Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Equações quaselineares com crescimento crítico exponencial

por

Pedro Fellype da Silva Pontes †

sob orientação do

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

† Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

P814e Pontes, Pedro Fellype da Silva.
Equações quaselineares com crescimento crítico exponencial / Pedro Fellype da Silva Pontes. – Campina Grande, 2019.
104 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos".
Referências.

1. Espaços de Orliez-Sobolev. 2. Equações quaselineares. 3. Trudinger-Moser. I. Santos, Jefferson Abrantes dos. II. Título.

CDU 517.956(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

Equações quaselineares com crescimento crítico exponencial

por

Pedro Fellype da Silva Pontes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Ângelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG

Examinador Interno

Profa. Dra. Luciana Roze Freitas - UEPB

Examinadora Externa

Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer - UFCG

Examinador Externo

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Maio/2019

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, o autor e consumador da minha fé, o qual pela sua infinita misericórdia tem me concedido bençãos sem medidas, pois *"o princípio da sabedoria é o temor a Deus..." Pv 1:7a.* Anseio o dia em que O verei face a face e O adorarei por toda eternidade. *Soli Deo Gloria.*

Agradeço a minha família por sempre apoiar minhas loucuras e ser meu porto seguro. Meus pais Luis Carlos e Eliane Santos por todos os dias me amarem e carregarem metade do meu fardo comigo, sem eles nada seria. Às minhas irmãs Renaly Pontes, Rayane Pontes e aos meus cunhados Nelson Dutra Junior e Cláudio Valviesse, por caminharem comigo me fazendo cada dia mais feliz. Agradeço também aos meus irmãos, não de sangue, mas de coração, Tcharlys Lopes, Thalita Azevedo e Alisson Amarante, por todo companheirismo e amor. Amo todos vocês.

Agradeço em especial, assim como és para mim, Maria do Nascimento por me fazer tão feliz durante todos esses anos, me amando, seja nos momentos de alegria ou tristeza. Prometo passar o resto dos meus dias tentando te fazer feliz do mesmo modo que, perfeitamente, você me faz feliz.

A todos os meus amigos e colegas da UFCG que fizeram essa longa caminhada ser menos árdua. Agradeço aos amigos do mestrado/doutorado: André Ramalho, Weiller Felipe, Daniela Enéas, Franciélia, Geovanny Patricio, José Lucas, Laise Dias, Lucas da Silva, Lucas Siebra, Michelle Alessandra, Oliverio Pichardo, Renan Isneri, Renato Melo e Wallace Ferreira. Especialmente agradeço a Geisa Gama, por todos os risos, choros e as resenhas, o que sempre deixava o dia mais alegre. Quero também externar minha gratidão a todos que compõem o PET-Matemática, inúmeras foram as vezes que pudemos conversar, discutir e, principalmente, rir. A todos os meus amigos de graduação na UEPB com quem pude descobrir a mais bela de todas as ciências, a Matemática.

Em particular, quero agradecer a Roseane Martins e Ismael Sandro, com quem mais pude dividir minhas dúvidas e anseios. O PRI - Pedro, Roseane e Ismael - sempre anda junto. Obrigado, Rosy, por toda a amizade e carinho, nunca esquecerei os longos dias de estudos, as risadas, os choros e, principalmente, as alegrias a cada nota recebida e aprovação. Lembre-se, mesmo barco sempre. Ao meu querido amigo Ismael por todo apoio, palavras de ânimo e ensinamentos, não só matemáticos. Que balbúrdia é essa? Sou grato a Deus por ter me apresentado pessoas tão especiais.

A todos os funcionários da UAMat-UFCG, sempre dispostos a nos auxiliar. Em particular, Andrezza Freitas, por toda sua disponibilidade; Aninha, pois sempre que preciso está disposta, e Gislayne por todas as vezes que conversamos e dividimos problemas.

Agradeço a todo corpo docente da UFCG que direta ou indiretamente me trouxe grandes ensinamentos. Em especial, agradeço aos Professores Doutores Marco Aurélio, Antônio Brandão, Henrique Lima, Alânnio Nóbrega, Romildo Nascimento, Claudianor Alves, Marco Velásquez, Diogo Diniz e Fábio Reis.

Quero agradecer ao Professor Dr. Jefferson Abrantes por ter tido toda paciência de me orientar, através da qual percebo nitidamente a evolução que tive desde o primeiro dia que estudamos juntos.

Por fim, agradeço à banca examinadora, por todas as consideráveis sugestões para melhoramento deste trabalho. À Professora Dra. Luciana Roze, a qual tive o grande privilégio de ser aluno na minha graduação na UEPB, e aos Professore Doutores Angelo Roncalli e Rodrigo Cohen pela disponibilidade de revisar com cuidado este trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais e às irmãs, à minha namorada Maria Nascimento e ao PRI.

“La matematica è l’alfabeto nel quale DIO ha scritto l’universo.”

Galileo Galilei

Resumo

Neste trabalho revisitamos as imersões do tipo Trudinger-Moser, com o objetivo de encontrar soluções fracas para uma classe de problemas elípticos quaselineares sobre os espaços de Orlicz-Sobolev em domínio limitado do $\mathbb{R}^2$.

Palavras chave: Espaços de Orlicz-Sobolev, Equações quaselineares, Trudinger-Moser.

Abstract

In this work, we investigated Trudinger-Moser type embedding with goal to find weak solution for a class of quasilinear elliptic problems with critical growth on Orlicz-Sobolev spaces in bounded domain of $\mathbb{R}^2$.

Keywords: Orlicz-Sobolev spaces, Quasilinear elliptic problems, Trudinger-Moser.

Conteúdo

Notações

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}, \quad r > 0$;
- $\mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, ..., x_N) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., N\}$ e $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;
- $\mid A \mid$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável;
- ω_N denota a medida da esfera N-dimensional;
- $d_\Omega = diam(\Omega) = \sup\{|x - y| : x, y \in \Omega\}$;
- $supp(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$;
- $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$ e $u^-(x) = \max\{0, -u(x)\}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável;
- Dado $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, definimos, para algum $M \in \mathbb{R}$, $[u \geq M] = \{x \in \Omega \ : \ u(x) \geq M\}$. Analogamente define-se $[u \leq M]$, $[u > M]$ e $[u < M]$;
- $\rightharpoonup$ designa convergência fraca e $\overset{\star}{\rightharpoonup}$ designa convergência fraca estrela;
- $f(x) \approx g(x)$ designa que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$;
- χ_A é a função característica com relação ao conjunto A;
- Dado uma matriz A, denotamos A^T como sendo a matriz transposta de A;
- $div(w(x)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x)$, onde $w(x) = (w_1(x), w_2(x), ..., w_N(x))$, $x \in \mathbb{R}^N$;
- $A \subset\subset \Omega$ denota que A está compactamente contido em Ω;

- $A \hookrightarrow B$ designa que A está imerso em B;
- $C_0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é contínua com $supp(u) \subset \Omega$ compacto$\}$;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\}, p \in [1, +\infty)$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável $:$ existe $c > 0$ tal que $|u(x)| \leq c$ q.t.p. em $\Omega\}$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é continuamente derivável k vezes$\}$;
- $L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_A |u(x)| dx < +\infty, \text{ para qualquer } A \subset\subset \Omega \right\}$;
- X' denota o dual topológico de X;
- $||\cdot||_*$ denota a norma dos funcionais lineares contínuos, isto é, dados X um espaço de Banach e $I \in X'$

$$||I||_* = \sup\{|I(x)| \; : \; x \in X \text{ e } ||x||_X \leq 1\}.$$

Introdução

Neste trabalho, seguindo o artigo de Cerny, Gurka e Hencl, ver [6], propomo-nos a estudar a existência de solução fraca e não-trivial da seguinte classe de problemas quaselineares,

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_\alpha} u = f(x,u) \quad \text{em } \Omega; \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\alpha \in [0,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\Delta_{\Phi_\alpha} u$ é o operador Φ_α-Laplaciano dado por:

$$\Delta_{\Phi_\alpha} u = div\left(\Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right),$$

$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com crescimento do tipo exponencial que descreveremos mais a frente, e $\Phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função de Young satisfazendo as seguintes condições:

(Φ_1) Existe $C > 0$ tal que

$$\frac{t^2}{C} \le \Phi_\alpha(t) \le Ct^2, \quad \forall t \in [0, 1/C);$$

(Φ_2) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_\alpha(t)}{t^2 log^\alpha t} = 1.$

Esta classe de problema é motivada por uma aplicação física na área de mecânica dos fluidos. Quando consideramos

$$\Phi_\alpha(t) = t^2 + 2\int_0^{|t|} s\ arcsenh^\alpha s\ ds \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

pode-se mostrar que $\Phi_\alpha(t)$ satisfaz as condições (Φ_1) e (Φ_2). Neste caso, o problema

$$\begin{cases} div\left(\Phi'_\alpha(|Du|)\dfrac{Du}{|Du|}\right) + (\text{termo potencial}) = 0 \quad \text{em } \ \Omega; \\ div\, u = 0 \quad \text{em } \ \Omega; \\ u = 0 \quad \text{em } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

modela um fluido do tipo Prandtl-Eyring, que caminha lento sobre Ω, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ denota o campo velocidade de um fluido incompressível e

$$Du := \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right],$$

é o gradiente simétrico de u (para mais detalhes veja [5] e [14]).

Aqui, utilizaremos o método variacional para obter uma solução não-nula para o problema (1). Para este objetivo, faz-se necessário o uso de um espaço de funções adequado, que no nosso caso é o espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ (sua definição será abordada nos Capítulos 1 e 2). Além disso, uma vez que $f(x,t)$ possui um crescimento do tipo exponencial, faz-se necessário, também, o uso de uma imersão do tipo Trudinger-Moser associado ao $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$.

O estudo das imersões do tipo Trudinger-Moser para espaços de Orlicz-Sobolev, $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, teve ínicio com Fusco, Lions e Sbordone em 1995 (ver [16]), utilizando os espaços de Lorentz, os quais modelam os espaços de Orlicz. Os autores mostraram que, se $\alpha < 0$, o espaço $WL^2\log^\alpha L(\Omega)$ está imerso continuamente no espaço de Orlicz $L_\psi(\Omega)$ (ver definição no Capítulo 1) associado à função de Young $\psi(t) = \exp(t^\gamma) - 1$, para $\gamma = \dfrac{2}{1-\alpha}$. Em 1996, Edmunds, Gurka e Opic [10], usando também os espaços de Lorentz, mostraram que esta imersão continua sendo verdadeira para $\alpha \in [0,1)$. Recentemente, em 2003, Hencl [17], considerando o caso $\alpha \in [0,1)$, deu uma nova prova para esta imersão, agora usando o espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$. Este resultado é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 0.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira regular, $\alpha \in [0,1)$, $B = 1-\alpha$, $\omega_1 = 2\pi$, $K_\alpha = 2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}$ e $\Phi_\alpha(t)$ uma função de Young satisfazendo as condições (Φ_1) e (Φ_2). Se $K < K_\alpha$ e $|\nabla u|_{\Phi_\alpha} \le 1$, então*

$$\int_\Omega \exp(|Ku(x)|^\gamma)dx \le C,$$

onde a constante C depende apenas de α, $|\Omega|$ e K.

Além disso, nesse mesmo trabalho, Hencl mostrou que a constante K_α é ótima para que esta desigualdade continue sendo verificada:

Teorema 0.2 *Sob as condições do Teorema* 0.1*, se* $K > K_\alpha$*, existe uma função radial* $f_m : B_R(0) \to \mathbb{R}$*,* $f_m \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(B_R(0))$*, tal que*

$$\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla f_m(x)|)dx \leq 1 \quad e \quad \int_{B_R(0)} \exp(|Kf_m(x)|^\gamma)dx \geq m.$$

É importante ressaltar que Hencl no Teorema 0.1 não estabelece uma estimativa uniforme para o caso *boderline* $K = K_\alpha$. O que ele consegue desenvolver é se $\Phi_\alpha(t)$ além de verificar as condições (Φ_1) e (Φ_2), verificar

(Φ_3) Existe $M_1 > 0$ tal que $\Phi_\alpha(t) \leq M_1 t^2(1 + \log^2 t)$, para $t \in (0, 1]$,

então é possível estabelecer um teorema similar ao Teorema 0.2 para o caso onde $K = K_\alpha$.

Um importante resultado, devido a Fukagai, Ito e Narukawa, ver [15], que nos auxiliará bastante em nossos intentos é o seguinte:

Proposição 0.3 *Suponha que* $\Phi(t)$ *é uma função de Young diferenciável satisfazendo,*

$$m \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq M, \quad \forall t > 0,$$

para algum $M \geq m > 1$*. Definindo, para* $t \geq 0$*,*

$$\xi_0(t) := \min\{t^m, t^M\} \quad e \quad \xi_1(t) := \max\{t^m, t^M\},$$

temos

$$\xi_0(\rho)\Phi(t) \leq \Phi(\rho t) \leq \xi_1(\rho)\Phi(t), \quad para \quad \rho, t \geq 0,$$

e

$$\xi_0(|u|_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(|u|)dx \leq \xi_1(|u|_\Phi) \quad para \quad u \in L_\Phi(\Omega),$$

onde $L_\Phi(\Omega)$ *é o espaço de Orlicz definido no Capítulo 1.*

Se considerarmos $\Phi_\alpha(t)$ uma função de Young que satisfaz (Φ_1) e (Φ_2), pode-se mostrar (ver Capítulo 2) que

$$m_\alpha := \inf_{t>0} \frac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)} > 1$$

e

$$c_\alpha := \sup_{t>0} \frac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)} \leq K - 1,$$

para algum $K \geq 4$. Sendo assim,

$$m_\alpha \leq \frac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)} \leq c_\alpha, \quad t > 0, \tag{3}$$

mostrando que $\Phi_\alpha(t)$ está nas condições da Proposição 0.3. A partir de (3), verificaremos no Capítulo 2 que é possível concluir que os espaços $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$ e $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ são reflexivos e separáveis. Além disso, também é possível mostrar que a função dada em (2) verifica (3) com $m_\alpha = 2$ e $c_\alpha = 2 + \alpha$ (ver [21], página 98).

É importante observar que se considerarmos $\alpha = 0$ e $\Phi_\alpha(t) = t^2$, o espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ se torna o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ e o problema quaselinear (1) se torna um problema semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u = \hat{f}(x,t) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\hat{f}(x,t) = \dfrac{f(x,t)}{2}$. Esse tipo de problema, no qual a não linearidade $\hat{f}$ tem crescimento crítico exponencial, já foi estudado por vários autores, por exemplo [2], [8], [9] e [13]. Bem como no problema (1), para obtenção de solução via método variacional em $H_0^1(\Omega)$, faz-se necessária uma imersão contínua do tipo Trundiger-Moser para o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Esta imersão é estabelecida em 1967 por Trudinger, em [27], dada por

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\phi_\star}(\Omega), \tag{5}$$

onde $\phi_\star(t) = e^{t^2} - 1$. Mais tarde, em 1971, Moser [22], mostrou que para $\lambda \leq 4\pi$ e $|\nabla u|_2^2 \leq 1$,

$$\int_\Omega \exp(\lambda |u|^2) dx \leq C|\Omega|,$$

para alguma constante universal $C > 0$.

A fim de organizar nosso trabalho, o dividimos da seguinte maneira: no **Capítulo 1** fizemos uma revisão precisa dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev. Enunciamos e demonstramos alguns dos resultados principais que envolvem as funções de Young, espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, bem como algumas imersões contínuas.

Como trabalharemos com o operador Φ_α-Laplaciano, dedicamos todo o **Capítulo 2** a esse assunto. Esse operador é dado por

$$\Delta_{\Phi_\alpha} u := div\left(\Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio com fronteira regular, $\alpha \in [0,1)$ e $\Phi_\alpha(t) \approx t^2 \log^\alpha t$, para t suficientemente grande, é uma função de Young. Além disso, a função de Young $\Phi_\alpha(t)$ satisfaz as condições (Φ_1) e (Φ_2) descritas no começo da introdução. Provamos também nesse capítulo algumas propriedades satisfeitas pela função de Young $\Phi_\alpha(t)$, além de resultados envolvendo os espaços $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$ e $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$.

O **Capítulo 3** é destinado às imersões do tipo Trudinger-Moser para o espaço $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$. Embasados por [17], após algumas estimativas superiores, demonstramos os Teoremas 0.1 e 0.2.

Provamos ainda, seguindo [6], duas outras versões da imersão do tipo Trudinger-Moser, Teorema 0.1.

Teorema 0.4 *Sejam $\beta > 0$ e $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, tais que*

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx \leq c < \left(\frac{B^{1/2} 2^{1/\gamma} \omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então, existe $q > 1$ tal que

$$\int_\Omega \exp(\beta q |u_n|^\gamma) dx \leq C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 0.5 *Seja $\{u_n\} \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ tal que $|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \leq C_1$. Dado $R > 0$ tal que $B_{2R}(x) \subset \Omega$, para todo $q \geq 1$, existe $\tau > 0$ tal que, se $|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha, B_R(x)} < \tau$, então*

$$\int_{B_R(x)} \exp(q|u_n|^\gamma) dx \leq C, \quad x \in \Omega,$$

onde $C \geq 0$ é independente de n.

No **Capítulo 4**, seguindo o trabalho de Cerny et. al. [6], propomo-nos a estudar a existência de uma solução fraca não-trivial do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_\alpha} u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega), \end{cases} \tag{6}$$

o qual discutimos no início da Introdução. A não linearidade $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deve ser contínua em $\Omega \times \mathbb{R}$ e satisfazer as seguintes condições:

(f_1) $f(x,t) = 0$, para todo $t \leq 0$, e $tf(x,t) > 0$ para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$. Além disso, existem $\beta > 0$ e $C = C(\beta) > 0$, tais que

$$f(x,t) \leq C \cdot \exp(\beta |t|^\gamma), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \Omega;$$

(f_2) Sendo $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$, existe $\sigma > c_\alpha$ verificando

$$\sigma F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad \forall t \geq 0 \quad x \in \Omega,$$

onde $c_\alpha := \sup \dfrac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)}$;

(f_3) Pedimos que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{F(x,t)}{C_\Phi \Phi_\alpha(t)} < 1 \quad \text{e} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{tf(x,t)}{\exp(\beta|t|^\gamma)} > 0,$$

uniformemente em Ω, onde $C_\Phi > 0$ é a melhor constante da Desigualdade de Poincaré;

(f_4) Existem $M > 1$ e $t_M > 0$ tais que

$$F(x,t) \leq Mt^{1-\frac{1}{M}} f(x,t) \quad t > t_M.$$

Utilizando métodos variacionais, principalmente o bem conhecido Teorema do Passo da Montanha, conseguimos chegar aos nossos intentos. Além disso, acrescentando a condição de que a solução $u \in C^1(\Omega)$, foi possível mostrar que a mesma é estritamente positiva.

Por fim, o **Apêndice A** foi feito para que enunciemos os resultados gerais utilizados no decorrer do trabalho. Fizemos isto para que os capítulos não ficassem grandes e maçantes.

No **Apêndice B** foi feita uma revisão da *Simetrização de Schwarz*, com definições e propriedades, a qual utilizamos no Capítulo 3.

O **Apêndice C** possui uma revisão dos conceitos de *Medidas de Radon*, tal como alguns teoremas que usaremos em pontos chaves do Capítulo 4.

Para que o leitor não tenha que recorrer à Introdução todas as vezes que utilizarmos alguma definição aqui citada, em ocasiões oportunas enunciaremos novamente estes teoremas e condições.

Capítulo 1

Espaços de Orlicz-Sobolev

Neste capítulo, iremos fazer um breve estudo sobre os Espaços de Orlicz e os Espaços de Orlicz-Sobolev, assim como os principais resultados que usaremos durante esta dissertação. Algumas de suas demonstrações serão omitidas, pois entendemos que não fazem parte do escopo desta dissertação. Para essas respectivas demonstrações indicamos [1], [20], [21], [23] e [25].

1.1 Funções de Young

Definição 1.1 *Dizemos que* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *é uma* ***função de Young*** *se satisfaz as seguintes condições:*

(i) Φ *é uma função convexa e contínua em* $\mathbb{R}$*;*

(ii) $\Phi(t) = 0$ *se, e somente se,* $t = 0$*;*

(iii) Φ *é uma função par em* $\mathbb{R}$*;*

(iv) $\dfrac{\Phi(t)}{t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ *e* $\dfrac{\Phi(t)}{t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Deste modo, se Φ é uma função de Young de classe C^1 em $\mathbb{R}_+$, então $\Phi'(0) = 0$ e Φ' é não-decrescente para $\mathbb{R}_+$. Além disso, tem-se também que Φ é crescente em $\mathbb{R}_+$ e Φ' é um homeomorfismo de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$.

Exemplo 1 *Pode-se verificar que as seguintes funções são de Young:*

(i) $\Phi(t) = |t|^p,\ p \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\Psi(t) = e^{t^2} - 1,\ t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\zeta(t) = t^p \log^\alpha(1 + |t|)$, *onde* $p \geq 1$ *e* $\alpha > 0$;

(iv) $\Upsilon(t) = (1 + |t|)ln(1 + |t|) - |t|, t \in \mathbb{R}$.

Os próximos resultados estabelecem propriedades que as funções de Young verificam.

Proposição 1.2 *Seja* Φ *uma função de Young de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}$, *então*

$$\frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \geq 1, \quad \forall\, t > 0.$$

Demonstração. Sendo Φ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}_+$, para cada $t > 0$ fixado, existe $s \in (0, t)$, pelo Teorema do Valor Médio, tal que,

$$\Phi(t) = \Phi'(s)t.$$

Agora, usando o fato de Φ' ser não-decrescente em $\mathbb{R}$, segue-se que

$$\Phi(t) \leq \Phi'(t)t, \quad \forall t > 0. \quad \blacksquare$$

Lema 1.3 *Seja* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *uma função de Young. Então,*

(i) $\Phi(\rho t) \leq \rho\Phi(t),\ \rho \in [0, 1]$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $\Phi(\sigma t) > \sigma\Phi(t),\ \sigma \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

(i) Como Φ é uma função convexa em $\mathbb{R}$, então dados $\rho \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$ temos,

$$\begin{aligned} \Phi(\rho t) &= \Phi(\rho t + (1 - \rho)0) \\ &\leq \rho\Phi(t) + (1 - \rho)\Phi(0) \\ &= \rho\Phi(t). \end{aligned}$$

(ii) Sendo Φ uma função par em toda a reta, podemos supor, sem perda de generalidade, $t > 0$. Dessa forma, para $\sigma \in (1, +\infty)$, temos pelo item (i),

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma}s\right) < \frac{1}{\sigma}\Phi(s).$$

Logo, fazendo $t = \dfrac{1}{\sigma}s$, obtemos

$$\sigma\Phi(t) < \Phi(\sigma t). \quad \blacksquare$$

1.2 Espaços de Orlicz

Com o objetivo de definirmos os espaços de Orlicz, o qual é uma generalização dos espaços de Lebesgue, ao longo desta seção, salvo menção ao contrário, assumiremos que Ω é um domínio de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, com fronteira suave e que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é uma função de Young.

Definição 1.4 *Definimos o conjunto*

$$K_\Phi(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \ : \ \int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty \right\}$$

como a ***classe de Orlicz****.*

É possível mostrar que a classe de Orlicz é um conjunto convexo, e, em geral, não define um espaço vetorial. Dessa forma, a fim de se obter um conjunto que contenha a classe de Orlicz, no qual possua uma estrutura vetorial, vamos agora definir o espaço de Orlicz.

Definição 1.5 *Definimos o* ***espaço de Orlicz*** *associado a função de Young Φ como sendo*

$$L_\Phi(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \ : \ \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx < +\infty, \quad \text{para algum } \lambda > 0 \right\}.$$

O Espaço de Orlicz define um espaço vetorial e contém a classe de Orlicz. Mais ainda, $L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$. De fato, se considerarmos V um subespaço qualquer contendo $K_\Phi(\Omega)$ e $u \in L_\Phi(\Omega)$, então deve existir $\lambda > 0$ tal que,

$$\frac{u}{\lambda} \in K_\Phi(\Omega) \subset V.$$

Mostrando que $u \in V$, e consequentemente

$$L_\Phi(\Omega) \subset V.$$

Definição 1.6 *Definimos a aplicação $|\cdot|_\Phi : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por,*

$$|u|_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$$

como sendo a ***norma de Luxemburg****.*

Pode-se mostrar que o espaço vetorial $L_\Phi(\Omega)$, mudido com a norma $|\cdot|_\Phi$ é um espaço de Banach.

