

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Soluções de Sistemas Hamiltonianos Via Método Dual

por

Roseane da Silva Martins [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

M386s Martins, Roseane da Silva.
 Soluções de sistemas hamiltonianos via método dual / Roseane da
 Silva Martins. – Campina Grande, 2019.
 115 f.

 Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
 "Orientação: Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega".
 Referências.

 1. Matemática. 2. Sistema Hamiltoniano. 3. Solução Positiva.
4. Solução Nodal. 5. Método Variacional Dual. I. Nóbrega, Alânnio
Barbosa. II. Título.

CDU 51(043)

Soluções de Sistemas Hamiltoniano Via Método Dual

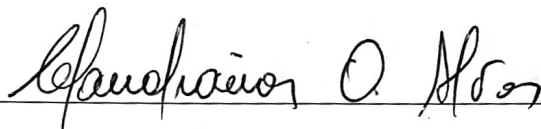
por

Roseane da Silva Martins

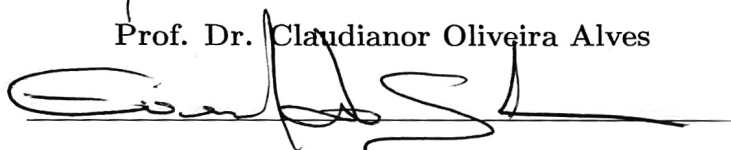
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

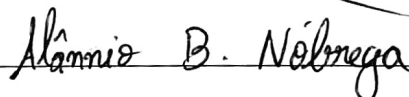
Aprovada por:



Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves



Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros



Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2019

Agradecimentos

A Deus, que me deu forças quando a razão me dizia que não conseguiria e enche minha vida de alegria por me permitir sonhar em estar com Ele na eternidade juntamente com nosso Senhor Jesus Cristo e nossa santa mãe Maria. *“Senhor, quero dar-te graças de todo o coração e falar de todas as tuas maravilhas - Salmos 9-1”*.

Agradeço de forma especial a minha mãe Nelci que sempre apoiou desde o início da graduação, minha dedico à senhora mais essa conquista. A meus irmãos Laís e Railson (gêmeos), ao meu sobrinho Miguel e a toda minha família pelo apoio.

A meu namorado Marcelo, pelo amor e paciência nos momentos em que estive longe. Marcelo, tu és para mim o mais belo e precioso presente que poderia receber. EU TE AMO!

Talvez o espaço aqui reservado não seja suficiente para expressar o quanto sou grata por tudo. Mas tentarei fazê-lo a fim de mostrar um pouco minha gratidão. Início agradecendo aos meus amigos da Bahia que sempre torceram por mim, minha turma de Matemática da UESC de 2011.1 e a minha querida amiga Rafaela Machado por ouvir meus desabafos e sempre me fazer rir em todos os momentos.

Nesse pouco tempo que estive na Paraíba pude construir um laço de amizade com duas pessoas que tenho certeza que levarei por toda a vida. Eles foram muitos mais do que colegas, foram amigos que me levaram pra mais perto de Deus. Juntos conquistamos batalhas e criamos o PRI - Pedro, Rose e Ismael. Obrigada Pedro e Ismael por me ajudarem em cada ♡ (dúvidas). Pedro, por está comigo desde o início sempre no mesmo barco, compartilhando das mesmas dificuldades, mas lutando todos os dias para que esse dia chegasse. Obrigada pelas caronas, estudos coletivos, por toda ajuda no Latex e pelas resenhas. Ismael, faltam palavras para expressar o quão grata sou a ti, você foi muito mais que amigo foi como irmão pra mim, até nas brigas rs, você com sua humildade sempre me ajudou matematicamente quando precisei. Você é muito chato, mas tenho certeza que nessa vida conhecerei poucas pessoas tão legais

como você.

Num trabalho como este, o mais complicado não são as barreiras teóricas, pois isto a gente supera com dedicação e orientação adequada. O mais complicado é construir um cotidiano saudável que nos faça acreditar que tudo isso vale a pena. Nesse sentido agradeço mais uma vez ao PRI, a Wallace pelos estudos compartilhados e pelas discussões religiosas que me fizeram crescer bastante como cristã, aos alunos do mestrado/doutorado pelos cafés compartilhados e conversas dos mais diversos assuntos: Geovany, Renato, Weiller, André, José Lucas, Dani, Laíse, Siebra... ao povo do PET em matemática da UFCG, aos funcionários da UFCG, Aninha com sua alegria, Andrezza e aos demais pela atenção e cordialidade.

A Geisa e Fa pela amizade que construímos aqui, pelo cuscuz compartilhado com café, conversas divertidas e pela nossa página no instagram @mestrandasmatematica por ter sido uma válvula de escape nos momentos de desânimo.

Aos professores da UESC que torceram por mim. Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFCG por ter me concedido a oportunidade de participar do mesmo. Aos professores do PPGMat que tive o prazer de ser aluna e contribuíram de forma essencial na minha formação, Marco Aurélio, Brandão, Henrique, Romildo e Claudianor.

Ao meu orientador Alânnio Barbosa Nóbrega, por ter acreditado em mim, pela dedicação e incentivo durante o período que me orientou, o senhor cumpriu brilhantemente seu papel como orientador. Agradeço pela paciência e experiências que pude compartilhar como sua primeira orientanda. Por fim agradeço pelo excelente trabalho de orientação, e pela contribuição para o meu desenvolvimento.

Aos Professores Everaldo Souto de Medeiros e Claudianor Oliveira Alves por terem aceitado me avaliar, fazendo parte da banca examinadora. A todos aqueles que embora não tenham sido citados me ajudaram direta ou indiretamente de alguma forma. Enfim, ao CAPES, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A minha mãe Nelci, a Marcelo e
ao PRI.

“Porque haverá o grito de comando, e a voz do arcanjo, e o som da trombeta de Deus, e então o próprio Senhor descera do céu. Então nós, os que estivermos vivos, seremos levados nas nuvens, junto com eles, pra nos encontrarmos com o Senhor no ar. E assim ficaremos para sempre com o Senhor.”

1 Tessalonicenses 4: 16 - 17.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de solução positiva para uma perturbação de um sistema Hamiltoniano no \mathbb{R}^N e a existência de solução nodal de energia mínima para um sistema Hamiltoniano com pesos do tipo Hénon. Trataremos o caso em que p, q estão abaixo da hipérbole crítica. A principal ferramenta utilizada é o Método Variacional Dual.

Palavras-Chave: Sistema Hamiltoniano, solução positiva, solução nodal, Método Variacional Dual.

Abstract

In this work we study the existence of positive solution of a perturbed Hamiltonian system in \mathbb{R}^N and the existence of ground state nodal solutions for Hamiltoniano systems with Hénon type weights. We will treat the case where p, q are below critical hyperbola. The main tool used is the dual variational method.

Keywords: Hamiltonian system, positive solution, nodal solutions, dual variational method.

Conteúdo

Introdução	13
1 Existência de soluções positivas de uma perturbação de um Sistema Hamiltoniano no \mathbb{R}^N	21
1.1 Formulação Variacional Dual	22
1.2 Resultados Preliminares	26
1.3 Demonstração do Teorema 1.1	35
1.4 Demonstração do Teorema 1.2	41
2 Existência e simetria de solução nodal de energia mínima para um Sistema Hamiltoniano	47
2.1 Método dual e alguns lemas técnicos	49
2.2 Demonstração do Teorema 2.1	64
2.3 Demonstração do Teorema 2.2	83
2.4 Quebra de Simetria	84
A Regularidade	92
B Variedade de Nehari	98
B.1 Variedade de Nehari	98
B.1.1 Propriedades da Variedade de Nehari	98
C Os espaços de Sobolev	103
D Outros Resultados	109
Bibliografia	113

Notações e Terminologias

- Ω é um domínio limitado com fronteira suave no \mathbb{R}^N ; domínio refere-se a um conjunto aberto conexo;
- \bar{A} denota o fecho de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;
- ∂A é a fronteira do conjunto A ;
- Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável. $\text{med}(A)$ denotará a medida de Lebesgue do conjunto A em \mathbb{R}^N ;
- X' denota o dual topológico do espaço vetorial normado X ;
- $D^\alpha u$ é a α derivada fraca de $u \in L^1(\Omega)$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$;
- $C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$;
- $C^k(\Omega)$ é o espaço das funções reais definidas em Ω que possuem todas as derivadas de ordem menor do que ou igual a k contínuas;
- $C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega), \exists C > 0 \text{ tal que } |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha \forall x, y \in \Omega\}$, para $\alpha \in (0, 1)$;
- $\text{supt}u$ determina o suporte de uma função mensurável u , isto é, $\text{supt}u = \bigcup_{i \in I} \Theta_i$, onde $u|_{\Theta_i} \neq 0$, $\Theta_i \subset \Omega$ é um aberto e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável;
- $C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in C^\infty(\Omega) \text{ e } \text{supt}u \subset\subset \Omega\}$;
- Se f é uma função integrável, denotaremos $\int_{\mathbb{R}^N} f dx$ a seguinte integral $\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$;

