Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Propriedade Gradiente para uma Classe de Equações de Evolução

**por**

**Bruna Emanuelly Pereira Lucena**

**sob orientação do**

**Prof. Dr. Severino Horácio da Silva**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

*Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG**

L935p    Lucena, Bruna Emanuelly Pereira.
Propriedade gradiente para uma classe de equações de evolução / Bruna Emanuelly Pereira Lucena. – Campina Grande, 2017.
87 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Severino Horácio da Silva".
Referências.

1. Equação Não Local. 2. Boa Posição. 3. Atrator Global. 4. Funcional de Lyapunov. 5. Propriedade Gradiente. I. Silva, Severino Horácio da. II. Título.

CDU 51(043)

# Propriedade Gradiente para uma Classe de Equações de Evolução

**por**

**Bruna Emanuelly Pereira Lucena**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia**

---

**Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza**

---

**Prof. Dr. Severino Horácio da Silva**
**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Curso de Mestrado em Matemática**

**Março/2017**

# Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Severino Horácio da Silva, pela oportunidade de trabalhar ao seu lado e por toda dedicação durante a orientação.

Aos professores da banca examinadora, Prof. Dr. Aparecido Jesuíno e Prof. Dr. Antonio Ronaldo, por aceitarem fazer parte deste trabalho, em especial ao professor Ronaldo, que se fez presente durante os seminários.

Ao Prof. Dr. Luiz Antônio, que teve papel fundamental desde a minha formação inicial, sempre me ajudou e me incentivou durante toda a graduação, bem como o grupo PET Conexões - Matemática e Estatística, que sem dúvidas contribuíram para que hoje eu esteja concluindo este ciclo.

Aos professores que fazem parte do PPGMat, pelos ensinamentos.

Aos amigos da UAMat, em especial, André, Dani, Fran, Ismael, Laise, Lucas, Marinho, Matheus e Thiago, pela companhia, pelas conversas no almoço, que de um jeito tão simples tornam nosso dia mais significativo. A meu amigo Arthur, que mesmo distante, sempre esteve disposto a me ajudar. E tão importante quanto, a nosso inesquecível amigo Juarez, que esteve presente em alma, em cada conversa, em cada sorriso, em cada lembrança, em cada detalhe.

Aos funcionários da UAMat, não somente pela disposição em ajudar, mas pela amizade adquerida durante esse tempo.

À minha família, em especial minha querida mãe, Élita, que é sem dúvidas minha grande incentivadora nesse caminho dos estudos.

Ao meu namorado, Geovany, o qual tenho compartilhado importantes momentos da minha vida, e agora se faz presente em mais um.

Ao apoio financeiro da CAPES.

# Dedicatória

A minha mãe, Élita.

# Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de evolução não local

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + g(\beta J * (f \circ u) + \beta h),\, x \in \Omega,\, t \geq 0 \\ u(x,t) = 0,\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

no espaço $L^p(\Omega)$, onde $\Omega$ é um aberto suave e limitado do $\mathbb{R}^n$. Aqui $u = u(x,t)$ é uma função a valores reais, $J \in C^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função simétrica não negativa com suporte na bola de centro na origem e raio 1, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções satisfazendo algumas condições de crescimento e $h$ e $\beta$ são constantes não negativas. Mostramos que este problema de evolução está bem posto, que o fluxo gerado por ele tem um atrator global e admite um funcional de Lyapunov, concluindo que este fluxo tem a propriedade gradiente.

.

**Palavras-chave:** Equação não local, boa posição, atrator global, funcional de Lyapunov, propriedade gradiente.

# Abstract

In this work we study the non local evolution problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + g(\beta J * (f \circ u) + \beta h),\ x \in \Omega,\ t \geq 0 \\ u(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

where $u = u(x,t)$ is a function with real value, $J \in C^1(\mathbb{R}^n)$ is a non negative function with support in the unitary ball centered at origin and radius 1, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are functions satisfying some growth condition, $h$ e $\beta$ are non negative constants and $\Omega$ is a bounded smooth open set in $\mathbb{R}^n$. We prove that this problem is a well posed, that it has global attractor and we exhibit a Lyapunov functional, concluiding that the flow generated by the problem is gradient.

**Keywords:** Non local equation, well posed, global attractor, Lyapunov functional, gradient property.

# Conteúdo

# Introdução

Neste trabalho estudamos o problema de evolução não local

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + g(\beta J * (f \circ u) + \beta h),\ x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ u(x,t_0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega$ é um aberto suave e limitado de $\mathbb{R}^n$, $u = u(x,t)$ é um função a valores reais, $J \in C^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função simétrica não negativa com suporte na bola de centro na origem e raio 1, $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazem algumas condições de crescimento, com $f$ não negativa, e $h$ e $\beta$ são constantes não negativas.

O problema (1) foi motivado por dois modelos já bem conhecidos na literatura, a saber, o modelo de dinâmica neural e o modelo de *Ising Spins*. Quando $g \equiv Id$ e $\beta = 1$, temos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) = J * (f \circ u)(x,t) + h, \tag{2}$$

deduzida por Wilson e Cowan [23], que modela a atividade neural. Em (2), $u = u(x,t)$ denota o potencial da membrana de um tecido nervoso na posição $x$ e no tempo $t \geq 0$, a função $J$ representa a conexão do neurônio da posição $x$ com o neurônio da posição $y$, a função $f$ representa a taxa na qual a atividade neural é gerada e a constante $h$ representa um estímulo externo aplicado uniformemente em todo campo neural (veja por exemplo, [2], [8] e [10]). Quando $f \equiv Id$ em (1), temos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) = g\left(\beta J * u(x,t) + \beta h\right), \tag{3}$$

que surge em [9], e é uma generalização da equação usada no estudo de sistemas de *spins* com dinâmica de Glauber e interações de Kac, em que $g = tanh$, (veja [4] e

[18]). A equação (3) descreve o modelo de separação de fase, onde $u(x,t)$ representa densidade de magnetização na posição $x$, no tempo $t$, $\beta^{-1}$ denota a temperatura do sistema e $h$ denota um campo externo. Portanto, os resultados obtidos no Problema (1) generalizam os resultados correspondentes obtidos para os modelos (2) e (3).

O objetivo dessa dissertação é provar que o fluxo gerado por (1) tem a propriedade gradiente. Para isto, provamos a existência de um atrator global e exibimos um funcional de Lyapunov, generalizando de alguma forma resultados de [8], [9] e [10]. Esta dissertação está organizada da seguinte maneira, no Capítulo 1 apresentamos alguns dos conceitos e resultados preliminares que são utilizados ao longo do texto. Iniciamos este capítulo com teoremas de existência e unicidade de solução em espaços de Banach. Para isto, seguimos as referências [2] e [14]. Em seguida, baseando-se em [12] e [22] apresentamos algumas definições e resultados sobre semigrupos contínuos. No Capítulo 2, aplicamos os resultados preliminares para provar que o problema de Cauchy (1) está bem posto, isto é, que a solução do problema existe, é única e é contínua com relação a condição inicial, mais ainda, mostramos que o fluxo gerado por (1) é de classe $C^1$ em um espaço de fase $X$, que é isométrico ao espaço $L^p(\Omega)$. No Capítulo 3, seguindo [12], mostramos a existência de um atrator global para o fluxo $T(t)$ gerado pelo problema (1) e, motivados pelo funcional dado em [9], exibimos um funcional de Lyapunov contínuo para o fluxo $T(t)$, concluindo que esse fluxo é gradiente no sentido de [12]. Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos como apêndice, alguns conceitos e resultados que foram utilizados no texto.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados básicos sobre sistemas dinâmicos em espaços de Banach, os quais serão utilizados nos capítulos seguintes.

## 1.1 Teoremas de Existência e Unicidade de solução em Espaços de Banach

Nesta seção, exibimos alguns resultados sobre existência e unicidade de soluções em Espaços de Banach. Para tanto, seguimos as referências [2], [4], [14] e [21].

**Definição 1.1** *Seja $X$ um espaço de Banach. Uma função diferenciável $\phi : I \longrightarrow X$ é dita uma solução da equação*

$$u' = f(t, u), \tag{1.1}$$

*no intervalo $I$ se:*

**i)** *o gráfico de $\phi$ está contido no domínio de $f$, isto é, $\{(t, \phi(t)); t \in I\} \subset I \times X$;*

**ii)** $\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t, \phi(t))$, $\forall\ t \in I$.

O problema de Cauchy para (1.1) com condições iniciais $(t_0, u_0) \in I \times X$ é denotado por

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

O problema (1.2) pode ser formulado com uma equação integral. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Lema 1.2** *O problema (1.2) é equivalente a equação integral*

$$u(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds. \tag{1.3}$$

**Prova.** De fato, suponha que $\phi(t)$ satisfaz o problema (1.2), isto é, $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ e $\phi(t_0) = u_0$. Integrando de $t_0$ a $t$ ambos os lados da primeira equação temos

$$\int_{t_0}^{t} \phi'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$\phi(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds,$$

ou seja, $\phi$ satisfaz (1.3).

Reciprocamente, suponha que $\phi(t)$ satisfaz a equação integral (1.3), isto é,

$$\phi(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

Como $f$ é contínua, então $\phi$ é diferenciável e assim derivando esta equação com relação a $t$, temos

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \frac{du_0}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds\right).$$

Logo,

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad \phi(t_0) = u_0.$$

■

O caso em que $X = \mathbb{R}^n$, o teorema de Picard, que enunciaremos a seguir, garante existência e unicidade de solução para o problema (1.2).

**Teorema 1.3** *(Teorema de Existência e Unicidade de Picard). Sejam* $X = \mathbb{R}^n$ *e* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ *uma aplicação contínua em* $\Omega$ *e Lipschitziana em relação a segunda variável, onde* $\Omega = I_a \times B_b$, *com* $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$ *e* $B_b = \overline{B(x_0, b)}$. *Então, existe uma única solução do problema de Cauchy dado em (1.2), definida no intervalo* $[t_0, t_0 + \alpha]$, *onde* $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ *e* $M = max\{|f(t, x)|\, ; (t, x) \in I_a \times B_b\}$.

**Prova.** Sabemos que o espaço $C_\alpha(X)$ das funções contínuas com valores definidos em $[t_0, t_0 + \alpha]$ munido da norma do supremo é um espaço de Banach (veja [6]). Consideremos $C_\alpha(B_b)$ o conjunto das funções contínuas cujo domínio é $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e imagem é $\overline{B(x_0, b)}$. Temos que $C_\alpha(B_b)$ é um fechado de $C_\alpha(X)$, assim, como $C_\alpha(X)$ é um espaço de Banach, temos que $C_\alpha(B_b)$ é um espaço métrico completo (veja [15]), cuja métrica é dada por $d : C_\alpha(B_b) \times C_\alpha(B_b) \to [0, \infty)$, com

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{x \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} \|\phi_1(x) - \phi_2(x)\| .$$

Definindo $F : C_\alpha(B_b) \to C_\alpha(B_b)$ por

$$F(\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds,$$

temos que

**i)** $F$ está bem definida, pois se $\phi$ é contínua, $F(\phi)$ também o é e, para $\phi \in C_\alpha(B_b)$, temos que

$$|F(\phi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi(s))| \, ds \leq M \, |t - t_0| \leq b,$$

ou seja, $F(\phi) \subset B_b$.

**ii)** Pelo Lema 1.2, os pontos fixos de $F$ são soluções do problema de Cauchy com domínio $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

**iii)** $F^m$ é uma contração. De fato, seja $k$ a constante de Lipischitz de $f$ em relação a segunda variável. Observe que, dados $\phi_1$, $\phi_2 \in C_\alpha(B_b)$ , temos

$$\begin{aligned}
|F(\phi_1)(t) - F(\phi_2)(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))| \, ds \\
&\leq k \int_{t_0}^{t} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| \, ds \\
&\leq k \; d(\phi_1, \phi_2) \, |t - t_0| .
\end{aligned}$$

Suponha, por hipótese de indução, que para algum $m \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$|F^m(\phi_1)(t) - F^m(\phi_2)(t)| \leq \frac{k^m}{m!} \, |t - t_0|^m \, d(\phi_1, \phi_2), \; \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Assim, para $m + 1 \in \mathbb{N}$ segue que

$$\begin{aligned}
\left|F^{m+1}(\phi_1)(t) - F^{m+1}(\phi_2)(t)\right| &= |F\left(F^m(\phi_1)(t)\right) - F\left(F^m(\phi_2)(t)\right)| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, F^m(\phi_1)(s)) - f(s, F^m(\phi_2)(s))| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} k \, |F^m(\phi_1)(s) - F^m(\phi_2)(s)| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \frac{k^{m+1}}{m!} \, |s - t_0|^m \, d(\phi_1, \phi_2)ds \\
&= \frac{k^{m+1}}{(m+1)!} \, |t - t_0|^{m+1} \, d(\phi_1, \phi_2) \\
&\leq \frac{k^{m+1}}{(m+1)!} \alpha^{m+1} d(\phi_1, \phi_2),
\end{aligned}$$

mostrando por indução que

$$|F^m(\phi_1)(t) - F^m(\phi_2)(t)| \leq \frac{(k\alpha)^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2),\ \forall\ \phi_1, \phi_2 \in C_\alpha(B_b) \text{ e } \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Como o fatorial domina a exponencial para $m$ suficientemente grande, fixado $0 < \delta < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq n_0$ tem-se $\frac{(k\alpha)^m}{m!} < \delta$. Portanto, para todo $m \geq n_0$, $F^m$ é uma contração.

Logo, sendo $C_\alpha(B_b)$ um espaço métrico completo e $F^m : C_\alpha(B_b) \to C_\alpha(B_b)$ uma contração, segue do Corolário B.4 que existe um único ponto $p \in C_\alpha(B_b)$ tal que $F^m(p) = p$. ■

O teorema que mostraremos a seguir generaliza o Teorema de Picard. Apresentamos a prova dada em [7] e [20].

**Teorema 1.4** *(Existência Local). Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma função contínua tal que*

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq k \|u - v\|, \tag{1.4}$$

*para quaisquer $u, v$ de uma vizinhança de $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ e algum $k \in \mathbb{R}_+$. Então, existe $\alpha > 0$ tal que o problema de Cauchy (1.2) tem uma única solução no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

**Prova.** Fixemos $\eta > 0$ e $B_\eta$ a bola aberta centrada em $u_0$ de raio $\eta$. Por hipótese, $f$ é contínua em $t$ numa vizinhança de $(t_0, u_0)$, ou seja, dado $\xi > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|t - t_0| \leq \epsilon$ implica que

$$\|f(t,u) - f(t_0,u)\| \leq \xi,\ \forall\ u \in \overline{B_\eta}. \tag{1.5}$$

Da hipótese de $f$ ser Lipschitz na segunda variável temos que

$$\|f(t,u) - f(t,u_0)\| \leq k \|u - u_0\| < k\eta. \tag{1.6}$$

Das equações (1.5) e (1.6), obtemos que

$$\begin{aligned} \|f(t,u) - f(t_0,u_0)\| &\leq \|f(t,u) - f(t,u_0)\| + \|f(t,u_0) - f(t_0,u_0)\| \\ &< k\eta + \xi, \end{aligned}$$

sempre que

$$\begin{aligned} \|(t,u) - (t_0,u_0)\| &= \|(t - t_0, u - u_0)\| \\ &< \epsilon + \eta. \end{aligned}$$

Chamando $\tau = k\eta + \xi$, temos que $\|f(t,u) - f(t_0,u_0)\| < \tau$, sempre que $\|(t,u) - (t_0,u_0)\| < \epsilon + \eta$, ou seja, $f$ é contínua numa vizinhança de $(t_0,u_0)$, donde, $f$ é limitada nessa vizinhança. Assim, existe $L > 0$ tal que $\|f(t,u)\| \leq L$, sempre que $\|(t,u) - (t_0,u_0)\| < \epsilon + \eta$.

Sejam $\alpha = \min\left(\epsilon, \frac{\eta}{L}\right)$ e $C_\alpha(X)$ o espaço das funções contínuas que são definidas em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, assumindo valores em $X$, munido da norma

$$|||u||| = \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|u(t)\|.$$

Considere $B_\eta = \{u \in C_\alpha(X); |||u - u_0||| \leq \eta\}$ e defina o operador

$$\begin{array}{rcccl} F : B_\eta & \longrightarrow & B_\eta & & \\ u & \longmapsto & Fu : & [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] & \longrightarrow & X \\ & & & t & \longmapsto & F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds. \end{array}$$

Mostremos que $F(B_\eta) \subset B_\eta$. De fato, dado $v \in F(B_\eta)$, temos que $v = F(u)$, para algum $u \in B_\eta$ e, para todo $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, temos que

$$\begin{aligned} \|F(u)(t) - u_0\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,u(s))\| \, ds \\ &\leq L\,|t - t_0| \\ &\leq \alpha L. \end{aligned}$$

Se $t \in [t_0 - \alpha, t_0]$ é análogo. Daí,

$$\begin{aligned} |||v - u_0||| &= |||F(u) - u_0||| \\ &= \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|F(u)(t) - u_0\| \\ &\leq \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \alpha L \\ &\leq \eta. \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que $F^n$ é uma contração. Para simplificar vamos supor que $t \geq t_0$ e a demonstração para $t < t_0$ é análogo. Dados $u_1, u_2 \in B_\eta$, temos que

$$\begin{aligned}
\|F(u_2)(t) - F(u_1)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\| \, ds \\
&\leq k \int_{t_0}^{t} \|u_2(s) - u_1(s)\| \, ds \\
&\leq k \int_{t_0}^{t} \sup_{|s-t_0| \leq \alpha} \|u_1(s) - u_2(s)\| \, ds \\
&= k \int_{t_0}^{t} |||u_2 - u_1||| \, ds \\
&= k \, |||u_2 - u_1||| \, |t - t_0| \, .
\end{aligned}$$

Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$

$$\|F^n(u_2)(t) - F^n(u_1)(t)\| \leq \frac{k^n}{n!} \, |||u_2 - u_1||| \, |t - t_0|^n \, .$$

Assim, para $n + 1 \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\left\|F^{n+1}(u_2)(t) - F^{n+1}(u_1)(t)\right\| &= \|F(F^n(u_2)(t)) - F(F^n(u_1)(t))\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, F^n(u_2)(s)) - f(s, F^n(u_1)(s))\| \, ds \\
&\leq k \int_{t_0}^{t} \|F^n(u_2)(s) - F^n(u_1)(s)\| \, ds \\
&\leq k \frac{k^n}{n!} \, |||u_2 - u_1||| \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n ds \\
&= \frac{k^{n+1}}{n!} \, |||u_2 - u_1||| \, \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{(k\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \, |||u_2 - u_1||| \, .
\end{aligned}$$

Tomando o supremo, obtemos que para quaisquer $u_1, u_2 \in B_\eta$

$$|||F^n(u_2) - F^n(u_1)||| \leq \frac{(k\alpha)^n}{n!} \, |||u_2 - u_1||| \, , \, \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Ademais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ tem-se $\frac{(k\alpha)^n}{n!} < 1$, e assim, segue que $F^n$ é uma contração. Pelo Corolário B.4 , existe um único $\overline{u} \in B_\eta$ tal que $\overline{u}$ é ponto fixo de $F$, isto é, $F(\overline{u}) = \overline{u}$, mostrando que $\overline{u} \in B_\eta$ é a única solução do problema de Cauchy. ∎

Se impusermos exigências de caráter global sobre $f$, podemos conseguir soluções globais sem hipóteses prévias no seu comportamento.

**Teorema 1.5** *(Existência Global). Sejam $X$ um espaço de Banach e $f$ uma função definida em $[a,b] \times X$, contínua em $t$. Se $f$ é Lipschitz na segunda variável, então dado $(t_0, u_0) \in [a,b] \times X$, o problema de Cauchy (1.2) possui uma única solução $\phi : [a,b] \longrightarrow X$.*

**Prova.** Fixemos $\eta > 0$ e $v \in X$ tal que $\|u - v\| < \eta$, para todo $u \in X$. Como $f$ é contínua em $t$, dado $\xi > 0$, existem $t, \bar{t} \in [a,b]$ tais que $\left\| f(t,u) - f(\bar{t},u) \right\| < \xi$. Além disso, como $f$ satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável, temos que existe $k > 0$ tal que

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| < k\eta.$$

Assim, dados $t, \bar{t} \in [a,b]$ e $u \in \overline{B_\eta(v)}$, temos que

$$\left\| f(t,u) - f(\bar{t},v) \right\| \leq k\eta + \xi.$$

Logo, $f$ é contínua em $[a,b] \times S$, onde $S = \overline{B_\eta(v)}$, e portanto, também é limitada. Daí, existe $M > 0$ tal que $\|f(t,u)\| \leq M$, para todo $(t,u) \in [a,b] \times S$.

Seja $C(X)$ o espaço das funções contínuas $x : [a,b] \longrightarrow X$, munido da norma do supremo, temos que $C(X)$ é um espaço de Banach.

Defina, $T : C(X) \to C(X)$ por

$$T(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

O resto da demonstração segue análogo a demonstração do Teorema 1.4. ■

**Observação 1.6** *No caso da equação (1.1) ser autônoma, isto é, $f$ não depender explicitamente de $t$, temos que $f$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$, e portanto, os Teoremas 1.4 e 1.5 também se aplicam. Além disso, temos o clássico teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard que mostraremos a seguir. Para isto, seguimos as referências [5] e [20].*

**Teorema 1.7** *(Cauchy-Lipschitz-Picard). Sejam $X$ um espaço de Bancach e $F : X \longrightarrow X$ uma aplicação globalmente Lipschitz, isto é, existe $L \in \mathbb{R}_+$ tal que para quaisquer $u, v \in X$ temos*

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L \|u - v\|.$$

*Então, dado $u_0 \in X$, existe uma única aplicação $u : [0, \infty) \longrightarrow X$ de classe $C^1$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

**Prova.** Pelo Lema 1.2, resolver o problema (1.7) é equivalente a encontrar $u \in C^1([0,\infty), X)$ tal que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds.$$

Defina $E = \{u \in C^1([0,\infty), X); \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty\}$, para alguma constante $k > 0$, a ser fixada posteriormente.

**Afirmação I**: $E$ é um espaço de Banach.

De fato, seja $(u_n)$ uma sequência de Cauchy, devemos mostrar que $(u_n)$ é convergente.

Por definição, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_m - u_n\|_E < \epsilon$, para todo $m, n \geq n_0$. Daí,

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u_m(t) - u_n(t)\| < \epsilon,$$

assim,

$$\|u_m(t) - u_n(t)\| < \epsilon \qquad \forall m, n \geq n_0 \text{ e } t > 0.$$

Logo, $(u_n(t))$ é uma sequência de Cauchy em $X$, para cada $t \in [0,\infty)$.