Lema 1.7 *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $k > 0$. Então,*

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k}\right) dx = 1$$

se, e somente se, $|u|_\Phi = k$.

Proposição 1.8 *Seja $u \in L_\Phi(\Omega)$, então valem as seguintes afirmações:*

a) Se $|\, u \,|_\Phi \leq 1$, então $\displaystyle\int_\Omega \Phi(|u|)dx \leq |\, u \,|_\Phi$;

b) Se $|\, u \,|_\Phi > 1$, então $\displaystyle\int_\Omega \Phi(|u|)dx \geq |\, u \,|_\Phi$.

Demonstração.

$a)$ Pelos Lemas 1.3 e 1.7

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx &= \frac{|u|_\Phi}{|u|_\Phi}\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx \\ &\leq |u|_\Phi \int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{|u|_\Phi}|u(x)|\right) dx = |u|_\Phi.\end{aligned}$$

$b)$ Fixado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $1 < \beta_\varepsilon := |u|_\Phi - \varepsilon$ tem-se, pelo Lema, 1.3.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx &= \frac{\beta_\varepsilon}{\beta_\varepsilon}\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx \\ &\geq \beta_\varepsilon \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\beta_\varepsilon}\right) dx \\ &> \beta_\varepsilon.\end{aligned}$$

Passando ao limite de $\varepsilon \to 0^+$, o item (b) fica provado. ■

Vamos observar agora um exemplo no qual mostra que, de fato, os espaços de Orlicz são uma generalização dos espaços de Lebesgue.

Exemplo 2 *Considere a função de Young $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por*

$$\Phi(t) = \frac{|t|^p}{p}, \quad p > 1 \quad e \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.

De fato, tome $u \in K_\Phi(\Omega)$, isso ocorre se, e somente se,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p dx = \int_\Omega \Phi(u(x))dx < +\infty,$$

equivalentemente, $u \in L^p(\Omega)$. Então, $K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$. Analogamente, tomando $u \in L_\Phi(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx < +\infty,$$

para algum $\lambda > 0$, isto é,

$$\frac{1}{p\lambda^p}\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \Leftrightarrow \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Logo, $L^p(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$. Destes fatos,

$$K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega) = L_\Phi(\Omega).$$

1.3 As Condições Δ_2 e ∇_2

Veremos agora duas condições de crescimento, Δ_2 e ∇_2, responsáveis pela condição de separabilidade e reflexividade de $L_\Phi(\Omega)$.

Definição 1.9 *Dizemos que uma função de Young $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfaz a **condição** Δ_2, e escrevemos $\Phi \in \Delta_2$, se existirem uma constante $k > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que*

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Observação 1.10 *Tendo em vista que a condição Δ_2 está intimamente ligada ao espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ (como veremos com mais clareza mais adiante), quando $|\Omega| = +\infty$, a condição Δ_2 é garantida considerando $t_0 = 0$.*

Exemplo 3 *Vejamos um exemplo de uma função de Young que cumpre a condição Δ_2 e outra que não cumpre*

a) A função de Young $\Phi(t) = t^p \log^\alpha(|t| + 1)$, $p \geq 1$ e $\alpha > 0$, satisfaz a condição Δ_2. Para tanto, observe que para $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} &= \frac{2^p t^p \log^\alpha(2t+1)}{t^p \log^\alpha(t+1)} \\ &= \frac{2^p \log^\alpha(2t+2-1)}{\log^\alpha(t+1)}. \end{aligned}$$

Fazendo $u = t + 1$ e usando a monotonicidade da função logaritmo, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} &= \frac{2^p \log^\alpha(2u-1)}{\log^\alpha(u)} \\ &\leq \frac{2^p \log^\alpha(2u)}{\log^\alpha(u)} \\ &= 2^p \left(\frac{\log 2 + \log u}{\log u}\right)^\alpha.\end{aligned}$$

É claro que se $t \to +\infty$, então $u \to +\infty$. Dessa forma,

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} \leq 2^p.$$

Por outro lado, observando que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\log(2t+1)}{\log(t+1)} = 2,$$

obtemos,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} = 2^{\alpha+p}.$$

Destes fatos, basta tomar $k > 2^{\alpha+p}$, suficientemente grande, para que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t) \quad \forall t \geq 0.$$

b) Agora, tomando a função de Young $\Psi(t) = e^{t^2} - 1$, é possível mostrar que,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = +\infty.$$

Dessa modo, podemos concluir que Ψ não cumpre a condição Δ_2.

Lema 1.11 *Se $\Phi \in \Delta_2$, então existe $C > 0$ tal que,*

$$\Phi(s+t) \leq C\Phi(s) + C\Phi(t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.12 *Dizemos que uma função de Young $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfaz a **condição** ∇_2, e pomos $\psi \in \nabla_2$, se existirem $l > 1$ e $t_0 \geq 0$ tais que*

$$\psi(t) \leq \frac{1}{2l}\psi(lt), \quad \forall t \geq t_0.$$

Observação 1.13 *Analogamente a condição Δ_2, caso $|\Omega| = +\infty$, diremos que $\psi \in \nabla_2$ pondo $t_0 = 0$.*

Exemplo 4 *Vimos no Exemplo 3 (b) que a função de Young* $\Psi(t) = e^{t^2} - 1$ *não cumpre a condição* Δ_2*. Contudo, podemos observar que ela cumpre a condição* ∇_2*, pois se fixarmos* $l > 2$*, teremos pela Regra de L'Hôpital*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} 2l\frac{\Psi(t)}{\Psi(lt)} &= \lim_{t\to+\infty} 2l\frac{e^{t^2}-1}{e^{l^2t^2}-1} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{l}e^{t^2(1-l^2)} = 0,\end{aligned}$$

já que $(1-l^2) < 0$*. Bem como,*

$$\lim_{t\to 0^+} 2l\frac{\Psi(t)}{\Psi(lt)} = \lim_{t\to 0^+} 2l\frac{e^{t^2}-1}{e^{l^2t^2}-1} = \frac{2}{l} < 1,$$

pois $l > 2$*. Por outro lado, tendo em vista que*

$$f(t) = 2l\frac{\Psi(t)}{\Psi(lt)}$$

é uma função decrescente em $\mathbb{R}_+$*, concluímos que*

$$\Psi(t) \leq \frac{1}{2l}\Psi(lt), \quad t \geq 0.$$

Exemplo 5 *A função de Young*

$$\Phi(t) = t^p \log^\alpha(t+1), \quad \alpha > 0 \quad e \quad p > 1,$$

também cumpre a condição ∇_2*. De fato, tomando* $l > 2^{\frac{1}{p-1}}$*, observamos que para todo* $t > 0$*,*

$$\begin{aligned}2l\frac{\Phi(t)}{\Phi(lt)} &= 2l\left(\frac{t^p\log^\alpha(t+1)}{l^pt^p\log^\alpha(tl+1)}\right) \\ &= \frac{2}{l^{p-1}}\left(\frac{\log(t+1)}{\log(tl+1)}\right)^\alpha \\ &\leq \frac{2}{l^{p-1}} < 1,\end{aligned}$$

provando que $\Phi \in \nabla_2$*.*

Proposição 1.14 *Seja* Φ *uma função de Young satisfazendo a condição* Δ_2*. Então*

$$u_n \to 0 \quad em\ L_\Phi(\Omega)$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega \Phi(u_n)dx \to 0.$$

É possível mostrar que a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial se, e somente se, a função de Young Φ satisfaz a condição Δ_2. Sendo assim, $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e somente se, a função $\Phi \in \Delta_2$.

1.4 Função de Young Conjugada

Vimos no Exemplo 2 deste capítulo que os espaços de Orlicz, de fato, generalizamh os espaços de Lebesgue. Da Teoria da Medida e Integração, sabemos que a cada expoente p de $L^p(\Omega)$ temos associado um expoente conjugado dado por $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Dessa forma, faz sentido expressar algo que representaria esse expoente conjugado quando tratamos do espaço de Orlicz e que possuam propriedades semelhantes do espaço de Lebesgue. Neste sentido, vamos agora definir a função de Young conjugada.

Definição 1.15 *Dada uma função de Young Φ, definimos a sua **conjugada** como sendo a extensão par da função*

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup_{s>0}\{ts - \Phi(s)\}, \quad t \geq 0.$$

Um ponto importante dessa definição é que se Φ é uma função de Young, então $\tilde{\Phi}$ também é uma função de Young.

Exemplo 6 *Se tomarmos a função de Young $\Phi(t) = \dfrac{|t|^p}{p}$, com $p \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$, então a sua conjugada é dada por*

$$\tilde{\Phi}(t) = \frac{|t|^q}{q}, \quad \text{onde} \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Mostrando a relação entre a função de Young conjugada com o expoente conjugado.

Vamos agora ver algumas relações que há entre uma função de Young e a sua conjugada.

Proposição 1.16 *Seja Φ uma função de Young de classe C^1 com conjugada $\tilde{\Phi}$. Então $\tilde{\Phi}$ é de classe C^1 e valem as seguintes propriedades:*

i) $\Phi(\tilde{\Phi}'(t)) = \tilde{\Phi}'(t)t - \tilde{\Phi}(t), \quad t \geq 0;$

ii) $\Phi'(\tilde{\Phi}'(t)) = t, \quad t \geq 0;$

iii) Se $\Phi \in \Delta_2$, então existe $C > 0$ tal que $\tilde{\Phi}(\Phi'(t)) \leq C\Phi(t), \quad t \geq 0.$

Proposição 1.17 (Desigualdade de Young para funções de Young) *Sejam Φ uma função de Young e $\tilde{\Phi}$ a sua conjugada. Então,*

$$ts \leq \Phi(t) + \tilde{\Phi}(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Lema 1.18 *Sejam* $(\Phi, \tilde{\Phi})$ *e* $(\Psi, \tilde{\Psi})$ *dois pares de funções de Young conjugadas de classe* C^1. *Suponha que exista* $t_0 \geq 0$ *tal que* $\Phi(t) \leq \Psi(t)$ *para todo* $t \geq t_0$. *Então, para* $s_0 := \Psi'(t_0) \geq 0$, *temos*

$$\tilde{\Psi}(s) \leq \tilde{\Phi}(s), \quad s \geq s_0.$$

Ademais, se $t_0 = 0$, *então* $s_0 = 0$.

Demonstração. Observe primeiramente que, pela Desigualdade de Young (veja Proposição 1.17),

$$\tilde{\Psi}'(s)s \leq \Phi(\tilde{\Psi}'(s)) + \tilde{\Phi}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Por outro lado, pela Proposição 1.16 (i), temos

$$\tilde{\Psi}'(s)s = \Psi(\tilde{\Psi}'(s)) + \tilde{\Psi}(s), \quad \forall\ s \geq 0. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2)

$$\Psi(\tilde{\Psi}'(s)) + \tilde{\Psi}(s) \leq \Phi(\tilde{\Psi}'(s)) + \tilde{\Phi}(s), \quad \forall\ s \geq 0,$$

isto é,

$$\tilde{\Psi}(s) \leq \Phi(\tilde{\Psi}'(s)) - \Psi(\tilde{\Psi}'(s)) + \tilde{\Phi}(s), \quad \forall\ s \geq 0. \tag{1.3}$$

Agora, sendo $s_0 := \Psi'(t_0)$, segue da monotonicidade de $\tilde{\Psi}'$ em $\mathbb{R}_+$ que

$$\tilde{\Psi}'(s) \geq \tilde{\Psi}'(s_0) = \tilde{\Psi}'(\Psi'(t_0)) \quad \forall\ s \geq s_0,$$

o que implica da Proposição 1.16 (ii)

$$\tilde{\Psi}'(s) \geq t_0.$$

Neste caso, para todo $s \geq s_0$,

$$\Phi(\tilde{\Psi}'(s)) - \Psi(\tilde{\Psi}'(s)) \leq 0,$$

donde segue-se, de (1.3) que

$$\tilde{\Psi}(s) \leq \tilde{\Phi}(s), \quad \forall\ s \geq s_0. \quad \blacksquare$$

Lema 1.19 *Sejam* Φ *e* $\tilde{\Phi}$ *duas funções de Young conjugadas. Considere* $\Psi(t) = a\Phi(bt)$, *com* $a, b > 0$. *Então,* Ψ *é uma função de Young com conjugada dada por*

$$\tilde{\Psi}(t) = a\tilde{\Phi}\left(\frac{t}{ab}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor observar que Ψ é uma função de Young. Com relação a sua conjugada basta observar que,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(t) &= \sup_{s\geq 0}\{ts - \Psi(s)\} \\
&= \sup_{s\geq 0}\{ts - a\Phi(bs)\} \\
&= a\sup_{s\geq 0}\left\{\frac{t}{a}s - \Phi(bs)\right\} \\
&= a\sup_{s\geq 0}\left\{\frac{t}{ab}bs - \Phi(bs)\right\} = a\tilde{\Phi}\left(\frac{t}{ab}\right). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposição 1.20 *Sejam Φ e $\tilde{\Phi}$ um par de funções de Young conjugadas de classe C^1. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\Phi \in \Delta_2$;

(ii) Existem $\eta \in (1,\infty)$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} < \eta, \quad \forall t > t_0;$$

(iii) Existem $\tau \in (1,\infty)$ e $s_0 \geq 0$ tais que

$$\frac{\tilde{\Phi}'(s)s}{\tilde{\Phi}(s)} > \tau, \quad \forall s > s_0;$$

(iv) $\tilde{\Phi} \in \nabla_2$.

Demonstração.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$

Como $\Phi \in \Delta_2$, existem $K > 0$, em particular $K > 1$, e $t_0 \geq 0$ tais que para $t > t_0$,

$$\begin{aligned}
K\Phi(t) &\geq \Phi(2t) \\
&= \int_0^{2t} \Phi'(s)ds \\
&= \int_0^{t} \Phi'(s)ds + \int_t^{2t} \Phi'(s)ds \\
&\geq \int_t^{2t} \Phi'(s)ds. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $\theta_t \in [t, 2t]$ tal que

$$\int_t^{2t} \Phi'(s)ds = t\Phi'(\theta_t),$$

e sendo Φ' não-decrescente em $\mathbb{R}_+$, segue que

$$\int_t^{2t} \Phi'(s)ds \geq t\Phi'(t). \tag{1.5}$$

Dessa forma, de (1.4) e (1.5),

$$K\Phi(t) \geq t\Phi'(t), \quad t > t_0.$$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$

Seja $s_0 \geq 1$ escolhido de tal forma que $\tilde{\Phi}'(s_0) > t_0$. Neste caso, tomando $s > s_0$ e $t = \tilde{\Phi}'(s)$, temos $t > t_0$, segue da Proposição 1.16 que

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\Phi}'(s)s}{\tilde{\Phi}(s)} &= \frac{\tilde{\Phi}'(s)\Phi'(\tilde{\Phi}'(s))}{\tilde{\Phi}(\Phi'(\tilde{\Phi}'(s)))} = \frac{t\Phi'(t)}{\tilde{\Phi}(\Phi'(t))} \\
&= \frac{t\Phi'(t)}{t\Phi'(t) - \Phi(t)} \\
&= \frac{\frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}}{\frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)} - 1}.
\end{aligned}$$

Agora usando o fato da função $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ser decrescente em $(1, +\infty)$, tem-se de (ii) que

$$\frac{\tilde{\Phi}'(s)s}{\tilde{\Phi}(s)} > \frac{\eta}{\eta - 1} =: \tau > 1, \quad s > s_0.$$

$\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$

Observe primeiramente que para $l > 2^{\frac{1}{\tau-1}} > 1$ e $s > s_0$,

$$\int_s^{ls} \frac{d}{dt}[\log \tilde{\Phi}(t)]dt = \int_s^{ls} \frac{\tilde{\Phi}'(t)}{\tilde{\Phi}(t)}dt,$$

e assim,

$$\log\left(\frac{\tilde{\Phi}(ls)}{\tilde{\Phi}(s)}\right) = \int_s^{ls} \frac{\tilde{\Phi}'(t)}{\tilde{\Phi}(t)}dt.$$

Dessa forma, segue de (iii) que

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\tilde{\Phi}(ls)}{\tilde{\Phi}(s)}\right) &\geq \int_s^{ls} \frac{\tau}{t}dt \\
&= \tau(\log(ls) - \log(s)) \\
&= \tau \log(l) = \log(l^\tau). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Sendo assim, segue que

$$\log\left(\frac{\tilde{\Phi}(ls)}{\tilde{\Phi}(s)}\right) \geq \log(l \cdot l^{\tau-1}), \quad \forall\, s \geq s_0$$

implicando que,

$$\frac{\tilde{\Phi}(ls)}{\tilde{\Phi}(s)} \geq 2l, \quad \forall\, s \geq s_0,$$

ou seja,

$$\tilde{\Phi}(s) \leq \frac{1}{2l}\tilde{\Phi}(ls), \quad s \geq s_0.$$

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$

Suponha que $\tilde{\Phi} \in \nabla_2$, então existem $s_0 \geq 0$ e $l > 1$ tais que

$$\tilde{\Phi}(s) \leq \frac{1}{2l}\tilde{\Phi}(ls), \quad s > s_0. \tag{1.7}$$

Daí, definamos a função $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ por

$$\Psi(t) = \frac{1}{2l}\Phi(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Usando o Lema 1.19 observamos que Ψ é uma função de Young e, além disso, sua conjugada é dada por,

$$\tilde{\Psi}(s) = \frac{1}{2l}\tilde{\Phi}(ls), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Agora, observe que a condição ∇_2 em (1.7) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\tilde{\Phi}(s) \leq \tilde{\Psi}(s) \quad s > s_0.$$

Sendo assim, estamos com dois pares de funções de Young conjugadas, a saber $(\Phi, \tilde{\Phi})$ e $(\Psi, \tilde{\Psi})$, onde $\tilde{\Phi}(s) \leq \tilde{\Psi}(s)$, para todo $s > s_0$. Portanto, pelo Lema 1.18, deve existir $t_0 \geq 0$ tal que

$$\Psi(s) \leq \Phi(s), \quad s > s_0,$$

isto é,

$$\frac{1}{2l}\Phi(2s) \leq \Phi(s), \quad s > s_0.$$

Provando que $\Phi \in \Delta_2$. ■

Lema 1.21 *Se Φ é uma função de Young de classe C^1 e satisfaz a condição Δ_2, então Φ' satisfaz a condição Δ_2.*

Demonstração. Usando a Proposição 1.20, existem $\eta > 1$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\frac{\Phi'(2t)2t}{\Phi(2t)} < \eta, \quad \forall t > t_0,$$

donde segue-se, da Proposição 1.2, que

$$\begin{aligned} \Phi'(2t) &\overset{\Delta_2}{\leq} \frac{\eta}{2t} k\Phi(t) \\ &\leq k\frac{\eta}{2}\Phi'(t), \end{aligned}$$

mostrando que $\Phi' \in \Delta_2$. ■

A próxima proposição é uma extensão da desigualdade de Hölder para funções de Young.

Proposição 1.22 (Desigualdade de Hölder) *Sejam Φ uma função de Young e $\tilde{\Phi}$ a sua conjugada. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ e $v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$, então,*

(i) $uv \in L^1(\Omega)$;

(ii) $\int_\Omega uvdx \leq 2|u|_\Phi |v|_{\tilde{\Phi}}$.

Após feito essas considerações, podemos entender a relação entre a reflexividade do espaço $L_\Phi(\Omega)$ e a condição Δ_2, como veremos a seguir

Teorema 1.23 *O espaço $L_\Phi(\Omega)$ é reflexivo se, e somente se, Φ e $\tilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2. Ademais,*

$$(L_\Phi(\Omega))' = L_{\tilde{\Phi}}(\Omega).$$

O próximo Teorema é uma generalização de um resultado devido a Brezis e Lieb. Sua demostração pode ser encontrada em [25], Teorema 2.7.

Teorema 1.24 (Brezis-Lieb para Funções de Young) *Sejam Φ uma função de Young e $\tilde{\Phi}$ a sua conjugada, tais que $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$. Se (f_n) é uma sequência limitada em $L_\Phi(\Omega)$, verificando*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad q.t.p. \ x \in \Omega,$$

temos que

$$f_n \rightharpoonup f \quad em \quad L_\Phi(\Omega).$$

1.5 Espaços de Orlicz-Sobolev

Da mesma forma que generalizamos os espaços de Lebesgue com a definição dos espaços de Orlicz, podemos de forma natural generalizar os espaços de Sobolev, da seguinte forma:

Definição 1.25 *Dada uma função de Young Φ, definimos o* ***espaço de Orlicz-Sobolev*** *como sendo*

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \ : \ u, |\nabla u| \in L_\Phi(\Omega)\}.$$

Proposição 1.26 *A aplicação $||\cdot||_{1,\Phi} : W^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ dada por*

$$||u||_{1,\Phi} = |u|_\Phi + |\nabla u|_\Phi$$

define uma norma sobre o espaço $W^{1,\Phi}(\Omega)$. Ademais, $\big(W^{1,\Phi}(\Omega), ||\cdot||_{1,\Phi}\big)$ é um espaço de Banach.

Assim como no espaços de Orlicz, aqui temos uma relação entre e reflexividade do espaço com a condição Δ_2, como podemos ver a seguir

Teorema 1.27 *Seja Φ uma função de Young satisfazendo as condições Δ_2 e ∇_2, então o espaço $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo e separável.*

Definição 1.28 *Seja Φ uma função de Young satisfazendo a condição Δ_2. Definimos o espaço*

$$W^{1,\Phi}_0(\Omega) := \overline{C^\infty_0(\Omega)},$$

com relação a norma $||\cdot||_{1,\Phi}$.

Proposição 1.29 (Desigualdade de Poincaré) *Suponha Ω um domínio limitado, então*

$$|\, u\,|_\Phi \leq K_0(d_\Omega)|\,\nabla u\,|_\Phi, \quad \forall u \in W^{1,\Phi}_0(\Omega).$$

Da Proposição 1.29 podemos concluir que as normas $||\,u\,||_{1,\Phi}$ e $|\,\nabla u\,|_\Phi$ são equivalentes em $W^{1,\Phi}_0(\Omega)$. Dessa feita, assumiremos $|\,\nabla u\,|_\Phi$ como a norma usual de $W^{1,\Phi}_0(\Omega)$. Além disso, desde que $W^{1,\Phi}_0(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$, $W^{1,\Phi}_0(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.30 *Uma vez que $W^{1,\Phi}_0(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$, se $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ segue do Teorema 1.27 que $W^{1,\Phi}_0(\Omega)$ é um espaço reflexivo e separável.*

Temos também a seguinte versão da Desigualdade de Poincaré para espaços de Orlicz.

Proposição 1.31 *Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma função de Young satisfazendo a condição Δ_2. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que*

$$C_\Phi \int_\Omega \Phi(|u|)dx \leq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx,$$

onde $C_\Phi > 0$ é uma constante que depende de Φ.

Demonstração. Ver Lema 2.19, em [21]. ■

1.6 Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Nesta última seção, exibiremos alguns resultados de imersões contínuas e compactas entre espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev.

Definição 1.32 *Considere Φ e Ψ duas funções de Young. Diremos que Ψ* ***crece estritamente mais lento*** *que Φ, e escrevemos $\Psi \prec\prec \Phi$, quando*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Psi(kt)}{\Phi(t)} = 0, \quad \forall k > 0.$$

Teorema 1.33 *Se $|\Omega| < +\infty$ e $\Psi \prec\prec \Phi$, então a seguinte imersão é contínua,*

$$L_\Phi(\Omega) \hookrightarrow L_\Psi(\Omega).$$

Teorema 1.34 *Se $|\Omega| < +\infty$, então $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$. Ademais,*

$$L_\Phi(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad N \geq 1,$$

continuamente.

Teorema 1.35 *Se Ω é um domínio limitado, então a imersão é contínua,*

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega).$$

Agora mostraremos a existência de uma função de Young crítica associado a Φ para se obter imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev.

Lema 1.36 *Seja Φ uma função de Young satisfazendo*

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}ds < +\infty \quad e \quad \int_1^{+\infty} \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}ds = +\infty.$$

Então a função $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$H(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

*é bijetora e a sua inversa, denotada por Φ_*, estendida a toda a reta de forma que Φ_* seja par, é uma função de Young. A função Φ_* é chamada função de **crescimento crítico** associado a Φ.*

Aqui entendemos Ω como um **domínio admissível**, um domínio onde as imersões contínuas de Sobolev,

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad p \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right],$$

são verificadas.

