Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Solução Heteroclínica para Problemas Não-Autônomos de Segunda Ordem

por

Arthur Cavalcante Cunha †

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C972e Cunha, Arthur Cavalcante.
Existência de solução heteroclínica para problemas não-autônomos de segunda ordem / Arthur Cavalcante Cunha. – Campina Grande, 2016.
77 f. : il. .

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto".
Referências.

1.Trajetórias Heteroclínicas. 2. Minimização de Funcionais. 3. Problemas Não-autônomos de Segunda Ordem. I. Souto, Marco Aurélio Soares. II.Título.

CDU 517.988.6(043)

Existência de Solução Heteroclínica para Problemas Não-Autônomos de Segunda Ordem

por

Arthur Cavalcante Cunha

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho/2016

Dedicatória

Ao eterno amigo e companheiro,
Juarez Cavalcante Brito Junior
(*In memoriam*).

Resumo

Mostramos, através da minimização de funcionais, a existência de trajetórias heteroclínicas conectando equilíbrios -1 e 1 para várias classes de problemas não autônomos de segunda ordem do tipo

$$\ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)).$$

Consideramos para a função a os seguintes casos: constante, periódica, assintoticamente periódica ou coerciva. Além disso, tratamos de uma condição especial para o problema, a qual será chamada de uma condição de Rabinowitz.

Palavras-chave: Trajetórias Heteroclínicas, Minimização de Funcionais, Problemas Não-Autônomos de Segunda Ordem.

Abstract

We proof, using the minimization of functionals, the existence of heteroclinic trajectories conecting equilibria -1 and 1 for a few number of non-autonomous second order problems like

$$\ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)).$$

We consider for the function a the following cases: constant, periodic, asymptotically periodic or coercive. Besides that, we treat a special condition for the problem, and we call it a Rabinowitz's condition.

Keywords: Heteroclinics Trajectories, Minimization of Functionals, Second Order Non-Autonomous Problems.

Conteúdo

Introdução

Ao considerarmos equações diferenciais do tipo

$$\ddot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

uma interessante questão a ser investigada é a existência de trajetórias (ou órbitas) que conectam *equilíbrios* desta equação: por *equilíbrio* entendemos ser soluções identicamente constantes de (1). Tais trajetórias (que são soluções de (1)) são chamadas de *homoclínicas* se descrevem um 'loop' em um mesmo equilíbrio (ou seja, têm "início" e "fim" no mesmo ponto); caso a trajetória conecte dois equilíbrios distintos da equação, a chamamos de *heteroclínica.* Em outras palavras, sendo p e q equilíbrios de (1), diremos que x é uma trajetória homoclínica conectando p quando ocorre $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = p$; e que é uma trajetória heteroclínica conectando p e q caso $\lim_{t\to-\infty} x(t) = p$ e $\lim_{t\to\infty} x(t) = q$. Definimos ainda um *ciclo heteroclínico* que consiste de várias órbitas heteroclínicas $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ tais que para equilíbrios $p_1, \ldots, p_n$ tem-se

$$\lim_{t\to\infty} x_j(t) = p_{j+1} = \lim_{t\to-\infty} x_{j+1}(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

com $x_{n+1} = x_1$ e $p_{n+1} = p_1$. (vide Figura 1)

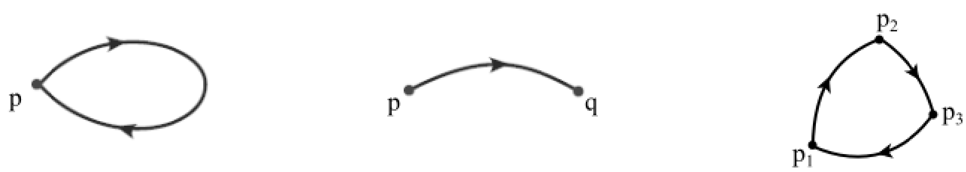

Figura 1: À esquerda um exemplo de trajetória homoclínica; ao centro uma trajetória heteroclínica e à direita um cíclo heteroclínico.

Órbitas homoclínicas geralmente surgem ao considerarmos sistemas nos quais existem apenas uma fase (ou um estado, excluindo-se da contagem o próprio estado de equilíbrio). Já as órbitas heteroclínicas aparecem para sistemas que percorrem e variam por diversos estados distintos, tendo a mudança de um estado para o outro determinada por uma dessas órbitas. Podemos dizer então que as trajetórias heteroclínicas separam fases distintas do problema. Temos ainda que para o caso particular no qual (1) é autônoma, as trajetórias homoclínicas e heteroclínicas atuam no plano de fases como separatrizes entre regiões nas quais as demais soluções têm comportamentos distintos, e isto nos ajuda a determinarmos o comportamento das soluções em todo o plano.

É possível encontrarmos grande aplicabilidade destas órbitas em Teoria da Bifurcação e em Teoria do Caos, teorias estas onde, na verdade, as trajetórias tiveram o seu surgimento (vide por exemplo as referências [7], [15], [17] e [18]). Mas podemos ir além e destacarmos aplicações à Química e à Biomatemática (vide [11] e [16]), além de vários modelos físicos nos quais esses tipos de soluções também têm lugar garantido.

Nesse momento, com o intuito de estudarmos um caso particular da equação (1), iremos considerar $f(t,x) = a(t)V'(x(t))$, e estaremos interessados em garantirmos a existência de soluções heteroclínicas conectando os equilíbrios -1 e 1 para o problema não-autônomo

$$\ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty, \tag{3}$$

onde $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo as propriedades

(V_1) $V \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(V_2) $V(t) \geq 0, \forall\, t \in \mathbb{R}$ e $V(-1) = V(1) = 0$;

(V_3) $V(t) > 0, \forall\, t \in (-1, 1)$;

(V_4) $V''(-1), V''(1) > 0$,

e $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua pertencente a uma das seguintes classes:

Classe 1: a é identicamente uma *constante positiva*;

Classe 2: a é uma função *periódica* contínua com

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} a(t) = a_0 > 0;$$

Classe 3: a é *assintoticamente periódica*, ou seja, existe uma função periódica contínua $a_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|a(t) - a_P(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad |t| \to \infty$$

e

$$0 < \inf_{t\in\mathbb{R}} a(t) \leq a(t) < a_P(t), \;\; \forall\, t \in \mathbb{R};$$

Classe 4: a é *coerciva*, isto é,

$$0 < \inf_{t\in\mathbb{R}} a(t) \quad \text{e} \quad a(t) \to \infty \quad \text{quando } |t| \to \infty;$$

Classe 5: $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\liminf_{|t|\to\infty} a(t) = a_\infty > \inf_{t\in\mathbb{R}} a(t) = a(0) > 0.$$

Esta última classe de funções foi introduzida por Rabinowitz [20] ao estudar existência de solução para equações diferenciais parciais do tipo

$$-\Delta u + V(\epsilon x)u = f(u), \;\; x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro. De agora em diante, diremos que uma função pertencente a essa classe cumpre a *condição de Rabinowitz*.

Dentre os métodos utilizados para garantirmos existência de soluções heteroclínicas, focaremos nos métodos variacionais, combinando ideias clássicas da teoria de equações diferenciais ordinárias com a moderna teoria de pontos críticos. Grande parte da contribuição nessas técnicas dár-se a Ambrosetti, Bolotin, Coti Zelati, Ekeland, Rabinowitz e Séré ([2], [4], [9], [10] e [19]). Nesse caminho, iremos considerar, associado à equação (2), o funcional $J : H^1_{loc}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ definido por

$$J(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t))\right) dt, \tag{4}$$

e o nosso objetivo será o de minimizá-lo no conjunto

$$W = \{x \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \;\mid\; x + 1 \in H^1(-\infty, 0) \text{ e } x - 1 \in H^1(0, \infty)\}, \tag{5}$$

ganhando assim (como veremos ao longo dos estudos) soluções para o problema (2)-(3).

Vale ressaltar de início algumas das dificuldades que encontraremos pelo caminho: a primeira é que o conjunto W não é Banach; na verdade, W não chega a ser espaço vetorial. Porém, ainda conseguiremos garantir a diferenciabilidade de J, resultado essencial para podermos comprovar que pontos de mínimo são soluções. A segunda dificuldade é escolhermos sequências minimizantes de J em W que cumpram adequadamente este papel, ou seja, sequências que nos deem uma menor quantidade de energia acumulada. Com esse objetivo, grande parte do trabalho será focado em obtermos tais sequências.

Como panorama geral, o texto estará dividido da seguinte maneira: no Capítulo 1 trataremos de aspectos gerais do funcional J, tais como garantirmos que ele é diferenciável (apesar do espaço W nem sequer ser espaço vetorial!) e que os pontos que o minimizam são, de fato, soluções heteroclínicas para o problema. Além disso, trazemos no Capítulo 2 a garantia de existência de solução quando a função a for constante e, posteriormente, periódica (classes 1 e 2, respectivamente). A principal referência no estudos desses casos foi [5].

Dando continuidade, teremos no Capítulo 3 a garantia de existência de solução heteroclínica quando a for assintoticamente periódica (classe 3). Ainda neste capítulo, trataremos do caso coercivo (classe 4) que, devido à implementação de uma imersão contínua conveniente em $H^1(\mathbb{R})$ (e consequentemente de imersões contínuas em $H^1(-\infty, 0)$ e $H^1(0, \infty)$), poderá ser abordado como no caso anterior. Estes resultados são encontrados em [1].

No Capítulo 4 estudaremos o problema quando a cumprir à condição de Rabinowitz (classe 5). Porém, nesse momento será necessário introduzirmos o funcional $J_\epsilon : H^1_{loc}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ dado por

$$J_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(\epsilon t)V(x(t)) \right) dt, \tag{6}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro. Neste caso, encontraremos solução heteroclínica apenas para ϵ suficientemente pequeno. Também tivemos como principal referência [1].

Por fim, trazemos mais algumas classes de funções que foram investigadas e sabe-se da existência de solução heteroclínica para elas, citando suas respectivas referências. No mais, contamos com um Apêndice elencando resultados clássicos e que serão imprescindíveis para o entendimento das demonstrações apresentadas aqui. Ainda em

Apêndice demonstramos propriedades complementares que não foram resolvidas durante o texto para não desviarmos a atenção do leitor no que de fato era importante naquele momento.

Capítulo 1

O Funcional Associado ao Problema

Para os tópicos que estabeleceremos neste primeiro capítulo é necessário apenas supormos que a função $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua e existam constantes a_0, $a_1 > 0$ tais que

$$a_0 \le a(t) \le a_1, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

A apresentação será a mais geral possível, e os resultados aqui demonstrados serão peças fundamentais para determinarmos a existência de soluções heteroclínicas para problemas de segunda ordem não-autônomos. Mas colocarmos esta hipótese sobre a pode causar, à princípio, certo incômodo para os leitores que já se preocupam em como iremos lidar com o caso coercivo: no Capítulo 3 teremos o cuidado de fazer os ajustes necessários para tratarmos dessa classe de funções, e não termos que apresentar novos resultados ou adaptações demasiadamente trabalhosas.

Consideremos então o problema de segunda ordem não-autônomo como já proposto na introdução:

$$\ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)), \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty, \tag{1.3}$$

onde $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função verificando

(V_1) $V \in C^2(\mathbb{R})$;

(V_2) $V(t) \ge 0, \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad V(-1) = V(1) = 0$;

(V_3) $V(t) > 0, \forall\, t \in (-1,1)$;

(V_4) $V''(-1), V''(1) > 0$.

Observemos inicialmente que $V'(1) = V'(-1) = 0$. De fato, suponha por contradição que ocorra $V'(-1) \neq 0$ ou $V'(1) \neq 0$ e, sem perda de generalidade, considere $V'(1) > 0$. Então, pela continuidade de V' devem existir $c > 0$ e $\delta \in (0,1)$ tais que $V'(t) \geq c$ para todo $t \in (1-\delta, 1+\delta)$. Logo, se $1 - \delta \leq t_0 \leq 1$ segue de (V_2) que

$$-V(t_0) = V(1) - V(t_0) = \int_{t_0}^{1} V'(t)\, dt \geq c(1-t_0) > 0,$$

donde $V(t_0) < 0$, um absurdo. Analogamente podemos resolver todos os demais casos, a saber $V'(-1) < 0$, $V'(-1) > 0$ ou $V'(1) < 0$. Dessa forma, garantimos $V'(1) = V'(-1) = 0$ e podemos concluir que -1 e 1 são equilíbrios de (1.2) e, portanto, faz sentido procurarmos por trajetórias heteroclínicas conectando-os.

Continuando a analisar a função V teremos o seguinte. Por (V_4), sabemos que $V''(1) > 0$ e assim existe $\gamma_1 \in (0,1)$ de tal forma que V tem comportamento decrescente em $[1-\gamma_1, 1]$ e crescente em $[1, 1+\gamma_1]$. Além disso, $V''(-1) > 0$ implica que existe $\gamma_2 \in (0,1)$ tal que V tem comportamento decrescente em $[-1-\gamma_2, -1]$ e crescente em $[-1, -1+\gamma_2]$. Escolhendo

$$\gamma_0 = \min\{\gamma_1, \gamma_2\} \in (0,1), \tag{1.4}$$

tem-se

$$z_1 < z_2 \text{ em } [-1-\gamma_0, -1] \text{ ou } z_1 < z_2 \text{ em } [1-\gamma_0, 1] \implies V(z_1) > V(z_2)$$

e

$$z_1 < z_2 \text{ em } [-1, -1+\gamma_0] \text{ ou } z_1 < z_2 \text{ em } [1, 1+\gamma_0] \implies V(z_1) < V(z_2).$$

Afirmamos agora que de $(V_1) - (V_4)$, existem constantes $C_1, C_2, \delta_0 > 0$, com $C_1 < C_2$, tais que

$$C_1(t-1)^2 \leq V(t) \leq C_2(t-1)^2, \ \forall\, t \in (1-\delta_0, 1+\delta_0)$$

e

$$C_1(t+1)^2 \leq V(t) \leq C_2(t+1)^2, \ \forall\, t \in (-1-\delta_0, -1+\delta_0).$$

Provemos este fato. Seja $b = V''(1) > 0$. Logo, $\frac{b}{2} < V''(1) < \frac{3b}{2}$ e assim, pela continuidade de V'' (já que V é de classe $C^2(\mathbb{R})$), deve existir $\delta_1 > 0$ satisfazendo

$$t \in (1-\delta_1, 1+\delta_1) \;\Rightarrow\; \frac{b}{2} \leq V''(t) \leq \frac{3b}{2}. \tag{1.5}$$

Lembrando que $V(1) = V'(1) = 0$, temos:

i) Caso $t \in (1, 1+\delta_1)$, então de (1.5)

$$V'(t) = V'(t) - V'(1) = \int_1^t V''(s)\, ds \leq \frac{3b}{2}(t-1).$$

Além disso,

$$V(t) = V(t) - V(1) = \int_1^t V'(s)\, ds \leq \frac{3b}{2}\int_1^t (s-1)\, ds = \frac{3b}{4}(t-1)^2. \tag{1.6}$$

ii) Caso $t \in (1-\delta_1, 1)$, então

$$-V'(t) = V'(1) - V'(t) = \int_t^1 V''(s)\, ds \leq \frac{3b}{2}(1-t).$$

Ademais,

$$-V(t) = V(1) - V(t) = \int_t^1 V'(s)\, ds \geq \frac{3b}{2}\int_t^1 (s-1)\, ds = -\frac{3b}{4}(t-1)^2,$$

donde

$$V(t) \leq \frac{3b}{4}(t-1)^2. \tag{1.7}$$

Com isso, por (1.6) e (1.7), obtemos

$$t \in (1-\delta_1, 1+\delta_1) \;\Rightarrow\; V(t) \leq \frac{3b}{4}(t-1)^2.$$

Analogamente, mostramos que

$$t \in (1-\delta_1, 1+\delta_1) \;\Rightarrow\; \frac{b}{4}(t-1)^2 \leq V(t),$$

e portanto

$$t \in (1-\delta_1, 1+\delta_1) \;\Rightarrow\; \frac{b}{4}(t-1)^2 \leq V(t) \leq \frac{3b}{4}(t-1)^2.$$

Seguindo o mesmo procedimento, dessa vez com $c = V''(-1)$, é possível encontrarmos $\delta_2 > 0$ tal que

$$t \in (-1-\delta_2, -1+\delta_2) \;\Rightarrow\; \frac{c}{4}(t+1)^2 \leq V(t) \leq \frac{3c}{4}(t+1)^2.$$

Agora, basta tomarmos

$$\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0, \tag{1.8}$$

$C_1 = \min\left\{\dfrac{b}{4}, \dfrac{c}{4}\right\}$ e $C_2 = \max\left\{\dfrac{3b}{4}, \dfrac{3c}{4}\right\}$, encontrando as constantes desejadas.

É possível ainda encontrarmos $C > 0$ e $\xi > 0$ de tal forma que seja válida a seguinte desigualdade para V':

$$|V'(s)| \leq C|s-1|, \quad \forall\, s \in [-1-\xi, 1+\xi]. \tag{1.9}$$

De fato, pois notando que

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 1} \frac{V'(s)}{s-1} &= \lim_{s\to 1} \frac{V''(s)}{1} \\ &= V''(1) \\ &> 0, \end{aligned}$$

deve existir $\xi_1 > 0$ de tal forma que para $|s-1| \leq \xi_1$ tem-se

$$\left|\frac{V'(s)}{s-1} - V''(1)\right| \leq 1.$$

Ou seja,

$$|V'(s)| \leq C_1|s-1|, \quad \forall\, s \in [1-\xi_1, 1+\xi_1],$$

onde $C_1 = 1 + V''(1)$.

Perceba agora que

$$\lim_{s\to -1} \frac{V'(s)}{s-1} = 0,$$

donde existe $\xi_2 > 0$ tal que

$$|V'(s)| \leq |s-1|, \quad \forall\, s \in [-1-\xi_2, -1+\xi_2].$$

Tomando $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2\}$, consideremos o número

$$\eta = \max\left\{\left|\frac{V'(s)}{s-1}\right| \;\mid\; s \in [-1+\xi, 1-\xi]\right\}.$$

Daí,

$$|V'(s)| \leq \eta|s-1|, \quad \forall\, s \in [-1+\xi, 1-\xi],$$

e escolhemos $C = \max\{1 + V''(1), \eta\}$, concluindo a afirmação.

A partir desse momento faremos algumas modificações na função V a fim de garantirmos para ela uma 'boa' geometria fora do intervalo $[-1,1]$. O que queremos dizer por boa geometria é que V não atinge nenhum mínimo ($V(t)=0$) fora de $[-1,1]$. Vale ressaltar que essas modificações serão necessárias nesse momento para enunciarmos resultados gerais em $\mathbb{R}$, mas que posteriormente veremos que não será importante o comportamento de V em $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, já que as soluções para o problema (1.2)-(1.3) serão funções $x\in H^1_{loc}(\mathbb{R})\cap C^2(\mathbb{R})$ com $x(t)\in(-1,1)$, para todo $t\in\mathbb{R}$.

