $H_0^1(\Omega)$, segue que

$$-\left(a+b\|u\|^2\right)\cdot\left(\int_\Omega |\nabla u_-|^2\,dx\right)-\mu\int_\Omega g(x,u)u_-\,dx=0.$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega g(x,u)u_-\,dx=0.$$

De fato, se $u_-=0$, não há nada a fazer. Se $u_-=-u$, então $u\le 0$ e, de (g_1), concluímos que $g(x,u)=0$. Portanto,

$$\int_\Omega g(x,u)u_-\,dx=0,$$

e assim

$$\left(a+b\|u\|^2\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_-|^2\,dx\right)=0,$$

ou seja,

$$\left(a+b\|u\|^2\right)\|u_-\|^2=0.$$

Como $a>0$, temos

$$a+b\|u\|^2>0.$$

Portanto, segue que

$$\|u_-\|^2=0\Rightarrow u_-=0,$$

isto é, $u\ge 0$, demonstrando o desejado. □

Devido à Proposição 2.3, buscaremos a partir de agora soluções fracas não-triviais para o problema $(P_\mu)_A$.

2.2 Existência de soluções para o problema (P_μ) sob as hipóteses $(g_1) - (g_4)$

Considere $a, b > 0$. Fixe $\mu > 0$ e suponha que a função g satisfaça as hipóteses (g_1) a (g_4). Definimos o *funcional energia* associado a $(P_\mu)_A$ como

$$I(u) \;=\; \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \mu\int_\Omega G(x,u)\,dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\,dx,\; u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $G(x,t) = \displaystyle\int_0^t g(x,s)\,ds$.

De (g_1) e (g_2), o funcional I está bem definido, é continuamente Fréchet-diferenciável em $H_0^1(\Omega)$ com derivado dado por

$$I'(u)v = (a+b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \mu\int_\Omega g(x,u)v\,dx - \int_\Omega (u_+)^5 v\,dx,\; u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$u \text{ é solução fraca de } (P_\mu)_A \Leftrightarrow u \text{ é ponto crítico de } I.$$

Para demonstrar que I está bem definido, basta verificar que

$$\int_\Omega G(x,u)\,dx < \infty,\; \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

De (g_2), obtemos que dado $c > 0, \exists\, R > 0$ tal que

$$t > R \Rightarrow g(x,t) < ct^5,\; \forall x \in \Omega$$

e que dado $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \Rightarrow g(x,t) < \varepsilon t,\; \forall x \in \Omega.$$

Escolhendo c suficientemente grande tal que

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[\delta,R]} g(x,t) \le c\delta^5$$

obtemos

$$g(x,t) \le c\delta^5 \le ct^5,\; \forall x \in \overline{\Omega}, t \in [\delta, R]$$

e assim, em qualquer caso,

$$g(x,t) \le \varepsilon|t| + c|t|^5,\; \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

onde $c = c(\varepsilon)$. Daí, para $x \in \overline{\Omega}, t \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \int_0^t g(x,s)\, ds \\ &\leq \int_0^t \varepsilon s + cs^5\, ds \\ &= \frac{\varepsilon}{2} t^2 + \frac{c}{6} t^6, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$G(x,t) \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^2 + c|t|^6,\ \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Como $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, da desigualdade acima segue a boa definição do funcional I. A demonstração que o funcional I é continuamente Fréchet diferenciável com diferencial dada pela fórmula na página anterior será verificada no Apêndice A.

Nosso objetivo é encontrar um ponto crítico não-trivial do funcional I. Daqui em diante, usaremos frequentemente o seguinte fato: para todo $\xi > 0$, existe uma constante $C = C_\xi > 0$ tal que

$$g(x,t) \leq \xi|t|^5 + C|t| \quad \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Isto também é consequência das hipóteses (g_1) e (g_2). De fato, de (g_2), dado $\xi > 0, \exists\, R > 0$ tal que

$$t > R \Rightarrow g(x,t) < \xi t^5, \quad \forall x \in \Omega.$$

Ainda de (g_2), existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \Rightarrow g(x,t) < Rt, \quad \forall x \in \Omega.$$

Escolhendo $C > R$ suficientemente grande satisfazendo

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[\delta,R]} g(x,t) \leq C\delta,$$

obtemos

$$g(x,t) \leq C\delta \leq Ct, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, t \in [\delta, M]$$

e assim, seja qual for o caso,

$$g(x,t) \leq \xi|t|^5 + C|t|, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}.$$

Para a demonstração do Teorema 2.1, necessitaremos dos próximos dois lemas, que asseguram que o funcional I satisfaz a Geometria do Passo da Montanha.

Lema 2.4. *Seja g satisfazendo as hipóteses (g_1) e (g_2). Então, existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que*

$$I(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\| = \rho.$$

Demonstração. Seja $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= \lambda\phi & \text{em } \Omega \\ \phi &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

De (2.2), tomando $\varepsilon = \dfrac{a\lambda_1}{4\mu}$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|G(x,t)| \leq \frac{a\lambda_1}{8\mu}|t|^2 + c|t|^6, \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Da desigualdade de Poincaré (Proposição 1.4) segue que

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2\, dx \leq \|u\|^2, \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Além disso, observe que

$$u_+^6(x) \leq u^6(x), \forall x \in \Omega.$$

Tome $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$. utilizando (2.4), (2.5), a observação acima e a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \mu\int_\Omega G(x,u)\, dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\, dx \\ &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{a\lambda_1}{8}\int_\Omega u^2\, dx - c\int_\Omega u^6\, dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u^6\, dx \\ &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{a\lambda_1}{4}\int_\Omega u^2 - cc_1\|u\|^6 - \frac{1}{6}c_1\|u\|^6 \\ &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{a}{4}\|u\|^2 - c\|u\|^6 \\ &\geq \frac{a}{4}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - c\|u\|^6 \\ &= \frac{a}{4}\rho^2 + \frac{b}{4}\rho^4 - c\rho^6, \end{aligned}$$

para alguma constante $c > 0$. Como $a > 0$, tomando $\rho > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$I(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\| = \rho.$$

$\square$

Lema 2.5. *Suponha que g satisfaça as hipóteses (g_1) e (g_2). Então existe $v_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ com $v_0 \geq 0$ cumprindo*

$$\|v_0\| > \rho \quad e \quad I(v_0) \leq 0.$$

Demonstração. Tome uma função não-trivial qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$ com $v \geq 0$. Note que de (g_1), temos que

$$G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt \geq \int_0^s 0 = 0,$$

para todo $s \geq 0$. utilizando este fato obtemos, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{at^2}{2}\|v\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v\|^4 - \mu \int_\Omega G(x,tv)\,dx - \frac{t^6}{6}\int_\Omega v_+^6\,dx \\ &\leq \frac{at^2}{2}\|v\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v\|^4 - \frac{t^6}{6}\int_\Omega v^6\,dx. \end{aligned}$$

Logo, quando $t \to \infty$, segue que $I(tv) \to -\infty$, e daí existe $t_0 > 0$ tal que se $v_0 = t_0 v$, então

$$\|v_0\| > \rho \ \text{ e } \ I(v_0) \leq 0.$$

$\square$

Definimos agora

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega)\right) | \gamma(0) = 0, I\left(\gamma(1)\right) \leq 0, \gamma(1) \neq 0\right\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} I(u).$$

Do Lema 2.5, $\Gamma \neq \emptyset$. Além disso, do argumento no Lema 2.4, claramente 0 é um mínimo local de I e $c \geq \alpha > 0$. Como a geometria do passo da montanha é satisfeita, pelo Teorema do Passo da Montanha sem condição (PS) (Teorema 1.10), obtemos a existência de uma sequência $(PS)_c$ para I.

Demonstraremos agora o seguinte lema, que será fundamental para garantir a compacidade local do funcional I. Neste lema, S denota a constante de Sobolev correspondente a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, ou seja,

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u^6\,dx\right)^{1/3}}.$$

Lema 2.6. *Considere g satisfazendo $(g_1), (g_2)$ e (g_3) e suponha que (u_j) é uma sequência $(PS)_d$ para I com*

$$d < \frac{a}{2}C_k + \frac{b}{4}C_k^2 - \frac{1}{6S^3}C_k^3, \tag{2.6}$$

onde

$$C_k = \frac{1}{2}\left(bS^3 + \sqrt{(bS^3)^2 + 4aS^3}\right).$$

Então, passando a uma subsequência se necessário, existe uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(u_j)_+ \to u_+ \text{ em } L^6(\Omega), \; j \to \infty.$$

Demonstração. Sejam

$$d < \frac{a}{2}C_k + \frac{b}{4}C_k^2 - \frac{1}{6S^3}C_k^3,$$

e $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para I. Primeiramente afirmamos que (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, como

$$I(u_j) \to d \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } I'(u_j) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

de (g_1) e (g_3) temos, para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
d + 1 \;\; &\geq \;\; I(u_j) - \frac{1}{\theta}I'(u_j)u_j + \frac{1}{\theta}I'(u_j)u_j \\
&= \;\; \frac{a}{2}\|u_j\|^2 + \frac{b}{4}\|u_j\|^4 - \mu\int_\Omega G(x,u_j)\,dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx \\
&\quad\;\; - \frac{1}{\theta}\left(a\|u_j\|^2 + b\|u_j\|^4 - \mu\int_\Omega g(x,u_j)u_j\,dx - \int_\Omega (u_j)_+^5 u_j\,dx\right) \\
&\quad\;\; + \frac{1}{\theta}I'(u_j)u_j \\
&\geq \;\; a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2 + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^4 \\
&\quad\;\; + \mu\int_\Omega \left(\frac{1}{\theta}\,g(x,u_j)u_j - G(x,u_j)\right)\,dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx \\
&\quad\;\; - \|u_j\| \\
&\geq \;\; a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2 + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^4 - \|u_j\|.
\end{aligned}$$

Como $b > 0$, podemos garantir que (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Nos cálculos acima, utilizamos que

$$I'(u_j) \to 0 \Rightarrow |I'(u_j)u_j| \leq \|I'(u_j)\|\|u_j\| \leq \|u_j\|$$

para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, ou seja,

$$-\|u_j\| \leq -\frac{1}{\theta}\|u_j\| \leq \frac{1}{\theta}I'(u_j)u_j \leq \frac{1}{\theta}\|u_j\| \leq \|u_j\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\theta}I'(u_j)u_j \geq -\|u_j\|.$$

Pela reflexividade de $H_0^1(\Omega)$, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que (a menos de subsequência)

$$u_j \rightharpoonup u \, \text{em} \, H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Rellich-Kondrachov, temos

$$u_j \to u \, \text{em} \, L^p(\Omega), \text{para} \, 1 \leq p < 6.$$

Como convergência nos espaços L^p implica em convergência quase sempre (mais uma vez a menos de subsequência), obtemos

$$u_j(x) \to u(x) \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Além disso, do Lema de concentração de compacidade de Lions, existe um conjunto no máximo enumerável $\mathcal{I}$, pontos $\{x_k\}_{k\in\mathcal{I}} \subset \overline{\Omega}$ e $\{\eta_k\}_{k\in\mathcal{I}}, \{\nu_k\}_{k\in\mathcal{I}} \subset \mathbb{R}^+$ tais que

$$|\nabla u_j|^2 \, dx \rightharpoonup \eta \geq |\nabla u|^2 \, dx + \sum_{k\in\mathcal{J}} \eta_k \delta_{x_k},$$

$$(u_j)_+^6 \, dx \rightharpoonup \nu = (u)_+^6 \, dx + \sum_{k\in\mathcal{I}} \nu_k \delta_{x_k},$$

$$\eta_k \geq S\nu_k^{\frac{1}{3}} \quad (k \in \mathcal{I}). \tag{2.7}$$

Afirmamos que $\mathcal{I} = \emptyset$. Suponhamos por contradição que $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Inicialmente, para cada $k \in \mathcal{I}$ e $\varepsilon > 0$, considere uma função suave $\phi = \phi_{k,\varepsilon} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \phi = 1, & \text{em } B_\varepsilon(x_k), \\ \phi = 0, & \text{em } B_{2\varepsilon}(x_k)^c, \\ 0 \leq \phi \leq 1, & \text{caso contrário}, \\ |\nabla \phi| \leq 2/\varepsilon, & \text{em } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Como $I'(u_j) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{j\to\infty} I'(u_j)(u_j\phi) \\
&= \lim_{j\to\infty} \Big[\big(a + b\|u_j\|^2\big) \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla(u_j\phi)\, dx - \mu \int_\Omega g(x,u_j)u_j\phi\, dx - \\
&\quad - \int_\Omega (u_j)_+^6 \phi\, dx \Big] \\
&= \lim_{j\to\infty} \Big[\big(a + b\|u_j\|^2\big) \int_\Omega \nabla u_j \cdot (u_j\nabla\phi + \phi\nabla u_j)\, dx - \\
&\quad - \mu \int_\Omega g(x,u_j)u_j\phi\, dx - \int_\Omega (u_j)_+^6 \phi\, dx \Big] \\
&= \lim_{j\to\infty} \Big[\big(a + b\|u_j\|^2\big) \int_\Omega |\nabla u_j|^2 \phi\, dx - \int_\Omega (u_j)_+^6 \phi\, dx \Big] + o(1),
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

onde $o(1) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. A última igualdade vem do fato que

$$
\lim_{j\to\infty} \big(a + b\|u_j\|^2\big) \int_\Omega (\nabla u_j \cdot \nabla\phi) u_j\, dx = o(1), \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.9}
$$

e

$$
\lim_{j\to\infty} \int_\Omega g(x,u_j)u_j\phi = o(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.10}
$$

Primeiramente verificaremos que (2.9) é válida. De fato, notando a limitação de (u_j) em $H_0^1(\Omega)$, a convergência de (u_j) para u em $L^2(\Omega)$ e utilizando as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwartz, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left| \lim_{j\to\infty} \big(a + b\|u_j\|^2\big) \int_\Omega (\nabla u_j \cdot \nabla\phi) u_j\, dx \right| \\
\le\ & c \lim_{j\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u_j|^2 |\nabla\phi|^2\, dx \right)^{1/2} \\
\le\ & c \left(\int_{\Omega\, \cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} |u|^2 |\nabla\phi|^2\, dx \right)^{1/2} \\
\le\ & c \left[\left(\int_{\Omega\, \cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} \big(u^2\big)^3\, dx \right)^{1/3} \right]^{1/2} \left[\left(\int_{\Omega\, \cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} \big(|\nabla\phi|^2\big)^{3/2}\, dx \right)^{2/3} \right]^{1/2} \\
\le\ & c \left(\int_{\Omega\, \cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} u^6\, dx \right)^{1/6} \left(\int_{\Omega\, \cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} |\nabla\phi|^3\, dx \right)^{1/3} \\
\le\ & c \left(\int_{\Omega\, \cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} u^6\, dx \right)^{1/6},
\end{aligned}
$$

onde para a última desigualdade, usamos que $|\nabla\phi| \leq 2/\varepsilon$. Logo,

$$\lim_{j\to\infty}\left(a+b\|u_j\|^2\right)\int_\Omega(\nabla u_j\cdot\nabla\phi)u_j\,dx = o(1), \quad \varepsilon\to 0.$$

Isso garante (2.9). Agora vamos verificar que (2.10) é válida. De (2.3), para $\xi > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g(x,u_j)u_j\phi\,dx\\
\leq\;& \lim_{j\to\infty}\left(\xi\int_\Omega u_j^6\phi\,dx \;+\; C_\xi\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)} u_j^2\phi\,dx\right)\\
\leq\;& \lim_{j\to\infty}\left(\xi\int_\Omega u_j^6\;\,dx \;+\; C_\xi\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)} u_j^2\phi\,dx\right)\\
\leq\;& C\xi + C_\xi\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)} u^2\phi\,dx,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$, onde para a última desigualdade utilizamos a limitação de (u_j) em $L^6(\Omega)$ e a convergência de (u_j) para u em $L^2(\Omega)$. Portanto,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g(x,u_j)u_j\phi\,dx\right)\leq C\xi,$$

para todo $\xi > 0$. Isso demonstra (2.10).