Teorema 1.37 *Sejam Ω um domínio admissível e Φ uma função de Young verificando as hipóteses do Lema* 1.36*. Sendo Φ_* a função de crescimento crítico associado a Φ, então a seguinte imersão é contínua*

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Ademais, se Ω é limitado e Ψ é uma função de Young tal que $\Psi \prec\prec \Phi_*$, então a seguinte imersão é compacta,

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Psi}(\Omega).$$

Capítulo 2

O operador Φ_α-Laplaciano

O operador Φ_α-Laplaciano, dado por:

$$\Delta_{\Phi_\alpha} u := div\left(\Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \quad \text{em} \quad \Omega$$

é definido sobre o espaço de Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio com fronteira regular, $\alpha \in (0,1)$ e $\Phi_\alpha(t) \approx t^2 \log^\alpha t$, para t suficientemente grande, é uma função de Young. Deste modo, neste capítulo pretendemos obter resultados envolvendo o espaço de Orlicz $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$ e o espaço de Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$.

2.1 Sobre a função de Young Φ_α

Seja $\Phi_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função de Young de classe C^1 satisfazendo as seguintes condições:

(Φ_1) Existe $C > 0$ tal que

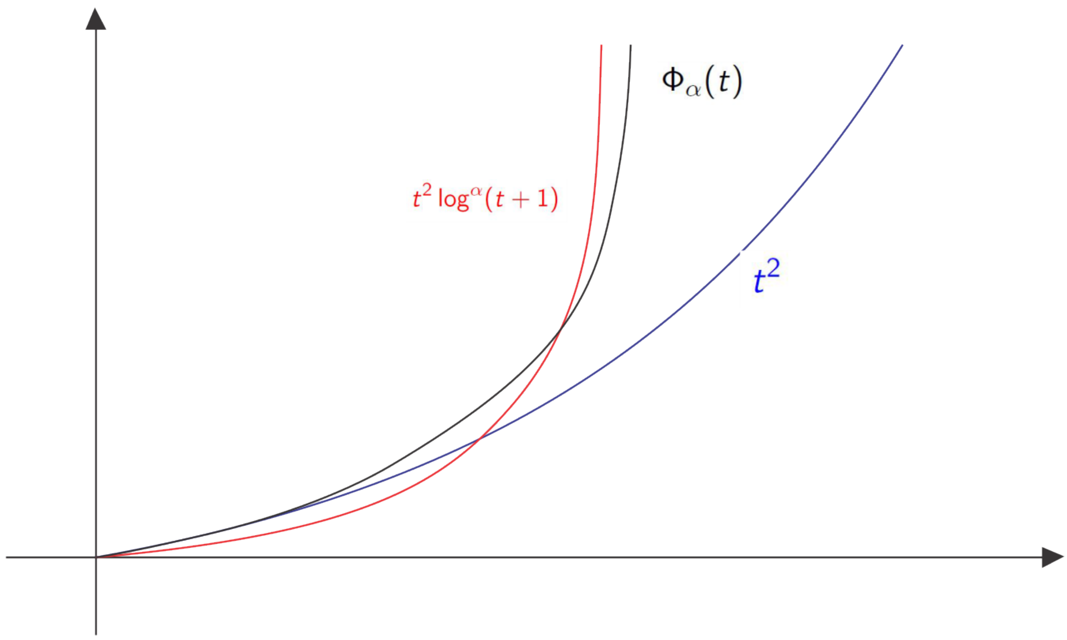
$$\frac{t^2}{C} \leq \Phi_\alpha(t) \leq Ct^2, \quad \forall t \in [0, 1/C);$$

(Φ_2) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_\alpha(t)}{t^2 log^\alpha t} = 1, \quad \text{para algum}\, \alpha \in [0,1).$

Exemplo 7 *Um exemplo de uma função de Young que satisfaz as condições* (Φ_1) *e* (Φ_2) *é*

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{2}t^2 + t^2 \log^\alpha(|t|+1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, essas condições podem ser interpretadas da seguinte forma



Fonte: Desenvolvida pelo autor utilizando o software CorelDraw.

Como consequência da condição (Φ_1), segue que

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{\Phi_\alpha(2t)}{\Phi_\alpha(t)} \geq \frac{4}{C^2} \quad \text{e} \quad \limsup_{t\to 0^+} \frac{\Phi_\alpha(2t)}{\Phi_\alpha(t)} \leq 4C^2.$$

Mais ainda, por (Φ_2) temos

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_\alpha(2t)}{\Phi_\alpha(t)} = 4.$$

Por esses fatos, existe $K \geq 4$ tal que,

$$\Phi_\alpha(2t) \leq K\Phi_\alpha(t),$$

para todo $t \geq 0$, mostrando que Φ_α satisfaz a condição Δ_2 em $\mathbb{R}^2$. Ademais, desde que Φ_α é convexo em $\mathbb{R}$, ou seja, o gráfico de Φ_α está situado acima de qualquer de suas retas tangentes, temos

$$(K-1)\Phi_\alpha(t) \geq \Phi_\alpha(2t) - \Phi_\alpha(t) \geq \Phi'_\alpha(t)t, \quad t > 0,$$

e portanto,

$$c_\alpha := \sup_{t>0} \frac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)} \leq K - 1. \tag{2.1}$$

Por outro lado, como já sabemos pela Proposição 1.2 (ver Capítulo 1),

$$\frac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)} \geq 1, \quad \forall\, t > 0.$$

Assim,

$$m_\alpha := \inf_{t>0} \frac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)} \geq 1. \tag{2.2}$$

Nosso objetivo agora é verificar que em verdade, $m_\alpha > 1$. Para isto, vejamos antes o seguinte lema:

Lema 2.1 *Seja Φ uma função de Young satisfazendo as condições (Φ_1) e (Φ_2). Então, $\Phi \in \nabla_2$ em $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Para mostrarmos que $\Phi \in \nabla_2$, provaremos a seguinte afirmação:
Afirmação 1: *Existe $C > 0$, tal que*

$$C\rho^2\Phi(t) \leq \Phi(\rho t),\ \forall \rho \geq 1 \ e\ t \geq 0.$$

De fato, por (Φ_1) existem $M_0, M_1 > 0$ tais que

$$M_0 t^2 \leq \Phi(t) \leq M_1 t^2,\ \forall t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Além disso, por (Φ_2), existe $M_2 > 0$ tal que

$$\Phi(t) \geq M_2 t^2 \log^\alpha(t+1),\ \forall t \geq 1. \tag{2.4}$$

Destes fatos, dado $\rho \geq 1$ de modo que $\rho \cdot t \leq 1$, temos $t \leq 1$ e portanto

$$\Phi(\rho t) \geq M_0 \rho^2 t^2 \geq \frac{M_0}{M_1}\rho^2\Phi(t).$$

Agora, se $\rho t > 1$, nós iremos considerar os seguintes casos:

1^0 **caso:** $t \in [0,1]$.

Neste caso, usando (2.3) e (2.4) tem-se que

$$\begin{aligned}\Phi(\rho t) &\geq M_2\rho^2 t^2 \log^\alpha(\rho t + 1)\\ &> M_2 log^\alpha(2)\rho^2 t^2\\ &\geq \left(\frac{M_2 \log^\alpha(2)}{M_1}\right)\rho^2\Phi(t).\end{aligned}$$

2^0 **caso:** $t > 1$.

Para este caso, usando (2.4) e o fato de $\rho \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho t) &\geq M_2\rho^2t^2\log^\alpha(\rho t+1)\\
&> M_2\rho^2t^2\log^\alpha(t+1)\\
&\geq \left(\frac{M_2}{M_1}\right)\rho^2\Phi(t).
\end{aligned}$$

Do 1^0 e 2^0 caso, concluímos que a Afirmação 1 é verificada, tomando

$$C = \min\left\{\frac{M_2}{M_1}, \frac{M_2\log^\alpha(2)}{M_1}, \frac{M_0}{M_1}\right\} > 0.$$

Por fim, segue da Afirmação 1, que tomando $l > \max\{1, \frac{2}{C}\}$, tem-se

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2l}\Phi(lt), \quad t \geq 0$$

mostrando que $\Phi \in \nabla_2$. ∎

Proposição 2.2 *Se* $m_\alpha := \inf\limits_{t>0} \dfrac{\Phi_\alpha'(t)t}{\Phi_\alpha(t)}$, *então* $m_\alpha > 1$.

Demonstração. Esta proposição segue imediatamente da Proposição 1.20 e Lema 2.1.
∎

Proposição 2.3 *Seja* $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um operador dado por*

$$\beta(x) = \Phi_\alpha'(|x|)\frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Então, β *é um operador estritamente monotônico (ver Definição A.1).*

Demonstração. Ver [25], Lema 3.26. ∎

2.2 Resultados envolvendo $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$ e $W^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$

A próxima proposição é devido a Fukagai, Ito e Narukawa [15], e é de extrema importância para os nossos estudos.

Proposição 2.4 *Suponha que* Φ *é uma função de Young diferenciável satisfazendo,*

$$m \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq M, \quad \forall t > 0,$$

para algum $M \geq m > 0$. Definindo, para $t \geq 0$,

$$\xi_0(t) := \min\{t^m, t^M\} \quad e \quad \xi_1(t) := \max\{t^m, t^M\},$$

temos

$$\xi_0(\rho)\Phi(t) \leq \Phi(\rho t) \leq \xi_1(\rho)\Phi(t), \quad para \quad \rho, t \geq 0,$$

e

$$\xi_0(|u|_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(|u|)dx \leq \xi_1(|u|_\Phi) \quad para \quad u \in L_\Phi(\Omega).$$

Demonstração. Para uma demonstração detalhada, veja [25], Lema 3.2. ■

Observação 2.5 *Como já foi mostrado em* (2.1) *e* (2.2)*, a função de Young Φ_α satisfaz,*

$$m_\alpha \leq \frac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)} \leq c_\alpha, \quad t > 0,$$

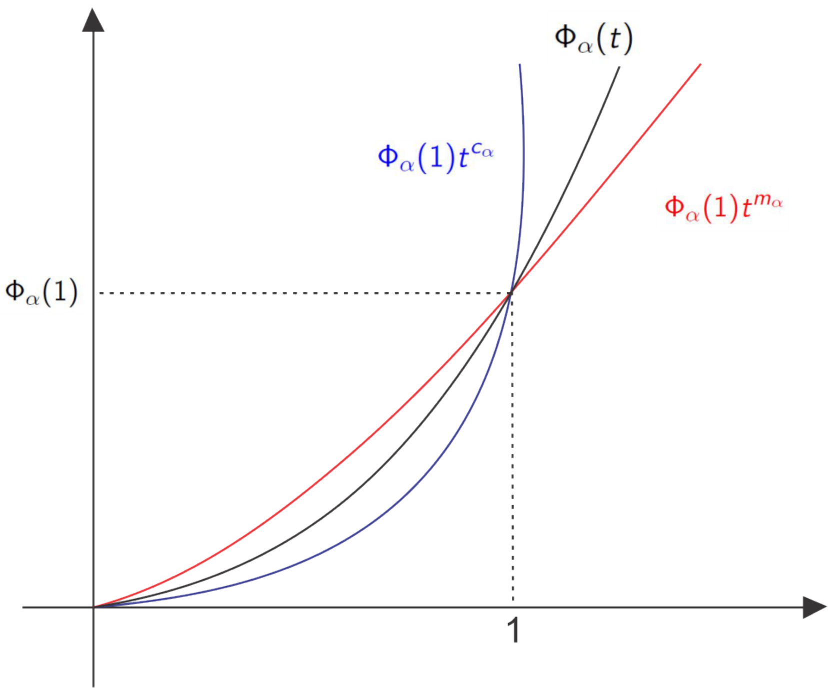
ou seja, está nas condições da Proposição 2.4. Neste caso, se considerarmos agora $\xi_0(t) = \min\{t^{m_\alpha}, t^{c_\alpha}\}$ e $\xi_1(t) = \max\{t^{m_\alpha}, t^{c_\alpha}\}$, temos

$$\xi_0(\rho)\Phi_\alpha(t) \leq \Phi_\alpha(t) \leq \xi_1(\rho)\Phi_\alpha(t), \quad \rho, t \geq 0$$

e

$$\xi_0(|u|_{\Phi_\alpha}) \leq \int_\Omega \Phi_\alpha(|u|)dx \leq \xi_1(|u|_{\Phi_\alpha}), \quad u \in L_{\Phi_\alpha}(\Omega).$$

Dessa observação, podemos interpretar que a função Φ_α está entre duas funções polinomiais, como podemos ver graficamente a seguir



Fonte: Desenvolvida pelo autor utilizando o software CorelDraw.

Teorema 2.6 *Seja $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, então*

$$\Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [25]. ■

Proposição 2.7 *Seja Φ uma função de Young de classe C^1 verificando (Φ_1) e (Φ_2). Deste modo, as seguintes imersões contínuas são verificadas:*

a) $L_\Phi(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$;

b) $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$;

Demonstração.

a) Considere $u_n \to 0$ em $L_\Phi(\mathbb{R}^2)$. Pelas condições (Φ_1) e (Φ_2) existe $C_1 > 0$ tal que

$$t^2 \leq C_1\Phi(t), \quad t \geq 0.$$

Daí, usando a Proposição 1.14,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(|u_n|)dx \to 0$$

Mostrando que o operador inclusão $i : L_\Phi(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ é contínuo no ponto $u = 0$ e assim a imersão $L_\Phi(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ é contínua.

b) Segue imediatamente do item (a) ■

Corolário 2.8 *Seja Φ uma função de Young de classe C^1 verificando (Φ_1) e (Φ_2), então a seguinte imersão é compacta,*

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

para todo $p \geq 1$.

Demonstração. De fato, lembrando que $W^{1,2}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$ continuamente e

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

compactamente para $p \geq 1$ (ver [1]), temos então pela Proposição 2.7 a seguinte cadeia

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty,$$

como queríamos mostrar. ■

Lema 2.9 *Para cada $p \geq 1$, existe uma constante $C_p > 0$ tal que*

$$[\exp(t) - 1]^p \leq C_p[\exp(pt) - 1], \quad \forall t \geq 0$$

Demonstração. Observe que é suficiente mostrar que os seguintes limites

$$\lim_{t\to 0} \frac{[\exp(t) - 1]^p}{[\exp(pt) - 1]} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{[\exp(t) - 1]^p}{[\exp(pt) - 1]}$$

são finitos, o que decorre diretamente da regra de L'Hôpital. ■

Proposição 2.10 *Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$ convergente no sentido forte para u em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$. Então, existem uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e $v \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$ tais que,*

a) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^2$;

b) $u_{n_k}(x) \leq v(x)$, *q.t.p. em* $\mathbb{R}^2$.

Demonstração.

a) Como $||u_n - u||_{1,\Phi} \to 0$, segue que $|u_n - u|_\Phi \to 0$, e assim, pela Proposição 1.14,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(u_n - u)dx \to 0.$$

Sendo assim, deve existir uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\Phi(|u_{n_k} - u|)(x) \to 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^2.$$

Portanto, como Φ^{-1} é contínua em $\mathbb{R}_+$,

$$|u_{n_k} - u|(x) = (\Phi^{-1} \circ \Phi)(|u_{n_k} - u|)(x) \to 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^2,$$

isto é,

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^2.$$

b) Sendo $\{u_{n_k}\}$ convergente em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$, logo de Cauchy em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$, defina

$$\xi_m = \sum_{k=1}^{m} |u_{n_{k+1}} - u_{n_k}| \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2),$$

de modo que,

$$||u_{n_{k+1}} - u_{n_k}||_{1,\Phi} < \frac{1}{2^k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} ||\xi_m - \xi_l||_{1,\Phi} &\leq \sum_{k=l}^{m} ||u_{n_{k+1}} - u_{n_k}||_{1,\Phi} \\ &\leq \sum_{k=l}^{m} \frac{1}{2^k} \overset{m,l\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\{\xi_m\} \subset W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$ é uma sequência de Cauchy. Desde que $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$ é Banach, então deve existir $\xi \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\xi_m \to \xi \text{ em } W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2).$$

Dessa forma, de modo análogo ao feito anteriormente, existe uma subsequência de $\{\xi_m\}$ tal que

$$\xi_{m_k}(x) \to \xi(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Mas, sendo $\{\xi_m\}$ monótona crescente, então

$$\xi_{m_k}(x) \leq \xi(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, para $n_k \leq m_k$,

$$|u_{m_k} - u_{n_k}|(x) \leq \xi_{m_k}(x) \leq \xi(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Portanto, basta considerar $v := \xi + |u| \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^2)$ e fazer $n_k \to +\infty$ para que assim,

$$|u_{m_k}(x)| \leq v(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

como queríamos mostrar. ■

2.3 O Operador Φ_α-Laplaciano

O funcional $P : W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$P(u) = \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega), \tag{2.5}$$

é o funcional Euler-Lagrange associado ao operador Φ_α-Laplaciano. O próximo resultado estabelece que este funcional é de classe C^1 em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$.

Proposição 2.11 *Se Φ_α satisfaz as condições (Φ_1) e (Φ_2), então*

$$P : W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

dado em (2.5) é de classe C^1 e

$$P'(u)(v) = \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u(x)|)\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\nabla v(x)dx, \quad u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [21], Proposição 3.10. ■

Teorema 2.12 *O operador $-\Delta_{\Phi_\alpha} : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to (W_0^{1,\Phi}(\Omega))'$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Ver [21], Lema 3.24. ■

Observação 2.13 *A partir do Teorema 2.12 é possível concluir que dado $h \in (W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega))'$, vai existir uma única solução fraca $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, para a equação quaselinear,*

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_\alpha} u = h, & em \quad \Omega \\ u = 0, & em \quad \partial\Omega \end{cases}$$

O próximo resultado é uma adaptação do Princípio do Máximo de Vásquez (ver [28]) para o operador $-\Delta_{\Phi_\alpha}(\cdot)$, o qual foi demostrada em [21].

Teorema 2.14 (Princípio do máximo estrito de Vásquez) *Sejam Ω um domínio limitado, Φ_α uma função de Young satisfazendo (Φ_1) e (Φ_2) e $u \in C^1(\Omega)$ uma supersolução do problema $-\Delta_{\Phi_\alpha} u = 0$ em Ω, isto é,*

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\nabla\varphi dx \geq 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$ em Ω. Se u é não-negativa e não nula, então u é estritamente positiva em Ω.

Demonstração. Ver Teorema 3.27 em [21]. ■

Capítulo 3

Imersões do tipo Trudinger-Moser

Fixando Ω como sendo um domínio do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, vimos no Capítulo 2 que o operador Φ_α-Laplaciano está bem definido sobre o espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$. Por esse motivo, escrevemos esse capítulo para estudar as imersões do tipo Trudinger-Moser associado a $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, considerando o caso onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$.

3.1 Estimativas Superiores

Nesta seção, seguimos o trabalho de Hencl 2003 [17], com o objetivo de desenvolver as imersões do tipo Trudinger-Moser associado a $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, onde o domínio Ω do $\mathbb{R}^2$ é limitado com fronteira regular. No que segue, dado $\alpha \in [0,1)$ assuma que

$$B := 1 - \alpha \quad \text{e} \quad \gamma := \frac{2}{B}.$$

Além disso, consideremos que $\Phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é uma função de Young de classe C^1 verificando as condições (Φ_1) e (Φ_2) descritas no Capítulo 2.

Lema 3.1 *Seja Φ uma função de Young satisfazendo (Φ_2), então existe uma função de Young $\Phi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfazendo:*

(i) Φ_1' *é contínua e crescente em* $(0, +\infty)$*;*

(ii) $\Phi_1(t) = \dfrac{1}{2}t^2, \quad t \in [0,1]$*;*

(iii) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\frac{1}{2}t^2 \log^\alpha t} = 1;$

(iv) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_1'(t)}{t \log^\alpha t} = 1;$

(v) *Existe* $P > 1$, *suficientemente grande, tal que*

$$\Phi_1(t) \leq \frac{1}{2}\Phi(t) \quad \textit{para} \quad t \geq P.$$

Assumindo que Φ_1 é uma função de Young dada pelo Lema 3.1, considere $\Psi(s) := \tilde{\Phi}_1(s)$. Como já vimos no Exemplo 6 (ver Capítulo 1), $\Psi(s) = \frac{s^2}{2}$, para $s \in [0, 1]$. O próximo lema vai estimar o crescimento de Ψ.

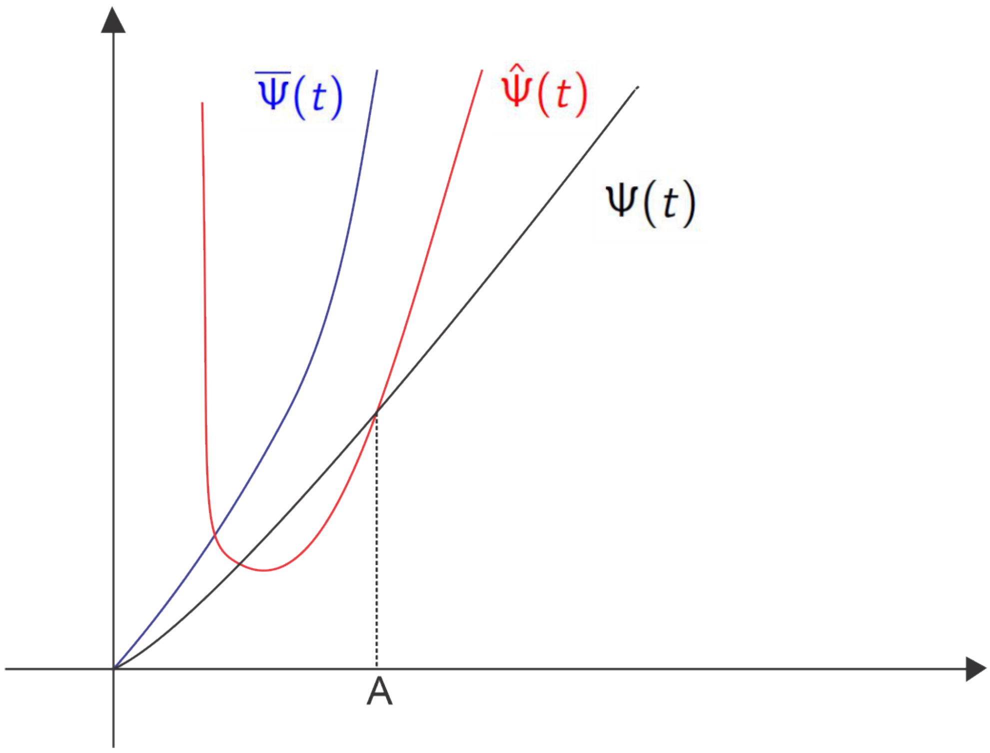
Lema 3.2 *Existe* $\tau > 0$, *tal que*

$$\Psi(t) < \overline{\Psi}(t) := \tau t^2(1 + |\log t|^\tau), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ademais, para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $A > 1$ *tal que*

$$\Psi(t) \leq \hat{\Psi}(t) := \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) t^2 \log^{-\alpha} t, \quad t \in [A, \infty).$$

Podemos interpretar geometricamente este Lema da seguinte forma,



Fonte: Desenvolvida pelo autor utilizando o software CorelDraw.