Observe que, para cada $t > 0$, $(u_n(t)) \subset X$, e sendo $X$ um espaço de Banach temos que existe $u^t \in X$ tal que $u_n(t) \to u^t$, quando $n \to \infty$.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} u: & [0,\infty) & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & u(t) = u^t. \end{array}$$

Da unicidade do limite segue que $u$ está bem definida.

**Afirmação II**: $u \in E$ e $u_n \to u$ em $E$, quando $n \to \infty$.

Mostremos primeiramente que $u \in E$. Observe que, como $(u_n)$ é de Cauchy em $E$, temos que $(u_n)$ é limitada em $E$. Com efeito, fixando $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_m - u_n\|_E < 1$, para todo $m, n \geq n_0$. Em particular, $\|u_m - u_{n_0}\|_E < 1$, assim, $u_n \in B(u_{n_0}, 1)$, para todo $n \geq n_0$. Logo, a sequência é limitada. Daí, existe $c > 0$ tal que

$$\|u_n\|_E = \sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\|u_n(t)\|\right) \leq c,$$

então,

$$e^{-kt}\|u_n(t)\| \leq c, \ \forall\ n \in \mathbb{N}, t \geq 0 \text{ e } k > 0. \tag{1.8}$$

Fazendo $n \to \infty$ na equação (1.8), obtemos que $e^{-kt}\|u(t)\| \leq c$, o que implica $\|u\|_E \leq c$, e portanto, $u \in E$. Resta mostrar que $u_n \to u$, quando $n \to \infty$ em $E$. Equivalentemente, podemos mostrar que $u_n \to u$ uniformemente em $[0,\infty)$.

Como $(u_n(t))$ é de Cauchy em $X$, para cada $t \geq 0$, por definição, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$, temos $\|u_m(t) - u_n(t)\| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $t \geq 0$. Fazendo $m \to \infty$ na última desigualdade obtemos $\|u(t) - u_n(t)\| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$ e $t \geq 0$. Mostrando que $u_n \to u$ uniformemente em $[0,\infty)$, concluindo a afirmação.

Definimos a seguinte função em $C^1([0,\infty), X)$

$$(\phi(u))(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds.$$

Temos que:

**1.** $\phi(u)$ é contínua, pois é soma de funções contínuas;

**2.** $\|\phi(u)\|_E < \infty$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)\|_E &= \sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\|(\phi(u))(t)\|\right) \\
&= \sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\left\|u_0 + \int_0^t F(u(s))ds\right\|\right) \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\|u_0\|\right) + \sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\left\|\int_0^t F(u(s))ds\right\|\right).
\end{aligned}$$

Como $\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u_0\| < \infty$. Resta verificar que a segunda parcela também é finita. Note que,

$$\sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\left\|\int_0^t F(u(s))ds\right\|\right) \leq \sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\int_0^t \|F(u(s))\|\, ds\right).$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|F(u(s))\|\, ds &= \int_0^t \|F(u(s)) - F(0) + F(0)\|\, ds \\
&\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(0)\| + \int_0^t \|F(0)\|\, ds \\
&\leq \int_0^t L\|u(s)\|\, ds + \|F(0)\|\, t.
\end{aligned}$$

Daí,

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(u(s))\|\, ds \leq \int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|u(s)\|\, ds + e^{-kt}\|F(0)\|\, t. \tag{1.9}$$

Considere o conjunto $G = \{e^{-kt} \|F(0)\| t; t \geq 0\}$. Afirmamos que $G$ é limitado superiormente por $\frac{\|F(0)\|}{ke}$.

De fato, defina

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,\infty) & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & g(t) = e^{-kt} \|F(0)\| t. \end{array}$$

Temos que $t = \frac{1}{k}$ é máximo relativo de $g$. Além disso, como $g$ é contínua, $g'(t) > 0$, para todo $t < \frac{1}{k}$ e $g'(t) < 0$, para todo $t > \frac{1}{k}$, obtemos que $t = \frac{1}{k}$ é máximo global de $g$, ou seja

$$g(t) \leq \frac{\|F(0)\|}{ek}, \qquad \forall\ t \in [0,\infty)\ ,$$

ou seja,

$$e^{-kt} \|F(0)\| t \leq \frac{\|F(0)\|}{ek}, \qquad \forall\ t \in [0,\infty)\ .$$

Assim, $G$ é limitado superiormente, consequentemente o supremo de $G$ existe e é finito. Vamos denotar $\sup(G) = m$.

Aplicando o supremo em ambos os lados de (1.9), temos que

$$\begin{aligned} \sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\int_0^t \|F(u(s))\|\, ds\right) &\leq \int_0^t e^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|u(s)\|\, ds + m \\ &\leq \int_0^t Le^{-kt}e^{ks}\sup_{s\geq 0}\left(e^{-ks}\|u(s)\|\, ds\right) + m \\ &= L\|u\|_E\, e^{-kt}\int_0^t e^{ks} ds + m \\ &= L\|u\|_E\left(\frac{1}{k} - \frac{e^{-kt}}{k}\right) + m \\ &\leq L\|u\|_E\,\frac{1}{k} + m. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}\int_0^t \|F(u(s))\|\, ds\right) \leq L\|u\|_E\,\frac{1}{k} + m < \infty.$$

**Afirmação III**: Se escolhermos $k > L$, então $\phi$ é uma contração.

De fato,

$$\begin{aligned} \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| &\leq \int_0^t \|F(u)(s) - F(v)(s)\|\, ds \\ &\leq L\int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{-kt}$ obtemos

$$e^{-kt}\left\|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\right\| \leq e^{-kt}L\int_0^t e^{ks}e^{-ks}\left\|u(s)-v(s)\right\| ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\left\|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\right\| &\leq e^{-kt}L\int_0^t e^{ks}\sup_{s\geq 0}\left(e^{-ks}\left\|u(s)-v(s)\right\|\right) ds\\ &= e^{-kt}L\left\|u-v\right\|_E\left(\frac{e^{kt}}{k}-\frac{1}{k}\right) ds\\ &\leq \frac{L}{K}\left\|u-v\right\|_E.\end{aligned}$$

Donde, para $k>L$ temos que

$$\left\|\phi(u)-\phi(v)\right\|_E \leq \left\|u-v\right\|_E,$$

mostrando que $\phi$ é uma contração. Assim, pelo Teorema do ponto fixo de Banach (veja Teorema B.3), existe um único $u\in C^1\left([0,\infty),X\right)$ tal que $\phi(u)(t)=u(t)$, isto é,

$$u(t)=u_0+\int_0^t F(u(s))ds,\ \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

■

**Lema 1.8** *(Lema de Gronwall). Sejam $u$, $v$ funções contínuas não negativas em $[a,b]\subset\mathbb{R}$ tais que, para $\alpha\geq 0$, satisfazem a desigualdade*

$$u(t)\leq \alpha+\int_a^t v(s)u(s)ds,\ t\in[a,b]. \tag{1.10}$$

*Então*

$$u(t)\leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

*Em particular, se $\alpha=0$, então $u\equiv 0$.*

**Prova.** Suponha $\alpha>0$. Considere a função

$$w(t)=\alpha+\int_a^t v(s)u(s)ds. \tag{1.11}$$

Temos que $w(a)=\alpha$ e $w(t)\geq\alpha>0$. Derivando $w$ obtemos que

$$w'(t)=v(t)u(t).$$

Das equações (1.10) e (1.11) temos que $u(t)\leq w(t)$. Daí,

$$w'(t)\leq v(t)w(t).$$

Sendo $w(t) > 0$, podemos escrever

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t). \tag{1.12}$$

Assim, integrando (1.12) obtemos que

$$\ln\left(\frac{w(t)}{w(a)}\right) \leq \int_a^t v(s)ds.$$

Sendo $w(a) = \alpha$, obtemos

$$w(t) \leq ae^{\int_a^t v(s)ds},$$

e como $u(t) \leq w(t)$, segue o resultado para $\alpha > 0$.

Agora suponha $\alpha = 0$. Temos que

$$u(t) \leq \alpha' e^{\int_a^t v(s)ds}, \; \forall \; \alpha' > 0.$$

Passando ao limite quando $\alpha' \to \alpha = 0$, temos

$$\lim_{\alpha' \to 0} u(t) \leq \lim_{\alpha' \to 0} \alpha' e^{\int_a^t v(s)ds} = 0.$$

Sendo $u(t)$ não negativa segue que $u(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Portanto, $u \equiv 0$. ■

**Proposição 1.9** *Se $F : X \longrightarrow X$ é Lipschitz, então a solução de $u' = F(u)$ é contínua com relação a condição inicial.*

**Prova.** Sejam $u(t, u_0)$ e $u(t, u_1)$ soluções de $u' = F(u)$ com condições iniciais $u_0$ e $u_1$, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \|u(t,u_0) - u(t,u_1)\| &\leq \|u_0 - u_1\| + \left\| \int_{t_0}^t F(u(s,u_0)) - F(u(s,u_1))ds \right\| \\ &\leq \|u_0 - u_1\| + L \int_{t_0}^t \|u(s,u_0) - u(s,u_1)\| \, ds. \end{aligned}$$

Usando o Lema de Gronwall obtemos que

$$\|u(t,u_0) - u(t,u_1)\| \leq \|u_0 - u_1\| \, e^{L(t-t_0)}.$$

e a continuidade de $u(t, \cdot)$ é imediata. ■

**Observação 1.10** *Quando a função $F$ é da forma $F(u) = -Au + f(u)$, com $A \in \mathcal{L}(M)$. Então, a solução de $u' = F(u)$ é dada por*

$$u(t,u_0) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(u(s))ds.$$

*Essa é a chamada fómula de variação das constantes (veja [12]).*

O Teorema que apresentamos a seguir será útil para garantirmos existência global de solução do nosso problema de evolução, com a menor quantidade de hipóteses possível.

**Teorema 1.11** *Suponha que*

**i)** *$g \in C(J \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ e seja $g$ não decrescente em $r \geq 0$ para cada $t \in J$, e que a solução maximal $r(t; t_0, r_0)$ do problema escalar de Cauchy*

$$r' = g(t, r),\ r(t_0) = r_0 \tag{1.13}$$

*exista em todo $J$;*

**ii)** *$f \in C(J \times X, X)$ satisfaz condições suficientes para garantir existência local de solução para o problema*

$$u' = f(t, u),\ u(t_0) = u_0 \tag{1.14}$$

*através de qualquer ponto em $J \times X$, e que*

$$\|f(t, u)\| \leq g(t, \|u\|),\ \textit{para todo}\ (t, u) \in J \times X.$$

*Então, o maior intervalo de existência de qualquer solução $u(t, t_0, u_0)$ de (1.14) com $\|u_0\| \leq r_0$ é $J$. Além disso, se $r(t, t_0, r_0)$ for limitada sobre $J$, então o limite $\lim_{t\to\infty} u(t, t_0, u_0)$ existe e pertence a $X$.*

**Prova.** Ver [14], p.161, Teorema 5.6.1. ∎

## 1.2 Noções de Semigrupos de Operadores Contínuos

Nesta seção, definimos uma classe especial de semigrupos, chamada de semigrupo gradiente, para os quais podemos obter informações relevantes sobre os conjuntos limites. Para isto, seguimos as referências [4], [12] e [22].

**Definição 1.12** *Seja $X$ um espaço de Banach. Uma família de operadores (não necessariamente lineares) $T(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, é dita um $C^r$-semigrupo, com $r \geq 0$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

**i)** *$T(0) = I$, isto é, $T(0)x = x$, $\forall x \in X$;*

**ii)** *$T(t + s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$;*

**iii)** *$T(t)x$ é contínua em $t$ e $x$ com derivadas de Fréchet contínua em $x$, até a ordem $r$, para $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times X$.*

**Observação 1.13** *O caso particular em que os operadores $T(t)$ são lineares, dizemos que $\{T(t); T \geq 0\}$ é um semigrupo linear.*

**Observação 1.14** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $F : X \longrightarrow X$ uma função Lipschitz. Considere o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.15}$$

*cuja solução é $\varphi(t,x)$. Vamos mostrar que a família de operadores*

$$\begin{array}{rcl} T(t) : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & T(t)x = \varphi(t,x). \end{array}$$

*define um $C^0$-semigrupo. De fato,*

**i)** *Dado $x \in X$, temos que $T(0)(x) = \varphi(0,x) = x$, isto é, $T(0) = I$.*

**ii)** *Dados $x \in X$ e $t, s \in [0, \infty)$ temos que*

$$\begin{array}{rcl} T(t+s)x & = & \varphi(t+s,x) \\ & = & \varphi(s,\varphi(t,x)) \\ & = & T(s)\varphi(t,x) \\ & = & T(s)T(t)x. \end{array}$$

**iii)** *A continuidade de $T(t)x$ segue da Proposição 1.9.*

**Teorema 1.15** *Sejam $A$ um operador linear limitado, sobre um espaço de Banach $X$, $U$ um aberto em $\mathbb{R} \times X$, $\Lambda$ um aberto em um espaço de Banach $M$. Suponha $f : U \times \Lambda \to X$ com $f$, $D_x f$, $D_\lambda f$ contínuas sobre $U \times \Lambda$, e $t \longmapsto f(t,x,\lambda)$ localmente Hölder contínua.*

*Para $\mu > 0$, $\lambda \in \Lambda$, $(\tau, \xi) \in U$, seja $x(t) = x(t;\tau,\xi,\mu)$ a solução máxima de*

$$\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} + \mu A x = f(t,x,\lambda),\ t > \tau \\ x(\tau) = \xi. \end{array}$$

*Então $(\xi, \lambda, \mu) \longmapsto x(t;\tau,\xi,\lambda,\mu)$ é $C^1$ de $X \times \Lambda \times \mathbb{R}^+$ em $X$, sobre o domínio de existência da solução. As derivadas: $u(t) = D_\xi x(t)$, $v(t) = D_\lambda x(t)$, $w(t) = D_\mu x(t)$ são funções suaves e satisfazem*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{du}{dt} + \mu A u & = & D_x f(t,x(t),\lambda)u,\ u(\tau) = I; \\ \dfrac{dv}{dt} + \mu A v & = & D_x f(t,x(t),\lambda)v + D_\lambda f(t,x(t),\lambda),\ v(\tau) = 0; \\ \dfrac{dw}{dt} + \mu A w & = & D_x f(t,x(t),\lambda)w - Ax(t),\ w(\tau) = 0. \end{array}$$

**Prova.** Veja [13], Teorema 3.4.4, p.64. ■

**Observação 1.16** *Para o caso do sistema autônomo*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x), t > \tau \\ x(\tau) &= \xi, \end{aligned}$$

*onde* $f : X \to X$ *é uma função Lipschitziana e com derivada de Fréchet* $f'$ *contínua, temos que* $u(t) = D_\xi x(t)$ *é solução suave de*

$$\frac{du}{dt} = D_x f(x(t)),\ u(\tau) = I,$$

*onde* $I$ *denota o operador identidade sobre* $X$*.*

**Definição 1.17** *Dado* $x \in X$*, a órbita positiva por* $x$ *é dada por*

$$\gamma^+(x) = \{T(t)x; t \geq 0\}.$$

**Definição 1.18** *Uma órbita negativa por* $x$ *é uma função* $\Phi : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ *tal que para quaisquer* $s \leq 0$*,* $T(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$*, com* $\Phi(0) = x$ *e* $0 \leq t \leq -s$*.*

**Definição 1.19** *Uma órbita completa por* $x$ *é uma função* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ *tal que* $\Phi(0) = x$ *e* $T(t)\Phi(s) = \Phi(t+s) \in S$*, para todo* $t \geq 0$ *e* $s \in \mathbb{R}$*.*

**Observação 1.20** *Como pode ocorrer* $T(t)X \neq X$*, dizer que existe uma órbita completa ou negativa por* $x$ *pode impor restrições a* $x$*.*

**Observação 1.21** *Um* $C^r$*-semigrupo* $T(t)$ *pode não ser injetivo, então se existe órbita negativa ela pode não ser única.*

**Definição 1.22** *A órbita negativa por* $x$*,* $\gamma^-(x)$ *é definida como a união de todas as órbitas negativas por* $x$*, então*

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t \geq 0} H(x,t),$$

*onde,*

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \{y \in X;\ \textit{existe uma órbita negativa por } x \\ &\qquad \Phi : (-\infty, 0] \to X \ \textit{com } \Phi(0) = x \ \textit{e } \Phi(-t) = y\}. \end{aligned}$$

**Definição 1.23** *Definimos a órbita completa por* $x$ *como sendo,*

$$\gamma(x) = \gamma^+(x) \bigcup \gamma^-(x).$$

**Definição 1.24** *Para qualquer,* $B \subset X$*, definimos as órbitas positiva, negativa e completa de* $B$*, respectivamente, por:*

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x), \quad \gamma^-(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x) \ \textit{e} \quad \gamma(B) = \gamma^+(B) \bigcup \gamma^-(B).$$

## 1.3 Conjuntos Invariantes sob um Semigrupo T(t)

Nesta seção, exibimos alguns conceitos e propriedades de conjuntos invariantes sob um semigrupo $T(t)$.

**Definição 1.25** *Seja $T(t)$ um semigrupo sob $X$. Dado $B \subset X$, definimos os conjuntos $\omega$-limite e $\alpha$-limite por*

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B} \text{ e } \alpha(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} H(B,t)}$$

**Proposição 1.26** *Os conjuntos $\omega$-limite e $\alpha$-limite podem ser caracterizados como segue:*

*i) $y \in \omega(B) \Leftrightarrow \exists\ (x_n) \subset B$ e $t_n \to \infty;\ T(t_n)x_n \to y$ quando $n \to \infty$;*

*ii) $\exists\ (y_n) \subset X;\ y_n \to y$ em $X$ e $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty;\ z_n = T(t_n)y_n \in B,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

**Prova.** **i)** Para caracterizar o conjunto $\omega$-limite temos que dado $\varphi \in \omega(B)$, por definição, $\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}$, para todo $s \geq 0$, o que implica que existe $\varphi_{n_s} \in \bigcup_{t\geq s} T(t)B$ tal que $\varphi_{n_s} \to \varphi$ quando $n \to \infty$. Assim, $\varphi_{n_s} \in T(t)B$, para algum $t \geq s$.
Em particular, tomando $s = 0$, temos que existe $\varphi_{n_0} \in T(1)B$ tal que $\varphi_{n_0} \to \varphi$. Seja $\varphi_0 = T(1)x_1$, para algum $x_1 \in B$.

Quando $s = 1$, existe $\varphi_{n_1} \in T(2)B$ tal que $\varphi_{n_1} \to \varphi$. Seja $\varphi_1 = T(2)x_2$, para algum $x_2 \in B$.

Para $s = 2$, existe $\varphi_{n_2} \in T(3)B$ tal que $\varphi_{n_2} \to \varphi$. Seja $\varphi_2 = T(3)x_3$, para algum $x_3 \in B$.

Indutivamente, obtemos sequências $(x_n) \subset B$ e $(t_n) = (n) \to \infty$ tais que $T(t_n)(x_n) = \varphi_{n-1} \to \varphi$, pois $(\varphi_n) \subset (\varphi_{n_s})$ e $\varphi_{n_s} \to \varphi$.

Suponhamos agora que existam sequências $(x_n) \subset B$ e $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$ tais que

$T(t_n)x_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$. Como $t_n \to \infty$, existe uma subsequência de $t_n$, que ainda denotaremos por $t_n$, tal que $t_n \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\varphi \in \overline{\{T(t_n)x_n; \forall\ n \in \mathbb{N}\}}$.

Como $(x_n) \subset B$, temos que $\varphi \in \overline{T(t_n)B}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $\varphi \in \overline{T(t_n)B}$, para todo $n \geq s$ e para todo $s \in \mathbb{N}$. Logo, $\varphi \in \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}$, isto é, $\varphi \in \omega(B)$.

**ii)** A demonstração é análoga. ■

**Definição 1.27** *Dizemos que um subconjunto $B$ de $X$ atrai o conjunto $C \subset X$ sob $T(t)$ se*

$$d\left(T(t)C, B\right) = \sup_{x \in C} \inf_{y \in B} \|T(t)x - y\| \longrightarrow 0, \qquad \textit{quando } t \to \infty.$$

**Definição 1.28** *Um subconjunto $S \subset X$ é dito invariante por $T(t)$ se para cada $x \in S$, existe uma órbita completa por $x$, $\gamma^+(x)$, tal que $\gamma^+(x) \subset S$.*

**Proposição 1.29** *Um subconjunto $S \subset X$ é invariante por $T(t)$ se, e somente se $T(t)S = S$.*

**Prova.** Suponhamos que $S$ é invariante por $T(t)$. Se $t = 0$, claramente $T(0)S = S$, pois por definição $T(0) = I$.

Para o caso em que $t > 0$, tome $x \in S$, como $S$ é invariante existe uma órbita completa $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S$ tal que $\varphi(0) = x$ e $T(\tau)\varphi(s) = \varphi(\tau + s) \in S$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\tau \geq 0$.

Tomando $\tau = t$ e $s = 0$, temos que $T(t)\varphi(0) = \varphi(t)$, o que implica que $T(t)x = \varphi(t)$, donde, segue que $T(t)S \subset S$. Para mostrar a inclusão contrária, tome $x \in S$ arbitrário, sabemos que

$$T(\tau)\varphi(s) = \varphi(\tau + s), \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e } \tau \geq 0.$$

Fazendo $\tau = t \geq 0$ e $s = -t \in \mathbb{R}$, temos que $T(t)\varphi(-t) = \varphi(0) = x$. Logo,

$$x = T(t)\varphi(-t) \in T(t)S,$$

pois $\varphi(-t) \in S$. Portanto, $S \subset T(t)S$.

Suponhamos agora que $T(t)S = S$ para qualquer $t \geq 0$. Dado $x_0 \in S$, existe $x_1 \in S$ tal que $T(t)x_1 = x_0$. Analogamente, como $x_1 \in S$, existe $x_2 \in S$ tal que $T(t)x_2 = x_1$. Indutivamente, obtemos uma sequência $(x_n) \subset S$ tal que $T(t)(x_{n+1}) = x_n$, para todo $n \geq 0$ e $t \geq 0$. Em particular, tomamos $t = 1$. Daí,

$$T(1)(x_{n+1}) = x_n, \qquad \forall\, n \geq 0. \tag{1.16}$$

Afirmamos que $T(n)x_n = x_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para $n = 1$, por (1.16), $T(1)x_1 = x_0$. Suponhamos por hipótese de indução que $T(k)x_k = x_0$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, para $k + 1$, segue que

$$\begin{aligned} T(k+1)x_{k+1} &= T(k)T(1)x_{k+1} \\ &= T(k)x_k \\ &= x_0. \end{aligned}$$

Definimos $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S$ por $\varphi(t) = T(t)x$, se $t \geq 0$ e $\varphi(t) = T(t+n)x_n$, se $t \in [-n, -n+1)$, para $n = 1, 2, \ldots$. Vamos mostrar que $T(t)\varphi(s) = \varphi(t+s)$ para $s \in [0, \infty)$.