De (2.8) e do Lema de Concentração de Compacidade de Lions, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{j\to\infty}\left[\left(a+b\int_\Omega|\nabla u_j|^2\,dx\right)\int_\Omega|\nabla u_j|^2\phi\,dx - \int_\Omega(u_j)_+^6\phi\,dx\right] + o(1)\\
&\geq \lim_{j\to\infty}\left[\left(a+b\int_\Omega|\nabla u_j|^2\phi\,dx\right)\int_\Omega|\nabla u_j|^2\phi\,dx - \int_\Omega(u_j)_+^6\phi\,dx\right] + o(1)\\
&= \lim_{j\to\infty}\left[\left(a+b\int_{\overline{\Omega}}|\nabla u_j|^2\phi\,dx\right)\int_{\overline{\Omega}}|\nabla u_j|^2\phi\,dx - \int_{\overline{\Omega}}(u_j)_+^6\phi\,dx\right] + o(1)\\
&= \left[\left(a+b\int_{\overline{\Omega}\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}\phi\,d\eta\right)\int_{\overline{\Omega}\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}\phi\,d\eta - \int_{\overline{\Omega}\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}\phi\,d\nu\right] + o(1),
\end{aligned}$$

quando $j\to\infty$. Fazendo $\varepsilon\to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(a+b\int_{\overline{\Omega}\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}\phi\,d\eta\right)\int_{\overline{\Omega}\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}\phi\,d\eta - \int_{\overline{\Omega}\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}\phi\,d\nu + o(1)\right]\\
&= \left[\left(a+b\int_{\{x_k\}}d\eta\right)\int_{\{x_k\}}d\eta - \int_{\{x_k\}}d\nu\right]\\
&\geq (a+b\eta_k)\,\eta_k - \nu_k. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Combinando (2.7) com (2.11), deduzimos que

$$0 \geq (a + b\eta_k)\,\eta_k - \left(\frac{\eta_k}{S}\right)^3,$$

de onde se segue

$$\eta_k \geq \frac{1}{2}\left(bS^3 + \sqrt{(bS^3)^2 + 4aS^3}\right) = C_k. \tag{2.12}$$

Por outro lado, combinando mais uma vez (2.7) com (2.11), obtemos

$$0 \geq \left(a + bS\nu_k^{1/3}\right) S\nu_k^{1/3} - \nu_k.$$

Fazendo a substituição $y_k = S\nu_k^{1/3}$, concluímos que

$$\nu_k \geq \left(\frac{C_k}{S}\right)^3. \tag{2.13}$$

Como

$$\begin{aligned}
d &= \lim_{j\to\infty}\left[I(u_j) - \frac{1}{\theta}I'(u_j)u_j\right] \\
&\geq \lim_{j\to\infty}\left[a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2 + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^4 + \right. \\
&\quad \left. + \mu\int_\Omega \left(\frac{1}{\theta}\, g(x,u_j)u_j - G(x,u_j)\right)\, dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\, dx\right],
\end{aligned}$$

das hipóteses (g_1), (g_3) e do Lema de Concentração de Compacidade, obtemos

$$\begin{aligned}
d &\geq \lim_{j\to\infty}\left[a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2 + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^4 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\, dx\right] \\
&= \lim_{j\to\infty}\left[a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega |\nabla u_j|^2\, dx + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^2\, dx\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\, dx\right] \\
&\geq \lim_{j\to\infty}\left[a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega |\nabla u_j|^2\phi\, dx + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^2\phi\, dx\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\phi\, dx\right] \\
&= a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\overline{\Omega}\,\cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} \phi\, d\eta + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\left(\int_{\overline{\Omega}\,\cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} \phi\, d\eta\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_{\overline{\Omega}\,\cap\, B_{2\varepsilon}(x_k)} \phi\, d\nu.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e utilizando (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} d &\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\eta_k + b\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\theta}\right)\eta_k^2 + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\nu_k \\ &\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)C_k + b\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\theta}\right)C_k^2 + \frac{1}{S^3}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)C_k^3 \\ &= \frac{a}{2}C_k + \frac{b}{4}C_k^2 - \frac{1}{6S^3}C_k^3 - \frac{1}{\theta}\left(aC_k + bC_k^2 - \frac{C_k}{S^3}\right) \\ &= \frac{a}{2}C_k + \frac{b}{4}C_k^2 - \frac{1}{6S^3}C_k^3, \end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve a

$$aC_k + bC_k^2 - \frac{C_k}{S^3} = 0.$$

Mas isto é uma contradição com a hipótese inicial dada para d. Portanto $\mathcal{I} = \emptyset$. Consequentemente,

$$\int_\Omega (u_j)_+^6\, dx \to \int_\Omega u_+^6\, dx,\ j \to \infty,$$

demonstrando assim o lema desejado. □

Observação 2.4. *Podemos verificar que $u \geq 0$. De fato, como (u_j) é limitada, a menos de subsequência, existe $A \geq 0$ tal que $\|u_j\|^2 \to A$. Se $A = 0$, da convergência fraca de u_j para u em $H_0^1(\Omega)$, temos $u = 0$. Contudo, se $A > 0$, da convergência fraca de u_j para u em $H_0^1(\Omega)$, das hipóteses (g_1) e (g_2), e da convergência de u_j para u em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < 6$, segue, para $h \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\lim_{j\to\infty}\left[\left(a + b\|u_j\|^2\right)\int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla h\, dx - \mu\int_\Omega g(x,u_j)h\, dx - \int_\Omega (u_j)_+^5 h\, dx\right] = 0$$

$$\Rightarrow (a+bA)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h\, dx = \mu\int_\Omega g(x,u)h\, dx + \int_\Omega u_+^5 h\, dx$$

Tomando $h = u_-$, devido a hipótese (g_1), obtemos

$$(a+bA)\int_\Omega \|\nabla u_-\|^2\, dx = 0.$$

Como $a + bA > 0$, segue que

$$\int_\Omega \|\nabla u_-\|^2\, dx = 0 \Rightarrow \|u_-\|^2 = 0 \Rightarrow u_- = 0.$$

Logo,

$$u = u_+,$$

isto é, $u \geq 0$.

Lema 2.7. *Considere* g *satisfazendo as hipóteses* $(g_1), (g_2), (g_3)$*, e assuma que*

$$d < \frac{a}{2} C_k + \frac{b}{4} C_k^2 - \frac{1}{6S^3} C_k^3 \, .$$

Então, o funcional I *satisfaz a condição* $(PS)_d$.

Demonstração. Seja (u_j) uma sequência $(PS)_d$ para o funcional I. Então, como vimos pelo Lema 2.6, (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, do próprio Lema 2.6 e da Observação 2.4, existe uma função não-negativa $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, passando a uma subsequência se necessário,

$$\begin{aligned} u_j &\rightharpoonup u \quad \text{em } H_0^1(\Omega), \ j \to \infty, \\ u_j &\to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \ j \to \infty \ (1 \leq p < 6), \\ (u_j)_+ &\to u \quad \text{em } L^6(\Omega), \ j \to \infty. \end{aligned}$$

Como

$$I'(u_j)(u_j - u) = o(1), \ j \to \infty, \tag{2.14}$$

obtemos de (2.14)

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \lim_{j\to\infty} \Bigg[& \big(a + b\|u_j\|^2\big) \int_\Omega \nabla u_j \cdot (\nabla u_j - \nabla u) \, dx - \\ & - \mu \int_\Omega g(x, u_j)(u_j - u) \, dx - \int_\Omega (u_j)_+^5 (u_j - u) \, dx \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega g(x, u_j)(u_j - u) \, dx = o(1), \ j \to \infty \tag{2.16}$$

e

$$\int_\Omega (u_j)_+^5 (u_j - u) \, dx = o(1), \ j \to \infty. \tag{2.17}$$

Primeiramente verificaremos que (2.16) é válida. Para $\xi > 0$, utilizando a desigualdade (2.3) e a desigualdade de Hölder duas vezes seguidamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{j\to\infty} \left| \int_\Omega g(x,u_j)(u_j-u)\,dx \right| \\
\leq \;& \limsup_{j\to\infty} \xi \int_\Omega |u_j|^5|u_j-u|\,dx + C\int_\Omega |u_j||u_j-u|\,dx \\
\leq \;& \xi \limsup_{j\to\infty} \left[\left(\int_\Omega u_j^6\,dx\right)^{5/6} \left(\int_\Omega (u_j-u)^6\,dx\right)^{1/6} \right] \\
& + C\limsup_{j\to\infty} \left[\left(\int_\Omega u_j^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega (u_j-u)^2\,dx\right)^{1/2} \right].
\end{aligned}
$$

Utilizando a limitação de (u_j) em $L^2(\Omega)$ e $L^6(\Omega)$, de (u_j-u) em $L^6(\Omega)$ e a convergência de u_j para u em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$
\limsup_{j\to\infty} \left| \int_\Omega g(x,u_j)(u_j-u)\,dx \right| \leq C\xi,
$$

donde segue que (2.16) é válida. Agora verificaremos que (2.17) é válida. Da desigualdade de Hölder, da limitação de $((u_j)_+)$ em $L^6(\Omega)$, do Lema 2.6 e do fato que

$$
(u_j)_+^5(u_j-u) = (u_j)_+^5((u_j)_+-u),
$$

temos

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{j\to\infty} \left| \int_\Omega (u_j)_+^5(u_j-u)\,dx \right| \\
= \;& \limsup_{j\to\infty} \left| \int_\Omega (u_j)_+^5[(u_j)_+-u]\,dx \right| \\
\leq \;& \limsup_{j\to\infty} \left(\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx\right)^{5/6} \left(\int_\Omega [(u_j)_+-u]^6\,dx\right)^{1/6} \\
= \;& 0,
\end{aligned}
$$

o que mostra (2.17). Portanto, de (2.15), (2.16) e (2.17), concluímos que

$$
\begin{aligned}
& \big(a+b\|u_j\|^2\big) \int_\Omega \nabla u_j\cdot(\nabla u_j-\nabla u)\,dx = o(1) \\
\Rightarrow \;& \big(a+b\|u_j\|^2\big) \left(\|u_j\|^2 - \int_\Omega \nabla u_j\cdot\nabla u\,dx \right) = o(1) \\
\Rightarrow \;& \lim_{j\to\infty} \left(\|u_j\|^2 - \int_\Omega \nabla u_j\cdot\nabla u\,dx \right) = 0.
\end{aligned}
$$

Daí, da convergência fraca $u_j \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$,

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j\|^2 = \lim_{j\to\infty} \left[\left(\|u_j\|^2 - \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla u \, dx \right) + \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla u \, dx \right] = \|u\|^2.$$

Portanto, $\|u_j\| \to \|u\|$, quando $j \to \infty$ e, pela Proposição 1.13, deduzimos que

$$u_j \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

□

As hipóteses $(g_1), (g_2)$ e (g_3) foram utilizadas pra mostrar que se o nível de uma sequência (PS) para o funcional I satisfaz (2.6), então I é (PS) neste nível. Utilizaremos agora a hipótese (g_4) para garantir o nível c do passo da montanha correspondente a I satisfaz (2.6). Em consequência, o funcional I será $(PS)_c$.

Para isto, seja $\omega \neq \emptyset$ dado pela hipótese (g_4). Consideremos $x_0 \in \omega$. A menos de translação, podemos supor $x_0 = 0$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos uma função corte de Talenti em Ω como

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{1/2}\tau(x)}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{1/2}},$$

onde $\tau\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é tal que $\tau = 1$ em alguma vizinhança de $x_0 = 0$ e $\operatorname{spt}\tau \subset \omega$. Analogamente as estimativas feitas por Brezis & Nirenberg em [8], obtemos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx = K_1 + O(\varepsilon), \\ \displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^6 \, dx = K_2^3 + O(\varepsilon^2), \\ \displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^2 \, dx = O(\varepsilon), \end{cases} \tag{2.18}$$

quando $\varepsilon \to 0$, onde $K_1, K_2 > 0$ são constantes tais que $S = K_1/K_2$. Definindo

$$v_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^6 \, dx\right)^{1/6}}, \; x \in \Omega, \tag{2.19}$$

concluímos que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 \, dx = S + O(\varepsilon), \\ \displaystyle\int_\Omega v_\varepsilon^6 \, dx = 1, \\ \displaystyle\int_\Omega v_\varepsilon^2 \, dx = O(\varepsilon), \end{cases} \tag{2.20}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Lema 2.8. *Considere g satisfazendo as hipóteses (g_1) e (g_2). Suponha que existe um aberto não-vazio $\omega \subset \Omega$ e uma função mensurável h, tal que*

$$g(x,t) \geq h(t) \geq 0, \, \forall x \in \omega, t \geq 0$$

e, além disso,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \int_0^{\varepsilon^{-1}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)^{1/2}}\right) s^2 \, ds = \infty. \tag{2.21}$$

Então, existe uma constante $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\max_{t \geq 0} I(tv_\varepsilon) < \frac{a}{2} C_k + \frac{b}{4} C_k^2 - \frac{1}{6S^3} C_k^3, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Demonstração. Defina v_ε como em (2.19) e tome $t \geq 0$. De (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} I(tv_\varepsilon) &= \frac{a}{2}\|tv_\varepsilon\|^2 + \frac{b}{4}\|tv_\varepsilon\|^4 - \mu \int_\Omega G(x, tv_\varepsilon)\, dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (tv_\varepsilon)_+^6 \, dx \\ &= \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \mu \int_\Omega G(x, tv_\varepsilon)\, dx - \frac{t^6}{6}\int_\Omega v_\varepsilon^6 \, dx \\ &= \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \mu \int_\Omega G(x, tv_\varepsilon)\, dx - \frac{t^6}{6}. \end{aligned}$$

Defina

$$f(t) = I(tv_\varepsilon) = \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \mu \int_\Omega G(x, tv_\varepsilon)\, dx - \frac{t^6}{6} \tag{2.22}$$

e tome $t_\varepsilon \geq 0$ tal que

$$f(t_\varepsilon) = \max_{t \geq 0} f(t).$$

Do Lema 2.4, obtemos que $t_\varepsilon > 0$. Escreva $A_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|^2$. Então,

$$f'(t) = at\|v_\varepsilon\|^2 + bt^3\|v_\varepsilon\|^4 - \mu \int_\Omega g(x, tv_\varepsilon) v_\varepsilon \, dx - t^5 \Rightarrow$$

$$f'(t_\varepsilon) = t_\varepsilon \left(aA_\varepsilon + bt_\varepsilon^2 A_\varepsilon^2 - \mu \int_\Omega \frac{g(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\, dx - t_\varepsilon^4 \right) = 0$$

$$\Rightarrow aA_\varepsilon + bt_\varepsilon^2 A_\varepsilon^2 - t_\varepsilon^4 = \mu \int_\Omega \frac{g(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\, dx.$$

Contudo, sabemos que $g(x,t) \geq 0$, $\forall x \in \Omega, t \geq 0$. Portanto,

$$aA_\varepsilon + bt_\varepsilon^2 A_\varepsilon^2 - t_\varepsilon^4 \geq 0.$$

Resolvendo a inequação acima em t_ε, estimamos que

$$t_\varepsilon \leq \left[\frac{1}{2}\left(bA_\varepsilon^2 + \sqrt{(bA_\varepsilon^2)^2 + 4aA_\varepsilon}\right)\right]^{1/2}. \tag{2.23}$$

Defina

$$T_\varepsilon = \left[\frac{1}{2}\left(bA_\varepsilon^2 + \sqrt{(bA_\varepsilon^2)^2 + 4aA_\varepsilon}\right)\right]^{1/2}.$$

Como a aplicação

$$t \mapsto \frac{at^2}{2}A_\varepsilon + \frac{bt^4}{4}A_\varepsilon^2 - \frac{t^6}{6}$$

é crescente no intervalo $[0, T_\varepsilon]$, segue de (2.23) que

$$\begin{aligned} I(tv_\varepsilon) &\leq I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \\ &= \frac{at_\varepsilon^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt_\varepsilon^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{t_\varepsilon^6}{6} - \mu\int_\Omega G(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\,dx \\ &\leq \frac{aT_\varepsilon^2}{2}A_\varepsilon + \frac{bT_\varepsilon^4}{4}A_\varepsilon^2 - \frac{T_\varepsilon^6}{6} - \mu\int_\Omega G(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\,dx. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Lembremos que

$$C_k = \frac{1}{2}\left(bS^3 + \sqrt{(bS^3)^2 + 4aS^3}\right)$$

e observemos também que

$$T_\varepsilon^2 A_\varepsilon = \frac{1}{2}A_\varepsilon\left(bA_\varepsilon^2 + \sqrt{(bA_\varepsilon^2)^2 + 4aA_\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\left(bA_\varepsilon^3 + \sqrt{(bA_\varepsilon^3)^2 + 4aA_\varepsilon^3}\right),$$

De (2.20), temos $A_\varepsilon = S + O(\varepsilon)$, donde segue que

$$T_\varepsilon^2 A_\varepsilon = C_k + O(\varepsilon). \tag{2.25}$$

De

$$T_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left(bA_\varepsilon^2 + \sqrt{(bA_\varepsilon^2)^2 + 4aA_\varepsilon}\right)$$

e

$$\frac{C_k}{S} = \frac{1}{2S}\left(bS^3 + \sqrt{(bS^3)^2 + 4aS^3}\right) = \frac{1}{2}\left(bS^2 + \sqrt{(bS^2)^2 + 4aS}\right),$$

obtemos

$$T_\varepsilon^2 = \frac{C_k}{S} + O(\varepsilon). \tag{2.26}$$

Daí, por decorrência de (2.24), (2.25) e (2.26), deduzimos que

$$I(tv_\varepsilon) \leq \frac{a}{2}C_k + \frac{b}{4}C_k^2 - \frac{1}{6S^3}C_k^3 + O(\varepsilon) - \mu \int_\Omega G(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\, dx. \tag{2.27}$$

Afirmamos agora que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-1} \int_\Omega G(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\, dx \right] = \infty. \tag{2.28}$$

De fato, mostraremos inicialmente que

$$\int_\Omega \frac{g(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\, dx \to 0, \tag{2.29}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Com efeito, utilizando (2.3) e (2.20), para $\xi > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{g(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\, dx &\leq \int_\Omega \frac{\left(\xi |t_\varepsilon v_\varepsilon|^5 + C_\xi |t_\varepsilon v_\varepsilon|\right) v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\, dx \\ &\leq \int_\Omega \left(\xi t_\varepsilon^4 v_\varepsilon^6 + C_\xi v_\varepsilon^2\right)\, dx \\ &= \xi t_\varepsilon^4 \int_\Omega v_\varepsilon^6\, dx + C_\xi \int_\Omega v_\varepsilon^2\, dx \\ &= \xi t_\varepsilon^4 + C_\xi \int_\Omega v_\varepsilon^2\, dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, como T_ε é limitado e $0 < t_\varepsilon \leq T_\varepsilon$, temos que t_ε também é limitado. Logo, utilizando esse fato, os cálculos acima e (2.20), temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \frac{g(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\, dx &\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\xi t_\varepsilon^4 + C_\xi \int_\Omega v_\varepsilon^2\, dx \right) \\ &= \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\xi t_\varepsilon^4 + C_\xi O(\varepsilon) \right) \\ &\leq C\xi, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ e todo $\xi > 0$. Segue daí que

$$\int_\Omega \frac{g(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\, dx \to 0,$$

ou seja, (2.29). Lembrando que

$$aA_\varepsilon + bt_\varepsilon^2 A_\varepsilon^2 - t_\varepsilon^4 = \mu \int_\Omega \frac{g(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\, dx,$$

de (2.20) e (2.29), obtemos

$$aS + bS^2 \left(\lim_{\varepsilon\to 0} t_\varepsilon\right)^2 - \left(\lim_{\varepsilon\to 0} t_\varepsilon\right)^4 = 0,$$

isto é,

$$t_\varepsilon \to \left[\frac{1}{2}\left(bS^2 + \sqrt{(bS^2)^2 + 4aS}\right)\right]^{1/2}, \ \varepsilon \to 0. \tag{2.30}$$

Portanto, das hipóteses sobre g, de (2.20) e (2.30), concluímos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1}\int_\Omega G(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\,dx &\geq \varepsilon^{-1}\int_\omega G(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\,dx \\
&\geq \varepsilon^{-1}\int_\omega H(t_\varepsilon v_\varepsilon)\,dx \\
&\geq \varepsilon^{-1}\int_\omega H\left(C_\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}\tau(x)}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{1/2}}\right)\,dx \\
&\geq C\varepsilon^{-1}\int_0^r H\left(C_\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{(\varepsilon^2 + s^2)^{1/2}}\right)s^2\,ds \\
&\geq C\varepsilon^2\int_0^{\frac{r}{\varepsilon}} H\left(C_\varepsilon \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + s^2)^{1/2}}\right)s^2\,ds \\
&\geq C\varepsilon^2\int_0^{\frac{C}{\varepsilon}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + s^2)^{1/2}}\right)s^2\,ds,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$, onde C_ε denota uma constante que converge para algum valor positivo quando $\varepsilon \to 0$, e na última desigualdade fizemos um dimensionamento adequado para ε. Se $C \geq 1$, então (2.28) é facilmente verificada por (2.21). Contudo, se $C < 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2\int_0^{\frac{C}{\varepsilon}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + s^2)^{1/2}}\right)s^2\,dx &= \varepsilon^2\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + s^2)^{1/2}}\right)s^2\,ds \\
&\quad -\varepsilon^2\int_{\frac{C}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + s^2)^{1/2}}\right)s^2\,ds.
\end{aligned}$$

Definindo

$$B_\varepsilon = \varepsilon^2\int_{\frac{C}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + s^2)^{1/2}}\right)s^2\,dx$$

e utilizando (2.3), para $\xi > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} |B_\varepsilon| &= \left| \varepsilon^2 \int_{\frac{C}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)^{1/2}}\right) s^2\, ds \right| \\ &\leq \varepsilon^2 \left[\xi \int_{\frac{C}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left| \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)^{1/2}} \right|^6 s^2\, ds + C_\xi \int_{\frac{C}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left| \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)^{1/2}} \right|^2 s^2\, ds \right] \\ &\leq C \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$, o que conclui (2.28). Portanto, de (2.27) e (2.28), podemos tomar ε_0 tão pequeno de maneira que

$$\sup_{t \geq 0} I(tv_\varepsilon) \leq \frac{a}{2} C_k + \frac{b}{4} C_k^2 - \frac{1}{6S^3} C_k^3,$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Mostraremos agora que, devido à (g_4), g satisfaz as hipóteses do Lema 2.8.