- 2^* é o expoente crítico de Sobolev, definido por

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & N \geq 3 \\ +\infty, & N = 1, 2; \end{cases}$$

- $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{-u, 0\}$ denotam a parte positiva e negativa de uma função real u , respectivamente;
- Se $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$, $1 \leq p < \infty$, então denotaremos $|u|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$;
- $o_n(1)$: denota uma sequência de números reais convergindo para 0 (zero) quando $n \rightarrow \infty$;
- $\rightarrow, \rightharpoonup$: convergência forte e convergência fraca em um espaço normado, respectivamente;
- \hookrightarrow indica imersão contínua;
- q.t.p.: Significa em quase todo ponto, ou seja, exceto num conjunto de medida nula;
- $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$: Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\int_K |u|^p dx < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $L^\infty(\Omega)$: O espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que existe $C > 0$ com $|u(x)| \leq C$ q.t.p. em Ω ;
- Se $u \in L^\infty(\Omega)$, então denotamos a norma de u em $L^\infty(\Omega)$ por $|u|_\infty = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ denota o gradiente de u ;
- $\text{div} F$ denota o divergente do campo F ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u ;
- ■ denota o fim de uma demonstração.

Introdução

Neste trabalho estudamos uma classe de sistema elípticos semilineares: os sistemas Hamiltonianos, os quais serão tratados via método dual. Consideremos a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v), & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = g(x, u, v), & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio podendo, inclusive, ser todo o \mathbb{R}^N . Dizemos que o sistema acima é do tipo Hamiltoniano se existe uma função $H : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = g, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = f.$$

Um dos primeiros resultados sobre sistemas Hamiltonianos foi estudado por Clément, De Figueiredo e Mitidieri em [12] no qual discutem a existência de solução positiva, via argumento topológico, para o sistema sujeito às condições de fronteira de Dirichlet dado abaixo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(v), & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = g(u), & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 2$. Neste caso $H(u, v) = F(v) + G(u)$ onde F, G são as primitivas de f e g , respectivamente. Tanto nesse trabalho como em [28] apareceu a primeira vez a noção de hipérbole crítica, que substitui a noção de expoente crítico do caso escalar:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{N}.$$

A hipérbole crítica (Figura 1) nos possibilita uma maior flexibilidade na escolha de p e q pois, a medida que p cresce q diminui havendo portanto uma compensação. Observe que o parâmetro p pode assumir um valor superior ao expoente crítico de Sobolev desde que, $1 < q \leq 2^* - 1$ do mesmo modo temos a situação oposta. Note que quando $p = q$ temos $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{2}{p+1} > \frac{N-2}{N}$, o que equivale a $p+1 < \frac{2N}{N-2}$ ou ainda $1 < p < 2^* - 1$.

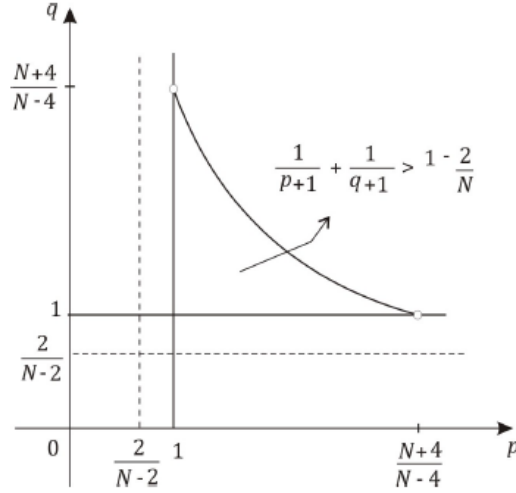


Figura 1: Hipérbole crítica.

O caso subcrítico ocorre quando $1 < p \leq 2^* - 1$ e $1 < q \leq 2^* - 1$, o caso crítico ocorre quando $p = 2^* - 1$, $q = 2^* - 1$ e caso supercrítico ocorre quando $p > 2^* - 1$ e $q > 2^* - 1$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Tratando-se de espaços de Sobolev, temos também os espaços de Sobolev de ordem fracionária que surgem no estudo de sistemas hamiltonianos para permitir uma maior liberdade na escolha dos expoentes máximos no crescimento polinomial das não-linearidades.

Em [30], Sirakov estudou o seguinte sistema Hamiltoniano no \mathbb{R}^N

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(x, v), & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + v = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1)$$

onde $N \geq 3$ e $f, g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Neste trabalho Sirakov mostrou que, sob algumas condições, as soluções de (1) pertencem a $W^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ para todo $2 \leq s < \infty$. Utilizamos esse resultado nesta dissertação para mostrar a regularidade das soluções do Capítulo 1, o qual apresentaremos com mais detalhes no **Apêndice A**.

O funcional associado naturalmente ao sistema Hamiltoniano é fortemente indefinido. Isto significa que o espaço onde o funcional está definido é decomposto em soma direta de dois subespaços de dimensão infinita, com a propriedade que o funcional é positivo definido em um e negativo definido no outro. Por isso, algumas vezes, usa-se Teorema de Linking devido a Li-Willem [22] para se obter pontos críticos desse funcional. Podemos citar os trabalhos de De Figueiredo e Felmer [14] e Hulshof e Van der Vorst [18] que mostraram usando o Teorema de Linking a existência de solução não trivial para o problema com as condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = |v|^{q-1}v, & x \in \Omega \\ -\varepsilon^2 \Delta v + v = |u|^{p-1}u, & x \in \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Os valores críticos obtidos pelos Teoremas de Linking em geral apresenta algumas dificuldades técnicas. Para contornar esses problemas, geralmente, utiliza-se o método variacional dual, isto é, modifica-se o sistema original e trabalha-se em um novo espaço chamada espaço dual, para que se possa usar o Teorema do Passo da Montanha, onde o controle sobre os valores críticos é mais fácil. O ponto chave desse método é que mostra-se que a partir de uma solução do sistema modificado obtêm-se uma solução do problema original. O método variacional dual já foi usado por diversos autores com os mais variados propósitos. De Figueiredo [15] mostra a existência, multiplicidade, simetria de soluções para certos sistemas Hamiltonianos. Em [5] Alves e Soares estudaram a existência de soluções positivas para uma classe de sistemas Hamiltonianos (duas equações de Schrödinger estacionárias não lineares acopladas) e Yang [33] usou o método dual para estudar a existência de solução para um sistema elíptico semilinear.

O estudo sobre sistemas Hamiltonianos e suas propriedades em domínio limitado ou \mathbb{R}^N é uma área de grande interesse para muitos autores. Citamos também, para problemas em domínio limitado, os trabalhos de Clément e Van der Vorst [11] que mostram a existência de solução não trivial para um sistema Hamiltoniano e o trabalho Bonheure, Santos e Tavares [7] que a partir do estudo de sistemas Hamiltonianos mostraram a existência de solução de energia mínima. No caso de problemas em \mathbb{R}^N citamos o trabalho de Yang [33] que mostrou que a existência de solução não trivial de decaimento exponencial.

Podemos ressaltar dois objetivos principais nesta dissertação: discutir questões relacionadas a existência de solução positiva para uma perturbação de um sistema Hamiltoniano no \mathbb{R}^N e a existência de solução nodal de energia mínima para um sistema Hamiltoniano com equações do tipo Hénon. Encontrar solução positiva ou nodal (isto é, solução que muda de sinal) para um sistema Hamiltoniano, muitas vezes apresenta dificuldades naturais dependendo do domínio que estamos trabalhando. Um dos problemas mais comuns, que está diretamente relacionado ao domínio, é o fato deste não ser limitado, como por exemplo o \mathbb{R}^N . Neste caso, existe a falta de compacidade nas imersões de Sobolev. Nesse sentido a nossa abordagem baseia-se no método variacional dual. Nos Capítulos 1 e 2 definiremos o funcional dual e mostraremos suas principais propriedades para cada caso.

Este trabalho é constituído de dois capítulos e quatro apêndices.

No **Capítulo 1**, estudaremos a existência de solução positiva para o sistema Hamiltoniano do tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = W_2(x)|v|^{p-1}v, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = W_1(x)|u|^{q-1}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \\ u > 0, v > 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2, \end{array} \right. \quad (2)$$

onde os números $p, q > 1$ estão abaixo da hipérbole crítica para $N \geq 3$, isto é, p, q verificam

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N},$$

enquanto que nenhuma condição adicional em p e q são feitas se $N = 2$. Para isto, usamos o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti - Rabinowitz sem a condição (PS). Introduzimos a transformada de Legendre - Fenchel para estabelecer a formulação variacional dual, a qual fez-se necessária devido a falta de imersões compactas de Sobolev que possibilitam determinar se os pontos críticos do funcional energia associado ao problema (2) são soluções.