Dado $s \in (-\infty, 0)$, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \in [-n, -n+1)$. Se $t \geq -s$, então

$$\begin{aligned} T(t)\varphi(s) &= T(t)T(s+n)x_n \\ &= T(t+n+s)x_n \\ &= T(t+s)T(n)x_n \\ &= T(t+s)x_0 \\ &= \varphi(t+s) \end{aligned}$$

Afirmamos que se $s \in [-k, -k+1]$, onde $k$ é um natural qualquer, então $\varphi(s) = T(k+j+s)x_{k+j}$, para $j = 0, 1, 2, \ldots$.

De fato, para $j = 0$ segue da definição de $\varphi$. Suponhamos que a afirmação é válida para algum $j \in \mathbb{N}$, isto é, $\varphi(s) = T(k+j+s)x_{k+j}$. Então para $j+1$, usando (1.16), temos

$$\begin{aligned} T(k+j+1+s)x_{k+j+1} &= T(k+j+s)T(1)x_{k+j+1} \\ &= T(k+j+s)x_{k+j} \\ &= \varphi(s). \end{aligned}$$

Se $n \geq k$ e $j = n-k$, então

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= T(k+j+s)x_{k+j} \\ &= T(k+n-k+s)x_{k+n-k} \\ &= T(n+s)x_n, \qquad \text{se } s \in [-k, -k+1]. \end{aligned}$$

Se $t < -s$, então existem $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k < n-1$ e $-1 \leq \tau \leq 0$, tais que $s = -t-k+\tau$. Daí,

$$\begin{aligned} T(t)\varphi(s) &= T(t)T(n+s)x_n \\ &= T(t+n+s)x_n \\ &= T(t+n-t-k+\tau)x_n \\ &= T(n-(k-\tau))x_n. \end{aligned}$$

Como $j = n - k$, temos $n = j + k$. Então tomando $j = 1$, obtemos

$$T(t)\varphi(s) = T(1 + k - (k - \tau))x_{k+1} = T(\tau + 1)x_{k+1}.$$

Sendo $-s = t + k - \tau$, temos que

$$T(t)\varphi(s) = T(s + t + k + 1)x_{k+1}.$$

Observando que $t + s = \tau - k$, temos que $t + s \in [-(1 + k), -k]$. Então segue da definição de $\varphi$ que

$$\begin{aligned} \varphi(t+s) &= T(k+1+t+s)x_{k+1} \\ &= T(t)T(k+1+s)x_{k+1} \\ &= T(t)\varphi(s). \end{aligned}$$

■

**Proposição 1.30** *Se $B$ é um subconjunto de $X$ tal que $\omega(B)$ é compacto e $\omega(B)$ atrai $B$, então $\omega(B)$ é invariante. Ademais,*

**i)** *Se $B$ é conexo, então $\omega(B)$ é conexo;*

**ii)** *Se $\omega(B) \subset B$, então $\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} T(t)B$.*

**Prova.** Suponhamos que $\omega(B)$ é compacto e atrai $B$, vamos mostrar que $\omega(B)$ é invariante, ou equivalentemente, que $T(t)\omega(B) = \omega(B)$, para todo $t \geq 0$.

Se $\omega(B) = \emptyset$, não há o que provar. Suponhamos então $\omega(B) \neq \emptyset$. Seja $x \in T(t)\omega(B)$, temos que $x = T(t_0)x_0$, para algum $t_0 \geq 0$ e algum $x_0 \in \omega(B)$. Como $x_0 \in \omega(B)$, pela caracterização do $\omega$-limite, existem sequências $(x_n) \subset B$ e $t_n \to \infty$ tais que $T(t_n)x_n \to x_0$, quando $n \to \infty$. Pela definição de semigrupo $T(t)x$ é contínuo em $t$ e em $x$. Daí,

$$x = T(t_0)x_0 = T(t_0) \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_0 + t_n)x_n,$$

o que implica que $x \in \omega(B)$. Logo,

$$T(t)\omega(B) \subset \omega(B).$$

Para mostrar a inclusão contrária, tomemos $x \in \omega(B)$. Pela caracterização do $\omega$-limite, temos que existem sequências $(x_n) \subset B$ e $t_n \to \infty$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$.

Como $t_n \to \infty$, por definição, dado $t > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$, para todo $n \geq n_0$, assim faz sentido definir $H = \{T(t_n - t)x_n;\ n \geq n_0\}$.

Como $\omega(B)$ atrai $B$ sob $T(t)$, temos que $T(t_n - t)x_n \to \overline{\omega(B)}$, para todo $n \geq n_0$, sendo $\omega(B)$ fechado, $T(t_n - t) \to y_n \in \omega(B)$. Logo,

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} T(t + t_n - t)x_n \\ &= T(t) \lim_{n\to\infty} T(t_n - t)x_n \\ &= T(t)y_n. \end{aligned}$$

Como $(y_n) \subset \omega(B)$, por compacidade existe $(y_{nj}) \subset (y_n)$ tal que $y_{nj} \to y \in \omega(B)$. Daí,

$$x = T(t) \lim_{j\to\infty} y_{nj} = T(t)y \in T(t)\omega(B).$$

Logo, $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$.

Das inclusões acima, segue a invariância de $\omega(B)$ sob $T(t)$.

Para provar $(i)$ suponhamos por contradição que $B$ é conexo mas $\omega(B)$ não é conexo, então existem abertos $A_1, A_2$ tais que

$$A_1 \bigcap A_2 = \emptyset, \quad \omega(B) \subset A_1 \bigcup A_2 \text{ e } \omega(B) \bigcap A_i \neq \emptyset, \text{ para } i = 1, 2.$$

Como $\omega(B)$ é compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega(B)^\epsilon \subset A_1 \bigcup A_2$, onde $\omega(B)^\epsilon$ denota a $\epsilon$-vizinhança de $\omega(B)$. Por hipótese, $\omega(B)$ atrai $B$ sob $T(t)$, então existe $t_0 > 0$ tal que

$$T(t)B \subset \omega(B)^\epsilon \subset A_1 \bigcup A_2, \forall\, t \geq t_0.$$

Sendo $B$ conexo e $T(t)$ contínuo temos que $T(t)B$ também é conexo e como $\omega(B) \bigcap A_i \neq \emptyset$ e $\omega(B)$ atrai $B$, existem sequências $(t_n)$ e $(\overline{t_n})$ com $t_n, \overline{t_n} \to \infty$, as quais podemos supor $t_n, \overline{t_n} \geq t_0$ e $t_n < \overline{t_n}$ tais que $T(t_n)B \subset A_1$ e $T(\overline{t_n})B \subset A_2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Ademais, sendo $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$ e $T(t)$ contínuo, existem sequências $(s_n)$ e $(x_n) \subset B$, com $t_n < s_n < \overline{t_n}$ e $T(s_n)x_n \notin A_1 \bigcup A_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $T(s_n)x_n \subset \omega(B)$, existe uma subsequência convergente que ainda vamos denotar por $T(s_n)x_n$, a saber,

$$T(s_n)x_n \to x \in \omega(B).$$

Observe que $T(s_n)x_n \notin A_1 \bigcup A_2$, então $T(s_n)x_n \in (A_1 \bigcup A_2)^c = A_1^c \bigcap A_2^c$, que é fechado. Logo, $x \in (A_1 \bigcup A_2)^c$.

Por outro lado, $\omega(B) \subset A_1 \bigcup A_2$, então $\omega(B) \bigcap (A_1 \bigcup A_2)^c = \emptyset$. Chegamos a uma contradição, concluindo $(i)$.

Para provar $(ii)$, começamos observando que pela primeira parte da prova, temos que $\omega(B)$ é invariante, ou seja, $T(t)\omega(B) = \omega(B)$.

Por hipótese, $\omega(B) \subset B$, assim $T(t)\omega(B) \subset T(t)B$, para todo $t \geq 0$, donde,

$$\omega(B) = T(t)\omega(B) \subset \bigcap_{t \geq 0} T(t)B.$$

Por outro lado, dado $k \geq 0$, temos que

$$T(k)B \subset \bigcup_{t \geq k} T(t)B \subset \overline{\bigcup_{t \geq k} T(t)B}, \qquad \forall\ k \geq 0.$$

Logo,

$$\bigcap_{k \geq 0} T(k)B \subset \bigcap_{k \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq k} T(t)B} = \omega(B).$$

Portanto, $\omega(B) = \bigcap_{k \geq 0} T(k)B$, mostrando $(ii)$.

■

**Proposição 1.31** *Seja $B \subset X$, não vazio, tal que $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, então*

**i)** *$\omega(B)$ é não vazio e compacto.*

**ii)** *$\omega(B)$ atrai $B$.*

**iii)** *$\omega(B)$ é invariante.*

**iv)** *Se $B$ é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.*

**Prova.** **(i)** Por definição, $\gamma^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)B$. Assim,

$$\overline{\gamma^+(B)} = \overline{\bigcup_{t \geq 0} T(t)B} \supset \overline{\bigcup_{t \geq 1} T(t)B} \supset \ldots \supset \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B} \supset \ldots \quad .$$

Daí, $\overline{\gamma^+(B)} \supset \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$, o que implica que $\omega(B) \subset \overline{\gamma^+(B)}$.

Como $X$ é um espaço métrico completo e $\omega(B)$ é um fechado que está contido em um compacto, segue-se que $\omega(B)$ é compacto, e portanto $\omega(B) \neq \emptyset$ (veja Teorema

B.11).

**(ii)** Suponhamos por contradição que $\omega(B)$ não atrai $B$, isto é, existem $\epsilon > 0$ e sequências $t_n \to \infty$ e $(x_n) \subset B$ tais que

$$d\left(T(t_n)x_n, \omega(B)\right) \geq \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Sabemos que $\{T(t_n)x_n; n \geq 0\} \subset \gamma^+(B) \subset \overline{\gamma^+(B)}$, e por hipótese, $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto. Assim, existem subsequências de $(t_n)$ e de $(x_n)$, que ainda vamos denotar por $(t_n)$ e $(x_n)$ tais que $T(t_n)x_n \to y \in \omega(B)$.

Fazendo $n \to \infty$ em (1.17) obtemos que $d\left(y, \omega(B)\right) \geq \epsilon$, que é um absurdo, pois $y \in \omega(B)$. Portanto, $\omega(B)$ atrai $B$.

**(iii)** e **(iv)** Seguem da Proposição 1.30, pois por hipótese $B$ é conexo e já mostramos que $\omega(B)$ é compacto e atrai $B$. ■

**Definição 1.32** *Seja $T(t) : X \longrightarrow X$ um $C^r$-semigrupo, para algum $r \geq 0$. O semigrupo $T(t)$ é dito assintoticamente suave se, para qualquer conjunto $B \subset X$ não vazio, fechado e limitado para o qual $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que $J$ atrai $B$.*

**Proposição 1.33** *Sejam $T(t)$ assintoticamente suave e $B \subset X$ não vazio, tal que $\gamma^+(B)$ é limitado, então*

**i)** *$\omega(B)$ é não vazio e compacto;*

**ii)** *$\omega(B)$ atrai $B$;*

**iii)** *$\omega(B)$ é invariante.*

*Em particular, se para algum $x \in X$ temos que $\gamma^+(x)$ é limitada, então $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacta e $\omega(x)$ é não vazio, compacto, conexo e invariante.*

**Prova.** **(i)** Como $\omega(B)$ é uma interseção decrescente de conjuntos compactos e não vazios, a saber

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B},$$

pelo Teorema B.11 temos que $\omega(B)$ é não vazio.

Agora vamos mostrar que $\omega(B)$ é compacto. Para tanto, mostraremos que existe um subconjunto compacto $J$ de $\overline{\gamma^+(B)}$ que contém $\omega(B)$. Começamos observando que $T(t)\overline{\gamma^+(B)} \subset \overline{\gamma^+(B)}$. De fato, dado $x \in T(t)\gamma^+(B)$, temos que $x = T(t)y$, com $y \in \gamma^+(B)$. Por definição, dizer que $y \in \gamma^+(B)$ significa que $y \in \gamma^+(x_0)$, para algum $x_0 \in B$, então $y = T(t_0)x_0$, para algum $t_0 \geq 0$ e

$$x = T(t)y = T(t)T(t_0)x_0 = T(t + t_0)x_0,$$

o que implica que $x \in \gamma^+(B)$. Logo, $T(t)\gamma^+(B) \subset \gamma^+(B)$ e sendo $T(t)$ contínuo, segue que $T(t)\overline{\gamma^+(B)} \subset \overline{\gamma^+(B)}$. Ademais, como $\overline{\gamma^+(B)}$ é não vazio, fechado e limitado, e $T(t)$ é assintoticamente suave, existe um subconjunto compacto $J$ de $\overline{\gamma^+(B)}$ tal que $J$ atrai $B$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$d\left(T(t)B, J\right) < \epsilon, \qquad \forall t \geq t_0. \tag{1.18}$$

Resta mostrar que $\omega(B) \subset J$. Mas, dado $x \in \omega(B)$, pela caracterização do $\omega$-limite, existem sequências $k_n \to \infty$ e $(x_n) \subset B$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(k_n)x_n$. Por (1.18), segue que $x \in J$, donde $\omega(B) \subset J$. Sendo $J$ um conjunto compacto e $\omega(B)$ fechado, podemos concluir que $\omega(B)$ também é compacto.

**(ii)** Suponha por contradição que $\omega(B)$ não atrai $B$, então existem $\epsilon > 0$ e sequências $t_n \to \infty$ e $(y_n) \subset B$ tais que

$$d\left(T(t_n)y_n, \omega(B)\right) > \epsilon. \tag{1.19}$$

Como $J$ atrai $B$ e $J$ é compacto, temos que $\lim_{n\to\infty} T(t_n)y_n = z \in J$. Mas pela caracterização de $\omega(B)$, temos que $z \in \omega(B)$, contradizendo (1.19). Portanto, $\omega(B)$ atrai $B$.

**(iii)** Basta observar que como $\omega(B)$ é compacto e atrai $B$, pela Proposição 1.30, temos que $\omega(B)$ é invariante, e, sendo $B$ conexo concluímos que $\omega(B)$ é conexo. ■

## 1.4 Dissipatividade de Semigrupos

Nesta seção exibimos algumas propriedades sobre dissipatividade de semigrupos.

**Definição 1.34** *Um semigrupo $T(t)$ é dito*

- *ponto dissipativo, se existe um conjunto limitado $B \subset X$ que atrai cada ponto de $X$ sob $T(t)$;*
- *compacto dissipativo, se existe um conjunto limitado $B \subset X$ que atrai cada compacto de $X$ sob $T(t)$;*

- *localmente dissipativo, se existe um conjunto limitado $B \subset X$ que atrai uma vizinhança de cada compacto de $X$ sob $T(t)$;*
- *limitado dissipativo, se existe um conjunto limitado $B \subset X$ que atrai cada conjunto limitado de $X$ sob $T(t)$.*

**Definição 1.35** *Para um $C^r$-semigrupo $T(t)$, com $t \geq 0$, dizemos que um conjunto $\mathcal{A}$ é compacto invariante maximal, se todo conjunto compacto invariante do semigrupo está em $\mathcal{A}$.*

**Definição 1.36** *Um conjunto invariante $\mathcal{A}$ é dito um atrator global, se $\mathcal{A}$ é um conjunto compacto invariante maximal que atrai os conjuntos limitados $B \subset X$. Em particular, $\omega(B)$ é compacto e está contido em $\mathcal{A}$.*

**Teorema 1.37** *Sejam $T(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, um $C^r$-semigrupo e $K$ um conjunto compacto, não vazio, que atrai os conjuntos compactos de $X$. Seja*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K.$$

*Então*

**i)** *$\mathcal{A}$ atrai conjuntos compactos de $X$;*

**ii)** *$\mathcal{A}$ é independente de $K$;*

**iii)** *$\mathcal{A}$ é maximal, compacto e invariante;*

**iv)** *Se $T(t)$ é assintoticamente suave, então para qualquer subconjunto $C$ de $X$ tal que $\gamma^+(C)$ é limitado, tem-se que $\mathcal{A}$ atrai $C$.*

**Prova.** Seja $H$ um subconjunto compacto de $X$ . Como por hipótese $K$ atrai os conjuntos compactos de $X$, então $\lim_{t \to \infty} d\,(T(t)H, K) = 0$.
**Afirmação**: $\omega(H) \subset K$ e $\overline{\gamma^+(H)}$ é compacto.

De fato, dado $\varphi \in \omega(H)$, existem sequências $t_n \to \infty$ e $(x_n) \subset H$ tais que $T(t_n)x_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$. Observe que

$$d\,(\varphi, K) \leq d\,(\varphi, T(t_n)x_n) + d\,(T(t_n)x_n, K)\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos que $d(\varphi, K) = 0$, donde, $\omega(H) \subset K$. Além disso, como $\overline{\gamma^+(H)} \subset \omega(H)$, temos que $\overline{\gamma^+(H)}$ é compacto, concluindo a afirmação.

Note que a afirmação acima vale para qualquer compacto $H$ de $X$, em particular, fazendo $H = K$ e aplicando a Proposição 1.31, obtemos que $\omega(K)$ é compacto e atrai

$K$. Assim, $d(\varphi, K) = 0$, o que implica que $\omega(H) \subset K$. Essa inclusão vale para qualquer compacto $H$ de $X$, em particular, faça $H = K$, donde, $\omega(K) \subset K$. Daí, como $K$ atrai compactos de $X$, temos que $\mathcal{A}$ também atrai os compactos de $X$, e aplicando a Proposição 1.30, temos que $\omega(K)$ é invariante e

$$\omega(K) = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K.$$

Note ainda que, pelo fato de $K$ atrair compactos de $X$, segue que $\omega(K)$ também atrai compactos de $X$, mostrando **(i)**.

Para mostrar que $\mathcal{A}$ independe de $K$, considere $K_1$ um outro subconjunto de $X$ com as mesmas hipóteses assumidas sobre $K$. Como $\omega(K)$ atrai compactos de $X$, pelo que acabamos de mostrar, $\omega(K_1) \subset \omega(K)$. Analogamente, como $K$ é compacto e $\omega(K_1)$ atrai os compactos de $X$, temos que $\omega(K) \subset \omega(K_1)$, donde segue a igualdade, mostrando **(ii)**. Para concluir **(iii)**, basta observar que a maximalidade segue diretamente da independência de $K$.

Para mostrar **(iv)**, considere $C$ um subconjunto de $X$, tal que $\gamma^+(C)$ é limitado e note que, $T(t)\overline{\gamma^+(C)} \subset \overline{\gamma^+(C)}$. De fato, dado $x \in T(t)\overline{\gamma^+(C)}$, temos que $x = T(t)y$, para algum $y \in \overline{\gamma^+(C)}$. Como $y \in \overline{\gamma^+(C)}$, existe $(y_n) \subset \gamma^+(C)$, tal que $y = \lim_{n \to \infty} y_n$, daí, existem sequências $t_n \to \infty$ e $(c_n) \subset C$, tais que $y_n = T(t_n)c_n$. Assim, $x = \lim_{n \to \infty} T(t + t_n)c_n$, donde $x \in \overline{\gamma^+(C)}$.

Logo, usando a hipótese de $T(t)$ ser assintoticamente suave, temos que existe um compacto $K$, tal que $K \subset \overline{\gamma^+(C)}$ e $K$ atrai $\overline{\gamma^+(C)}$, então $\mathcal{A}$ atrai $\overline{\gamma^+(C)}$. Como $C \subset \overline{\gamma^+(C)}$, segue que $\mathcal{A}$ atrai $C$. ■

**Lema 1.38** *Se $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, é um semigrupo assintoticamente suave e compacto dissipativo, então existe um conjunto compacto invariante que atrai os compactos de $X$.*

**Prova.** Veja [12], p.39, Lema 3.4.4. ■

**Lema 1.39** *Seja $T(t) : X \to X$, com $t \geq 0$, um semigrupo assintoticamente suave e ponto dissipativo.*

**i)** *Se a órbita de qualquer compacto é limitada, então $T(t)$ é localmente compacto dissipativo;*

**ii)** *Se a órbita de qualquer conjunto limitado é limitada, então $T(t)$ é limitado dissipativo.*

**Prova.** **(i)** Queremos mostrar que existe um conjunto limitado que atrai uma vizinhança de compactos de $X$ sob $T(t)$.

Por hipótese, $T(t)$ é ponto dissipativo, então existe um conjunto limitado $B$ que atrai pontos de $X$ sob $T(t)$. Defina $U = \{x \in B; \gamma^+(x) \subset B\}$. Observe que $U$ atrai pontos de $X$, pois $U \subset B$ e $B$ atrai pontos de $X$. Além disso, $\gamma^+(U)$ é limitado. De fato, tomando $y \in \gamma^+(U)$, temos que existe $u_0 \in U$ tal que $y = \gamma^+(u_0)$, e como $u_0 \in U$, por definição $\gamma^+(u_0) \subset B$, isto é, $y \in B$, mostrando que $\gamma^+(U) \subset B$, que é limitado.

Note ainda que $T(t)\gamma^+(U) \subset \gamma^+(U)$. Com efeito, dado $x \in T(t)\gamma^+(U)$, temos que existem $t_0 \geq 0$ e $u_0 \in U$ tais que $x \in T(t_0)\gamma^+(x_0)$, para algum $x_0 \in U$. Então, para $t \geq 0$

$$x = T(t_0)T(t)x_0 = T(t + t_0)x_0,$$

ou seja, $x \in \gamma^+(x_0)$, donde, $x \in \gamma^+(U)$.

Logo, usando que $T(t)$ é assintoticamente suave segue que, existe um subconjunto compacto $K$ de $\overline{U}$ tal que $K$ atrai $\overline{U}$. Como $U \subset \overline{U}$, em particular, $K$ atrai $\overline{U}$. Ademais, como $U$ atrai pontos de $X$ e $K$ atrai $\overline{U}$, temos que $K$ atrai pontos de $X$. Logo, $K$ atrai ele mesmo, implicando que $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Seja $J = \omega(K)$, temos que $J$ é compacto invariante e atrai pontos de $K$, mostrando **(i)**.