Lema 2.9. *Suponha que a função g satisfaça as hipóteses $(g_1), (g_2)$ e (g_4). Então, g satisfaz as hipóteses do Lema 2.8.*

Demonstração. Defina

$$h(t) = \inf_{x \in \omega} g(x,t).$$

Da hipótese (g_4) segue que, para todo $M > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$t > R \Rightarrow g(x,t) \geq Mt^3,\ \forall x \in \omega,$$

daí,

$$H(t) = \inf_{x \in \omega} G(x,t) \geq Mt^4, \forall t > R. \tag{2.31}$$

Observe que existe uma constante $C > 0$, que independe de $\varepsilon > 0$, tal que

$$\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)^{1/2}} > R, \quad \forall\, s \leq C\varepsilon^{-1/2},$$

se ε é suficientemente pequeno. Utilizando este fato e (2.31), segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_0^{\varepsilon^{-1}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)^{1/2}}\right) s^2\, ds &\geq \varepsilon^2 \int_0^{C\varepsilon^{-1/2}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)^{1/2}}\right) s^2\, ds \\ &\geq M \int_0^{C\varepsilon^{-1/2}} \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\, ds \end{aligned}$$

para todo $M > 0$ e $\varepsilon > 0$ pequeno. Portanto,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^2\int_0^{\varepsilon^{-1}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)^{1/2}}\right)s^2\,ds\right] \geq CM$$

para todo $M > 0$ e alguma constante $C > 0$ que não depende de M. Isto conclui a demonstração. $\square$

Finalmente, demonstraremos o Teorema 2.1.

Prova do Teorema 2.1. Considere a função g satisfazendo as hipóteses $(g_1)-(g_4)$. Lembremos que a energia do passo da montanha c é definida por

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma([0,1])} I(u) > 0.$$

Como observamos antes, existe uma sequência (u_j), a qual é $(PS)_c$ para I. Do Lema 2.5 e da definição da classe de caminhos Γ, temos que

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, t_\varepsilon > 0 \text{ tal que } \gamma_\varepsilon(t) = t(t_\varepsilon v_\varepsilon),\ 0 \leq t \leq 1,$$

pertence a Γ. Dos lemas 2.8 e 2.9, existe uma constante $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} I(tv_\varepsilon) < \frac{a}{2}C_k + \frac{b}{4}C_k^2 - \frac{1}{6S^3}C_k^3, \quad \forall\,\varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Fixe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Então,

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_\varepsilon(t)) = \max_{s\in[0,t_\varepsilon]} I(sv_\varepsilon) \leq \max_{s\geq 0} I(sv_\varepsilon) < \frac{a}{2}C_k + \frac{b}{4}C_k^2 - \frac{1}{6S^3}C_k^3.$$

Do Lema 2.7, segue que I satisfaz a condição $(PS)_c$. Logo, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ e uma subsequência de (u_j), ainda denotada por (u_j), tal que

$$u_j \to u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$I(u_j) \to I(u) \text{ e } I'(u_j) \to I'(u).$$

Daí,

$$I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0,$$

mostrando que $u \geq 0$ é uma solução fraca não-trivial de (P_μ). $\square$

Do Teorema 2.1 segue o próximo corolário:

Corolário 2.10. *Seja $a, b > 0$. Então, se $3 < q < 5$ e $g(x,t) = |t|^{q-1}t$, o problema (P_μ) possui uma solução não-negativa para todo $\mu > 0$.*

Demonstração. Assuma $3 < q < 5$ e $g(x,t) = |t|^{q-1}t$. Podemos ver facilmente que g satisfaz as hipóteses $(g_1)-(g_4)$. Segue, portanto, do Teorema 2.1 que (P_μ) tem solução para todo $\mu > 0$. $\square$

2.3 Existência de soluções para o problema (P_μ) sob as hipóteses $(g_1), (g_2), (g_5)$ e (g_6)

Nesta seção, temos por objetivo demonstrar o Teorema 2.2. Suponha $a, b > 0$, e considere g satisfazendo as hipóteses $(g_1), (g_2), (g_5)$ e (g_6).

Se existe uma constante $4 < \theta < 6$ tal que

$$g(x,t)t - \theta G(x,t) \geq 0, \ \forall x \in \Omega \text{ e } t \geq 0,$$

a demonstração é bem mais simples (veja o argumento utilizado em [2] para este caso). Portanto, consideremos a seguinte hipótese no lugar de (g_5):

$(g_5)'$ Existe uma constante $2 < \theta \leq 4$ tal que

$$g(x,t)t - \theta G(x,t) \geq 0, \ \forall x \in \Omega \text{ e } t \geq 0.$$

Analogamente à seção anterior, consideramos o *funcional energia* associado ao problema $(P_\mu)_A$ como

$$I_\mu(u) \ = \ \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \mu \int_\Omega G(x,u)\,dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\,dx \quad \left(u \in H_0^1(\Omega)\right).$$

Vamos considerar o seguinte truncamento: Seja $\psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função suave definida por

$$\begin{cases} \psi = 1, & \text{em } [0,1), \\ \psi = 0, & \text{em } [2,\infty), \\ 0 \leq \psi \leq 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, suponha também que

$$-2 \leq \psi' \leq 0, \ \text{ em } \ [0,\infty).$$

Dado $T > 0$ defina o funcional corte $\Phi_T(u)$, o qual é $C^1(H_0^1(\Omega))$, como

$$\Phi_T(u) = \psi\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right).$$

Daí, consideramos um funcional truncado em $H_0^1(\Omega)$ definido por

$$J_\mu^T(u) \ := \ \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4\Phi_T(u) - \mu\int_\Omega G(x,u)\,dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\,dx$$

Podemos verificar que J_μ^T está bem definido e é continuamente Fréchet-diferenciável (vide Apêndice A). A diferencial de Fréchet de $J_\mu^T(u)$ é dada por

$$\begin{aligned}(J_\mu^T)'(u)h &= \left[a + b\|u\|^2\Phi_T(u) + \frac{b}{2T^2}\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla h\,dx - \\ &\quad -\mu\int_\Omega g(x,u)h\,dx - \int_\Omega u_+^5 h\,dx, \end{aligned}\tag{2.32}$$

onde $h \in H_0^1(\Omega)$ é arbitrária. Escolha $T > 0$ de tal forma que

$$T = \min\left\{\left(\frac{a}{8b}\right)^{1/2}, \left[\frac{a(\theta-2)}{4b(4-\theta)}\right]^{1/2}\right\}. \tag{2.33}$$

Observe que

$$\left|\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\right| \leq 8T^4. \tag{2.34}$$

De fato, se

$$\|u\|^2 > 2T^2$$

temos que $\psi = 0$, donde concluímos que $\psi' = 0$ e assim (2.34) é válida. Caso contrário, $\|u\|^2 \leq 2T^2$ e observando que

$$\left|\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\right| \leq 2,$$

temos

$$\left|\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\right| \leq 2\|u\|^4 \; = 2(\|u\|^2)^2 < 2(2T^2)^2 = 8T^4,$$

donde segue que, em qualquer caso, (2.34) é válida. De (2.33) e (2.34), obtemos as seguintes relações:

$$a + \frac{b}{2T^2}\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right) \geq \frac{a}{2}, \tag{2.35}$$

$$8b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)T^4 \leq a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)T^2 \tag{2.36}$$

e

$$a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) - 2b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)T^2 \geq 0. \tag{2.37}$$

Vamos verificar a validade de cada uma dessas relações. De (2.34), temos que

$$\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right) \geq -8T^4$$

o que, combinado com (2.33), acarreta

$$\begin{aligned} a+\frac{b}{2T^2}\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right) &\geq a-\frac{b}{2T^2}8T^4 \\ &= a-4bT^2 \\ &\geq a-4b\left(\frac{a}{8b}\right) \\ &= a-\frac{a}{2} \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos (2.35). Agora vamos verificar (2.36). De fato, observamos que

$$\begin{aligned} 8b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)T^4 &= 8b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)T^2T^2 \\ &\leq 8b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)\left[\frac{a(\theta-2)}{4b(4-\theta)}\right]T^2 \\ &= 2a\left(\frac{4-\theta}{4\theta}\right)\left[\frac{(\theta-2)}{(4-\theta)}\right]T^2 \\ &= a\left[\frac{(\theta-2)}{2\theta}\right]T^2 \\ &= a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)T^2, \end{aligned}$$

mostrando (2.36). Além disso, (2.37) segue de (2.36), pois

$$\begin{aligned} 0 &\leq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)T^2-8b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)T^4 \\ &\leq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)T^2-2b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)T^4 \\ &= \left[a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)-2b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)T^2\right]T^2. \end{aligned}$$

Como $T^2 \geq 0$, segue a validade de (2.37). Notamos também que se $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| < T$, então

$$\Phi_T(u) = \psi\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right) = 1,$$

acarretando

$$J_\mu^T(u) = I_\mu(u).$$

Portanto, se u é um ponto crítico de J_μ^T com $\|u\| < T$, então u também é um ponto crítico de I_μ. Demonstraremos adiante a existência de um ponto crítico não-trivial u de J_μ^T com $\|u\| < T$.

Doravante, por simplicidade, denotaremos J_μ^T e $\Phi_T(u)$ apenas por J_μ e $\Phi(u)$ respectivamente.

Começaremos a demonstração do Teorema 2.2 com os próximos dois lemas, que tratam da geometria do passo da montanha do funcional J_μ.

Lema 2.11. *Suponha que a função g satisfaz as hipóteses (g_1) e (g_2). Então, existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tal que*

$$J_\mu(u) \geq \alpha, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega), \quad \textit{com } \|u\| = \rho.$$

Demonstração. A demonstração é análoga àquela do Lema 2.4. De fato, tomando $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$, obtemos

$$\begin{aligned} J_\mu(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4\Phi(u) - \mu \int_\Omega G(x,u)\, dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\, dx \\ &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \mu \int_\Omega G(x,u)\, dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\, dx \\ &= \frac{a}{4}\rho^2 - c\rho^6, \end{aligned}$$

para alguma constante $c > 0$. Portanto, tomando ρ suficientemente pequeno, concluímos que existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$J_\mu(u) \geq \alpha.$$

□

Lema 2.12. *Suponha que g satisfaça as hipóteses (g_1) e (g_2). Então, existe uma função $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v_0\| > \rho$ e $J_\mu(v_0) \leq 0$.*

Demonstração. Tome uma função não-trivial qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$ com $v \geq 0$ e considere $t > 0$. Então,

$$\begin{aligned} J_\mu(tv) &= \frac{at^2}{2}\|v\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v\|^4\Phi(u) - \mu \int_\Omega G(x,tv)\, dx - \frac{t^6}{6}\int_\Omega v^6\, dx \\ &\leq \frac{at^2}{2}\|v\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v\|^4 - \frac{t^6}{6}\int_\Omega v^6\, dx, \end{aligned}$$

Portanto, $I(tv) \to -\infty$, quando $t \to \infty$. Segue daí que existe uma constante $t_0 > 0$ tal que se $v_0 = t_0 v$, então $\|v_0\| > \rho$ e $J_\mu(v_0) \leq 0$. □

Como na seção anterior, definimos

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega)\right) \mid \gamma(0) = 0, J_\mu\left(\gamma(1)\right) \leq 0, \gamma(1) \neq 0\right\}$$

e

$$c_\mu = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} J_\mu(u).$$

Como a geometria do passo da montanha é verificada, pelo Teorema 1.10 asseguramos a existência de uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para J_μ.

Lema 2.13. *Considere a função g satisfazendo as hipóteses $(g_1), (g_2)$ e (g_6). Então,*

$$c_\mu \to 0, \text{ se } \mu \to \infty.$$

Demonstração. Tome uma função $\zeta \in C_0^\infty(\omega)$ com $\zeta(0) = 1$, e uma constante k tal que $0 < k < 1/2$. Defina

$$v = \zeta |x|^{-k}, x \in \omega.$$

Portanto, $v \in H_0^1(\Omega)$ considerando sua extensão nula a Ω. Então,

$$\begin{aligned} J_\mu(tv) &= \frac{a}{2}\|tv\|^2 + \frac{b}{4}\|tv\|^4\Phi(u) - \mu \int_\Omega G(x,tv)\,dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (tv)_+^6\,dx \\ &\leq \frac{at^2}{2}\|v\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v\|^4 - \mu \int_\omega G(x,tv)\,dx - \frac{t^6}{6}\int_\Omega v^6\,dx. \end{aligned}$$

Defina

$$f(t) = \frac{at^2}{2}\|v\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v\|^4 - \mu \int_\omega G(x,tv)\,dx - \frac{t^6}{6}\int_\Omega v^6\,dx.$$

Tome $t_\mu > 0$ (os lemas 2.11 e 2.12 nos permitem tomar tal valor) de tal forma que

$$f(t_\mu) = \max_{t \geq 0} f(t).$$

Como $f'(t_\mu) = 0$, segue que

$$f'(t_\mu) = at_\mu\|v\|^2 + bt_\mu^3\|v\|^4 - \mu \int_\omega g(x,t_\mu v)v\,dx - t_\mu^5 \int_\Omega v^6\,dx = 0$$

$$\Rightarrow a\|v\|^2 + bt_\mu^2\|v\|^4 - \frac{\mu}{t_\mu}\int_\omega g(x,t_\mu v)v\,dx - t_\mu^4 \int_\Omega v^6\,dx = 0. \tag{2.38}$$

Contudo, sabemos que $g(x,t) \geq 0, \forall\, x \in \Omega,\ t \geq 0$. Portanto, temos que

$$a\|v\|^2 + bt_\mu^2\|v\|^4 \geq t_\mu^4 \int_\Omega v^6\, dx.$$

Analogamente ao que foi feito no Lema 2.8, podemos garantir que existe uma constante $C > 0$ tal que $t_\mu \leq C$, para todo $\mu > 0$. Afirmamos que

$$t_\mu \to 0,\ \ \mu \to \infty.$$

De fato, se isso não acontecesse, existiriam uma sequência (μ_j) e $\beta > 0$ tais que

$$\mu_j \to \infty \ \text{ e } \ t_{\mu_j} \to \beta,\ j \to \infty.$$

Portanto, utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\frac{1}{t_{\mu_j}} \int_\omega g(x, t_{\mu_j} v)v\, dx \to \frac{1}{\beta} \int_\omega g(x, \beta v) v\, dx.$$

Tendo em vista a hipótese (g_6) e a definição de v, segue que

$$\int_\omega g(x, \beta v) v\, dx > 0$$

Mas, de (2.38), temos que

$$\int_\omega g(x, \beta v) v\, dx = 0,$$

uma contradição. Portanto, temos que

$$0 < c_\mu \leq \max_{t \geq 0} J_\mu(tv) \leq \max_{t \geq 0} f(t) < \frac{at_\mu^2}{2}\|v\|^2 + \frac{bt_\mu^4}{4}\|v\|^4 \to 0,$$

o que completa a demonstração. □

O próximo lema que demonstraremos garantirá a compacidade local para o funcional J_μ.

Lema 2.14. *Considere g satisfazendo $(g_1), (g_2)$ e $(g_5)'$ e seja (u_j) uma sequência $(PS)_d$ para J_μ com*

$$d < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{aS}{2}\right)^{3/2},$$

Então, $((u_j)_+)$ possui uma subsequência que converge fortemente em $L^6(\Omega)$.