Trabalharemos com o espaço dual $X := L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \times L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$ e definimos o funcional dual de classe C^1 , $\Psi_W : X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Psi_W(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} (F^*(x, \omega_1) + G^*(x, \omega_2)) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx$$

onde, $F^*(x, s) = \left(\frac{q}{q+1}\right) \frac{1}{W_1(x)^{1/q}} |s|^{(q+1)/q}$, $G^*(x, s) = \left(\frac{p}{p+1}\right) \frac{1}{W_2(x)^{1/p}} |s|^{(p+1)/p}$
 $\langle \eta, K\omega \rangle = \eta_1 T_1 \omega_2 + \eta_2 T_2 \omega_1$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in X$ e $T_1 : L^{(p+1)/q}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$, $T_2 : L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ são operadores lineares contínuos os quais apresentaremos com mais detalhes no Capítulo 1. O primeiro teorema, supondo que as não-linearidades são periódicas, veremos que o problema (2) possui solução positiva.

Teorema 0.1 *Suponha que*

$$W_i \in C^0(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} W_i(x) > 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$W_i(x + y) = W_i(x), \quad i = 1, 2, \quad y \in \mathbb{Z}^N, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4)$$

Então (2) possui pelo menos uma solução positiva.

Para mostrar esse teorema o seguinte lema foi crucial, pois vemos que as soluções fracas de (2) são precisamente os pontos críticos de Ψ_W e utilizando o Princípio de Máximo Fraco (Apêndice C) concluímos a positividade das soluções, isto é, (u, v) é solução de (2) com $u > 0$, $v > 0$ em \mathbb{R}^N .

Lema 0.1 *Os pontos críticos do funcional Ψ_W são precisamente as soluções fracas de (2). Por outro lado, se $(u, v) \in W^{2, (p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \times W^{2, (q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (2) então (ω_1, ω_2) é ponto crítico de Ψ_W .*

O segundo teorema é uma perturbação do problema acima.

Teorema 0.2 *Suponha que*

$$W_i = V_i + \overline{W}_i, \quad \overline{W}_i \geq 0, \quad \overline{W}_i \in C^0(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$\overline{W}_i(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$\text{med}(\{x \in \mathbb{R}^N : \overline{W}_1 > 0\}) > 0 \quad \text{ou} \quad \text{med}(\{x \in \mathbb{R}^N : \overline{W}_2 > 0\}) > 0. \quad (7)$$

Se V_i ($i = 1, 2$) satisfaz (3) e (4), W_i ($i = 1, 2$) verifica (5), (6) (7). Então o problema (2) possui pelo menos uma solução positiva.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos com base no artigo de Alves, Carrião e Miyagaki [4] que generaliza o caso de uma única equação explorada pelos autores em [3]. Para o caso domínio limitado este sistema foi estudado por um número significativo de autores, Clement et al.[12] mostraram a existência de soluções positivas, Hulshof e Van der Vorst [18] e Costa e Magalhães [13] estudaram a existência de soluções não triviais.

Uma importante ferramenta que utilizamos nos lemas técnicos para a demonstração dos teoremas é a variedade Nehari, que foi crucial para explicarmos o comportamento da sequência do tipo Palais - Smale. No **Apêndice B** apresentaremos com mais detalhes algumas propriedades do Variedade de Nehari.

Em um trabalho publicado em 1973, M. Hénon [17] introduziu a equação elíptica

$$-\Delta u = |x|^\alpha |u|^{p-1}, \quad \text{em } \Omega$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado, $\alpha > 0$ e $p > 2$, no contexto do grupo estelar de simetria esférica. Esse tipo de equação é de grande interesse na matemática. Nesse sentido dedicamos o **Capítulo 2** para, baseados no trabalho de Bonheure, Santos, Ramos e Tavares [6], estudar a existência de solução nodal de energia mínima para o sistema Hamiltoniano com equações do tipo Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\beta |v|^{q-1}v, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = |x|^\alpha |u|^{p-1}u, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ e as não - linearidades cumprem

$$1 > \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N}. \quad (9)$$

Soluções de energia mínima é geralmente referida na literatura por *soluções ground state*.

Associado a problema (8) temos o funcional energia dado por

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |x|^\alpha |u|^{p+1} dx - \frac{1}{q+1} \int_{\Omega} |x|^\beta |v|^{q+1} dx.$$

Em [7] os autores Bonheure, Santos, e Tavares mostraram que os pontos críticos de E são precisamente as soluções de (8).

Recordamos que uma solução para o problema corresponde a uma par (u, v) com

$$u \in W^{2,(q+1)/q}(\Omega) \cap W_0^{1,(q+1)/q}(\Omega) \quad v \in W^{2,(p+1)/p}(\Omega) \cap W_0^{1,(p+1)/p}(\Omega)$$

satisfazendo o sistema (8) para $x \in \Omega$ q.t.p.. Diremos que uma solução (u, v) de (8) é uma solução nodal, quando $u^\pm, v^\pm \neq 0$, onde $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{-u, 0\}$ e $v^+ = \max\{v, 0\}$, $v^- = \max\{-v, 0\}$.

Impondo a condição $pq > 1$ e utilizando o método variacional dual mostraremos o primeiro resultado, Teorema 0.3, no qual estudamos a existência de solução nodal de energia mínima para (8). Tal método nos permite estudar o problema em um novo ambiente, a saber o espaço $X := L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}})$, onde não há dificuldades em se trabalhar com as partes positiva e negativa das funções. Na Seção 2.1 definiremos o funcional dual e mostraremos suas principais propriedades.

Teorema 0.3 *Se $N \geq 1, \alpha, \beta \geq 0$ e supondo que (9) é satisfeito. Então o nível c_{nod} é atingido, isto é, existe uma solução (u, v) de (8) tal que $u^\pm \neq 0, v^\pm \neq 0$ e $E(u, v) = c_{nod}$. onde*

$$c_{nod} = \inf\{E(u, v), (u, v) \text{ é solução de (8) e } u^\pm \neq 0, v^\pm \neq 0\}$$

é o nível nodal de energia mínima.

O ponto mais relevante nesse capítulo foi a demonstração do Teorema 0.3 o qual mostra que o problema (8) tem solução nodal de energia mínima. Para tanto, fez-se necessário regularizar o problema introduzindo um novo espaço o qual é denso no espaço dual definido no Capítulo. Autores como [31], [20] e [8] mostram que tal regularização é uma abordagem padrão para regularizar operadores não uniformemente elípticos, o ponto chave é que a regularização não afeta a geometria do funcional original. Assim como no Capítulo 1, mostramos a seguinte afirmação que foi crucial na demonstração do Teorema 0.3.

Afirmação 0.4 *(ω_1, ω_2) é ponto crítico de I se, e somente se, (9) ocorre e também*

$$(u, v) = (|x|^{-\frac{\alpha}{p}} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1, |x|^{-\frac{\beta}{q}} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2)$$

é uma solução do sistema (8). Neste caso temos

$$I(\omega_1, \omega_2) = E(u, v) = \frac{pq - 1}{(p + 1)(q + 1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx > 0$$

com $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional dual de classe C^1 definido por

$$I(\omega_1, \omega_2) = \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} T\omega dx.$$

Em seguida, supondo que $p = q$, $\alpha = \beta$ veremos que qualquer solução (u, v) de (8) é tal que $u = v$ onde u resolve

$$-\Delta u = |x|^{\beta} |u|^{q-1} u \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Teorema 0.5 *Assuma que $u, v \in H_0^1(\Omega)$ resolve o sistema*

$$-\Delta u = |x|^{\beta} |v|^{q-1} v, \quad -\Delta v = |x|^{\beta} |u|^{q-1} u, \quad \text{em } \Omega \quad u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$, $q > 1$ e $q+1 \leq 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$.

Então $u=v$.

Por fim, mostramos uma quebra de simetria.

Teorema 0.6 *Assuma que $N \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ou é uma bola ou um anel centrado na origem. Seja q_0 satisfazendo*

$$q_0 > 1 \quad \text{e} \quad q_0 + 1 < 2N/(N-2) \quad \text{se} \quad N \geq 3.$$

Então existe $\delta_0 > 0$ tal que $p, q \in [q_0 - \delta, q_0 + \delta]$, $\alpha, \beta \in [0, \delta_0]$ e a solução de energia mínima (8) é tal que ambas u e v não são radialmente simétricas.

Por fim, no **Apêndice A** apresentamos um resultado de regularidade para as soluções do Capítulo 1, o qual será provado utilizando-se um argumento de bootstrap.