Para tanto, iremos considerar (e sempre preservar essa notação)

$$\varepsilon_0=\min\{\gamma_0,\delta_0\}, \tag{1.10}$$

onde γ_0 é dada em (1.4) e define intervalos para crescimento e decrescimento de V e δ_0 é dado por (1.8) e garante limitações para V próximo aos pontos -1 e 1. Assim, ε_0 é tal que

$$z_1<z_2 \text{ em } [-1-\varepsilon_0,-1] \;\text{ ou }\; z_1<z_2 \text{ em } [1-\varepsilon_0,1] \implies V(z_1)>V(z_2)$$

e

$$z_1<z_2 \text{ em } [-1,-1+\varepsilon_0] \;\text{ ou }\; z_1<z_2 \text{ em } [1,1+\varepsilon_0] \implies V(z_1)<V(z_2).$$

Além disso,

$$C_1(t-1)^2\le V(t)\le C_2(t-1)^2,\;\;\forall\, t\in(1-\varepsilon_0,1+\varepsilon_0) \tag{1.11}$$

e

$$C_1(t+1)^2\le V(t)\le C_2(t+1)^2,\;\;\forall\, t\in(-1-\varepsilon_0,-1+\varepsilon_0). \tag{1.12}$$

Uma observação importante: suponhamos ε_0 de tal forma que

$$V(-1+\varepsilon_0)\;=V(1-\varepsilon_0)=\left(\min_{t\in[-1+\varepsilon_0,1-\varepsilon_0]}V(t)\right). \tag{1.13}$$

Esta hipótese será apenas para melhorar a escrita e a compreensão dos resultados que serão apresentados. No entanto, ela pode ser desconsiderada, isso por que não é necessário que tenhamos tanta simetria em relação a função V. Mas ao descartá-la, teremos que sempre lidar com intervalos da forma $(-1+\varepsilon_1,1-\varepsilon_2)$, onde ε_1 será a constante satisfazendo às condições quando os valores estiverem próximos a -1 e ε_2 a constante satisfazendo às condições para valores na vizinhança de 1. Então, para evitar esse tipo de situação, podemos optar apenas por (1.13).

Consideremos então uma nova função $\tilde{V} \in C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(V_5) $\tilde{V}(t) = V(t)$, $\forall\, t \in [-1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0]$;

(V_6) $\tilde{V}(t) > 0$, $\forall\, t \in (-\infty, -1-\varepsilon_0) \cup (1+\varepsilon_0, \infty)$;

(V_7) $\tilde{V}'(t)\, t > 0$, $\forall\, t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;

(V_8) $\tilde{V}(t) \to \infty$ quando $|t| \to \infty$.

De agora em diante consideraremos sempre a função $\tilde{V}$, porém ainda iremos denotá-la por V. Note que de (V_5) e (V_6), ocorre $V(t) = 0$ se, e somente se, $t = \pm 1$; de (V_7) temos V decrescente em $(-\infty, -1)$ e crescente em $(1, \infty)$; e de (V_8) segue que V torna-se coerciva.

Como mencionado na Introdução, iremos considerar o funcional $J : H^1_{loc}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ definido por

$$J(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt,$$

e o objetivo será minimizá-lo no conjunto $W \subset H^1_{loc}(\mathbb{R})$ dado por

$$W = \{x \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \mid x + 1 \in H^1(-\infty, 0) \text{ e } x - 1 \in H^1(0, \infty)\}.$$

O motivo para considerarmos J e W é que, como veremos em breve, as funções $x \in W$ que minimizam o funcional J serão soluções da equação (1.2).

Discorremos nesse momento sobre propriedades e observações a respeito de J e W. Inicialmente observamos que para quaisquer $x \in W$, $v \in H^1(\mathbb{R})$ e $h \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x + hv \in W. \tag{1.14}$$

Além disso, podemos definir uma métrica no conjunto W: ora, para quaisquer x, $z \in W$, tem-se $x - z \in H^1(\mathbb{R})$, nos garantindo a boa definição da seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} \rho : W \times W & \longrightarrow & [0, \infty) \\ (x, z) & \longmapsto & \rho(x, z) = \|x - z\|_{H^1(\mathbb{R})} \end{array}.$$

É possível provarmos que (W, ρ) é um espaço métrico completo, e a demonstração encontra-se na proposição A.4, Apêndice A.

Observe que se $x \in W$, então $J(x) < \infty$. Com efeito, pois $x \in W$ implica $x - 1 \in H^1(0, \infty)$ e assim $(x-1)' = \dot{x} \in L^2(0, \infty)$. Logo,

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \dot{x}(t)^2 \, dt < \infty. \tag{1.15}$$

Temos ainda que $x(t) \to 1$ quando $t \to \infty$, donde deve existir $R > 0$ tal que se $t > R$ então $x(t) \in (1 - \varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0)$. Daí, por (1.11), pela continuidade de V e por $x - 1 \in L^2(0, \infty)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty a(t)V(x(t))\, dt &\leq a_1 \int_0^\infty V(x(t))\, dt \\
&= a_1 \int_0^R V(x(t))\, dt + a_1 \int_R^\infty V(x(t))\, dt \\
&\leq a_1 \int_0^R V(x(t))\, dt + a_1 C_2 \int_R^\infty (x(t)-1)^2\, dt \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Assim, por (1.15) e (1.16) concluímos que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt < \infty.$$

De maneira análoga provamos que

$$\int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt < \infty,$$

e portanto

$$J(x) < \infty, \quad \forall\, x \in W. \tag{1.17}$$

Recordando (1.14), mostraremos que o funcional J é "Gâteaux-diferenciável" em W no sentido de que para $x \in W$, $v \in H^1(\mathbb{R})$ e $h \in \mathbb{R}$, existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{J(x+hv) - J(x)}{h}. \tag{1.18}$$

Definiremos então a notação

$$J'(x) \cdot v = \lim_{h \to 0} \frac{J(x+hv) - J(x)}{h},$$

e provaremos que

$$J'(x) \cdot v = \int_{-\infty}^\infty [\dot{x}(t)\dot{v}(t) + a(t)V'(x(t))\, v(t)]\, dt, \ \ \forall\, x \in W \text{ e } v \in H^1(\mathbb{R}). \tag{1.19}$$

De fato, inicialmente note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}(x+hv)'(t)^2 - \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2\right)\, dt &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}(2h\dot{x}(t)\dot{v}(t) + h^2\dot{v}(t)^2)\right)\, dt \\ &= \int_0^\infty \left(\dot{x}(t)\dot{v}(t) + \frac{1}{2}h\dot{v}(t)^2\right)\, dt.\end{aligned}$$

Ora,

$$\lim_{h\to 0}\left(\dot{x}(t)\dot{v}(t) + \frac{1}{2}h\dot{v}(t)^2\right) = \dot{x}(t)\dot{v}(t)$$

e (caso $|h| \leq 1$)

$$\begin{aligned}|\dot{x}(t)\dot{v}(t) + \frac{1}{2}h\dot{v}(t)^2| &\leq |\dot{x}(t)||\dot{v}(t)| + \frac{1}{2}|h||\dot{v}(t)|^2 \\ &\leq |\dot{x}(t)||\dot{v}(t)| + |\dot{v}(t)|^2.\end{aligned}$$

Por $x \in W$, segue $x - 1 \in H^1(0,\infty)$, donde $\dot{x} \in L^2(0,\infty)$. Sabemos ainda que $\dot{v} \in L^2(0,\infty)$, já que $v \in H^1(\mathbb{R})$. Daí, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (|\dot{x}(t)||\dot{v}(t)| + |\dot{v}(t)|^2)\, dt &\leq \|\dot{x}\|_{L^2(0,\infty)}\|\dot{v}\|_{L^2(0,\infty)} + \|\dot{v}\|^2_{L^2(0,\infty)} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

mostrando que $\dot{x}\dot{v}+\dot{v}^2 \in L^1(0,\infty)$. Segue então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}(x+hv)'(t)^2 - \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2\right)\, dt\right] &= \lim_{h\to 0}\int_0^\infty \left(\dot{x}(t)\dot{v}(t) + \frac{1}{2}h\dot{v}(t)^2\right) \\ &= \int_0^\infty \dot{x}(t)\dot{v}(t)\, dt.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2}(x+hv)'(t)^2 - \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2\right)\, dt\right] = \int_{-\infty}^0 \dot{x}(t)\dot{v}(t)\, dt,$$

e portanto

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{2}(x+hv)'(t)^2 - \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2\right)\, dt\right] = \int_{-\infty}^\infty \dot{x}(t)\dot{v}(t)\, dt. \tag{1.20}$$

Por $x \in W$, segue $x(t) \to 1$ quando $t \to \infty$. Então, para $\xi > 0$ escolhido como em (1.9) deve existir $T_1 > 0$ de modo que

$$|x(t) - 1| \leq \frac{\xi}{2}, \quad \forall\, t \geq T_1.$$

Sendo $v \in H^1(\mathbb{R})$, existe $T_2 > 0$ tal que

$$|v(t)| \leq \frac{\xi}{2}, \quad \forall\, t \geq T_2,$$

e consideremos então

$$T = \max\{T_1, T_2\}.$$

Daí, pelo Teorema do Valor Médio, segue que existe $\tau_t \in (0,1)$ de tal forma que

$$\begin{aligned} \left|\frac{V(x(t)+hv(t)) - V(x(t))}{h}\right| &= \frac{|V'(x(t)+\tau_t hv(t))||hv(t)|}{|h|} \\ &= |V'(x(t)+\tau_t hv(t))||v(t)|. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Ora, considerando $|h| < 1$, tem-se para $t \geq T$,

$$\begin{aligned} |x(t)+\tau_t hv(t)| &\leq |x(t)| + \tau_t |h||v(t)| \\ &\leq |x(t)| + |v(t)| \\ &\leq 1 + \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} \\ &= 1 + \xi, \end{aligned} \tag{1.22}$$

e assim por (1.9), (1.21) e lembrando que $|a(t)| \leq a_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} |a(t)|\left|\frac{V(x(t)+hv(t)) - V(x(t))}{h}\right| &\leq a_1 C|x(t)+\tau_t hv(t) - 1||v(t)| \\ &= a_1 C|(x(t)-1) + \tau_t hv(t)||v(t)| \\ &\leq a_1 C|x(t)-1||v(t)| + a_1 C|\tau_t hv(t)||v(t)| \\ &\leq a_1 C|x(t)-1||v(t)| + a_1 C|v(t)|^2. \end{aligned}$$

Como $x - 1 \in H^1(0,\infty)$ e $v \in H^1(0,\infty)$, então mais uma vez pela desigualdade de Hölder, garantimos que $a_1 C(x-1)v + a_1 C v^2 \in L^1(T,\infty)$. Como

$$\lim_{h\to 0}\left(a(t)\,\frac{V(x(t)+hv(t)) - V(x(t))}{h}\right) = a(t)V'(x(t))v(t),$$

concluímos do teorema de Lebesgue que

$$\lim_{h\to 0}\int_T^\infty \left(a(t)\frac{V(x(t)+hv(t)) - V(x(t))}{h}\right) dt = \int_T^\infty a(t)V'(x(t))v(t)\, dt.$$

Podemos garantir então

$$\lim_{h\to 0}\int_0^\infty \left(a(t)\frac{V(x(t)+hv(t)) - V(x(t))}{h}\right) dt = \int_0^\infty a(t)V'(x(t))v(t)\, dt. \tag{1.23}$$

Em (1.9), podemos escolher ainda C e ξ satisfazendo

$$|V'(s)| \leq C|s+1|, \quad \forall\, s \in [-1-\xi, 1+\xi],$$

e com procedimento análogo ao utilizado há pouco garantimos que

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{0} \left(a(t)\frac{V(x(t)+hv(t)) - V(x(t))}{h} \right) dt = \int_{-\infty}^{0} a(t)V'(x(t))v(t)\, dt. \tag{1.24}$$

Então, pelas equações (1.23) e (1.24), segue

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(a(t)\frac{V(x(t)+hv(t)) - V(x(t))}{h} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)V'(x(t))v(t)\, dt. \tag{1.25}$$

Logo, de (1.20) e (1.25) concluímos

$$\lim_{h\to 0} \frac{J(x+hv) - J(x)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)\dot{v}(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} a(t)V'(x(t))v(t)\, dt,$$

e portanto escrevemos

$$J'(x)\cdot v = \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{x}(t)\dot{v}(t) + a(t)V'(x(t))v(t)]\, dt, \quad \forall\, x \in W,\ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}),$$

como queríamos demonstrar.

Perceba que devido a $a(t) \geq a_0 > 0$ e $V(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue

$$J(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in W,$$

nos mostrando que J é um funcional limitado inferiormente. Consideremos então o número

$$B = \inf\{J(x) \ \mid\ x \in W\}. \tag{1.26}$$

A primeira observação a ser feita é que B é um número positivo, ou seja, temos $B > 0$. Ora, consideremos

$$\sigma = \min\left\{ \frac{a_0 V(s)}{s^2} \ \mid\ 0 < s \leq \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

Daí,

$$s^2 \leq \frac{a_0 V(s)}{\sigma}, \quad \text{quando } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}. \tag{1.27}$$

Sendo $x \in W$, podemos escolher números r, $s \in \mathbb{R}$, com $r < s$, tais que $x(r) = 0$, $x(s) = \dfrac{1}{2}$ e

$$0 \leq x(t) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall\, t \in [r,s].$$

Com isso, por ser $x \in W$, pela desigualdade de Hölder e por (1.27) garantimos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= x(s)^2 - x(r)^2 \\
&= \int_r^s \frac{d}{dt}(x(t)^2)\, dt \\
&= 2\int_r^s x(t)\dot{x}(t)\, dt \\
&\leq 2\left(\int_r^s x(t)^2\, dt\right)^{1/2}\left(\int_r^s \dot{x}(t)^2\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq 2\left(\int_r^s \frac{a_0 V(x(t))}{\sigma}\, dt\right)^{1/2}\left(\int_r^s \dot{x}(t)^2\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq 2\left(\int_r^s \frac{a(t) V(x(t))}{\sigma}\, dt\right)^{1/2}\left(\int_r^s \dot{x}(t)^2\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{\sigma}}\left(\int_r^s a(t)V(x(t))\, dt\right)^{1/2}(2J(x))^{1/2} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{\sigma}}(J(x))^{1/2}(2J(x))^{1/2} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma}}J(x),
\end{aligned}
$$

donde

$$J(x) \geq \frac{\sqrt{\sigma}}{8\sqrt{2}}, \quad \forall\, x \in W.$$

Portanto,

$$B = \inf_{x \in W} J(x) \geq \frac{\sqrt{\sigma}}{8\sqrt{2}} > 0,$$

ou seja,

$$B > 0,$$

como queríamos demonstrar.

Caso $x \in W$ seja tal que $J(x) = B$, ou seja, o ínfimo seja na verdade mínimo e seja atingido em W, então é possível mostrarmos que $J'(x) = 0$. A partir disso, podemos concluir que x é solução do problema proposto (1.2)-(1.3). É isto o que faremos no primeiro lema a ser demonstrado: garantir que pontos em W que minimizam o funcional J são, na verdade, soluções para o problema.

Lema 1.1 *Se $x \in W$ verifica $J(x) = B$, então x é solução do problema (1.2)-(1.3) e, além disso, $x \in C^2(\mathbb{R})$ com $x(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova. Mostraremos inicialmente que ocorre

$$J'(x) = 0.$$

Temos para quaisquer $h \in \mathbb{R}$ e $v \in H^1(\mathbb{R})$ que $x + hv \in W$. Daí, sendo $J(x) = B$, segue que para toda função $v \in H^1(\mathbb{R})$ é válido $J(x + hv) \geq J(x)$. Assim, para $h > 0$, temos

$$\frac{J(x + hv) - J(x)}{h} \geq 0,$$

e passando ao limite com $h \to 0$, então

$$J'(x) \cdot v \geq 0, \ \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}). \tag{1.28}$$

Com isso, também é válido

$$J'(x) \cdot (-v) \geq 0, \ \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}).$$

Como

$$J'(x) \cdot v = \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{x}(t)\dot{v}(t) + a(t)V'(x(t))\, v(t)]\, dt,$$

obtemos

$$0 \leq J'(x) \cdot (-v) = -J'(x) \cdot v, \ \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}),$$

ou seja,

$$J'(x) \cdot v \leq 0, \ \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}). \tag{1.29}$$

Logo, de (1.28) e (1.29), temos

$$J'(x) \cdot v = 0, \ \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}),$$

e portanto

$$J'(x) = 0.$$

Agora mostraremos que x é de fato solução para o problema. Considerando $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $supp\, v \subset [\alpha, \beta]$, vale

$$\begin{aligned}
0 &= J'(x) \cdot v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{x}(t)\dot{v}(t) + a(t)V'(x(t))\, v(t)]\, dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} [\dot{x}(t)\dot{v}(t) + a(t)V'(x(t))\, v(t)]\, dt \\
&= \dot{x}(t)v(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} [\ddot{x}(t)v(t) - a(t)V'(x(t))\, v(t)]\, dt \\
&= \dot{x}(\beta)v(\beta) - \dot{x}(\alpha)v(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} [\ddot{x}(t) - a(t)V'(x(t))]\, v(t)\, dt \\
&= -\int_{\alpha}^{\beta} [\ddot{x}(t) - a(t)V'(x(t))]v(t)\, dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{x}(t) - a(t)V'(x(t))]v(t)\, dt,
\end{aligned}$$

e segue do Lema de DuBois-Raymond (vide Lema A.1, Apêndice A) que

$$\ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)), \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}.$$

Como a expressão no lado direito da última igualdade é uma função contínua, concluímos que a igualdade é válida em toda a reta, isto é,

$$\ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ademais, de $x \in W$, obtemos que $x - 1 \in H^1(0, \infty)$ e $x + 1 \in H^1(-\infty, 0)$ e garantimos, respectivamente, que $x(t) \to 1$ quando $t \to \infty$ e $x(t) \to -1$ quando $t \to -\infty$. Portanto, x é solução do problema (1.2)-(1.3).

Nos resta provar que a solução x é de classe C^2 e toma valores no intervalo $(-1, 1)$. Ora, como $J(x) = B < \infty$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)^2\, dt < \infty,$$

e daí $\dot{x} \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Por outro lado, para cada $N > 0$, temos pela continuidade de aV' que

$$\int_{-N}^{N} \ddot{x}(t)^2\, dt = \int_{-N}^{N} [a(t)V'(x(t))]^2\, dt < \infty$$

e assim $\ddot{x} \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Logo, $\dot{x} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$. Então, como $(x')' = \ddot{x} \in C(\mathbb{R})$ e $\dot{x} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, segue que $\dot{x} \in C^1(\mathbb{R})$ (vide [6], Observação 6, p. 204) e portanto $x \in C^2(\mathbb{R})$.