Para mostrar **(ii)** suponhamos que a órbita de qualquer conjunto compacto é limitado. Primeiramente, vamos provar que existe uma vizinhança $V$ de $J$ tal que $\gamma^+(V)$ é limitado. Caso contrário, existem uma sequência $(x_j) \subset J$ tal que $x_j \to y$, para algum $y \in J$ e uma sequência $t_j \to \infty$ tal que $|T(t_j)x_j| \to \infty$, quando $j \to \infty$. Então $\overline{\{x_j; j \geq 1\}}$ é compacto, com $\gamma^+(\overline{\{x_j.j \geq 1\}})$ ilimitado, contradizendo a hipótese. Assim, podemos afirmar que existe uma vizinhança $V$ de $J$ tal que $\gamma^+(V)$ é limitada. Como $J$ atrai pontos de $X$ e $T$ é contínua para $x \in X$, existe uma vizinhança $O_x$ de $x$ e um $t_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(t)O_x \subset \gamma^+(V), \text{ para } t \geq 0,$$

ou seja, $\gamma^+(V)$ atrai $O_x$, mostrando que $\gamma^+(V)$ atrai uma vizinhança de um conjunto compacto e, portanto, $T(t)$ é localmente compacto dissipativo.

Por hipótese, as órbitas de conjuntos limitados são limitados, em particular, as órbitas de conjuntos compactos também são limitadas. Pela demonstração acima, $T(t)$

é localmente compacto dissipativo, em particular, $T(t)$ é compacto dissipativo. Assim, como $T(t)$ é compacto dissipativo e $T(t)$ é assintoticamente suave, pelo Lema 1.38, existe um conjunto compacto invariante $K$ que atrai os compactos de $X$.

Definindo

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K,$$

temos que $\mathcal{A}$ é limitado, e pelo Teorema 1.37, dado qualquer subconjunto $C$ de $X$ tal que $\gamma^+(C)$ é limitado , temos que $\mathcal{A}$ atrai $C$, donde $T(t)$ é limitado dissipativo. ■

**Teorema 1.40** *Seja $T(t) : X \to X$, um $C^r$-semigrupo, com $t \geq 0$, assintoticamente suave, ponto dissipativo e tal que órbitas de conjuntos limitados são limitadas, então existe um atrator global $\mathcal{A}$.*

**Prova.** Como $T(t)$ é assintoticamente suave, ponto dissipativo e a órbita de qualquer conjunto limitado é limitada, pela demonstração do Lema 1.39 existe um conjunto compacto invariante $K$ que atrai os compactos de $X$. Definindo

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K,$$

pelo ítem **(iii)** do Teorema 1.37, $\mathcal{A}$ é compacto e invariante maximal. Ademais, sendo $B$ um subconjunto limitado de $X$, por hipótese $\gamma^+(B)$ é limitado, e usando novamente o Teorema 1.37, como $T(t)$ é assintoticamente suave e $\gamma^+(B)$ é limitado, concluímos que $\mathcal{A}$ atrai $B$. Portanto, $\mathcal{A}$ é um atrator global. ■

**Teorema 1.41** *Seja $T(t) : X \to X$ um $C^r$-semigrupo, $t \geq 0$ e $\mathcal{A}$ um atrator global, então o fluxo $T(t)$ é assintoticamente suave.*

**Prova.** Seja $B$ um subconjunto limitado e fechado de $X$ tal que $T(t)B \subset B$. Como $\mathcal{A}$ é um atrator global, temos que $\mathcal{A}$ atrai $B$, então

$$d\,(T(t)B, \mathcal{A}) \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

**Afirmação I**: O conjunto $B \cap \mathcal{A}$ é não vazio e compacto.

De fato, se $B \cap \mathcal{A} = \emptyset$, como $T(t)B \subset B$ teríamos $T(t)B \cap \mathcal{A} = \emptyset$, o que implica $d\,(T(t)B, \mathcal{A}) > 0$, para todo $t > 0$, já que $B$ é fechado e $\mathcal{A}$ é compacto, o que é um absurdo. Logo, $B \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Além disso, como $B \cap \mathcal{A}$ é subconjunto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é compacto, $B \cap \mathcal{A}$ também é compacto.

**Afirmação II**: Dado $C$ um conjunto limitado, para todo $\epsilon > 0$, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)\,(C \cap B) \subset (\mathcal{A} \cap B)^\epsilon$, para todo $t \geq t_0$.

Com efeito, sendo $\mathcal{A}$ atrator global, dado $\delta > 0$, existe $t_1 > 0$ tal que $T(t)C \subset \mathcal{A}^\delta$, para todo $t \geq t_1$, onde $\mathcal{A}^\delta$ denota a $\delta-$vizinhança de $\mathcal{A}$.

Observe que $T(t)(C \cap B) \subset \mathcal{A}^\delta \cap B$, pois dado $y \in T(t)(C \cap B)$, temos que $y = T(t_0)x$, para algum $t_0 \geq 0$ e $x \in C \cap B$. Como $x \in C$, segue que $y \in \mathcal{A}^\delta$, e como $x \in B$ temos que $y \in B$, donde $y \in \mathcal{A}^\delta \cap B$.

Dessa forma é suficiente mostrar que $\mathcal{A}^\delta \cap B \subset (\mathcal{A} \cap B)^\epsilon$, para algum $\delta$ conveniente e para todo $\epsilon > 0$. Sabemos que $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^\epsilon$ é fechado, então $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^\epsilon$ é compacto. Como $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^\epsilon \cap B \neq \emptyset$, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $d\big(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\epsilon}{2}}, B\big) > \epsilon_1$. Logo, para cada $\epsilon > 0$, escolha $\delta = \min\{\epsilon, \frac{\epsilon_1}{2}\}$. Como podemos escrever,

$$\mathcal{A} = \big(A \setminus (A \cap B)^{\frac{\epsilon}{2}}\big) \cup (A \cap B)^{\frac{\epsilon}{2}},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^\delta \cap B &= \left[\big(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\epsilon}{2}}\big)^\delta \cap B\right] \cup \left[\big((\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\epsilon}{2}}\big)^\delta \cap B\right] \\
&= \big((\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\epsilon}{2}}\big)^\delta \cap B \\
&\subset (\mathcal{A} \cap B)^\epsilon \cap B \\
&\subset (\mathcal{A} \cap B)^\epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $T(t)(C \cap B) \subset (\mathcal{A} \cap B)^\epsilon$, para todo $t \geq t_0$. Em particular, tomando $C = B$ obtemos que $T(t)B \subset (A \cap B)^\epsilon$, exibindo assim um conjunto compacto $J = A \cap B$ que atrai $B$ por $T(t)$, mostrando que $T(t)$ é assintoticamente suave. ■

**Definição 1.42** *Sejam $B \subset X$ e $U$ um subconjunto aberto de $X$. Dizemos que $B$ é absorvente em $U$ se dado um subconjunto limitado $B_0$ de $U$, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)B_0 \subset B$, para todo $t \geq t_0$. Em outras palavras, a órbita de qualquer conjunto limitado em $U$ entra em $B$ após um certo tempo.*

**Observação 1.43** *Seja $T(t)$ um semigrupo, com $t \geq 0$. A existência de um atrator global $\mathcal{A}$ implica na existência de um conjunto absorvente, que é exatamente uma vizinhança do atrator. De fato, seja $B_0 \subset X$ limitado, como $\mathcal{A}$ é um atrator global, por definição, dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\epsilon)$ tal que*

$$d\,(T(t)B_0, \mathcal{A}) \leq \frac{\epsilon}{2},\ \forall\ t \geq t_0.$$

*Logo, $T(t)B_0 \subset \mathcal{A}^\epsilon$, para todo $t \geq t_0$.*

A recíproca da observação anterior é verdadeira se adicionarmos uma das hipóteses abaixo.

$(H_1)$ Os operadores $T(t)$ são uniformemente compactos para $t$ suficientemente grande, isto é, dado $B$ limitado, existe $t_0 \geq 0$ tal que $\displaystyle\bigcup_{t\geq 0} T(t)B$ é relativamente compacto.

$(H_2)$ $X$ é um espaço de Banach e para todo $t \geq 0$, podemos escrever

$$T(t) = T_1(t) + T_2(t),$$

onde $T_1(t)$ é uniformemente compacto para $t$ suficientemente grande e, dado $C$ subconjunto limitado de $X$, temos $r_c(t) = \sup\limits_{\varphi\in C} \|T_2(t)\varphi\|_X \to 0$, quando $t \to \infty$.

Para demonstrar a existência do atrator global usando cada uma das hipóteses acima precisamos demonstrar os 3 lemas a seguir.

**Lema 1.44** *Suponhamos que a hipótese $(H_2)$ seja válida. Se $(\varphi_n)$ é uma sequência limitada e $t_n \to \infty$, então $T_2(t_n)\varphi_n \to 0$ e $T_1(t_n)\varphi_n$ é convergente se, e somente se $T(t_n)\varphi_n$ converge, quando $n \to \infty$, além disso, elas têm limites iguais.*

**Prova.** Da hipótese $(H_2)$, dado $C$ um subconjunto limitado de $X$, temos que

$$0 \leq \|T_2(t)\varphi\|_X \leq \sup_{\varphi\in C} \|T_2(t)\varphi\|_X = r_C(t).$$

Como $(\varphi_n)$ é limitada, existe um subconjunto limitado $C_0$ de $X$, tal que $(\varphi_n) \subset C_0$. Daí,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \|T_2(t_n)\varphi_n\|_X \leq \lim_{n\to\infty} r_{C_0}(t_n) = 0.$$

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} T_2(t_n)\varphi_n = 0$. Além disso, como

$$T(t_n)\varphi_n = T_1(t_n)\varphi_n + T_2(t_n)\varphi_n$$

temos que $T(t_n)\varphi_n$ converge se, e somente se $T_1(t_n)$ converge. Ademais, passando ao limite quando $n \to \infty$, temos

$$\lim_{n\to\infty} T(t_n)\varphi_n = \lim_{n\to\infty} T_1(t_n).$$

■

**Lema 1.45** *Suponha que $T(t)$ satisfaz $(H_1)$ ou $(H_2)$. Então, para qualquer subconjunto não vazio e limitado $B_0$ de $X$, $\omega(B_0)$ é não vazio, compacto e invariante.*

**Prova.** Suponhamos válido $(H_1)$. Dado $B_0 \subset X$ não vazio e limitado, existe $t_0 \geq 0$ tal que $\overline{\bigcup_{t \geq t_0} T(t)B_0}$ é compacto, ou seja, $\overline{\gamma^+(B_0)}$ é compacto, e pela Proposição 1.31 temos que $\omega(B_0)$ é não vazio, compacto e invariante.

Suponhamos válido $(H_2)$. Pelo Lema 1.44,

$$\omega(B_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T_1(t)B_0} = \omega_1(B_0).$$

De fato, tome $\varphi \in \omega(B_0)$, existem sequências $(\varphi_n) \subset B_0$ e $t_n \to \infty$ tais que $T(t_n)\varphi_n \to \varphi$, quando $n \to \infty$. Aplicando o Lema 1.44, temos que $T_1(t_n)\varphi_n \to \varphi$, quando $n \to \infty$, o que implica que $\varphi \in \omega_1(B_0)$, donde, $\omega(B_0) \subset \omega_1(B_0)$. A inclusão contrária é análoga e segue a igualdade.

Observe que,

$$\overline{\bigcup_{t \geq 0} T_1(t)B_0} \supset \overline{\bigcup_{t \geq 1} T_1(t)B_0} \supset \ldots \supset \overline{\bigcup_{t \geq s} T_1(t)B_0} \supset \ldots$$

é uma inclusão decrescente de conjuntos fechados e não vazios, assim aplicando o Teorema B.11 temos que a interseção desses conjuntos, $\omega(B_0)$, é compacta e não vazia.

Resta mostrar que $\omega(B_0)$ é invariante. Para isto, dado $\psi \in T(t)\omega(B_0)$, temos que $\psi = T(t)\varphi$, para algum $\varphi \in \omega(B_0)$. Assim, existem sequências $t_n \to \infty$ e $(\varphi_n) \subset B_0$ tal que $T(t_n)\varphi_n \to \varphi$, quando $n \to \infty$. Daí,

$$\psi = T(t)\varphi = T(t) \lim_{n \to \infty} T(t_n)\varphi_n = \lim_{n \to \infty} T(t + t_n)\varphi_n,$$

isto é, $\psi \in \omega(B_0)$, mostrando que $T(t)\omega(B_0) \subset \omega(B_0)$.

Para mostrar a inclusão contrária, tome $\varphi \in \omega(B_0)$, temos que existem sequências $t_n \to \infty$ e $(\varphi_n) \subset B_0$ tais que $T(t_n)\varphi_n \to \varphi$, quando $n \to \infty$. Para $t_n - t \geq 0$, temos que

$$T(t_n - t)\varphi_n = T_1(t_n - t)\varphi_n + T_2(t_n - t)\varphi_n.$$

Como $T_1(t_n - t)$ é uniformemente compacto, existe uma subsequência convergente, a saber, $T_1(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi$, quando $n_i \to \infty$, para algum $\psi \in \omega(B_0)$. Pelo Lema 1.44, temos que $T_2(t_n - t)\varphi_n \to 0$, consequentemente $T_2(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to 0$. Logo, $T(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi$, quando $n_i \to \infty$, donde $\psi \in \omega(B_0)$ e pela continuidade de $T(t)$

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} T(t_{n_i})\varphi_{n_i} = T(t) \lim_{n \to \infty} T(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} = T(t)\psi,$$

então $\varphi \in T(t)(\omega(B_0))$ mostrando que $\omega(B_0) \subset T(t)\omega(B_0)$. Portanto, $\omega(B_0)$ é invariante. ■

**Lema 1.46** *Seja $U$ aberto de $X$ conexo e convexo. Se $K$ é um subconjunto de $U$ invariante e compacto que atrai compactos de $X$ sob o semigrupo $T(t)$, com $t \geq 0$, então $K$ é conexo.*

**Prova.** Chamemos de $B$ o fecho convexo de $K$, $B = \overline{convK}$, como $K$ é compacto, conforme o Teorema B.10 $B$ também o é. Além disso, pela definição de fecho convexo, como $U$ é conexo e $K \subset U$, temos que $B \subset U$, donde, segue que $K$ atrai $B$.

Suponhamos por contradição que $K$ não é conexo. Então existem abertos $A_1$ e $A_2$ tais que

$$A_1 \cap K \neq \emptyset, \quad A_2 \cap K \neq \emptyset, \quad K \subset A_1 \cup A_2 \text{ e } A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Como $K \subset B$ e $K$ é inavariante sob $T(t)$, temos que

$$K = T(t)K \subset T(t)B.$$

Assim, $A_i \cap T(t)B \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$.

Como a imagem de um conexo por uma aplicação contínua é conexo, temos que $T(t)B$ é conexo. Assim $A_1 \cup A_2$ não cobre $T(t)B$, ou seja, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in T(n)B$ tal que $x_n \notin A_1 \cup A_2$.

Se a hipótese $(H_1)$ for válida, então $(x_n)$ é ralativamente compacto. Se a hipótese $(H_2)$ for válida, podemos escrever

$$x_n = T_1(n)y_n + T_2(n)y_n,$$

para alguma sequência $(y_n) \subset B$, onde $T_1(n)$ é uniformemente compacto, ou seja, existe $n_0 \geq 0$ tal que $\bigcup_{n \geq n_0} T_1(n)y_n$ é relativamente compacto em $X$, e ainda $T_2(n)y_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Aplicando o Lema 1.44, temos que $(x_n)$ é relativamente compacta. Como $K$ atrai os pontos de $(x_n)$, deve existir uma subsequência $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ tal que

$$x_{n_k} \to x \in K \subset A_1 \cup A_2.$$

Mas este ponto $x \notin A_1 \cup A_2$, um absurdo. ■

Agora podemos mostrar quando a existência de um conjunto absorvente implica na existência de um atrator global.

**Teorema 1.47** *Seja $X$ um espaço métrico e $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, um $C^r$-semigrupo, para algum $r \geq 0$. Se $T(t)$ satisfaz a hipótese $(H_1)$ ou $(H_2)$ e existem um conjunto aberto $U$ e um subconjunto limitado $B$ de $U$ tal que $B$ é absorvente em $U$, então*

**i)** *$\mathcal{A} = \omega(B)$ é o atrator compacto maximal em $U$ que atrai os limitados de $U$;*

**ii)** *Se $X$ é Banach e $U$ é conexo e convexo, então $\mathcal{A}$ também é conexo.*

**Prova.** **i)** Suponhamos inicialmente que vale a hipótese $(H_1)$, isto é, para todo conjunto limitado $B$, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_0} T(t)B}$$

é compacto, ou ainda, $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto. Assim, usando a Proposição 1.31, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai $B$.

Suponha por contradição que $\omega(B)$ não seja um atrator, então existe algum conjunto limitado $B_0$ de $U$ tal que $\omega(B)$ não atrai $B_0$ sob $T(t)$, isto é, existe $\epsilon_0 > 0$ e $t_n \to \infty$ tal que

$$d\left(T(t_n)B_0, \omega(B)\right) \geq \epsilon_0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $b_n \in B_0$ tal que

$$d\left(T(t_n)b_n, \omega(B)\right) \geq \frac{\epsilon_0}{2}. \tag{1.20}$$

Como, por hipótese, $B$ é absorvente em $U$ e sendo $B_0 \subset U$ é limitado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T(t_n)B_0 \subset B$, para todo $n \geq n_0$, o que implica que $T(t_n)b_n \subset B$, para todo $t_n \geq t_{n_0}$. Da hipótese $(H_1)$ obtemos que $\overline{T(t_n)b_n}$ é compacto, assim, existe uma subsequência convegente $T(t_{n_i})b_{n_i}$ tal que

$$\lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i})b_{n_i} = \beta,$$

donde,

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i} - t_{n_0})T(t_{n_0})b_{n_i}.$$

Como $T(t_{n_0})b_{n_i} \in B$, segue que $\beta \in \omega(B)$, absurdo, pois isto contraria (1.20).

Resta mostrar que $\omega(B)$ é maximal. De fato, seja $A$ um atrator limitado tal que $A \subset U$. Como $B$ é absorvente, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)A \subset B$, para todo $t \geq t_0$. Como $A$ é invariante, temos que $A = \omega(A) \subset \omega(B)$, ou seja, $\omega(B)$ é maximal.

**ii)** Vimos que $\omega(B) \subset U$ é invariante compacto e atrai os limitados de $U$, em particular, atrai os compactos. Então, segue do Lema 2.2 que $\omega(B)$ é conexo.

Suponhamos agora válido a hipótese $(H_2)$. Como $B$ é limitado, pelo Lema 1.45, temos que $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Resta mostrar que $\omega(B)$ é maximal e atrai os limitados de $U$.

Suponha por contradição que existe um conjunto limitado $B_0 \subset U$ tal que $\omega(B)$ não atrai $B_0$ sob $T(t)$. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ e $t_n \to \infty$ tal que

$$d\left(T(t_n)B_0, \omega(B)\right) \geq \epsilon_0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in B_0$ tal que $d\left(T(t_n)b_n, \omega(B)\right) \geq \frac{\epsilon_0}{2}$. Como $B$ é absorvente, existe $t_{n_0} > 0$ tal que $T(t_n)b_n \subset B$, para todo $n \geq n_0$.

Usando a hipótese $(H_2)$, $T(t_n)b_n = T_1(t_n)b_n + T_2(t_n)b_n$, onde $T_1(t_n)b_n$ é relativamente compacto. Aplicando o Lema 1.44, temos que $T(t_n)b_n$ é uma sequência relativamente compacta. A maximalidade de $\omega(B)$ segue de maneira inteiramente análoga a primeira parte da prova. ■

## 1.5 Sistema Gradiente

Nesta seção, voltamos nossa atenção para uma classe especial de semigrupos, os quais possuem um funcional energia que decresce ao longo das órbitas.

**Definição 1.48** *Seja $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, um $C^r$-semigrupo, para algum $r \geq 1$. Uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ é chamada funcional de Lyapunov se*

**i)** *$V(x)$ é limitado inferiormente;*

**ii)** *$V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$;*

**iii)** *$V(T(t)x)$ é não crescente em $t$ para cada $x \in X$;*

**iv)** *Se $x$ é tal que $T(t)x$ está definido para $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$, para $t \in \mathbb{R}$, então $x$ é um ponto de equilíbrio, isto é, $T(t)x = x$, para todo $t \geq 0$.*

**Definição 1.49** *Um semigrupo $T(t) : X \to X$ é fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0,$$

*para cada $x \in X$.*

**Definição 1.50** *Um $C^r$-semigrupo fortemente contínuo $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$ e $r \geq 1$ é um sistema gradiente se:*

**i)** *Cada órbita positiva limitada é pré-compacta;*

**ii)** *Existe um funcional de Liapunov para $T(t)$.*

**Proposição 1.51** *Sejam $T(t) : X \to X$ um $C^r$-semigrupo e $E$ o conjunto dos pontos de equilíbrio de $T(t)$,*

**i)** *se $T(t)$ é um sistema gradiente, então $\omega(x) \subset E$, para cada $x \in X$;*

**ii)** *Se $\gamma^-(x)$ é relativamente compacto, então $\alpha(x) \subset E$, para cada $x \in X$.*

**Prova.** **i)** Sejam $T(t)$ um sistema gradiente e $V$ um funcional de Lyapunov para $T(t)$. Por definição, $\gamma^+(x)$ é relativamente compacto, então existe $c > 0$, tal que $c < V(T(t)x)$, para cada $t \geq 0$ e para todo $x \in X$. Além disso, como $V(T(t)x)$ é não crescente em $t$ para cada $x \in X$, temos que $\lim\limits_{t\to\infty} V(T(t)x) = c$.

Dado $y \in \omega(x)$, pela caracterização do $\omega$-limite existe $t_n \to \infty$ tal que $T(t_n)x \to y$. Pela continuidade de $T(t)$ segue que

$$\lim_{n\to\infty} T(t)T(t_n)x = T(t) \lim_{n\to\infty} T(t_n)x = T(t)y,$$

e da continuidade de $V$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} V(T(t)T(t_n)x) = V(\lim_{n\to\infty} T(t)T(t_n)x) = V(T(t)y).$$

Logo,

$$V(T(t)y) = \lim_{n\to\infty} V(T(t)T(t_n)x) = \lim_{n\to\infty} V(T(t+t_n)x) = c.$$

Em particular, para $t = 0$, temos que $V(y) = c$, portanto, $V(T(t)y) = V(y)$, o que implica, pelo ítem **iv** da Definição 1.48, que $y$ é um ponto de equilíbrio, isto é, $y \in E$, mostrando que $\omega(x) \subset E$, para cada $x \in X$.

A demonstração de **ii** é análoga. ■

# Capítulo 2

# Existência e Suavidade de Soluções para uma Classe de Equações de Evolução

Neste capítulo, estudamos o comportamento assintótico do problema de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(u(x,t)),\ x \in \Omega,\ t \geq 0 \\ u(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ u(x,0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde a aplicação $F : X \to X$ é definida por

$$F(u) = \begin{cases} -u(x,t) + g(\beta J * (f \circ u) + \beta h), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde "$*$" denota o produto convolução em $\mathbb{R}^n$. Aqui $u = u(x,t)$ denota uma função sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ a valores reais, $J \in C^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função simétrica, não negativa e com suporte na bola de centro na origem e raio 1, $f$ é uma função sobre $\mathbb{R}$, não negativa e não decrescente, $h$ e $\beta$ são constantes não negativas e $\Omega$ é um aberto suave e limitado de $\mathbb{R}^n$.