No **Apêndice C** demonstraremos o Lema devido a P.L. Lions utilizado no Capítulo 1 e citamos alguns resultados de Análise funcional, Teoria da medida e Espaços de Sobolev.

No **Apêndice D** apresentamos mais alguns resultados necessários para uma melhor compreensão do nosso estudo os quais completam os argumentos utilizados nesta dissertação. Por se tratarem de resultados clássicos, não apresentamos aqui suas demonstrações, porém, citamos as referências onde as mesmas podem ser encontradas.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, nos Capítulos 1 e 2, iremos enunciar novamente as hipóteses sobre as não-linearidades e os teoremas.

Capítulo 1

Existência de soluções positivas de uma perturbação de um Sistema Hamiltoniano no \mathbb{R}^N

Neste capítulo, estudaremos resultados apresentados no artigo de Alves, Carrião e Miyakaki [4]. O objetivo é estudar a existência de solução positiva para o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta u + u = W_2(x)|v|^{p-1}v, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + v = W_1(x)|u|^{q-1}u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & \text{quando } |x| \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (1.1)$$

onde os números reais $p, q > 1$ estão abaixo da hipérbole crítica para $N \geq 3$, isto é, p, q satisfazem

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N} \quad (1.2)$$

enquanto que nenhuma condição adicional em p e q são feitas se $N = 2$. As funções W_i , $i = 1, 2$, são funções contínuas positivas limitadas, para as quais daremos suposições adicionais a seguir.

Obs.: Ao longo do texto uma solução positiva (u, v) é um par de funções regulares que verifica (1.1) com $u > 0, v > 0$ em \mathbb{R}^N .

O primeiro teorema do capítulo mostraremos que o sistema (1.1) tem solução positiva.

Teorema 1.1 *Suponha que*

$$W_i \in C^0(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} W_i(x) > 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.3)$$

$$W_i(x + y) = W_i(x), \quad i = 1, 2, \quad y \in \mathbb{Z}^N, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.4)$$

Então (1.1) possui pelo menos uma solução positiva.

O próximo resultado é uma perturbação do problema acima.

Teorema 1.2 *Suponha que*

$$W_i = V_i + \overline{W}_i, \quad \overline{W}_i \geq 0, \quad \overline{W}_i \in C^0(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \quad (1.5)$$

$$\overline{W}_i(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty \quad i = 1, 2, \quad (1.6)$$

$$\text{med}(\{x \in \mathbb{R}^N : \overline{W}_1 > 0\}) > 0 \quad \text{ou} \quad \text{med}(\{x \in \mathbb{R}^N : \overline{W}_2 > 0\}) > 0. \quad (1.7)$$

Se V_i ($i = 1, 2$) satisfaz (1.3) e (1.4), W_i ($i = 1, 2$) verifica (1.5), (1.6) e (1.7). Então o problema (2) possui pelo menos uma solução positiva.

A seguir introduzimos a transformada de Legendre - Fenchel e a estrutura variacional dual para o problema (1.1).

1.1 Formulação Variacional Dual

Escrevendo

$$X := L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \times L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N),$$

temos que X é um espaço de Banach munido da norma

$$\|\omega\| = \sqrt{|\omega_1|_{(q+1)/q}^2 + |\omega_2|_{(p+1)/p}^2} \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in X,$$

onde $|\omega_1|_{(q+1)/q}$ e $|\omega_2|_{(p+1)/p}$ denotam, respectivamente, as normas em $L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$ e $L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$.

Observe que para cada $f \in L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$ segue de Agmon - Douglis - Nirenberg (Apêndice C), que existe uma única solução $u \in W_0^{1,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$ do problema linear

$$-\Delta u + u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (P).$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|_{\widetilde{W}} \leq C|f|_{(p+1)/p}$$

onde $\widetilde{W} = W_0^{1,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$.

Dessa forma, fica bem definido o operador linear $T_{1,p} : L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow W_0^{1,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$, tal que, para cada $f \in L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$, $T_{1,p}f = u$ é a única solução do problema (P). Pela última desigualdade temos

$$|T_{1,p}f|_{\widetilde{W}} = |u|_{\widetilde{W}} \leq C|f|_{(p+1)/p} \quad \forall f \in L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N),$$

mostrando que $T_{1,p}$ é contínua. De maneira análoga é possível definir o operador $T_{1,q} : L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \rightarrow W_0^{1,(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,(q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$. Considere então, os operadores lineares contínuos

$$T_1 : L^{(p+1)/q}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$T_2 : L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N),$$

onde $T_1 = T_2 = (-\Delta + \text{id})^{-1}$, mais precisamente $T_1 = i \circ T_{1,p}$ e $T_2 = i \circ T_{1,q}$ onde $i : W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ a qual vale para $\frac{1}{q+1} > \frac{p}{p+1} - \frac{2}{N}$ e $N \geq 2$.

Recordemos que a imersão $j : W^{2,(p+1)/p}(B_R) \hookrightarrow L^{q+1}(B_R)$ é compacta para toda bola $B_R = B_R(0)$ centrada na origem de raio R .

A transformada de Legendre - Fenchel é dada por

$$F^*(x, s) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{st - F(x, s)\}.$$

Para mais detalhe acerca da transformada de Legendre - Fenchel citamos o livro de Mawhin e Willem [24].

Lema 1.1 *Se*

$$f(x, t) = W_1(x)|t|^{q-1}t \quad e \quad g(x, t) = W_2(x)|t|^{p-1}t, \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$F(x, t) = \frac{W_1(x)|t|^{q+1}}{q+1} \quad e \quad G(x, t) = \frac{W_2(x)|t|^{p+1}}{p+1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

são as suas primitivass, respectivamente. Então, a transformada de Legendre - Fenchel destas funções são as seguintes

$$F^*(x, s) = \left(\frac{q}{q+1} \right) \frac{1}{W_1(x)^{1/q}} |s|^{(q+1)/q}$$

e

$$G^*(x, s) = \left(\frac{p}{p+1} \right) \frac{1}{W_2(x)^{1/p}} |s|^{(p+1)/p}.$$

Demonstração.

De fato, temos

$$\frac{d}{dt}(st - F(x, t)) = 0 \Leftrightarrow s - W_1(x)|t|^{q-1}t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{s}{W_1(x)|t|^{q-1}}$$

o que implica em,

$$|t| = \left(\frac{|s|}{W_1(x)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

de onde segue que,

$$t = \frac{s}{W_1(x) \frac{|s|^{\frac{1}{q}(q-1)}}{W_1(x)^{\frac{1}{q}(q-1)}}} = \frac{s}{W_1(x)^{\frac{1}{q}} |s|^{\frac{1}{q}(q-1)}}.$$

Assim, a transformada de Legendre - Fenchel de F é dada por

$$\begin{aligned} F^*(x, s) &= \frac{s^2 |s|^{1/q}}{W_1(x)^{1/q} |s|} - \left(\frac{1}{q+1} \right) \frac{W_1(x) |s|^{\frac{1}{q}(q+1)}}{W_1(x)^{\frac{1}{q}(q+1)}} \\ &= \frac{|s|^{\frac{1}{q}(q+1)}}{W_1(x)^{1/q}} - \left(\frac{1}{q+1} \right) \frac{|s|^{\frac{1}{q}(q+1)}}{W_1(x)^{1/q}} \\ &= \frac{(q+1) |s|^{\frac{1}{q}(q+1)} - |s|^{\frac{1}{q}(q+1)}}{(q+1) W_1(x)^{1/q}} \\ &= \left(\frac{q}{q+1} \right) \frac{1}{W_1(x)^{1/q}} |s|^{(q+1)/q}. \end{aligned}$$

De maneira análoga mostramos que

$$G^*(x, s) = \left(\frac{p}{p+1} \right) \frac{1}{W_2(x)^{1/p}} |s|^{(p+1)/p}.$$

■

Definimos agora o operador linear contínuo $K : L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \times L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^N) \times L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$K = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

No que segue denotamos por $\langle \eta, K\omega \rangle$ a seguinte função

$$\langle \eta, K\omega \rangle = \eta_1 T_1 \omega_2 + \eta_2 T_2 \omega_1 \quad \eta = (\eta_1, \eta_2), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in X.$$

Definimos o funcional dual $\Psi_W : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Psi_W(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} (F^*(x, \omega_1) + G^*(x, \omega_2)) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx.$$

Ψ_W é chamado funcional energia dual associado ao problema (1.1), está bem definido sendo de classe $C^1(X)$ com

$$\Psi'_W(\omega)\eta = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1} \omega_1 \eta_1}{W_1^{1/q}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{(1/p)-1} \omega_2 \eta_2}{W_2^{1/p}} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, K\omega \rangle dx.$$

para todo $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in X$.

O próximo lema é crucial no capítulo, pois mostra que os pontos críticos do funcional Ψ_W são as soluções do problema (1.1).