Por fim, provemos que $x(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha por absurdo que isso não ocorra, ou seja, que existe $t_1 \in \mathbb{R}$ com $x(t_1) \notin (-1, 1)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x(t_1) > 1$. Como $x \in W$, então $x(t) \to 1$ quando $t \to \infty$ e assim deve existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t_0) = \max_{t \in \mathbb{R}} x(t) > 1.$$

Sendo $x \in C^2(\mathbb{R})$ e t_0 um ponto de máximo, segue que $\ddot{x}(t_0) \leq 0$. Além disso, pela condição (V_7) temos $V'(x(t_0)) > 0$, já que $x(t_0) > 1$. Com isso, e lembrando que $a(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$0 \geq \ddot{x}(t_0) = a(t_0)V'(x(t_0)) > 0,$$

um absurdo. Assim, $x(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De maneira análoga resolvemos o caso de existir $t_2 \in \mathbb{R}$ de tal forma que $x(t_2) < -1$; garantimos então $x(t) \geq -1$ para todo

$t \in \mathbb{R}$. Suponha que existe $t_3 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_3) = 1$. Então, $1 = x(t_3) = \max_{t\in\mathbb{R}} x(t)$, já que não existe $t \in \mathbb{R}$ com $x(t) > 1$. Logo, $\dot{x}(t_3) = 0$. Pelo teorema de existência e unicidade, segue que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)) \\ x(t_3) = 1 \\ \dot{x}(t_3) = 0 \end{cases}$$

tem solução única, a saber $u(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso nos daria então x identicamente igual a 1 (pois x também é solução do PVI), uma contradição, já que $t \to -\infty$ implica $x(t) \to -1$. Supondo a existência de $t_4 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_4) = -1$, concluímos de maneira análoga. Portanto,

$$x(t) \in (-1, 1), \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

■

Veremos adiante que, para $x \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ sob a hipótese $J(x) < \infty$, é possível termos ideia do seu comportamento com valores muito grandes de $|t|$. Vale notar que, a princípio, não sabemos se a função x pertence ou não a W.

Lema 1.2 *Seja $x \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $J(x) < \infty$. Então*

$$x(t) \to -1 \quad ou \quad x(t) \to 1 \;\; quando \;\; t \to -\infty$$

e

$$x(t) \to -1 \quad ou \quad x(t) \to 1 \;\; quando \;\; t \to \infty.$$

Ademais,

$$x + 1 \in H^1(-\infty, 0) \quad ou \quad x - 1 \in H^1(-\infty, 0)$$

e

$$x + 1 \in H^1(0, \infty) \quad ou \quad x - 1 \in H^1(0, \infty).$$

Prova. Suponhamos, por contradição, que o lema não seja válido, ou seja, temos $x \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ com $J(x) < \infty$ não verificando os limites acima. Daí, existem $\eta > 0$ e uma sequência de números reais (t_n) tais que $|t_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e

$$x(t_n) \in (-\infty, -1 - \eta) \cup (-1 + \eta, 1 - \eta) \cup (1 + \eta, \infty). \tag{1.30}$$

Definamos o número

$$d = \inf\{V(z) \mid z \in (-\infty, -1 - \frac{\eta}{2}) \cup (-1 + \frac{\eta}{2}, 1 - \frac{\eta}{2}) \cup (1 + \frac{\eta}{2}, \infty)\} > 0.$$

Iremos supor, sem perda de generalidade, que $t_n \to \infty$ e $t_{n+1} \geq t_n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se para todo $t \in [t_n, t_n + 1]$, tivermos $x(t) \in (-\infty, -1 - \frac{\eta}{2}) \cup (-1 + \frac{\eta}{2}, 1 - \frac{\eta}{2}) \cup (1 + \frac{\eta}{2}, \infty)$, então

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_n+1} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt &\geq \int_{t_n}^{t_n+1} a(t)V(x(t))\, dt \\ &\geq \int_{t_n}^{t_n+1} a_0\, d\, dt \\ &= a_0\, d. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Caso exista $t^* \in [t_n, t_n + 1]$ tal que $x(t^*) \notin (-\infty, -1 - \frac{\eta}{2}) \cup (-1 + \frac{\eta}{2}, 1 - \frac{\eta}{2}) \cup (1 + \frac{\eta}{2}, \infty)$, segue de (1.30) que $|x(t^*) - x(t_n)| \geq \frac{\eta}{2}$. Assim, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} &\leq |x(t^*) - x(t_n)| \\ &= \left| \int_{t_n}^{t^*} \dot{x}(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_{t_n}^{t^*} |\dot{x}(t)|\, dt \\ &\leq \left(\int_{t_n}^{t^*} |\dot{x}(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_n}^{t^*} 1^2\, dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{t^* - t_n} \left(\int_{t_n}^{t^*} |\dot{x}(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{t_n}^{t^*} \dot{x}(t)^2\, dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{t_n}^{t_n+1} \dot{x}(t)^2\, dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

donde

$$\int_{t_n}^{t_n+1} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt \geq \int_{t_n}^{t_n+1} \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2\, dt \geq \frac{\eta^2}{8}. \tag{1.32}$$

Logo, em quaisquer dos casos, segue de (1.31) e (1.32) que

$$\int_{t_n}^{t_n+1} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt \geq \min\left\{ \frac{\eta^2}{8}, a_0\, d \right\} > 0, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e daí

$$J(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{t_n}^{t_n+1} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt \right] = \infty,$$

contrariando o fato de que $J(x) < \infty$. Então, $x(t) \to -1$ ou $x(t) \to 1$ quando $t \to \infty$. Analogamente, porém desta vez considerando $t_n \to -\infty$ com $t_{n+1} < t_n - 1$, segue que

$x(t) \to -1$ ou $x(t) \to 1$ quando $t \to -\infty$, demonstrando a primeira parte do lema.

Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que $x(t) \to 1$ quando $t \to \infty$. Assim, existe $R > 0$ tal que se $t > R$, então $x(t) \in (1 - \varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0)$, onde ε_0 foi dado em (1.10) (p. 15). Então, por (1.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_R^\infty (x(t)-1)^2\,dt &\leq \int_R^\infty \frac{1}{C_1} V(x(t))\,dt \\
&= \int_R^\infty \frac{a(t)}{a(t)\,C_1} V(x(t))\,dt \\
&\leq \frac{1}{a_0\,C_1}\int_R^\infty a(t)V(x(t))\,dt \\
&\leq \frac{1}{a_0\,C_1}\int_{-\infty}^\infty a(t)V(x(t))\,dt \\
&\leq \frac{1}{a_0\,C_1}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t))\right)\,dt \\
&= \frac{1}{a_0\,C_1} J(x) < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty (x(t)-1)^2\,dt = \int_0^R (x(t)-1)^2\,dt + \int_R^\infty (x(t)-1)^2\,dt < \infty,$$

e garantimos que $x - 1 \in L^2(0,\infty)$. Como $J(x) < \infty$, temos

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{x}(t)^2\,dt \leq J(x) < \infty,$$

e assim $\dot{x} \in L^2(0,\infty)$. Daí, $(x-1)' = \dot{x} \in L^2(0,\infty)$, donde $x - 1 \in H^1(0,\infty)$. Argumentos análogos podem ser usados para os casos $x(t) \to -1$ quando $t \to \infty$, $x(t) \to 1$ quando $t \to -\infty$ ou $x(t) \to -1$ quando $t \to -\infty$. ■

A seguir traremos dois lemas sobre sequências no espaço $H^1(-T,T)$, com $T > 0$: o primeiro nos fornece algumas condições suficientes para garantirmos a limitação de sequências neste espaço; o segundo, tendo como base a reflexividade de $H^1(-T,T)$, nos garante que sequências limitadas possuem subsequência que converge uniformemente e fraco.

Lema 1.3 *Sejam $A, T > 0$. Temos que existe uma constante $M = M(A,T) > 0$ tal que se $x \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ satisfaz $J(x) \leq A$, então $\|x\|_{H^1(-T,T)} \leq M$.*

Prova. Observe inicialmente que

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} \dot{x}(t)^2\, dt &\leq 2\int_{-T}^{T} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t))\right)\, dt \\
&\leq 2\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t))\right)\, dt \\
&\leq 2A,
\end{aligned}$$

e daí

$$\|\dot{x}\|_{L^2(-T,T)} \leq (2A)^{1/2}. \tag{1.33}$$

Por outro lado, pela coercividade de V (propriedade (V_8)), existe $c > 0$ tal que

$$|z| > c \quad \Rightarrow \quad V(z) > \frac{A}{a_0\, T}. \tag{1.34}$$

Como

$$\int_{-T}^{T} a(t)V(x(t))\, dt \leq J(x) \leq A,$$

segue que existe $t^* \in [-T, T]$ tal que

$$|x(t^*)| \leq c, \tag{1.35}$$

pois caso contrário teríamos por (1.34) que

$$\begin{aligned}
A &\geq \int_{-T}^{T} a(t)V(x(t))\, dt \\
&> \int_{-T}^{T} a(t)\frac{A}{a_0\, T}\, dt \\
&\geq \int_{-T}^{T} a_0\frac{A}{a_0\, T}\, dt \\
&= 2A,
\end{aligned}$$

um absurdo. Portanto, de fato existe $t^* \in [-T, T]$ cumprindo (1.35).

Agora, para todo $s \in [-T, T]$, segue

$$|x(s)| - |x(t^*)| \leq |x(s) - x(t^*)| = \left|\int_{\min\{s,t^*\}}^{\max\{s,t^*\}} \dot{x}(t)\, dt\right|,$$

e assim, aplicando Hölder, e usando (1.33) e (1.35), obtemos

$$
\begin{aligned}
|x(s)| &\leq |x(t^*)| + \left| \int_{\min\{s,t^*\}}^{\max\{s,t^*\}} \dot{x}(t)\, dt \right| \\
&\leq |x(t^*)| + \sqrt{|s-t^*|} \left| \int_{\min\{s,t^*\}}^{\max\{s,t^*\}} \dot{x}(t)^2\, dt \right|^{1/2} \\
&\leq c + \sqrt{|s-t^*|} \left(\int_{\min\{s,t^*\}}^{\max\{s,t^*\}} \dot{x}(t)^2\, dt \right)^{1/2} \\
&\leq c + \sqrt{|s-t^*|} \left(\int_{-T}^{T} \dot{x}(t)^2\, dt \right)^{1/2} \\
&\leq c + \sqrt{|s-t^*|}\, (2A)^{1/2} \\
&\leq c + \sqrt{2T}\sqrt{2A} = c + 2\sqrt{AT}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|x\|_{L^\infty(-T,T)} \leq c + 2\sqrt{AT}.$$

Por $[-T,T]$ ser um intervalo limitado, temos a imersão contínua $L^\infty(-T,T) \hookrightarrow L^2(-T,T)$, e com isso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_{L^2(-T,T)} \leq C\|x\|_{L^\infty(-T,T)} \leq C(c + 2\sqrt{AT}). \tag{1.36}$$

Por fim, segue mais uma vez de (1.33) e de (1.36) que

$$\|x\|_{H^1(-T,T)} = \|x\|_{L^2(-T,T)} + \|\dot{x}\|_{L^2(-T,T)} \leq C(c + 2\sqrt{AT}) + \sqrt{2A},$$

e basta escolhermos $M = C(c + 2\sqrt{AT}) + \sqrt{2A}$, demonstrando assim o lema. ■

Lema 1.4 *Seja $T > 0$. Se $(x_n) \subset H^1_{loc}(\mathbb{R})$ for uma sequência limitada em $H^1(-T,T)$, então existem uma subsequência de (x_n), que ainda denotaremos por ela própria, e uma função $x \in H^1(-T,T)$ tais que*

$$
\begin{array}{l}
x_n \to x \text{ uniformemente em } [-T,T] \quad e \\
x_n \rightharpoonup x \text{ em } H^1(-T,T)
\end{array}.
$$

Prova. Como (x_n) é uma sequência limitada em $H^1(-T,T)$ e a imersão

$$H^1(-T,T) \hookrightarrow C([-T,T])$$

é compacta (vide Teorema A.3, Apêndice A), devem existir uma subsequência de (x_n), que ainda denotaremos por ela mesma, e uma função $u \in C([-T,T])$ tais que $x_n \to u$ em $C([-T,T])$, ou seja,

$$x_n \to u \quad \text{uniformemente em } [-T,T].$$

Por outro lado, sendo $H^1(-T,T)$ um espaço de Hilbert (e então um espaço reflexivo), devem existir subsequência de (x_n), ainda denotada por (x_n), e uma função $v \in H^1(-T,T)$ satisfazendo

$$x_n \rightharpoonup v \quad \text{em } H^1(-T,T).$$

Provemos agora que $u = v$. Ora, como $x_n \rightharpoonup v$ em $H^1(-T,T)$, então $x_n \to v$ em $L^2(-T,T)$. Daí, passando a uma subsequência se necessário, $x_n \to v$ q.s. em $[-T,T]$ (vide [3], pp. 69 e 75). Como a convergência $x_n \to u$ é uniforme em $[-T,T]$, segue que $x_n \to u$ em todo ponto. Portanto, $u = v$ e podemos escolher a função x pedida no enunciado como sendo a u, demonstrando o lema. ■

Observação 1.1 *Combinando os Lemas 1.3, 1.4 e o processo diagonal descrito na Proposição A.5 (Apêndice A) garantimos que se $A > 0$ e $(x_n) \subset H^1_{loc}(\mathbb{R})$ satisfazem $J(x_n) \leq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então existem subsequência de (x_n), denotada pela própria (x_n), e uma função $x \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que para todo $T > 0$,*

$$\begin{array}{l} x_n \to x \text{ uniformemente em } [-T,T] \quad \text{e} \\ x_n \rightharpoonup x \text{ em } H^1(-T,T) \end{array} . \tag{1.37}$$

Para finalizarmos o primeiro capítulo faremos uma breve comparação entre duas maneiras de postarmos o problema e nos determos a procurar por soluções heteroclínicas: por um lado, citamos os artigos [1], [12], [13] e [21], nos quais os pesquisadores o propõem da maneira já tratada aqui. Aliás, grande parte do que será apresentado nos capítulos seguintes são resultados que estão em [1].

Por outro lado, destacamos que em [5] e [14] é considerado

$$\ddot{x}(t) = a(t)f(x(t)), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

onde a função f satisfaz

(f_1) $f(-1) = f(1) = 0$;

(f_2) Existe uma primitiva $F \in C^1$ de f tal que $F(-1) = F(1) = 0$ e $F(t) > 0$ para todo $t \in [-1,1]$.

Ademais, é feita uma modificação em F colocando

$$F(t) = 0, \quad \forall\, t \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty).$$

No entanto, dessa vez a tentativa é a de minimizar o funcional J no conjunto

$$\Sigma = \{x \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \mid x(-\infty) = -1 \ \text{ e } \ x(+\infty) = 1\}.$$

Note que claramente $W \subset \Sigma$. Mas podemos ir além disso: na verdade, W é um subconjunto próprio de Σ e exibimos na Proposição A.6, Apêndice A, um exemplo de função pertencente a Σ mas que não faz parte de W. Observe ainda que ao considerarmos o problema nesse modelo, não temos ideia de qual o comportamento de F nas vizinhanças de -1 e 1, implicando que boa parte dos resultados já desenvolvidos nesse trabalho deveriam ser adaptados e alguns outros descartados.

Capítulo 2

Existência de Solução para o caso Periódico

Trataremos a partir desse momento dos procedimentos necessários para podermos resolver o problema (1.2)-(1.3) quando a função a for identicamente constante. Este caso pode ser encontrado em [5] e escolheremos, sem perda de generalidade, $a(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, ficamos com o problema

$$\ddot{x}(t) = V'(x(t)), \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty, \tag{2.2}$$

e com o funcional associado

$$J(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + V(x(t)) \right) dt.$$

Observe inicialmente que neste caso o funcional J é invariante por translação. Com efeito, sejam w_1, $w_2 \in W$ e considere w_2 uma translação de w_1, ou seja, que existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $w_2(t) = w_1(t+\tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, pela mudança de variáveis $\xi = t + \tau$, tem-se

$$\begin{aligned} J(w_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_2(t)^2 + V(w_2(t)) \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_1(t+\tau)^2 + V(w_1(t+\tau)) \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_1(\xi)^2 + V(w_1(\xi)) \right) d\xi \\ &= J(w_1), \end{aligned} \tag{2.3}$$

provando que J é invariante por translação.

Dando continuidade, o próximo passo que tomaremos será garantir a existência de uma sequência minimizante para o funcional J e que, além disso, permaneça na vizinhança do valor 1 quando $t \to \infty$ e na vizinhança do valor -1 quando $t \to -\infty$. Um fato importante a ser destacado é que não estaremos interessados apenas na existência de tal sequência, mas também no método pelo qual ela será obtida.