Demonstração. Seja $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional J_μ com

$$d < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{aS}{2}\right)^{3/2}.$$

Primeiramente afirmamos que (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, como

$$J_\mu(u_j) \to d \text{ e } J'_\mu(u_j) \to 0,$$

de (g_1), $(g_5)'$ e (2.32) obtemos

$$\begin{aligned}
d+1 &\geq J_\mu(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_\mu(u_j)(u_j) + \frac{1}{\theta}J'_\mu(u_j)(u_j)\\
&\geq \frac{a}{2}\|u_j\|^2 + \frac{b}{4}\|u_j\|^4\Phi(u_j) - \mu\int_\Omega G(x,u_j)\,dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx\\
&\quad - \frac{1}{\theta}\left\{\left[a + b\|u_j\|^2\Phi(u_j) + \frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^2\,dx\right\}\\
&\quad + \frac{1}{\theta}\left\{\mu\int_\Omega g(x,u_j)u_j\,dx + \int_\Omega (u_j)_+^5 u_j\,dx\right\} + \frac{1}{\theta}J'_\mu(u_j)(u_j)\\
&\geq a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2 + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^4\Phi(u_j) - \frac{b}{2\theta T^2}\|u_j\|^6\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\\
&\quad + \mu\int_\Omega\left(\frac{1}{\theta}g(x,u_j)u_j - G(x,u_j)\right)dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx - \|u_j\|\\
&\geq a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2 + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^4\Phi(u_j) - \|u_j\|,
\end{aligned}$$

para $j \in \mathbb{N}$ grande, onde usamos na última desigualdade o fato que $\psi' \leq 0$ em $[0,\infty)$. Contudo, observe que

$$\|u\|^4\Phi(u) \leq 4T^4, \ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.39}$$

De fato, se

$$\|u\|^2 > 2T^2$$

então $\Phi(u) = 0$, donde concluímos que (2.39) é válida. Se temos o caso contrário, $\|u\|^2 \leq 2T^2$, segue que $\Phi(u) \leq 1$, o que acarreta

$$\|u\|^4\Phi(u) \leq \|u\|^4 = (\|u\|^2)^2 \leq (2T^2)^2 = 4T^4,$$

donde segue, em qualquer caso, que (2.39) é válida. Logo, de (2.39) obtemos

$$\begin{aligned}
d+1 &\geq a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2 + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^4\Phi(u_j) - \|u_j\|\\
&\geq a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2 + 4b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)T^4 - \|u_j\|
\end{aligned}$$

para $j \in \mathbb{N}$ grande. Como $a, b > 0$, podemos garantir que (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Consequentemente, como vimos na demonstração do Lema 2.6, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{ll} u_j \rightharpoonup u & \text{em } H_0^1(\Omega), \\ u_j \to u & \text{em } L^p(\Omega), \quad \text{com } 1 \leq p < 6, \\ u_j \to u & \text{q.s. em } \Omega. \end{array}$$

Do Lema de concentração de compacidade de Lions, existe um conjunto no máximo enumerável $\mathcal{I}$, pontos $\{x_k\}_{k\in\mathcal{I}} \subset \overline{\Omega}$ e números $\{\eta_k\}_{k\in\mathcal{I}}$, $\{\nu_k\}_{k\in\mathcal{I}} \subset \mathbb{R}^+$ com

$$\eta_k \geq S\nu_k^{\frac{1}{3}} \quad (k \in \mathcal{I}) \tag{2.40}$$

tais que, passando a uma subsequência se necessário,

$$|\nabla u_j|^2\, dx \rightharpoonup \eta \geq |\nabla u|^2\, dx + \sum_{k\in\mathcal{I}} \eta_k \delta_{x_k},$$

$$(u_j)_+^6\, dx \rightharpoonup \nu = (u)_+^6\, dx + \sum_{k\in\mathcal{I}} \nu_k \delta_{x_k}.$$

Afirmamos que $\mathcal{I} = \emptyset$. Suponha por contradição que $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Daí, para cada $k \in \mathcal{I}$ e $\varepsilon > 0$, defina uma função suave $\phi = \phi_{k,\varepsilon} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \phi = 1, & \text{em } B_\varepsilon(x_k), \\ \phi = 0, & \text{em } B_{2\varepsilon}(x_k)^c, \\ 0 \leq \phi \leq 1, & \text{caso contrário}, \\ |\nabla\phi| \leq 2/\varepsilon, & \text{em } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{j\to\infty} \langle J_\mu'(u_j), u_j\phi \rangle \\ &= \lim_{j\to\infty} \left\{ \left[a + b\|u_j\|^2\Phi(u_j) + \frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right] \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla(u_j\phi)\, dx - \right. \\ &\quad \left. - \mu \int_\Omega g(x, u_j)u_j\phi\, dx - \int_\Omega (u_j)_+^6 \phi\, dx \right\} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
& \lim_{j\to\infty}\left\{\left[a+b\|u_j\|^2\Phi(u_j)+\frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u_j\cdot\nabla(u_j\phi)\,dx\right\}\\
= & \lim_{j\to\infty}\left\{\left[a+b\|u_j\|^2\Phi(u_j)+\frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega (\nabla u_j\cdot\nabla\phi)u_j\,dx\right\}\\
& +\lim_{j\to\infty}\left\{\left[a+b\|u_j\|^2\Phi(u_j)+\frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^2\phi\,dx\right\}\\
\geq & \lim_{j\to\infty}\frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla u_j|^2\phi\,dx+o(1),
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

onde $o(1)\to 0$, quando $\varepsilon\to 0$. A última desigualdade vem de (2.35) e do fato que

$$
\lim_{j\to\infty}\left[a+b\|u_j\|^2\Phi(u_j)+\frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega (\nabla u_j\cdot\nabla\phi)u_j\,dx=o(1),
\tag{2.43}
$$

quando $\varepsilon\to 0$. Vamos verificar que (2.43) é válida. Analogamente ao que foi feito em (2.34) e (2.39), podemos mostrar que

$$
\|u\|^2\Phi(u)\leq 2T^2,\ \forall u\in H_0^1(\Omega).
\tag{2.44}
$$

De (2.34) e (2.44), usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a limitação de (u_j) em $H_0^1(\Omega)$, a convergência de u_j para u em $L^2(\Omega)$ e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \left|\lim_{j\to\infty}\left[a+b\|u_j\|^2\Phi(u_j)+\frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega (\nabla u_j\cdot\nabla\phi)u_j\,dx\right|\\
\leq & \ (a+6bT^2)\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}|\nabla u_j||u_j\nabla\phi|\,dx\\
\leq & \ (a+6bT^2)\lim_{j\to\infty}\left\{\left(\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}|\nabla u_j|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}|u_j\nabla\phi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
\leq & \ C\left(\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}|u|^2|\nabla\phi|^2\,dx\right)^{1/2}\\
\leq & \ C\left(\left(\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}\left(u^2\right)^3\,dx\right)^{1/3}\right)^{1/2}\left(\left(\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}\left(|\nabla\phi|^2\right)^{3/2}\,dx\right)^{2/3}\right)^{1/2}\\
\leq & \ C\left(\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}u^6\,dx\right)^{1/6}\left(\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}|\nabla\phi|^3\,dx\right)^{1/3}\\
\leq & \ C\left(\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)}u^6\,dx\right)^{1/6}\to 0,\ \text{quando}\,\varepsilon\to 0,
\end{aligned}
$$

o que mostra (2.43). Agora mostraremos que

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g(x,u_j)u_j\phi\,dx = o(1). \tag{2.45}$$

Para $\xi > 0$, utilizando (2.3) segue que

$$\begin{aligned}
& \lim_{j\to\infty}\int_\Omega g(x,u_j)u_j\phi\,dx \\
\leq\ & \lim_{j\to\infty}\left(\xi\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)} u_j^6\phi\,dx\ +\ C_\xi\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)} u_j^2\phi\,dx\right) \\
\leq\ & \lim_{j\to\infty}\left(\xi\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)} u_j^6\ \,dx\ +\ C_\xi\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)} u_j^2\phi\,dx\right) \\
\leq\ & C\xi + C_\xi\int_{\Omega\,\cap\,B_{2\varepsilon}(x_k)} u^2\phi\,dx,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Daí, obtemos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g(x,u_j)u_j\phi\,dx\right) \leq C\xi,$$

para todo $\xi > 0$, o que mostra (2.45). Portanto, de (2.41), (2.42), (2.45) e do Lema de Concentração de Compacidade, concluímos que

$$\begin{aligned}
0\ \geq\ & \lim_{j\to\infty}\left[\frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla u_j|^2\phi\,dx - \int_\Omega (u_j)_+^6\phi\,dx\right] + o(1) \\
\geq\ & \lim_{j\to\infty}\left[\frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla u_j|^2\phi\,dx - \int_\Omega (u_j)_+^6\phi\,dx\right] + o(1) \\
\geq\ & \frac{a}{2}\int_{\overline{\Omega}}\phi\,d\eta - \int_{\overline{\Omega}}\phi\,d\nu + o(1),
\end{aligned}$$

quando $j\to\infty$. Tomando $\varepsilon\to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
0\ \geq\ & \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{a}{2}\int_{\overline{\Omega}}\phi\,d\eta - \int_{\overline{\Omega}}\phi\,d\nu + o(1)\right] \\
=\ & \frac{a}{2}\int_{\{x_k\}} d\eta - \int_{\{x_k\}} d\nu \\
=\ & \frac{a}{2}\eta_k - \nu_k,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\nu_k \geq \frac{a}{2}\eta_k. \tag{2.46}$$

Utilizando (2.40) em (2.46), temos então

$$\begin{aligned}
\nu_k &\geq \frac{a}{2}\eta_k \\
&\geq \frac{a}{2}S\nu_k^{1/3} \\
\Rightarrow \nu_k &\geq \left(\frac{aS}{2}\right)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

De $(g_5)'$, $\psi' < 0$, (2.44), (2.37), e do Lema de concentração de compacidade, segue que

$$\begin{aligned}
d &= \lim_{j\to\infty}\left[J_\mu(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_\mu(u_j)(u_j)\right] \\
&= \lim_{j\to\infty}\left\{\left[a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right) + b\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^2\Phi(u_j)\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^2\,dx - \right. \\
&\quad - \frac{b}{2\theta T^2}\|u_j\|^6\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right) + \mu\int_\Omega\left(\frac{1}{\theta}\,g(x,u_j)u_j - G(x,u_j)\right)dx \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx\right\} \\
&\geq \lim_{j\to\infty}\left\{\left[a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right) - b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)\|u_j\|^2\Phi(u_j)\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^2\,dx \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx\right\} \\
&\geq \lim_{j\to\infty}\left\{\left[a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right) - 2b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)T^2\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^2\,dx \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx\right\} \\
&\geq \lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_j)_+^6\phi\,dx = \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\int_{\overline{\Omega}}\phi\,d\nu.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e utilizando (2.47), obtemos

$$\begin{aligned}
d &\geq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\nu_k \\
&\geq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{aS}{2}\right)^{3/2},
\end{aligned}$$

o que contradiz a hipótese inicial dada para d. Portanto, $\mathcal{I} = \emptyset$. Consequentemente,

$$\int_\Omega (u_j)_+^6\,dx \to \int_\Omega u_+^6\,dx,$$

finalizando a demonstração. $\square$

Observação 2.5. *Podemos mostrar que u é não-negativa. De fato, como (u_j) é limitada, a menos de subsequência, existe $A \geq 0$ tal que $\|u_j\|^2 \to A$. Se $A = 0$, a conclusão segue. Se $A > 0$, temos da convergência $u_j \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, da convergência $u_j \to u$ em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < 6$, e pelo funcional ψ ser de classe C^1, para $h \in H_0^1(\Omega)$, obtemos*

$$\lim_{j\to\infty}\left\{\left[a + b\|u_j\|^2\Phi(u_j) + \frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla h\, dx\right\} -$$

$$- \mu\int_\Omega g(x,u_j)h\, dx - \int_\Omega (u_j)_+^5 h\, dx\Bigg\} = 0$$

,

$$\Rightarrow \left[a + bA\psi\left(\frac{A}{T^2}\right) + \frac{b}{2T^2}A^2\psi'\left(\frac{A}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h\, dx =$$

$$= \mu\int_\Omega g(x,u)h\, dx + \int_\Omega u_+^5 h\, dx$$

Tomando $h = u_-$, concluímos que

$$\left[a + bA\psi\left(\frac{A}{T^2}\right) + \frac{b}{2T^2}A^2\psi'\left(\frac{A}{T^2}\right)\right]\int_\Omega |\nabla u_-|^2\, dx = 0$$

Vamos mostrar que

$$a + bA\psi\left(\frac{A}{T^2}\right) + \frac{b}{2T^2}A^2\psi'\left(\frac{A}{T^2}\right) > 0.$$

De fato, como

$$A^2 \geq 4T^4; \quad T^2 \leq \frac{a}{8b}; \quad \psi' \geq -2$$

temos que

$$\begin{aligned}
a + bA\psi\left(\frac{A}{T^2}\right) + \frac{b}{2T^2}A^2\psi'\left(\frac{A}{T^2}\right) &\geq a + bA\psi\left(\frac{A}{T^2}\right) - \frac{2b}{2T^2}A^2\\
&\geq a - \frac{b}{T^2}A^2\\
&\geq a - \frac{b}{T^2}4T^4\\
&= a - 4bT^2\\
&\geq a - 4b\cdot\frac{a}{8b} = \frac{a}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega \|\nabla u_-\|^2\,dx = 0 \Rightarrow \|u_-\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0 \Rightarrow u_- = 0.$$

Logo, $u = u_+$, isto é, u é não-negativa.

Lema 2.15. *Considere g satisfazendo as hipóteses $(g_1), (g_2), (g_5)'$ e (g_6). Então, existe uma constante $\mu^* > 0$ tal que o funcional J_μ tem um ponto crítico não-trivial para todo $\mu > \mu^*$.*

Demonstração. Do Lema 2.13 existe uma constante $\mu^* > 0$ tal que

$$c_\mu < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{aS}{2}\right)^{3/2}, \text{ para todo } \mu > \mu^*.$$

Considere $\mu > \mu^*$ e seja (u_j) uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para o funcional J_μ. Da demonstração do Lema 2.14, (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Ainda do Lema 2.14 e da Observação (2.5), existe uma função não-negativa $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{ll} u_j \rightharpoonup u & \text{em } H_0^1(\Omega) \\ u_j \to u & \text{em } L^p(\Omega), \forall\, 1 \le p < 6 \\ (u_j)_+ \to u & \text{em } L^6(\Omega) \end{array},$$

passando a subsequências se necessário, mas ainda denotada por (u_j). Vamos provar agora que o funcional J_μ satisfaz a condição $(PS)_{c_\mu}$. Como $J'_\mu(u_j) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ e (u_j) é limitado, obtemos

$$J'_\mu(u_j)(u_j - u) = o(1), \tag{2.48}$$

onde $o(1) \to 0$, quando $j \to \infty$, ou seja,

$$\left[a + b\|u_j\|^2\Phi(u_j) + \frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla(u_j - u)\,dx -$$

$$-\mu\int_\Omega g(x,u)(u_j - u)\,dx - \int_\Omega u_+^5(u_j - u)\,dx = o(1). \tag{2.49}$$

Como vimos na seção anterior ((2.16) e (2.17)), temos que

$$\int_\Omega g(x,u_j)(u_j - u)\,dx = o(1), \text{ quando } j \to \infty, \tag{2.50}$$

e

$$\int_\Omega (u_j)_+^5(u_j - u)\,dx = o(1), \text{ quando } j \to \infty. \tag{2.51}$$

Portanto, de (2.49), (2.50) e (2.51),

$$0=\lim_{j\to\infty}\left[a+b\|u_j\|^2\Phi(u_j)+\frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u_j\cdot\nabla(u_j-u)\,dx.$$

Utilizando (2.35), segue que

$$\begin{aligned} a+b\|u_j\|^2\Phi(u_j)+\frac{b}{2T^2}\|u_j\|^4\psi'\left(\frac{\|u_j\|^2}{T^2}\right) &\geq \frac{a}{2}+b\|u_j\|^2\Phi(u_j)\\ &\geq \frac{a}{2}>0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{j\to\infty}\left(\|u_j\|^2-\int_\Omega \nabla u_j\cdot\nabla u\,dx\right)=0.$$

Da convergência fraca da (u_j) concluímos que

$$\lim_{j\to\infty}\|u_j\|^2=\lim_{j\to\infty}\left[\left(\|u_j\|^2-\int_\Omega \nabla u_j\cdot\nabla u\,dx\right)+\int_\Omega \nabla u_j\cdot\nabla u\,dx\right]=\|u\|^2,$$

ou seja, $\|u_j\|\to\|u\|$, quando $j\to\infty$. Logo, pela Proposição 1.13, obtemos

$$u_j\to u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

□

Finalmente, vamos demonstrar o Teorema 2.2.

Prova do Teorema 2.2. Primeiramente, vamos escolher $\mu^*>0$ tal que

$$c_\mu<\min\left\{\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{aS}{2}\right)^{\frac{3}{2}},4b\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)T^4\right\},\ \text{ para todo }\ \mu>\mu^*.$$

Do Lema 2.15, existe um ponto crítico não-trivial $u\in H_0^1(\Omega)$ do funcional J_μ para todo $\mu>\mu^*$, com valor crítico c_μ. Como vimos no início dessa seção, basta mostrarmos que $\|u\|<T$. Inicialmente, como $J_\mu(u)=c_\mu$, obtemos

$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4\Phi(u)=\mu\int_\Omega G(x,u)\,dx+\frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\,dx+c_\mu.$$

Utilizando a hipótese $(g_5)'$ e que $\theta<6$, segue que

$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4\Phi(u)\leq\frac{\mu}{\theta}\int_\Omega g(x,u)u\,dx+\frac{1}{\theta}\int_\Omega u_+^6\,dx+c_\mu. \tag{2.52}$$

Por outro lado, como u é um ponto crítico de J_μ e $u_+^6 = u_+^5 u$, obtemos

$$\left[a + b\|u\|^2\Phi(u) + \frac{b}{2T^2}\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \mu\int_\Omega g(x,u)u\,dx + \int_\Omega u_+^6\,dx,$$

ou seja,

$$\frac{a}{\theta}\|u\|^2 + \frac{b}{\theta}\|u\|^4\Phi(u) + \frac{b}{2\theta T^2}\|u\|^6\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right) = \frac{\mu}{\theta}\int_\Omega g(x,u)u\,dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega u_+^6\,dx \quad (2.53)$$

Substituindo (2.53) em (2.52), obtemos

$$\frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4\Phi(u) \le \frac{a}{\theta}\|u\|^2 + \frac{b}{\theta}\|u\|^4\Phi(u) + \frac{b}{2\theta T^2}\|u\|^6\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right) + c_\mu.$$

Utilizando (2.39) e o fato de $\psi' \le 0$ em $[0,\infty)$, segue que

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u\|^2 &\le b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)\|u\|^4\Phi(u) + \frac{b}{2\theta T^2}\|u\|^6\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right) + c_\mu \\ &\le 4b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)T^4 + c_\mu \qquad (2.54) \end{aligned}$$

Suponha agora por contradição que $\|u\| \ge T$. Segue disso e de (2.54) que

$$a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)T^2 \le a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u\|^2 \le 4b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)T^4 + c_\mu. \qquad (2.55)$$

Contudo, da escolha de $T = T(a,b,\theta) > 0$ e $\mu > \mu^*$, e utilizando (2.36) e (2.55), obtemos

$$\begin{aligned} 8b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)T^4 &\le a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)T^2 \\ \Rightarrow \quad 4b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)T^4 &\le a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)T^2 - 4b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)T^4 \\ &\le c_\mu \\ &< 4b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)T^4, \end{aligned}$$

uma contradição. Logo, devemos ter $\|u\| < T$ e portanto u é um ponto crítco do funcional I_μ. $\square$

Corolário 2.16. *Seja $a, b > 0$. Então, se $1 < q \le 3$ e $g(x,t) = |t|^{q-1}t$, existe uma constante $\mu_* \ge 0$ tal que o problema (P_μ) tem uma solução não-negativa para todo $\mu > \mu_*$.*

Capítulo 3

Problemas elípticos do tipo Kirchhoff envolvendo uma não-linearidade crítica no $\mathbb{R}^4$

3.1 Introdução

Neste capítulo, consideraremos a questão da existência de solução não-negativa em $H_0^1(\mathbb{R}^4)$ para

$$(P)_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u = \lambda u^q + \mu u^3 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nesta classe de problemas $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $a, b > 0$, $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros e $1 \leq q < 3$. Todos os resultados a serem citados em seguida, foram considerados e demonstrados por Naimen em [23].