***Demonstração do Lema* 3.2.** Para facilitar a escrita, denote $\phi \equiv \Phi_1'$ e $\psi \equiv \phi^{-1}$. Deste modo, $\Psi(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} \psi(s)ds$, para $t \in \mathbb{R}$, (ver Proposição 1.16). Inicialmente, observe que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta \in (0, 1/2)$ tal que

$$\frac{1}{2}\frac{(1+\delta)^2}{1-\delta} < \frac{1}{2} + \varepsilon. \tag{3.1}$$

A partir daí, verificaremos os seguintes fatos:

i). Fazendo $\hat{\phi}(t) := (1-\delta)t\log^{\alpha} t$, $t > 0$, *existe* $A_1 > 1$ *tal que*

$$\phi^{-1}(s) < \hat{\phi}^{-1}(s), \quad \forall s > \hat{\phi}(A_1).$$

De fato, pelo Lema 3.1 (iv), vai existir $A_1 > 1$, tal que para todo $t > A_1$

$$\phi(t) > \hat{\phi}(t).$$

Em particular, para $t = \phi^{-1}(s) > A_1$, tem-se

$$\hat{\phi}(\phi^{-1}(s)) < \phi(\phi^{-1}(s)) = s.$$

Daí, segue da monotonicidade de $\hat{\phi}^{-1}(s)$ em $(\phi(A_1), +\infty)$ (ver Teorema da Função Inversa) que

$$\phi^{-1}(s) < \hat{\phi}^{-1}(s), \quad \text{para } s > \hat{\phi}(A_1).$$

ii). Definindo,

$$\hat{\psi}(t) := \frac{1+\delta}{1-\delta}t\log^{-\alpha} t, \quad t > 1, \tag{3.2}$$

existe $A_2 > 1$ *tal que*

$$\hat{\psi}(t) > \psi(t), \quad t > A_2.$$

Primeiramente veja que

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\hat{\psi}(t)) &= (1-\delta)\hat{\psi}(t)\log^{\alpha}\hat{\psi}(t) \\
&= (1+\delta)t\left(\frac{\log\hat{\psi}(t)}{\log t}\right)^{\alpha} \\
&= (1+\delta)t\left(\frac{\log\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}t\log^{-\alpha} t\right)}{\log t}\right)^{\alpha}, \quad t > 1.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Por outro lado, utilizando L'Hôpital,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\log\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}t\log^{-\alpha} t\right)}{\log t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{\log t}\right) = 1,$$

donde segue-se que

$$\left(\frac{\log\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}t\log^{-\alpha}t\right)}{\log t}\right)^{\alpha} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1^{-}.$$

Daí deve existir $A_2 > \max\{A_1, \hat{\phi}(A_1)\}$ tal que para $t > A_2$,

$$\left(\frac{\log\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}t\log^{-\alpha}t\right)}{\log t}\right)^{\alpha} > \frac{1}{1+\delta}. \tag{3.4}$$

De (3.3) e (3.4),

$$\hat{\phi}(\hat{\psi}(t)) > t, \quad t > A_2.$$

Sendo $\hat{\phi}^{-1}$ crescente em $(A_2, +\infty)$, segue então do item (i) que,

$$\hat{\psi}(t) > \hat{\phi}^{-1}(t) > \phi^{-1}(t) = \psi(t), \quad \forall\, t > A_2. \tag{3.5}$$

$iii)$. *Considerando agora*

$$\hat{\Psi}_1(t) := \frac{(1+\delta)^2}{1-\delta}\frac{t^2}{2}\log^{-\alpha}t, \quad t > 1,$$

vai existir $A_3 > 1$, suficientemente grande, de modo que

$$(1+\delta)\Psi(t) < \hat{\Psi}_1(t), \quad t > A_3.$$

Para isto, deixamos a cargo do leitor observar, utilizando a Regra de L'Hôpital, que

$$\lim_{t\to+\infty}(1+\delta)\frac{\Psi(t)}{\hat{\Psi}_1(t)} = \frac{1-\delta}{1+\delta} < 1.$$

Usando o item (iii) e (3.1) segue-se que,

$$\Psi(t) < \hat{\Psi}_1(t) < \hat{\Psi}(t) = \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)t^2\log^{-\alpha}t, \quad t > A_3. \tag{3.6}$$

Por fim, verificaremos agora que

$$\Psi(t) < \overline{\Psi}(t) := \tau t^2(1 + |\log t|^{\tau}), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

para algum $\tau > 0$. Primeiramente, tendo em vista que $\Psi(t) = \dfrac{t^2}{2}$ para $t \in [0,1]$, temos

$$\Psi(t) < \frac{t^2}{2}(1 + |\log t|^{1/2}), \quad t \in (0,1]. \tag{3.7}$$

Agora para $t > A_3$, segue de (3.6) que

$$\begin{aligned}\Psi(t) &< \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) t^2 \log^{-\alpha} t,\\ &< \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) t^2(1+\log^{1/2+\varepsilon} t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8) é possível escolher $\tau > \dfrac{1}{2}+\varepsilon$, suficientemente grande, de sorte que

$$\Psi(t) < \tau t^2(1+|\log t|^{\tau}), \quad \forall\, t > 0 \quad \blacksquare$$

Para o próximo lema, tomando $0 < t < R$, assumiremos que

$$\left|\frac{1}{y}\right|_{(\tilde{L}_\Psi(t,R),\omega_1 ydy)} = \inf\left\{\lambda > 0 \;:\; \int_t^R \Psi\left(\frac{1}{\lambda y}\right)\omega_1 ydy \le \Psi(1)\right\},$$

onde $\omega_1 = 2\pi$. A partir desta norma a Desigualdade de Hölder poderá ser refinada da seguinte forma:

$$\int_t^R uv\omega_1 ydy \le |u|_{(\tilde{L}_\Psi(t,R),\omega_1 ydy)}|v|_{(\tilde{L}_{\Phi_1}(t,R),\omega_1 ydy)},$$

para todo $u \in L_\Psi(t,R)$ e $v \in L_{\Phi_1}(t,R)$. No que segue, denotaremos esta desigualdade de *Desigualdade Generalizada de Hölder* e a utilizaremos na seção 3.2.

Lema 3.3 *Para todo $\varepsilon_1 > 0$ e $R > 0$, existe $t_0 \in (0,\min\{1,R\})$ tal que para todo $t \in (0,t_0)$*

$$\left|\frac{1}{y}\right|_{(\tilde{L}_\Psi(t,R),\omega_1 ydy)} \le D\log^{1/\gamma}\left(\frac{1}{t}\right),$$

onde $D := \left(\dfrac{w_1}{B}+\varepsilon_1\right)^{1/2}$.

Demonstração. Para facilitar a escrita, considere $\lambda_t := D\log^{1/\gamma}(1/t)$, para $t > 0$. Neste caso, para demonstrarmos este lema, basta verificarmos

$$\int_t^R \Psi\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right)\omega_1 ydy < \Psi(1),$$

para algum $t \in (0,R)$. Para isto, observe primeiramente que dado $\varepsilon_1 > 0$, podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$D^2 = \frac{w_1}{B}+\varepsilon_1 > \frac{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)(1+\delta)}{B\left(\frac{1}{2\omega_1}-\delta\right)}. \tag{3.9}$$

Sendo $M_t = \exp(-|\log 1/t|)^{\frac{1}{(\tau+1)4\gamma}}$, com $t > 0$, onde $\tau > 0$ é dado no Lema 3.2, podemos observar os seguintes fatos:

(i) $M_t \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$;

(ii) Existe $t_0 > 0$ tal que $M_t > t$, $\forall\, t \in (0, t_0)$;

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\lambda_t M_t}\right) = +\infty$.

Considerando $A > 1$, dado pelo Lema 3.2, e $R > 0$, segue de $(i) - (iii)$ que

$$t < M_t < R \quad \text{e} \quad \frac{1}{\lambda_t M_t} > A, \quad t \in (0, t_0),$$

para t_0 suficientemente pequeno. Sabendo disso, vemos que

$$\frac{1}{\lambda_t y} > A, \quad y \in (t, M_t).$$

Daí, segue pelo Lema 3.2, que

$$\begin{aligned} \int_t^R \Psi\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) y dy &= \int_t^{M_t} \Psi\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) y dy + \int_{M_t}^R \Psi\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) y dy \\ &< \int_t^{M_t} \hat{\Psi}\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) y dy + \int_{M_t}^R \overline{\Psi}\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) y dy \\ &=: I_t^1 + I_t^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Avaliemos cada parcela, começando por I_t^2. Pela definição de $\overline{\Psi}$ dado pelo Lema 3.2, segue que,

$$\begin{aligned} I_t^2 &= \tau \int_{M_t}^R \frac{1}{\lambda_t^2}\left(1 + \left|\log \frac{1}{\lambda_t y}\right|^\tau\right) \frac{dy}{y} \\ &= \tau \int_{M_t}^R \frac{1}{\lambda_t^2}\left(1 + |\log \lambda_t + \log y|^\tau\right) \frac{dy}{y} \\ &\leq \frac{\tau}{\lambda_t^2} \int_{M_t}^R (1 + 2^\tau(|\log \lambda_t|^\tau + |\log y|^\tau)) \frac{dy}{y} \\ &= \frac{\tau}{\lambda_t^2} \int_{M_t}^R (1 + 2^\tau |\log \lambda_t|^\tau + 2^\tau |\log y|^\tau) \frac{dy}{y} = J_t^1 + J_t^2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde,

$$J_t^1 := \frac{\tau}{\lambda_t^2} \int_{M_t}^R (1 + 2^\tau |\log \lambda_t|^\tau) \frac{dy}{y} \quad \text{e} \quad J_t^2 := \frac{\tau 2^\tau}{\lambda_t^2} \int_{M_t}^R |\log y|^\tau \frac{dy}{y}.$$

Substituindo o valor de λ_t em J_t^1, obtemos,

$$\begin{aligned} J_t^1 &= \frac{\tau}{D^2 \log^{2/\gamma}(1/t)} \int_{M_t}^R (1 + 2^\tau |\log[D \log^{1/\gamma}(1/t)]|^\tau) \frac{dy}{y} \\ &= \frac{\tau}{D^2 \log^{2/\gamma}(1/t)} (1 + 2^\tau |\log D + \log[\log^{1/\gamma}(1/t)]|^\tau) \int_{M_t}^R \frac{dy}{y} \\ &= \frac{\tau}{D^2 \log^{2/\gamma}(1/t)} (1 + 2^\tau |\log D + \log[\log^{1/\gamma}(1/t)]|^\tau)(|\log R| + |\log M_t|). \end{aligned}$$

Neste caso, para $C > 0$, suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
J_t^1 &\leq \frac{C}{\log^{2/\gamma}(1/t)}(1 + |\log[\log^{1/\gamma}(1/t)]|^\tau)(1 + |\log M_t|) \\
&= \frac{C}{\log^{2/\gamma}(1/t)}(1 + |\log[\log^{1/\gamma}(1/t)]|^\tau)(1 + |\log[\exp(-|\log(1/t)|)]|^{\frac{1}{(\tau+1)4\gamma}}) \\
&\leq \frac{C}{\log^{2/\gamma}(1/t)}(1 + |\log[\log^{1/\gamma}(1/t)]|^\tau)(1 + |\log^{\frac{1}{(\tau+1)4\gamma}}(1/t)|) \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Agora para J_t^2, basta fazer a substituição $u = \log y$, e assim

$$\begin{aligned}
J_t^2 &= \frac{\tau 2^\tau}{D^2 \log^{2/\gamma}(1/t)} \int_{\log M_t}^{\log R} |u|^\tau du \\
&= \frac{\tau 2^\tau}{(\tau+1) D^2 \log^{2/\gamma}(1/t)} (|\log R|^{\tau+1} - |\log M_t|^{\tau+1}) \\
&\leq \frac{C}{\log^{2/\gamma}(1/t)}(1 + |\log(1/t)|^{\frac{\tau+1}{(\tau+1)4\gamma}}) \\
&= \frac{C}{\log^{2/\gamma}(1/t)}(1 + |\log(1/t)|^{1/4\gamma}) \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+ \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

onde $C > 0$ é escolhido adequadamente.

De (3.11)-(3.13), existe $t_1 \in (0, 1)$ tal que

$$I_t^2 < \delta, \quad t \in (0, t_1). \qquad (3.14)$$

Agora, para estimar I_t^1, observe primeiramente que para $t \approx 0^+$

$$\begin{aligned}
\frac{\log(1/M_t)}{\log \lambda_t} &= \frac{\log(\exp|\log(1/t)|^{\frac{1}{(\tau+1)4\gamma}})}{\log \lambda_t} \\
&= \frac{|\log(1/t)|^{\frac{1}{(\tau+1)4\gamma}}}{\log[D \log^{1/\gamma}(1/t)]}.
\end{aligned}$$

Logo, se fizermos $u = \log^{1/\gamma}(1/t)$, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1/M_t)}{\log \lambda_t} &= \frac{|\log(1/t)|^{\frac{1}{(\tau+1)4\gamma}}}{\log[D \log^{1/\gamma}(1/t)]} \\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{u^{\frac{1}{(\tau+1)4}}}{\log[Du]} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Dessa forma, tomando $K := \left(\frac{1}{\delta} + 1\right) > 1$, existe $t_2 > 0$, tal que

$$\frac{\log(1/y)}{\log \lambda_t} > \frac{\log(1/M_t)}{\log \lambda_t} > K, \quad \forall\, t \in (0, t_2) \text{ e } y \in (t, M_t). \qquad (3.15)$$

Sabendo disto, dados $t \in (0, t_2)$ e $y \in (t, M_t)$, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\log(1/y)}{\log(1/\lambda_t y)} &= \frac{\log(1/y)}{\log(1/\lambda_t) + \log(1/y)} \\
&= \frac{\log(1/y)}{\log(1/y) - \log \lambda_t} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{\log(1/y)}{\log \lambda_t}}} \\
&\overset{(3.15)}{\leq} \frac{1}{1 - \frac{1}{K}} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{\delta}{1+\delta}} = 1 + \delta.
\end{aligned}$$

Neste caso,

$$\log^{\alpha}\left(\frac{1}{y}\right) \log^{-\alpha}\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) < (1+\delta)^{\alpha} < (1+\delta), \quad t \in (0, t_2), \ \text{ e } \ y \in [t, M_t],$$

desde que $\alpha \in [0, 1)$. Consequentemente,

$$\log^{-\alpha}\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) < (1+\delta) \log^{-\alpha}\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \in [t, M_t] \ \text{ e } \ t \in (0, t_2). \tag{3.16}$$

Sendo assim, usando a definição de $\hat{\Psi}$ dado no Lema 3.2 (aqui estamos considerando $\varepsilon = \delta > 0$), segue que,

$$\begin{aligned}
I_t^1 = \int_t^{M_t} \hat{\Psi}\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) y dy &\leq \int_t^{M_t} \left(\frac{1}{2} + \delta\right) \frac{1}{\lambda_t^2 y^2} \log^{-\alpha}\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) y dy \\
&\overset{(3.16)}{\leq} \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta\right)(1+\delta)}{\lambda_t^2} \int_t^{M_t} \log^{-\alpha}\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta\right)(1+\delta)}{D^2 \log^{2/\gamma}(1/t)} \left(\frac{\log^{1-\alpha}(1/t)}{1-\alpha} - \frac{\log^{1-\alpha}(1/M_t)}{1-\alpha}\right) \\
&\leq \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta\right)(1+\delta)}{D^2 \log^{2/\gamma}(1/t)} \frac{\log^{B}(1/t)}{B}, \quad t \in (0, t_2).
\end{aligned}$$

Por conseguinte, pela definição de D em (3.9) e sabendo que $\dfrac{2}{\gamma} = B$, temos

$$I_t^1 < \frac{1}{2\omega_1} - \delta, \quad t \in (0, t_2). \tag{3.17}$$

De (3.10), (3.14) e (3.17), conclui-se que

$$\int_t^R \Psi\left(\frac{1}{\lambda_t y}\right) y \omega_1 dy < \frac{1}{2} = \Psi(1), \quad t \in (0, s)$$

onde $s := \min\{t_1, t_2\}$. ■

O resultado a seguir não será demonstrado, mas o mesmo se encontra em [6], Lema 3.3.

Lema 3.4 *Sejam $\lambda \geq 1$ e $\varepsilon \in (0,1)$. Se existe $G_1 > 0$ tal que $|u(x)| \geq G_1$, sobre $A \subset \mathbb{R}$ e*

$$\int_A \Phi_1(|u|) y\omega_1 dy \leq (1-\varepsilon)^6 \lambda^2,$$

então

$$|u|_{(\tilde{L}_{\Phi_1}(A), y\omega_1 dy)} \leq \lambda.$$

3.2 Trudinger-Moser para Domínios Limitados

A partir das estimativas superiores desenvolvidas na Seção 3.1, pretendemos agora obter as imersões do tipo Trudinger-Moser para domínios limitados em $\mathbb{R}^2$. É importante observar que as funções definidas na Seção 3.1 serão consideradas nesta seção.

Teorema 3.5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira regular, $\alpha \in (0,1)$ e Φ_α uma função de Young que satisfaz as condições (Φ_1) e (Φ_2). Se $K \geq 0$, então*

$$\int_\Omega \exp(|Ku(x)|^\gamma) dx < +\infty, \tag{3.18}$$

para $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$.

Demonstração. A prova deste teorema é feita por Edmunds et al. 1995 [10], onde são utilizados os espaços de Lorentz e por esse motivo decidimos omitir sua prova. ■

Teorema 3.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira regular, $\alpha \in (0,1)$, Φ_α uma função de Young satisfazendo (Φ_1), (Φ_2) e $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$. Se*

$$K < 2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2}$$

e $|\nabla u|_{\Phi_\alpha} \leq 1$, então

$$\int_\Omega \exp(|Ku(x)|^\gamma) dx \leq C, \tag{3.19}$$

onde a constante C depende apenas de α, $|\Omega|$ e K.

Demonstração. Fixando $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, suponha, sem perda de generalidade, que u é Lipschitz contínuo em Ω, isto se dá pelo fato de $C_0^\infty(\Omega)$ ser denso em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ (ver Capítulo 1). No que segue, consideraremos $R > 0$ de tal forma que

$$|\Omega| = |B_R(0)|.$$

Assuma também que $u^\star : B_R(0) \to \mathbb{R}$ é a Simetrização de Schwarz da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (veja Apêndice B). Neste caso,

$$\int_\Omega \exp(|Ku(x)|^\gamma)dx = \int_{B_R(0)} \exp(|Ku^\star(x)|^\gamma)dx.$$

Além disso, pelo Princípio de Polya-Szegö para funções de Young (veja Teorema $B.4$, Apêndice B),

$$\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla u^\star(x)|)dx \leq \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx.$$

Tendo em vista que $|\nabla u|_{\Phi_\alpha} \leq 1$, segue da Proposição 1.8 que

$$\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla u^\star(x)|)dx \leq 1. \tag{3.20}$$

Observando que $u^\star$ é radialmente decrescente em Ω (ver Apêndice B), podemos assumir que $u^\star(x) = g(|x|)$, $x \in B_R(0)$, onde $g : [0, R] \to \mathbb{R}_+$ é decrescente e diferenciável q.t.p. em $[0, R]$ (veja Apêndice A, Teorema $A.8$). Além disso, como $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ temos $g(R) = 0$.

Agora, desde que

$$K < 2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2} \Longleftrightarrow \left(\frac{\omega_1}{B}\right)^{1/2} < \frac{2^{1/\gamma}\omega_1}{K},$$

é possivel tomar $\varepsilon_1 > 0$, suficientemente pequeno, de sorte que

$$\left(\frac{\omega_1}{B} + \varepsilon_1\right)^{1/2} < \frac{2^{1/\gamma}\omega_1}{(1+\varepsilon_1)K}.$$

Deste fato, redefinindo $D_{\varepsilon_1} = \left(\frac{w_1}{B} + \varepsilon_1\right)^{1/2}$, obtemos que

$$K < \frac{w_1 \cdot 2^{1/\gamma}}{(1+\varepsilon_1)D_{\varepsilon_1}}. \tag{3.21}$$

Observado isto, dado $t \in (0, R)$, defina $A_P := \{y \in (t, R) : |g'(y)| > P\}$ (onde P é dado no Lema 3.1 (v)). Além disso, para facilitar a escrita defina,

$$d\mu(y) = \omega_1 y dy.$$

A partir destas considerações, segue do Lema 3.1 (v) que

$$\begin{aligned}
\int_{A_P} \Phi_1(|g'(y)|)d\mu(y) &= \int_{A_P} \Phi_1(|g'(y)|)\omega_1 y dy \\
&\leq \frac{1}{2}\omega_1 \int_{A_P} \Phi_\alpha(|g'(y)|) y dy \\
&\leq \frac{1}{2}\omega_1 \int_0^R \Phi_\alpha(|g'(y)|) y dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^R \Phi_\alpha(|g'(y)|)\omega_1 y dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla u^\star(x)|)dx \\
&\overset{(3.20)}{\leq} \frac{1}{2} = \Psi(1).
\end{aligned}$$

Neste caso,

$$|g'(y)|_{(\tilde{L}_{\Phi_1}(A_P),d\mu)} \leq 1. \tag{3.22}$$

Por este fato, se considerarmos $B_P := \{y \in (t,R) : |g'(y)| \leq P\}$, isto é, $B_P = (t,R) - A_P$, obtemos pela desigualdade generalizada de Hölder, que

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq \int_t^R |g'(y)|dy \\
&= \int_{A_P} |g'(y)|dy + \int_{B_P} |g'(y)|dy \\
&= \frac{1}{\omega_1}\int_{A_P} |g'(y)|\frac{1}{y}d\mu(y) + \int_{B_P} |g'(y)|dy \\
&\leq \frac{1}{\omega_1}|g'|_{(\tilde{L}_{\Phi_1}(A_P),d\mu)} \left|\frac{1}{y}\right|_{(\tilde{L}_\Psi(A_P),d\mu)} + P(R-t) \\
&\overset{(3.22)}{\leq} \frac{1}{\omega_1}\left|\frac{1}{y}\right|_{(\tilde{L}_\Psi(A_P),d\mu)} + PR \\
&\leq \frac{1}{\omega_1}\left|\frac{1}{y}\right|_{(\tilde{L}_\Psi(t,R),d\mu)} + PR.
\end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 3.3 existe $t_0 \in (0, \min\{1, R\})$ tal que

$$g(t) \leq PR + \frac{D_{\varepsilon_1}}{\omega_1} \log^{1/\gamma}\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in (0, t_0), \tag{3.23}$$

lembrando que $D_{\varepsilon_1} = \left(\frac{w_1}{B} + \varepsilon_1\right)^{1/2}$. Por outro lado, tendo em vista que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to 0^+} \frac{PR + \frac{D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\log^{1/\gamma}(1/t)}{\frac{D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\log^{1/\gamma}(1/t)} &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{PR}{\frac{D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\log^{1/\gamma}(1/t)} + 1 \\
&\leq \limsup_{t\to 0^+} \frac{PR}{\frac{1}{\sqrt{B\omega_1}}\log^{1/\gamma}(1/t)} + 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

vai existir $t_1 \in (0, t_0)$, independente de $\varepsilon_1 > 0$, tal que

$$PR + \frac{D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\log^{1/\gamma}\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{(1+\varepsilon_1)D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\log^{1/\gamma}\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in (0, t_1]. \tag{3.24}$$

De (3.23) e (3.24),

$$g(t) \leq (1+\varepsilon_1)\frac{D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\log^{1/\gamma}\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in (0, t_1]. \tag{3.25}$$

Tendo em vista a desigualdade (3.21), podemos considerar

$$\delta := 2 - \left(\frac{K(1+\varepsilon_1)D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\right)^{\gamma} > 0.$$

Sendo assim, por (3.25) e pela monotonicidade da função exponencial, tem-se que

$$\begin{aligned}
\omega_1 \int_0^{t_1} \exp[(Kg(y))^\gamma] y\,dy &\leq \omega_1 \int_0^{t_1} \exp\left(\left(\frac{K(1+\varepsilon_1)D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\right)^{\gamma} \log\frac{1}{y}\right) y\,dy \\
&= \omega_1 \int_0^{t_1} \exp\left((2-\delta)\log\frac{1}{y}\right) y\,dy \\
&= \omega_1 \int_0^{t_1} y^{\delta-2} y\,dy \\
&= \omega_1 \int_0^{t_1} y^{\delta-1}\,dy \\
&= \omega_1 \left.\frac{y^\delta}{\delta}\right|_0^{t_1} \\
&= \frac{\omega_1 t_1^\delta}{\delta} =: C_0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Além disso, usando agora o fato de g ser decrescente em $[0, R]$,

$$\begin{aligned}
\omega_1 \int_{t_1}^{R} \exp[(Kg(y))^\gamma] y dy &\leq \omega_1 \int_{t_1}^{R} \exp[(Kg(t_1))^\gamma] y dy \\
&\leq \omega_1 \int_{t_1}^{R} \exp\left(\left(\frac{K(1+\varepsilon_1)D_{\varepsilon_1}}{\omega_1}\right)^\gamma \log\frac{1}{t_1}\right) y dy \\
&= \omega_1 t_1^{\delta-2} \int_{t_1}^{R} y dy \\
&= \omega_1 t_1^{\delta-2}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{t_1^2}{2}\right] \\
&= \omega_1 \frac{t_1^\delta}{2}\left[\frac{R^2}{t_1^2} - 1\right] =: C_1.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Dessa forma, de (3.26) e (3.27)

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} \exp(|Ku^\star(x)|^\gamma) dx &= \omega_1 \int_0^R \exp[(Kg(y))^\gamma] y dy \\
&= \omega_1 \int_0^{t_1} \exp[(Kg(y))^\gamma] y dy + \omega_1 \int_{t_1}^{R} \exp[(Kg(y))^\gamma] y dy \\
&\leq C_1 + C_2 =: C.
\end{aligned}$$

Portando, pela Simetrização de Schwarz,

$$\int_\Omega \exp(|Ku(x)|^\gamma) dx < C. \quad \blacksquare$$

Vejamos agora um outra versão do Trudinger-Moser, o qual é valido para sequências de $\{u_n\} \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ que não estão necessariamente na bola unitária.