Lema 2.1 *Para cada $\varepsilon \in (0,1)$, existem sequências $(U_n) \subset W$, $(s_n), (t_n) \subset \mathbb{R}$, com $s_n < t_n$, tais que*

$$
\begin{gathered}
J(U_n) \to B \text{ quando } n \to \infty, \\
U_n(t) \in [-1, -1+\varepsilon], \;\; \forall\, t \in (-\infty, s_n], \\
U_n(t) \in [1-\varepsilon, 1], \;\; \forall\, t \in [t_n, \infty), \\
U_n(t) \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon], \;\; \forall\, t \in [s_n, t_n], \\
U_n(s_n) = -1+\varepsilon \quad e \quad U_n(t_n) = 1-\varepsilon, \\
(t_n - s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitada em } \mathbb{R}.
\end{gathered}
$$

Prova. Como $B = \inf\{J(x) \mid x \in W\}$, existe $(u_n) \subset W$ uma sequência minimizante para J, isto é,

$$J(u_n) \to B, \;\text{ quando } n \to \infty. \tag{2.4}$$

A priori, u_n pode assumir qualquer valor real, porém é possível obtermos uma nova função $v_n \in W$ que ainda é minimizante e, além disso, satisfaz

$$-1 \leq v_n(t) \leq 1, \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Isso pode ser feito da seguinte maneira: caso exista t com $u_n(t) > 1$, consideramos $v_n(t) = 1$; caso $u_n(t) < -1$, colocamos $v_n(t) = -1$; nos pontos onde $-1 \leq u_n(t) \leq 1$, não fazemos nenhuma alteração na u_n. Formalmente, escrevemos

$$v_n(t) = \max\{-1, \min\{u_n(t), 1\}\}.$$

Note que $(v_n) \subset W$ e que

$$-1 \leq v_n(t) \leq 1, \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Como $V(-1) = V(1) = 0$, então

$$J(v_n) \leq J(u_n), \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

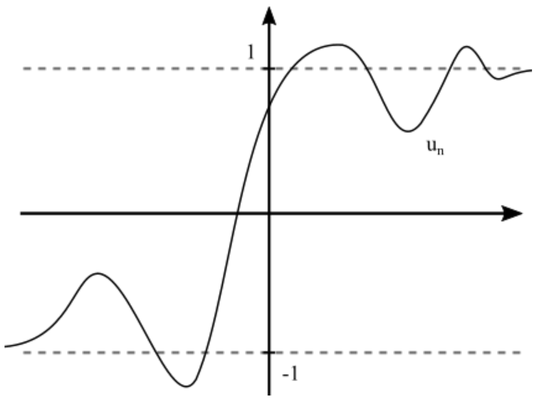

Figura 2.1: Gráfico de u_n

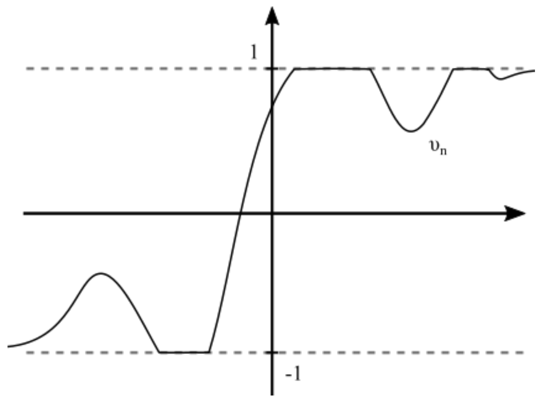

Figura 2.2: Gráfico de v_n

Assim, por (2.4), temos $\lim\limits_{n\to\infty} J(v_n) = B$. Portanto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a própria sequência (u_n) satisfaz

$$-1 \leq u_n(t) \leq 1, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Considerando $\varepsilon \in (0,1)$, é possível encontrarmos (pela própria geometria da u_n, já que é contínua e $\lim\limits_{t\to-\infty} u_n(t) = -1$ e $\lim\limits_{t\to\infty} u_n(t) = 1$) um intervalo $[s_n, t_n]$ tal que $u_n(s_n) = -1+\varepsilon$, $u_n(t_n) = 1-\varepsilon$ e

$$-1+\varepsilon \leq u_n(t) \leq 1-\varepsilon, \ \ \forall\, t \in [s_n, t_n].$$

Caso u_n tome valores maiores do que $-1+\varepsilon$ em $(-\infty, s_n]$, então escolhamos $s_n' < s_n$ de tal forma que $u_n(s_n') = -1+\varepsilon$ e $-1 \leq u_n(t) \leq -1+\varepsilon$ para todo $t \in (-\infty, s_n']$. E caso u_n tome valores menores do que $1-\varepsilon$ em $[t_n, \infty)$, escolhamos $t_n' > t_n$ tal que $u_n(t_n') = 1-\varepsilon$ e $1-\varepsilon \leq u_n(t) \leq 1$ para todo $t \in [t_n', \infty)$. Na verdade, podemos escolher $s_n' = \min\{s \in \mathbb{R} \mid u_n(s) = -1+\varepsilon\}$ e $t_n' = \max\{t \in \mathbb{R} \mid u_n(t) = 1-\varepsilon\}$. Com as escolhas de s_n' e t_n', definimos uma nova função U_n dada por:

$$U_n(t) = \begin{cases} u_n(t-(s_n - s_n')) & , \text{ se } t \leq s_n \\ u_n(t) & , \text{ se } s_n \leq t \leq t_n \\ u_n(t+(t_n' - t_n)) & , \text{ se } t \geq t_n \end{cases}.$$

Perceba que $(U_n) \subset W$ e que o gráfico de U_n é, na verdade, o próprio gráfico da função u_n, porém descartando as partes do gráfico da u_n nos intervalos $[s_n', s_n]$ e $[t_n, t_n']$ (vide Figuras 2.3 e 2.4).

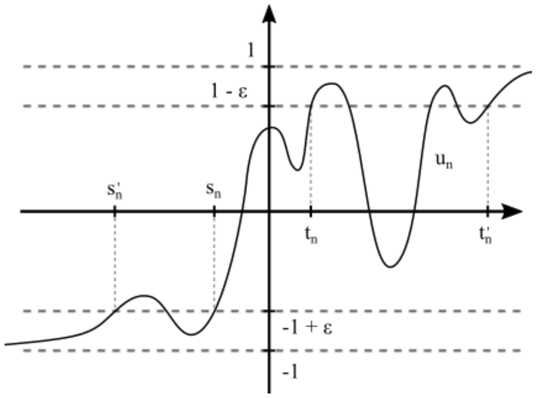

Figura 2.3: Gráfico de u_n

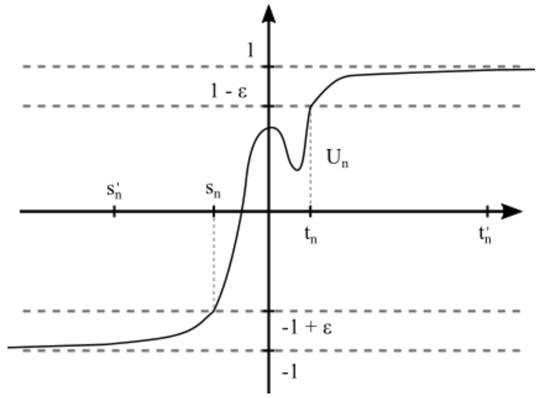

Figura 2.4: Gráfico de U_n

Dessa forma, pelas mudanças de variáveis $\xi = t - (s_n - s'_n)$ e $\eta = t + (t'_n - t_n)$ obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{s_n} \left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(t)^2 + V(U_n(t))\right) dt &= \int_{-\infty}^{s'_n} \left(\frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2 + V(u_n(t))\right) dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{s_n} \left(\frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2 + V(u_n(t))\right) dt\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(t)^2 + V(U_n(t))\right) dt &= \int_{t'_n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2 + V(u_n(t))\right) dt \\ &\leq \int_{t_n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2 + V(u_n(t))\right) dt.\end{aligned}$$

Logo,

$$J(U_n) \leq J(u_n), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

donde, por (2.4), concluímos que

$$J(U_n) \to B, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Ou seja, acabamos de mostrar que (U_n) é de fato uma sequência minimizante para J em W.

Por fim, iremos provar que $(t_n - s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Ora, temos

$$\left(\min_{z \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} V(z)\right) > 0$$

e assim

$$\begin{aligned}
J(U_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(t)^2 + V(U_n(t))\right) dt \\
&\geq \int_{-\infty}^{\infty} V(U_n(t))\, dt \\
&\geq \int_{s_n}^{t_n} V(U_n(t))\, dt \\
&\geq \left(\min_{z\in[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]} V(z)\right)(t_n - s_n), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

garante que $(t_n - s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, uma vez que $(J(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e portanto limitada. $\blacksquare$

Provemos agora a existência de solução heteroclínica conectando os equilíbrios -1 e 1 para o problema (2.1)-(2.2):

Teorema 2.1 *Considere V satisfazendo às condições $(V_1) - (V_4)$. Então o problema (2.1)-(2.2) tem uma solução $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$. Além disso, $U(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova. Consideremos V com as modificações tratadas no Capítulo 1, e portanto satisfazendo às condições $(V_1) - (V_8)$. Sendo $\varepsilon \in (0, 1)$, tomemos $(U_n) \subset W$, (s_n), $(t_n) \subset \mathbb{R}$ e s'_n e t'_n dados pelo Lema 2.1, isto é,

$$J(U_n) \to B \text{ quando } n \to \infty,$$

$$U_n(t) \in [-1, -1+\varepsilon], \ \ \forall\, t \in (-\infty, s_n],$$

$$U_n(t) \in [1-\varepsilon, 1], \ \ \forall\, t \in [t_n, \infty),$$

$$U_n(t) \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon], \ \ \forall\, t \in [s_n, t_n],$$

$$U_n(s_n) = -1+\varepsilon \quad \text{e} \quad U_n(t_n) = 1-\varepsilon,$$

$$(t_n - s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitada em } \mathbb{R}.$$

Colocando $A = \sup_{n\in\mathbb{N}} J(U_n)$, teremos $J(U_n) \leq A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim pela Observação 1.1 devem existir subsequência de (U_n), ainda denotada por (U_n), e uma função $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que para todo $T > 0$,

$$\begin{array}{l} U_n \to U \text{ uniformemente em } [-T, T] \ \text{ e} \\ U_n \rightharpoonup U \text{ em } H^1(-T, T) \end{array} . \tag{2.5}$$

Perceba que $J(U) \leq B$. De fato, para cada $T > 0$, segue da convergência uniforme em (2.5) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-T}^{T} V(U_n(t))\, dt = \int_{-T}^{T} V(U(t))\, dt. \tag{2.6}$$

Por outro lado, da convergência fraca $U_n \rightharpoonup U$ em $H^1(-T,T)$, tem-se $\dot{U}_n \rightharpoonup \dot{U}$ em $L^2(-T,T)$ e com isso $\|\dot{U}\|_{L^2(-T,T)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\dot{U}_n\|_{L^2(-T,T)}$, donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \dot{U}(t)^2\, dt &\leq \frac{1}{2}\left[\liminf_{n\to\infty}\left(\int_{-T}^{T} \dot{U}_n(t)^2\, dt\right)^{1/2}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}\left[\left(\int_{-T}^{T} \dot{U}_n(t)^2\, dt\right)^{1/2}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}\int_{-T}^{T} \dot{U}_n(t)^2\, dt. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Assim, de (2.6) e (2.7), concluímos

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T}\left(\frac{1}{2}\dot{U}(t)^2 + V(U(t))\right) dt &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(t)^2 + V(U_n(t))\right) dt \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} J(U_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} J(U_n) \\ &= B. \end{aligned}$$

Portanto, tomando o limite quando $T \to \infty$, temos

$$J(U) \leq B. \tag{2.8}$$

Note agora que pela invariância por translação do funcional J (processo descrito em (2.3)), podemos escolher sempre $s_n = 0$. Com efeito, pois poderíamos definir a função w_n dada por $w_n(t) = U_n(t + s_n)$ e assim $w_n(0) = U_n(s_n) = -1 + \varepsilon$ e $w_n(t_n - s_n) = U_n(t_n - s_n + s_n) = U_n(t_n) = 1 - \varepsilon$. Além disso, $J(w_n) = J(U_n)$. Escolheríamos então as novas sequências $\hat{s}_n = 0$ e $\hat{t}_n = t_n - s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com a escolha, para todo $n \in \mathbb{N}$, de $s_n = 0$, garantimos que a sequência (s_n) é limitada. Sendo $(t_n - s_n)$ também limitada, obtemos (t_n) limitada. Com isso, passando a uma subsequência de (t_n) se necessário, existe $\bar{t} \geq 0$ tal que $t_n \to \bar{t}$, quando $n \to \infty$. Então, pela convergência uniforme em (2.5), obtemos

$$U(t) \in [-1, -1+\varepsilon], \text{ se } t \in (-\infty, 0] \quad \text{e} \quad U(t) \in [1-\varepsilon, 1], \text{ se } t \in [\bar{t}, \infty). \tag{2.9}$$

Veja que de (2.9) devemos ter $\bar{t} > 0$, pois caso contrário ocorreria $-1+\varepsilon = U(0) = 1-\varepsilon$, o que só vale se $\varepsilon = 1$, uma contradição com o fato de $\varepsilon \in (0, 1)$. (Poderíamos também ter argumentado que $\bar{t} = 0$ contraria a continuidade de U.)

Provemos que $U \in W$, ou seja, que vale $U + 1 \in H^1(-\infty, 0)$ e $U - 1 \in H^1(0, \infty)$. Ora, por (2.8), segue que $J(U) < \infty$. Portanto, combinando o Lema 1.2 (p. 24) com as expressões em (2.9) obtemos

$$U(t) \to -1, \quad \text{quando } t \to -\infty \quad \text{e} \quad U(t) \to 1, \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Ainda do Lema 1.2, temos

$$U + 1 \in H^1(-\infty, 0) \quad \text{e} \quad U - 1 \in H^1(0, \infty)$$

e assim $U \in W$. Logo, $J(U) = B$, donde pelo Lema 1.1 (p. 21) garantimos que U satisfaz (2.1)-(2.2) e $U \in C^2(\mathbb{R})$, com $U(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar. ■

Finalizamos assim o tratamento para quando a função a for identicamente 1, mas observe que para $a(t) = l > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ todos os procedimentos são exatamente análogos. Observe ainda que este é, naturalmente, o caso mais simples a se pensar com o intuito de obtermos uma possível solução para o problema. A seguir abordaremos a situação com a periódica, e que ao ser resolvido, poderíamos utilizá-lo para obtermos a solução para o problema constante. No entanto, queremos destacar os métodos utilizados e analisarmos cada situação separadamente, percebendo a peculiaridade de cada uma.

Passemos a resolver então o problema quando a função a pertencer à classe 2, ou seja, iremos supor a uma função periódica, digamos τ-periódica. Consideraremos ainda $0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos com isso o problema escrito na sua forma genérica:

$$\ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)), \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty. \tag{2.11}$$

O mesmo diremos para o funcional J que será escrito como

$$J(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt.$$

Sob esta hipótese de a ser uma função periódica faremos algumas mudanças consideráveis na demonstração apresentada para o caso constante. Note inicialmente que o funcional associado J não é mais invariante por translação, e foi este o fato que nos possibilitou, no primeiro problema, escolhermos sempre $s_n = 0$. Porém, ainda será possível limitarmos (s_n): pela periodicidade de a, mostraremos que é possível tomarmos $s_n \in [0, \tau]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como no resultado anterior, teremos de lidar com sequências minimizantes e, se necessário, modificá-las a fim de obtermos novas sequências minimizantes mas que 'cumpram' este papel com mais eficiência.

O próximo lema estabelecerá, sob certas condições na geometria de uma função em W, uma limitação inferior (por um valor maior do que zero) para o funcional J. Na verdade, conseguiremos essa limitação para uma restrição do funcional à determinados intervalos. De agora em diante faremos uso da notação $J_{[t_1,t_2]}$ para representarmos

$$J_{[t_1,t_2]}(x) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt,$$

onde $t_1 \leq t_2$ podem assumir quaisquer valores em $\mathbb{R}$.

Lema 2.2 *Sejam $\varepsilon \in (0,1)$ e*

$$\beta_\varepsilon = \min \left\{ V(z) \ \mid \ 1 - \varepsilon \leq z \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad ou \quad -1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq z \leq -1 + \varepsilon \right\}.$$

Se $x \in W$ cumpre a propriedade de que existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, com $t_1 < t_2$, tais que $x(t_1) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ e $x(t_2) = 1 - \varepsilon$ (ou $x(t_1) = -1 + \varepsilon$ e $x(t_2) = -1 + \frac{\varepsilon}{2}$), então

$$J(x) \geq J_{[t_1,t_2]}(x) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(t)V(x(t)) \right) dt \geq \frac{\varepsilon\sqrt{a_0\,\beta_\varepsilon}}{2\sqrt{2}}.$$

Prova. Consideremos inicialmente que $1 - \varepsilon \leq x(t) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in [t_1, t_2]$ (ou $-1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq x(t) \leq -1 + \varepsilon$ para todo $t \in [t_1, t_2]$). Daí,

$$\begin{aligned} J_{[t_1,t_2]}(x) &\geq \int_{t_1}^{t_2} a(t)V(x(t))\,dt \\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} a_0 V(x(t))\,dt \\ &\geq a_0\beta_\varepsilon(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(t_2 - t_1) \leq \frac{J_{[t_1,t_2]}(x)}{a_0\beta_\varepsilon}. \tag{2.12}$$

Como

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^2\,dt \leq 2J_{[t_1,t_2]}(x),$$

segue da desigualdade de Hölder e de (2.12) que

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} &= |x(t_2) - x(t_1)| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)\,dt \right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t)|\,dt \\
&\leq (t_2 - t_1)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^2\,dt \right)^{1/2} \\
&\leq (t_2 - t_1)^{1/2} \left[2\, J_{[t_1,t_2]}(x)\right]^{1/2} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}\, J_{[t_1,t_2]}(x)}{\sqrt{a_0 \beta_\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Assim

$$J(x) \geq J_{[t_1,t_2]}(x) \geq \frac{\varepsilon \sqrt{a_0 \beta_\varepsilon}}{2\sqrt{2}},$$

provando o lema para essa primeira condição.

Mas caso existam $r, s \in [t_1, t_2]$ tais que $x(r) > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $x(s) < 1 - \varepsilon$, então escolhemos $t_3, t_4 \in [t_1, t_2]$ satisfazendo $x(t_3) = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $x(t_4) = 1 - \varepsilon$ e $1 - \varepsilon \leq x(t) \leq 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in [t_3, t_4]$. Logo, pela primeira parte já demonstrada, obtemos

$$J_{[t_3,t_4]}(x) \geq \frac{\varepsilon \sqrt{a_0 \beta_\varepsilon}}{2\sqrt{2}},$$

e notando que $J_{[t_1,t_2]}(x) \geq J_{[t_3,t_4]}(x)$, concluímos

$$J(x) \geq J_{[t_1,t_2]}(x) \geq \frac{\varepsilon \sqrt{a_0 \beta_\varepsilon}}{2\sqrt{2}},$$

como queríamos demonstrar. ■

Usaremos os dois lemas seguintes para obtermos modificações (caso seja necessário) de sequências minimizantes para o funcional J. Vale ressaltar que a modificação será completamente diferente da apresentada na primeira parte do capítulo e que a não invariância por translação (a menos de translações específicas) de J é o ponto chave para essas dificuldades.

Lema 2.3 *Sejam* $\varepsilon \in (0,1)$ *e*

$$W_{\bar{t},1-\varepsilon} = \left\{u \in H^1_{loc}(\bar{t},\infty) \ \mid \ u(\bar{t}) = 1-\varepsilon \ \ e \ \ u-1 \in H^1(\bar{t},\infty)\right\}.$$

Então, considerando

$$J_{[\bar{t},\infty)}(u) = \int_{\bar{t}}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{u}(t)^2 + a(t)V(u(t))\right) dt,$$

existe $v \in W_{\bar{t},1-\varepsilon}$ *tal que* $1-\varepsilon \leq v(t) \leq 1$ *para todo* $t \geq \bar{t}$ *e*

$$J_{[\bar{t},\infty)}(v) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + a_1\left(\max_{z\in[1-\varepsilon,1]} V(z)\right).$$

Prova. Basta considerarmos

$$v(t) = \left\{\begin{array}{cl} 1-\varepsilon+\varepsilon(t-\bar{t}) & , \text{se } \bar{t} \leq t \leq \bar{t}+1 \\ 1 & , \text{se } t \geq \bar{t}+1 \end{array}\right. .$$

Note que, na verdade, v é uma função poligonal composta por um segmento de reta de inclinação ε para valores $\bar{t} \leq t \leq \bar{t}+1$ e pela função identicamente 1 para valores $t \geq \bar{t}+1$. ■

Lema 2.4 *Sejam* $\varepsilon \in (0,1)$ *e*

$$W_{\bar{t},-1+\varepsilon} = \left\{u \in H^1_{loc}(-\infty,\bar{t}) \ \mid \ u(\bar{t}) = -1+\varepsilon \ \ e \ \ H^1(-\infty,\bar{t})\right\}.$$

Então, considerando

$$J_{(-\infty,\bar{t}]}(u) = \int_{-\infty}^{\bar{t}} \left(\frac{1}{2}\dot{u}(t)^2 + a(t)V(u(t))\right) dt,$$

existe $v \in W_{\bar{t},-1+\varepsilon}$ *tal que* $-1 \leq v(t) \leq -1+\varepsilon$ *para todo* $t \leq \bar{t}$ *e*

$$J_{(-\infty,\bar{t}]}(v) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + a_1\left(\max_{z\in[-1,-1+\varepsilon]} V(z)\right).$$

Prova. Basta considerarmos

$$v(t) = \left\{\begin{array}{cl} -1+\varepsilon+\varepsilon(t-\bar{t}) & , \text{se } \bar{t}-1 \leq t \leq \bar{t} \\ -1 & , \text{se } t \leq \bar{t}-1 \end{array}\right. .$$

■

Demonstraremos nesse momento que para funções periódicas (ou seja, a pertencente à classe 2 de funções) existe solução heteroclínica para o problema (2.10)-(2.11).