Lema 1.2 *Os pontos críticos do funcional Ψ_W são precisamente as soluções fracas de (1.1). Por outro lado, se $(u, v) \in W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \times W^{2,(q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (1.1) então (ω_1, ω_2) é ponto crítico de Ψ_W .*

Demonstração.

De fato, supondo que $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in X$ é ponto crítico de Ψ_W , então

$$\begin{aligned} \Psi'_W(\omega)\eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\omega_1|^{(1/q)-1} \omega_1}{W_1^{1/q}} - T_1 \omega_2 \right) \eta_1 dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\omega_2|^{(1/p)-1} \omega_2}{W_2^{1/p}} - T_2 \omega_1 \right) \eta_2 dx = 0 \quad \forall \eta = (\eta_1, \eta_2) \in X. \end{aligned}$$

Dessa forma para $(\eta_1, 0) \in X$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\omega_1|^{(1/q)-1} \omega_1}{W_1^{1/q}} - T_1 \omega_2 \right) \eta_1 dx = 0 \quad \forall \eta_1 \in L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N).$$

Fixando $\eta_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, pelo Lema de Du Bois Raymond

$$T_1\omega_2 = \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1}\omega_1}{W_1^{1/q}} = \frac{d}{ds}F^*(x, \omega_1). \quad (1.8)$$

Analogamente, para $(0, \eta_2) \in X$, temos

$$T_2\omega_1 = \frac{|\omega_2|^{(1/p)-1}\omega_2}{W_2^{1/p}} = \frac{d}{ds}G^*(x, \omega_2). \quad (1.9)$$

Fazendo

$$u = T_1\omega_2 \quad \text{e} \quad v = T_2\omega_1, \quad (1.10)$$

temos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= W_1|u|^{q-1}u \quad \text{e} \quad \omega_2 = W_2|v|^{p-1}v \\ u = T_1\omega_2 &= \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1}\omega_1}{W_1^{1/q}} \Rightarrow |u| = \frac{|\omega_1|^{1/q}}{W_1^{1/q}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

daí,

$$|u|^{q-1} = \frac{|\omega_1|^{1-\frac{1}{q}}}{W_1^{1-\frac{1}{q}}} \Rightarrow |u|^{q-1}u = \frac{|\omega_1|^{1-\frac{1}{q}}}{W_1^{1-\frac{1}{q}}} \frac{|\omega_1|^{\frac{1}{q}-1}\omega_1}{W_1^{\frac{1}{q}}} = \frac{\omega_1}{W_1} \Rightarrow \omega_1 = W_1|u|^{q-1}u.$$

Do mesmo modo mostramos que $\omega_2 = W_2|v|^{p-1}v$. De (1.10) e (1.11) obtemos

$$\begin{aligned} u &= T_1\omega_2 = (-\Delta + \text{id})^{-1}(\omega_2) = (-\Delta + \text{id})^{-1}(W_2|v|^{p-1}v), \\ v &= T_2\omega_1 = (-\Delta + \text{id})^{-1}(\omega_1) = (-\Delta + \text{id})^{-1}(W_1|u|^{q-1}u), \end{aligned}$$

isto é, $(u, v) \in W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \times W^{2,(q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (1.1).

Por outro lado se $(u, v) \in W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \times W^{2,(q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (1.1) por (1.10) e (1.11), $\forall \eta = (\eta_1, \eta_2) \in X$, obtemos

$$\Psi'_W(\omega)\eta = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\omega_1|^{(1/q)-1}\omega_1}{W_1^{1/q}} - T_1\omega_2 \right) \eta_1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\omega_2|^{(1/p)-1}\omega_2}{W_2^{1/p}} - T_2\omega_1 \right) \eta_2 dx = 0,$$

isto é, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in X$ é ponto crítico de Ψ_W . Para finalizar, por argumento de bootstrap é possível concluir que $u(x), v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$, os detalhes desse argumento serão feito no Apêndice A. ■

1.2 Resultados Preliminares

A seguir vamos mostrar que o funcional Ψ_W verifica a Geometria do Passo da Montanha.

Lema 1.3 *Admitindo que $W_i \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$. Então,*

- (i) *Existem $\rho, \beta > 0$ tais que $\Psi_W(\omega) \geq \beta$, desde que $\|\omega\| = \rho$,*
- (ii) *Existe $e \in X$, com $\|e\| > \rho$ tal que $\Psi_W(e) \leq 0$.*

Demonstração.

Inicialmente, vamos mostrar o item (i). Sendo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1 T_1 \omega_2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2 T_2 \omega_1 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_1| |T_1 \omega_2| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_2| |T_2 \omega_1| dx \end{aligned}$$

como $T_1 \omega_2 \in L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ e $T_2 \omega_1 \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, pela Desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx \leq |\omega_1|_{(q+1)/q} |T_1 \omega_2|_{q+1} + |\omega_2|_{(p+1)/p} |T_2 \omega_1|_{p+1}.$$

Como T_1 e T_2 são limitados, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx &\leq C_1 (|\omega_1|_{(q+1)/q} |\omega_2|_{(p+1)/p}) + C_2 (|\omega_2|_{(p+1)/p} |\omega_1|_{(q+1)/q}) \\ &\leq C_3 (|\omega_1|_{(q+1)/q} |\omega_2|_{(p+1)/p} + |\omega_2|_{(p+1)/p} |\omega_1|_{(q+1)/q}) = \\ &= 2C_3 |\omega_1|_{(q+1)/q} |\omega_2|_{(p+1)/p}. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx &\leq 2C_3 |\omega_1|_{(q+1)/q} |\omega_2|_{(p+1)/p} \\ &\leq C_3 (|\omega_1|_{(q+1)/q}^2 + |\omega_2|_{(p+1)/p}^2) \\ &= C_3 \|\omega\|^2, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in X, \end{aligned}$$

onde $C_1, C_2 > 0$ e $C_3 = \max\{C_1, C_2\} > 0$. Então,

$$\Psi_W(\omega) \geq A |\omega_1|_{(q+1)/q}^{(q+1)/q} + B |\omega_2|_{(p+1)/p}^{(p+1)/p} - C_3 (|\omega_1|_{(q+1)/q}^2 + |\omega_2|_{(p+1)/p}^2), \quad A, B > 0.$$

Considere agora $\|\omega\| = \rho$. Como $(q+1)/q, (p+1)/p < 2$, fixando $\rho \approx 0^+$, de maneira que

$$|\omega_1|_{(q+1)/q}, |\omega_2|_{(p+1)/p} < 1$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \Psi_W(\omega) &\geq M \left(|\omega_1|_{(q+1)/q}^{(q+1)/q} + |\omega_2|_{(p+1)/p}^{(p+1)/p} \right) \\ &\geq M \left(|\omega_1|_{(q+1)/q}^2 + |\omega_2|_{(p+1)/p}^2 \right) = M \|\omega\|^2 \end{aligned}$$

onde, $M = \max\{A, B\} > 0$.

Portanto, $\Psi_W(\omega) \geq M\rho^2 \geq \frac{M}{2}\rho^2 := \beta$, para $\|\omega\| = \rho$.

(ii) Sejam $\omega \neq 0 \in X$ e $t > 0$. Temos,

$$\Psi_W(t\omega) = C_1 t^{(q+1)/q} |\omega_1|_{(q+1)/q}^{(q+1)/q} + C_2 t^{(p+1)/p} |\omega_2|_{(p+1)/p}^{(p+1)/p} - \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx$$

como $(q+1)/q, (p+1)/p < 2$

$$\Psi_W(t\omega) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad |t| \rightarrow +\infty.$$

Assim, basta tomar

$$e = t_* \omega \quad \text{para} \quad t_* \approx +\infty$$

que teremos

$$\Psi_W(e) < 0 \quad \text{e} \quad \|e\| > \rho.$$

■

Definimos os seguintes números

$$\begin{aligned} c_1 &= \inf_{\omega \in \mathcal{N}} \Psi_W(\omega), \\ c_2 &= \inf_{0 \neq \omega \in X} \sup_{t \geq 0} \Psi_W(t\omega), \\ c_3 &= \inf_{\gamma \in \Gamma_W} \max_{t \in [0,1]} \Psi_W(\gamma(t)), \end{aligned}$$

onde $\Gamma_W = \{\gamma \in C([0,1], X); \Psi_W(\gamma(0)) = 0, \Psi_W(\gamma(1)) < 0\}$ e \mathcal{N} é a variedade de Nehari dado por

$$\mathcal{N} = \{\omega \in X \setminus \{0\}; \Psi'_W(\omega)(\omega) = 0\}.$$

Lema 1.4 *Temos $c_1 = c_2 = c_3$.*

Demonstração.