Teorema 3.7 *Sejam $\beta > 0$ e $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, tais que*

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|) dx \leq c < \left(\frac{B^{1/2} 2^{1/\gamma} \omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então, existe $q > 1$ tal que

$$\int_\Omega \exp(\beta q |u_n|^\gamma) dx \leq C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Analogamente ao feito na demonstração do Teorema 3.6, iremos considerar $R > 0$, tal que $|\Omega| = |B_R(0)|$ e $u^\star : B_R(0) \to \mathbb{R}$ a simetrização de Schwarz de $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Neste caso, para $q > 1$,

$$\int_\Omega \exp(\beta q |u_n|^\gamma) dx = \int_{B_R(0)} \exp(\beta q |u_n^\star|^\gamma) dx. \tag{3.28}$$

Além disso, pelo Princípio de Polya-Szegö (ver Teorema $B.4$),

$$\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla u_n^\star|)dx \leq c < \left(\frac{B^{1/2}2^{1/\gamma}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2. \tag{3.29}$$

Podemos considerar ainda, $u_n^\star(x) = g_n(|x|), x \in B_R(0)$, onde $g_n : [0,R] \to \mathbb{R}$ é decrescente e diferenciável q.t.p. em $[0,R]$ com $g(R) = 0$.

Agora, observe que podemos escolher $\varepsilon \approx 0^+$ tal que

$$\frac{1}{2} \leq (1-\varepsilon)^{\left(10+\frac{4}{\gamma}\right)}, \tag{3.30}$$

pois

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}}{(1-\varepsilon)^{\left(10+\frac{4}{\gamma}\right)}} = \frac{1}{2}.$$

Combinando (3.30) e Lema 3.1 (v), temos

$$\Phi_1(t) \leq (1-\varepsilon)^{\left(10+\frac{4}{\gamma}\right)}\Phi_\alpha(t), \quad t \geq P.$$

Dessa forma, considerando $A_{n,P} = \{y \in (t,R] \ : \ |g_n'(y)| > P\}$, segue de (3.29),

$$\begin{aligned}
\int_{A_{n,P}} \Phi_1(|g_n'(y)|)\omega_1 y dy &\leq (1-\varepsilon)^{\left(10+\frac{4}{\gamma}\right)} \int_{A_{n,P}} \Phi_\alpha(|g_n'(y)|)y\omega_1 dy \\
&\leq (1-\varepsilon)^{\left(10+\frac{4}{\gamma}\right)} \int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla u_n^\star|)dx \\
&\leq (1-\varepsilon)^{\left(10+\frac{4}{\gamma}\right)} \left(\frac{B^{1/2}2^{1/\gamma}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Sendo assim, tomando

$$\lambda = (1-\varepsilon)^{\left(2+\frac{2}{\gamma}\right)} \left(\frac{2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right),$$

segue do Lema 3.4, que

$$|g_n'|_{(\tilde{L}_{\Phi_1}(A_{n,P}), y\omega_1 dy)} \leq \lambda, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.31}$$

Afirmação 1: Para $\varepsilon > 0$, suficientemente próximo de zero, temos:

$$\left(\frac{\omega_1}{B} + \varepsilon\right)^{1/2} \leq \frac{\omega_1^{1/2}}{B^{1/2}(1-\varepsilon)}.$$

De fato, sabendo que,

$$\frac{B}{\omega_1} < 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1-(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)^2} = 2,$$

podemos encontrar $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{B}{\omega_1} \leq \frac{1-(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)^2}.$$

O resultado segue, observando que

$$\left(\frac{\omega_1}{B}+\varepsilon\right)^{1/2} \leq \frac{\omega_1^{1/2}}{B^{1/2}(1-\varepsilon)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{B}{\omega_1} \leq \frac{1-(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)^2},$$

provando assim a Afirmação 1.

Combinando o Lema 3.3 e a Afirmação 1, existe $t_0 \in (0, \min\{1, R\})$ tal que para todo $t \in (0, t_0)$, temos

$$\left|\frac{1}{y}\right|_{(\tilde{L}_\Psi(t,R),\omega_1 y dy)} \leq \frac{\omega_1^{1/2}}{B^{1/2}(1-\varepsilon)} \log^{1/\gamma}\left(\frac{1}{t}\right). \tag{3.32}$$

Sendo assim, argumentando como em (3.23) obtemos,

$$g_n(t) \leq \frac{1}{\omega_1}|g_n'|_{(\tilde{L}_{\Phi_1}(A_{n,P}),d\mu)} \left|\frac{1}{y}\right|_{(\tilde{L}_\Psi,(t,R),d\mu)} + PR,$$

donde segue de (3.31) e (3.32) que

$$g_n(t) \leq (1-\varepsilon)^{1+\frac{2}{\gamma}}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/\gamma} \log^{1/\gamma}\left(\frac{1}{t}\right) + PR, \quad t \in (0, t_0).$$

Logo, podemos encontrar como em (3.25), $t_1 \in (0, t_0)$, tal que

$$g_n(t) \leq (1-\varepsilon)^{2/\gamma}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/\gamma} \log^{1/\gamma}\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in (0, t_1], \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Dessa feita, como

$$\int_0^R \exp(\beta q|g_n(y)|^\gamma) y\omega_1 dy = \int_0^{t_1} \exp(\beta q|g_n(y)|^\gamma) y\omega_1 dy + \int_{t_1}^R \exp(\beta q|g_n(y)|^\gamma) y\omega_1 dy,$$

escolha $q = \dfrac{1}{1-\varepsilon}$, e assim

$$\begin{aligned} \omega_1 \int_0^{t_1} \exp(\beta q|g_n(y)|^\gamma) y dy &\leq \omega_1 \int_0^{t_1} \exp\left(\beta \frac{1}{1-\varepsilon}(1-\varepsilon)^2 \frac{2}{\beta} \log\left(\frac{1}{y}\right)\right) y dy \\ &= \omega_1 \int_0^{t_1} y^{2\varepsilon - 2} y dy \\ &= \frac{\omega_1}{2\varepsilon} y^{2\varepsilon}\Big|_0^{t_1} = \frac{\omega_1 t_1^{2\varepsilon}}{2\varepsilon} =: c_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Além disso, usando o fato de g_n ser decrescente em $[0, R]$, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{R} \exp(\beta q|g_n(y)|^\gamma) y\omega_1 dy &\leq \int_{t_1}^{R} \exp(\beta q|g_n(t_1)|^\gamma) y\omega_1 dy \\ &\leq \omega_1 t_1^{2\varepsilon-2} \int_{t_1}^{R} y dy \\ &= \omega_1 \frac{t_1^{2\varepsilon}}{2} \left(\frac{R^2}{t_1^{2\varepsilon}} - 1 \right) =: c_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Portanto, de (3.28), (3.33) e (3.34), temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \exp(\beta q|u_n|^\gamma) dx &= \int_{B_R(0)} \exp(\beta q|u_n^\star|^\gamma) dx \\ &\leq c_0 + c_1 =: C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

com $q = \dfrac{1}{1-\varepsilon}$. ■

O próximo teorema é uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser restrita a uma bola aberta do domínio Ω.

Teorema 3.8 *Seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$. Considere $z \in \Omega$ e $R > 0$ tais que $B_{2R}(z) \subset \Omega$. Para todo $q \geq 1$, existe $\tau > 0$ tal que, se $|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha, B_R(z)} < \tau$, então*

$$\int_{B_R(z)} \exp(q|u_n|^\gamma) dx \leq C,$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de n.

Demonstração: Seja $(u_n)_B$ a integral média de u_n sobre $B_R(z)$, isto é,

$$(u_n)_B = \frac{1}{|B_R(z)|} \int_{B_R(z)} u_n(x) dx.$$

Neste caso, verificaremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 1: Assumindo que $|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \leq C_1$, com $C_1 > 0$, existe uma constante $C_2 = C_2(R, \omega_1, C_1) > 0$ tal que,

$$|(u_n)_B| \leq C_2.$$

De fato, pelo Corolário 2.8

$$W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega),$$

continuamente, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$|u|_{L^1(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{\Phi_\alpha}, \quad \forall u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega).$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
|(u_n)_B| &= \frac{1}{|B_R(z)|}\int_{B_R(z)} |u_n| dx \\
&\leq \frac{1}{|B_R(z)|}|u_n|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{C}{|B_R(z)|}|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \leq C_2(R, C_1, \omega_1),
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, provando assim a Afirmação 1.

Defina agora

$$
v_n(x) := (u_n(x) - (u_n)_B)\chi_{B_R(z)}(x), \quad x \in \Omega.
$$

Podemos observar que $v_n \in W^{1,\Phi_\alpha}(B_R(z))$, e além disso,

$$
\begin{aligned}
|\nabla v_n|_{\Phi_\alpha, B_R(z)} &= |\nabla u_n|_{\Phi_\alpha, B_R(z)} \\
&\leq |\nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \leq C_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Destes fatos, tome $\tilde{v}_n \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(B_{2R}(z))$, de sorte que

$$
\tilde{v}_n(x) = v_n(x), \text{ para } x \in B_R(z) \quad \text{e} \quad |\nabla \tilde{v}_n|_{\Phi_\alpha, B_{2R}(z)} \leq C|\nabla v_n|_{\Phi_\alpha, B_R(z)}.
$$

Agora, usando a Afirmação 1, observe que

$$
|u_n(x)| = |v_n(x) + (u_n)_B| \leq |\tilde{v}_n(x)| + C_2, \quad \forall x \in B_R(z),
$$

sendo assim,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R(z)} \exp(q|u_n|^\gamma) dx &\leq \int_{B_R(z)} \exp(q(C_2 + |\tilde{v}_n|)^\gamma) dx \\
&\leq \int_{B_{2R}(z)} \exp(q(C_2 + |\tilde{v}_n|)^\gamma) dx \\
&\leq \int_{B_{2R}(z)} \exp(2^\gamma q C_2^\gamma) \exp(2^\gamma q |\tilde{v}_n|^\gamma) dx \\
&\leq C(q, C_2, \gamma) \int_{B_{2R}(z)} \exp(2^\gamma q |\tilde{v}_n|^\gamma) dx \qquad (3.36) \\
&= C(q, C_2, \gamma) \int_{B_{2R}(z)} \exp\left[2^\gamma q |\nabla \tilde{v}_n|^\gamma_{\Phi_\alpha, B_{2R}(z)} \left(\frac{|\tilde{v}_n|}{|\nabla \tilde{v}_n|^\gamma_{\Phi_\alpha, B_{2R}(z)}}\right)^\gamma\right] dx.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, tomando $\tau = \left(\dfrac{2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2}}{C^\gamma 2^\gamma q}\right)^{1/\gamma}$, temos que se $|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha, B_R(z)} < \tau$, então

$$\begin{aligned} 2^{\gamma} q |\nabla \tilde{v}_n|^{\gamma}_{\Phi_\alpha, B_{2R}(z)} &\leq C^{\gamma} 2^{\gamma} q |\nabla u_n|^{\gamma}_{\Phi_\alpha, B_R(x)} \\ &< C^{\gamma} 2^{\gamma} q \tau^{\gamma} \\ &= 2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

De (3.36) e (3.37) segue da Desigualdade de Trudinger-Moser (ver Teorema 3.6), que

$$\int_{B_R(x)} \exp(q|u_n|^{\gamma}) dx \leq C(q, C_1, R, \gamma, \omega_1),$$

como queríamos demonstrar. ■

3.3 Imersão ótima

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que a imersão obtida pelo Teorema 3.6 é ótima. Para este fim, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.9 *Seja $\alpha \in [0,1)$ e suponha Φ_α uma função de Young satisfazendo (Φ_1) e (Φ_2). Dados $R > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e*

$$K > 2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2},$$

existe uma função radial $f_m : B_R(0) \to \mathbb{R}$, $f_m \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(B_R(0))$, verificando

$$\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla f_m(x)|) dx \leq 1,$$

de modo que

$$\int_{B_R(0)} \exp(|K f_m(x)|^{\gamma}) dx \geq m.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, considere

$$A_\varepsilon := \left(\frac{B 2^B (1+\varepsilon)^2}{\left(\frac{1}{\omega_1} - 2\varepsilon\right)} \right)^{1/2}.$$

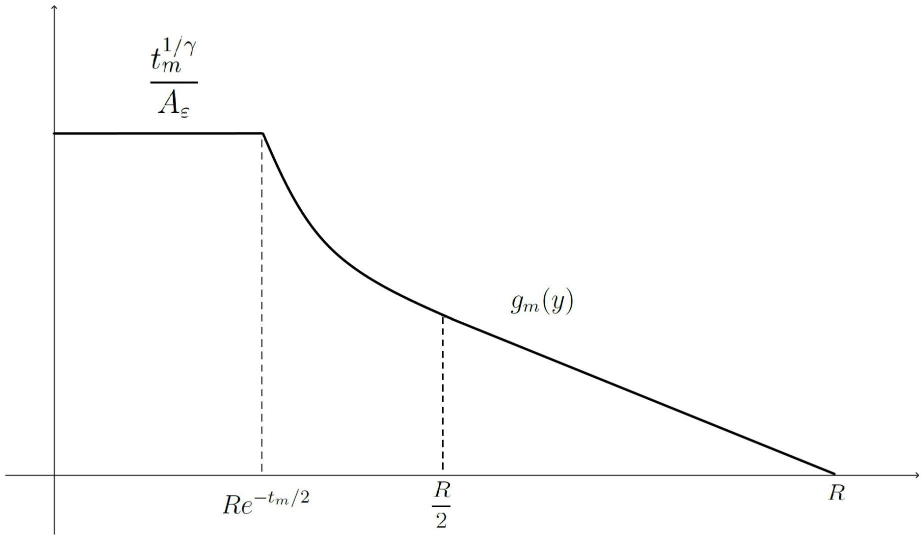
Desde que $K > 2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2}$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2} < A_\varepsilon < K. \tag{3.38}$$

Agora, tome $t_m > 2$ e defina $g_m : [0, R] \to \mathbb{R}$ uma função contínua dada por:

$$g_m(y) = \begin{cases} \left(-\dfrac{2}{R}y + 2\right) \dfrac{2^B}{A_\varepsilon} \log^B(2) t_m^{\frac{1}{\gamma}-B}, & y \in \left[\dfrac{R}{2}, R\right]; \\ \\ \dfrac{2^B}{A_\varepsilon} \log^B \left(\dfrac{R}{y}\right) t_m^{\frac{1}{\gamma}-B}, & y \in \left[Re^{-t_m/2}, \dfrac{R}{2}\right]; \\ \\ \dfrac{t_m^{1/\gamma}}{A_\varepsilon}, & y \in [0, Re^{-t_m/2}]. \end{cases} \tag{3.39}$$

Podemos observar que g_m é dado geometricamente por:



Fonte: Desenvolvido pelo autor através do software CorelDraw.

Fazendo $f_m(x) := g_m(|x|)$, $x \in B_R(0)$, verificaremos agora que para $t_m > 2$, suficientemente grande,

$$\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla f_m(x)|)dx = \omega_1 \int_0^R \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy \leq 1. \tag{3.40}$$

Para tanto, seja $M_t := \exp(-\log^2 t)$ e observe que

$$M_t \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{R\exp(-t/2)}{M_t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{R\exp(\log^2 t)}{\exp\left(\dfrac{t}{2}\right)} = 0.$$

Destes fatos, para $t_m > 2$, suficientemente grande,

$$R\exp\left(-\frac{t_m}{2}\right) < M_{t_m} < \min\left\{\frac{R}{2}, \frac{1}{e}\right\}.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}
\int_0^R \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy &= \int_0^{Re^{-\frac{t_m}{2}}} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy + \int_{Re^{-\frac{t_m}{2}}}^{M_{t_m}} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy \\
&+ \int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy + \int_{\frac{R}{2}}^{R} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy \\
&= \int_{Re^{-\frac{t_m}{2}}}^{M_{t_m}} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy + \int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy \\
&\quad + \int_{\frac{R}{2}}^{R} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy \\
&=: I_{t_m}^1 + I_{t_m}^2 + I_{t_m}^3.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Analisemos cada $I_{t_m}^j$, $j = 1, 2, 3$, separadamente, começando por $I_{t_m}^3$. Da condição (Φ_1), temos

$$\Phi_\alpha(t) \leq C_0 t^2(1 + \log^2 t), \quad t \in [0, 1], \tag{3.42}$$

para algum $C_0 > 0$. Ademais, pela condição (Φ_2) sabemos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\Phi_\alpha(t) \leq C_1 t^2 \log^\alpha t, \quad t \geq 1,$$

e como $\alpha \in [0, 1)$, segue que

$$\Phi_\alpha(t) \leq C_1 t^2(1 + \log^2 t), \quad t \geq 1. \tag{3.43}$$

Combinando (3.42) e (3.43), existe $C > 0$ tal que

$$\Phi_\alpha(t) \leq C t^2(1 + \log^2 t), \quad t \in [0, \infty). \tag{3.44}$$

Além disso, de (3.38), para $y \in \left(\frac{R}{2}, R\right)$,

$$\begin{aligned}
|g_m'(y)| &= \frac{2^{B+1}}{R}\frac{\log^B(2)}{A_\varepsilon} t_m^{1/\gamma - B} \\
&< \frac{2^{B+1}}{R}\frac{\log^B(2)}{2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}} t_m^{1/\gamma - B} \\
&= \tau t_m^{1/\gamma - B},
\end{aligned}$$

onde $\tau := \dfrac{2^{B+1}}{R}\dfrac{\log^B(2)}{2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}}$. Por conseguinte, usando (3.44),

$$\begin{aligned}
I_{t_m}^3 &= \int_{\frac{R}{2}}^R \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy \\
&\leq C\int_{\frac{R}{2}}^R |g_m'(y)|^2(1+\log^2|g_m'(y)|)ydy \\
&= \tau C t_m^{(\frac{1}{\gamma}-B)2}\left[1+\log^2\left(\tau t_m^{\frac{1}{\gamma}-B}\right)\right]\int_{\frac{R}{2}}^R ydy \\
&= \tilde{\tau} t_m^{(\frac{1}{\gamma}-B)2}\left[1+\log^2\left(\tau t_m^{\frac{1}{\gamma}-B}\right)\right],
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(R,\omega_1,B) > 0$. Daí, segue-se que

$$\begin{aligned}
I_{t_m}^3 &\leq \tilde{\tau} t_m^{(\frac{1}{\gamma}-B)2}\left[1+\left(\log\left(t_m^{\frac{1}{\gamma}-B}\right)+\log\tau\right)^2\right] \\
&\leq \tilde{\tau} t_m^{(\frac{1}{\gamma}-B)2}\left[1+4\log^2\tau+4\log^2\left(t_m^{\frac{1}{\gamma}-B}\right)\right],
\end{aligned}$$

o que implica que vai existir $C = C(R,B,\omega_1) > 0$ tal que

$$I_{t_m}^3 \leq C t_m^{(\frac{1}{\gamma}-B)2}\left[1+\log^2\left(t_m^{\frac{1}{\gamma}-B}\right)\right],$$

para $t_m > 0$, suficientemente grande. Recordando que $\frac{1}{\gamma} - B = -\frac{B}{2} < 0$, tem-se

$$I_{t_m}^3 \leq C t_m^{-B}\left(1+\frac{B^2}{4}\log^2 t_m\right).$$

E portanto, podemos ver que para $t_m > 2$, suficientemente grande,

$$I_{t_m}^3 < \varepsilon. \tag{3.45}$$

Agora para $I_{t_m}^2$, façamos algumas considerações iniciais.

Afirmação 1 *Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $C > 0$, que depende de a e R, tal que*

$$\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \log^a\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y} \leq C(1+|\log M_{t_m}|^{a+2}).$$

De fato, se fizermos $z = \log\left(\dfrac{R}{y}\right)$, temos $-dz = \dfrac{dy}{y}$, e então para todo $a \neq -1$

$$\begin{aligned}
\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \log^a\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y} &= \int_{\log 2}^{\log\frac{R}{M_{t_m}}} z^a dz \\
&= \frac{(\log R/M_{t_m})^{a+1}}{a+1} - \frac{(\log 2)^{a+1}}{a+1} \\
&= \frac{(\log R - \log M_{t_m})^{a+1}}{a+1} - \frac{(\log 2)^{a+1}}{a+1},
\end{aligned}$$

implicando que,

$$\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \log^a\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y} \leq C(1+|\log M_{t_m}|^{a+1}), \tag{3.46}$$

para algum $C = C(R,a) > 0$. Analogamente, para $a = -1$, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \log^{-1}\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y} &= \int_{\log 2}^{\log\frac{R}{M_{t_m}}} \frac{dz}{z} \\ &\leq C(1+|\log|\log M_{t_m}||) \end{aligned} \tag{3.47}$$

para algum $C = C(R) > 0$. Usando (3.46) e (3.47), dado $a \in \mathbb{R}$, existe $C = C(a,R) > 0$ tal que

$$\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \log^a\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y} \leq C(1+|\log M_{t_m}|^{a+2}), \tag{3.48}$$

provando assim a Afirmação 1.

Podemos ver também que, para $y \in \left[M_{t_m}, \frac{R}{2}\right]$

$$\begin{aligned}|g_m'(y)| &= \frac{2^B B\log^{B-1}\left(\frac{R}{y}\right)t_m^{1/\gamma-B}}{yA_\varepsilon} \\ &= \frac{2^B B\log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)t_m^{1/\gamma-B}}{yA_\varepsilon} \\ &\leq \frac{2^B B\log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)t_m^{1/\gamma-B}}{y2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}} \\ &=: \frac{\mu\log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)t_m^{1/\gamma-B}}{y}, \end{aligned} \tag{3.49}$$

onde $\mu = \dfrac{2^B B}{2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}}$. Daí, por (3.44)

$$\begin{aligned} I_{t_m}^2 &= \int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy \\ &\leq \int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} C|g_m'(y)|^2(1+\log^2|g_m'(y)|)ydy \\ &\overset{(3.49)}{=} \mu^2 C t_m^{2\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)}\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}} \log^{-2\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)(1+\log^2|g_m'(y)|)\frac{dy}{y}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Separadamente, veja que

$$\begin{aligned}
(1+\log^2|g_m'(y)|) &\le \left(1+\log^2\left[\frac{\mu t_m^{-B/2}\log^{-\alpha}(R/y)}{y}\right]\right)\\
&= \left(1+\left[\log\mu-\frac{B}{2}\log t_m+\log\left(\frac{\log^{-\alpha}(R/y)}{y}\right)\right]^2\right)\\
&= \left(1+\left[\log\mu-\frac{B}{2}\log t_m+\log\left(\frac{R}{y}\right)+\log\left(\frac{1}{R\log^{\alpha}(R/y)}\right)\right]^2\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $y \le \dfrac{R}{2}$,

$$\frac{1}{R\log^{\alpha}(R/y)} \le \frac{1}{R\log^{\alpha}2},$$

e assim,

$$\log\left(\frac{1}{R\log^{\alpha}(R/y)}\right) \le \log\left(\frac{1}{R\log^{\alpha}2}\right).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(1+\log^2|g_m'(y)|) &\le \left(1+\left[\log\mu-\frac{B}{2}\log t_m+\log\left(\frac{R}{y}\right)+\log\left(\frac{1}{R\log^{\alpha}2}\right)\right]^2\right)\\
&\le C\left(1+\log^2 t_m+\log^2\left(\frac{R}{y}\right)\right), \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

onde $C = C(B,\omega_1,R) > 0$. Sendo assim, de (3.50) e (3.51),

$$\begin{aligned}
I_{t_m}^2 &\le Ct_m^{2\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)}\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}}\log^{-2\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\left(1+\log^2 t_m+\log^2\left(\frac{R}{y}\right)\right)\frac{dy}{y}\\
&= Ct_m^{2\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)}\left((1+\log^2 t_m)\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}}\log^{-2\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y}+\int_{M_{t_m}}^{\frac{R}{2}}\log^{2-2\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y}\right).
\end{aligned}$$

Segue então da Afirmação 1 que

$$\begin{aligned}
I_{t_m}^2 &\le Ct_m^{2\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)}\left((1+\log^2 t_m)(1+|\log M_{t_m}|^{2-2\alpha})+(1+|\log M_{t_m}|^{4-2\alpha})\right)\\
&= Ct_m^{2\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)}\left((1+\log^2 t_m)(1+|\log M_{t_m}|^{2B})+(1+|\log M_{t_m}|^{2B+2})\right)\\
&= Ct_m^{-B}\left((1+\log^2 t_m)(1+|\log M_{t_m}|^{4B})+(1+|\log M_{t_m}|^{4B+4})\right).
\end{aligned}$$

Logo, para $t_m > 2$, suficientemente grande,

$$I_{t_m}^2 < \varepsilon. \qquad (3.52)$$

Por fim, vejamos $I^1_{t_m}$. Pela condição (Φ_2), deve existir $K_0 = K_0(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\Phi_\alpha(t) \leq (1+\varepsilon)t^2|\log t|^\alpha, \quad t \in [K_0, \infty), \tag{3.53}$$

além disso, podemos verificar que:

Afirmação 2 *Para $t_m > 2$, suficientemente grande,*

$$|g'_m(y)| \geq K_0, \quad \forall y \in [Re^{-t_m/2}, M_{t_m}],$$

onde $K_0 > 0$ é dado em (3.53).