Em linhas gerais, a demonstração segue os mesmos passos utilizados na prova do teorema (2.1), porém a modificação na sequência minimizante difere bastante da que foi feita no primeiro caso. Mais uma vez a principal referência para esse teorema é [5]. Faremos uso da seguinte notação: para cada $\varepsilon \in (0,1)$, considere

$$\mu_\varepsilon = \left(\max_{z \in [-1,-1+\varepsilon] \cup [1-\varepsilon,1]} V(z) \right).$$

Teorema 2.2 *Considere V satisfazendo às condições $(V_1) - (V_4)$ e a uma função $\tau-$periódica satisfazendo $a(t) \geq a_0 > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, o problema (2.10)-(2.11) tem uma solução $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$. Além disso, $U(t) \in (-1,1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova. Como no Teorema 2.1, considere a função V modificada e satisfazendo às condições $(V_1) - (V_8)$. Fixando $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$, escolha $\varepsilon > 0$ de tal forma que $\varepsilon < \dfrac{\bar{\varepsilon}}{2}$ e

$$\frac{\varepsilon^2}{2} + a_1 \mu_\varepsilon < \frac{\bar{\varepsilon}\sqrt{a_0\, \beta_{\bar{\varepsilon}}}}{2\sqrt{2}}. \tag{2.13}$$

Seja $(u_n) \subset W$ uma sequência minimizante para o funcional J. Como no Lema 2.1 (p. 32), podemos considerar $-1 \leq u_n(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, é possível encontrarmos sequências (s_n), $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tais que $u_n(s_n) = -1 + \varepsilon$, $u_n(t_n) = 1 - \varepsilon$ e

$$-1 + \varepsilon \leq u_n(t) \leq 1 - \varepsilon, \;\; \forall\, t \in [s_n, t_n].$$

Caso exista $t > t_n$ com $u_n(t) < 1 - \bar{\varepsilon}$, então também devem existir $r_1, r_2 > t_n$, com $r_1 < r_2$, e tais que

$$u_n(r_1) = 1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \quad \text{e} \quad u_n(r_2) = 1 - \bar{\varepsilon}.$$

Segue então do Lema 2.2 que

$$J_{[t_n,\infty)}(u_n) \geq J_{[t_1,t_2]}(u_n) \geq \frac{\bar{\varepsilon}\sqrt{a_0\, \beta_{\bar{\varepsilon}}}}{2\sqrt{2}}. \tag{2.14}$$

Note que do Lema 2.3 deve existir $v_n \in W_{t_n,1-\varepsilon}$ tal que $1 - \varepsilon \leq v_n(t) \leq 1$ para todo $t \geq t_n$ e

$$J_{[t_n,\infty)}(v_n) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + a_1 \left(\max_{z \in [1-\varepsilon,1]} V(z) \right) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + a_1 \mu_\varepsilon.$$

Então, por (2.13) e (2.14), concluímos

$$\begin{aligned} J_{[t_n,\infty)}(v_n) &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + a_1 \mu_\varepsilon \\ &< \frac{\bar{\varepsilon}\sqrt{a_0\, \beta_{\bar{\varepsilon}}}}{2\sqrt{2}} \\ &\leq J_{[t_n,\infty)}(u_n). \end{aligned} \tag{2.15}$$

De maneira análoga, caso também exista $t < s_n$ com $u_n(t) > -1 + \bar{\varepsilon}$, segue do Lema 2.4 que é possível encontrarmos $w_n \in W_{s_n, -1+\varepsilon}$ com $-1 \leq w_n(t) \leq -1 + \varepsilon$ para todo $t \leq s_n$ satisfazendo

$$J_{(-\infty, s_n]}(w_n) \leq J_{(-\infty, s_n]}(u_n). \tag{2.16}$$

Sob tais hipóteses, definimos a função U_n (vide Figuras 2.5 e 2.6) dada por

$$U_n(t) = \begin{cases} w_n(t) & \text{, se } \ t \leq s_n \\ u_n(t) & \text{, se } \ s_n \leq t \leq t_n \\ v_n(t) & \text{, se } \ t \geq t_n \end{cases}.$$

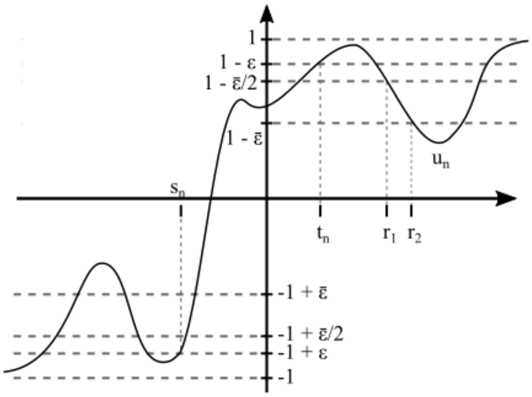

Figura 2.5: Gráfico de u_n

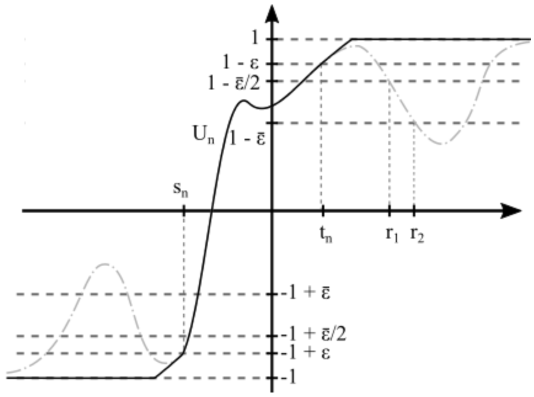

Figura 2.6: Gráfico de U_n

Assim, $U_n \in W$. Ademais, de (2.15) e (2.16), temos

$$\begin{aligned} J(U_n) &= J_{(-\infty, s_n]}(U_n) + J_{[s_n, t_n]}(U_n) + J_{[t_n, \infty)}(U_n) \\ &= J_{(-\infty, s_n]}(w_n) + J_{[s_n, t_n]}(u_n) + J_{[t_n, \infty)}(v_n) \\ &\leq J_{(-\infty, s_n]}(u_n) + J_{[s_n, t_n]}(u_n) + J_{[t_n, \infty)}(u_n) \\ &= J(u_n), \end{aligned}$$

e portanto (U_n) é uma sequência minimizante para o funcional J. Logo,

$$J(U_n) \to B \text{ quando } n \to \infty,$$

$$U_n(t) \in [-1, -1 + \varepsilon], \ \ \forall\, t \in (-\infty, s_n],$$

$$U_n(t) \in [1 - \varepsilon, 1], \ \ \forall\, t \in [t_n, \infty),$$

$$U_n(t) \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon], \ \ \forall\, t \in [s_n, t_n],$$

$$U_n(s_n) = -1 + \varepsilon \quad \text{e} \quad U_n(t_n) = 1 - \varepsilon,$$

$$(t_n - s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada em } \mathbb{R}.$$

Analogamente ao procedimento utilizado no Teorema 2.1, existem uma subsequência de (U_n), ainda denotada por (U_n), e uma função $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que para todo $T > 0$,

$$\begin{array}{l} U_n \to U \text{ uniformemente em } [-T, T] \\ U_n \rightharpoonup U \text{ em } H^1(-T, T) \end{array},$$

e

$$J(U) \leq B.$$

Como a é uma função $\tau-$periódica, é possível escolhermos $s_n \in [0, \tau]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k\tau \leq s_n \leq (k+1)\tau$, ou seja, $0 \leq s_n - k\tau \leq \tau$. Considere a sequência $\hat{s}_n = s_n - k\tau$ e a função $x_n(t) = U_n(t + k\tau)$. Então, $x_n(\hat{s}_n) = U_n(s_n) = -1 + \varepsilon$, com $0 \leq \hat{s}_n \leq \tau$. Ademais, com a mudança de variáveis $\xi = t + k\tau$, obtemos

$$\begin{aligned} J(x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}_n(t)^2 + a(t)V(x_n(t)) \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(t + k\tau)^2 + a(t)V(U_n(t + k\tau)) \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(\xi)^2 + a(\xi - k\tau)V(U_n(\xi)) \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(\xi)^2 + a(\xi)V(U_n(\xi)) \right) d\xi \\ &= J(U_n), \end{aligned}$$

mostrando que o funcional J é invariante por essa translação específica e que podemos sempre tomar $s_n \in [0, \tau]$.

Com isso, temos que (s_n) é uma sequência limitada e, consequentemente, (t_n) também é uma sequência limitada. Então, passando a subsequências de (s_n) e (t_n) se necessário, existem $\bar{s}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$s_n \to \bar{s} \quad \text{e} \quad t_n \to \bar{t}.$$

De agora em diante, a demonstração segue de maneira inteiramente análoga à do Teorema 2.1 para o caso constante.

Por outro lado, caso não existam $t > t_n$ com $u_n(t) < 1 - \bar{\varepsilon}$ e $s < s_n$ com $u_n(s) > -1 + \bar{\varepsilon}$, então não precisaremos fazer nenhuma modificação em u_n, uma vez que garantimos

$$u_n(t) \in [-1, -1 + \bar{\varepsilon}], \ \ \forall \, t \leq s_n \tag{2.17}$$

e

$$u_n(t) \in [1-\bar{\varepsilon}, 1], \;\; \forall\, t \geq t_n, \tag{2.18}$$

ou seja, que u_n permanece numa vizinhança de 1 a partir de t_n e numa vizinhança de -1 para valores menores do que s_n. Se ocorrer apenas um dos casos (2.17) ou (2.18), então modificamos a função u_n por w_n ou v_n, respectivamente, nos intervalos $(-\infty, s_n]$ ou $[t_n, \infty)$. Daí, a demonstração segue análoga à que foi feita anteriormente. ■

Assim finalizamos o segundo capítulo e com a garantia de existência de soluções heteroclínicas conectando os equilíbrios -1 e 1 para duas situações. Posteriormente trataremos das classes de funções assintoticamente periódicas e das coercivas, a primeira tendo grande influência do resultado já demonstrado para periodicidade e a segunda fugindo das nossas hipóteses inicias nas quais a era sempre limitada.

Capítulo 3

Existência de Solução para os casos Assintoticamente Periódico e Coercivo

Este capítulo será dedicado a garantirmos a existência de solução heteroclínica para o problema

$$\ddot{x}(t) = a(t)V'(x(t)), \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty, \tag{3.2}$$

nos casos em que a função a pertença a uma das classes 3 ou 4, ou seja, a é uma função assintoticamente periódica ou a é coerciva, respectivamente. O primeiro comentário é que novamente teremos de lidar com sequências minimizantes e, dependendo da necessidade, modificá-las. Neste processo ganhamos sequências (s_n), $(t_n) \subset \mathbb{R}$ e mais uma vez devemos mostrar que estas são limitadas. No Capítulo 2, a saída encontrada para limitarmos (s_n) estava na periodicidade da função a (note que quando ela era identicamente constante, particularmente era periódica). Porém, nos casos que serão tratados deste momento em diante não será mais possível limitarmos (s_n) tão imediatamente. Vale lembrar que a limitação de tal sequência é peça fundamental para a demonstração dos resultados principais garantindo existência de solução heteroclínica. Então, mais uma vez, este será um ponto importante de tratarmos nas demonstrações, e que, devido a peculiaridade de cada situação, dedicaremos um esforço considerável. Vale lembrar que estaremos interessados também nos métodos utilizados para obtermos a nova sequência minimizante, além, obviamente, das propriedades cumpridas por ela e que estarão descritas no Lema 3.1.

Um outro ponto muito importante e que devemos ter bastante atenção é quando formos tratar da coercividade da função a. A priori não será mais possível utilizarmos os resultados do Capítulo 1, pois naquele momento eles foram apresentados sob a hipótese de a ser limitada. Mas teremos como contornar esse problema, e a saída será a introdução de imersões contínuas convenientes nos espaços $H^1(0,\infty)$ e $H^1(-\infty,0)$ que nos ajudam, de certa forma, a ganhar essa limitação desejada da função a. Estes resultados podem ser encontrados no artigo [1].

Começaremos então trabalhando com as sequências minimizantes. Observe que o próximo lema é basicamente o mesmo apresentado no primeiro capítulo (Lema 2.1), entretanto, o método que utilizaremos aqui é diferente do considerado anteriormente, e por isso a necessidade em demonstrá-lo.

Lema 3.1 *Seja $\varepsilon_0 \in (0,1)$ dado em (1.10) (p. 15). Então, existem sequências $(U_n) \subset W$, $(s_n),(t_n) \subset \mathbb{R}$, com $s_n < t_n$, tais que*

$$\begin{gathered}
J(U_n) \to B, \text{ quando } n \to \infty, \\
U_n(t) \in [-1, -1+\varepsilon_0], \ \forall\, t \in (-\infty, s_n], \\
U_n(t) \in [1-\varepsilon_0, 1], \ \forall\, t \in [t_n, \infty), \\
U_n(t) \in [-1+\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0], \ \forall\, t \in [s_n, t_n], \\
U_n(s_n) = -1+\varepsilon_0 \quad e \quad U_n(t_n) = 1-\varepsilon_0, \\
(t_n - s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitada em } \mathbb{R}.
\end{gathered}$$

Prova. De fato, sendo $(u_n) \subset W$ uma sequência minimizante para J, isto é,

$$J(u_n) \to B, \ \text{ quando } n \to \infty,$$

sabemos que é possível considerarmos $-1 \leq u_n(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e encontrarmos $s_n < t_n$ tais que $u_n(s_n) = -1+\varepsilon_0$, $u_n(t_n) = 1-\varepsilon_0$ e

$$-1+\varepsilon_0 \leq u_n(t) \leq 1-\varepsilon_0, \ \forall\, t \in [s_n, t_n],$$

com $(t_n - s_n)$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Consideremos inicialmente que não existem $r_1 > t_n$ e $r_2 < s_n$ de forma que $u_n(r_1) < -1+\varepsilon_0$ e $u_n(r_2) > 1-\varepsilon_0$. Então modificamos u_n da seguinte maneira: definimos uma função U_n de tal forma que se existe $t > t_n$

com $u_n(t) < 1-\varepsilon_0$, colocamos $U_n(t) = 1-\varepsilon_0$; se existe $t < s_n$ com $u_n(t) > -1+\varepsilon_0$, então $U_n(t) = -1+\varepsilon_0$; em todos os demais pontos permanecemos com a $u_n(t)$. Logo,

$$U_n(t) = \begin{cases} \min\{-1+\varepsilon_0, u_n(t)\} & , \text{se } t \leq s_n \\ u_n(t) & , \text{se } s_n \leq t \leq t_n \\ \max\{1-\varepsilon_0, u_n(t)\} & , \text{se } t \geq t_n \end{cases}.$$

Observe que $(U_n) \subset W$. Além disso, se $t \geq t_n$, então $U_n(t) \in [1-\varepsilon_0, 1]$; se $t \leq s_n$, segue $U_n(t) \in [-1, -1+\varepsilon_0]$. Vide Figuras 3.1 e 3.2.

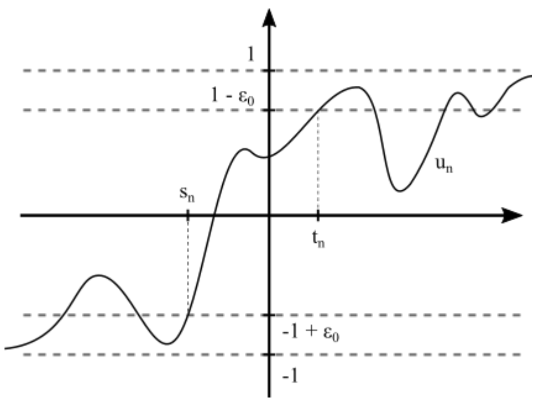

Figura 3.1: Gráfico de u_n

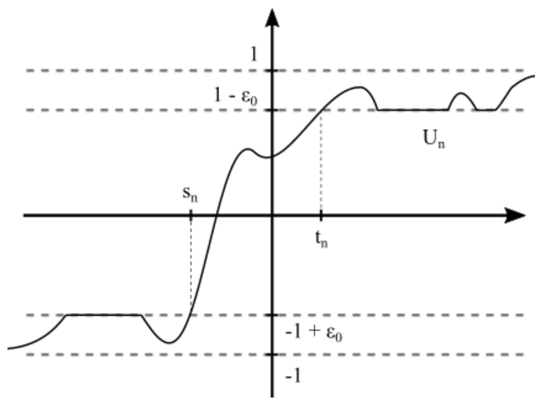

Figura 3.2: Gráfico de U_n

Provemos que (U_n) é ainda uma sequência minimizante para J. Ora, pela hipótese colocada inicialmente temos, para $t \geq t_n$, que $u_n(t) \in [-1+\varepsilon_0, 1]$. Caso $u_n(t) \in [-1+\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]$, obtemos $U_n(t) = 1-\varepsilon_0$ e então por (1.13) (p. 15)

$$\begin{aligned} V(U_n(t)) &= V(1-\varepsilon_0) \\ &\leq V(u_n(t)). \end{aligned}$$

Caso $u_n(t) \in [1-\varepsilon_0, 1]$, obtemos $U_n(t) = u_n(t)$ e nada a fazer. Daí, em qualquer dos casos

$$\int_{t_n}^{\infty} a(t)V(U_n(t))\,dt \leq \int_{t_n}^{\infty} a(t)V(u_n(t))\,dt.$$

De maneira análoga segue

$$\int_{-\infty}^{s_n} a(t)V(U_n(t))\,dt \leq \int_{-\infty}^{s_n} a(t)V(u_n(t))\,dt$$

e portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)V(U_n(t))\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} a(t)V(u_n(t))\,dt \tag{3.3}$$

já que $U_n(t) = u_n(t)$ para todo $t \in [s_n, t_n]$. Por outro lado, nos intervalos nos quais $U_n \equiv -1 + \varepsilon_0$ ou $U_n \equiv 1 - \varepsilon_0$ teremos $\dot{U}_n \equiv 0$, donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\dot{U}_n(t)^2\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2\, dt. \tag{3.4}$$

Assim, de (3.3) e (3.4) concluímos

$$J(U_n) \leq J(u_n), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

comprovando que (U_n) é uma sequência minimizante para o funcional J. Ademais, U_n cumpre todas as demais propriedades pedidas no lema.