Na segunda seção deste capítulo, consideraremos o caso $q = 1$. Sejam

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u^4\, dx\right)^{1/2}} = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla u|^2\, dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} u^4\, dx\right)^{1/2}}$$

e $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. O principal resultado a ser demonstrado é o seguinte:

Teorema 3.1. *Seja $q = 1$, $a, b > 0$, $0 < \lambda < a\lambda_1$ e $\mu > 0$. Então, a classe de problemas $(P)_{\lambda,\mu}$ possui solução não-negativa não-nula se, e somente se, $\mu > bS^2$.*

Na terceira seção deste capítulo, consideraremos o caso $1 < q < 3$ e também a seguinte classe auxiliar de problemas

$$
(P)_{\lambda,\mu,\nu} \qquad \begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u = \nu\left(\lambda u^q + \mu u^3\right) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde $\nu \in (\delta, 1]$, para algum $1/2 < \delta < 1$. Com a ajuda de um resultado de Jeanjean [12], demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Suponha que $1 < q < 3$. Considere $a, b > 0$ e*

$$
bS^2/\delta < \mu < 2bS^2, \quad \textit{para algum } \delta \in (1/2, 1]. \tag{3.1}
$$

Além disso, suponha que uma das seguintes hipóteses abaixo é válida:

(C_1) *$a > 0$ e $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno;*

(C_2) *$\lambda > 0$ e $a > 0$ é suficientemente grande;*

(C_3) *$a > 0$, $\lambda > 0$ e $b < \mu/S^2$ é suficientemente próximo de μ/S^2.*

Então, $(P)_{\lambda,\mu,\nu}$ possui uma solução não-negativa não-trivial para quase todo $\nu \in (\delta, 1]$. Além disso, podemos encontrar uma sequência crescente $(\nu_j) \subset (\delta, 1]$ tal que $\nu_j \to 1$ quando $j \to \infty$ e $(P)_{\lambda,\mu,\nu_j}$ tem uma solução u_j que possui uma das seguintes propriedades:

(i) *$\|u_j\| \to \infty$, quando $j \to \infty$;*

(ii) *u_j é limitado em $H_0^1(\Omega)$ e consequentemente $(P)_{\lambda,\mu}$ tem uma solução não-negativa não-trivial.*

Observação 3.1. *Comparando o Teorema 3.2 com o Teorema 3.1, vemos que adicionamos a hipótese $\mu < 2bS^2$. Esta condição é usada para obter a compacidade local apropriada de sequências (PS) que consideraremos no decorrer deste capítulo.*

Observação 3.2. *Faremos uma observação sobre as condições* $(C_1) - (C_3)$. *Considere* $1 < q < 3$ *e* μ *satisfazendo* (3.1). *Defina*

$$g(t) = \frac{a\mu}{2(\mu - bS^2)}t^2 - \frac{\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}t^{q+1} + \frac{\mu(2bS^2 - \mu)}{4S^2(\mu - bS^2)}t^4,$$

onde

$$S_{q+1} = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{2}{q+1}}}.$$

Como veremos na demonstração do Lema 3.9, supomos $(C_1), (C_2)$ *e* (C_3) *para que*

(C_0) $$g(t) \geq 0, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Observando isto, podemos entender as hipóteses $(C_1), (C_2)$ *e* (C_3) *como:*

(C_1) *Se escolhermos* $a > 0$ *arbitrário, então tomamos* $\lambda > 0$ *suficientemente pequeno para que* (C_0) *valha;*

(C_2) *Se escolhermos* $\lambda > 0$ *arbitrário, então tomamos* $a > 0$ *suficientemente grande para que* (C_0) *valha;*

(C_3) *Se escolhermos* $a > 0$, $\lambda > 0$ *arbitrariamente, então tomamos* $b < \mu/S^2$ *suficientemente próximo de* μ/S^2 *para que* (C_0) *valha.*

Antes de continuar vamos a seguinte definição:

Definição 3.1. *Dizemos que um subconjunto aberto* $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$ *é estritamente estrelado com relação a um ponto* $x_0 \in \Omega_0$ *se para todo* $x \in \overline{\Omega_0}$ *o segmento*

$$\{\lambda x + (1-\lambda)x_0 \mid \lambda \in [0,1)\}$$

está inteiramente contida em Ω_0.

Observação 3.3. *Em geral supomos que* $0 \in \Omega_0$ *e exigimos que* Ω_0 *seja estritamente estrelado com relação ao* 0. *Neste caso em particular, temos que*

$$x \in \overline{\Omega_0} \quad \text{implica} \quad \lambda x \in \Omega_0, \quad \forall\, \lambda \in [0,1).$$

Ainda na terceira seção demonstraremos um outro teorema, que assegura a não-ocorrência da propriedade (i) no Teorema 3.2 caso Ω seja estritamente estrelado.

Teorema 3.3. *Assuma que $a, b, \lambda, \mu > 0$ satisfazem as mesmas hipóteses do Teorema (3.2) e, além disso, assuma também que $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ estritamente estrelado. Então, $(P)_{\lambda,\mu}$ possui uma solução.*

Definiremos a noção de solução fraca da classe de problemas $(P)_{\lambda,\mu}$. Sem perda de generalidade, dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de $(P)_{\lambda,\mu}$ se u satisfaz

$$\left(a + b\|u\|^2\right) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx - \lambda \int_\Omega u_+^q h \, dx - \mu \int_\Omega u_+^3 h \, dx = 0, \, \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

O funcional associado à classe de problemas $(P)_{\lambda,\mu}$ é definido por

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1} \, dx - \frac{\mu}{4} \int_\Omega u_+^4 \, dx, \;\; u \in H_0^1(\Omega).$$

Podemos verificar que $I_{\lambda,\mu}$ está bem definido e pertence a $C^1(H_0^1(\Omega))$. Além disso, todo ponto crítico de $I_{\lambda,\mu}$ é uma solução fraca não-negativa de $(P)_{\lambda,\mu}$.

Similarmente, podemos definir as soluções fracas de $(P)_{\lambda,\mu,\nu}$ e o seu funcional associado $I_{\lambda,\mu,\nu}$. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de $(P)_{\lambda,\mu,\nu}$ se u satisfaz

$$\left(a + b\|u\|^2\right) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx - \nu \left(\lambda \int_\Omega u_+^q h \, dx + \mu \int_\Omega u_+^3 h \, dx \right) = 0, \, \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

O funcional associado à classe de problemas $(P)_{\lambda,\mu,\nu}$ é definido por

$$I_{\lambda,\mu,\nu}(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \nu \left(\frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1} \, dx + \frac{\mu}{4} \int_\Omega u_+^4 \, dx \right), \; u \in H_0^1(\Omega).$$

Podemos verificar que $I_{\lambda,\mu,\nu}$ está bem definido e pertence a $C^1(H_0^1(\Omega))$. Além disso, todo ponto crítico de $I_{\lambda,\mu,\nu}$ é uma solução fraca não-negativa de $(P)_{\lambda,\mu,\nu}$.

A seguinte proposição será extremamente importante para a demonstração dos teoremas deste capítulo.

Proposição 3.4. *Seja $d \in \mathbb{R}$ e $(u_j) \subset H_0^1(\Omega) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ uma sequência $(PS)_d$ limitada para o funcional $I_{\lambda,\mu}$, isto é,*

- $I_{\lambda,\mu}(u_j) \to d$ *em* $\mathbb{R}$,
- $I'_{\lambda,\mu}(u_j) \to 0$ *em* $H^{-1}(\Omega)$,
- $\|u_j\|$ *é limitada.*

Então, ou (u_j) *tem uma subsequência que converge forte em* $H_0^1(\Omega)$ *ou, em caso contrário, existe uma função não-negativa* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $u_j \rightharpoonup u_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$*, um número* $k \in \mathbb{N}$*, e além disso, para cada* $i \in \{1, 2, \dots, k\}$*, uma sequência de valores* $(R_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$*, pontos* $(x_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}$ *e uma função não-negativa* $v_i \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ *satisfazendo*

$$-\left[a + b\left(\|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right]\Delta u_0 = \lambda u_0^q + \mu u_0^3, \qquad \text{em } \Omega, \tag{3.2}$$

$$-\left[a + b\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right]\Delta v_i = \mu v_i^3, \qquad \text{em } \mathbb{R}^4, \tag{3.3}$$

tal que, passando a uma subsequência se necessário, é válido

- $R_j^i \mathrm{dist}(x_j^i, \partial\Omega) \to \infty$,
- $\left\| u_j - u_0 - \sum_{i=1}^{k} R_j^i v_i(R_j^i(\cdot - x_j^i)) \right\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} = o(1)$,
- $\|u_j\|^2 = \|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} + o(1)$

e

- $I_{\lambda,\mu}(u_j) = \tilde{I}_{\lambda,\mu}(u_0) + \sum_{i=1}^{k} \tilde{I}^{\infty}_{\lambda,\mu}(v_i) + o(1)$,

onde $o(1) \to 0$*, quando* $j \to \infty$*, e definimos*

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\lambda,\mu}(u_0) \;=\; & \left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\left(\|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right]\|u_0\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u_0^{q+1}\,dx \\ & -\frac{\mu}{4}\int_\Omega u_0^4\,dx \end{aligned} \tag{3.4}$$

e

$$\tilde{I}^{\infty}_{\lambda,\mu}(v_i) \;=\; \left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right]\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \frac{\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4\,dx. \tag{3.5}$$

Notamos que (3.2), a equação para o limite fraco u_0 de u_j, depende da informação não-local de todas as "bolhas"

$$b\sum_{i=1}^{k}\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}.$$

Isto garante que se $b > 0$ e (u_j) não possui uma subsequência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$, então o limite fraco u_0 de u_j nunca será um ponto crítico de $I_{\lambda,\mu}$. Isto é diferente do caso $b = 0$. Também enfatizamos que em vista de (3.4), a "energia" do limite fraco u_0 tem o termo misto

$$\frac{b}{4}\left(\sum_{i=1}^{k}\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\|u_0\|^2.$$

Fenômenos semelhantes envolvendo bolhas surgem igualmente no problema limite (3.3) e em suas respectivas energias (3.5). Neles estão as propriedades de sequências (PS) correspondentes a problemas tipo Kirchhoff com crescimento crítico no sentido de Sobolev. Veremos que na prova do Teorema 3.2, a análise cuidadosa de tais fenônemos desempenha um papel importante.

3.2 O caso $q = 1$

Nesta seção, demonstramos o Teorema 3.1. Sejam $a, b, \lambda, \mu > 0$ com $\lambda < a\lambda_1$. Para obtermos existência de uma solução não-trivial, supomos que $\mu > bS^2$ e definimos

$$I_{q=1,\lambda,\mu}(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_+^2\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega u_+^4\,dx$$

Observação 3.4. *Por questão de simplicidade, denotaremos nesta seção os funcionais $I_{q=1,\lambda,\mu}, \tilde{I}_{\lambda,\mu}$ e $\tilde{I}^\infty_{\lambda,\mu}$ por $I, \tilde{I}$ e $\tilde{I}^\infty$, respectivamente.*

Obteremos a existência de um ponto crítico não-trivial de I. Primeiramente, mostraremos o seguinte resultado de compacidade local.

Lema 3.5. *Sejam $a, b, \lambda, \mu > 0$ com $\lambda < a\lambda_1$ e $\mu > bS^2$. Então, I é $(PS)_d$ para*

$$d < \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)}.$$

Demonstração. Considere $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para I com

$$d < \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)}.$$

Inicialmente, afirmamos que (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, como $I(u_j) \to d$, da definição de I e da desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
d+1 &\geq I(u_j) - \frac{1}{4}I'(u_j)u_j + \frac{1}{4}I'(u_j)u_j \\
&= \frac{a}{2}\|u_j\|^2 + \frac{b}{4}\|u_j\|^4 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_j)_+^2\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega (u_j)_+^4\,dx \\
&\quad - \left[\frac{a}{4}\|u_j\|^2 + \frac{b}{4}\|u_j\|^4 - \frac{\lambda}{4}\int_\Omega (u_j)_+^2\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega (u_j)_+^4\,dx\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}I'(u_j)u_j \\
&= \frac{a}{4}\|u_j\|^2 - \frac{\lambda}{4}\int_\Omega (u_j)_+^2\,dx + \frac{1}{4}I'(u_j)u_j \\
&\geq \frac{a}{4}\|u_j\|^2 - \frac{a\lambda}{4a\lambda_1}\|u_j\|^2 + \frac{1}{4}I'(u_j)u_j \\
&\geq \frac{a}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{a\lambda_1}\right)\|u_j\|^2 - \|u_j\|,
\end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Como $\lambda < a\lambda_1$, segue que (u_j) é limitada.

Agora, suponhamos por absurdo que não possamos extrair uma subsequência de (u_j) que converge fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Logo, pela Proposição 3.4, existem uma função não-negativa $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, um número $k \in \mathbb{N}$, e além disso, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, uma sequência de valores $(R_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, pontos $(x_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}$ e uma função não-negativa $v_i \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ satisfazendo (3.2) e (3.3) tal que, passando a uma subsequência, é válido

$$I(u_j) = \tilde{I}(u_0) + \sum_{i=1}^{k} \tilde{I}^\infty(v_i) + o(1), \tag{3.6}$$

onde $o(1) \to 0$, quando $j \to \infty$, e $\tilde{I}(u_0)$ e $\tilde{I}^\infty(v_i)$ estão definidos por (3.4) e (3.5) respectivamente. Afirmamos que

$$\tilde{I}(u_0) \geq 0 \tag{3.7}$$

e

$$\tilde{I}^\infty(v_i) \geq \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)}, \; i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.8}$$

Primeiramente, mostraremos (3.7). De (3.2) (com $q = 1$) e escrevendo

$$A = \|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)},$$

obtemos

$$(a + bA) \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla h \, dx = \lambda \int_\Omega u_0 h \, dx + \mu \int_\Omega u_0^3 h \, dx, \quad \forall \, h \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $h = u_0$, segue que

$$(a + bA) \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega u_0^2 \, dx - \mu \int_\Omega u_0^4 \, dx = 0. \tag{3.9}$$

Assim, de (3.4), (3.9) e da desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{I}(u_0) &= \tilde{I}(u_0) - \frac{1}{4}\left[(a + bA)\|u_0\|^2 - \lambda \int_\Omega u_0^2 \, dx - \mu \int_\Omega u_0^4 \, dx\right] \\
&= \left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4}A\right] \|u_0\|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega u_0^2 \, dx - \frac{\mu}{4} \int_\Omega u_0^4 \, dx \\
&- \left[\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4}A\right) \|u_0\|^2 - \frac{\lambda}{4} \int_\Omega u_0^2 \, dx - \frac{\mu}{4} \int_\Omega u_0^4 \, dx\right] \\
&= \frac{a}{4}\|u_0\|^2 - \frac{\lambda}{4} \int_\Omega u_0^2 \, dx \\
&\geq \frac{a}{4}\|u_0\|^2 - \frac{a\lambda}{4a\lambda_1}\|u_0\|^2 \\
&= \frac{a}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{a\lambda_1}\right) \|u_0\|^2.
\end{aligned}$$

Como $\lambda < a\lambda_1$, segue que (3.7) é válido. Vamos agora demonstrar (3.8). De (3.3), analogamente ao que fizemos acima para (3.2), obtemos

$$(a + bA)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \mu \int_{\mathbb{R}^4} v_i^4 \, dx = 0. \tag{3.10}$$

Assim, de (3.10) e da imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^4) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^4)$, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= (a+bA)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \mu \int_{\mathbb{R}^4} v_i^4\, dx \\
&\geq a\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} + b\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\
&\quad -\mu S^{-2}\|v_i\|^4_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\
&\geq a\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} + b\left(\|u_0\|^2 + \|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\
&\quad -\mu S^{-2}\|v_i\|^4_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\
&\geq a\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} + b\|v_i\|^4_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \mu S^{-2}\|v_i\|^4_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\
&\geq a\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - S^{-2}(\mu - bS^2)\|v_i\|^4_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}.
\end{aligned}$$

Daí, como $\mu > bS^2$, obtemos

$$\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \geq \frac{aS^2}{\mu - bS^2}. \tag{3.11}$$

Logo, de (3.5), (3.10) e (3.11),

$$\begin{aligned}
\tilde{I}^\infty(v_i) &= \tilde{I}^\infty(v_i) - \frac{1}{4}\left[(a+bA)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \mu\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4\, dx\right] \\
&= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}A\right)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \frac{\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4\, dx \\
&\quad - \left[\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4}A\right)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \frac{\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4\, dx\right] \\
&= \frac{a}{4}\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\
&\geq \frac{a}{4}\cdot\frac{aS^2}{\mu - bS^2} = \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)},
\end{aligned}$$

o que é (3.8). Assim, de (3.6), (3.7) e (3.8), concluímos que

$$\begin{aligned}
d &= \lim_{j\to\infty} I(u_j) \\
&= \tilde{I}(u_0) + \sum_{l=1}^{k} \tilde{I}^\infty(v_l) \\
&\geq \tilde{I}(u_0) + \tilde{I}^\infty(v_i) \\
&\geq \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)},
\end{aligned}$$

um absurdo. Portanto, (u_j) possui uma subsequência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$, ou seja, I é $(PS)_d$, desde que

$$d < \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)}.$$

□

Sem perda de generalidade, suponhamos que $0 \in \Omega$ e para cada $\varepsilon > 0$ definamos

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon\tau(x)}{\varepsilon^2 + |x|^2} \in H_0^1(\Omega),$$

onde $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$ é tal que $0 \leq \tau \leq 1$ e $\tau \equiv 1$ em alguma vizinhança de 0. Definindo então

$$v_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^4\, dx\right)^{1/4}}, \tag{3.12}$$

analogamente ao que foi feito no capítulo anterior, concluímos que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2\, dx = S + O(\varepsilon^2), \\ \displaystyle\int_\Omega v_\varepsilon^4\, dx = 1, \\ \displaystyle\int_\Omega v_\varepsilon^2\, dx = \alpha_1\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{3.13}$$

quando $\varepsilon \to 0$, onde $\alpha_1 > 0$ é alguma constante.