De fato, primeiramente, observe os seguintes pontos:

- $A_\varepsilon < K \Leftrightarrow \dfrac{1}{K} < \dfrac{1}{A_\varepsilon}$;
- $y \leq M_{t_m} \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{1}{M_{t_m}}$;
- E podemos ver que,

$$\begin{aligned} y \geq Re^{-t_m/2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{Re^{-t_m/2}} = \frac{e^{t_m/2}}{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \log^\alpha\left(\frac{R}{y}\right) \leq \log^\alpha e^{t_m/2} = \frac{t_m^\alpha}{2^\alpha} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log^\alpha(R/y)} \geq \frac{2^\alpha}{t_m^\alpha}. \end{aligned}$$

Por estes fatos, tem-se que

$$\begin{aligned} |g'_m(y)| &= \frac{2^B B \log^{-\alpha}(R/y) t_m^{1/\gamma - B}}{y A_\varepsilon} \\ &> \frac{2^B B}{K} \frac{2^\alpha t_m^{-B/2}}{M_{t_m} t_m^\alpha}, \quad y \in [Re^{-t_m/2}, M_{t_m}], \end{aligned}$$

lembrando que $B = 1 - \alpha$, segue-se que

$$|g'_m(y)| > \frac{2B}{K} \frac{1}{t_m^{(1+\alpha)/2} M_{t_m}}, \quad \forall y \in [Re^{-t_m/2}, M_{t_m}]. \tag{3.54}$$

Agora, fazendo $u = \log t$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{(1+\alpha)/2} M_t} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{\exp(\log^2 t)}{t^{(1+\alpha)/2}} \\ &= \lim_{u \to +\infty} \frac{\exp(u^2)}{\exp\left(\frac{1+\alpha}{2} u\right)} = +\infty, \end{aligned}$$

concluímos de (3.54) que para $t_m > 2$, suficientemente grande,

$$|g'_m(y)| > K_0, \quad \forall y \in [Re^{-t_m/2}, M_{t_m}].$$

Afirmação 3 *Para todo* $y \in [Re^{-t_m/2}, M_{t_m}]$, *temos*

$$\log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\log^{\alpha}|g_m'(y)| \leq (1+\varepsilon).$$

Com efeito, basta observar que

$$\begin{aligned}
\log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\log^{\alpha}|g_m'(y)| &= \log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\left[\log^{\alpha}\left(\frac{2^B B\log^{-\alpha}(R/y)t_m^{(1/\gamma-B)}}{yA_\varepsilon}\right)\right]\\
&\overset{(3.38)}{\leq} \log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\left[\log^{\alpha}\left(\frac{2^B B}{2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}}\frac{t_m^{-B/2}}{y\log^{\alpha}(R/y)}\right)\right]\\
&= \log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\left[\log^{\alpha}\left(C(B,\omega_1)\frac{t_m^{-B/2}}{y\log^{\alpha}(R/y)}\right)\right]\\
&= \log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\left[\log(C(B,\omega_1)t_m^{-B/2}) + \log\left(\frac{R}{y}\right)\right.\\
&\quad\left. - \log\left(\log^{\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\right)\right]^{\alpha}\\
&= \left[-\frac{B}{2}\frac{\log(C(B,\omega_1)t_m)}{\log(R/y)} + 1 - \frac{\alpha\log(\log(R/y))}{\log(R/y)}\right]^{\alpha}\\
&< 1+\varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $y \in [Re^{-t_m/2}, M_{t_m}]$.

Tendo em vista (3.53) e as Afirmações 2 e 3, para $t_m > 2$, suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
I^1_{t_m} = \int_{Re^{-t_m/2}}^{M_{t_m}} \Phi_\alpha(|g_m'(y)|)ydy &\overset{(3.53)}{\leq} (1+\varepsilon)\int_{Re^{-t_m/2}}^{M_{t_m}} |g_m'(y)|^2|\log|g_m'(y)||^{\alpha}ydy\\
&\leq (1+\varepsilon)^2\int_{Re^{-t_m/2}}^{M_{t_m}} |g_m'(y)|^2\log^{\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)ydy\\
&= t_m^{2\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)}(1+\varepsilon)^2\frac{2^{2B}B^2}{A_\varepsilon^2}\int_{Re^{-t_m/2}}^{M_{t_m}}\log^{-2\alpha+\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y}\\
&= t_m^{2\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)}(1+\varepsilon)^2\frac{2^{2B}B^2}{A_\varepsilon^2}\int_{Re^{-t_m/2}}^{M_{t_m}}\log^{-\alpha}\left(\frac{R}{y}\right)\frac{dy}{y}
\end{aligned}$$

Fazendo novamente a substituição $u = \log\left(\frac{R}{y}\right)$ e sabendo que

$$\left(\frac{1}{\gamma} - B\right)2 + 1 - \alpha = 0,$$

segue que,

$$\begin{aligned}
I^1_{t_m} &\leq t_m^{2\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)}(1+\varepsilon)^2\frac{2^{2B}B^2}{A_\varepsilon^2}\frac{t_m^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}}\frac{1}{1-\alpha}\\
&= (1+\varepsilon)^2\frac{2^{2B}B^2}{A_\varepsilon^2}\frac{2^{-B}}{B}\\
&= (1+\varepsilon)^2\frac{2^B B}{A_\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

E portanto, pela definição de A_ε,

$$
\begin{aligned}
I^1_{t_m} &\leq (1+\varepsilon)^2 2^B B \cdot \frac{\frac{1}{B2^B(1+\varepsilon)^2}}{\left(\frac{1}{\omega_1}-2\varepsilon\right)} \\
&= \frac{1}{\omega_1} - 2\varepsilon. \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, por (3.40) e (3.41), concluímos que

$$\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla f_m(x)|)dx \leq \omega_1(I^1_{t_m} + I^2_{t_m} + I^3_{t_m}),$$

e assim, por (3.45), (3.52) e (3.55), temos

$$\int_{B_R(0)} \Phi_\alpha(|\nabla f_m(x)|)dx \leq 1,$$

mostrando que $f_m : B_R(0) \to \mathbb{R}$ está nas condições do teorema. Contudo, veja que pelo fato de $A_\varepsilon < K$, então para $t_m > 2$, suficientemente grande,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} \exp(|Kf_m(x)|^\gamma)dx &\geq \int_{B(0,Re^{-t_m/2})} \exp(|Kf_m(x)|^\gamma)dx \\
&= \exp\left(t_m\left(\frac{K}{A_\varepsilon}\right)^\gamma\right)|B(0,Re^{-t_m/2})| \\
&= \pi R^2 \exp(-t_m)\exp\left(t_m\left(\frac{K}{A_\varepsilon}\right)^\gamma\right) \\
&= \pi R^2 \exp\left(t_m\left(\left(\frac{K}{A_\varepsilon}\right)^\gamma - 1\right)\right) > m,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

Capítulo 4

Um problema de Dirichlet para o Φ_α-Laplaciano com crescimento crítico

Neste capítulo, teremos por objetivo central mostrar a existência de uma solução fraca não-trivial do seguinte problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_\alpha} u = f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado, $-\Delta_{\Phi_\alpha}$ é o operador Φ_α-Laplaciano definido no Capítulo 2 e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento crítico exponencial verificando algumas propriedades.

4.1 Sobre o problema

Como visto nos Capítulo 2, assumiremos que $\Phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, com $\alpha \in [0,1)$, é uma função de Young de classe C^1 verificando as seguintes condições:

(Φ_1) Existe $C > 0$ tal que

$$\frac{t^2}{C} \leq \Phi_\alpha(t) \leq Ct^2, \quad \forall t \in [0, 1/C);$$

(Φ_2) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_\alpha(t)}{t^2 log^\alpha t} = 1.$

A partir dessas condições, foi visto na Observação 2.5 que Φ_α verifica a seguinte desigualdade:

$$m_\alpha \leq \frac{\Phi'_\alpha(t)t}{\Phi_\alpha(t)} \leq c_\alpha, \quad t > 0, \tag{4.2}$$

onde $1 < m_\alpha \leq 2 \leq c_\alpha$.

Quanto à não-linearidade $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pedimos que seja contínua em $\Omega \times \mathbb{R}$ e que satisfaça as seguintes condições:

(f_1) $f(x,t) = 0$, $\forall t \leq 0$, e $tf(x,t) > 0$ para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$. Além disso, existem $\beta > 0$ e $C > 0$ tais que

$$f(x,t) \leq C \cdot \exp(\beta|t|^\gamma), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \Omega,$$

onde $\gamma = \dfrac{2}{1-\alpha}$;

(f_2) Sendo $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$, existe $\sigma > c_\alpha$ verificando

$$\sigma F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad \forall t \geq 0 \quad x \in \Omega;$$

(f_3) Pedimos que

$$\limsup_{t \to 0} \frac{F(x,t)}{C_\Phi \Phi_\alpha(t)} < 1 \quad \text{e} \quad \liminf_{t \to \infty} \frac{tf(x,t)}{\exp(\beta|t|^\gamma)} > 0,$$

uniformemente em Ω, onde $C_\Phi > 0$ é a melhor constante da Desigualdade de Poincaré (ver Proposição 1.31);

(f_4) Existem $M > 1$ e $t_M > 0$ tais que

$$F(x,t) \leq Mt^{1-\frac{1}{M}} f(x,t), \quad t > t_M.$$

Integrando a desigualdade de (f_2), é possível mostrar que

$$F(x,t) \geq at^\sigma - b, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.3}$$

para algum $a, b > 0$.

Gostaríamos de enfatizar que entendemos por solução fraca do problema (4.1), uma função $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u(x)|) \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \nabla v(x) dx - \int_\Omega f(x, u(x)) v(x) dx = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega). \tag{4.4}$$

Motivado por esta definição de solução, o funcional energia associado ao problema (4.1), $J : W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$, é dado por

$$J(u) = \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx - \int_\Omega F(x, u(x))dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega).$$

Note que, J está bem definido em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ e é um funcional de classe C^1 (para mais detalhes veja Proposição 2.11 e Lema $A.4$).

Para mostrar a existência de uma solução não trivial para o problema (4.1), usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha que pode ser encontrada no Apêndice A, Teorema $A.7$, o qual foi demonstrado em [3] por Ambrosetti e Rabinowitz. O leitor perceberá que usaremos apenas a primeira parte do teorema, ou seja, não mostraremos que o funcional energia J satisfaz a condição de Palais-Smale (ver Apêndice A, Definições $A.5$ e $A.6$).

4.2 Geometria do Passo da Montanha

Nessa seção, mostraremos que o funcional energia $J : W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfaz a geometria do passo da montanha.

Lema 4.1 *Existem $\rho > 0$, suficientemente pequeno, e $r = r(\rho) > 0$ tais que*

$$J(u) \geq r > 0, \quad \textit{para } |\nabla u|_{\Phi_\alpha} = \rho.$$

Demonstração. Pelas condições (f_1)-(f_3), dados $\varepsilon \in (0, 1)$ e $p > c_\alpha$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$F(x, t) \leq (1 - \varepsilon)C_\Phi \Phi_\alpha(t) + C_\varepsilon \exp(\beta|t|^\gamma)|t|^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, obtemos

$$F(x, t) \leq \frac{1}{2}C_\Phi \Phi_\alpha(t) + C \exp(\beta|t|^\gamma)|t|^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Deste fato, segue que

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx - \int_\Omega F(x, u(x))dx \\ &\geq \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx - \frac{1}{2}C_\Phi \int_\Omega \Phi_\alpha(|u(x)|)dx \\ &\quad -C \int_\Omega \exp(\beta|u(x)|^\gamma)|u(x)|^p dx, \end{aligned}$$

donde segue-se, pela Desigualdade de Poincaré (ver Proposição 1.31), que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx - C\int_\Omega \exp(\beta|u(x)|^\gamma)|u(x)|^p dx.$$

Agora, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx - C\left(\int_\Omega \exp(2\beta|u(x)|^\gamma)dx\right)^{1/2}|u|_{2p}^p \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx \\ &\quad -C\left(\int_\Omega \exp\left(2\beta|\nabla u(x)|_{\Phi_\alpha}^\gamma\left(\frac{|u(x)|}{|\nabla u(x)|_{\Phi_\alpha}}\right)^\gamma\right)dx\right)^{1/2}|u|_{2p}^p. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Lembrando que $B = 1-\alpha$ e $\omega_1 = 2\pi$, escolha $\rho > 0$ tal que

$$2\beta\rho^\gamma < 2B^{\gamma/2}\omega_1^{\gamma/2}.$$

Assim, pela Desigualdade de Trudinger-Moser (ver Teorema 3.6), existe $C = C(\alpha, |\Omega|, \rho) > 0$ tal que

$$\int_\Omega \exp\left(2\beta\rho^\gamma\left(\frac{|u|}{|\nabla u|_{\Phi_\alpha}}\right)^\gamma\right)dx \leq C, \quad \text{para } |\nabla u|_{\Phi_\alpha} = \rho. \tag{4.6}$$

Uma vez que $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ (ver Corolário 2.8), temos, de (4.5) e (4.6), para $\rho = |\nabla u|_{\Phi_\alpha} > 0$, suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx - C|u|_{2p}^p \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u(x)|)dx - C\rho^p. \end{aligned}$$

Neste caso, usando a Proposição 2.4, obtemos que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\xi_0(\rho) - C\rho^p \\ &= \frac{1}{2}\rho^{c_\alpha} - C\rho^p \\ &= \rho^{c_\alpha}\left(\frac{1}{2} - C\rho^{p-c_\alpha}\right) \\ &=: r > 0. \end{aligned}$$

para $|\nabla u|_{\Phi_\alpha} = \rho > 0$, suficientemente pequeno, como queríamos mostrar. ■

Lema 4.2 *Assuma que $\rho, r > 0$ são valores dados pelo Lema 4.1. Então, existe $e \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ com $|\nabla e|_{\Phi_\alpha} > \rho$, tal que*

$$J(e) < r.$$

Demonstração. Sejam $u_0 \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ e $t > 1$. Usando a Proposição 2.4 e a desigualdade (4.3), veja que

$$\begin{aligned} J(tu_0) &= \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla(tu_0(x))|)dx - \int_\Omega F(x, tu_0(x))dx \\ &\leq \xi_1(t)\xi_1(|\nabla u_0(x)|_{\Phi_\alpha}) - at^\sigma \int_\Omega |u_0|^\sigma dx + b|\Omega| \\ &=: C_1 t^{c_\alpha} - C_2 t^\sigma + C_3. \end{aligned}$$

Neste caso, uma vez que $\sigma > c_\alpha$, basta escolher $t > 1$, suficientemente grande, para que

$$J(tu_0) < 0.$$

Consequentemente, tomando $t_0 > 1$, suficientemente grande, e $e := t_0 u_0$, obtemos que

$$J(e) < 0 < r,$$

como queríamos mostrar. ■

Dos Lemas 4.1 e 4.2, podemos dizer que o funcional J satisfaz a geometria do passo da montanha. Por este fato, vai existir uma sequência $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ verificando

$$J(u_n) \longrightarrow c_J \quad \text{e} \quad J'(u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{em} \;\; (W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega))', \tag{4.7}$$

onde

$$c_J := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \tag{4.8}$$

e $\Gamma := \left\{\gamma \in C\left([0,1]; W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)\right) \; : \; \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\right\}$. Esta sequência é conhecida como sequência de Palais-Smale associado ao funcional J no nível c_J.

4.3 Estimativa superior do nível do passo da montanha

Aqui pretendemos obter uma estimativa superior para o nível do passo da montanha c_J definido em (4.8).

Lema 4.3 *Existe uma função não-trivial $u_0 \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ tal que*

$$J(\theta u_0) < \left(\frac{B^{1/2} 2^{1/\gamma} \omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2, \quad \forall \theta \in [0, \infty). \tag{4.9}$$

Demonstração. Tomando $w_k : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função radial dada pelo Lema $A.9$ (ver Apêndice A), verificaremos agora que para algum $k \in \mathbb{N}$,

$$J(\theta w_k) < \left(\frac{B^{1/2} 2^{1/\gamma} \omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}} \right)^2, \quad \forall \theta \in [0, \infty).$$

Para tanto, suponha por absurdo que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\sup\{J(\theta w_k) \ : \ \theta \in [0, \infty)\} \geq \left(\frac{B^{1/2} 2^{1/\gamma} \omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}} \right)^2.$$

Através da demonstração do Lema 4.2 é possível concluir que $J(\theta w_k) \overset{\theta \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$. E, tendo em vista que $J(\theta w_k) > 0$, para $\theta \approx 0^+$ (ver Lema 4.1), vai existir $\theta_k \in (0, +\infty)$ tal que

$$J(\theta_k w_k) = \max\{J(\theta w_k) \ : \ \theta \in [0, \infty)\}.$$

Desde que $F(x,t)$ é não-negativa em $\Omega \times \mathbb{R}$, segue-se

$$\int_\Omega F(x, \theta_k w_k) dx \geq 0,$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} \left(\frac{B^{1/2} 2^{1/\gamma} \omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}} \right)^2 &\leq \max\{J(\theta w_k) \ : \ \theta \in [0, \infty)\} \\ &= J(\theta_k w_k) \leq \int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k |\nabla w_k|) dx. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por outro lado, pelo Lema $A.9$, com $\theta = 1$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ temos

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla w_k|) dx \leq 1. \tag{4.11}$$

Agora, verificaremos as seguintes afirmações:

Afirmação 1: θ_k *é limitado inferiormente por* $c_0 > 0$.

Com efeito, usando a Proposição 2.4 temos de (4.10) e (4.11) para $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \xi_1(\theta_k) &\overset{(4.11)}{\geq} \xi_1(\theta_k) \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla w_k|) dx \\ &\geq \int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k |\nabla w_k|) dx \\ &\overset{(4.10)}{\geq} \left(\frac{B^{1/2} 2^{1/\gamma} \omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}} \right)^2. \end{aligned}$$

Logo, pela monotonicidade da função ξ_1,

$$\theta_k \geq \xi_1^{-1}\left(\left[\frac{B^{1/2}2^{1/\gamma}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right]^2\right) =: c_0 > 0, \quad k \geq k_0, \tag{4.12}$$

provando assim a Afirmação 1.

Fixe agora $x_0 \in \Omega$ e $R > 0$ tais que $B_R(x_0) \subset \Omega$. Sendo assim, pela condição (f_3), temos

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{tf(x,t)}{\exp(\beta|t|^\gamma)} = C > 0, \tag{4.13}$$

uniformemente em $\overline{B_R(x_0)}$.

Afirmação 2: *Existem $k_1 \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que*

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx \geq C\int_{A_k} \exp(\beta|\theta_k w_k|^\gamma)dx, \quad \forall k \geq k_1,$$

onde $A_k = B\left(x_0, Re^{-\frac{k}{2}}\right)$.

De fato, como $\dfrac{d}{d\theta}J(\theta w_k) = 0$ quando $\theta = \theta_k$, segue que

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)|\nabla w_k|dx = \int_\Omega w_k f(x,\theta_k w_k)dx. \tag{4.14}$$

Por (4.2) sabemos que

$$\frac{1}{c_\alpha}\Phi'_\alpha(t)t \leq \Phi_\alpha(t), \quad t > 0,$$

então,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx &\geq \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega \Phi'_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)\theta_k|\nabla w_k|dx \\
&\overset{(4.14)}{=} \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega \theta_k w_k f(x,\theta_k w_k)dx \\
&\geq \frac{1}{c_\alpha}\int_{A_k} \theta_k w_k f(x,\theta_k w_k)dx.
\end{aligned}$$

Além disso, segue de (4.13) que existe $k_1 > k_0$ tal que

$$\theta_k w_k f(x,\theta_k w_k) \geq C\exp(\beta|\theta_k w_k|^\gamma), \quad \forall k \geq k_1, \quad \text{em } A_k$$

E portanto,

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx \geq C\int_{A_k} \exp(\beta|\theta_k w_k|^\gamma)dx, \quad \forall k \geq k_1,$$

provando a Afirmação 2.

Afirmação 3: *Existem uma constante* $C = C(R, \omega_1) > 0$ *e* $k_1 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx \geq C(R,\omega_1)\exp\left[\frac{\beta\theta_k^\gamma}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}(k+\log k) - k\right], \quad k \geq k_1.$$

Primeiramente, segue da definição de w_k (veja Lema $A.9$), que

$$w_k(x) = \frac{k^{\frac{1}{\gamma}}}{2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}}\left(1+\frac{\log k}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad x \in A_k.$$

Sendo assim, pela Afirmação 2, para $k \geq k_1$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx &\geq C\int_{A_k}\exp\left[\beta\theta_k^\gamma\left(\frac{k^{\frac{1}{\gamma}}}{2^{1/\gamma}B^{1/2}\omega_1^{1/2}}\left(1+\frac{\log k}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^\gamma\right]dx \\
&= C\int_{A_k}\exp\left[\beta\theta_k^\gamma\left(\frac{k}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}\left(1+\frac{\log k}{k}\right)\right)\right]dx \\
&= C\int_{A_k}\exp\left(\frac{\beta k\theta_k^\gamma}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}+\frac{\beta\theta_k^\gamma\log k}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}\right)dx \\
&= C\exp\left[\frac{\beta\theta_k^\gamma}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}(k+\log k)\right]|A_k|,
\end{aligned}$$

aqui estamos usando o fato de $\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{B}$. E, observando que $|A_k| = \pi R^2 e^{-k}$, obtemos

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx \geq C(R,\omega_1)\exp\left[\frac{\beta\theta_k^\gamma}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}(k+\log k) - k\right], \quad k \geq k_1, \tag{4.15}$$

provando a Afirmação 3.

Afirmação 4: θ_k *é limitado superiormente.*

Com efeito, suponha por contradição que $\theta_k \to +\infty$. Neste caso, segue da Afirmação 3 e Proposição 2.4 que

$$\begin{aligned}
\theta_k^{c_\alpha} = \xi_1(\theta_k) &\overset{(4.11)}{\geq} \int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx \\
&\geq C(R,\omega_1)\exp\left(\left[\frac{\beta}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}\theta_k^\gamma - 1\right]k\right) \\
&= C(R,\omega_1)\exp\left(\left[\frac{\beta}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}} - \frac{1}{\theta_k^\gamma}\right]\theta_k^\gamma k\right) \\
&\geq C(R,\omega_1)\exp(C(B,\omega_1,\beta)\theta_k^\gamma),
\end{aligned}$$

para k suficientemente grande, o que é uma contradição. Provando que θ_k deve ser limitado superiormente.