Supondo que existem valores $r_1 > t_n$ e $r_2 < s_n$ tais que $u_n(r_1) < -1+\varepsilon_0$ e $u_n(r_2) > 1-\varepsilon_0$ usamos a modificação como feita no Teorema 2.2 para o caso periódico. ■

A partir de agora trataremos o problema para funções pertencentes a classe 3. Então, sendo a uma função assintoticamente periódica, existe uma função periódica contínua $a_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumprindo

$$|a(t) - a_P(t)| \to 0, \quad \text{quando } |t| \to \infty$$

e

$$0 < a_0 = \inf_{t \in \mathbb{R}} a(t) \leq a(t) < a_P(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ora, por a_P ser contínua, sabemos (vide Teorema 2.2) que deve existir solução heteroclínica conectando os equilíbrios -1 e 1 para o problema

$$\ddot{x}(t) = a_P(t)V'(x(t)), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty. \tag{3.6}$$

Denotando esta solução por $w_p \in W$, temos $J_P(w_P) = B_P$, onde $J_P : H^1_{loc}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ é o funcional definido por

$$J_P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a_P(t)V(x(t))\right) dt$$

e

$$B_P = \inf \{J_P(x) \ | \ x \in W\}.$$

Note que $B < B_P$. Com efeito, pois como $a(t) < a_P(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue

$$\begin{aligned} B &\leq J(w_P) \\ &< J_P(w_P) \\ &= B_P. \end{aligned}$$

Note ainda que todos os lemas e observações dos capítulos anteriores são válidos para J_P e B_P.

Garantiremos agora que de fato existe solução heteroclínica conectando equilíbrios -1 e 1 para classes de funções assintoticamente periódicas. Mais uma vez a demonstração seguirá em linhas gerais as já apresentadas, porém limitar a sequência (s_n) será uma tarefa bem mais delicada do que nos primeiros casos.

Teorema 3.1 *Assuma V satisfazendo $(V_1) - (V_4)$. Se a função a é assintoticamente periódica, o problema (3.1)-(3.2) tem uma solução $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$. Ademais, $U(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova. Considere V modificada e satisfazendo $(V_1) - (V_8)$. O nosso objetivo será mostrar que B é atingido em W e assim utilizarmos o Lema 1.1 (p. 21) que garante que pontos que minimizam o funcional J são na verdade soluções heteroclínicas do problema. Mas inicialmente consideremos $w_P \in W$ solução do problema (3.5)-(3.6) com $J_P(w_P) = B_P$. Como $B < B_P$, existe $\delta > 0$ (fixe este número) de modo que

$$B + \delta < B_P. \tag{3.7}$$

Ora, lembrando que $B > 0$ (vide p. 21) e $|a(t) - a_P(t)| \to 0$ quando $|t| \to \infty$, deve existir $M_1 = M_1(\delta) > 0$ cumprindo

$$|t| > M_1 \quad \Rightarrow \quad |a(t) - a_P(t)| < \frac{a_0\, \delta}{4B}. \tag{3.8}$$

Lembrando agora que

$$\lim_{z \to -1^+} V(z) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{z \to 1^-} V(z) = 0,$$

é possível encontrarmos $\gamma^* \in (0, 1)$ tal que

$$z \in [-1, -1 + \gamma^*] \cup [1 - \gamma^*, 1] \quad \Rightarrow \quad V(z) < \frac{\delta}{16 M_1 \|a_P\|_\infty}. \tag{3.9}$$

Note que ε_0 pode ser tomado tão pequeno quanto se queira em (1.10) (p. 15), e então o escolheremos de tal forma que $\varepsilon_0 \leq \gamma^*$. Após isso aplicamos o Lema 3.1 e conseguimos sequências $(U_n) \subset W$, $(s_n), (t_n) \subset \mathbb{R}$, com $s_n < t_n$, e tais que

$$\begin{gathered} J(U_n) \to B \text{ quando } n \to \infty, \\ U_n(t) \in [-1, -1 + \varepsilon_0], \ \ \forall\, t \in (-\infty, s_n], \\ U_n(t) \in [1 - \varepsilon_0, 1], \ \ \forall\, t \in [t_n, \infty), \\ U_n(t) \in [-1 + \varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0], \ \ \forall\, t \in [s_n, t_n], \\ U_n(s_n) = -1 + \varepsilon_0 \ \text{ e } \ U_n(t_n) = 1 - \varepsilon_0, \\ (t_n - s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada em } \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Denotando $A = \sup\limits_n J(U_n)$, teremos $J(U_n) \leq A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e então, como no Teorema 2.1, existem uma subsequência de (U_n), ainda denotada por (U_n), e uma função $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que para cada $T > 0$

$$\begin{array}{l} U_n \to U \text{ uniformemente em } [-T, T] \ \ \text{e} \\ U_n \rightharpoonup U \text{ em } H^1(-T, T) \end{array} . \tag{3.11}$$

Ademais,

$$J(U) \leq B. \tag{3.12}$$

Lembre-se que nos casos constante e periódico foi possível escolhermos (s_n) de sorte que esta fosse uma sequência limitada. No entanto, nesse momento não será mais possível tal escolha e então devemos encontrar outra maneira de contornar a situação e garantirmos a sua limitação.

Afirmação: A sequência (s_n) é limitada em $\mathbb{R}$.

Suponha por contradição que isto não ocorra. Ou seja, deve existir uma subsequência de (s_n), que ainda denotaremos por (s_n), tal que

$$s_n \to \infty \quad \text{ou} \quad s_n \to -\infty, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Ora, caso $s_n \to \infty$, então da convergência uniforme em (3.11) e da segunda sentença em (3.10) segue que $U(t) \in [-1, -1 + \varepsilon_0]$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se por acaso ocorrer $s_n \to -\infty$, então perceba que também vale $t_n \to -\infty$, já que $(t_n - s_n)$ é uma sequência limitada. Logo, da terceira sentença em (3.10) concluímos $U(t) \in [1 - \varepsilon_0, 1]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e podemos resumir tudo em

$$U(t) \in [-1, -1 + \varepsilon_0] \cup [1 - \varepsilon_0, 1], \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Com isso e por (3.9) (lembre-se que $\varepsilon_0 \leq \gamma^*$) tem-se

$$V(U(t)) < \frac{\delta}{16M_1\|a_P\|_\infty}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Note que

$$\begin{aligned}
J(U_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(t)^2 + a(t)V(U_n(t))\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{U}_n(t)^2 + a_P(t)\, V(U_n(t))\right) dt + \int_{-\infty}^{\infty} (a(t) - a_P(t))\, V(U_n(t))\, dt \\
&\geq B_P + \int_{-\infty}^{\infty} (a(t) - a_P(t))\, V(U_n(t))\, dt \\
&= B_P + \int_{|t|\leq M_1} (a(t) - a_P(t))\, V(U_n(t))\, dt + \int_{|t|>M_1} (a(t) - a_P(t))\, V(U_n(t))\, dt.
\end{aligned}$$

Passemos a analisar, separadamente, cada uma das integrais anteriores. Por (3.8), temos

$$\begin{aligned}
\int_{|t|>M_1} |a(t) - a_P(t)|\, V(U_n(t))\, dt &< \int_{|t|>M_1} \frac{a_0\,\delta}{4\,B}\, V(U_n(t))\, dt \\
&\leq \frac{\delta}{4\,B} \int_{|t|>M_1} a(t)V(U_n(t))\, dt \\
&\leq \frac{\delta}{4\,B} J(U_n),
\end{aligned}$$

donde

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{|t|>M_1} |a(t) - a_P(t)|\, V(U_n(t))\, dt \leq \frac{\delta}{4\,B} B = \frac{\delta}{4}.$$

Por outro lado, segue da convergência uniforme em (3.11), da estimativa (3.13) e da hipótese $0 < a(t) < a_P(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\leq M_1} |a(t) - a_P(t)|\, V(U_n(t))\, dt &= \int_{|t|\leq M_1} |a(t) - a_P(t)|\, V(U(t))\, dt \\
&\leq \frac{\delta}{16M_1\|a_P\|_\infty} \int_{|t|\leq M_1} |a(t) - a_P(t)|\, dt \\
&\leq \frac{\delta}{16M_1\|a_P\|_\infty} \int_{|t|\leq M_1} (|a(t)| + |a_P(t)|)\, dt \\
&\leq \frac{\delta}{16M_1\|a_P\|_\infty} \int_{|t|\leq M_1} (|a_P(t)| + |a_P(t)|)\, dt \\
&\leq \frac{\delta}{16M_1\|a_P\|_\infty} \int_{|t|\leq M_1} 2\|a_P\|_\infty\, dt \\
&= \frac{\delta}{4}.
\end{aligned}$$

Concluímos então

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|a(t)-a_P(t)|\,V(U_n(t))\,dt &\le \limsup_{n\to\infty}\int_{|t|\le M_1}|a(t)-a_P(t)|\,V(U_n(t))\,dt+\\ &\quad+\limsup_{n\to\infty}\int_{|t|>M_1}|a(t)-a_P(t)|\,V(U_n(t))\,dt\\ &\le \frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}=\frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Logo, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}|a(t)-a_P(t)|\,V(U_n(t))\,dt \le \frac{\delta}{2}, \quad \text{para } n > n_0.$$

Como $a(t) < a_P(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos $|a(t)-a_P(t)| = -(a(t)-a_P(t))$ e daí

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a(t)-a_P(t))\,V(U_n(t))\,dt \ge -\frac{\delta}{2}, \quad \text{para } n > n_0.$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} J(U_n) &\ge B_P + \int_{-\infty}^{\infty}(a(t)-a_P(t))\,V(U_n(t))\,dt\\ &\ge B_P - \frac{\delta}{2}, \quad \text{para } n > n_0,\end{aligned}$$

e assim, passando ao limite com $n \to \infty$, e lembrando que (U_n) é ainda uma sequência minimizante para J, temos

$$\begin{aligned} B &\ge B_P - \frac{\delta}{2}\\ &> B_P - \delta,\end{aligned}$$

um absurdo, pois já sabemos de (3.7) que $B + \delta < B_P$. Com isso, garantimos que a sequência (s_n) deve ser limitada em $\mathbb{R}$.

Temos então que as sequências (s_n) e $(t_n - s_n)$ são limitadas em $\mathbb{R}$, e daí segue que (t_n) também é limitada. Como consequência, devem existir subsequências de (s_n) e (t_n), que ainda denotaremos por (s_n) e (t_n), e números $\bar{s}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tais que

$$s_n \to \bar{s} \quad \text{e} \quad t_n \to \bar{t}.$$

Pela convergência uniforme $U_n \to U$, garantimos

$$U(t) \in [-1, -1+\varepsilon_0] \;\; \text{se } t \in (-\infty, \bar{s}] \quad \text{e} \quad U(t) \in [1-\varepsilon_0, 1] \;\; \text{se } t \in [\bar{t}, \infty). \tag{3.14}$$

Note que (3.12) implica $J(U) < \infty$. Então, do Lema 1.2 (p. 24) e de (3.14) concluímos

$$U(t) \to -1, \quad \text{quando } t \to -\infty \quad \text{e} \quad U(t) \to 1, \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Além disso, ainda do Lema 1.2, vale

$$U+1 \in H^1(-\infty,0) \quad \text{e} \quad U-1 \in H^1(0,\infty),$$

e portanto

$$U \in W.$$

Com isso, $J(U) \geq B$, implicando $J(U) = B$. Assim, do Lema 1.1 (p. 21) obtemos que $U \in C^2(\mathbb{R})$ e é solução do problema (3.1)-(3.2) com $U(t) \in (-1,1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar. ■

Consideremos nesse momento $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função coerciva, ou seja,

$$0 < \inf_{t\in\mathbb{R}} a(t) = a_0 \quad \text{e} \quad a(t) \to \infty \quad \text{quando } |t| \to \infty. \tag{3.15}$$

Vale ressaltar que não é mais possível usarmos diretamente os resultados do Capítulo 1, pois nossa função a não é mais limitada. Para contornarmos esse problema introduziremos os seguintes conjuntos:

$$H_a^1(\mathbb{R}) = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} a(t)v(t)^2\,dt < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|v\|_{H_a^1(\mathbb{R})} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)^2\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} a(t)v(t)^2\,dt \right)^{1/2} \tag{3.16}$$

e

$$W_a = \left\{ x \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x+1 \in H_a^1(-\infty,0) \;\text{ e }\; x-1 \in H_a^1(0,\infty) \right\},$$

onde

$$H_a^1(-\infty,0) = \left\{ v \in H^1(-\infty,0) \;\middle|\; \int_{-\infty}^{0} a(t)v(t)^2\,dt < \infty \right\}$$

e

$$H_a^1(0,\infty) = \left\{ v \in H^1(0,\infty) \;\middle|\; \int_{0}^{\infty} a(t)v(t)^2\,dt < \infty \right\}.$$

As normas dos espaços $H_a^1(-\infty,0)$ e $H_a^1(0,\infty)$ são definidas como em (3.16), porém considerando-se os intervalos $(-\infty,0]$ e $[0,\infty)$, respectivamente. Pela hipótese (3.15) sabemos que $a_0 > 0$ e isso irá nos garantir que a imersão

$$H_a^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R})$$

é contínua. Com efeito, sendo $m = \min\{1, a_0\}$, teremos para todo $v \in H_a^1(\mathbb{R})$ que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H_a^1(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)^2\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} a(t)v(t)^2\, dt \\
&\geq \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)^2\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_0 v(t)^2\, dt \\
&\geq m\left(\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)^2\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} v(t)^2\, dt\right) \\
&= m\|v\|_{H^1(\mathbb{R})}^2,
\end{aligned}$$

donde

$$\|v\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\|v\|_{H_a^1(\mathbb{R})}, \quad \forall\, v \in H_a^1(\mathbb{R}), \tag{3.17}$$

provando que a imersão $H_a^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R})$ é contínua. Analogamente provamos que as imersões

$$H_a^1(-\infty, 0) \hookrightarrow H^1(-\infty, 0) \quad \text{e} \quad H_a^1(0, \infty) \hookrightarrow H^1(0, \infty)$$

também são contínuas.

Observe que $W_a \subset W$ e que vale

$$J(x) < \infty, \quad \forall\, x \in W_a.$$

Além disso, sendo $x \in W_a$, segue que para quaisquer $v \in H_a^1(\mathbb{R})$ e $h \in \mathbb{R}$ tem-se

$$x + hv \in W_a,$$

e considerando

$$B_a = \inf\{J(x) \mid x \in W_a\} > 0$$

podemos provar, de maneira análoga ao Lema 1.1 (p. 21), que funções x em W_a satisfazendo $J(x) = B_a$ são, na verdade, soluções heteroclínicas do problema proposto com a função a sendo coerciva. Consequentemente teremos soluções em W, já que $W_a \subset W$.

Observe também que a conclusão do Lema 1.2 pode ser modificada para

$$x + 1 \in H_a^1(-\infty, 0) \quad \text{ou} \quad x - 1 \in H_a^1(-\infty, 0)$$

e

$$x + 1 \in H_a^1(0, \infty) \quad \text{ou} \quad x - 1 \in H_a^1(0, \infty),$$

caso $x \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ seja tal que $J(x) < \infty$.

Temos ainda que todos os demais resultados do primeiro capítulo continuam válidos para essa situação, devendo tomarmos apenas o cuidado de substituirmos o espaço H^1 por H^1_a.

Passemos então a demonstração da existência de solução heteroclínica conectando -1 a 1 para o caso coercivo.

Teorema 3.2 *Suponha V satisfazendo $(V_1)-(V_4)$. Se a função a é coerciva, o problema (3.1)-(3.2) tem uma solução $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$. Ademais, $U(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova. Modifiquemos V de modo a cumprir as propriedades $(V_1) - (V_8)$. Agora, pelo Lema 3.1 (p. 46) encontramos uma sequência $(U_n) \subset W_a$ e sequências (s_n), $(t_n) \subset \mathbb{R}$ verificando as seguintes condições:

$$
\begin{gathered}
J(U_n) \to B_a, \quad \text{quando } n \to \infty, \\
U_n(t) \in [-1, -1 + \varepsilon_0], \ \forall\, t \in (-\infty, s_n], \\
U_n(t) \in [1 - \varepsilon_0, 1], \ \forall\, t \in [t_n, \infty), \\
U_n(t) \in [-1 + \varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0], \ \forall\, t \in [s_n, t_n], \\
U_n(s_n) = -1 + \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad U_n(t_n) = 1 - \varepsilon_0, \\
(t_n - s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada em } \mathbb{R}.
\end{gathered}
$$

Sabemos ainda que existem uma subsequência de (U_n), que denotamos pela própria (U_n), e uma função $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que para todo $T > 0$

$$
\begin{array}{l}
U_n \to U \text{ uniformemente em } [-T, T] \quad \text{e} \\
U_n \rightharpoonup U \text{ em } H^1(-T, T)
\end{array}
. \tag{3.18}
$$

Além disso,

$$
J(U) \leq B_a. \tag{3.19}
$$

Afirmamos que a sequência (s_n) mais uma vez é limitada em $\mathbb{R}$. Com efeito, suponha por absurdo que isto não ocorra. Daí, a sequência (s_n) tem subsequência, que ainda denotaremos por (s_n), tal que

$$
s_n \to \infty \quad \text{ou} \quad s_n \to -\infty, \quad \text{quando } n \to \infty.
$$

Supondo $s_n \to \infty$ e lembrando da limitação da sequência $(t_n - s_n)$, garantimos que também ocorre $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Analogamente, se $s_n \to -\infty$ então $t_n \to -\infty$. Com isso, definindo

$$A_n = \min_{t \in [s_n, t_n]} a(t)$$

segue da coercividade da função a que

$$A_n \to \infty \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{3.20}$$

Considere agora o número

$$V_0 = \left(\min_{z \in [-1+\varepsilon_0/2\ ,\ 1-\varepsilon_0/2]} V(z) \right) > 0.$$

Perceba que caso $t \in [s_n, t_n]$ tem-se $U_n(t) \in [-1+\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]$ e assim

$$V(U_n(t)) \geq V_0, \ \ \forall\, t \in [s_n, t_n].$$

Logo,

$$\begin{aligned} J(U_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_n(t)^2 + a(t) V(U_n(t)) \right) dt \\ &\geq \int_{s_n}^{t_n} \left(\frac{1}{2} \dot{U}_n(t)^2 + a(t) V(U_n(t)) \right) dt \\ &\geq \int_{s_n}^{t_n} a(t) V(U_n(t))\, dt \\ &\geq V_0\, A_n\, (t_n - s_n) \end{aligned}$$

e passando ao limite com $n \to \infty$, obtemos da limitação de $(J(U_n))$ e do limite em (3.20) que

$$t_n - s_n \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{3.21}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\int_{s_n}^{t_n} \dot{U}_n(t)^2\, dt \leq 2J(U_n).$$

Como $(U_n) \subset H^1_{loc}(\mathbb{R})$, então pela desigualdade de Hölder segue

$$\begin{aligned} |U_n(t_n) - U_n(s_n)| &\leq \int_{s_n}^{t_n} |\dot{U}_n(t)|\, dt \\ &\leq \sqrt{t_n - s_n} \left(\int_{s_n}^{t_n} \dot{U}_n(t)^2\, dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2(t_n - s_n)}\; J(U_n)^{1/2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, por (3.21) e pela limitação da sequência $(J(U_n))$ concluímos

$$|U_n(t_n) - U_n(s_n)| \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

No entanto, sempre é válido

$$|U_n(t_n) - U_n(s_n)| = |2 - 2\varepsilon_0|$$

que não pode convergir para 0, uma vez que $\varepsilon_0 < 1$. Então temos um absurdo e, portanto, comprovamos que a sequência (s_n) deve ser limitada.