O próximo lema garante que o nível do passo da montanha do funcional I está abaixo do nível de energia desejado.

Lema 3.6. *Sejam $a, b, \lambda, \mu > 0$ com $\mu > bS^2$. Então, existe uma constante $\varepsilon_1 > 0$ tal que*

$$\sup_{t\geq 0} I(tv_\varepsilon) < \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)},$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$.

Demonstração. Considere v_ε definido como acima. Como $\mu > bS^2$, obtemos

$$\begin{aligned} I(tv_\varepsilon) &= \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^2\, dx - \frac{\mu t^4}{4}\int_\Omega v_\varepsilon^4\, dx \\ &= \frac{at^2}{2}(S + O(\varepsilon^2)) + \frac{bt^4}{4}(S + O(\varepsilon^2))^2 - \frac{\lambda t^2}{2}(\alpha_1\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2)) - \frac{\mu t^4}{4} \\ &= \frac{(aS - \alpha_1\lambda\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2))}{2}t^2 - \frac{(\mu - bS^2 + O(\varepsilon^2))}{4}t^4. \end{aligned}$$

Facilmente observamos que a função biquadrática $f(t) = At^2 - Bt^4$ atinge seu máximo em $A/2B$, e que o valor máximo atingido é $A^2/4B$. Portanto, fazendo

$$A = \frac{(aS - \alpha_1\lambda\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2))}{2} \text{ e } B = \frac{(\mu - bS^2 + O(\varepsilon^2))}{4}$$

segue que

$$\begin{aligned} I(tv_\varepsilon) &\leq \frac{(aS)^2 - 2\lambda aS\alpha_1\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2)}{4(\mu - bS^2 + O(\varepsilon^2))} \\ &\leq \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)} - \frac{\lambda aS\alpha_1}{2(\mu - bS^2)}\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Portanto, existe uma constante $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} I(tv_\varepsilon) < \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)},$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, o que conclui a demonstração. □

Lema 3.7. *Sejam $a, b, \lambda, \mu > 0$ com $\lambda < a\lambda_1$ e $\mu > bS^2$. Então o funcional I satisfaz a geometria do passo da montanha. Mais precisamente:*

(a) *Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tal que $I(u) \geq \alpha$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$,*

(b) *Existe uma função $e_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|e_0\| > \rho$ e $I(e_0) \leq 0$.*

Demonstração. Inicialmente mostraremos **(a)**. Tome $\rho > 0$. Daí, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$, da desigualdade de Poincaré e da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega u^4\,dx \\ &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{\mu}{4S^2}\|u\|^4 \\ &= \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{a\lambda_1}\right)\|u\|^2 - \frac{1}{4S^2}\left(\mu - bS^2\right)\|u\|^4 \\ &= \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{a\lambda_1}\right)\rho^2 - \frac{1}{4S^2}\left(\mu - bS^2\right)\rho^4. \end{aligned}$$

Como $\lambda < a\lambda_1$, segue a validade de **(a)**. Agora verificaremos a validade de **(b)**. Suponha $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ e $t \geq 0$, onde $\varepsilon_1 > 0$ é dado como no Lema 3.6, diminuindo se necessário. Utilizando (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
I(tv_\varepsilon) &= \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^2\,dx - \frac{\mu t^4}{4}\int_\Omega v_\varepsilon^4\,dx \\
&\leq \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{\mu t^4}{4} \\
&= \frac{a(S + O(\varepsilon^2))}{2}t^2 - \frac{(\mu - bS^2 + O(\varepsilon^2))}{4}t^4 \\
&= \frac{aS}{2}t^2 + \frac{aO(\varepsilon^2))}{2}t^2 - \frac{(\mu - bS^2)}{4}t^4 - \frac{O(\varepsilon^2)}{4}t^4 \\
&\leq aSt^2 - \frac{(\mu - bS^2)}{8}t^4,
\end{aligned}$$

onde para a última desigualdade usamos a hipótese $\mu > bS^2$. Segue da desigualdade acima que $I(tv_\varepsilon) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Assim, escolha $t_0 > 0$ suficientemente grande e tome $e_0 = t_0 v_\varepsilon$. Portanto, temos uma função $e_0 \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz a condição **(b)**. $\square$

Prova do Teorema 3.1. Como o Lema 3.7 garante que a geometria do passo da montanha é satisfeita, definimos

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega)\right) | \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_0\right\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma([0,1])} I(u) > 0.$$

O Lema 3.6 implica que

$$c < \frac{(aS)^2}{4(\mu - bS^2)}.$$

Logo, do Lema 3.5, temos que o funcional I satisfaz as condições $(PS)_c$. Assim, o Teorema do passo da montanha 1.11 assegura a existência de uma solução não-trivial. Agora, reciprocamente, suponha que $\mu \leq bS^2$ e que $0 \leq u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução de $(P)_{\lambda,\mu}$. Assim, da desigualdade de Poincaré e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= a\|u\|^2 + b\|u\|^4 - \lambda\int_\Omega u^2\,dx - \mu\int_\Omega u^4\,dx \\
&\geq a\|u\|^2 + b\|u\|^4 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{\mu}{S^2}\|u\|^4 \\
&= a\left(1 - \frac{\lambda}{a\lambda_1}\right)\|u\|^2 + \frac{1}{S^2}\left(bS^2 - \mu\right)\|u\|^4
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $0 < \lambda < a\lambda_1$ e $\mu \leq bS^2$, segue que

$$a\left(1 - \frac{\lambda}{a\lambda_1}\right)\|u\|^2 + \frac{1}{S^2}\left(bS^2 - \mu\right)\|u\|^4 = 0,$$

Daí, $u = 0$. Logo, devemos ter $\mu > bS^2$ e a demonstração está completa. $\square$

3.3 O caso $1 < q < 3$

Nesta seção, consideramos o caso $1 < q < 3$ e demonstramos o Teorema 3.2. Para isto, supomos $a, b, \lambda, \mu > 0$ e que, além disso,

$$bS^2/\delta < \mu < 2bS^2, \text{ para algum } \delta \in (1/2, 1).$$

Para $\nu \in (\delta, 1]$, consideramos a classe de problemas $(P)_{\lambda,\mu,\nu}$. Como vimos, o funcional associado à $(P)_{\lambda,\mu,\nu}$ é definido por

$$I_{\lambda,\mu,\nu}(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\nu\lambda}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \frac{\nu\mu}{4}\int_\Omega u_+^4\,dx,\ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observação 3.5. *Por questão de simplicidade, denotaremos nesta seção o funcional $I_{\lambda,\mu,\nu}$ apenas por I_ν.*

Nosso objetivo é obter a existência de um ponto crítico não-trivial de I_ν. Neste caso, temos como dificuldade a limitação de sequências (PS) para o funcional I_ν, pois uma condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz (veja as hipóteses (g_3) e (g_5) no capítulo anterior) não é satisfeita. Para contornar essa dificuldade, utilizamos o seguinte resultado devido a Jeanjean.

Teorema 3.8 ([12]). *Sejam X um espaço de Banach equipado com a norma $\|\cdot\|$ e $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo. Consideramos uma família $(I_\nu)_{\nu\in J}$ de funcionais $C^1(X)$ na forma*

$$I_\nu = A(u) - \nu B(u) \quad (\nu \in J),$$

onde $B(u) \geq 0$, para todo $u \in X$, e tal que $A(u) \to \infty$ ou $B(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$. Suponha que existam dois pontos e_1, e_2 em X tais que, definindo

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X)\,|\gamma(0) = e_1, \gamma(1) = e_2\}$$

temos, para todo $\nu \in J$,

$$c_\nu = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\nu(\gamma(t)) > \max\{I_\nu(e_1), I_\nu(e_2)\}.$$

Então, para quase todo $\nu \in J$, existe uma sequência $(u_j) \subset X$ tal que

1. (u_j) *é limitada;*

2. $I_\nu(u_j) \to c_\nu$*;*

3. $I'_\nu(u_j) \to 0$ *em* X'*.*

Com a ajuda do Teorema 3.8, podemos obter sequências (PS) limitadas para I_ν para quase todo $\nu \in (\delta, 1]$. O próximo lema mostra a compacidade local para o funcional I_ν.

Lema 3.9. *Sejam* $b > 0$, $\mu > 0$ *e* $\delta \in (1/2, 1)$ *satisfazendo*

$$bS^2/\delta < \mu < 2bS^2.$$

Além disso, suponhamos que uma das hipóteses abaixo é válida:

(C_1) $a > 0$ *e* $\lambda > 0$ *é suficientemente pequeno;*

(C_2) $\lambda > 0$ *e* $a > 0$ *é suficientemente grande;*

(C_3) $a > 0$, $\lambda > 0$ *e* $b < \mu/S^2$ *é suficientemente próximo de* μ/S^2*.*

Então, se (u_j) *é uma sequência* $(PS)_d$ *limitada para* I_ν*, onde* $\nu \in (\delta, 1]$ *, e*

$$d < \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)},$$

a menos de subsequência, temos que (u_j) *converge fortemente em* $H_0^1(\Omega)$ *.*

Observação 3.6. *Aqui usamos a hipótese* $\mu < 2bS^2$*, que é um ponto diferente do caso* $q = 1$*.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que não possamos extrair uma subsequência de (u_j) que converge fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, analogamente ao Lema 3.5, existe uma função não-negativa $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup u_0$, um número $k \in \mathbb{N}$, e além disso, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, uma sequência de valores $(R_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, pontos $(x_j^i)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}$ e uma função não-negativa $v_i \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ satisfazendo

$$-\left[a + b\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right]\Delta v_i = \nu\mu v_i^3, \quad \text{em } \mathbb{R}^4, \tag{3.14}$$

tal que, passando a uma subsequência se necessário, é válido

$$I_\nu(u_j) = \tilde{I}_\nu(u_0) + \sum_{i=1}^{k} \tilde{I}_\nu^\infty(v_i) + o(1) \tag{3.15}$$

onde $o(1) \to 0$, quando $j \to \infty$, e definimos

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\nu(u_0) &= \left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\left(\|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right]\|u_0\|^2 - \frac{\nu\lambda}{q+1}\int_\Omega u_0^{q+1}\,dx \\ &\quad -\frac{\nu\mu}{4}\int_\Omega u_0^4\,dx, \end{aligned}$$

$$\tilde{I}_\nu^\infty(v_i) = \left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right]\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \frac{\nu\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4\,dx. \tag{3.16}$$

Observe inicialmente que, como $1 < q < 3$, não é óbvio que a desigualdade

$$\tilde{I}_\nu(u_0) \geq 0$$

é válida ou não, diferente do caso $q = 1$. Para contornar essa dificuldade, estimaremos a energia da sequência (PS) de forma mais precisa, incluindo os "termos cruzados" indicados no início deste capítulo. Afirmamos que

$$\tilde{I}_\nu^\infty(v_i) \geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)} + \frac{abS^2}{4(\nu\mu - bS^2)}\|u_0\|^2, \tag{3.17}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. De fato, analogamente à demonstração de (3.8), usando (3.14) obtemos

$$\left\{a + b\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right\}\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \nu\mu\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4\,dx = 0. \tag{3.18}$$

Assim, de (3.18) e da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^4) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^4)$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{a + b\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\right\}\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \nu\mu\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4\,dx \\ &\geq a\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} + b\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\ &\quad -\nu\mu S^{-2}\|v_i\|^4_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\ &\geq a\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} + b\|u_0\|^2\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} + b\|v_i\|^4_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \nu\mu S^{-2}\|v_i\|^4_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\ &= \left[(a + b\|u_0\|^2) - S^{-2}(\nu\mu - bS^2)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right]\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}, \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Como

$$\delta < \nu \leq 1 \Rightarrow bS^2 < \mu\delta \leq \mu\nu \Rightarrow \nu\mu - bS^2 > 0,$$

deduzimos que

$$\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \geq \frac{(a + b\|u_0\|^2)S^2}{\nu\mu - bS^2}. \tag{3.19}$$

Logo, de (3.16), (3.18), (3.19), e escrevendo

$$A = \|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k} \|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{I}^\infty_\nu(v_i) &= \tilde{I}^\infty_\nu(v_i) - \frac{1}{4}\left[(a + bA)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \nu\mu \int_{\mathbb{R}^4} v_i^4 \, dx\right] \\
&= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}A\right)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \frac{\nu\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4 \, dx \\
&\quad - \left[\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4}A\right)\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} - \frac{\nu\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4} v_i^4 \, dx\right] \\
&\geq \frac{a}{4} \cdot \frac{(a + b\|u_0\|^2)S^2}{\nu\mu - bS^2} \\
&= \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)} + \frac{abS^2}{4(\nu\mu - bS^2)}\|u_0\|^2,
\end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, o que mostra (3.17). Utilizaremos (3.19), observe que

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_\nu(u_0) &= \frac{a}{2}\|u_0\|^2 + \frac{b}{4}\left(\|u_0\|^2 + \sum_{l=1}^{k}\|v_l\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)}\right)\|u_0\|^2 \\
&\quad - \frac{\nu\lambda}{q+1}\int_\Omega u_0^{q+1} \, dx - \frac{\nu\mu}{4}\int_\Omega u_0^4 \, dx \\
&\geq \frac{a}{2}\|u_0\|^2 + \frac{b}{4}\|u_0\|^4 + \frac{b}{4}\|u_0\|^2\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \\
&\quad - \frac{\nu\lambda}{q+1}\int_\Omega u_0^{q+1} \, dx - \frac{\nu\mu}{4}\int_\Omega u_0^4 \, dx \\
&\geq \frac{a}{2}\|u_0\|^2 + \frac{b}{4}\|u_0\|^4 + \frac{b}{4}\left[\frac{aS^2}{\nu\mu - bS^2}\|u_0\|^2 + \frac{bS^2}{\nu\mu - bS^2}\|u_0\|^4\right] \\
&\quad - \frac{\nu\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1} - \frac{\nu\mu}{4S^2}\|u_0\|^4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a\left(\frac{1}{2}+\frac{bS^2}{4(\nu\mu-bS^2)}\right)\|u_0\|^2+\left(\frac{b}{4}+\frac{b^2S^2}{4(\nu\mu-bS^2)}-\frac{\nu\mu}{4S^2}\right)\|u_0\|^4\\
&\quad -\frac{\nu\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1}\\
&= a\left(\frac{1}{2}+\frac{bS^2}{4(\nu\mu-bS^2)}\right)\|u_0\|^2+\frac{\nu\mu(2bS^2-\nu\mu)}{4S^2(\nu\mu-bS^2)}\|u_0\|^4\\
&\quad -\frac{\nu\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.15), (3.17) e (3.20), segue que

$$
\begin{aligned}
d &= \lim_{j\to\infty} I_\nu(u_j)\\
&= \tilde{I}_\nu(u_0)+\sum_{l=1}^{k}\tilde{I}_\nu^\infty(v_l)\\
&\geq \tilde{I}_\nu(u_0)+\tilde{I}_\nu^\infty(v_i)\\
&\geq a\left(\frac{1}{2}+\frac{bS^2}{4(\nu\mu-bS^2)}\right)\|u_0\|^2+\frac{\nu\mu(2bS^2-\nu\mu)}{4S^2(\nu\mu-bS^2)}\|u_0\|^4\\
&\quad -\frac{\nu\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1}+\frac{(aS)^2}{4(\nu\mu-bS^2)}+\frac{abS^2}{4(\nu\mu-bS^2)}\|u_0\|^2\\
&= \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu-bS^2)}+\left(\frac{a}{2}+\frac{2abS^2}{4(\nu\mu-bS^2)}\right)\|u_0\|^2+\frac{\nu\mu(2bS^2-\nu\mu)}{4S^2(\nu\mu-bS^2)}\|u_0\|^4\\
&\quad -\frac{\nu\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1}\\
&= \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu-bS^2)}+\frac{a\nu\mu}{2(\nu\mu-bS^2)}\|u_0\|^2+\frac{\nu\mu(2bS^2-\nu\mu)}{4S^2(\nu\mu-bS^2)}\|u_0\|^4\\
&\quad -\frac{\nu\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1}\\
&= \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu-bS^2)}+\frac{a\mu}{2(\mu-bS^2/\nu)}\|u_0\|^2+\frac{\mu(2bS^2-\nu\mu)}{4S^2(\mu-bS^2/\nu)}\|u_0\|^4\\
&\quad -\frac{\nu\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1}.
\end{aligned}
$$

Como $\nu\leq 1$ e, por conseguinte,

$$
\frac{1}{\mu-bS^2/\nu}\geq\frac{1}{\mu-bS^2}\quad\text{e}\quad 2bS^2-\nu\mu\geq 2bS^2-\mu,
$$

segue que

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)} + \frac{a\mu}{2(\mu - bS^2)}\|u_0\|^2 + \frac{\mu(2bS^2 - \mu)}{4S^2(\mu - bS^2)}\|u_0\|^4 \\ &\quad - \frac{\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1}. \end{aligned}$$

Observe que o coeficiente de $\|u_0\|^4$ no lado direito da última desigualdade é positivo, pois temos $bS^2 < \mu < 2bS^2$. Desta forma, considerando uma das hipóteses $(C_1), (C_2)$ ou (C_3), temos as seguintes situações:

Se (C_1) **vale:** Sendo $a > 0$ e tomando

$$\lambda \leq \frac{aK_1\|u_0\|^2 + K_2\|u_0\|^4}{K_3\|u_0\|^{q+1}},$$

onde

$$K_1 = \frac{\mu}{2(\mu - bS^2)},\ K_2 = \frac{\mu(2bS^2 - \mu)}{4S^2(\mu - bS^2)} \text{ e } K_3 = \frac{1}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}},$$

segue que

$$\frac{a\mu}{2(\mu - bS^2)}\|u_0\|^2 + \frac{\mu(2bS^2 - \mu)}{4S^2(\mu - bS^2)}\|u_0\|^4 - \frac{\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u_0\|^{q+1} \geq 0$$

e, portanto,

$$d \geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)}.$$

Se (C_2) **vale:** Sabemos que

$$\begin{aligned} c &\geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)} + aK_1\|u_0\|^2 + K_2\|u_0\|^4 - \lambda K_3\|u_0\|^{q+1} \\ &\geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)} + aK_1\|u_0\|^2 - \lambda K_3\|u_0\|^{q+1} \end{aligned}$$

Sendo $\lambda > 0$ e tomando

$$a \geq \frac{\lambda K_3\|u_0\|^{q-1}}{K_1}$$

segue que

$$aK_1\|u_0\|^2 - \lambda K_3\|u_0\|^{q+1} \geq 0$$

e, portanto,

$$d \geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)}.$$

Se (C_3) **vale:** Sabemos que

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)} + \frac{a\mu}{2(\mu - bS^2)}\|u_0\|^2 + K_2\|u_0\|^4 - \lambda K_3\|u_0\|^{q+1} \\ &\geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)} + \frac{a\mu}{2(\mu - bS^2)}\|u_0\|^2 - \lambda K_3\|u_0\|^{q+1}. \end{aligned}$$

Sendo $a, \lambda > 0$ e tomando

$$\mu - bS^2 \leq \frac{a\mu}{2\lambda K_3\|u_0\|^{q-1}},$$

segue que

$$\frac{a\mu}{2(\mu - bS^2)}\|u_0\|^2 - \lambda K_3\|u_0\|^{q+1} \geq 0$$

e, portanto,

$$d \geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)}.$$

Em todo caso, concluímos que

$$d \geq \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)},$$

uma contradição. Logo, (u_j) possui uma subsequência que converge fortemente em $H_0^1(\Omega)$.