Das Afirmações 1 e 4, vai existir $\theta_0 \geq 1$ tal que $\theta_k \in [c_0, \theta_0]$. Sendo assim, usando o Lema $A.9$, existe $k_2 \geq k_1$ tal que

$$\theta_k^2 \geq \int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx \overset{(4.10)}{\geq} \left(\frac{B^{1/2}2^{1/\gamma}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2,$$

donde segue que,

$$\theta_k \geq \left(\frac{B^{1/2}2^{1/\gamma}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right), \quad k \geq k_2. \tag{4.16}$$

Agora, usando o fato de $\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{B}$ e novamente o Lema $A.9$, temos

$$\begin{aligned}
\theta_0^2 \geq \theta_k^2 \quad &\geq \quad \int_\Omega \Phi_\alpha(\theta_k|\nabla w_k|)dx \\
&\overset{(4.15)}{\geq} \quad C(R,\omega_1)\exp\left[\frac{\beta\theta_k^\gamma}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}(k+\log k) - k\right] \\
&\overset{(4.16)}{\geq} \quad C(R,\omega_1)\exp\left[\frac{\beta}{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}\frac{2B^{1/B}\omega_1^{1/B}}{\beta}(k+\log k) - k\right] \\
&= \quad C(R,\omega_1)k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,
\end{aligned}$$

uma contradição. Mostrando assim que

$$J(\theta w) < \left(\frac{B^{1/2}2^{1/\gamma}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2, \quad \forall \theta \in [0,\infty). \quad \blacksquare$$

Corolário 4.4 *Assumindo que c_J é o nível minimax do passo da montanha (ver (4.8)), então*

$$0 < c_J < \left(\frac{B^{1/2}2^{1/\gamma}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2.$$

4.4 Sequência Palais-Smale

Nessa seção, vamos trabalhar com algumas propriedades da sequência Palais-Smale $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ dada em (4.7). O objetivo central é mostrar que $\{u_n\}$ contém uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de modo que $\{\nabla u_{n_k}(x)\}_k$ converge para $\nabla u(x)$ q.t.p. em Ω para alguma função $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$.

Lema 4.5 *Existe uma constante $C > 0$, que não depende de $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \leq C, \quad \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx \leq C, \tag{4.17}$$

e

$$0 \leq \int_\Omega f(x, u_n)u_n dx \leq C. \tag{4.18}$$

Demonstração. A fim de demonstrarmos este lema, verificaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 1: *Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left(1 - \frac{c_\alpha}{\sigma}\right)\xi_0(|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}) \leq c_J + \varepsilon + \varepsilon|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}, \quad n \geq n_0.$$

Com efeito, fixando $\sigma > c_\alpha$ verificando a condição (f_2), observe que

$$\begin{aligned}
J(u_n) - \frac{1}{\sigma}J'(u_n)(u_n) &= \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx - \int_\Omega F(x, u_n)dx \\
&\quad -\frac{1}{\sigma}\left[\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|dx - \int_\Omega f(x, u_n)u_n dx\right] \\
&\overset{(4.2)}{\geq} \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx - \int_\Omega F(x, u_n)dx \\
&\quad -\frac{c_\alpha}{\sigma}\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx + \frac{1}{\sigma}\int_\Omega f(x, u_n)u_n dx, \\
&\overset{(f_2)}{\geq} \left(1 - \frac{c_\alpha}{\sigma}\right)\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma, usando a Proposição 2.4,

$$\begin{aligned}
J(u_n) - \frac{1}{\sigma}J'(u_n)(u_n) &\geq \left(1 - \frac{c_\alpha}{\sigma}\right)\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx \\
&\geq \left(1 - \frac{c_\alpha}{\sigma}\right)\xi_0(|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|J(u_n)| \leq c_J + \varepsilon \quad \text{e} \quad ||J'(u_n)||_* \leq \varepsilon\sigma, \quad n \geq n_0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
J(u_n) - \frac{1}{\sigma}J'(u_n)(u_n) &\leq |J(u_n)| + \frac{1}{\sigma}|J'(u_n)(u_n)| \\
&\leq c_J + \varepsilon + \frac{1}{\sigma}||J'(u_n)||_* \, |\nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \\
&\leq c_J + \varepsilon + \varepsilon|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}, \quad n \geq n_0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Combinando (4.19) e (4.20), obtemos

$$\left(1-\frac{c_\alpha}{\sigma}\right)\xi_0(|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}) \leq c_J+\varepsilon+\varepsilon|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}, \quad n\geq n_0, \tag{4.21}$$

mostrando assim a Afirmação 1.

Agora suponha por absurdo que $|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}\to+\infty$. Assim, deve existir $n_1>n_0$ tal que $|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}>1$, para todo $n\geq n_1$. Dessa forma, de (4.21)

$$\left(1-\frac{c_\alpha}{\sigma}\right)|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}^{m_\alpha} \leq c_J+\varepsilon+\varepsilon|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha},$$

o que é um absurdo, pois $m_\alpha>1$. Portanto, existe $C>0$, tal que

$$|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}\leq C, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Além disso, segue da Proposição 1.8 (a) que

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx\leq C, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Por fim, usando a condição (f_1), sabemos que $f(x,u_n)u_n\geq 0$, e assim

$$\begin{aligned}0\leq \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx &\leq c_\alpha\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx - J'(u_n)(u_n)\\ &\leq c_\alpha C+||J'(u_n)||_*|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha}\\ &\leq C, \quad \forall\, n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Pelo Lema 4.5, usando o fato de $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ ser reflexivo, segue das imersões de Orlicz-Sobolev que existe $u\in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ (passando a uma subsequência de $\{u_n\}$, se necessário) tal que

$$\left.\begin{array}{lr} u_n \rightharpoonup u & \text{em} \quad W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega);\\ u_n \longrightarrow u & \text{em} \quad L^p(\Omega), \forall p\in[1,\infty);\\ u_n \longrightarrow u & \text{em} \quad L_{\Phi_\alpha}(\Omega);\\ u_n \longrightarrow u & \text{q.t.p. em} \quad \Omega.\end{array}\right. \tag{4.22}$$

Proposição 4.6 *Sendo $\{u_n\}$ a sequência Palais-Smale dada por* (4.22)*, temos:*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(x,u_n)dx=\int_\Omega f(x,u)dx.$$

Demonstração. Pela condição (f_1) existem $\beta > 0$ e $C_1 > 0$ tais que

$$f(x,t) \leq C_1 \exp(\beta |t|^\gamma), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \Omega. \tag{4.23}$$

Além disso, pelo Teorema 3.5, para qualquer $K \geq 0$,

$$\int_\Omega \exp(K|u(x)|^\gamma) dx < \infty.$$

Sendo assim, $f(x,u), f(x,u_n) \in L^1(\Omega)$ e pelo Teorema $A.11$ (ver Apêndice A), para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_A f(x,u) dx \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{se} \quad |A| \leq \delta, \tag{4.24}$$

para subconjuntos $A \subset \Omega$ mensuráveis. Agora, sabendo que $u \in L^1(\Omega)$, pelo Teorema $A.12$ (ver Apêndice A), podemos encontrar $M_\delta > 0$, suficientemente grande, tal que

$$|\{x \in \Omega \, : \, |u(x)| \geq M_\delta\}| \leq \delta. \tag{4.25}$$

Considerando $M := \max\{M_\delta, 3C/\varepsilon\}$, onde $C > 0$ é dado em (4.18), podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f(x,u_n)dx - \int_\Omega f(x,u)dx \right| &= \left| \int_{[|u_n| \geq M]} f(x,u_n)dx + \int_{[|u_n| < M]} f(x,u_n)dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{[|u| \geq M]} f(x,u)dx - \int_{[|u| < M]} f(x,u)dx \right|. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left| \int_\Omega f(x,u_n)dx - \int_\Omega f(x,u)dx \right| \leq I_n^1 + I^2 + I_n^3,$$

onde

$$I_n^1 := \int_{[|u_n| \geq M]} f(x,u_n)dx, \quad I^2 := \int_{[|u| \geq M]} f(x,u)dx$$

e

$$I_n^3 := \left| \int_{[|u_n| < M]} f(x,u_n)dx - \int_{[|u| < M]} f(x,u)dx \right|.$$

Avaliemos agora cada integral separadamente. Observe que

$$\begin{aligned} I_n^1 &= \int_{[|u_n| \geq M]} f(x,u_n)dx \\ &= \int_{[|u_n| \geq M]} \frac{f(x,u_n)|u_n|}{|u_n|} dx \\ &\leq \frac{1}{M} \int_\Omega f(x,u_n) u_n dx, \end{aligned}$$

donde segue-se do Lema 4.5, que

$$I_n^1 = \int_{[|u_n|\geq M]} \frac{f(x,u_n)|u_n|}{|u_n|} dx \leq \frac{C}{M} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.26}$$

Agora, para I^2 basta combinar (4.24) e (4.25) e assim

$$I^2 = \int_{[|u|\geq M]} f(x,u)dx \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.27}$$

Por fim, para I_n^3 defina para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ dado por

$$g_n(x) = f(x,u_n)\chi_{[|u_n|<M]} - f(x,u)\chi_{[|u|<M]}, \quad x \in \Omega.$$

Observe que,

$$g_n(x) \to 0 \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega,$$

pois $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $x \in \Omega$. Além disso,

$$|g_n(x)| \leq \begin{cases} f(x,u), & \text{se} \quad x \in [|u_n| \geq M]; \\ C + f(x,u), & \text{se} \quad x \in [|u_n| < M], \end{cases}$$

onde $C = \sup\{f(x,t) : x \in \Omega,\ |t| < M\}$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$I_n^3 = \left| \int_{[|u_n|<M]} f(x,u_n)dx - \int_{[|u|<M]} f(x,u)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4.28}$$

para n suficientemente grande. De (4.26)-(4.28),

$$\left| \int_\Omega f(x,u_n)dx - \int_\Omega f(x,u)dx \right| \leq \varepsilon,$$

para n suficientemente grande, como queríamos demonstrar. ■

Proposição 4.7 *Sob as mesmas hipóteses da Proposição* 4.6*, temos*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx = \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Demonstração. Usando o mesmo argumento da Proposição 4.6 podemos mostrar que em verdade

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x,u_n)|u_n|^b dx = \int_\Omega f(x,u)|u|^b dx, \quad b \in [0,1).$$

Dessa forma, se tomarmos $b = 1 - \frac{1}{M}$, onde $M > 1$ é dado na condição (f_4), obtemos também

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(x,u_n)|u_n|^{1-\frac{1}{M}}dx = \int_\Omega f(x,u)|u|^{1-\frac{1}{M}}dx.$$

Lembrando que pela condição (f_4)

$$F(x,u_n) \leq M|u_n|^{1-\frac{1}{M}}|f(x,u_n)|,$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizada (ver Teorema $A.10$, Apêndice A) que,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega F(x,u_n)dx = \int_\Omega F(x,u)dx. \quad \blacksquare$$

Lema 4.8 *Sejam* $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ *e* $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ *dados em* (4.22). *Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ *com*

$$|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| < \varepsilon,$$

tal que,

$$I_n^\varepsilon := \int_{\Omega_\varepsilon}\left(\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} - \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)(\nabla u_n - \nabla u)dx \longrightarrow 0,$$

quando $n \to +\infty$, *a menos de subsequência.*

Demonstração. Observe primeiramente que, pelas Proposições 4.5 e $C.5$ (ver Apêndice C), passando a subsequência, se necessário, podemos supor que

$$\Phi_\alpha(|\nabla u_n|) \overset{\star}{\rightharpoonup} \mu, \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega), \tag{4.29}$$

quando $n \to +\infty$. Além disso, pela Proposição 1.16 (iii), vemos que

$$w_n := \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}$$

é limitado em $L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Usando a reflexividade do espaço (ver Teorema 1.23 e Lema 2.1), podemos supor que existe $w \in L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ tal que

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{em } L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega).$$

Agora, para melhor entendimento da demonstração, seguiremos as seguintes etapas:

1ª Etapa (Escolha de Ω_ε***):*** Fixe $\varepsilon > 0$. Pela Proposição 3.8, podemos escolher $\tau > 0$ tão pequeno tal que, para todo $B_{2R}(x) \subset \Omega$, se $|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha, B_R(x)} < \tau$, então

$$\int_{B_R(x)} \exp(2\beta|u_n|^\gamma)dx \leq C. \tag{4.30}$$

Além disso, pela Proposição 1.14, existe $\delta > 0$ tal que para cada $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, temos

$$\int_{\tilde{\Omega}} \Phi_\alpha(|v|)dx < \delta \Longrightarrow |v|_{\Phi_\alpha,\tilde{\Omega}} < \tau. \tag{4.31}$$

Agora, defina o conjunto $A_\delta = \{z \in \overline{\Omega} \ : \ \mu(z) \geq \delta\}$. Desde que $|\mu|\left(\overline{\Omega}\right) < \infty$ (ver Definição $C.1$), vemos que A_δ é finito, isto é,

$$A_\delta = \{z_i\}_{i=1}^m,$$

pois caso contrário teríamos uma sequência $\{z_n\} \subset A_\delta$ e assim,

$$\mu(A_\delta) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{z_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(z_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\delta = +\infty,$$

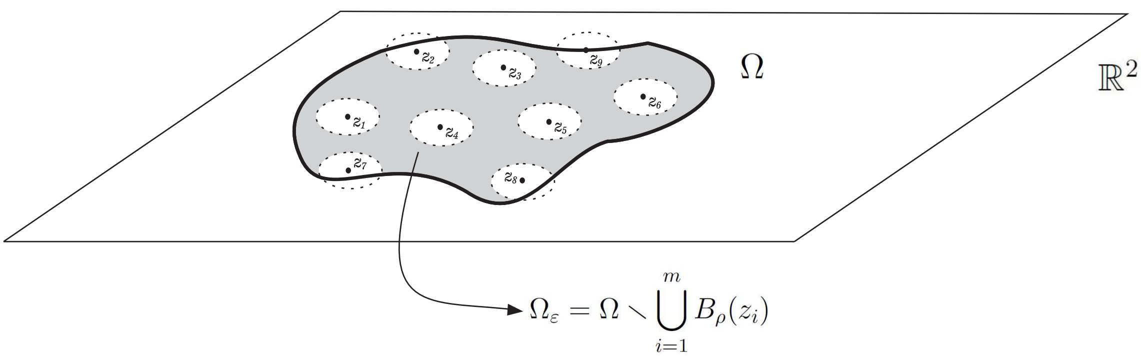
o que é um absurdo. Dessa forma, escolha $\rho > 0$ tal que $B_\rho(z_i) \cap B_\rho(z_j) = \varnothing$, para $i \neq j$, e

$$\sum_{i=1}^{m}|B_\rho(z_i)| < \varepsilon.$$

Vamos definir também

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_\rho(z_i), \quad \text{e} \quad B_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{m}\left(B_{\frac{\rho}{2}}(z_i) \cap \Omega\right).$$

Geometricamente, temos



Veja que,

$$|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} B_\rho(z_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{m}|B_\rho(z_i)| < \varepsilon.$$

Por fim, tome $\psi_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$, com $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$ em $\overline{\Omega}$, da seguinte forma

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, \text{se } \ x \in \overline{\Omega_\varepsilon}; \\ 0, \text{se } \ x \in \overline{B_\varepsilon}. \end{cases}$$

*2ª **Etapa (Decompor a integral)***: Sendo $\{u_n\}$ uma sequência de Palais-Smale, dado $v \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, temos

$$|J'(u_n)(v)| = \left| \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u_n) v dx \right| \leq \varepsilon_n \mid \nabla v \mid_{\Phi_\alpha}, \tag{4.32}$$

onde $\varepsilon_n \to 0$, quando $n \to 0$. Dessa forma, tomando $v = \psi_\varepsilon u_n$, temos

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla(\psi_\varepsilon u_n) dx - \int_\Omega f(x,u_n) \psi_\varepsilon u_n dx \leq \varepsilon_n |\nabla(\psi_\varepsilon u_n)|_{\Phi_\alpha},$$

donde segue, usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| \psi_\varepsilon dx \quad \leq \quad & \int_\Omega \left(-u_n \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon f(x,u_n) u_n \right) dx \\ & + \varepsilon_n |\nabla(\psi_\varepsilon u_n)|_{\Phi_\alpha}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

analogamente, tomando agora $v = \psi_\varepsilon u$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \psi_\varepsilon \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla u dx \quad \leq \quad & \int_\Omega \left(u \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon f(x,u_n) u \right) dx \\ & + \varepsilon_n |\nabla(\psi_\varepsilon u)|_{\Phi_\alpha}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Observe agora que,

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad I_n^\varepsilon = & \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} - \Phi'_\alpha(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) (\nabla u_n - \nabla u) \psi_\varepsilon dx \\ \leq \quad & \int_\Omega \left(\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} - \Phi'_\alpha(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) (\nabla u_n - \nabla u) \psi_\varepsilon dx \\ = \quad & \int_\Omega \Bigg(\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| \psi_\varepsilon - \Phi'_\alpha(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \psi_\varepsilon \nabla u_n \\ & - \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \psi_\varepsilon \nabla u + \Phi'_\alpha(|\nabla u|)|\nabla u| \psi_\varepsilon \Bigg) dx \\ = \quad & \int_\Omega \Bigg(\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| \psi_\varepsilon - \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \psi_\varepsilon \nabla u \\ & + \psi_\varepsilon \Phi'_\alpha(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} (\nabla u - \nabla u_n) \Bigg) dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, por (4.33) e (4.34), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \le I_n^\varepsilon \;\; &\le \int_\Omega \left(-u_n \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon f(x,u_n) u_n \right) dx + \varepsilon_n |\nabla(\psi_\varepsilon u_n)|_{\Phi_\alpha} \\
&+ \int_\Omega \left(u \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon f(x,u_n) u \right) dx + \varepsilon_n |\nabla(\psi_\varepsilon u)|_{\Phi_\alpha} \\
&+ \int_\Omega \left(\psi_\varepsilon \Phi'_\alpha(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} (\nabla u - \nabla u_n) \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla \psi_\varepsilon (u - u_n) \right) dx + \int_\Omega \left(\psi_\varepsilon \Phi'_\alpha(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} (\nabla u - \nabla u_n) \right) dx \\
&+ \int_\Omega \psi_\varepsilon f(x,u_n)(u_n - u) dx + \varepsilon_n |\nabla(\psi_\varepsilon u_n)|_{\Phi_\alpha} + \varepsilon_n |\nabla(\psi_\varepsilon u)|_{\Phi_\alpha} \\
&= I_1^n + I_2^n + I_3^n + I_4^n + I_5^n. \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

Analisemos cada I_j^n separadamente.

3ª Etapa (Estimativa de I_1^n):

Como já sabemos $\{w_n\}$ é uma sequência limitada em $L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega)$. Sendo assim, usando a desigualdade de Hölder (ver Proposição 1.22) e (4.22), temos

$$
\begin{aligned}
|I_1^n| &\le \int_\Omega \left| \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|) \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \nabla \psi_\varepsilon (u - u_n) \right| dx \\
&\le 2 |w_n|_{\tilde{\Phi}_\alpha} |u_n - u|_{\Phi_\alpha} \max_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla \psi_\varepsilon| \to 0. \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

4ª Etapa (Estimativa de I_2^n): Tendo em vista que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ (ver Lema 4.5), tem-se

$$
\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \text{em} \quad L_{\Phi_\alpha}(\Omega), \quad i = 1, 2.
$$

Dessa forma, lembrando que $(L_{\Phi_\alpha}(\Omega))' = L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega)$ (ver Teorema 1.23), segue do Teorema 2.6 que,

$$
\int_\Omega \psi_\varepsilon \Phi'_\alpha(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \longrightarrow 0, \quad i = 1, 2,
$$

donde segue-se que

$$
I_2^n = \int_\Omega \psi_\varepsilon \Phi'_\alpha(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} (\nabla u_n - \nabla u) dx \longrightarrow 0. \qquad (4.37)
$$

5ª Etapa (Estimativa de I_4^n e I_5^n): Usando as Proposições 1.29 e 4.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\nabla(u_n \psi_\varepsilon)|_{\Phi_\alpha} &= |u_n \nabla \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon \nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \\
&\le |u_n \nabla \psi_\varepsilon|_{\Phi_\alpha} + |\psi_\varepsilon \nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \\
&\le K_0 \max_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla \psi_\varepsilon(x)| |\nabla u_n|_{\Phi_\alpha} + \max_{x \in \overline{\Omega}} |\psi_\varepsilon(x)| |\nabla u_n|_{\Phi_\alpha} \\
&\le C,
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, sabendo que $\varepsilon_n \to 0$, quando $n \to +\infty$, temos

$$I_4^n + I_5^n = \varepsilon_n(|\nabla(u_n\psi_\varepsilon)|_{\Phi_\alpha} + |\nabla(u\psi_\varepsilon)|_{\Phi_\alpha}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.38}$$

6ª Etapa (Estimativa de I_3^n): Primeiro, vejamos que existe $C > 0$, independe de n, tal que para $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, temos

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon} f(x, u_n)^2 dx \le C.$$

De fato, fixe $x \in \overline{\Omega} \setminus A_\delta$, sendo assim, existe $r_x > 0$ tal que,

$$\mu(B_{r_x}(x) \cap \overline{\Omega}) < \delta.$$

Considere a função teste $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, com $0 \le \varphi \le 1$ em $\overline{\Omega}$, tal que

$$\varphi_(x) = \begin{cases} 0, \text{se } \ x \in \overline{\Omega} \setminus B_{r_x}(x); \\ 1, \text{se } \ x \in B_{\frac{r_x}{2}}(x) \cap \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Logo, por (4.29),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)\varphi dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu &= \int_{B_{\frac{r_x}{2}}(x)\cap\overline{\Omega}} \varphi d\mu \\ &= \mu\left(B_{\frac{r_x}{2}}(x) \cap \overline{\Omega}\right) < \delta. \end{aligned}$$

Portanto, para $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande,

$$\int_{B_{\frac{r_x}{2}}(x)\cap\overline{\Omega}} \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx \le \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)\varphi dx < \delta,$$

donde segue-se de (4.31), que

$$|\nabla u_n|_{\Phi_\alpha, B_{\frac{r_x}{2}}(x)\cap\overline{\Omega}} < \tau.$$

Agora, combinando (f_1) e (4.30),

$$\int_{B_{\frac{r_x}{2}}(x)\cap\overline{\Omega}} f(x, u_n)^2 dx \le \int_{B_{\frac{r_x}{2}}(x)\cap\overline{\Omega}} C \exp(2\beta|u_n|^\gamma)dx \le C. \tag{4.39}$$

Desde que $\overline{\Omega} \setminus B_\varepsilon$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^2$, podemos tomar $x_1, ..., x_k \in \overline{\Omega} \setminus A_\delta$, tais que

$$\overline{\Omega} \setminus B_\varepsilon \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{\frac{r_x}{2}}(x_j),$$

e, assim, aplicando (4.39) a cada $B_{\frac{r_x}{2}}(x_j)$, $j = 1, ..., k$, obtemos

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon} f(x, u_n)^2 dx \leq C.$$

Dessa forma, para estimar I_3^n, basta usar Hölder e (4.22) para que

$$\begin{aligned} |I_3^n| &= \int_\Omega \psi_\varepsilon f(x, u_n)|u_n - u|dx \\ &\leq \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon} |f(x, u_n)||u_n - u|dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon} f(x, u_n)^2\right)^{1/2} |u_n - u|_2 \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

7ª Etapa (Finalização): Haja vista (4.35)-(4.38) e (4.40), temos

$$I_n^\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} - \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)(\nabla u_n - \nabla u)dx \longrightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Proposição 4.9 *Nas condições do Lema* 4.8*, passando a subsequência, temos*

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad q.t.p. \ em \quad \Omega.$$

Demonstração. Defina $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$\beta(x) = \Phi'_\alpha(|\nabla x|)\frac{\nabla x}{|\nabla x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Pela Proposição 2.3, sabemos que β é um operador estritamente monotônico (ver Definição A.1). Combinando os Lemas 4.8 e A.2 (veja Apêndice A), podemos concluir,

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x), \quad \text{q.t.p.,} \quad x \in \Omega_\varepsilon,$$

a menos de subsequência. Tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, e fazendo $m \to +\infty$, obtemos que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x), \quad \text{q.t.p.,} \quad x \in \Omega. \quad \blacksquare$$

4.5 Solução do Problema

Verificaremos através do teorema a seguir que a função limite $u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, da sequência de Palais-Smale $\{u_n\}$ no nível c_J, é uma solução positiva para o problema de Dirichlet (4.1).