## 2.1 Boa Posição em $L^p(\Omega)$

Nesta seção mostramos que o Problema (2.1) é bem posto no espaço de fase $X$ dado por

$$X = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n); u(x) = 0, \text{ se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\},$$

com a norma induzida de $L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $\Omega$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, isto é, mostramos que a solução existe, é única e depende continuamente dos dados iniciais.

O espaço $X$ é canonicamente isomorfo ao espaço $L^p(\Omega)$ e, por conveniência, usaremos a mesma notação para representar uma função de $u \in X$ ou sua restrição a $L^p(\Omega)$.

Para um melhor entendimento, listamos abaixo as condições que poderão ser exigidas sob $g$ e $f$, quando necessário.

$(H_1)$ $g$ é globalmente Lipschitz, isto é, existe $k > 0$ tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq k\,|x - y|\,, \forall\; x, y \in \mathbb{R};$$

$(H_2)$ Existem constantes $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$|g(x)| \leq k_1\,|x| + k_2, \forall\; x \in \mathbb{R};$$

$(H_3)$ $f$ é globalmente Lipschitz, isto é, existe $c > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|\,, \forall\; x, y \in \mathbb{R};$$

$(H_4)$ Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq c_1\,|x| + c_2, \forall\; x \in \mathbb{R};$$

$(H_5)$ $g$ é localmente Lipschitz, isto é, dado $x \in \mathbb{R}$, existem $M = M(x) > 0$ e uma vizinhança $V_x$ de $x$ tais que

$$|g(x) - g(y)| \leq M\,|x - y|\,, \forall\; y \in V_x;$$

$(H_6)$ $f$ é localmente Lipschitz, isto é, dado $x \in \mathbb{R}$ existe $N = N(x) > 0$ e uma vizinhança $V_x$ de $x$ tais que

$$|f(x) - f(y)| \leq N\,|x - y|\;\;, \forall\; y \in V_x;$$

$(H_7)$ $f'$ é limitada, ou seja, existe $M_1 > 0$ tal que

$$|f'(x)| \leq M_1, \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$(H_8)$ $g'$ é localmente Lipschitz, isto é, dado $x \in \mathbb{R}$, existem $L = L(x) > 0$ e uma vizinhança $V_x$ de $x$ tais que

$$|g'(x) - g'(y)| \leq L\,|x - y| \ , \forall\, y \in V_x.$$

$(H_9)$ Existem constantes positivas $s_1$ e $s_2$ tais que

$$|g'(x)| \leq s_1\,|x| + s_2, , \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Observe que a hipótese $(H_1)$ implica na hipótese $(H_2)$ com $k_1 = k$, assim como $(H_3)$ implica na hipótese $(H_4)$, com $c_1 = c$.

A seguir, vamos provar algumas estimativas, que serão utilizadas ao longo do texto.

**Lema 2.1** *Para $u \in L^p(\Omega)$, temos que $|(J * u)(x)| \leq \|J\|_\infty \|u\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{q}}$.*

**Prova.** Seja $u \in L^p(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} |(J * u)(x)| &= \left| \int_\Omega J(x-y)u(y)dy \right| \\ &\leq \int_\Omega J(x-y)\,|u(y)|\,dy \\ &\leq \|J\|_\infty \int_\Omega |u(y)|\,dy. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, temos que $u \in L^1(\Omega)$ e $\|u\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|1\|_{L^q}$. Assim,

$$|(J * u)(x)| \leq \|J\|_\infty \|u\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{q}}.$$

$\blacksquare$

**Lema 2.2** *Seja $f$ satisfazendo a hipótese $(H_4)$. Então para $u \in L^p(\Omega)$, temos que*

$$\|f \circ u\|_{L^p} \leq c_1 \|u\|_{L^p} + c_2 |\Omega|^{\frac{1}{p}}.$$

**Prova.** Para $u \in L^p(\Omega)$, usando $(H_4)$ e a desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned}
\|f \circ u\|_{L^p} &= \left(\int_\Omega |f(u(y))|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega (c_1 |u(y)| + c_2)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|c_1 u + c_2\|_{L^p} \\
&\leq c_1 \|u\|_{L^p} + c_2 |\Omega|^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

■

**Observação 2.3** *Dos Lemas 2.1 e 2.2 segue que*

$$\begin{aligned}
|J * f(u)(x)| &\leq \|J\|_\infty \|f(u)\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|J\|_\infty (c_1 \|u\|_{L^p} + c_2 |\Omega|^{\frac{1}{p}}) |\Omega|^{\frac{1}{q}} \\
&= \|J\|_\infty (c_1 |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^p} + c_2 |\Omega|).
\end{aligned}$$

**Proposição 2.4** *Suponha que $g$ e $f$ satisfazem as condições $(H_2)$ e $(H_4)$. Então para cada $u \in L^p(\Omega)$, a aplicação $F$ dada por*

$$F(u) = \begin{cases} -u + g(\beta J * (f \circ u) + \beta h), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

*é uma função de $L^p(\Omega)$.*

**Prova.** Considere $1 \leq p < \infty$ e seja $u \in L^P(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|F(u)\|_{L^p} &= \|g\left(\beta J * (f \circ u) + \beta h\right)\|_{L^p} \\
&= \left(\int_\Omega |g\left(\beta(J * f(u))(x) + \beta h\right)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega (k_1 |\beta(J * f(u))(x) + \beta h| + k_2)^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Assim, denotando por $q$ o expoente conjugado de $p$ e usando a Observação 2.3, temos que

$$\begin{aligned}
\|F(u)\|_{L^p} &\leq \left(\int_\Omega \left(k_1\beta \|J\|_\infty \left(c_1 |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^p} + c_2 |\Omega|\right) + k_1\beta h + k_2\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= k_1\beta \|J\|_\infty \left(c_1 |\Omega| \|u\|_{L^p} + c_2 |\Omega|^{\frac{1}{p}+1}\right) + k_1\beta h |\Omega|^{\frac{1}{p}} + k_2 |\Omega|^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Mostrando que $F$ é uma função de $L^p(\Omega)$. ■

**Proposição 2.5** *Suponha $g$ e $f$ como nas hipóteses $(H_1)$ e $(H_3)$. Então a função $F : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ dada por*

$$F(u) = -u + g(\beta J * (f \circ u) + \beta h)$$

*é globalmente Lipschitziana em $L^p(\Omega)$.*

**Prova.** De fato, dados $u, v \in L^p(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_{L^p} &= \|-u + g(\beta J * (f \circ u) + \beta h) + v - g(\beta J * (f \circ v) + \beta h)\|_{L^p} \\
&\leq \|u - v\|_{L^p} + \|g(\beta J * (f \circ u) + \beta h) - g(\beta J * (f \circ v) + \beta h)\|_{L^p} \\
&\leq \|u - v\|_{L^p} + k \|\beta J * (f \circ u) + \beta h - \beta J * (f \circ v) - \beta h\|_{L^p} \\
&\leq \|u - v\|_{L^p} + k\beta \|J * (f \circ u - f \circ v)\|_{L^p} .
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young e a hipótese $(H_3)$ segue que

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_{L^p} &\leq \|u - v\|_{L^p} + k\beta \|J\|_{L^1} c \|u - v\|_{L^p} \\
&= (1 + kc\beta \|J\|_{L^1}) \|u - v\|_{L^p} \\
&= m \|u - v\|_{L^p} ,
\end{aligned}$$

onde $m = 1 + kc\beta \|J\|_{L^1}$. ■

**Corolário 2.6** *Nas mesmas hipóteses da Proposição 2.5, temos que o problema de Cauchy (2.1) possui uma única solução, a qual está globalmente definida e é contínua com relação a condição inicial.*

**Prova.** Pela Proposição 2.5, temos que a função definida pelo lado direito de (2.1) é globalmente Lipschitz. Aplicando o Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard, temos que para cada $u_0 \in L^p(\Omega)$ existe uma única solução $u \in C^1([0, \infty), L^p(\Omega))$ que satisfaz o problema (2.1).

Agora, sejam $u(x, t)$ e $v(x, t)$ soluções do problema (2.1) com condições iniciais $u_0$ e $v_0$, respectivamente, vamos mostrar que a solução é contínua com relação a condição inicial.

Pela fórmula da variação das constantes temos que a solução de (2.1) para $x \in \Omega$ e $t \geq 0$ é dada por

$$u(x, t) = e^{-t} u_0(x) + \int_0^t e^{-(t-s)} g(\beta J * (f \circ u)(x, s) + \beta h) dx.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
e^t \left\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \right\|_{L^p} &\leq \left\| u_0 - v_0 \right\|_{L^p} + \int_0^t e^s \left\| g(\beta J * f(u)(\cdot,s) + \beta h) \right. \\
&\quad \left. - \, g(\beta J * f(v)(\cdot,s) + \beta h) \right\|_{L^p} ds \\
&\leq \left\| u_0 - v_0 \right\|_{L^p} + \int_0^t k\beta e^s \left\| J * (f(u)(\cdot,s) f(v)(\cdot,s)) \right\|_{L^p} ds \\
&\leq \left\| u_0 - v_0 \right\|_{L^p} + \int_0^t k\beta e^s \left\| J \right\|_{L^1} \left\| f(u(\cdot,s)) - f(v(\cdot,s)) \right\|_{L^p} ds \\
&\leq \left\| u_0 - v_0 \right\|_{L^p} + \int_0^t kc\beta \left\| J \right\|_{L^1} e^s \left\| u(\cdot,s) - v(\cdot,s) \right\|_{L^p} ds.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema de Gronwall, obtemos que

$$
\left\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \right\|_{L^p} \leq \left\| u_0 - v_0 \right\|_{L^p} e^{t\left(kc\beta \|J\|_{L^1} - 1\right)}.
$$

Portanto, a solução é contínua com relação a condição inicial. ■

**Observação 2.7** *O Problema (2.1) define um $C^0$-semigrupo sobre $X$, a saber*

$$
\begin{array}{rcl}
T(t) : L^p(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega) \\
u_0 & \longmapsto & T(t)u_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & & \quad x \longmapsto \left(T(t)u_0\right)(x) = u(x,t)
\end{array}
$$

*onde, $u(x,t)$ é a solução de (2.1).*

Mostramos no Corolário 2.6 que se $f$ e $g$ são globalmente Lipschitz, então o Problema (2.1) possui uma única solução globalmente definida em $L^p(\Omega)$. Agora vamos enfraquecer as hipóteses, supondo apenas $f$ e $g$ localmente Lipschitz e obter o mesmo resultado.

**Proposição 2.8** *Sejam $f$ e $g$ satisfazendo $(H_2)$, $(H_4)$, $(H_5)$ e $(H_6)$. Então o problema de Cauchy (2.1) possui uma única solução, a qual está globalmente definida em $L^p(\Omega)$.*

**Prova.** Seja $F(u) = -u + g\left(\beta J * (f \circ u) + \beta h\right)$. De maneira análoga ao que fizemos na Proposição 2.5, é possível mostrar que $F$ também é localmente Lipschitz sobre $L^p(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 1.4 está garantido a existência de solução local para o problema de Cauchy (2.1), para qualquer $u_0 \in L^p(\Omega)$. Agora observe que para $u \in L^p(\Omega)$, usando a hipótese $(H_2)$ temos

$$
\begin{aligned}
\|F(u)\|_{L^p} &= \|-u+g(\beta J*f(u)+\beta h)\|_{L^p}\\
&\le \|u\|_{L^p}+\|g(\beta J*f(u)+\beta h)\|_{L^p}\\
&\le \|u\|_{L^p}+k_1\|\beta J*f(u)+\beta h\|_{L^p}+\|k_2\|_{L^p}\\
&\le \|u\|_{L^p}+k_1\beta\|J*f(u)\|_{L^p}+k_1\beta h|\Omega|^{\frac{1}{p}}+k_2|\Omega|^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Usando a hipótese $(H_4)$, pela Observação 2.3, temos que

$$
\begin{aligned}
\|F(u)\|_{L^p} &\le \|u\|_{L^p}+k_1c_1\beta\|J\|_\infty|\Omega|\,\|u\|_{L^p}+k_1c_2\beta\|J\|_\infty|\Omega|^{\frac{1}{p}+1}+k_1\beta h|\Omega|^{\frac{1}{p}}+k_2|\Omega|^{\frac{1}{p}}\\
&= \underbrace{(1+k_1c_1\beta\|J\|_\infty|\Omega|)}_{m_1}\|u\|_{L^p}+\underbrace{k_1c_2\beta\|J\|_\infty|\Omega|^{\frac{1}{p}+1}+k_1\beta h|\Omega|^{\frac{1}{p}}+k_2|\Omega|^{\frac{1}{p}}}_{m_2}\\
&= m_1\|u\|_{L^p}+m_2.
\end{aligned}
$$

Além disso, defina $\tau:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ por $\tau(x)=m_1x+m_2$. Como $m_1>0$, segue que $\tau$ é não decrecente e $|\tau(x)-\tau(y)|\le m_1|x-y|$, para todo $x,y\in\mathbb{R}_+$. Logo, $\tau$ é globalmente Lipschitz e consequentemente pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard, o problema

$$
\begin{cases}
u'=\tau(u)\\
u(0)=u_0\in\mathbb{R}_+,
\end{cases}
$$

possui uma única solução $u\in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$. Portanto, pelo Teorema 1.11, o maior intervalo de existência de solução do Problema (2.1) com $\|u_0\|_{L^p}\le x_0$ é $I=[0,\infty)$. ■

## 2.2 Suavidade das Órbitas.

Mostramos na seção anterior que o fluxo gerado por (2.1) gera um $C^0$-semigrupo em $L^p(\Omega)$. Nesta seção vamos mostrar, sob algumas hipóteses adicionais para $f$ e $g$, que este fluxo é $C^1$ com relação a condição inicial.

**Proposição 2.9** *Sejam $g,f\in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo as hipóteses $(H_4)$, $(H_6)$, $(H_7)$, $(H_8)$, $(H_9)$. Então, $F(u)=-u+g(\beta J*f(u)+\beta h)$ é continuamente Fréchet diferenciável em $L^p(\Omega)$ com derivada dada por*

$$DF(u)(v)=-v+g'(\beta J*f(u)+\beta h)\beta J*f'(u)(v).$$

**Prova.** Dados $u,v\in L^p(\Omega)$, por cálculo direto, obtemos que a derivada de Gâteaux de $F$ em $u$ na direção de $v$ é dada por

$$DF(u)(v)=-v+g'\left(\beta J*f(u)+\beta h\right)\beta J*f'(u)(v).$$

Note que $DF(u)$ é um operador linear, já que para $\eta, \epsilon \in L^p(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, pela linearidade da convolução, temos que

$$\begin{aligned}
DF(u)(\alpha\eta + \epsilon) &= -\alpha\eta - \epsilon + g'\left(\beta J * f(u) + \beta h\right) \beta J * f'(u)\left(\alpha\eta + \epsilon\right) \\
&= -\alpha\eta - \epsilon + g'\left(\beta J * f(u) + \beta h\right) \beta J * \left(f'(u)(\alpha\eta) + f'(u)(\epsilon)\right) \\
&= -\alpha\eta - \epsilon + g'(\beta J * f(u) + \beta h)\beta\left(\alpha J * f'(u)(\eta) + J * f'(u)(\epsilon)\right) \\
&= \alpha\left(-\eta + g'(\beta J * f(u) + \beta h)\beta J * f'(u)(\eta)\right) \\
&\quad -\epsilon + g'(\beta J * f(u) + \beta h)\beta J * f'(u)(\epsilon) \\
&= \alpha DF(u)(\eta) + DF(u)(\epsilon).
\end{aligned}$$

Além disso, $DF(u)$ é um operador limitado. De fato,

$$\begin{aligned}
\|DF(u)(v)\|_{L^p} &= \|-v + g'(\beta J * f(u) + \beta h)\beta J * f'(u)(v)\|_{L^p} \\
&\leq \|v\|_{L^p} + \|g'(\beta J * f(u) + \beta h)\beta J * f'(u)(v)\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Chamando $\mathrm{I} = \|g'(\beta J * f(u) + \beta h)\beta J * f'(u)(v)\|_{L^p}$, usando a hipótese $(H_9)$ e a Observação 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \left(\int_\Omega |g'(\beta J * f(u)(x) + \beta h)\beta J * f'(u(x))\,(v(x))|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega (s_1\beta\,|J * f(u)(x)| + s_1\beta h + s_2)^p\, \beta^p\, |J * f'(u(x))\,(v(x))|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq s_1\beta^2\,\|J\|_\infty \left(c_1\,|\Omega|^{\frac{1}{q}}\,\|u\|_{L^p} + c_2\,|\Omega|\right)\left(\int_\Omega |J * f'(u(x))(v(x))|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(s_1\beta^2 h + s_2\beta\right)\left(\int_\Omega |J * f'(u(x))(v(x))|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Jensen (Proposição A.9), temos que

$$\begin{aligned}
|J * f'(u(x))(v(x))|^p &= \left|\int_\Omega J(x-y)f'(u(y))(v(y))dy\right|^p \\
&\leq \int_\Omega |J(x-y)|^p\,|f'(u(y))|^p\,|v(y)|^p\, dy \\
&\leq \|J\|_\infty^p\, M_1^p\, \|v\|_{L^p}^p. 
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\leq \left(s_1c_1\beta\,\|J\|_\infty\,|\Omega|^{\frac{1}{q}}\,\|u\|_{L^p} + s_1c_2\beta\,\|J\|_\infty\,|\Omega|\right) M_1\beta\,\|J\|_\infty\,|\Omega|^{\frac{1}{q}}\,\|v\|_{L^p} \\
&+ \left(s_1\beta h + s_2\right) M_1\beta\,\|J\|_\infty\,|\Omega|^{\frac{1}{q}}\,\|v\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|DF(u)(v)\|_{L^p} \leq \alpha \|v\|_{L^p},$$

onde $\alpha = 1 + \left(s_1 c_1 \beta \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^p} + s_1 c_2 \beta \|J\|_\infty |\Omega| + s_1 \beta h + s_2\right) M_1 \beta \|J\|_\infty |\Omega|$.

Já vimos que $F$ é Gâteaux diferenciável, e que $DF(u)$ é um operador linear limitado. Para concluir que $F$ é Fréchet diferenciável, pela Proposição D.6 resta mostrar que $DF$ é um operador contínuo. De fato, dados $u_1, u_2, v \in L^p(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_{L^p} &= \|g'(\beta J * f(u_1) + \beta h)\beta J * f'(u_1)(v) - \\ &\quad - g'(\beta J * f(u_2) + \beta h)\beta J * f'(u_2)(v)\|_{L^p} \qquad (2.5) \\ &\leq \mathrm{II} + \mathrm{III}, \end{aligned}$$

onde

$$\mathrm{II} = \|g'(\beta J * f(u_1) + \beta h)\beta J * f'(u_1)(v) - g'(\beta J * f(u_2) + \beta h)\beta J * f'(u_1)(v)\|_{L^p}$$

e

$$\mathrm{III} = \|g'(\beta J * f(u_2) + \beta h)\beta J * f'(u_1)(v) - g'(\beta J * f(u_2) + \beta h)\beta J * f'(u_2)(v)\|_{L^p}.$$

No Lema 2.1, vimos que $|J * u(x)| \leq \|J\|_\infty \|u\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{q}}$. A seguir, mostramos que fixando $u_1 \in L^p(\Omega)$, fazendo $u_2 \to u_1$ em $L^p(\Omega)$ e usando a hipótese $(H_6)$, que $(\beta J * f(u_2) + \beta h)$ está em uma bola de $L^\infty(\Omega)$ centrada em $(\beta J * f(u_1) + \beta h)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |\beta J * f(u_2(x)) + \beta h - \beta J * f(u_1(x)) - \beta h| &= \beta |J * (f(u_2) - f(u_1))(x)| \\ &\leq \beta \|J\|_\infty \|(f(u_2) - f(u_1))\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \beta N |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|J\|_\infty \|u_2 - u_1\|_{L^p} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Assim, usando a hipótese que $g'$ é localmente Lipischitz, dada em $(H_8)$, temos

$$\begin{aligned} &|g'(\beta J * f(u_2(x)) + \beta h) - g'(\beta J * f(u_1(x)) + \beta h)| \\ \leq\ & L\beta |(J * (f(u_1(x)) - f(u_2(x)))| \\ \leq\ & L\beta \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|f(u_2) - f(u_1)\|_{L^p} \\ \leq\ & LN\beta \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u_2 - u_1\|_{L^p}. \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Agora vamos estimar a primeira parcela de (2.5).

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \left(\int_\Omega |g'(\beta J * f(u_1(x)) + \beta h)\right. \\
&- \left. g'(\beta J * f(u_2(x)) + \beta h)|^p \beta^p |J * f'(u_1(x))v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq LN\beta^2 \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u_1 - u_2\|_{L^p} \left(\int_\Omega |J * f'(u_1(x))v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq LN\beta^2 \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u_2 - u_1\|_{L^p} M_1 \|J\|_\infty \|v\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \\
&= LN\beta^2 \|J\|_\infty^2 M_1 |\Omega| \|v\|_{L^p} \|u_2 - u_1\|_{L^p} .
\end{aligned}$$

Agora vamos estimar a segunda parcela de (2.5).