Pelo Lema B.1 (Apêndice B), temos $c_1 \leq c_2$ e o Corolário B.1 (Apêndice B) nos garante que $c_2 \leq c_1$ assim, $c_1 = c_2$. Como $\Psi_W(t\omega) < 0$ para $\omega \in X \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, fixamos $\omega \in X \setminus \{0\}$, $s_0 \in [0, \infty)$ tais que

$$\Psi_W(s_0\omega) < 0.$$

Definimos a função contínua, bijetora e crescente $g : [0, 1] \rightarrow [0, s_0]$ dada por $g(t) = ts_0$. Agora, tomando

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto \gamma(t) = g(t)\omega \end{aligned}$$

temos que $\gamma \in \Gamma$ e $c_3 \leq c_2$, pois

$$\begin{aligned} i) \gamma(0) &= g(0)\omega = 0 \\ ii) \Psi_W(\gamma(1)) &= \Psi_w(s_0\omega) < 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo corolário B.3 (Apêndice B) vimos que \mathcal{N} é homeomorfo a esfera, daí \mathcal{N} separa X em duas componentes. A componente que contém a origem contém também uma bola em torno da origem. Além disso $\Psi_w(\omega) \geq 0$ para todo ω nesta componente, porque $\Psi'_w(t\omega)(\omega) \geq 0$ para todo $0 \leq t \leq t_\omega$. Então pelo Teorema da Alfândega (Apêndice D) cada $\gamma \in \Gamma$ tem que cruzar \mathcal{N} e $c_1 \leq c_3$. Concluindo que $c_3 = c_1 = c_2$. ■

O próximo resultado explica o comportamento da sequência Palais - Smale (definição no Apêndice D).

Lema 1.5 *Seja $\{\omega_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ no nível $c > 0$ para o funcional Ψ_W . Então*

(a) *$\{\omega_n\}$ é limitada em X .*

(b) *Se $\omega_n \rightharpoonup \omega$ fracamente em X , com $\omega \neq 0$, então ω é uma solução fraca de (1.1).*

Demonstração.

Item (a) :

Seja $\{\omega_n\} = \{\omega_1^n, \omega_2^n\} \subset X$, uma sequência $(PS)_c$ com $c > 0$. Então, existem $C > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} \Psi_W(\omega_n) - \frac{1}{2}\Psi'_W(\omega_n)\omega_n &\leq \left| \Psi_W(\omega_n) - \frac{1}{2}\Psi'_W(\omega_n)\omega_n \right| \\ &\leq c + 1 + \frac{1}{2}|\Psi'(\omega_n)\omega_n| \\ &\leq C + \|\omega_n\|, \quad n \geq n_0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

pois,

$$|\Psi'(\omega_n)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $W_i \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ existem \widehat{c}_i , $i = 1, 2$, tais que por (1.12) observamos que

$$\begin{aligned} & \widehat{c}_1 \left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} dx + \widehat{c}_2 \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_2^n|^{(p+1)/p} dx \\ & \leq \left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx + \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx \\ & \leq C + \|\omega_n\| \\ & \leq C + \widetilde{C}(|\omega_1^n|_{(q+1)/q} + |\omega_2^n|_{(p+1)/p}). \end{aligned}$$

Na última desigualdade estamos usando a seguinte equivalência das normas

$$\|\omega_n\| = \sqrt{|\omega_1^n|_{(q+1)/q}^2 + |\omega_2^n|_{(p+1)/p}^2} \leq \widetilde{C}(|\omega_1^n|_{(q+1)/q} + |\omega_2^n|_{(p+1)/p}).$$

Escrevendo $c_1 = \widehat{c}_1 \left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \right) > 0$ e $c_2 = \widehat{c}_2 \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \right) > 0$, teremos

$$c_1 |\omega_1^n|_{(q+1)/q} + c_2 |\omega_2^n|_{(p+1)/p} \leq C + \widetilde{C}(|\omega_1^n|_{(q+1)/q} + |\omega_2^n|_{(p+1)/p}) \quad (1.13)$$

De fato, considere $X_n = |\omega_1^n|_{(q+1)/q}$, $Y_n = |\omega_2^n|_{(p+1)/p}$ e suponha que X_n é limitada e $Y_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Substituindo X_n e Y_n em (1.13) temos

$$c_1 X_n^{(q+1)/q} + c_2 Y_n^{(p+1)/p} \leq C + \widetilde{C}(X_n + Y_n), \quad (1.14)$$

dividindo (1.14) por $Y_n^{(p+1)/p}$ teremos

$$c_1 \frac{X_n^{(q+1)/q}}{Y_n^{(p+1)/p}} + c_2 \leq \frac{C}{Y_n^{(p+1)/p}} + \widetilde{C} \frac{(X_n + Y_n)}{Y_n^{(p+1)/p}} \quad (1.15)$$

Fazendo, $n \rightarrow \infty$ em (1.15) teremos $c_2 \leq 0$, o que é contradição. Analogamente temos uma contradição se $X_n \rightarrow \infty$ e Y_n é limitada. Por outro lado, se X_n e Y_n são ilimitadas supondo $p > q$ temos

$$\widehat{C}(X_n + Y_n)^{(p+1)/p} \leq C + \widetilde{C}(X_n + Y_n)$$

assim,

$$\widehat{C} \leq \frac{C}{(X_n + Y_n)^{(p+1)/p}} + \frac{\widetilde{C}(X_n + Y_n)}{(X_n + Y_n)^{(p+1)/p}}. \quad (1.16)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ na última desigualdade teremos novamente uma contradição. De forma análoga analisamos o caso $q > p$. Logo, $\{\omega_1^n\}$ e $\{\omega_2^n\}$ são limitadas, de onde segue que a sequência $\{\omega_n\}$ é limitada em X .

Item (b):

Para $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in X$ é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n \eta_1}{W_1^{1/q}} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1} \omega_1 \eta_1}{W_1^{1/q}} dx \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (i)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{(1/p)-1} \omega_2^n \eta_2}{W_2^{1/p}} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{(1/p)-1} \omega_2 \eta_2}{W_2^{1/p}} dx \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (ii)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, K\omega_n \rangle dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, K\omega \rangle dx \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (iii)$$

pois, sendo $\{\omega_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ temos $\Psi'_W(\omega_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e pela unicidade do limite teremos $\Psi'_W(\omega) = 0$. De fato, desde que $\Psi'_W(\omega_n)\eta \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n \eta_1}{W_1^{1/q}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{(1/p)-1} \omega_2^n \eta_2}{W_2^{1/p}} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, K\omega_n \rangle dx \rightarrow 0 \\ & \int_{\mathbb{R}^N} \eta_1 \left(\frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n}{W_1^{1/q}} - T_1 \omega_2^n \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \eta_2 \left(\frac{|\omega_2^n|^{(1/p)-1} \omega_2^n}{W_2^{1/p}} - T_2 \omega_1^n \right) dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Considerando $\eta = (\eta_1, 0)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_1 \left(\frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n}{W_1^{1/q}} - T_1 \omega_2^n \right) dx \rightarrow 0.$$

Definindo $G_1^n : L^{(q+1/q)}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$G_1^n(\eta_1) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_1 \left(\frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n}{W_1^{1/q}} - T_1 \omega_2^n \right) dx$$

como $\left(\frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n}{W_1^{1/q}} - T_1 \omega_2^n \right) \in L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema da Representação de Riesz em $L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$

$$|G_1^n|_{q+1} = \left| \frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n}{W_1^{1/q}} - u_n \right|_{q+1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (1.17)$$

onde $u_n = T_1 \omega_2^n$.

Por outro lado, pela definição do operador T_1 temos que $\{u_n\}$ é limitada em $W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$. Da imersão compacta de Sobolev, $W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q+1}(B_R)$, para $R = 1$ existe uma subsequência $\{u_{n_k}^1\}$ de $\{u_n\}$ tal que $u_{n_k}^1 \rightarrow u_1$ q.t.p. em B_1 . Usando novamente a compacidade da imersão $W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q+1}(B_2)$ como $\{u_{n_k}^1\}$ é limitada em $B_1 \subset B_2$ existe uma subsequência $\{u_{n_k}^2\}$ de $\{u_{n_k}^1\}$ tal que $u_{n_k}^2 \rightarrow u_2$ em B_2 .

Repetindo esse argumento, vamos encontrar uma subsequência de $\{u_n\}$ que denotaremos ainda por $\{u_n\}$ satisfazendo a seguinte propriedade: Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em B_k , isto é, $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em \mathbb{R}^N e $u_n \rightarrow u$ em $L^{q+1}(B_R)$ para $R > 0$ suficientemente grande.