Daí, mais uma vez obtemos que as sequências (s_n) e (t_n) são limitadas, donde devem possuir subsequências, que ainda denotaremos por (s_n) e (t_n), e números $\bar{s}$ e $\bar{t}$ tais que

$$s_n \to \bar{s} \quad \text{e} \quad t_n \to \bar{t} \ \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.22}$$

A demonstração agora segue os mesmos passos das já apresentadas neste capítulo e no anterior, prestando bem atenção ao fato de que o mínimo que estamos determinando para o funcional J dessa vez ocorre no espaço W_a, que por sua vez está contido em W. A modificação do Lema 1.1 nos garante que estes pontos de mínimo em W_a são de fato soluções heteroclínicas para o problema proposto e concluímos do Lema 1.2 que $U \in C^2(\mathbb{R})$, com $U(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Fechamos, com este teorema, os resultados do Capítulo 3 e incluímos mais duas classes de funções para problemas de segunda ordem não-autônomos nos quais são possíveis determinarmos a existência de soluções heteroclínicas conectando os equilíbrios -1 e 1.

Capítulo 4

Existência de Solução para a Condição de Rabinowitz

Neste quarto e último capítulo garantiremos a existência de solução heteroclínica conectando os equilíbrios -1 e 1 para o seguinte problema:

$$\ddot{x}(t) = a(\epsilon t)V'(x(t)), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty, \tag{4.2}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro e $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ cumpre à condição de Rabinowitz

$$\liminf_{|t|\to\infty} a(t) = a_\infty > \inf_{t\in\mathbb{R}} a(t) = a(0) = a_0 > 0. \tag{4.3}$$

Associado ao problema (4.1)-(4.2) teremos o funcional $J_\epsilon : H^1_{loc}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ definido por

$$J_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a(\epsilon t)V(x(t)) \right) dt.$$

Note que continua sendo válido $J_\epsilon(x) < \infty$ para todo $x \in W$; também vale

$$J_\epsilon{}'(x)\cdot v = \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{x}(t)\dot{v}(t) + a(\epsilon t)V'(x(t))\, v(t)]\, dt, \ \forall\, x \in W \text{ e } v \in H^1(\mathbb{R})$$

e os demais lemas e observações do Capítulo 1. Consideremos ainda os problemas

$$\ddot{x}(t) = a_0 V'(x(t)), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty, \tag{4.5}$$

e

$$\ddot{x}(t) = a_\infty V'(x(t)), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

$$x(t) \to -1 \text{ se } t \to -\infty \quad \text{e} \quad x(t) \to 1 \text{ se } t \to \infty, \tag{4.7}$$

e os funcionais

$$J_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a_0 V(x(t)) \right) dt$$

e

$$J_\infty(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a_\infty V(x(t)) \right) dt.$$

No que segue denotaremos por B_0, B_ϵ e B_∞ os números reais

$$B_0 = \inf\{J_0(x) \mid x \in W\},$$

$$B_\epsilon = \inf\{J_\epsilon(x) \mid x \in W\}$$

e

$$B_\infty = \inf\{J_\infty(x) \mid x \in W\}.$$

Pelo Teorema 2.1 (p. 35) sabemos que os problemas (4.4)-(4.5) e (4.6)-(4.7) possuem solução heteroclínica, a saber, w_0 , $w_\infty \in W$, respectivamente. Ademais, estas soluções satisfazem

$$B_0 = J_0(w_0) \quad \text{e} \quad B_\infty = J_\infty(w_\infty). \tag{4.8}$$

Ainda em relação às constantes B_0, B_ϵ e B_∞, temos as seguintes relações:

Lema 4.1 *Os números B_0, B_ϵ e B_∞ verificam*

$$B_0 < B_\infty \quad e \quad \lim_{\epsilon \to 0} B_\epsilon = B_0.$$

Prova. Sejam w_0 , $w_\infty \in W$ como em (4.8). Por a cumprir à condição de Rabinowitz (4.3), sabemos que é válido $a_0 < a_\infty$. Assim,

$$B_0 = J_0(w_0) \leq J_0(w_\infty) < J_\infty(w_\infty) = B_\infty,$$

provando a primeira parte do lema. Como $a_0 = a(0) = \inf_{t \in \mathbb{R}} a(t) \leq a(\epsilon t)$ para cada $\epsilon > 0$, então

$$J_0(w) \leq J_\epsilon(w), \ \forall\, w \in W,$$

e consequentemente

$$B_0 \le B_\epsilon, \;\; \forall\, \epsilon > 0.$$

Daí,

$$B_0 \le \liminf_{\epsilon \to 0} B_\epsilon. \tag{4.9}$$

Por outro lado, como $w_0 \in W$,

$$B_\epsilon \le J_\epsilon(w_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_0(t)^2 + a(\epsilon t) V(w_0(t)) \right) dt. \tag{4.10}$$

Note que (lembre-se que a função a é sempre contínua)

$$\lim_{\epsilon \to 0} a(\epsilon t) V(w_0(t)) = a_0 V(w_0(t)). \tag{4.11}$$

Além disso, sendo $a(t) \le \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ quase sempre em $\mathbb{R}$, obtemos

$$a(\epsilon t) V(w_0(t)) \le \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} V(w_0(t)), \text{ q. s. em } \mathbb{R}.$$

Observe que $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} V(w_0(t)) \in L^1(\mathbb{R})$. De fato, pois como $w_0 \in W$, tem-se $w_0 - 1 \in H^1(0, \infty)$ e então $w_0(t) \to 1$ quando $t \to \infty$ e $w_0 - 1 \in L^2(0, \infty)$. Logo, existe $R > 0$ tal que para todo $t > R$ vale $w_0(t) \in (1 - \varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0)$ (para ε_0 vide (1.10), p. 15). Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} V(w_0(t))\, dt &= \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\int_0^R V(w_0(t))\, dt + \int_R^\infty V(w_0(t))\, dt \right) \\
&\le \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\int_0^R V(w_0(t))\, dt + C_2 \int_R^\infty (w_0(t) - 1)^2\, dt \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^0 \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} V(w_0(t))\, dt < \infty$$

e assim, $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} V(w_0(t)) \in L^1(\mathbb{R})$. Portanto, pelo limite (4.11) e pela dominação de $a(\epsilon t) V(w_0(t))$ por uma função integrável, segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} a(\epsilon t) V(w_0(t))\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} a_0 V(w_0(t))\, dt,$$

e de (4.10) garantimos

$$\begin{aligned}
\limsup_{\epsilon \to 0} B_\epsilon &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_0(t)^2 + a_0 V(w_0(t)) \right) dt \\
&= J_0(w_0) \\
&= B_0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Portanto, por (4.9) e (4.12) temos

$$\begin{aligned} B_0 &\leq \liminf_{\epsilon \to 0} B_\epsilon \\ &\leq \limsup_{\epsilon \to 0} B_\epsilon \\ &\leq B_0, \end{aligned}$$

implicando

$$\lim_{\epsilon \to 0} B_\epsilon = B_0.$$

■

A seguir traremos mais um lema que será crucial para a nossa abordagem na demonstração do resultado principal, o Teorema 4.1. É possível encontrarmos esse lema em [21].

Lema 4.2 *Sejam $x_0, x_1 \in (-1,1)$ com $x_0 < x_1$, $t_0 < t_1$ e $x \in H^1(t_0, t_1)$ com $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$. Então,*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a_\infty V(x(t)) \right) dt \geq \int_{w_\infty^{-1}(x_0)}^{w_\infty^{-1}(x_1)} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_\infty(t)^2 + a_\infty V(w_\infty(t)) \right) dt, \qquad (4.13)$$

onde $w_\infty \in W$ é a solução heteroclínica do problema (4.6)-(4.7).

Prova. Observe inicialmente que para a integral no segundo membro fazer sentido é necessário que tenhamos w_∞ uma função bijetiva da reta $\mathbb{R}$ no intervalo $(-1,1)$. De fato, o Teorema 2.1 (p. 35) nos garante $w_\infty(t) \in (-1,1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e por $w_\infty \in W$ concluímos que ela é sobrejetiva. Por outro lado, note agora que w_∞ deve ser uma função crescente, pois sendo solução de (4.6) satisfaz

$$\ddot{w}_\infty(t) = a_\infty V'(w_\infty(t)), \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Daí, multiplicando a última expressão por $\dot{w}_\infty(t)$, obtemos

$$\dot{w}_\infty(t)\ddot{w}_\infty(t) = a_\infty V'(w_\infty(t))\dot{w}_\infty(t)$$

e integrando

$$\frac{1}{2}\dot{w}_\infty(t)^2 = a_\infty V(w_\infty(t)).$$

Como $w_\infty(t) \in (-1,1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue $V(w_\infty(t)) > 0$. Temos ainda $a_\infty > 0$ e com isso

$$\dot{w}_\infty(t) = \sqrt{2a_\infty V(w_\infty(t))} > 0, \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}$$

ou

$$\dot{w}_\infty(t) = -\sqrt{2a_\infty V(w_\infty(t))} < 0, \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Assim, concluímos que w_∞ é crescente ou decrescente e portanto injetiva. Mas por ela estar em W, devemos ter w_∞ crescente, nos garantindo $w_\infty^{-1}(x_0) < w_\infty^{-1}(x_1)$.

Suponha agora, por contradição, que a desigualdade desejada (4.13) não seja válida. Então ocorre

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a_\infty V(x(t))\right) dt < \int_{w_\infty^{-1}(x_0)}^{w_\infty^{-1}(x_1)} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_\infty(t)^2 + a_\infty V(w_\infty(t))\right) dt. \qquad (4.14)$$

Defina w_1 dada por

$$w_1(t) = \begin{cases} w_\infty(t), & \text{se } t \leq w_\infty^{-1}(x_0) \\ x(t - w_\infty^{-1}(x_0) + t_0), & \text{se } w_\infty^{-1}(x_0) \leq t \leq w_\infty^{-1}(x_0) + (t_1 - t_0) \\ w_\infty(t + (w_\infty^{-1}(x_1) - w_\infty^{-1}(x_0)) - (t_1 - t_0)), & \text{se } t \geq w_\infty^{-1}(x_0) + (t_1 - t_0) \end{cases}.$$

Perceba de início que a função w_1 é essencialmente a função w_∞ modificada no intervalo $[w_\infty^{-1}(x_0)\,,\, w_\infty^{-1}(x_0) + (t_1 - t_0)]$ por uma translação da x e transladada $|(w_\infty^{-1}(x_1) - w_\infty^{-1}(x_0)) - (t_1 - t_0)|$ (para a esquerda ou direita, dependendo se este valor é positivo ou negativo, respectivamente) no intervalo $[w_\infty^{-1}(x_1), \infty)$. Assim, $w_1 \in W$ e por (4.14) e pelas mudanças de variáveis

$$\xi = t - w_\infty^{-1}(x_0) + t_0 \quad \text{e} \quad \eta = t + (w_\infty^{-1}(x_1) - w_\infty^{-1}(x_0)) - (t_1 - t_0)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{w_\infty^{-1}(x_0)}^{w_\infty^{-1}(x_0)+(t_1-t_0)} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_1(t)^2 + a_\infty V(w_1(t))\right) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + a_\infty V(x(t))\right) dt \\ &< \int_{w_\infty^{-1}(x_0)}^{w_\infty^{-1}(x_1)} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_\infty(t)^2 + a_\infty V(w_\infty(t))\right) dt \end{aligned}$$

e

$$\int_{w_\infty^{-1}(x_0)+(t_1-t_0)}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_1(t)^2 + a_\infty V(w_1(t))\right) dt = \int_{w_\infty^{-1}(x_1)}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_\infty(t)^2 + a_\infty V(w_\infty(t))\right) dt.$$

Logo,

$$J_\infty(w_1) < J_\infty(w_\infty),$$

um absurdo já que $J_\infty(w_\infty) = \min\{J_\infty(w) \;|\; w \in W\}$. ■

Provemos neste momento o principal resultado do capítulo, estabelecendo a existência de solução heteroclínica conectando -1 e 1 para classes de funções cumprindo à condição de Rabinowitz. O ponto importante é que só iremos garantir existência de solução para valores suficientemente pequenos do parâmetro ϵ.

Teorema 4.1 *Suponha V satisfazendo $(V_1)-(V_4)$. Se a função a cumpre à condição de Rabinowitz, então existe $\epsilon^* > 0$ tal que o problema (4.1)-(4.2) tem uma solução $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ para todo $\epsilon \in [0, \epsilon^*)$. Além disso, $u(t) \in (-1,1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova. Comece modificando V para que ela cumpra $(V_1)-(V_8)$ e note que para provarmos o teorema basta encontrarmos $\epsilon^* > 0$ tal que B_ϵ é atingido em W para cada $\epsilon \in [0, \epsilon^*)$, já que o Lema (1.1) (p. 21) garante que pontos que minimizam o funcional J_ϵ são, na verdade, soluções para o problema.

Defina para cada $\tau \in (0,1)$ o número real

$$\Lambda_\tau = \int_{w_\infty^{-1}(-1+\tau)}^{w_\infty^{-1}(1-\tau)} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_\infty(t)^2 + a_\infty V(w_\infty(t)) \right) dt,$$

onde $w_\infty \in W$ com $w_\infty(t) \in (-1,1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $J_\infty(w_\infty) = B_\infty$. Como $\lim_{t\to\infty} w_\infty(t) = 1$ e $\lim_{t\to-\infty} w_\infty(t) = -1$, garantimos que

$$\Lambda_\tau \to B_\infty, \quad \text{quando } \tau \to 0.$$

Com isso, temos

$$\left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty} \right) \Lambda_\tau \to B_\infty, \quad \text{quando } \tau \to 0.$$

(Mais geralmente, $c_\tau \Lambda_\tau \to B_\infty$ sempre que $c_\tau \to 1$ quando $\tau \to 0$). Como a cumpre à condição de Rabinowitz, então $a_\infty > a_0$, donde $B_0 < B_\infty$ (vide Lema 4.1). Daí, para τ suficientemente pequeno, vale

$$\left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty} \right) \Lambda_\tau > \frac{B_0 + B_\infty}{2}, \tag{4.15}$$

uma vez que $\dfrac{B_0 + B_\infty}{2} < B_\infty$.

Por outro lado, sabemos ainda do Lema 4.1 que $\lim_{\epsilon\to 0} B_\epsilon = B_0$ e assim deve existir $\epsilon^* = \epsilon^*(\tau) > 0$ de modo que $\epsilon \in [0, \epsilon^*)$ implica $\dfrac{B_0 + B_\infty}{2} > B_\epsilon$. Logo, por (4.15) obtemos

$$B_\epsilon < \left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty} \right) \Lambda_\tau, \quad \forall\, \epsilon \in [0, \epsilon^*). \tag{4.16}$$

Fixemos agora $\epsilon \in [0, \epsilon^*)$ e consideremos $(u_n) \subset W$ uma sequência minimizante para o funcional J_ϵ. Recorde que é possível tomarmos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq u_n(t) \leq 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Como nos argumentos utilizados no Teorema 2.1 (p. 35) para o caso constante (apenas tendo o cuidado de acrescentar o termo $a(\epsilon t)$ às contas), segue que, ao denotarmos por $A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_\epsilon(u_n)$, devem existir uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), e uma função $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que para todo $T > 0$,

$$\begin{aligned} &u_n \to u \text{ uniformemente em } [-T, T] \quad \text{e} \\ &u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(-T, T) \end{aligned} \quad . \tag{4.17}$$

Além disso,

$$J_\epsilon(u) \leq B_\epsilon. \tag{4.18}$$

Particularmente, $J_\epsilon(u) < \infty$ e segue do Lema 1.2 que

$$u(t) \to -1 \quad \text{ou} \quad u(t) \to 1 \text{ quando } t \to -\infty$$

e

$$u(t) \to -1 \quad \text{ou} \quad u(t) \to 1 \text{ quando } t \to \infty.$$

Afirmação: Não ocorre $u(t) \to -1$ quando $t \to \infty$.

Com efeito, suponha por absurdo que na verdade ocorra $u(t) \to -1$ quando $t \to \infty$ e escolha então $T_1 > 0$ suficientemente grande cumprindo $u(T_1) < -1+\tau$ e $a(\epsilon t) \geq a_\infty - \tau$ em $[T_1, \infty)$ (se necessário, diminuímos τ de forma que $a_\infty - \tau > 0$). Como $u_n \to u$ uniformemente no intervalo $[-T_1, T_1]$, tomamos n suficientemente grande de forma que $u_n(T_1) < -1 + \tau$. Por isso, e também por $u_n \in W$, podemos encontrar α_1, $\beta_1 \in \mathbb{R}$ tais que $T_1 < \alpha_1 < \beta_1$ com $u_n(\alpha_1) = -1 + \tau$ e $u_n(\beta_1) = 1 - \tau$. Ora, pelo Lema 4.2 (com

$t_0 = \alpha_1$, $t_1 = \beta_1$, $x_0 = -1+\tau$ e $x_1 = 1-\tau$) conseguimos a desigualdade

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2 + a(\epsilon t)V(u_n(t)) \right) dt \\
&\geq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2\, dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(\epsilon t)V(u_n(t))\, dt \\
&\geq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2\, dt + (a_\infty - \tau)\int_{\alpha_1}^{\beta_1} V(u_n(t))\, dt \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2\, dt + \left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty}\right)\int_{\alpha_1}^{\beta_1} a_\infty V(u_n(t))\, dt \\
&\geq \left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty}\right)\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2\, dt + \left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty}\right)\int_{\alpha_1}^{\beta_1} a_\infty V(u_n(t))\, dt \\
&= \left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty}\right)\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\frac{1}{2}\dot{u}_n(t)^2 + a_\infty V(u_n(t))\right) dt \\
&\geq \left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty}\right)\int_{w_\infty^{-1}(-1+\tau)}^{w_\infty^{-1}(1-\tau)} \left(\frac{1}{2}\dot{w}_\infty(t)^2 + a_\infty V(w_\infty(t))\right) dt \\
&= \left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty}\right)\Lambda_\tau.
\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $\epsilon \in [0, \epsilon^*)$, temos por (4.16) e por (u_n) ser minimizante que

$$\begin{aligned}
B_\epsilon &= \lim_{n\to\infty} J_\epsilon(u_n) \\
&\geq \left(\frac{a_\infty - \tau}{a_\infty}\right)\Lambda_\tau \\
&> B_\epsilon,
\end{aligned}$$

uma contradição. Portanto, $u(t) \to 1$ quando $t \to \infty$. Analogamente, $u(t) \to -1$ quando $t \to -\infty$.