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} &= \left(\int_\Omega |g'(\beta J * f(u_1)(x) + \beta h)|^p \beta^p |(J * (f'(u_1(x)) - f'(u_2(x))) v(x))|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega (s_1 |\beta J * f(u_1)(x) + \beta h| + s_2)^p \beta^p |J * (f'(u_1(x)) - f'(u_2(x))) v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \left(s_1\beta \|J\|_\infty \|f(u_1)\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{q}} + s_1\beta h + s_2\right)^p \beta^p |J * (f'(u_1(x))\right. \\
&- \left. f'(u_2(x))) v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(s_1c_1\beta^2 \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u_1\|_{L^p} + s_1c_2\beta^2 \|J\|_\infty |\Omega| + s_1\beta^2 h + s_2\beta\right) \\
&\quad \left(\int_\Omega |J * (f'(u_1(x)) - f'(u_2(x))) v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder para $f'(u_1) - f'(u_2) \in L^q(\Omega)$ e $v \in L^p(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
|J * (f'(u_1(x)) - f'(u_2(x))) v(x)| &= \left|\int_\Omega J(x-y) (f'(u_1(y)) - f'(u_2(y))) v(y) dy\right| \\
&\leq \|J\|_\infty \int_\Omega |(f'(u_1(y)) - f'(u_2(y))) v(y)| \, dy \\
&\leq \|J\|_\infty \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q} \|v\|_{L^p} .
\end{aligned}$$

Substituindo essa última desigualdade em (III) e usando a Observação 2.3, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} &\leq s_1c_1\beta^2 \|J\|_\infty^2 |\Omega| \|u_1\|_{L^p} \|v\|_{L^p} \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q} \\
&+ s_1c_2\beta^2 \|J\|_\infty^2 |\Omega|^{\frac{1}{p}+1} \|v\|_{L^p} \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q} \\
&+ \left(s_1\beta^2 h + s_2\beta\right) \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p} \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q} .
\end{aligned}$$

Substituindo (II) e (III) em (2.5), temos que

$$\begin{aligned}
\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\| &\leq LN\beta^2 \|J\|_\infty^2 M_1 |\Omega| \|v\|_{L^p} \|u_1 - u_2\|_{L^p} \\
&+ s_1 c_1 \beta^2 \|J\|_\infty^2 |\Omega| \|u_1\|_{L^p} \|v\|_{L^p} \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q} \\
&+ s_1 c_2 \beta^2 \|J\|_\infty^2 |\Omega|^{\frac{1}{p}+1} \|v\|_{L^p} \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q} \\
&+ s_1 \beta^2 h \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p} \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q} \\
&+ s_2 \beta \|J\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p} \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

Portanto, para concluir a prova da continuidade da derivada, é suficiente mostrar que $\|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^q} \to 0$ quando $\|u_1 - u_2\|_{L^p} \to 0$. Para isto, note que da hipótese $(H_7)$, temos

$$|f'(u_1(x)) - f'(u_2(x))|^q \leq (|f'(u_1(x))| + |f'(u_2(x))|)^q \leq 2^q M_1^q \in L^1(\Omega).$$

Logo, o resultado desejado segue da continuidade de $f'$, do Teorema A.22 e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. ■

Como consequência imediata da Proposição 2.9 e do Teorema 1.15, temos o seguinte resultado.

**Corolário 2.10** *Assuma as mesmas hipóteses da Proposição 2.9. Então o fluxo gerado por (2.1) é $C^1$ com relação a condição inicial.*

# Capítulo 3

# Propriedade Gradiente para uma Classe de Equações de Evolução

Nesta capítulo provamos que o fluxo $T(t)$, gerado por (2.1) tem a propriedade gradiente no sentido de [12], para tanto, mostramos a existência de um atrator global e consequentemente obtemos a pré-compacidade das órbitas positivas. E, em seguida, exibimos um Funcional de Lyapunov contínuuo para o fluxo $T(t)$ gerado por (2.1).

## 3.1 Existência de um Atrator Global

Nesta seção, inicialmente exibimos um conjunto absorvente para o fluxo $T(t)$ gerado por (2.1), e em seguida, mostramos a existência de um conjunto atrator global. Além disso, assumindo algumas hipóteses adicionais, mostramos uma equivalência entre a existência desses dois conjuntos.

**Proposição 3.1** *Suponhamos válidas as hipóteses ($H_2$), ($H_4$) e que $k_1 c_1 \beta < 1$. Para cada $\sigma > 0$, seja*

$$R = (1+\sigma)\left(\frac{(k_1\beta c_2 + k_1\beta h + k_2)\,|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{1 - k_1\beta c_1}\right).$$

*Então a bola centrada na origem de $X$ e raio $R$ é um conjunto absorvente para o fluxo $T(t)$ gerado por (2.1).*

**Prova.** Seja $u(\cdot,t)$ uma solução de (2.1) com condição inicial $u(\cdot,0)$. Para $1 \leq p < \infty$, temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^p\,dx = \\
= \;& \int_\Omega p\,|u(x,t)|^{p-1}\,sgn[u(x,t)]\frac{du}{dt}(x,t)dx \\
\leq \;& \int_\Omega p\,|u(x,t)|^{p-1}\,sgn[u(x,t)]\left(-u(x,t)+g\left(\beta J * f(u(x,t))+\beta h\right)\right)dx \\
\leq \;& -p\int_\Omega |u(x,t)|^p\,dx + p\int_\Omega |u(x,t)|^{p-1}\,sgn[u(x,t)]g\left(\beta J * f(u(x,t))+\beta h\right)dx.
\end{aligned}$$

Chamando

$$\mathrm{I} = \int_\Omega |u(x,t)|^{p-1}\,sgn[u(x,t)]g\left(\beta J * f(u(x,t))+\beta h\right)dx,$$

e usando a Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} \;&\leq\; \left(\int_\Omega \left(|u(x,t)|^{p-1}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |sgn\,[u(x,t)]\,g\left(\beta J * f(u(x,t))+\beta h\right)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&=\; \left(\int_\Omega |u(x,t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |g\left(\beta J * f(u(x,t))+\beta h\right)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq\; \|u(\cdot,t)\|_{L^p}^{p-1}\left(\int_\Omega \left(k_1\,|\beta J * f(u(x,t))| + k_1\beta h + k_2\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq\; \|u(\cdot,t)\|_{L^p}^{p-1}\left(k_1\beta\,\|J * f(u(\cdot,t))\|_{L^p} + \|k_1\beta h + k_2\|_{L^p}\right) \\
&\leq\; \|u(\cdot,t)\|_{L^p}^{p-1}\left(k_1\beta\,\|J\|_1\,\|f(u(\cdot,t))\|_{L^p} + (k_1\beta h + k_2)\,|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq\; \|u(\cdot,t)\|_{L^p}^{p-1}\left(k_1\beta\left(c_1\,\|u(\cdot,t)\|_{L^p} + c_2\,|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right) + (k_1\beta h + k_2)\,|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right) \\
&=\; k_1\beta c_1\,\|u(\cdot,t)\|_{L^p}^p + (k_1\beta c_2 + k_1\beta h + k_2)\,|\Omega|^{\frac{1}{p}}\,\|u(\cdot,t)\|_{L^p}^{p-1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^p\,dx \;&=\; \frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^p}^p \\
&\leq\; p\,\|u(\cdot,t)\|_{L^p}^p\left(-1 + k_1\beta c_1 + \frac{(k_1\beta c_2 + k_1\beta h + k_2)\,|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{\|u(\cdot,t)\|_{L^p}}\right).
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon = 1 - k_1\beta c_1$, quando $\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \geq (1+\sigma)\frac{(k_1\beta c_2+k_1\beta h+k_2)|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{\epsilon}$, temos

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^p}^p \leq p\,\|u(\cdot,t)\|_{L^p}^p\left(-\epsilon + \frac{\epsilon}{1+\sigma}\right) = -p\epsilon\frac{\sigma}{1+\sigma}\,\|u(\cdot,t)\|_{L^p}^p.$$

Assim,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p}^p \le \|u(\cdot,0)\|_{L^p}^p \, e^{-p(1-k_1\beta c_1)\frac{\sigma}{1+\sigma}t},$$

o que implica,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \le \|u(\cdot,0)\|_{L^p} \, e^{-(1-k_1\beta c_1)\frac{\sigma}{1+\sigma}t}.$$

Como $k_1\beta c_1 < 1$, temos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p}$ não cresce mais do que $\|u(\cdot,0)\|_{L^p}$. Além disso, quando $t \to \infty$, temos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \to 0$, e portanto, segue o resultado. ■

**Teorema 3.2** *Suponhamos que $g \in C^1(\mathbb{R})$ e as hipóteses $(H_4)$ e $(H_9)$ são satisfeitas. Então existe um atrator global $\mathcal{A}$ para o fluxo gerado por (2.1) em $L^p(\Omega)$. Além disso, $\mathcal{A} \subset B(0,R)$.*

**Prova.** Seja $u(\cdot,t)$ a solução do problema (2.1) com condição inicial $u(\cdot,0) = u_0$. Pela Observação 2.7, vimos que o fluxo gerado por (2.1) define um $C^0$-semigrupo tal que $T(t)u(\cdot,0) = u(\cdot,t)$, isto é,

$$T(t)u_0 = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)} g\left(\beta\left(J * f(u)\right)(\cdot,s) + \beta h\right) ds.$$

Seja,

$$T(t)u_0 = T_1(t)u_0 + T_2(t)u_0,$$

onde,

$$T_1(t)u_0 = e^{-t}u_0$$

e

$$T_2(t)u_0 = \int_0^t e^{-(t-s)} g(\beta J * f(u)(\cdot,s) + \beta h) ds.$$

Suponha que $u_0 \in C$, onde $C$ é um subconjunto limitado de $L^p(\Omega)$, digamos que $C = B(0,\rho)$. Observe que

$$\|T_1(t)u_0\|_{L^p} \to 0,$$

quando $t \to \infty$. Vamos mostrar que $T_2(t)$ é uniformemente compacto para $t$ suficientemente grande. De fato, da Proposição 3.1, $\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \le \alpha$, onde $\alpha = \max\{\rho, R\}$. Sendo $g$ derivável e com derivada contínua, podemos derivar sob o sinal de integração, donde

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(T_2(t)u_0\right)(x)\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t e^{-(t-s)} g\left(\beta\left(J*f(u)\right)(x,s)+\beta h\right)ds\right| \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\left|\frac{\partial}{\partial x} g\left(\beta\left(J*f(u)\right)(x,s)+\beta h\right)\right| ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)}\left|g'\left(\beta\left(J*f(u)\right)(x,s)+\beta h\right)\right|\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\left(J*f(u)\right)(x,s)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\beta h\right)\right| ds.
\end{aligned}$$

Agora observe que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\left(J*f(u)\right)(x,s)+\beta h\right) &= \beta\frac{\partial}{\partial x}\left(J*f(u)\right)(x,s) \\
&= \beta\frac{\partial}{\partial x}\int_\Omega J(x-y,s)f(u(y,s))dy \\
&= \beta\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}J(x-y,s)f(u(y,s))dy \\
&= \beta\left(J'*f(u)\right)(x,s). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Assim, usando (3.1), a hipótese $(H_9)$ e a Observação 2.3 temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(T_2(t)u_0\right)(x)\right| \\
\leq\ & \int_0^t e^{-(t-s)}\left(s_1\left|\beta\left(J*f(u)\right)(x,s)+\beta h\right|+s_2\right)\beta\left|J'*f(u)(x,s)\right| ds \\
\leq\ & \int_0^t e^{-(t-s)}\left(s_1\beta\left|J*f(u)(x,s)\right|+s_1\beta h+s_2\right)\beta\left\|J'\right\|_\infty\left(c_1\left|\Omega\right|^{\frac{1}{q}}\left\|u(\cdot,s)\right\|_{L^p}\right. \\
&\left. + c_2\left|\Omega\right|\right)ds \\
\leq\ & \left(s_1c_1\beta\left\|J\right\|_\infty\left|\Omega\right|^{\frac{1}{q}}\alpha+s_1c_2\beta\left\|J\right\|_\infty\left|\Omega\right|+s_1\beta h+s_2\right)\left(c_1\beta\left\|J'\right\|_\infty\left|\Omega\right|^{\frac{1}{q}}\alpha\right. \\
&\left. + c_2\beta\left\|J'\right\|_\infty\left|\Omega\right|\right).
\end{aligned}$$

Logo, dados $u(\cdot,0)\in C$ e $t\geq 0$ temos que $\left\|\frac{\partial}{\partial x}T_2(t)u(\cdot,t)\right\|_{L^p}$ é limitado por uma constante que não depende de $t$ e nem de $u$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\|T_2(t)u_0\right\|_{L^p} &\leq \left\|T_2(t)u_0+T_1(t)u_0\right\|_{L^p}+\left\|T_1(t)u_0\right\|_{L^p} \\
&= \left\|u(\cdot,t)\right\|_{L^p}+\left\|T_1(t)u_0\right\|_{L^p} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

o que implica que,

$$\left\|T_2(t)u_0\right\|_{W^{1,p}} = \left\|T_2(t)u_0\right\|_{L^p}+\left\|\frac{\partial}{\partial x}T_2(t)u_0\right\|_{L^p} < \infty,$$

ou seja, $T_2(t)u_0$ está em uma bola fechada de $W^{1,p}(\Omega)$. Assim, usando o Teorema C.1, temos que $W^{1,p}(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$, isto é, levando bolas fechadas em conjuntos compactos, donde, segue que $\overline{\bigcup_{t\geq 0} T_2(t)C}$ é compacto. Portanto, segue do Teorema 1.47 que $\omega(B(0,R))$ é um atrator global para o fluxo $T(t)$ gerado pelo Problema (2.1). Observe ainda que como $B(0,R)$ é um conjunto absorvente, temos que $\omega(B(0,R)) \subset B(0,R)$. ■

**Teorema 3.3** *Assuma a hipótese ($H_9$) e que existe $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $|g(x)| \leq a$. Então o atrator global $\mathcal{A}$ está contido na bola de raio $a$ em $L^\infty(\Omega)$.*

**Prova.** Seja $u(\cdot,t)$ uma solução de (2.1) em $\mathcal{A}$. Pela Fórmula de Variação das Constantes, segue que

$$u(x,t) = e^{-(t-t_0)}u(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)} g(\beta\,(J * f(u))\,(x,s) + \beta h) ds.$$

Procedendo de modo análogo ao que fizemos no Teorema 3.2, e usando a hipótese que $|g(x)| \leq a$, obtemos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \leq (1+\sigma)a\,|\Omega|^{\frac{1}{p}}$, para todo $u(\cdot,t) \in \mathcal{A}$. Assim, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, fazendo $t_0 \to -\infty$ temos

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} g(\beta J * f \circ u(x,s) + \beta h) ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}\,|g(\beta J * f \circ u(x,s) + \beta h)|\,ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} a e^{-(t-s)} ds \\ &\leq a. \end{aligned}$$

■

## 3.2 Teoremas de Comparação e Limitação

Nesta seção mostramos um Teorema de Comparação que generaliza o Teorema 4.2 de [9] (onde $f(x) = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$). Para tanto, além das hipóteses já utilizadas, assumiremos que $f$ e $g$ são monótonas e

$$0 < |g(x)| \leq a, \tag{3.2}$$

com $g^{-1}$ contínua em $(-a, a)$.

Primeiramente, afirmamos que o conjunto $\{L^p(\Omega); \|\cdot\|_\infty \leq a\}$ é invariante sob o fluxo gerado pelo Problema (2.1). De fato, se $a = \infty$ nada há para provar. Caso contrário, seja

$$u(x,t) = e^{-t}u(x,0) + \int_\Omega e^{-(t-s)}g(\beta(J * f(u)(x,s) + \beta h)ds,$$

solução de (2.1) com condição inicial $u(\cdot, 0) \in \{L^p(\Omega); \|\cdot\| \leq a\}$. Então,

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq e^{-t}|u(x,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|g(\beta(J * f(u))(x,s) + \beta h)|\, ds \\ &\leq e^{-t}a + \int_0^t e^{-(t-s)}a ds \\ &= a, \end{aligned}$$

donde, $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq a$.

**Teorema 3.4** *(Teorema da Comparação). Sejam $v(x,t)$ e $V(x,t)$ uma subsolução e uma supersolução, respectivamente, do problema (2.1), com condição incial $u(\cdot, 0)$, então,*

$$v(x,t) \leq u(x,t) \leq V(x,t).$$

**Prova.** Defina o operador

$$\begin{array}{rclcl} G : L^\infty(\Omega \times [0,T]) & \longrightarrow & L^\infty(\Omega \times [0,T]) & & \\ \xi & \longmapsto & G(\xi) : \Omega \times [0,T] & \longrightarrow & [0,T] \\ & & (x,t) & \longmapsto & G(\xi)(x,t), \end{array}$$

por

$$G(\xi)(x,t) = e^{-t}\xi(x,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}g\left(\beta(J * f(\xi))(x,s) + \beta h\right) ds.$$

Então, $G(\xi)(x,0) = \xi(x,0)$.

Note que $G$ é monótona não decrescente. De fato, dados $\xi_1, \xi_2 \in L^\infty(\Omega \times [0,T])$ com $\xi_1(x,t) \geq \xi_2(x,t)$ em quase toda parte de $\Omega \times [0,T]$, temos que

$$e^{-t}\xi_1(x,0) \geq e^{-t}\xi_2(x,0), \text{ q.t.p.}$$

Ademais, sendo $g$ e $f$ monótonas não decrescente, temos

$$g\left(\beta(J * f(\xi_1))(x,s) + \beta h\right) \geq g\left(\beta(J * f(\xi_2))(x,s) + \beta h\right),$$

donde, $G(\xi_1)(x,t) \geq G(\xi_2)(x,t)$, em quase toda parte de $\Omega \times [0,T]$.

Além disso, se $k\beta cT < 1$, então $G$ é uma contração em todo subconjunto de funções de $L^\infty(\Omega \times [0,T])$ com mesmo valor em $t = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
|G(\xi_1)(x,t) - G(\xi_2)(x,t)| &\leq \int_0^t e^{-(t-s)} \left| g\left(\beta(J * f(\xi_1))(x,s)\right) \right. \\
&\quad \left. - \, g\left(\beta(J * f(\xi_2))(x,s)\right) \right| ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)} k\beta \left| J * (f(\xi_1) - f(\xi_2))(x,s) \right| ds \\
&\leq k\beta T \left\| f(\xi_1) - f(\xi_2) \right\|_\infty \\
&\leq kc\beta T \left\| \xi_1 - \xi_2 \right\|_\infty ,
\end{aligned}$$

daí, como $kc\beta T < 1$

$$\left\| G(\xi_1) - G(\xi_2) \right\|_\infty \leq \left\| \xi_1 - \xi_2 \right\|_\infty ,$$

provando que $G$ é uma contração.

Assim, se $u(x,t)$ é solução de (2.1) com condição inicial $u_0 = u(x,0)$, temos como consequência do Teorema do ponto fixo de Banach que $u = \lim\limits_{n\to\infty} G^n(u_0)$. Logo, sendo $m$ uma solução de (2.1) com condição inicial $m_0 = m(x,0) \leq u_0$, a mesma expressão acima é válida , isto é, $m = \lim\limits_{n\to\infty} G^n(m_0)$.

Como $G$ é monótona não decrescente, temos $G(m_0) \leq G(u_0)$, assim

$$\lim_{n\to\infty} G^n(m_0) \leq \lim_{n\to\infty} G^n(u_0),$$

donde $m \leq u$ em $\Omega \times [0,T]$.

Agora, se $v$ é uma subsolução de (2.1), por definição

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \leq -v(x,t) + g\left(\beta(J * f(v))(x,t) + \beta h\right) \text{ ,q.t.p.}$$

Multiplicando ambos os membros por $e^t$,

$$e^t \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + e^t v(x,t) \leq e^t g\left(\beta(J * f(v))(x,t) + \beta h\right),$$

daí, integrando de 0 a $t$, obtemos

$$e^t v(x,t) - e^0 v(x,0) \leq \int_0^t e^s g\left(\beta(J * f(v))(x,t) + \beta h\right) ds.$$

Logo,

$$v(x,t) \leq G(v)(x,t),$$

em quase toda parte de $\Omega \times [0,T]$. Como $G$ é monótona não decrescente, temos que $v \leq G^n(v)$. Daí, passando ao limite, obtemos

$$v \leq \lim_{n\to\infty} G^n(v) = \lim_{n\to\infty} G^{(n+1)}(v).$$

Chame $z = \lim_{n\to\infty} G^{(n+1)}(v)$. Da continuidade de $G$, segue que $z$ é ponto fixo de $G$, pois

$$G(z) = G\left(\lim_{n\to\infty} G^n(v)\right) = \lim_{n\to\infty} G\left(G^n(v)\right) = \lim_{n\to\infty} G^{n+1}(v) = z.$$

Assim, $z$ é uma solução de (2.1) em $\Omega \times [0,T]$, com condição inicial $z(\cdot,0) = v(\cdot,0)$. Logo, se $v(\cdot,0) \leq u(\cdot,0)$, ou ainda, $z_0 \leq u_0$, temos que

$$v(x,t) \leq z(x,t) \leq u(x,t),$$

em quase toda parte de $\Omega \times [0,T]$.

Analogamente, mostra-se para uma supersolução $V(x,t)$ de (2.1), obtendo que $u(x,t) \leq V(x,t)$ em quase toda parte de $\Omega \times [0,T]$, pois como as estimativas não dependem da condição inicial, podemos estender o resultado para $[T,2T], [2T,3T], \ldots$, o que conclui o resultado. ■

## 3.3 Existência de um Funcional de Lyapunov

Nesta seção exibimos um Funcional de Lyapunov contínuo para o fluxo $T(t)$ gerado por

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + g\left(\beta(J * f(u))(x,t) + \beta h\right),$$

restrito a bola centrada na origem de raio $a$ em $L^\infty(\Omega)$. Para isto, assumimos que

$$\theta(u) = -\frac{1}{2} f(u)^2 - hf(u) - \beta^{-1} i(u), \tag{3.3}$$

sendo $i$ definido por

$$i(u) = \int_0^{f(u)} g^{-1}(f^{-1}(s))ds, \qquad u \in [-a,a] \text{ e } a < \infty,$$

assume um mínimo global em $\overline{m} \in (-a,a)$.

Motivados pelo funcional dado em [9], definimos o funcional $\mathcal{F} : (L^p(\Omega), \|u\|_\infty \leq a) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \left[\theta(u(x)) - \theta(\overline{m})\right] dx + \frac{1}{4}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left[f(u(x)) - f(u(y))\right]^2 dxdy. \tag{3.4}$$

**Teorema 3.5** *Além das hipóteses assumidas no Teorema 3.2, assuma também as hipóteses estabelecidas em (3.2) e (3.3). Então o funcional $\mathcal{F}$ dado em (3.4) é contínuo na topologia de $L^p(\Omega)$.*

**Prova.** Note que, se $\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq a$, então existe $\alpha > 0$ tal que $|\theta(u(x)) - \theta(\overline{m})| \leq \alpha$. De fato,

$$\begin{aligned}
|\theta(u(x,t)) - \theta(\overline{m})| &\leq 2\,|\theta(u(x,t))| \\
&= 2\left|-\frac{1}{2}f(u(x,t))^2 - hf(u(x,t)) - \beta^{-1}i(u(x,t))\right| \\
&\leq f(u(x,t))^2 + 2h\,|f(u(x,t))| + 2\beta^{-1}\,|i(u(x,t))| \\
&\leq (c_1a + c_2)^2 + 2h(c_1a + c_2) + 2a\beta^{-1}(c_1a + c_2) \\
&= (c_1a + c_2)\left(c_1a + c_2 + 2h + 2a\beta^{-1}\right) \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

Para cada $u \in L^p(\Omega)$, seja $(u_n)$ uma sequência convergindo para $u$ na norma de $L^p(\Omega)$. Pelo Teorema A.21, temos que existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ em quase toda parte em $\Omega$. E como $\theta$ é contínuo, segue que $\theta(u_{n_k}(x)) \longrightarrow \theta(u(x))$ em quase toda parte, assim

$$\lim_{k\to\infty}\left[\theta(u_{n_k}(x)) - \theta(\overline{m})\right] = \theta(u(x)) - \theta(\overline{m}), \text{ q.t.p.} \tag{3.5}$$

e

$$\lim_{k\to\infty}\left[u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)\right]^2 = \left[u(x) - u(y)\right]^2, \text{ q.t.p.} \tag{3.6}$$

Escreva $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(u)$, onde

$$\mathcal{F}_1(u) = \int_\Omega \left[\theta(u(x)) - \theta(\overline{m})\right] dx$$

e

$$\mathcal{F}_2(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left[f(u(x)) - f(u(y))\right]^2 dxdy.$$

Da convergência dada em (3.5) e do fato que $|\theta(u(x)) - \theta(\overline{m})| \leq \alpha$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, obtendo que $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{F}_1(u_{n_k}) = \mathcal{F}_1(u)$.