□

Demonstraremos agora que o nível do passo da montanha de I_ν está abaixo do nível desejado.

Lema 3.10. *Sejam $a, b, \lambda > 0$, $\mu > 0$ e $\delta \in (1/2, 1)$ satisfazendo*

$$bS^2/\delta < \mu < 2bS^2.$$

Neste caso, sendo $\nu \in (\delta, 1]$, existe uma constante $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} I_\nu(tv_\varepsilon) < \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)}, \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_2),$$

onde v_ε é definido como na seção anterior.

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que

$$\int_\Omega v_\varepsilon^{q+1}\,dx = \alpha_2\varepsilon^{3-q} + O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,$$

onde α_2 é alguma constante (veja Apêndice B). Daí, utilizando (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
I_\nu(tv_\varepsilon) &= \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{\nu\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega v_\varepsilon^{q+1}\,dx - \frac{\nu\mu t^4}{4}\int_\Omega v_\varepsilon^4\,dx\\
&= \frac{a(S+O(\varepsilon^2))}{2}t^2 + \frac{b(S^2+O(\varepsilon^2))}{4}t^4 - C(\alpha_2\varepsilon^{3-q}+O(\varepsilon^2))t^{q+1}\\
&\quad -\frac{\nu\mu}{4}t^4\\
&= \frac{a(S+O(\varepsilon^2))}{2}t^2 - \frac{(\nu\mu - bS^2+O(\varepsilon^2))}{4}t^4 - C(\alpha_2\varepsilon^{3-q}+O(\varepsilon^2))t^{q+1}.
\end{aligned}$$

Considere a função real

$$f(t) = At^2 - Bt^4 - Ct^{q+1},$$

onde $A, B, C > 0$ e $2 < q+1 < 4$. Observe que

$$f(t) \to 0,\ \text{quando } t \to 0^+,\ \text{e } f(t) \to -\infty,\ \text{quando } t \to \infty.$$

Portanto, disso e dos cálculos acima feitos para $I_\nu(tv_\varepsilon)$, existe uma constante $\varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequena e constantes $0 < \tau_0 < T_0$ tais que se $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, então

$$I_\nu(tv_\varepsilon) < \frac{(aS)^2}{8(\nu\mu - bS^2)},$$

para todo $0 \le t \le \tau_0$ e todo $t \ge T_0$. Desse modo, consideraremos apenas $t \in (\tau_0, T_0)$. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}
I_\nu(tv_\varepsilon) &\le \frac{aS}{2}t^2 - \frac{(\nu\mu - bS^2)}{4}t^4 - C\alpha_2\varepsilon^{3-q} + O(\varepsilon^2)\\
&\le \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)} - C\alpha_2\varepsilon^{3-q} + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$. Então, como $1 < q < 3$, tomando $\varepsilon_2 > 0$ menor se necessário, concluímos que

$$\sup_{t\ge 0} I_\nu(tv_\varepsilon) < \frac{(aS)^2}{4(\nu\mu - bS^2)},$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Vamos então finalmente demonstrar o Teorema 3.2.

Prova do Teorema 3.2. Sejam $b, \mu > 0$ satisfazendo

$$\frac{bS^2}{\delta} < \mu < 2bS^2,$$

para algum $\delta \in (1/2, 1)$. Suponha que $\nu \in (\delta, 1]$ e que uma das hipóteses $(C_1), (C_2)$ e (C_3) do Lema 3.9 seja válida. Para usar o Teorema 3.8, devemos mostrar a geometria do passo da montanha do funcional I_ν, a qual deve ser independente de $\nu \in (\delta, 1]$. Para fazer isto, primeiramente suponha $\rho > 0$ e tome $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$. Como $\nu \leq 1$, as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ acarretam

$$\begin{aligned}
I_\nu(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\nu\lambda}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \frac{\nu\mu}{4}\int_\Omega u_+^4\,dx \\
&\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega u_+^4\,dx \\
&\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega |u|^4\,dx \\
&\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u\|^{q+1} - \frac{\mu}{4S^2}\|u\|^4 \\
&= \frac{a}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\|u\|^{q+1} - \frac{(\mu - bS^2)}{4S^2}\|u\|^4 \\
&= \frac{a}{2}\rho^2 - \frac{\lambda}{(q+1)S_{q+1}^{(q+1)/2}}\rho^{q+1} - \frac{(\mu - bS^2)}{4S^2}\rho^4.
\end{aligned}$$

Como $1 < q < 3$ e o lado direito da última desigualdade é independente de $\nu \in (\delta, 1]$, concluímos que existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$I_\nu(u) \geq \alpha \tag{3.21}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$, e todo $\nu \in (\delta, 1]$. Agora, lembrando que $\delta < \nu \leq 1$ e utilizando (3.13), para todo $t \geq 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
I_\nu(tv_\varepsilon) &= \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{\nu\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega v_\varepsilon^{q+1}\,dx - \frac{\nu\mu t^4}{4}\int_\Omega v_\varepsilon^4\,dx \\
&\leq \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{\mu\nu t^4}{4} \\
&< \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{\delta\mu t^4}{4} \\
&= \frac{a(S + O(\varepsilon^2))}{2}t^2 - \frac{(\delta\mu - bS^2 + O(\varepsilon^2))}{4}t^4.
\end{aligned}$$

Tome $\varepsilon_2 > 0$ que é determinado no Lema 3.10. Então, como $\delta\mu > bS^2$, tomando $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ suficientemente pequeno se necessário, temos que

$$\begin{aligned} I_\nu(tv_\varepsilon) &< \frac{a(S + O(\varepsilon^2))}{2}t^2 - \frac{(\delta\mu - bS^2 + O(\varepsilon^2))}{4}t^4 \\ &= \frac{aS}{2}t^2 + \frac{aO(\varepsilon^2))}{2}t^2 - \frac{(\delta\mu - bS^2)}{4}t^4 - \frac{O(\varepsilon^2)}{4}t^4 \\ &\leq aSt^2 - \frac{(\delta\mu - bS^2)}{8}t^4. \end{aligned}$$

Então, fixamos tal $\varepsilon > 0$ e obtemos

$$I_\nu(tv_\varepsilon) \to -\infty,\ t \to \infty, \text{ uniformemente para } \nu \in (\delta, 1].$$

Portanto, existe uma constante $t_0 > 0$ tal que se $e_0 = t_0 v_\varepsilon$, então

$$\|e_0\| > \rho \text{ e } I_\nu(e_0) \leq 0, \text{ para todo } \nu \in (\delta, 1].$$

Satisfeita a geometria do passo da montanha, definimos

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega)\right) | \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_0\right\}$$

e

$$c_\nu = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma([0,1])} I_\nu(u).$$

Observe que de (3.21), temos que $c_\nu > 0$ para todo $\nu \in (\delta, 1]$. Consequentemente, utilizando o Teorema 3.8, obtemos uma sequência $(PS)_{c_\nu}$ limitada do funcional I_ν, para quase todo $\nu \in (\delta, 1]$. Além disso, dos lemas 3.9 e 3.10, e da definição de c_ν, a menos de subsequência, uma tal sequência converge fortemente para alguma função não-trivial em $H_0^1(\Omega)$. Logo, o funcional I_ν tem um ponto crítico não-trivial, para quase todo $\nu \in (\delta, 1]$. Tomemos uma sequência crescente $(\nu_j) \subset (\delta, 1]$ tal que $\nu_j \to 1$, quando $j \to \infty$, e I_{ν_j} tendo um ponto crítico não-trivial u_j com seu valor crítico c_{ν_j}. Observe que da continuidade, $c_{\nu_j} \to c_1$, quando $j \to \infty$ (vide [12]). Então,

$$\begin{aligned} I_1(u_j) &= I_{\nu_j}(u_j) + (\nu_j - 1)\left(\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (u_j)_+^{q+1}\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega (u_j)_+^4\,dx\right) \\ &= c_1 + o(1), \end{aligned}$$

onde $o(1) \to 0$, quando $j \to \infty$. Analogamente,

$$I_1'(u_j) = I_{\nu_j}'(u_j) + o(1) = o(1),$$

onde $o(1) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$, quando $j \to \infty$. Assim, supondo $\|u_j\|$ limitada, então (u_j) é uma sequência $(PS)_{c_1}$ limitada para o funcional I_1. Dos lemas 3.9, 3.10 e da definição de c_1 segue a demonstração. □

Enunciaremos agora uma importante proposição que foi enunciada primeiramente por Pohozaev [28] e uma demonstração pode ser encontrada em [6].

Proposição 3.11 (Identidade de Pohozaev)**.** *Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere*

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

Suponha que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então

$$\frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - N \int_\Omega F(u)\, dx = - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} \right)^2 \varrho(x) \cdot x\, d\sigma,$$

onde $\varrho(x)$ denota o normal exterior de $\partial\Omega$ em x.

Mostraremos agora que sob a hipótese de que Ω seja estritamente estrelado, podemos assegurar a limitação da sequência de soluções (u_j) na demonstração do Teorema 3.2.

Prova do Teorema 3.3. Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ é estritamente estrelado e tome uma sequência de valores $(\nu_j) \subset (\delta, 1]$ e soluções correspondentes $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ como na demonstração do Teorema 3.1. Nosso objetivo é mostrar que (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Argumentaremos por contradição. Suponha que

$$\|u_j\| \to \infty,\ j \to \infty.$$

Defina

$$w_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}.$$

Então, $w_j \geq 0$, $\|w_j\| = 1$ e, consequentemente, a menos de subsequência, existe uma função não-negativa $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $w_j \rightharpoonup w_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Note que w_j satisfaz

$$\left(\frac{a}{\|u_j\|^2} + b \right) \int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla h\, dx = \frac{\nu_j \lambda}{\|u_j\|^{3-q}} \int_\Omega w_j^q h\, dx + \nu_j \mu \int_\Omega w_j^3 h\, dx, \tag{3.22}$$

para todo $h \in H_0^1(\Omega)$. Passando ao limite com $j \to \infty$, segue que

$$b \int_\Omega \nabla w_0 \cdot \nabla h\, dx = \mu \int_\Omega w_0^3 h\, dx$$

para todo $h \in H_0^1(\Omega)$. Como Ω é estritamente estrelado, pela Proposição 3.11, obtemos que $w_0 = 0$. Além disso, utilizando o argumento para a descrição de sequências (PS) em Struwe [30], concluímos que existe um número $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe uma sequência de valores $(R_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, pontos $(x_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}$ com

$$R_j^i \operatorname{dist}(x_j^i, \partial\Omega) \to \infty,\ j \to \infty,$$

e uma função não-negativa $v_i \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ satisfazendo

$$-b\Delta v_i = \mu v_i^3 \quad \text{em } \mathbb{R}^4,$$

tal que, a menos de uma subsequência,

$$1 = \|w_j\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} + o(1), \tag{3.23}$$

onde $o(1) \to 0$, quando $j \to \infty$. Observe que

$$\tilde{v}_i = \left(\frac{\mu}{b}\right)^{1/2} v_i \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$$

é uma solução não-negativa de

$$-\Delta\tilde{v} = \tilde{v}^3 \quad \text{em } \mathbb{R}^4, \qquad \tilde{v}(x) \to 0 \quad \text{quando } |x| \to \infty. \tag{3.24}$$

Então, o resultado de unicidade (ver o primeiro parágrafo da Seção 1.2 em [?]) garante que existe uma constante $\varepsilon_i > 0$ e um ponto $x_i \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$\tilde{v}_i(x) = \frac{8^{1/2}\varepsilon_i}{\varepsilon_i^2 + |x - x_i|^2}.$$

Portanto, obtemos

$$\|v_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} = \frac{b}{\mu}\|\tilde{v}_i\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} = \frac{bS^2}{\mu}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Então, de (3.23) segue que

$$\mu = kbS^2,$$

para $k \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição pois

$$bS^2 < \mu < 2bS^2.$$

Portanto, devemos ter (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e, utilizando o Teorema 3.1, concluímos a demonstração. $\square$

Apêndice A

Funcional energia e soluções fracas de (P_μ) e $(P_{\lambda,\mu})$

Neste apêndice estabeleceremos a diferenciabilidade dos funcionais com os quais trabalhamos anteriormente. Somente assim comprovamos que o método variacional pôde efetivamente ser utilizado.

No que se segue, considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 2$, um domínio limitado com fronteira suave. Seja $h \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfazendo

$$|h(x,t)| \leq a + b|t|^s, \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}, \text{ com } 1 \leq s \leq 2^* - 1. \tag{A.1}$$

Mostraremos que o funcional J_h dado por

$$J_h(u) = \int_\Omega H(x,u)\, dx,$$

onde

$$H(x,t) = \int_0^t h(x,s)\, ds, , \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R},$$

é continuamente Fréchet-diferenciável em $H_0^1(\Omega)$ com

$$J_h'(u)v = \int_\Omega h(x,u)v\, dx,\ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstraremos inicialmente que J_h é Gâteaux-diferenciável, e então mostraremos que a diferencial de Gâteaux $(J_h')_G$ é contínua. A Proposição 1.8 assegura o desejado.

- **O funcional J_h é Gâteaux-diferenciável.**

Observe que

$$J_h(u+tv) - J_h(u) \;=\; \int_\Omega H(x,u(x)+tv(x)) - H(x,u(x))\,dx.$$

Logo,

$$\frac{J_h(u+tv) - J_h(u)}{t} = \int_\Omega \frac{H(x,u(x)+tv(x)) - H(x,u(x))}{t}\,dx.$$

Devemos então demontrar que para $x \in \Omega$, temos

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{H(x,u(x)+tv(x)) - H(x,u(x))}{t}\,dx = \int_\Omega h(x,u(x))v(x)\,dx,\ \forall u,v \in H_0^1(\Omega). \tag{A.2}$$

Ora, para cada $x \in \Omega$, pelo Teorema do valor médio de Lagrange, obtemos

$$H(x,u(x)+tv(x)) - H(x,u(x)) \;=\; h(x,\theta_x(t))(tv(x)),$$

onde

$$\theta_x(t) \in (u(x), u(x)+tv(x)) \;\text{ ou }\; \theta_x(t) \in (u(x)+tv(x), u(x)).$$

Assim,

$$\frac{H(x,u(x)+tv(x)) - H(x,u(x))}{t} = h(x,\theta_x(t))v(x),$$

implicando que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{H(x,u(x)+tv(x)) - H(x,u(x))}{t} &= \lim_{t\to 0} h(x,\theta_x(t))v(x) \\ &= h(x,u(x))v(x). \end{aligned}$$

Portanto, teremos o desejado se "passarmos" o limite em (A.2) "para dentro" da integral. Ora, de (A.1) obtemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{H(x,u(x)+tv(x)) - H(x,u(x))}{t}\right| &= |h(x,\theta_x(t))v(x)| \\ &\leq (a + b|\theta_x(t)|^s)|v(x)| \\ &= a|v(x)| + b|\theta_x(t)|^s|v(x)| \\ &= a|v(x)| + b|u(x)+t_0v(x)|^s|v(x)|, \end{aligned}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned}\left|\frac{H(x,u(x)+tv(x))-H(x,u(x))}{t}\right| &\leq a|v(x)|+2^s b|u(x)|^s|v(x)|+2^s b|t_0|^s|v(x)|^{s+1}\\ &\leq C(|v(x)|+|u(x)|^s|v(x)|+|v(x)|^{s+1}).\end{aligned}$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, temos que $|v| \in L^1(\Omega)$. Como $|u|^s \in L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$ e $|v| \in L^{s+1}(\Omega)$, temos por Hölder que $|u|^s|v| \in L^1(\Omega)$. Analogamente, concluímos que $|v|^{s+1} \in L^1(\Omega)$. Assim, existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{H(x,u(x)+tv(x))-H(x,u(x))}{t}\right| \leq g(x),\ \forall x \in \Omega.$$

Portanto, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{H(x,u(x)+tv(x))-H(x,u(x))}{t}\,dx = \int_\Omega h(x,u(x))v(x)\,dx.$$

Desse modo, $(J_h')_G\colon H_0^1(\Omega) \to [H_0^1(\Omega)]'$ definida por

$$(J_h')_G(u) = \int_\Omega h(x,u(x))v(x)\,dx$$

é a diferencial de Gâteaux do funcional J.