Levando em consideração os limites estabelecidos no último parágrafo, e ainda pelo Lema 1.2, concluímos

$$u + 1 \in H^1(-\infty, 0) \quad \text{e} \quad u - 1 \in H^1(0, \infty),$$

e então $u \in W$, donde $B_\epsilon \leq J_\epsilon(u)$. Logo, de (4.18)

$$J_\epsilon(u) = B_\epsilon. \tag{4.19}$$

Portanto, u minimiza o funcional J_ϵ, e do Lema 1.1 (p. 21) u é solução do problema (4.1)-(4.2) com $u(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ademais, $u \in C^2(\mathbb{R})$, como queríamos demonstrar. ■

Temos assim a comprovação de existência de solução heteroclínica para mais uma classe de funções. Aqui é importante ressaltarmos que a existência só é garantida para valores suficientemente pequenos do parâmetro ϵ. Uma outra observação importante é que poderíamos ter considerado desde o início do trabalho o funcional J_ϵ, pois basta observarmos que J é, na verdade, o próprio funcional J_ϵ para o caso particular de $\epsilon = 1$. Dessa forma garantiríamos a existência de solução heteroclínica da mesma maneira.

Conclusão

Para concluirmos, traremos algumas observações e considerações acerca do problema que viemos trabalhando ao longo dos quatro capítulos do trabalho. A primeira delas é que poderíamos ter considerado desde o início o funcional J_ϵ, pois basta observarmos que J é, na verdade, o próprio funcional J_ϵ para o caso particular de $\epsilon = 1$. Dessa forma garantiríamos a existência de solução heteroclínica da mesma maneira. Vale ressaltar ainda que, caso não tivéssemos a função a limitada, deveríamos considerar então os conjuntos $H_a^1(\mathbb{R})$ e W_a definidos como no Capítulo 3 para o caso coercivo (p. 53). Mais uma vez, tomando os mesmo cuidados e fazendo os ajustes necessários, as demonstrações seguiriam os mesmos passos.

Note também que ao escolhermos ε_0 em (1.10) (p. 15) consideramos de certa forma uma simetria que não é necessário que a função V cumpra. Destacamos, mais uma vez, que esta escolha foi apenas para facilitarmos nossa escrita e não precisarmos de tomar valores ε_1 numa vizinhança de -1 e ε_2 numa vizinhança de 1. Portanto, não é preciso essa simetria em V. Mas ainda relacionado a V, lembre-se que, em todos os casos abordados, fizemos modificações nela. Essa modificação de V foi de fundamental importância no Lema 1.3 (p. 26), onde usamos o fato que V não atingia mais nenhum zero fora do intervalo $[-1, 1]$ e sua nova coercividade. Se por acaso no enunciado do lema tivéssemos suposto que x fosse tal que $x(t) \in (-1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, não precisaríamos da modificação. E note que temos exatamente uma função com essa propriedade quando comprovamos que $U \in W$ e aplicamos o Lema 1.1.

Passemos agora para outras questões. É possível determinarmos a existência de soluções heteroclínicas para diversas outras classes de funções, como por exemplo em

[5] onde é considerado o caso de a ser uma função contínua limitada e de existirem a_1, $a_2 > 0$ verificando

$$a_1 \leq a(t) \leq a_2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{|t| \to \infty} a(t) = a_2$$

com $a(t) < a_2$ em algum conjunto de medida não-nula.

Em [14] é tomado como hipótese que existe t_0 de tal forma que a é crescente em $(-\infty, t_0]$, a é decrescente em $[t_0, \infty)$,

$$\lim_{|t| \to \infty} a(t) = l > 0$$

e

$$\lim_{|t| \to \infty} |t|(l - a(t)) = 0.$$

Outro exemplo é abordado em [12], supondo existirem $0 < l < L$ tais que

$$l \leq a(t) \leq L, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{|t| \to \infty} a(t) = L,$$

com L/l adequadamente limitado por baixo.

Em [13] tem-se que $a \in L^\infty(\mathbb{R}, [0, \infty))$ e existem $l > 0$ e $S < T$ tais que

$$a(t) = l \quad \text{para } t \notin [S, T].$$

Tem-se ainda em [21] a hipótese de existirem $\underline{l}$, $l > 0$ verificando

$$\lim_{|t| \to \infty} a(t) = l \qquad \text{e} \qquad l \leq a(t) \leq \frac{\nu \sqrt{l\, \underline{l}}}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{V(t)}\, dt},$$

onde

$$\nu = \min \left\{ \int_{-1}^{\xi_-} \sqrt{V(t)}\, dt, \int_{\xi_+}^{1} \sqrt{V(t)}\, dt \right\}$$

com

$$\xi_- = \min\{t \in \mathbb{R} \mid t > -1 \text{ e } V'(t) = 0\} \qquad \text{e} \qquad \xi_+ = \max\{t \in \mathbb{R} \mid t < 1 \text{ e } V'(t) = 0\}.$$

Estes são alguns dentre vários problemas que foram abordados e que possuíram o mesmo objetivo em comum: determinar a existência de soluções heteroclínicas. Note que esse tipo de problema sofreu, ao longo dos anos, a influência e contribuição de renomados matemáticos e que, ainda nos dias atuais, existem pesquisas sendo desenvolvidas e cada vez mais um acervo literário sendo criado. Isto deixa claro, então, que trata-se de um espaço aberto para novas investigações e descobertas...

Apêndice A

Resultados Complementares

Neste apêndice traremos alguns resultados já bastante conhecidos e nos quais não apresentaremos suas demonstrações. Traremos ainda algumas propriedades e pontos que não foram demonstrados durante o texto para não desviarmos a atenção do leitor naquele momento.

Proposição A.1 (Desigualdade de Holder) *Suponha* $f \in L^p$ *e* $g \in L^{p'}$, *com* $1 \leq p \leq \infty$, *onde*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então, $fg \in L^1$ *e cumprem*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Prova. Vide [6], Teorema 4.6, p. 92. ■

Lema A.1 (DuBois-Raymond) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *um conjunto aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *uma função tal que*

$$\int_\Omega uf = 0, \quad \forall\, f \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova. Vide [6], Corolário 2.24, p. 110. ■

Teorema A.2 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para uma função real mensurável* f.

Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e é válido

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Prova. Vide [3], Teorema 5.6, p. 44. ■

Teorema A.3 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então, existe uma constante C (dependendo apenas de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(I), \quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Em outras palavras, temos a imersão ***contínua*** *$W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.*
Mais ainda, caso I seja limitado, então

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I}) \quad \text{é } \textbf{compacta} \ \forall\, 1 < p \leq \infty$$

e

$$W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I) \quad \text{é } \textbf{compacta} \ \forall\, 1 \leq q < \infty.$$

Prova. Vide [6], Teorema 8.8, p. 212. ■

Passemos a segunda metade do Apêndice, apresentando então complementos da teoria que não foram feitos durante o texto. Considerando o conjunto

$$W = \{x \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \ | \ x + 1 \in H^1(-\infty, 0) \text{ e } x - 1 \in H^1(0, \infty)\},$$

temos que para quaisquer x, $z \in W$ vale $x - z \in H^1(\mathbb{R})$, e portanto a boa definição da função

$$\begin{array}{rcl} \rho : W \times W & \longrightarrow & [0, \infty) \\ (x, z) & \longmapsto & \rho(x, z) = \|x - z\|_{H^1(\mathbb{R})} \end{array}.$$

Proposição A.4 *(W, ρ) é um espaço métrico completo.*

Prova. É imediato vermos que ρ é uma métrica em W. Por outro lado, sejam $x_0 \in W$ fixado e $(x_n) \subset W$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \ \Rightarrow \ \rho(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Definindo $y_n = x_n - x_0 \in H^1(\mathbb{R})$, teremos

$$m, n > n_0 \;\Rightarrow\; \|y_n - y_m\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|x_n - x_0 - x_m + x_0\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|x_n - x_m\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Logo, $(y_n) \subset H^1(\mathbb{R})$ é de Cauchy e portanto convergente, já que $H^1(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach. Seja $y \in H^1(\mathbb{R})$ o seu limite e considere $x = y + x_0 \in W$. Afirmamos que $x_n \to x$ em (W, ρ) quando $n \to \infty$. Com efeito, para n suficientemente grande, temos de $y_n \to y$ que

$$\rho(x_n, x) = \|x_n - x\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|x_n - x_0 + x_0 - x\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|y_n - y\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon,$$

donde $x_n \to x$ e portanto (W, ρ) é completo. ∎

Dando continuidade, descreveremos a seguir o processo diagonal que, em conjunto com os Lemas 1.3 e 1.4, foi essencial na nossa abordagem para garantirmos existência de solução (lembre-se que a função obtida nesse processo era justamente a solução heteroclínica!).

Proposição A.5 (Processo Diagonal) *Suponha $(x_n) \subset H^1_{loc}(\mathbb{R})$ uma sequência limitada em $H^1(-T, T)$ para cada $T > 0$. Então, existem uma subsequência de (x_n), que ainda denotaremos por (x_n), e uma função $x \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que para todo $T > 0$,*

$$\begin{array}{l} x_n \to x \text{ uniformemente em } [-T, T] \quad \text{e} \\ x_n \rightharpoonup x \text{ em } H^1(-T, T) \end{array}.$$

Prova. Para $T = 1$, segue do Lema 1.4 (p. 28) que existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e uma função $y_1 \in H^1(-1, 1)$ tais que

$$\begin{array}{l} x_n \overset{n\in\mathbb{N}_1}{\to} y_1 \text{ uniformemente em } [-1, 1] \quad \text{e} \\ x_n \overset{n\in\mathbb{N}_1}{\rightharpoonup} y_1 \text{ em } H^1(-1, 1) \end{array}.$$

Agora, para $T = 2$, mais uma vez do lema, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ e uma função $y_2 \in H^1(-2, 2)$ tais que

$$\begin{array}{l} x_n \overset{n\in\mathbb{N}_2}{\to} y_2 \text{ uniformemente em } [-2, 2] \quad \text{e} \\ x_n \overset{n\in\mathbb{N}_2}{\rightharpoonup} y_2 \text{ em } H^1(-2, 2) \end{array}.$$

Pela unicidade do limite devemos ter $y_2(t) = y_1(t)$ para todo $t \in [-1, 1]$.

Analogamente, para $T = k$, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}_{k-1} \subset \cdots \subset \mathbb{N}$ e uma função $y_k \in H^1(-k,k)$ tais que

$$\begin{array}{l} x_n \overset{n\in\mathbb{N}_k}{\to} y_k \text{ uniformemente em } [-k,k] \quad \text{e} \\ x_n \overset{n\in\mathbb{N}_k}{\rightharpoonup} y_k \text{ em } H^1(-k,k) \end{array}.$$

Além disso, $y_k(t) = y_{k-1}(t)$ para todo $t \in [-(k-1), k-1]$. Consideremos ainda que cada $\mathbb{N}_k$ seja ordenado de maneira crescente.

Definamos agora $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$x(t) = y_k(t), \quad \text{se } t \in [-k,k].$$

Observe inicialmente que $x \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$. Ademais, sendo n_k o k-ésimo elemento de $\mathbb{N}_k$ e tomando $\mathbb{N}^* = \{n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots\}$, obtemos $n_i < n_{i+1}$, implicando que $\mathbb{N}^*$ é infinito. Dado $T > 0$, escolhamos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T < k_0$. Assim, para $i > k_0$, temos $n_i \in \mathbb{N}_{k_0}$ e portanto

$$\begin{array}{l} x_n \overset{n\in\mathbb{N}^*}{\to} y_{k_0} = x \text{ uniformemente em } [-k_0,k_0] \quad \text{e} \\ x_n \overset{n\in\mathbb{N}^*}{\rightharpoonup} y_{k_0} = x \text{ em } H^1(-k_0,k_0) \end{array},$$

donde, particularmente,

$$\begin{array}{l} x_n \overset{n\in\mathbb{N}^*}{\to} x \text{ uniformemente em } [-T,T] \quad \text{e} \\ x_n \overset{n\in\mathbb{N}^*}{\rightharpoonup} x \text{ em } H^1(-T,T) \end{array},$$

concluindo a demonstração. $\blacksquare$

Consideremos desta vez o conjunto

$$\Sigma = \{x \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \ | \ x(-\infty) = -1 \text{ e } x(+\infty) = 1\}.$$

Naturalmente o conjunto W está contido em Σ. Mostraremos, no entanto, que esta inclusão é própria:

Proposição A.6 *Temos $W \subsetneq \Sigma$.*

Prova. De fato, fixe $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ e considere a função $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^\alpha} & , \text{ se } t \geq 1 \\ g(t) & , \text{ se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \text{ se } t \leq 0 \end{cases},$$

onde g é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ com $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $g(t) > 0$ para $0 < t < 1$, tal que a colagem com $\dfrac{1}{t^\alpha}$ seja C^1. Com isso, $f_\alpha \in C^1(\mathbb{R})$. Assim, $f'_\alpha \in C(\mathbb{R})$, donde $f'_\alpha \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Além disso, como $-2\alpha + 1 > 0$, então

$$\int_1^\infty f_\alpha(t)^2\, dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^{2\alpha}}\, dt = \left.\frac{t^{(-2\alpha+1)}}{-2\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty,$$

e daí concluímos que $f_\alpha \notin L^2(1,\infty)$. Consequentemente, $f_\alpha \notin L^2(0,\infty)$.

Defina agora a função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(t) = \begin{cases} f_\alpha(t) + 1 & , \text{ se } t \geq 0 \\ f_\alpha(t) - 1 & , \text{ se } t \leq 0 \end{cases}.$$

Como $\lim\limits_{|t|\to\infty} f_\alpha(t) = 0$, temos $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 1$ e $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = -1$, ou seja, $u \in \Sigma$. Porém, $u - 1 \notin H^1(0,\infty)$, já que para $t \in [0,\infty)$ tem-se $u(t) - 1 = f_\alpha(t)$ e sabemos que $f_\alpha \notin L^2(0,\infty)$. Portanto, $u \notin W$ e provamos assim que $W \subsetneq \Sigma$. ∎

Bibliografia

[1] ALVES, C. O. Existence of Heteroclinic Solution for a Class of Non-Autonomous Second-Order Equation. Nonlinear Differential Equations and Applications. v. 22, pp. 1195-1212, 2015.

[2] AMBROSETTI, A.; BADIALE, M. Variational Perturbative Methods and Bifurcation of Bound States from the Essential Spectrum. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A. v. 128, pp. 1131-1161, 1998.

[3] BARTLE, R.G. Elements of Integration. John Wiley & Sons: New York, 1966.

[4] BOLOTIN, S.V. Variational Methods for Constructing Chaotic Motions in the Dynamics of a Rigid Body. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. v. 56, pp. 198-205, 1992.

[5] BONHEURE, D.; SANCHEZ, L. Heteroclinic Orbits for Some Classes of Second and Fourth Order Differenial Equation. In: Canadã, A.; Drabek, P.; Fonda A. (eds.) Handbook of Differential Equations III, Chapter 2. Elsevier: Amsterdam, 2006.

[6] BREZIS, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer: New York, 2010.

[7] CHOW, S.N.; HALE, J.K. Methods of Bifurcation Theory. Springer-Verlag: Berlin, 1982.

[8] COTI ZELATI, V.; RABINOWITZ, P.H. Homoclinic Orbits for Second Order Ha-

miltonian Systems Possessing Superquadratic Potentials. Journal of the American Mathematical Society. v. 4, n. 4, pp. 693-723, 1991.

[9] COTI ZELATI, V.; RABINOWITZ, P.H.; SÉRÉ, E. A Variational Approach to Homoclinic Orbits in Hamiltonian Systems. Mathematische Annalen. v. 288, pp. 133-160, 1990.

[10] EKELAND, I. On the Variational Principle. Journal of Mathematical Analysis and Applications. v. 47, pp. 324-353, 1974.

[11] FENG, B.Y. The Heteroclinic Cycle in the Model of Competition Between n Species and its Stabilty. Acta Mathematicae Applicatae Sinica. v. 14, pp. 404-413, 1998.

[12] GAVIOLI, A. On the Existence of Heteroclinic Trajectories for Asymptotically Autonomous Equations. Topological Methods in Nonlinear Analysis. v. 34, pp. 251-266, 2009.

[13] GAVIOLI, A. Monotone Hetoroclinic Solutions to Non-Atonomous Equations via Phase Plane Analysis. Nonlinear Differential Equations and Aplications. v. 18, pp. 79-100, 2011.

[14] GAVIOLI, A; SANCHEZ, L. Heteroclinic for Non-Autonomous Second Order Differential Equations. Differential and Integral Equations. v. 22, pp. 999-1018, 2009.

[15] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. Springer-Verlag: New York, 1983.

[16] HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. On the Stabilizing Effect of Predator and Competitors on Ecological Communities. Journal of Mathematical Biology. v. 27, pp. 537-548, 1989.

[17] HOMBURG, A.J.; SANDSTEDE, B. Homoclinic and Heteroclinic Bifurcations in Vector Fields. Handbook of Dynamical Systems 3. 2010.

[18] MANUCHARYAN, G.V.; MIKHLIN, Y.V. Determination of the Chaos Onset in Mechanical Systems with Several Equilibrium Positions. Meccanica. v. 41, pp. 253-267, 2006.

[19] RABINOWITZ, P.H. Homoclinic and Heteroclinic Orbits for a Class of Hamiltonian Systems. Calculus of Variations and Partial Differential Equations. v. 1, pp. 1-36, 1993.

[20] RABINOWITZ, P.H. On a Class of Nonlinear Schrodinger Equations. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. v. 42, pp. 270-291, 1992.

[21] SPRADLIN, G.S. Heteroclinic Solutions to an Asymptotically Autonomous Second-Order Equation. Electronic Journal of Differential Equations. n. 137, pp. 1-14, 2010.