Analogamente, da convergência dada em (3.6), e do fato que

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{4} \int_\Omega J(x-y) \left[ f(u_{n_k}(x)) - f(u_{n_k}(y)) \right]^2 dy \right| \\
\leq \; & \frac{1}{4} \int_\Omega J(x-y) \left| f(u_{n_k}(x)) - f(u_{n_k}(y)) \right|^2 dy \\
\leq \; & \frac{1}{4} \int_\Omega J(x-y) \left[ |f(u_{n_k}(x))| + |f(u_{n_k}(y))| \right]^2 dy \\
\leq \; & \frac{1}{4} \int_\Omega J(x-y) \left( 2c_1 a + 2c_2 \right)^2 dy \\
= \; & (c_1 a + c_2)^2.
\end{aligned}
$$

temos que $\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_2(u_{n_k}) = \mathcal{F}_2(u)$, o que implica que, $\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_{n_k}) = \mathcal{F}(u)$, para qualquer subsequência $(u_{n_k})$ de $(u_n)$. Portanto, $\mathcal{F}(u_n)$ é uma sequência tal que toda subsequência tem uma subsequência que converge para $\mathcal{F}(u)$, e obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) = \mathcal{F}(u).$$

■

**Teorema 3.6** *Além das hipóteses assumidas no Teorema 3.4, assuma também as hipóteses estabelecidas em (3.2) e (3.3), e ainda que $f'$ tenha derivada positiva. Seja $u(\cdot,t)$ uma solução de (2.1) com condição inicial $u(\cdot,t_0) = u_0$ e tal que $u(\cdot,t) \leq a$. Então $\mathcal{F}(u(\cdot,t))$ é diferenciável com relação a $t$ para $t > 0$ e*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(\cdot,t)) = -I(u(\cdot,t)) \leq 0,$$

*onde, para cada $u \in L^p(\Omega)$ com $\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq a$,*

$$I(u(\cdot)) = \int_\Omega \left[ J * f(u)(x) + h - \beta^{-1} g^{-1}(u(x)) \right] \frac{\partial u}{\partial s} f'(u(x)) dx.$$

*Além disso, o integrando em $I(u(\cdot,t))$ é uma função não negativa e $u$ é um ponto crítico de $\mathcal{F}$ se, e somente se, $u$ é uma solução de equilíbrio de (2.1).*

**Prova.** Suponhamos que dado $t > 0$, exista $\epsilon > 0$ tal que $\|u(\cdot,s)\|_\infty \leq a - \epsilon$, para $s \in \Delta$, onde $\Delta$ é um intervalo fechado contendo $t$. Para $s \in \Delta$, escreva

$$\mathcal{F}(u(\cdot,s)) = \int_\Omega \Phi(x,s) dx \tag{3.7}$$

e

$$I(u(\cdot,s)) = \int_\Omega \iota(x,s) dx.$$

Sendo assim,

$$\Phi(x,s) = \theta(u(x,s)) - \theta(\overline{m}) + \frac{1}{4}\int_\Omega J(x-y)\left[f(u(x,s)) - f(u(y,s))\right]^2 dy$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(x,s) = \frac{\partial \theta}{\partial s}(u(x,s)) + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega J(x-y)\left[f(u(x,s)) - f(u(y,s))\right]^2 dy.$$

Vamos calcular as derivadas de cada parcela separadamente. Para primeira parcela, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial s}(u(x,s)) &= \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{1}{2}f(u(x,s))^2 - hf(u(x,s)) - \beta^{-1}i(u(x,s))\right] \\
&= -f(u(x,s))f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) - hf'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) \\
&\quad +\beta^{-1}g^{-1}(u(x,s))f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) \\
&= f'(u(x,s))\left(-f(u(x,s)) - h + \beta^{-1}g^{-1}(u(x,s))\right)\frac{\partial u}{\partial s}(x,s).
\end{aligned}$$

e, para a segunda parcela, como o integrando resultante é contínuo podemos aplicar a regra de Leibniz, assim

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_\Omega J(x-y)\left[f(u(x,s)) - f(u(y,s))\right]^2 dy\right) = \\
&= \int_\Omega J(x-y)\frac{\partial}{\partial s}\left[f(u(x,s)) - f(u(y,s))\right]^2 dy \\
&= \int_\Omega J(x-y)2\left[f(u(x,s)) - f(u(y,s))\right]\left[f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) - f'(u(y,s))\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\right] dy.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial s}(x,s) &= \left[-f(u(x,s)) - h + \beta^{-1}g^{-1}(u(x,s))\right]f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) + \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega J(x,s)\left[f(u(x,s)) - f(u(y,s))\right]\left[f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\right. \\
&- \left. f'(u(y,s))\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\right] dy.
\end{aligned}$$

Observe que $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial s}(x,s)\right|$ é limitada, e ainda que $\frac{\partial \Phi}{\partial s}(x,s)$ é contínua, já que $u, f \in C^1(\mathbb{R})$ e $g^{-1}$ é contínua. Portanto, derivando sob o sinal de integração em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}(u(\cdot,s)) &= \int_\Omega \left[-f(u(x,s)) - h + \beta^{-1}g^{-1}(u(x,s))\right]f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left[f(u(x,s)) - f(u(y,s))\right]\left[f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\right. \\
&- \left. f'(u(y,s))\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\right] dxdy.
\end{aligned}$$

Chamando

$$\mathrm{I} = \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left[f(u(x,s)) - f(u(y,s))\right]\left(f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) - f'(u(y,s))\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\right)dxdy,$$

note que,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)f(u(x,s))f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dxdy \\
&+ \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)f(u(y,s))f'(u(y,s))\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)dxdy \\
&- \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)f(u(x,s))f'(u(y,s))\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)dxdy \\
&- \int_\Omega\int_\Omega J(x-y)f(u(y,s))f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dxdy \\
&= 2\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)f(u(x,s))f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dxdy \\
&- 2\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)f(u(y,s))f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dxdy \\
&= 2\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)dy\ f(u(x,s))f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dx \\
&- 2\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)f(u(y,s))dy\ f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dx \\
&= 2\int_\Omega f(u(x,s))f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dx \\
&- 2\int_\Omega J*f(u)(x,s)f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}(u(\cdot,s)) &= -\int_\Omega \left[J*f(u)(x,s) + h - \beta^{-1}g^{-1}(u(x,s))\right] f'(u(x,s))\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)dx \\
&= -I(u(\cdot,s)).
\end{aligned}$$

Isto prova a primeira parte do teorema para o caso em que $\|u(\cdot,s)\|_\infty \leq a-\epsilon$ para $s\in\Delta$ e algum $\epsilon>0$, onde $\Delta$ é um intervalo fechado contendo $t$. Afirmamos que essa hipótese vale para qualquer $t>0$.

Com efeito, seja $\lambda(x,t)$ uma solução de (2.1) tal que $\lambda(x,0)=a$, para todo $x\in\Omega$. Então, $\lambda(x,t)=\lambda(t)$, onde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial t}(x,t) &= -\lambda(x,t) + g(\beta\,(J*f(\lambda))\,(x,t) + \beta h) \\
&= -\lambda(t) + g(\beta\,(J*f(\lambda))\,(t) + \beta h) \\
&= -\lambda(t) + g(\beta f(\lambda(t)) + \beta h).
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\lambda(t)$ é uma função estritamente decrescente. De fato, pois caso contrário, $\frac{\partial \lambda}{\partial t}(x,t) \geq 0$, o que implica

$$g(\beta f(\lambda(t)) + \beta h) \geq \lambda(t).$$

Daí, tomando $t = 0$, temos $g(\beta f(a) + \beta h) \geq a$. Contradizendo a hipótese de que $g$ é limitada por $a$. Logo, $\lambda(t)$ é uma função estritamente decrescente.

Como $u(x,0) \leq a$, temos que $u(x,0) \leq \lambda(x,0)$. Assim, $\lambda(x,0)$ é uma super-solução do problema de Cauchy, e portanto podemos aplicar o Teorema da Comparação, obtendo $u(x,t) \leq \lambda(t)$, em quase toda parte. Repetindo o mesmo argumento para $u(x,0) \geq -a$, para quase todo $x \in \Omega$, obtemos $u(x,t) \geq -\lambda(t) > -a$. Logo, $|u(x,t)| \leq \lambda(t)$.

Sendo $\lambda$ estritamente decrescente, para $t > 0$, temos $\lambda(t) < \lambda(0) = a$, donde, $|u(x,t)| < a$, e assim, $\|u(\cdot,t)\|_\infty < a$, para todo $t > 0$. Portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}(u(\cdot,s)) = -I(u(\cdot,s)) \quad \forall\, t > 0.$$

Para concluir a demonstração, basta mostrar que $u(x)$ é uma solução de equilíbrio de (2.1) se, e somente se, $u$ é um ponto crítico de $\mathcal{F}$, isto é, $I(u(\cdot)) = 0$.

Suponha que $I(u(\cdot)) = 0$, como $f'$ é positiva temos que

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\left[J * f(u)(x,s) + h - \beta^{-1}g^{-1}(u(x,s))\right] = 0,$$

em quase toda parte. Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) = 0 \text{ ou } \left[J * f(u)(x,s) + h - \beta^{-1}g^{-1}(u(x,s))\right] = 0.$$

Se

$$\left[J * f(u)(x,s) + h - \beta^{-1}g^{-1}(u(x,s))\right] = 0$$

temos que,

$$\beta^{-1}g^{-1}(u(x,s)) = J * f(u)(x,s) + h,$$

o que implica

$$g^{-1}(u(x,s)) = \beta J * f(u)(x,s) + \beta h,$$

aplicando $g$ nesta igualdade obtemos

$$u(x,s) = g\left(\beta J * f(u)(x,s) + \beta h\right),$$

e assim, em qualquer caso, obtemos que $u$ é solução de equilíbrio de (2.1).

Reciprocamente, suponha $u$ solução de equilíbrio de (2.1), então $\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) = 0$, e portanto, $I(u(\cdot)) = 0$. ■

**Observação 3.7** *O funcional $\mathcal{F}$ é limitado inferiormente por 0. De fato, basta observar que $J$ é não negativo e sendo $\overline{m}$ mínimo global de $\theta$, temos que $\theta(u(x)) - \theta(\overline{m}) \geq 0$.*

**Proposição 3.8** *Assuma as mesmas hipóteses dadas no Teorema 3.6. Então o fluxo gerado pela equação (2.1) é gradiente.*

**Prova.** No Teorema 3.2 mostramos a existência de um atrator global $\mathcal{A}$, assim aplicando o Teorema 1.41, temos que o fluxo $T(t)$, gerado por (2.1), é assintoticamente suave. Logo, aplicando a Proposição 1.33 obtemos que cada órbita positiva limitada tem fecho compacto. Além disso, como já mostramos a existência de um funcional de Lyapunov para o fluxo gerado por (2.1), segue que $T(t)$ é um sistema gradiente. ■

**Observação 3.9** *Segue da Proposição 1.51 e da Proposição 3.8 que, para cada $u \in X$, o conjunto $\omega$-limite de $u$ está no conjunto dos equilíbrios de (2.1), isto é,*

$$\omega(u) \subset E = \{u \in X; u(x) = g(\beta J * f(u)(x) + \beta h)\}.$$

## 3.4 Um Exemplo Concreto

Nesta seção, exibimos funções $f$, $g$ e $J$ que satisfazem as hipóteses assumidas nos resultados deste Capítulo e do Capítulo 2.

Sejam $f$, $g$ e $J$ funções reais dadas por

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad g(x) = tanh(x) \quad \text{e} \quad J(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}}, \ |x| < 1 \\ 0, \ |x| \geq 1. \end{cases}$$

Essas funções são de classe $C^1$, além disso

**i)** para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como

$$1 + e^{-x} \geq 1,$$

temos que $|f(x)| \leq 1$, mostrando que $f$ satisfaz a hipótese $(H_4)$ com $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Temos ainda que

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2},$$

e como $1 < (1+e^{-x})^2 < 4$, segue que $|f'(x)| \leq 1$, satisfazendo a hipótese $(H_7)$, com $M_1 = 1$, donde, podemos concluir que $f$ é globalmente Lipschitz, com constante $c = 1$, satisfazendo a hipótese $(H_3)$. Em particular $(H_6)$ também é satisfeita.

**ii)** Para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que $(H_1)$ é satisfeita, com constante $k = 1$, pois

$$|tanh(x) - tanh(y)| \leq |x - y|\,.$$

Ademais,

$$|tanh(x)| \leq |x|\,,$$

$$|g'(x) - g'(y)| = \left|sech^2(x) - sech^2(y)\right| \leq |x - y|$$

e,

$$|g'(x)| = \left|sech^2(x)\right| \leq |x| + 1,$$

mostrando que $g$ satisfaz as hipóteses $(H_2)$, $(H_8)$ e $(H_9)$, respectivamente, com $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $L = 1$, $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

**iii)** Para $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que

$$\operatorname{supp}(J) = \overline{\{x \in \mathbb{R}; J(x) \neq 0\}} = [-1, 1].$$

# Apêndice A

# Espaços $L^p$ e Propriedades

Seguindo [3] e [6], exibimos algumas resultados de Teoria da Medida e algumas propriedades dos Espaços $L^p$.

**Definição A.1** *Seja $X$ um conjunto não vazio. Uma $\sigma$-**álgebra** de subconjuntos de $X$ é uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$, isto é, $\mathcal{A} \subset P(X)$, tal que:*

**i)** $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

**ii)** *para todo $E \in \mathcal{A}$, o complemento $E^C = X \setminus E \in \mathcal{A}$;*

**iii)** *para toda sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$, a união $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.*

*Os elementos de $\mathcal{A}$ são chamados de **conjuntos mensuráveis**. Se ao invés de **(iii)**, $\mathcal{A}$ satisfaz*

**iv)** *dados $E, F \in \mathcal{A}$, sua união $E \cup F \in \mathcal{A}$,*

*então dizemos que a família $\mathcal{A}$ é uma **álgebra**.*

Um **espaço mensurável** é um par ordenado (X;$\mathcal{A}$) consistindo de um conjunto X e uma $\sigma-$ álgebra $\mathcal{A}$ sobre $X$.

**Definição A.2** *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é **mensurável** se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ ao menos um dos conjuntos*

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\},\ \{x \in X; f(x) \leq \alpha\},$$

$$\{x \in X; f(x) < \alpha\},\ \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$$

*pertence a $\mathcal{A}$.*

**Definição A.3** *Uma **medida** é uma aplicação* $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty)$ *tal que*

**i)** $\mu(\emptyset) = 0$*;*

**ii)** $\mu(E) \geq 0$*, para todo* $E \in \mathcal{A}$*;*

**iii)** *se* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência disjunta em* $\mathcal{A}$*, então* $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$*.*

Uma medida $\mu$ é dita $\sigma-$**finita** se existe uma sequência de conjuntos $(E_n)$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \text{ com } \mu(E_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Um **espaço de medida** é uma tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ consistindo de um conjunto $X$, uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $X$, $\mathcal{A}$ e uma medida $\mu$.

**Definição A.4** *Dizemos que uma certa afirmação é válida em **quase toda parte** (q.t.p.) se a afirmação é satisfeita para todo* $x \in X \setminus N$*, onde* $N \in \mathcal{A}$ *é tal que* $\mu(N) = 0$*. Por exemplo, duas funções mensuráveis* $f$ *e* $g$ *são iguais em quase toda parte se, e somente se,* $\mu(N) = 0$*, onde* $N = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$*.*

**Teorema A.5** *(Desigualdade de Young). Sejam* $A$ *e* $B$ *números não negativos e* $1 < p < \infty$*,* $1 < q < \infty$ *tais que* $p$ *e* $q$ *são conjungados, isto é,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Então*

$$A.B \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

**Prova.** Seja $0 < \alpha < 1$ e considere a função $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) = \alpha t - t^{\alpha}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \alpha - \alpha t^{\alpha-1} \\ &= \alpha\left(1 - \frac{1}{t^{1-\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Note que

$\phi'(1) = 0,$

$\phi'(t) < 0$, para $0 < t < 1$,

$\phi'(t) > 0$, para $t > 1$.

Então, segue que

$$\phi(t) \geq \phi(1), \text{ para } t \geq 0,$$

ou seja,

$$\alpha t - t^\alpha \geq \alpha - 1,$$

o que implica

$$t^\alpha \leq \alpha t + 1 - \alpha.$$

Para $a, b > 0$ e $t = \frac{a}{b}$ com $b \neq 0$, temos

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + (1 - \alpha),$$

assim

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha) b.$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{1}{p}, \ a = A^p \text{ e } b = B^q$$

obtemos que

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} (B^q)^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} A^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right) B^q,$$

isto é,

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

■

Denotaremos por $L^1(X, \mu)$, ou simplesmente $L^1(X)$, ou ainda $L^1$, o espaço das funções integráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, com a norma

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} = \int_X |f| \, d\mu.$$

**Definição A.6** *Seja $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Definimos o conjunto*

$$L^p(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(X)\}$$

*O conjunto $L^p(X)$ é um espaço vetorial normado, com a norma*

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} = \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Proposição A.7** *(Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $1 < p < \infty$ tais que $p$ e $q$ são conjugados. Então, $fg \in L^1$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

**Prova.** Sejam $A$ e $B$ números não negativos e $1 < p, q < \infty$, pelo Teorema A.5 (Desigualdade de Young), temos que

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Assim, para $f \in L^p$ e $g \in L^q$ tais que $\|f\|_{L^p}, \|g\|_{L^q} > 0$ façamos

$$A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \text{ e } B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}},$$

temos que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} = \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}.$$

Integrando ambos os lados obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \int_X |f(x)g(x)|\, d\mu &\leq \frac{1}{p\|f\|_{L^p}^p} \int_X |f(x)|^p\, d\mu + \frac{1}{q\|g\|_{L^q}^q} \int_X |g(x)|^q\, d\mu \\
&= \frac{1}{p\|f\|_{L^p}^p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q\|g\|_{L^q}^q} \|g\|_{L^q}^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Portanto, $fg \in L^1$ e $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$. Se $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^q} = 0$, então $fg = 0 \in L^1$ e $\|fg\|_{L^1} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = 0$. ■

**Proposição A.8** *(Desigualdade de Minkowski). Se $f, g \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, então $f + g \in L^p$ e*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

**Prova.** Se $p = 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_X |f + g|\, d\mu &\leq \int_X (|f| + |g|)\, d\mu \\
&= \int_X |f|\, d\mu + \int_X |g|\, d\mu \\
&= \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Logo, segue o resultado. Para $p > 1$, observe que

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq (|f|+|g|)^p \\ &\leq (2\sup\{|f|,|g|\})^p \\ &= 2^p\,|f|^p \\ &\leq 2^p\,(|f|^p+|g|^p)\,. \end{aligned}$$

Como $f, g \in L^p$, segue que $f + g \in L^p$. Além disso,

$$\begin{aligned} |f+g|^p &= |f+g|^{p-1}\,|f+g| \\ &\leq (|f|+|g|)\,|f+g|^{p-1} \qquad \text{(A.1)} \\ &= |f|\,|f+g|^{p-1}+|g|\,|f+g|^{p-1}\,. \end{aligned}$$

Sabendo que $f + g \in L^p$ e $p = (p-1)q$ temos que

$$|f+g|^{p-1} \in L^q.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, dada na Proposição A.7, temos que

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L^p}^p &= \int_X |f+g|^p\,d\mu \\ &\leq \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \\ &\leq \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{p/q}+\|g\|_p\,\|f+g\|_p^{p/q} \\ &= \Big(\|f\|_p+\|g\|_p\Big)\,\|f+g\|_p^{p/q}\,. \end{aligned}$$

Supondo que $\|f+g\|_p \neq 0$, obtemos

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p+\|g\|_p\,.$$

■

**Proposição A.9** *(Desigualdade de Jensen) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{A}$, onde $\mu(E) < \infty$. Seja ainda $f : E \to (a, b)$ e $\varphi$ uma função convexa em $(a, b)$. Então*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu}\int_E f\ d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu}\int_E \varphi(f)d\mu.$$

**Prova.** Como $\varphi$ é convexa em $(a, b)$, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$m(\eta-\alpha)+\varphi(\alpha) \leq \varphi(\eta),\ \forall \eta \in (a,b).$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{\mu(E)}\int_E f\ d\mu$ e $\eta = f(x)$, segue a desigualdade. ■

**Definição A.10** *Dizemos uma sequência $(f_n)$ é de Cauchy em $L^p$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$, tem-se*

$$\|f_m - f_n\|_{L^p} < \epsilon.$$

**Definição A.11** *Sejam $(f_n)$ uma sequência em $L^p$ e $f \in L^p$. Dizemos que $(f_n)$ converge para $f$ em $L^p$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$*

$$\|f_n - f\|_{L^p} < \epsilon.$$

**Teorema A.12** *O espaço $L^p$, com $1 \leq p < \infty$, é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Prova.** Ver [3], p.59, Teorema 6.14. ∎

**Definição A.13** *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ menusrável. Diz-se que $f$ é* ***limitada*** *em* ***quase toda parte*** *se existe $c \geq 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq c, \; \forall x \in X \setminus N,$$

*onde $N \in \mathcal{A}$ é dado por $N = \{x \in X; |f(x)| > c\}$ é tal que $\mu(N) = 0$.*

**Definição A.14** *Definimos o conjunto $L^\infty(X)$ como sendo*

$$L^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e limitada q.t.p}\}.$$

*O conjunto $L^\infty(X)$ é um espaço vetorial normado, com a norma*

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \inf\{c; |f(x)| \leq c \text{ q.t.p sobre } X\}, \tag{A.2}$$

*Observe que se $f \in L^\infty$, então*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ q.t.p },$$

*pois pela definição de ínfimo, existe uma sequência $(c_n)$ tal que $c_n \to \|f\|_{L^\infty}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f(x)| \leq c_n \text{ q.t.p},$$