- **A diferencial de Gâteaux $(J_h')_G$ é contínua.**

Devemos mostrar que se (u_k) é uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ são tais que

$$u_k \to u \text{ em } H_0^1(\Omega),\ k \to \infty,$$

então

$$(J_h')_G(u_k) \to (J_h')_G(u) \text{ em } [H_0^1(\Omega)]',\ k \to \infty.$$

De fato, a menos de subsequência, temos que

- $u_k \to u$ em $L^{s+1}(\Omega)$, quando $k \to \infty$;
- $u_k(x) \to u(x)$ q.s. em Ω, quando $k \to \infty$;
- Existe $w \in L^{s+1}(\Omega)$ tal que

$$|u_k(x)| \leq w(x) \text{ q.s. em } \Omega,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Observe que

$$|[(J_h')_G(u_k) - (J_h')_G(u)]v| \;\; \leq \;\; \int_\Omega |h(x,u_k) - h(x,u)||v|\, dx$$

Como

$$v \in L^{s+1}(\Omega) \;\text{ e }\; h(\cdot,u_k) - h(\cdot,u) \in L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega),$$

concluímos utilizando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua de Sobolev que

$$\begin{aligned} |[J_G'(u_k) - J_G'(u)]v| \;\; &\leq \;\; |h(\cdot,u_k) - h(\cdot,u)|_{\frac{s+1}{s}}|v|_{s+1} \\ &\leq \;\; C_s|h(\cdot,u_k) - h(\cdot,u)|_{\frac{s+1}{s}}\|v\| \end{aligned}$$

Em particular, para $\|v\| = 1$, obtemos

$$|[J_h')_G(u_k) - J_h')_G(u)]v| \leq C_s|h(\cdot,u_k) - h(\cdot,u)|_{\frac{s+1}{s}},$$

mostrando que

$$\|(J_h')_G(u_k) - J_h')_G(u)\|_{[H_0^1(\Omega)]'} \leq C_s|h(\cdot,u_k) - h(\cdot,u)|_{\frac{s+1}{s}}$$

Ora, da continuidade de $h(x,\cdot)$ segue que

$$h(x,u_k(x)) \to h(x,u(x)) \text{ q.s. em } \Omega,\; k \to \infty.$$

Além disso,

$$|h(x,u_k)| \leq a + b|u_k|^s \leq a + bw^s \in L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega),\, \forall k.$$

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$|h(\cdot,u_k) - h(\cdot,u)|_{\frac{s+1}{s}} \to 0,\; k \to \infty,$$

donde segue a continuidade de $(J_h')_G$. Pela Proposição 1.8, J_h é continuamente Fréchet-diferenciável, com

$$J_h'(u)v = \int_\Omega h(x,u)v\, dx,\; \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega).$$

$\square$

Afirmação 1: O funcional energia I considerado no Capítulo 2 pertence a $C^1(H_0^1(\Omega))$ e satisfaz

$$I'(u)v = (a+b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \mu \int_\Omega g(x,u)v\, dx - \int_\Omega u_+^5 v\, dx,\ u,v \in H_0^1(\Omega).$$

De fato,

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \mu \int_\Omega G(x,u)\, dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\, dx,\ u \in H_0^1(\Omega),$$

onde

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,k)\, dk.$$

Ou seja,

$$I(u) = \psi_1(u) - \mu\psi_2(u) - \psi_3(u),\ u \in H_0^1(\Omega),$$

onde

$$\psi_1(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4,\ \psi_2(u) = \int_\Omega G(x,u)\, dx \quad \text{e} \quad \psi_3(u) = \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\, dx.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, devido ao Exemplo 1.1 no Capítulo 1 e a Proposição 1.7, o funcional $\psi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$\psi_1'(u)v = (a + b\|u\|)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx,\ \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, definindo

$$g_1(x,t) = t_+^5,\ \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R},$$

como $N = 3$,

$$|g(x,t)| \le |t| + c|t|^5 \le 1 + c|t|^5 \quad \text{e} \quad |g_1(x,t)| \le |t|^5,\ \forall x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R},$$

tomando $h = g$ e $h = g_1$ em (A.1), concluímos que $\psi_2, \psi_3 \in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$\psi_2'(u)v = \int_\Omega g(x,u)v\, dx \quad \text{e} \quad \psi_3'(u)v = \int_\Omega u_+^5 v\, dx,\ \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, utilizando a Proposição 1.7, $I \in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$I'(u)v = (a+b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \mu \int_\Omega g(x,u)v\, dx - \int_\Omega u_+^5 v\, dx,\ u,v \in H_0^1(\Omega),$$

como queríamos demonstrar.

Afirmação 2: O funcional energia J_μ considerado no Capítulo 2 pertence a $C^1(H_0^1(\Omega))$ e satisfaz

$$\begin{aligned} J'_\mu(u)v &= \left[a + b\|u\|^2\Phi_T(u) + \frac{b}{2T^2}\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \\ &\quad -\mu\int_\Omega g(x,u)v\,dx - \int_\Omega u_+^5 v\,dx, \quad u,v\in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

De fato,

$$J_\mu(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4\Phi_T(u) - \mu\int_\Omega G(x,u)\,dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\,dx, \quad u\in H_0^1(\Omega),$$

onde $\Phi_T(u) = \psi\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)$, sendo $\psi\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ uma certa função suave. Ou seja,

$$J_\mu(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u),\ u\in H_0^1(\Omega),$$

onde

$$\varphi_1(u) = \frac{b}{4}\|u\|^4\Phi_T(u), \quad \text{e } \varphi_2(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 - \mu\int_\Omega G(x,u)\,dx\ - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6\,dx.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, pela Proposição 1.7, o funcional $\varphi_1\in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$\varphi'_1(u)v = \left[b\|u\|^2\Phi_T(u) + \frac{b}{2T^2}\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx,\ \forall u,v\in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, como já vimos no caso anterior, temos que $\varphi_2\in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$\varphi'_2(u)v = a\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \mu\int_\Omega g(x,u)v\,dx - \int_\Omega u_+^5 v\,dx,\ \forall u,v\in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, utilizando novamente a Proposição 1.7, $J_\mu\in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$\begin{aligned} J'_\mu(u)v &= \left[a + b\|u\|^2\Phi_T(u) + \frac{b}{2T^2}\|u\|^4\psi'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\right]\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \\ &\quad -\mu\int_\Omega g(x,u)v\,dx - \int_\Omega u_+^5 v\,dx, \quad u,v\in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Afirmação 3: Os funcionais energia $I_{\lambda,\mu}$ e $I_{\lambda,\mu,\nu}$ considerados no Capítulo 3 pertencem a $C^1(H_0^1(\Omega))$ e satisfazem

$$I'_{\lambda,\mu}(u)v = (a+b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \lambda\int_\Omega u_+^q v\,dx - \mu\int_\Omega u_+^3 v\,dx,\ u,v\in H_0^1(\Omega),$$

e

$$I'_{\lambda,\mu,\nu}(u)v = (a+b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \nu\lambda\int_\Omega u_+^q v\,dx - \nu\mu\int_\Omega u_+^3 v\,dx,\ u,v\in H_0^1(\Omega).$$

Observação A.1. *O argumento utilizado para mostrar que $I_{\lambda,\mu}$ pertence a $C^1(H_0^1(\Omega))$ é o mesmo para mostrar que $I_{\lambda,\mu,\nu}$ pertence a $C^1(H_0^1(\Omega))$.*

De fato,

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega u_+^4\,dx,\ u\in H_0^1(\Omega).$$

Ou seja,

$$I(u) = \psi_1(u) - \lambda\psi_4(u) - \mu\psi_5(u),\ u\in H_0^1(\Omega),$$

onde

$$\psi_1(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4,\ \psi_4(u) = \frac{1}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}\,dx \text{ e } \psi_5(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega u_+^4\,dx.$$

Como foi visto, o funcional $\psi_1\in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$\psi_1'(u)v = (a+b\|u\|)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx,\ \forall u,v\in H_0^1(\Omega).$$

Definindo

$$g_2(x,t) = t_+^q,\ \forall x\in\overline{\Omega}, t\in\mathbb{R},$$

e

$$g_3(x,t) = t_+^3,\ \forall x\in\overline{\Omega}, t\in\mathbb{R},$$

como $N=4$ e $1\le q<3$,

$$|g_2(x,t)|\le |t|^q \text{ e } |g_3(x,t)|\le |t|^3,\ \forall x\in\overline{\Omega}, t\in\mathbb{R},$$

tomando $h=g_2$ e $h=g_3$ em (A.1), concluímos que $\psi_4,\psi_5\in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$\psi_4'(u)v = \int_\Omega u_+^q v\,dx \text{ e } \psi_5'(u)v = \int_\Omega u_+^3 v\,dx,\ \forall u,v\in H_0^1(\Omega).$$

Assim, $I_{\lambda,\mu}\in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$I'_{\lambda,\mu}(u)v = (a+b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \lambda\int_\Omega u_+^q v\,dx - \mu\int_\Omega u_+^3 v\,dx,\ u,v\in H_0^1(\Omega),$$

como queríamos demonstrar.

Apêndice B

Cálculos envolvendo as funções corte u_ε e v_ε

Mostraremos que

$$\int_\Omega v_\varepsilon^{q+1}\,dx = \alpha\varepsilon^{3-q} + O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,$$

onde $\alpha > 0$ é alguma constante. Lembremos que o cálculo desta integral é de suma importância para a demonstração do Lema 3.10. Inicialmente, recorde que no Capítulo 3 definimos $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ como

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon\tau(x)}{\varepsilon^2 + |x|^2},\ x \in \Omega,$$

onde $\varepsilon > 0$ e $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função corte apropriada tal que $0 \le \tau \le 1$ e $\tau = 1$ em alguma vizinhança do $0 \in \Omega$, Além disso, definimos

$$v_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^4\,dx\right)^{1/4}},\ x \in \Omega.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx &= \varepsilon^{q+1}\int_\Omega \frac{\tau(x)^{q+1}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{q+1}}\,dx \\
&= \varepsilon^{q+1}\int_\Omega \frac{\tau(x)^{q+1}-1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{q+1}}\,dx + \varepsilon^{q+1}\int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{q+1}}\,dx.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\varepsilon^{q+1}\int_\Omega \frac{\tau(x)^{q+1}-1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{q+1}}\,dx = O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0.$$

De fato, seja a bola $B_{r_1} = B_{r_1}(0) \subset \Omega$ tal que $\tau = 1$ em B_{r_1}. Então,

$$\int_{B_{r_1}} \frac{\tau(x)^{q+1} - 1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx = 0.$$

Por outro lado, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \varepsilon^{q+1} \int_{\Omega \backslash B_{r_1}} \frac{\tau(x)^{q+1} - 1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx \right| &\leq \varepsilon^2 \int_{\Omega \backslash B_{r_1}} \frac{|\tau(x)^{q+1} - 1|}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx \\
&\leq \varepsilon^2 \int_{\Omega \backslash B_{r_1}} \frac{1}{|x|^{2(q+1)}}\, dx \\
&= K\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

haja vista que

$$\int_{\Omega \backslash B_{r_1}} \frac{1}{|x|^{2(q+1)}}\, dx = K < \infty,$$

pois

$$2(q+1) > 4, \ \text{ para } \ 1 < q < 3.$$

Assim,

$$\varepsilon^{q+1} \int_{\Omega} \frac{\tau(x)^{q+1} - 1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx = O(\varepsilon^2), \ \varepsilon \to 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{q+1}\, dx &= O(\varepsilon^2) + \varepsilon^{q+1} \int_{\Omega} \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx \\
&= O(\varepsilon^2) + \varepsilon^{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx \\
&\quad - \varepsilon^{q+1} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx,
\end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Todavia, ainda para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\varepsilon^{q+1} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx \leq \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{1}{|x|^{2(q+1)}}\, dx \leq K\varepsilon^2.$$

Ou seja,

$$\varepsilon^{q+1} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{q+1}}\, dx = O(\varepsilon^2), \ \varepsilon \to 0.$$

Por conseguinte,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx = O(\varepsilon^2) + \varepsilon^{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{q+1}}\,dx,\ \varepsilon\to 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x/\varepsilon \iff x = \varepsilon y$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx &= O(\varepsilon^2) + \varepsilon^{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left[\varepsilon^2\left(1+|\frac{x}{\varepsilon}|^2\right)\right]^{q+1}}\,dx\\
&= O(\varepsilon^2) + \frac{1}{\varepsilon^{q+1}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(1+|y|^2\right)^{q+1}}\varepsilon^4\,dy\\
&= M\varepsilon^{3-q} + O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0,
\end{aligned}$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(1+|y|^2\right)^{q+1}}\,dx = M < \infty.$$

Assim,

$$\int_\Omega v_\varepsilon^{q+1}\,dx = \frac{\displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^{q+1}\,dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^4\,dx\right)^{(q+1)/4}} = \frac{M\varepsilon^{3-q}+O(\varepsilon^2)}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^4\,dx\right)^{(q+1)/4}},\ \varepsilon\to 0.$$

Analogamente ao que fizemos acima para

$$\int_\Omega u_\varepsilon^{q+1}\,dx,$$

podemos demonstrar que

$$\int_\Omega u_\varepsilon^4\,dx = M' + O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0,$$

onde $M' > 0$ é constante. Em consequência, para $\varepsilon > 0$ pequeno,

$$\int_\Omega v_\varepsilon^{q+1}\,dx \le \frac{M\varepsilon^{3-q}+O(\varepsilon^2)}{(M')^{\frac{q+1}{4}}} = \frac{M}{(M')^{\frac{q+1}{4}}}\varepsilon^{3-q} + O(\varepsilon^2).$$

Daí,

$$\int_\Omega v_\varepsilon^{q+1}\,dx = \alpha\varepsilon^{3-q} + O(\epsilon^2),\ \varepsilon\to 0,$$

onde $\alpha > 0$ é constante.

Referências Bibliográficas

[1] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, *Comput. Math. Appl.* **49** (2005), 85-93.

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo, On a class of nonlinear elliptic problems with critical growth, *Differ. Equ. Appl.* **2** (2010), 409-417.

[3] C. O. Alves, G. M. Figueiredo, Nonlinear pertubations of a periodic Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Anal.* **75** (2012), 2750-2759.

[4] A. Ambrosetti, A & P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.* **14** (1973) 349-381.

[5] A. Arosio, *Averaged evolution equations: The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces*, Functional Analytic Methods in Complex Analysis ans Applications to Partial Differential Equations, Trieste (1993), 220-254, World Sci. Publ. River Edge (1995).

[6] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners, Existence Results via the Variational Approach.* Springer-Verlag London, 2011.

[7] S. Bernstein, Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivés partielles, *Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. (Izvestia Akad. Nauk SSSR)* **4** (1940), 17-26.

[8] H. Brezis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Commun. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437-477.

[9] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 1998.

[10] G. M. Figueiredo, Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument, *J. Math. Anal. Appl.* **401** (2013), 706-713.

[11] G. M. Figueiredo, J. R. dos Santos Junior, Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth, *Diff. Int. Equations* **25** (2012), 853-868.

[12] L. Jeanjean, On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on $\mathbb{R}^n$, *Proc. Roy Soc. Edinburgh Sect. A* **129** (1999), 787-809.

[13] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1876.

[14] Y. Li, F. Li, J. Shi, Existence of a positive solution to Kirchhoff type problems without compactness conditions, *J. Differ. Equ.* **253** (2012), 2285-2294.

[15] G. Li, H. Ye, Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in $\mathbb{R}^3$, *J. Differ. Equ.* **257** (2014), 566-600.

[16] G. Li, H. Ye, Existence of positive solutions for nonlinear Kirchhoff type problems in $\mathbb{R}^3$ with critical Sobolev exponent and sign-changing nonlinearities, *Math. Methods Appl. Sci.* **37** (16) (2014), 2570-2584.

[17] Z. Liang, F. Li, J. Shi, Positive solutions to Kirchhoff type equations with nonlinearity having prescribed asymptotic behavior, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* (2013, in Press).

[18] S. Liang, S. Shi, Soliton solutions to Kirchhoff type problems involving the critical growth in $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear Anal* **81** (2013), 31-41.

[19] J-L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977), Math. Stud., vol. 30, North-Holland, Amsterdam, (1978), 284-346.

[20] P-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The limit case, *Rev. Mat. Iberoamericana* **1** (1985), 145-201.

[21] T. F. Ma, J. E. Muñoz Rivera, Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem, *Appl. Math. Lett.* **16** (2003), 243-248.

[22] D. Naimen, Positive solutions of Kirchhoff type elliptic equations involving a critical Sobolev exponent, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* **21** (2014) 885-914.

[23] D. Naimen, The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four, *J. Differential Equations* **257** (2014) 1168-1193.

[24] D. Naimen, On the Brezis-Nirenberg problem with a Kirchhoff type perturbation, *Adv. Nonlinear Stud.* **15** (2015), 135-156.

[25] J. Nie, Existence and multiplicity of nontrivial solutions for a class of Schrödinger-Kirchhoff-type equations, *J. Math. Analysis Appl.*, **417** (1) (2014), 65–79.

[26] R. Palais & S. Smale, A generalized Morse theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964) 165-171.

[27] K. Perera, Z. Zhang, Nonlinear solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index, *J. Differ. Equ.* **221** (2006), 246-255.

[28] S. I. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math. Dokl.* **6** (1965), 1408-1411.

[29] S. I. Pohozaev, A certain class of quasilinear hyperbolic equations, *Mat. Sb. (N.S.)* **96** (138) (1975), 152-166, 168.

[30] M. Struwe, A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities, *Math. Z.* **187** (1984), 511-517.

[31] M. Struwe, *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[32] Y. Sun, X. Liu, Existence of positive solutions for Kirchhoff type problems with critical exponent, *J. Partial Differ. Equ.* **25** (2012), 187-198.

[33] G. Talenti, Best constants in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.* **110** (1976) 353-372.

[34] J. Wang, L. Tian, J. Xu, F. Zhang, Multiplicity and concentration of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth, *J. Differ. Equ.* **253** (2012), 2314-2351.

[35] M. Willem, *Minimax Theorems.* Birkhäuser, 1996.