Por (1.17), temos pelo Teorema C.3 (Apêndice C)

$$u_n(x) - \frac{|\omega_1^n(x)|^{(1/q)-1} \omega_1^n(x)}{W_1^{1/q}(x)} \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

como $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em \mathbb{R}^N , temos

$$\begin{aligned} \frac{|\omega_1^n(x)|^{(1/q)-1} \omega_1^n(x)}{W_1^{1/q}(x)} &\rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ \Rightarrow |\omega_1^n(x)|^{(1/q)-1} \omega_1^n(x) &\rightarrow u(x) W_1^{1/q}(x) := g(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ \Rightarrow |\omega_1^n(x)|^{1/q} &\rightarrow |g(x)| \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ \Rightarrow |\omega_1^n(x)| &\rightarrow |g(x)|^q \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Assim,

$$\omega_1^n = \frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n}{|\omega_1^n|^{1/q-1}} \rightarrow \frac{g(x)}{|g(x)||g(x)|^{-q}} := v \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, existe $f \in L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\left| u_n - \frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n}{W_1^{1/q}} \right| \leq f. \tag{1.19}$$

Desde que $u_n \rightarrow u$ em $L^{q+1}(K)$, $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, existe $g_1 \in L^{q+1}(K)$ tal que $|u_n| \leq g_1$, dessa forma de (1.19) temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1} \omega_1^n}{W_1^{1/q}} \right| &\leq \varphi \in L^{q+1}(K) \quad \text{onde } \varphi = g_1 + f, \\ \Rightarrow |\omega_1^n|^{1/q} &\leq \gamma \in L^{q+1}(K), \quad \text{onde } \gamma = \varphi W_1^{1/q}, \\ \Rightarrow |\omega_1^n| &\leq h \in L^{q+1}(K) \quad \text{onde, } h = \gamma^q. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Apêndice C)

$$\omega_1^n \rightarrow v \quad \text{em } L^{q+1}(K).$$

Desde que $\omega_1^n \rightarrow \omega_1$ em $L^{q+1}(B_R)$, para $R > 0$ suficientemente grande, segue que $\omega_1 = v$.

Por fim, veja que por (1.18) e (1.8)

$$\frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1}\omega_1^n}{W_1^{1/q}} \rightarrow \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1}\omega_1}{W_1^{1/q}} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

e pelos mesmos argumentos feitos anteriormente temos

$$\int_{B_R} \frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1}\omega_1^n\eta_1}{W_1^{1/q}} dx \rightarrow \int_{B_R} \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1}\omega_1\eta_1}{W_1^{1/q}} dx, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Como $\{\omega_n\}$ é limitada em $L^{(q+1)}(\mathbb{R}^N)$, segue de (1.19) que $\{\omega_1^n\}$ é limitada em $L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$.

Dessa forma, desde que $W_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ usando a Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1}\omega_1^n\eta_1}{W_1^{1/q}} dx &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\omega_1^n|^{q+1} dx \right)^{q+1} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\eta_1|^{(q+1)/q} dx \right)^{(q+1)/q} \\ &\leq \tilde{C} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\eta_1|^{(q+1)/q} dx \right)^{(q+1)/q} \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde C e \tilde{C} são constantes positivas. Observe que como $\eta_1 \in L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$ pela Teoria da Medida de Integração existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\eta_1|^{(q+1)/q} dx < \varepsilon,$$

para $R > 0$ suficientemente grande. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1}\omega_1^n}{W_1^{1/q}} - \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1}\omega_1}{W_1^{1/q}} \right) \eta_1 dx &= \int_{B_R} \left(\frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1}\omega_1^n}{W_1^{1/q}} - \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1}\omega_1}{W_1^{1/q}} \right) \eta_1 dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \left(\frac{|\omega_1^n|^{(1/q)-1}\omega_1^n}{W_1^{1/q}} - \frac{|\omega_1|^{(1/q)-1}\omega_1}{W_1^{1/q}} \right) \eta_1 dx. \end{aligned}$$

Portanto, por (1.20) e (1.21) temos que (i) ocorre. De maneira similar mostramos (ii).

Considere agora a aplicação $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, K\varphi \rangle dx \quad \forall \eta \in X.$$

Temos que $F \in X'$. De fato, dados $\varphi, g \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$F(\varphi + \alpha g) = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, K(\varphi + \alpha g) \rangle dx,$$

como K é linear temos

$$\begin{aligned} F(\varphi + \alpha g) &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, K\varphi + \alpha Kg \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, K\varphi \rangle dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^N} \langle \eta, Kg \rangle dx \\ &= F(\varphi) + \alpha F(g). \end{aligned}$$

Ademais, pela Desigualdade de Hölder e o fato de que T_1 e T_2 são limitados existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que para $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in X$,

$$\begin{aligned} |F(\varphi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\langle \eta, K\varphi \rangle| dx \\ &\leq C_1 |\eta_1|_{(p+1)/p} |\varphi_2|_{(q+1)/q} + C_2 |\eta_2|_{(q+1)/q} |\varphi_1|_{(p+1)/p} \\ &\leq C (|\eta_1|_{(p+1)/p} |\varphi_2|_{(q+1)/q} + |\eta_2|_{(q+1)/q} |\varphi_1|_{(p+1)/p}) \\ &\leq C \max\{|\eta_1|_{(p+1)/p}, |\eta_2|_{(q+1)/q}\} \|\varphi\| \\ \Rightarrow |F(\varphi)| &\leq \tilde{C} \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Então $F(\omega_n) \rightarrow F(\omega)$ quando $n \rightarrow \infty$, mostrando (iii). Completando assim a prova de (b). ■

Lema 1.6 *Seja $\{\omega_n\}$ uma sequência $(PS)_c$, no nível $c > 0$, tal que $\omega_n \rightarrow 0$ fracamente em X , quando $n \rightarrow +\infty$. Então, a sequência $\{\omega_n\}$ satisfaz*

i) $\omega_n \rightarrow 0$ fortemente em X , quando $n \rightarrow +\infty$, ou

ii) Existem $\rho, \eta > 0$, $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ e uma subsequência de $\{\omega_n\}$, a qual denotaremos por $\{\omega_n\}$, tal que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_\rho(y_n)} |\omega_1^n|^{2/q} dx \geq \eta \quad \text{ou} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_\rho(y_n)} |\omega_2^n|^{2/p} dx \geq \eta.$$

Demonstração.

Desde que $c > 0$ a situação (i) não pode ocorrer, pois caso contrário como $\{\omega_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ teríamos

$$\Psi_W(\omega_n) \rightarrow \Psi_W(0) = 0 = c,$$

o que é contradição.

Agora supondo que (ii) não ocorre. Então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |\omega_1^n|^{2/q} dx \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |\omega_2^n|^{2/p} dx \right] = 0 \quad \forall R > 0 \quad (1.22)$$

De fato, escrevendo $z_n = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\rho(y)} |\omega_1^n|^{2/q} dx$, mostraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Supondo por absurdo que não vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$. Então, existe $\{z_{n_k}\}$ subsequência de $\{z_n\}$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$

$$|z_{n_k}| \geq \varepsilon_0 > \frac{\varepsilon_0}{2} = \eta_0,$$

$$\Rightarrow \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{R_0}(y)} |\omega_1^{n_k}|^{2/q} dx > \eta_0$$

sempre que $n_k \geq n_0$, para algum $R_0 = \rho_0$. Denote $\{\omega_1^{n_k}\}$ por $\{\omega_1^n\}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $(y_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$ com

$$\eta_0 < \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{B_{\rho_0}(y_j^n)} |\omega_1^n|^{2/q} dx = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{\rho_0}(y_0)} |\omega_1^n|^{2/q} dx.$$

Escolhendo $y_n = y_{j_0}^n$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{B_\rho(y_n)} |\omega_1^n|^{2/q} dx > \eta_0 \\ \Rightarrow & \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_\rho(y_n)} |\omega_1^n|^{2/q} dx \geq \eta_0 \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois contradiz nossa hipótese de absurdo.