*ou seja*

$$|f(x)| \leq c_n, \; \forall \; x \notin N_n, \text{ onde } N_n \in \mathcal{A} \text{ com } \mu(N_n) = 0.$$

*Definindo $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, temos $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$ e*

$$|f(x)| \leq c_n, \; \forall x \notin N, \; n \in \mathbb{N}.$$

***Teorema A.15*** *O espaço $L^\infty$ é um espaço de Banach com a norma dada em (A.2).*

***Prova.*** *Ver [3], p.61, Teorema 6.16.* ■

***Definição A.16*** *Dizemos que uma sequência mensurável* $(f_n)$ ***converge em medida*** *para uma função mensurável* $f$*, se para cada* $\alpha > 0$ *tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\right) = 0.$$

***Definição A.17*** *Dizemos que uma sequência* $(f_n)$ ***converge q.t.p*** *(quase toda parte) para* $f$ *em* $\mathcal{A}$*, se existe* $\Omega \in \mathcal{A}$ *com* $\mu(\Omega) = 0$ *tal que para cada* $x \in X \setminus \Omega$*, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n = n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \ \forall \ n \geq n_0.$$

***Definição A.18*** *Dizemos que uma sequência* $(f_n)$ *é de* ***Cauchy em medida*** *se para cada* $\alpha > 0$ *tem-se*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu\left(\{x \in X; |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\}\right) = 0.$$

***Observação A.19*** *Se* $(f_n)$ *converge para* $f$ *em* $L^p$*, então* $(f_n)$ *converge para* $f$ *em medida. De fato, para cada* $\alpha > 0$*, defina*

$$E_n(\alpha) = \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\},$$

*e observe que*

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p^p &= \int |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \\ &\geq \int_{E_n(\alpha)} |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \\ &\geq \alpha^p \mu\left(E_n(\alpha)\right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

*Desde que* $\|f_n - f\|_p^p \to 0$*, quando* $n \to \infty$ *tem-se* $\mu\left(E_n(\alpha)\right) \to 0$*, quando* $n \to \infty$*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\right) = 0.$$

*Portanto,* $(f_n)$ *converge para* $f$ *em medida.*

***Observação A.20*** *Segue da definição que se* $(f_n)$ *converge em medida, então* $(f_n)$ *é de Cauchy. Segue da definição.*

***Teorema A.21*** *Seja* $(f_n)$ *uma sequência de funções mensuráveis a valores reais que é de Cauchy em medida. Então existe uma subsequência que converge em quase toda parte e em medida para uma função mensurável* $f$*.*

***Prova.*** *Veja [3], p.69, Teorema 7.6.* ∎

***Teorema A.22*** *Seja $(f_n)$ uma sequência em $L^p$ e seja $f \in L^p$ tais que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})$, tal que $f_{n_k} \to f(x)$, quase sempre em $\Omega$.*

***Prova.*** *Veja [5], p.94. Teorema 4.9.* ∎

***Definição A.23*** *Seja $\Omega$ um suconjunto de $\mathbb{R}^n$ aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) \;\; = \;\; & \Big\{ u \in L^p(\Omega);\ \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \ \textit{tal que} \\ & \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall i = 1, 2, \dots, n \Big\}, \end{aligned}$$

*onde $C_c^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções $C^\infty$ com suporte compacto.*

*No caso, as funções $g_i$, são as derivadas fracas de $u$ com relação à $x_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é munido com a norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

***Teorema A.24*** *(Rellich - Kondrachov) Suponha que $\Omega$ é limitado e de classe $C^1$. Então temos as seguintes imersões compactas:*

$$\begin{aligned} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*),\ \textit{onde}\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},\ \textit{se}\ p < n; \\ & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \forall q \in [p, +\infty),\ \textit{se}\ p = n; \\ & W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}),\ \textit{se}\ p > n. \end{aligned}$$

*Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersão compacta para todo $p, n \in \mathbb{N}$.*

***Prova.*** *Ver [5], p.285, Teorema 9.16.* ∎

# Apêndice B

# Alguns Resultados de Análise Funcional

*Ao longo desta seção $X$ denotará um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $X'$ o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos munido da norma*

$$\|\phi\| = \sup_{x \in X; \|x\| \leq 1} |\phi(x)| \, , \, \forall \phi \in X'.$$

***Teorema B.1*** *(Teorema de Hanh-Banach). Sejam $G$ um subespaço de $X$ e $\phi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\varphi_{|G} = \phi$ e $\|\varphi\| = \|\phi\|$.*

***Prova.*** *Ver [6], p.58.* ■

***Corolário B.2*** *Seja $X$ um espaço vetorial normado. Para todo $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, existe $\varphi \in X'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

***Prova.*** *Defina $G$ como um subespaço de $X$, dado por*

$$G = \{ax_0 \; ; a \in \mathbb{K}\},$$

*e um funcional linear*

$$\phi : G \longrightarrow \mathbb{K}$$

*dado por*

$$\phi(x) = \phi(ax_0) = a \|x_0\| \, . \tag{B.1}$$

*Note que $\phi$ é limitado e $\|\phi\| = 1$. De fato,*

$$|\phi(x)| = |\phi(ax_0)| = |a| \, \|x_0\| = \|ax_0\| = \|x\|$$

*e*

$$\|\phi\| = \sup_{x\in X;\|x\|\leq 1} |\phi(x)| = 1.$$

*Logo, $\phi$ é um funcional linear limitado e, portanto contínuo. Pelo Teorema B.1 existe um funcional linear contínuo $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a $G$ coincide com $\phi$ e $\|\varphi\| = \|\phi\| = 1$. Da equação (B.1) segue que*

$$\varphi(x_0) = \phi(x_0) = \|x_0\|\,.$$

■

***Teorema B.3*** *(Teorema do ponto fixo de Banach) Seja $(X, d)$ um espaço métrico completo. Se a aplicação $F : X \longrightarrow X$ é uma contração, isto é, se existe uma constante $0 \leq \beta < 1$ tal que*

$$d(F(x), F(y)) \leq \beta d(x, y),\ \forall\ x, y \in X,$$

*então existe um único ponto fixo $x^* \in X$, ou seja, $F(x^*) = x^*$. Mais ainda, $x^*$ é um atrator de $F$, isto é, $F^n(x) \to x^*$, quando $n \to \infty$, para todo $x \in X$*

***Prova.*** *Seja $x_0 \in X$. Vamos construir a seguinte sequência*

$$x_1 = F(x_0),\ x_2 = F(x_1), \ldots,\ x_{n+1} = F(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Vamos mostrar que essa sequência $(x_n)$ é de Cauchy. Para tanto, mostremos primeiramente usando indução em $n \in \mathbb{N}$ que*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \beta^n d(x_1, x_0),\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{B.2}$$

*De fato, para $n = 1$, temos*

$$d(x_2, x_1) = d(F(x_1), F(x_0)) \leq \beta d(x_1, x_0).$$

*Suponhamos, por hipótese de indução, que a desigualdade (B.2) seja válida para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é,*

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \beta^k d(x_1, x_0).$$

*Daí, para $k + 1 \in \mathbb{N}$, usando a hipótese de indução e a hipótese de que $F$ é contração temos*

$$d(x_{k+2}, x_{k+1}) = d(F(x_{k+1}), F(x_k)) \leq \beta d(x_{k+1}, x_k) \leq \beta^{k+1} d(x_1, x_0),$$

*mostrando que a desigualdade (B.2) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Dados $n, r \in \mathbb{N}$, usando a desigualdade triangular e a equação (B.2) obtemos que*

$$\begin{aligned}
d(x_{n+r}, x_n) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+3}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+r}, x_{n+r-1})\\
&\leq \left(\beta^n + \beta^{n+1} + \ldots + \beta^{n+r-1}\right) d(x_1, x_0)\\
&= \beta^n \left(1 + \beta + \ldots + \beta^{r-1}\right) d(x_1, x_0)\\
&= \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

*Passando ao limite quando $n \to \infty$, como $\beta < 1$ temos que $d(x_{n+r}, x_n) \to 0$, donde segue que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy, e como $X$ é espaço de Banach, existe $x^* \in X$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

***Afirmação I**: $x^*$ é ponto fixo de $F$.*

*De fato,*

$$F(x^*) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

***Afirmação II**: $x^*$ é o único ponto fixo de $F$.*

*De fato, suponha que existe $p \in X$ tal que $p$ também é ponto fixo de $F$, então*

$$d(x^*, p) = d(F(x^*), F(p)) \leq \beta d(x^*, p),$$

*o que implica que*

$$(1-\beta)d(x^*, \beta) \leq 0,$$

*daí, como $1-\beta > 0$ e $d(x^*, p) \geq 0$ temos que*

$$d(x^*, p) = 0,$$

*donde, $x^* = p$.* ∎

***Corolário B.4** Seja $X$ um espaço métrico completo. Se $F : X \longrightarrow X$ é contínua e, para algum $m$, $F^m$ é uma contração, então existe um único ponto $p$ fixo por $F$. Mais ainda, $p$ é um atrator de $F$.*

***Prova.** Sendo $F^m$ uma contração, pelo Teorema B.3 existe um ponto fixo atrator $x^*$ de $F^m$. Seja $n = mk + l$, com $0 \leq l < m$. Dado $x \in X$, observe que $F^l(x)$ é um ponto de $X$. Assim, como $x^*$ é atrator de $F^m$, temos*

$$\lim_{k\to\infty} (F^m)^k(F^l(x)) = x^*.$$

*Daí,*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = \lim_{n\to\infty} F^{mk+l}(x) = \lim_{k\to\infty} (F^m)^k(F^l(x)) = x^*,$$

*isto é, $x^*$ é um atrator de $F$. Além disso, usando a continuidade da $F$*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} F^n(F(x^*)) = \lim_{n\to\infty} F^{n+1}(x^*) = \lim_{n\to\infty} F(F^n(x^*)) = F(\lim_{n\to\infty} F^n(x^*)) = F(x^*),$$

*provando que $x^*$ é ponto fixo de $F$.* ∎

***Definição B.5** Um subconjunto $E$ de $X$ é **relativamente compacto** se $\overline{E}$ é compacto.*

***Definição B.6*** *Um subconjunto $E$ de $X$ é* **totalmente limitado** *se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma família finita de bolas $B_1, B_2, \ldots, B_n \subset X$, para algum $n \in \mathbb{N}$ com, $diam(B_i) = \epsilon$, $i = 1, \ldots, n$, tal que*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

***Teorema B.7*** *Todo subconjunto $E \subset X$ que é totalmente limitado é relativamente compacto.*

***Prova.*** *Ver [17], p.182, Lema 24.1.* ■

***Definição B.8*** *Um subconjunto $E \subset X$ é dito* **convexo** *se para todo $x, y \in E$ temos*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in E, \; \forall \lambda \in (0,1)\,. \tag{B.3}$$

***Definição B.9*** *Seja $F \subset X$. A interseção de todos os conjuntos convexos que contém $F$ é chamada* **envoltória convexa** *e denotamos por $conv(F)$.*

*A combinação convexa de elementos de $F$ é um elemento da forma*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

*onde*

$$x_i \in F,\; \lambda_i \geq 0,\; i = 1, 2, \ldots, n,\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

*Vamos denotar a combinação convexa de todos os elementos do conjunto $F$ por $cvx(F)$.*

***Teorema B.10*** *O fecho convexo de um conjunto compacto é compacto.*

***Prova.*** *Ver [1] p.185, Teorema 5.35.* ■

***Teorema B.11*** *Um espaço métrico $X$ é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $(F_n)$ de subconjuntos fechados não vazios $F_n \subset X$, com $\lim\limits_{n\to\infty} diam F_n = 0$, existe um ponto $a \in X$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.*

***Prova.*** *Ver [15], p.189, Proposição 18.* ■

# Apêndice C

# Convolução de Funções

*Vamos definir a convolução de funções e apresentar algumas propriedades.*

***Definição C.1*** *Dadas as funções $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, definimos o produto convolução $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

*para os pontos $x$ tais que a integral exista.*

***Proposição C.2*** *O produto convolução satisfaz as seguintes propriedades:*

**i)** $f * g = g * f$;

**ii)** $f * (g + h) = f * g + f * h$;

**iii)** $(f * g) * h = f * (g * h)$.

***Prova.*** ***i)*** *Seja $z = x - y$, temos que*

$$\begin{aligned} (f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

***ii)***

$$\begin{aligned} [f * (g + h)](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)[(g+h)(y)]dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)[g(y) + h(y)]dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)dy \\ &= (f * g)(x) + (f * h)(x). \end{aligned}$$

***iii)*** *Usando **(i)** e o Teorema de Fubini temos que*

$$
\begin{aligned}
[(f*g)*h](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x-y)h(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-y-z)dz\ h(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left( \int_{\mathbb{R}} g(x-z-y)h(y)dy \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g*h)(x-z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (g*h)(x-z)f(z)dz \\
&= [(g*h)*f](x).
\end{aligned}
$$

■

***Teorema C.3*** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $D_x g$ for limitada, então $f*g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $D_x(f*g) = f*(D_x g)$.*

***Prova.*** *Defina*

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy.$$

*Pela regra de Leibniz, temos*

$$\phi'(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_x(x-y)f(y)dy. \tag{C.1}$$

*Note que a integral em (C.1) converge uniformemente em $-\infty < x < +\infty$, pois $g_x$ é limitada e $f \in L^1$. Assim,*

$$
\begin{aligned}
D_x(f*g)(x) &= \phi'(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g_x(x-y)f(y)dy \\
&= [(D_x g)*f](x) \\
&= [f*(D_x g)](x).
\end{aligned}
$$

■

***Corolário C.4*** *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ funções de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ com $D_x f$ e $D_x g$ limitadas. Então*

$$D_x(f*g) = (D_x f)*g = (D_x g)*f.$$

***Prova.*** *Da Proposição C.2 e do Teorema C.3 temos*

$$D_x(f*g) = f*(D_x*g) = (D_x*g)*f.$$

*Analogamente*

$$D_x(f*g) = D_x(g*f) = g*(D_x f) = (D_x f)*g.$$

■

***Teorema C.5*** *(Desigualdade de Young Generalizada). Seja $g$ uma função contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, dy \leq C, \ \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, dx \leq C.$$

*Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, a função $Tf$ é dada por*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x,y) f(y) dy$$

*está bem definida em quase toda parte, $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|Tf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$.*

***Prova.*** *Suponha $1 < p < \infty$ e seja $q$ o expoente conjugado de $p$. Observe que,*

$$|g(x,y)f(y)| = |g(x,y)|^{\frac{1}{q}} \left( |g(x,y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)| \right).$$

*Daí,*

$$|(Tf)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|^{\frac{1}{q}} \left( |g(x,y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)| \right) dy,$$

*usando a desigualdade de Holder, temos*

$$|(Tf)(x)| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

*e usando a hipótese, temos*

$$|(Tf)(x)| \leq C^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Elevando ambos os membros dessa igualdade a $p$, obtemos*

$$|(Tf)(x)|^p \leq C^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, |f(y)|^p\, dy$$

*assim*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(Tf)(x)|^p\, dx &\leq C^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, |f(y)|^p\, dy\ dx \\ &\leq C^{\frac{p}{q}+1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, dy. \end{aligned}$$

*Logo,*

$$\|Tf\|_p \leq C \|f\|_p.$$

*Em particular, obtemos que a integral definida de $(Tf)(x)$ converge absolutamente em quase toda parte, provando o teorema para o caso $1 < p < \infty$. Para $p = 1$ é análogo, e precisamos apenas da hipótese $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, dx \leq C$, e para $p = \infty$, precisamos da hipótese $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|\, dy \leq C$.* ∎

***Teorema C.6*** *(Desigualdade de Young). Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, então* $f * h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|f * h\|_p \leq \|f\|_1 \|h\|_p .$$

***Prova.*** *Basta aplicar o Teorema C.5 fazendo* $g(x,y) = h(x-y)$*. De fato,*

$$\|Tf\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} = \|h * f\|_p .$$

*Logo,*

$$\|h * f\|_p \leq \|f\|_1 \|h\|_p .$$

*Veja [11], p.241.* ■

# Apêndice D

# Derivada de Gâteaux e derivada de Fréchet

*Nesta seção apresentamos as definições das derivadas de Gâteaux e de Fréchet, que generaliza o conceito da derivada no $\mathbb{R}^n$, algumas observações e uma proposição, que foram utilizados no texto. Para exemplos e mais detalhes, veja [2] e [19].*

***Definição D.1*** *Sejam $X$ um espaço vetorial e $Y$ espaço vetorial topológico. Considere um operador $f : X \to Y$. Dados $x$ e $\eta$ em $X$, se*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t}$$

*existe, dizemos que $f$ é Gâteaux diferenciável em $x$ na direção de $\eta$. Ao valor do limite denotamos por $Df(x)(\eta) \in Y$ e o chamamos a* ***derivada de Gâteaux*** *de $f$ em $x$ na direção de $\eta$.*

*Dizemos que $f$ é Gâteaux diferenciável em $x$ quando $f$ é Gâteaux diferenciável em $x$ para toda direção $\eta \in X$.*

***Observação D.2*** *O operador*

$$\begin{aligned} Df(x) : X &\longrightarrow Y \\ \eta &\longmapsto Df(x)(\eta) \end{aligned}$$

*é chamado a derivada de Gâteaux de $f$ em $x$, e o operador*

$$\begin{aligned} Df : X &\longrightarrow [X, Y] \\ x &\longmapsto D(f)(x) \end{aligned}$$

*é chamado a derivada de Gâteaux de $f$.*

***Definição D.3*** *Considere* $f : X \to Y$*, onde* $X$ *e* $Y$ *são espaços lineares normados. Dado* $x \in X$*, se existe um operador linear* $f'(x) \in L[X,Y]$ *tal que*

$$\lim_{\|\delta x\| \to 0} \frac{\|f(x+\delta x) - f(x) - f'(x)(\delta x)\|}{\|\delta x\|} = 0,\ \delta x \in X, \tag{D.1}$$

*então* $f$ *é diferenciável segundo Fréchet e* $f'(x)$ *é chamada a* ***derivada de Fréchet*** *de* $f$ *em* $x$.

*O operador*

$$\begin{aligned} f' : X &\longrightarrow L[X,Y] \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

*é chamada a derivada de Fréchet de* $f$.

***Observação D.4*** *A derivada de Fréchet,* $f'(x)$*, é por definição um operador linear contínuo, o que não ocorre necessariamente com a derivada de Gâteaux.*

***Observação D.5*** *Se* $f$ *é Fréchet diferenciável, então* $f$ *é Gâteaux diferenciável. De fato, se* $f'(x)$ *existe, então substituindo* $\Delta x$ *por* $t\Delta x$ *em (D.1), temos*

$$\lim_{\|t\Delta x\| \to 0} \frac{\|f(x+t\Delta x) - f(x) - f'(x)(t\Delta x)\|}{\|t\Delta x\|} = 0.$$

*Como* $t \to 0$ *implica* $\|t\Delta x\| \to 0$*, temos*

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{\|f(x+t\Delta x) - f(x) - f'(x)(t\Delta x)\|}{t} \right\| = 0,$$

*ou ainda, usando a linearidade da derivada de Fréchet temos*

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x+t\Delta x) - f(x)}{t} - f'(x)(\Delta x) \right\| = 0.$$

*Daí,*

$$\|Df(x) - f'(x)(\Delta x)\| = 0,\ \forall \Delta x \in X.$$

*Logo,* $Df(x) = f'(x)$.

***Proposição D.6*** *Sejam* $X$ *e* $Y$ *espaços lineares normados. Considere* $f : X \to Y$*. Suponha* $Df : X \to L[X,Y]$ *e* $Df$ *contínua em* $x$*. Então, a derivada de Fréchet* $f'(x)$ *existe e* $f'$ *é contínua em* $x$.

***Prova.*** *Veja [2], p.17, Proposição 18.* ■

# Bibliografia


[1] Aliprantis, C. D. e Border, K. C., *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide*, Springer, 3aed., New York, 2007.

[2] Almeida, B. A. S., *Algumas Propriedades de Equações Diferenciais em Espaços de Banach e Aplicações a Campos Neurais*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2015).

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1995.

[4] Barros, S. R. M., Pereira, A. L., Possani, C., Simonis, A., *Spatial Periodic Equilibria for a Non Local Evolution Equation*. Discrete and Continuous Dynamical Systems 9 N.4, (2003), 937-948.

[5] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[6] Botelho, G., Pelegrino, D., Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[7] Daleckiĭ, J.L. e Kreĭn, M.G., *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space (Translations of Mathematical Monographs v.43)*, American Mathematical Society, Providence, Rhodes Island, 1970.

[8] Da Silva, S.H., *Existence and upper semicontinuity of global attractor for neural fields in an unbounded domain*, Eletronic Journal of Differential Equations Vol. 2010, No. 138, pp 1-12.

[9] Da Silva, S. H, e Pereira, A. L., *Existence of global attractors and gradient property for a class of non local evolution equations*, São Paulo J. Math. Sci. 2 (2008) 1-20.

[10] *Da Silva, S.H. Pereira, A.L., Global Attractors for neural fields in a weighted space. Matemática Contemporânea, 36 (2009) 139-135.*

[11] *Folland, G.B., Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications. Jonh Wiley, 2a Ed., New York, 1999.*

[12] *Hale, K.J., Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. American Surveys and Monographs, N. 25, American Mathematical Society, Rhode Island, 1988.*

[13] *Henry, D., Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathmatics, Springer - Verlog, New York, 1981.*

[14] *Ladas, G. E., Laksmikantham, V., Differential Equations in Abstract Spaces, Academic Press, New York, 1972. (Mathematics in Science and Engineering, v. 85).*

[15] *Lima, E.L.,Espaços Métricos, 4.ed., Rio de Janeiro, IMPA(Projeto Euclides), 2009.*

[16] *Masi, A., Orland, E., Presutti, E., Triolo, L., Uniqueness and global stability of the instanton in non local evolution equations. Rendiconti di Matematica, Série VII, Vol. 14, 1994, 693-723.*

[17] *Oliveira, C.R., Introdução à Análise Funcional, Rio de Janeiro, Impa, 2010.*

[18] *Pereira, A.L., Global attractor and nonhomogeneous equilibrio for a nonlocal evolution equation in an unbounded domain, Journal of Differential Equations, (2005), p.1-21.*

[19] *Rall, L.B., Nonlinear Functional Analysis and Applications, Academic Press, New York - London, 1971.*

[20] *Silva, M.B., Comportamento Assintótico para equações de Campos Neurais, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2014).*

[21] *Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.*

[22] *Teman, R., Infinite- Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer Verlag, New Ork, 1988.*

[23] *Wilson, H.R., Cowan, J.D., Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons, Biophys. J., 12 (1972), 1-24.*