Teorema 4.10 *Sejam $\alpha \in [0,1)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira regular. Suponha Φ_α uma função de Young satisfazendo (Φ_1) e (Φ_2). Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função verificando $(f_1) - (f_4)$, então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_\alpha} u = f(x,u) \quad em \ \Omega; \\ u = 0 \ \ em \ \partial\Omega. \end{cases}$$

possui uma solução fraca não-trivial e não-negativa. Ademais, se $u \in C^1(\Omega)$, então $u(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$.

Demonstração. Para mostrar que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca, devemos provar que

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u(x)|)\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega). \tag{4.41}$$

Para tanto, mostraremos primeiramente que para todo $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u(x)|)\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\nabla \psi(x)dx - \int_\Omega f(x,u(x))\psi(x)dx = 0. \tag{4.42}$$

Afirmação 1: *Temos,*

$$\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \rightharpoonup \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \quad em \quad L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^2),$$

quando $n \to +\infty$.

De fato, assim como fizemos na demonstração do Lema 4.8, se tomarmos a sequência

$$w_n := \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

existe $w \in L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, tal que

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Além disso, já sabemos pela Proposição 4.9 que $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p. em Ω, a menos de subsequência, donde segue da continuidade de Φ'_α que

$$\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \longrightarrow \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Dessa forma, pelo Teorema de Brezis-Lieb (ver Teorema 1.24), temos

$$\Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \rightharpoonup \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad \text{em} \quad L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^2),$$

quando $n \to +\infty$, mostrando assim a Afirmação 1.

Da Afirmação 1, dado $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}\nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\nabla\psi dx. \tag{4.43}$$

Agora, pela Proposição 4.6 e sendo ψ limitado em Ω, temos

$$\int_\Omega f(x,u_n)\psi dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u)\psi dx, \quad \text{para } n \to +\infty. \tag{4.44}$$

Destes fatos, uma vez que

$$o_n(1) = J'(u_n)(\psi) = \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}\nabla\psi dx - \int_\Omega f(x,u_n)\psi dx,$$

e passando ao limite de $n \to +\infty$, temos de (4.43) e (4.44)

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\nabla\psi dx - \int_\Omega f(x,u)\psi dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.45}$$

mostrando (4.42). Agora vamos usar a densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ (ver Definição 1.28) para mostrar (4.41). De fato, dado $v \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, existe $\{\psi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\psi_k \longrightarrow v, \quad \text{em } W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f(x,u)v dx - \int_\Omega f(x,u)\psi_k dx\right| &\leq \int_\Omega |f(x,u)v - f(x,u)\psi_k| dx \\
&= \int_\Omega |f(x,u)(v-\psi_k)| dx \\
&\overset{(f_1)}{\leq} \int_\Omega |C\exp(\beta|u|^\gamma)|\,|v-\psi_k| dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} |C\exp(2\beta|u|^\gamma)|_2\,|v-\psi_k|_2 \\
&\leq C|\nabla(v-\psi_k)|_{\Phi_\alpha} \longrightarrow 0, \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

quando $k \to +\infty$. Por fim, como $\psi_k \to v$ em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$, usando novamente a reflexividade do espaço $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$, podemos ver que

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad L_{\Phi_\alpha}(\Omega),$$

donde segue da dualidade dos espaços $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$ e $L_{\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega)$, que

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot(\nabla v - \nabla\psi_k) dx \longrightarrow 0, \tag{4.47}$$

quando $k \to +\infty$. De (4.45)-(4.47), podemos concluir

$$\int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u(x)|)\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx = 0, \ \ \forall v \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega),$$

mostrando que u é uma solução fraca do problema (4.1).

Verificaremos agora que esta solução é não-trivial. Para tanto, suponha por absurdo que $u \equiv 0$. Daí, segue da Proposição 4.7 que

$$\begin{aligned} c_J &= \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx, \end{aligned} \tag{4.48}$$

pois $F(x,0)=0$, para todo $x \in \Omega$. Agora usando o Corolário 4.4, vai existir $c > c_J$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tais que

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx \le c < \left(\frac{B^{1/2}2^{1/\gamma}\omega_1^{1/2}}{\beta^{1/\gamma}}\right)^2, \quad \forall n \ge n_0.$$

Sendo assim, usando a condição (f_1) e o Teorema 3.7, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx &\le C\int_\Omega \exp(\beta|u_n|^\gamma)u_n dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} C\left(\int_\Omega \exp(q\beta|u_n|^\gamma)dx\right)^{1/q}|u_n|_{q'} \\ &\le C|u_n|^{q'} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$ (aqui estamos usando o fato de $u_n \to 0$ em $L^{q'}(\Omega)$, onde $q > 1$ é o expoente dado pelo Teorema 3.7). Neste caso, passando ao limite de $n \to +\infty$ em

$$o_n(1) = J'(u_n)(u_n) = \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|dx + \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx,$$

temos,

$$m_\alpha\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx \le \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|dx \longrightarrow 0,$$

quando $n \to +\infty$ e, portanto,

$$\int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u_n|)dx \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Segue de (4.48) que $c_J = 0$, contradizendo o fato de $c_J > 0$ (ver Corolário 4.4). Logo, u é solução não-trivial.

Vamos agora provar que esta solução é não-negativa. Considere u^- a parte negativa de u (veja Notações). Sendo assim,

$$\begin{aligned}
0 = J'(u)(u^-) &= \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\nabla u^- dx - \int_\Omega f(x,u)(u^-)dx \\
&= \int_\Omega \Phi'_\alpha(|\nabla u|)|\nabla u^-|dx \\
&\overset{(4.2)}{\geq} m_\alpha \int_\Omega \Phi_\alpha(|\nabla u^-|)dx.
\end{aligned}$$

Segue da Proposição 2.4, que

$$m_\alpha \xi_0(|\nabla u^-|_{\Phi_\alpha}) \leq 0,$$

logo, $u^- \equiv 0$, e consequentemente,

$$u(x) = u^+(x) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Por fim, supondo que $u \in C^1(\Omega)$, verificaremos que u é estritamente positiva em Ω. Para tanto, sendo u solução não-negativa do problema (4.1), segue da condição (f_1) que

$$-div\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \geq 0.$$

Deste modo, usando o Teorema 2.14, concluímos que $u > 0$ em Ω. ■

Apêndice A

Resultados Gerais

Definição A.1 *Sejam X um espaço de Banach e $T : X \to X$ um operador. Dizemos que T é estritamente monotônico se*

$$\langle T(|x|)x - T(|y|)y, x - y\rangle > 0, \quad x \neq y.$$

Lema A.2 *(Ver [7]) Sejam N um número inteiro, maior que 1, $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um operador estritamente monotônico e $(v_n) \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência verificando*

$$(\beta(v_n) - \beta(v))(v_n - v) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad em\ \mathbb{R}$$

para algum $v \in \mathbb{R}^N$. Então,

$$v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v, \quad em\, \mathbb{R}^N.$$

Lema A.3 *(Ver [29]) Seja $(X, ||\cdot||)$ um espaço normado e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional verificando,*

(i) $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} : X \to \mathbb{R}$ *existe para todo $u \in X$;*

(ii) $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} \in X'$ *para todo $u \in X$;*

(iii) Se $u_n \to u$ em X, então

$$\frac{\partial I(u_n)}{\partial(\cdot)} \to \frac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)}, \quad em \quad X'.$$

Então, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com

$$I'(u)(v) = \frac{\partial I(u)}{\partial(v)}, \quad \forall u, v \in X.$$

Lema A.4 *Definindo o funcional*

$$I(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega),$$

onde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$, *então* $I \in C^1(W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega), \mathbb{R})$ *e*

$$I'(u)(v) = \int_\Omega f(x,u)vdx \quad u,v \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega).$$

Demonstração. Para mostrarmos esse resultado, usaremos o Lema $A.3$. Inicialmente comecemos mostrando que I é Gateaux diferenciável em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$.Podemos ver que pontualmente

$$\lim_{t\to 0^+} \left| \frac{F(x,u(x)+tv(x)) - F(x,u(x))}{t} \right| = f(x,u(x))v(x), \quad x \in \Omega.$$

Assim, definindo

$$h_t(x) := \frac{F(x,u(x)+tv) - F(x,u(x))}{t}, \quad x \in \Omega,$$

segue do Teorema do Valor Médio que para cada $x \in \Omega$, exite $\theta_t \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} \right| &= |f(x,u+\theta_t v)|\,|v| \\ &\overset{(f_1)}{\leq} C\exp(\beta[|u|+|v|]^\gamma)|v| \\ &\leq C(\exp(\beta 2^\gamma |u|^\gamma) + \exp(\beta 2^\gamma |v|^\gamma))|v|. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.7 sabemos que $v \in L^2(\Omega)$, dessa forma aplicando a Desigualdade de Holder e usando o Teorema 3.6, vemos que h_t é dominada por uma função integrável. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\frac{\partial I}{\partial v}(u) = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(x,u(x)+tv) - F(x,u(x))}{t} dx = \int_\Omega f(x,u)vdx.$$

Mostremos agora a continuidade de

$$\frac{\partial I}{\partial(\cdot)} : W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \longrightarrow W_0^{-1,\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega).$$

Para isto, assuma que

$$u_n \to u \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega).$$

Pela Proposição 2.10, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω e tomar $h \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em Ω e $n \in \mathbb{N}$. Veja que pelo Teorema 3.6,

$$\int_\Omega |f(x,u_n)|^2 dx \overset{(f_1)}{\leq} C\int_\Omega \exp(2\beta|u_n|^\gamma)dx$$

$$\leq C\int_\Omega \exp(2\beta|h|^\gamma)dx < \infty.$$

A limitação em $L^2(\Omega)$ e a convergência pontual q.t.p. implica pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que,

$$f(x,u_n) \longrightarrow f(x,u) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Agora, lembremos que

$$\left\|\frac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u_n) - \frac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u)\right\|_* = \sup_{|\nabla v|_{\Phi_\alpha}\leq 1}\left|\frac{\partial I}{\partial(v)}(u_n) - \frac{\partial I}{\partial(v)}(u)\right|.$$

Sendo assim, sabendo que $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ continuamente, temos pela desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial I}{\partial(v)}(u_n) - \frac{\partial I}{\partial(v)}(u)\right| &= \left|\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))v dx\right| \\ &\leq |f(x,u_n) - f(x,u)|_2 \, |v|_2 \\ &\leq C|f(x,u_n) - f(x,u)|_2 \, |\nabla v|_{\Phi_\alpha}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dessa forma,

$$\left\|\frac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u_n) - \frac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u)\right\|_* \leq C|f(x,u_n) - f(x,u)|_2 \longrightarrow 0,$$

quando $n \to +\infty$. Por fim, segue da linearidade da integral, que

$$\frac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u) : W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega) \longrightarrow W_0^{-1,\tilde{\Phi}_\alpha}(\Omega)$$

é linear e contínuo em $W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega)$. Portanto, segue do Lema que $A.3$, $I \in C^1(W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$I'(u)(v) = \int_\Omega f(x,u)v dx \quad u, v \in W_0^{1,\Phi_\alpha}(\Omega). \quad \blacksquare$$

Definição A.5 *Sendo X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X,\mathbb{R})$. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ é uma sequência de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, denotada por $(PS)_c$, quando*

$$I(x_n) \to c \quad I'(x_n) \to 0.$$

Definição A.6 *Diremos que I verifica a condição de Palais-Smale, ou simplesmente a condição (PS), quando toda sequência $(PS)_c$ para $c \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge forte em X.*

Teorema A.7 (Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz) *Seja X um espaço de Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ verificando as seguintes condições:*

(i) Existem $r, \rho > 0$ tais que

$$J(u) \geq r > J(0), \quad ||u|| = \rho.$$

(ii) Existe $e \in X \backslash \overline{B_\rho}(0)$ tal que

$$J(e) < r.$$

Então, J possui uma sequência de Palais-Smale no nível c caracterizado por

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq r,$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1]; X) \ / \ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$, isto é, existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$J(u_n) \longrightarrow c \quad e \quad J'(u_n) \longrightarrow 0 \quad em \quad X'$$

Ademais, se J satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, então J possui um ponto crítico u_0 tal que $J(u_0) = c$.

Demonstração. Ver [3]. ■

Teorema A.8 (Teorema de Rademacher) *(Ver [11], Teorema 3.2) Sejam N, M números inteiros positivos e $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ uma função localmente Lipschitz contínuo. Então, f é diferenciável q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.*

Lema A.9 *Suponha que $B_R(x_0) \subset \Omega$. Definimos $w_k(x) = g_k(|x - x_0|)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, onde*

$$g_k(y) = \begin{cases} 0, & y \in [R, \infty] \\ \left(-\dfrac{2}{R}y + 2\right) \dfrac{2^B \log^B(2) k^{\frac{1}{\gamma} - B}}{2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2}} \left(1 + \dfrac{\log k}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, & y \in \left[\dfrac{R}{2}, R\right] \\ \dfrac{2^B k^{\frac{1}{\gamma} - B}}{2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2}} \log^B\left(\dfrac{R}{y}\right) \left(1 + \dfrac{\log k}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, & y \in \left[Re^{-\frac{k}{2}}, \dfrac{R}{2}\right] \\ \dfrac{k^{\frac{1}{\gamma}}}{2^{1/\gamma} B^{1/2} \omega_1^{1/2}} \left(1 + \dfrac{\log k}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, & y \in \left[0, Re^{-\frac{k}{2}}\right] \end{cases}$$

Então, para todo $\theta_0 \geq 1$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega \Phi(\theta |\nabla w_k|) \leq \theta^2,$$

para todo $k \geq k_0$ e $\theta \in [0, \theta_0]$.

Demonstração. Ver Lema 4.3 em [6]. ■

Teorema A.10 (Teorema da Convergência Dominada Generalizada) *Sejam* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *sequências de funções mensuráveis em* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *tais que* $|u_n| \leq v_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Sejam* u *e* v *funções mensuráveis em* Ω *tais que*

$$u_n \to u \quad e \quad v_n \to v \quad q.t.p. \ em \, \Omega.$$

Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v_n dx = \int_\Omega v dx$, *então,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n dx = \int_\Omega u dx.$$

Demonstração. Ver [24], capítulo 4, Teorema 19. ■

Teorema A.11 *Seja* $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

sempre que $|E| \leq \delta$, *onde* $E \subset \Omega$ *é um subconjunto mensurável.*

Demonstração. Ver [4], página 64. ■

Teorema A.12 *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $E_n = \{x \in \Omega \ : \ |f(x)| \geq n\}$, *então*

$$|E_n| \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Ver [4], página 62. ■

Apêndice B

Simetrização de Schwarz

Neste apêndice, vamos fazer um breve estudo da Simetrização de Schwarz, embasados pelas referências [18] e [19].

Definição B.1 *Sejam $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ borelianos de $\mathbb{R}^N$, dois a dois disjuntos e de medida finita, e $0 < a_n < a_{n-1} < ... < a_2 < a_1$ números reais. Se f é uma função do tipo escada, da forma,*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

*então, definimos o **rearranjo** de f por,*

$$f^\star = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]},$$

onde $R_0 = 0$ e $R_{i-1} < R_i$ são dados pela seguinte relação,

$$|[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]| = |A_i|.$$

Podemos observar que da definição de rearranjo, a partir de uma função f do tipo escada, encontramos uma outra função $f^\star$ de modo que seja:

(i) Simétrica com relação a origem;

(ii) Decrescente a medida que os raios R_i crescem;

(iii) A integral a Lebesgue de $f^\star$ em $\mathbb{R}^N$ é igual a integral a Lebesgue de f, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^\star(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx.$$

Observe que esta definição se reduz apenas às funções do tipo escada. Contudo, podemos estender essa noção para funções mensuráveis em $L^p(\mathbb{R}^N)$ pelo seguinte teorema:

Teorema B.2 *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Existe uma única $f^\star \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $f^\star \geq 0$ e para todo $\alpha > 0$,*

$$|[f \geq \alpha]| = |[f^\star \geq \alpha]|.$$

*A função $f^\star$ é radialmente decrescente e é chamada de **Simetrização de Schwarz** da função f. Ademais, para toda função contínua e crescente $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, tal que $G(0) = 0$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f^\star(x))dx.$$

Demonstração. Ver [18]. ■

Proposição B.3 *Sejam $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, com simetrização $u^\star$, tal que $G(u) \in L^1(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega G(u(x))dx = \int_{\Omega^\star} G(u^\star(x))dx,$$

onde $\Omega^\star$ é uma bola tal que $|\Omega^\star| = |\Omega|$.

Demonstração. Ver [19]. ■

Os próximos teoremas são generalizações do princípio de Polya-Szegö para funções de Young para domínios limitados e ilimitados

Teorema B.4 *Sejam Ω um conjunto aberto limitado, $R > 0$ tal que $|B_R(0)| = |\Omega|$ e $\Phi(t)$ uma função de Young. Suponha que a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínuo, $||\Phi(|\nabla f|)||_1 < \infty$ e $f \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Então, $f^\star$ é localmente contínuo e*

$$\int_{B_R(0)} \Phi(|\nabla f^\star(x)|)dx \leq \int_\Omega \Phi(|\nabla f(x)|)dx.$$

Demonstração. Ver [17]. ■

Teorema B.5 *Sejam $\Phi(t)$ uma função de Young e $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua com decaimento para zero no infinito, isto é,*

$$|[u > t]| < +\infty,$$

para todo $t > 0$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u^\star(x)|)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u(x)|)dx.$$

Demonstração. Ver [26]. ■

Apêndice C

Medidas de Radon

Neste Apêndice, iremos fazer uma rápida revisão das Medidas de Radon e de algumas propriedades importantes que utilizamos no Capítulo 4. Para mais detalhes veja [4], [12] e [29].

Definição C.1 *Sendo μ uma medida e $f \in L(\Omega, \mu)$, definimos a variação total da medida μ como sendo,*

$$|\mu|(E) = \int_E |f| d\mu,$$

para conjuntos mensuráveis $E \subset \Omega$.

Definição C.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e defina*

$$K(\Omega) := \{u \in C(\Omega) \quad : \quad supp\, u \text{ é um subconjunto compacto de} \, \Omega\},$$

e

$$BC(\Omega) := \left\{ u \in C(\Omega) \quad : \quad ||u||_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\}.$$

Definimos o conjunto $C_0(\Omega)$ como sendo o fecho de $K(\Omega)$ com respeito a norma infinita, isto é,

$$C_0(\Omega) = \overline{K(\Omega)}^{||\cdot||_\infty}.$$

Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ (respectivamente, $\mathcal{M}^+(\Omega)$) como sendo o espaço das medidas finitas (respectivamente, medidas finitas positivas), o qual chamaremos de espaço das *Medidas de Radon*. O espaço das Medidas de Radon está munido da seguinte norma,

$$||\mu|| = \sup \left\{ \left| \int u d\mu \right| \; ; \; u \in C_0(\Omega) \, \text{e} \, ||u||_\infty = 1 \right\}.$$

O próximo resultado é uma versão do Teorema da Representação de Riesz para medidas de Radon.

Teorema C.3 (Representação de Riesz) *Se I é um funcional linear positivo de $C_0(\Omega)$, isto é, $I(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$, então existe uma única medida de Radon μ tal que*

$$I(f) = \int f \, d\mu, \qquad \forall f \in C_0(\Omega).$$

Demonstração. Ver [12], Proposição 7.2. ■

Teorema C.4 *O dual topológico de $C_0(\Omega)$ é $\mathcal{M}(\Omega)$, isto é, $C_0(\Omega)^+ = \mathcal{M}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [12]. ■

Considerando T o isomorfismo entre $C_0(\Omega)^+$ e $\mathcal{M}(\Omega)$, pelo Teorema C.4, observamos que, podemos identificar a sequência $\{\mu_k\}$ de medidas de Radon, pela sequência $\{T\mu_k\}$. Dessa forma, dizemos que

$$\mu_k \rightharpoonup \mu, \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega),$$

na topologia fraca-$\star$, se

$$T\mu_k \rightharpoonup T\mu, \quad \text{em } C_0(\Omega)^+,$$

na topologia fraca-$\star$. Equivalentemente, diremos que $\mu_k \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ na topologia fraca-$\star$, quando:

$$\int_\Omega f d\mu_k \to \int_\Omega f d\mu, \quad \forall f \in C_0(\Omega).$$

Proposição C.5 *Toda sequência limitada de medidas de Radon, possui subsequência convergente na topologia fraca-$\star$.*

Demonstração. Ver [29]. ■

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A., Sobolev Spaces, London: Academic Press, INC, 1975

[2] ALVES, C. O.; SOUTO, M. A., *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with exponential critical growth in* $\mathbb{R}^2$, J. Differential Equations, **244**, 2008, 1502-1520.

[3] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis **14** (1973), 349-381. 13

[4] BARTLE, Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure*, New York: John Wiley & Sons, INC. 1995.

[5] BREIT, D.; CIANCHI, A. *Negative Orlicz-Sobolev norms and strongly nonlinear systems in fluid mechanics*, J. Differential Equations **259** (2015), 48-83.

[6] CERNÝ, R.; GURKA, P.; HENCL, S., *On the Dirichlet problem for the* n, α*-Laplacian with the nonlinearity in the critical growth range*, Nonliniear Anal. **74**, 2011, 5189-5204.

[7] DAL MASO, Gianni; MURAT, François. *Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems*, Nonlinear Anal. 31 (1998), 405-412.

[8] do Ó, J. M., RUF, M., *On a Schrodinger equation with periodic potential and critical growth in* $\mathbb{R}^2$, NoDEA **13** (2006), 167-192.

[9] do Ó, J.M.; SOUZA, M.; MEDEIROS, E.; SEVERO, U., *An improvement for the Trudinger-Moser inequality and applications* J. Differential Equations **256** (2014), 1317-1349.

[10] EDMUNDS, D. E.; GURKA, P.; OPIC, B., *Double exponential integrability of convolution operators in generalized Lorentz-Zygmund spaces*, Indiana University Mathematics Journal V.44 (1995) 19-43.

[11] EVANS, Lawrence C.; GARIEPY, Ronald F., *Measure theory and fine properties of functions*, Revised Edition. London: Taylor & Francis Group, LLC, 2015.

[12] FOLLAND, Gerald B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, New York: Wiley 1999.

[13] FREITAS, Luciana R., *Multiplicity of solutions for a class of quasilinear equations with exponential critical growth*, Nonlinear Anal. **95** (2014), 607-624.

[14] FUCHS, M.; SEREGIN, C., *Variational Methods for Fluids of Prandtl-Eyring Type and Plastic Materials with Logarithmic Hardening*. Math. Meth. Appl. Sci., **22**, 317-351 (1999)

[15] FUKAGAI, N.; ITO, M; NARUKAWA, K., *Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz-Sobolev nonlinearity on* $\mathbb{R}^N$, Funkeial. Ekvac. **49**, 2006, 235-267.

[16] FUSCO, N.; LIONS, P.L.; SBORDONE, C. *Sobolev imbedding theorems in borderline cases*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 561-565.

[17] HENCL, Stanislav, *A sharp form of an embedding into exponential and double exponential spaces*, Journal of Functional Analysis 204 (2003) 196-227.

[18] KAVIAN, Otared, *Introduction à la théorie des points critiques: et applications aux problèmes elliptiques*, Nancy: Springer, 1993.

[19] KESAVAN, S., *Symmetrization and applications*, World Scientic Series in Analysis, Vol. 3 (2008).

[20] KUFNER, A.; JOHN, O.; FUČIK, S. *Function Spaces*, Springer, 1977.

[21] MENESES, João Paulo Formiga. *Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quaselineares*. 2016. 192f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2016.

[22] MOSER, J., *A sharp form of an inequality of N. Trudinger* Indiana University Mathematics Journal Vol. 20, No. 11 (1971) 1077-1092

[23] RAO, M. M.; REN, Z. D., *Theory of Orlicz Spaces*, New York: Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, 1991.

[24] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M. *Real Analysis*, New York: Pearson, 2010.

[25] SANTOS, Jefferson Abrantes, *Equações Quasilineares Multivalentes*. 2011. 154f. Tese de Doutorado. Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

[26] TALENTI, Giorgio, *Inequalities in rearrangement invariant function spaces*, Nonlinear Analysis, Function Spaces. Vol. 5. (1994) 177-230.

[27] TRUDINGER, Neil S., *On the imbedding Orlicz space and some applications*, Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 17, No. 5 (1967), 473-483.

[28] VASQUEZ, J. L., *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. 12, 191-202, 1984.

[29] WILLEM, M., *Minimax Theorem*, Birkhauser, 1996.