Recordando (1.10) temos $|u_n| = \frac{|\omega_1^n|^{1/q}}{W_1^{1/q}}$ e desde que $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} W_1(x) > 0$ segue de (1.22) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 dx \right] = 0 \quad \forall R > 0.$$

Analogamente vemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |v_n|^2 dx \right] = 0 \quad \forall R > 0.$$

Desde que $\{u_n\} \in W^{2,(p+1/p)}(\mathbb{R}^N)$ e $\{v_n\} \in W^{2,(q+1/q)}(\mathbb{R}^N)$ pelo Lema de P.L. Lions (Apêndice C) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q+1} dx, \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, por (1.17) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} dx, \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_2^n|^{(p+1)/p} dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

isto é,

$$\|\omega_n\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

o que é contradição, pois $c > 0$. ■

1.3 Demonstração do Teorema 1.1

Pelo Lema 1.3, vimos que Ψ_W satisfaz a geometria do Passo da Montanha. Então usando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti - Rabinowitz sem a condição

(*PS*) (Apêndice D), dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\omega_\varepsilon \in \Psi_W^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$ com

$$|\Psi'_W(\omega_\varepsilon)| < 2\varepsilon$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma_W} \max_{t \in [0,1]} \Psi_W(\gamma(t)) \geq \beta$$

e

$$\Gamma_W = \{\gamma \in C([0,1], X); \Psi_W(\gamma(0)) = 0, \Psi_W(\gamma(1)) < 0\}.$$

O número real c é chamado de nível do passo da montanha e associado a ele temos uma sequência (*PS*), pois pelo Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti - Rabinowitz para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $\varepsilon = 1/n$ e $\omega_n = \omega_{1/n}$ com

$$\omega_n \in \Psi_W^{-1}([c - 2/n, c + 2/n]) \quad \text{e} \quad \|\Psi'_W(\omega_n)\| \leq 2/n.$$

Portanto,

$$\Psi_W(\omega_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \Psi'_W(\omega_n) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Pelo item (a) do Lema 1.5, $\{\omega_n\}$ é limitada e como X é um espaço reflexivo podemos assumir que para alguma subsequência $\omega_n \rightharpoonup \omega$ fracamente em X . Se $\omega \neq 0$ o item (b) do Lema 1.5 assegura que ω é uma solução fraca de (1.1). Agora, se $\omega = 0$ definimos

$$\widehat{\omega}_1^n(x) = \omega_1^n(x + y_n), \quad \widehat{\omega}_2^n(x) = \omega_2^n(x + y_n), \quad y_n \in \mathbb{Z}^N.$$

com y_n como é dado no item (ii) do Lema 1.3. Usando o fato que, $W_i, i = 1, 2$ são funções 1 – periódicas, segue que F^* e G^* são 1 – periódicas e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \widehat{\omega}_n, K \widehat{\omega}_n \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K \omega_n \rangle dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} F^*(x, \widehat{\omega}_1^n) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} F^*(x, \omega_1^n) dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} G^*(x, \widehat{\omega}_2^n) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} G^*(x, \omega_2^n) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Psi_W(\widehat{\omega}_n) = \Psi_W(\omega_n) \rightarrow c \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Desde que $F^{*'} é 1 – periódica,$

$$\Psi'_W(\widehat{\omega}_n)\varphi = \Psi'_W(\omega_n)\varphi_n, \quad \varphi_n(x) = \varphi(x - y_n), \quad \varphi \in X.$$

e segue que

$$\Psi'_W(\widehat{\omega}_n) \rightarrow 0 \quad \text{em } X', \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Conseqüentemente, $\{\widehat{\omega}_n\}$ é uma seqüência $(PS)_c$, com $c > 0$, e podemos concluir também do Lema 1.5 que $\{\widehat{\omega}_n\}$ é limitada e, a menos de subsequência,

$$\widehat{\omega}_n \rightharpoonup \widehat{\omega} \quad \text{fracamente em } X \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

como na prova do item (a) do Lema 1.5, temos

$$\widehat{\omega}_1^n \rightharpoonup \widehat{\omega}_1 \quad \text{fracamente em } L^{(q+1)/q}(B_R) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$\widehat{\omega}_2^n \rightharpoonup \widehat{\omega}_2 \quad \text{fracamente em } L^{(p+1)/p}(B_R) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

para $R > 0$ suficientemente grande. A partir de (ii) do Lema 1.6, obtemos

$$\int_{B_{R+1}(y_n)} |\widehat{\omega}_1^n|^{q+1/q} dx \geq \eta > 0, \quad \int_{B_{R+1}(y_n)} |\widehat{\omega}_2^n|^{p+1/p} dx \geq \eta > 0.$$

Então $\widehat{\omega} \neq 0$. Portanto pelo item (b) do Lema 1.5, $\widehat{\omega}$ é uma solução não trivial de (1.1).

Além disso, se ω é a solução não trivial obtida e $\Psi_W(\omega_n) \rightarrow c$, temos

$$c = \Psi_W(\omega) - \frac{1}{2} \Psi'_W(\omega)(\omega) + o_n(1), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (1.23)$$

pois,

$$c = \Psi_W(\omega_n) + o_n(1), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como,

$$\Psi_W(\omega_n) - \frac{1}{2} \Psi'_W(\omega_n)(\omega_n) = \left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx + \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx.$$

Então, pelo lema de Fatou

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} & \left[\left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx + \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_{2,n}|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx + o_n(1) \right] \\ & \geq \left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx + \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx \\ & = \Psi_W(\omega) - \frac{1}{2} \Psi'_W(\omega)(\omega) \end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx + \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx \\ &= \left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx + \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx. \end{aligned}$$

Logo, por (1.23) concluímos que $c \geq \Psi_W(\omega)$. Por outro lado, o Lema 1.4 implica que $c \leq \Psi_W(\omega)$ então $c = \Psi_W(\omega)$. Logo pelo Lema 1.4 concluímos que $\Psi_W(\omega) = \inf_{\omega \in \mathcal{N}} \Psi_W(\omega)$, isto é, a solução é de energia mínima.

Positividade: Seja $(u, v) \in W^{2,(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \times W^{2,(q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$ uma solução não trivial do problema (1.1). Como vimos na Lema 1.2, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ é um ponto crítico não trivial do funcional Ψ_W satisfazendo $\Psi_W(\omega) = c$. Primeiramente, observe que desde que $c > 0$, e pela definição de $\langle \eta, K\omega \rangle$ nos temos que se $\omega = (\omega_1, \omega_2) \neq 0$ implica que $\omega_1 \neq 0$ e $\omega_2 \neq 0$.

Afirmção 1.3 $\omega^+ = (\omega_1^+, \omega_2^+) = (0, 0)$ ou $\omega^- = (\omega_1^-, \omega_2^-) = (0, 0)$ onde $\omega_i^\pm = \max\{\pm\omega_i, 0\}$ ($i = 1, 2$).

Usando a igualdade $\omega_1 = \omega_1^+ - \omega_1^-$ e $\omega_2 = \omega_2^+ - \omega_2^-$ e a linearidade do operador K , temos a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega^+, K\omega^+ \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega^-, K\omega^- \rangle dx. \quad (1.24)$$

De fato, como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1^+ T_1 \omega_2^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2^+ T_2 \omega_2^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1^- T_1 \omega_2^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2^- T_2 \omega_2^- dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1^+ T_1 \omega_2^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1^- T_1 \omega_2^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2^+ T_2 \omega_1^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2^- T_2 \omega_1^+ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1^+ T_1 \omega_2^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2^+ T_2 \omega_2^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1^- T_1 \omega_2^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2^- T_2 \omega_2^- dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega^+, K\omega^+ \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega^-, K\omega^- \rangle dx. \end{aligned}$$

Isto é claro pelo fato de que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega_1^+ T_1 \omega_2^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1^- T_1 \omega_2^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2^+ T_2 \omega_1^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_2^- T_2 \omega_1^+ dx \geq 0, \quad (1.25)$$

em vista que $\omega_1^\pm, \omega_2^\pm \geq 0$, por (1.10) temos $u = T_1 \omega_2$ e $v = T_2 \omega_1$, da regularidade que mostramos no Apêndice A, temos $T_1 \omega_2^-, T_1 \omega_2^+, T_2 \omega_1^-, T_2 \omega_1^+ \in W^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ para todo $s <$

∞ , assim $T_1\omega_2^-, T_1\omega_2^+, T_2\omega_1^-, T_2\omega_1^+ \in C(B_R)$ toda bola B_R com $R > 0$ suficientemente grande. Logo, pelo Princípio de Máximo (Apêndice C) temos $T_1\omega_2^-, T_1\omega_2^+, T_2\omega_1^-, T_2\omega_1^+ \geq 0$, justificando (1.25).

Assim, a desigualdade (1.24) implica que

$$\Psi_W(\omega) = \max_{t \geq 0} \Psi_W(t\omega) \geq \Psi_W(t\omega) \geq \Psi_W(t\omega^+) + \Psi_W(t\omega^-) \quad \forall t \geq 0. \quad (1.26)$$

Suponha por contradição que $\omega^+ \neq 0$ e $\omega^- \neq 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega^+, K\omega^+ \rangle dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega^-, K\omega^- \rangle dx > 0. \quad (1.27)$$

Relembrando que se $\omega^+ \neq 0$, então $\omega_1^+ \neq 0$ ou $\omega_2^+ \neq 0$, pois caso contrário teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega^+, K\omega^+ \rangle dx = 0.$$

e assim,

$$\Psi_W(t\omega^+) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|t\omega_1^+|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|t\omega_2^+|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx = C_1 t^{(q+1)/q} + C_2 t^{(p+1)/p}$$

onde, $C_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^+|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx$ e $C_2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^+|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx$. Implicando que

$$\Psi_W(t\omega^+) \rightarrow \infty, \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty,$$

contradizendo (1.26).

De (1.27), existe $t_0^\pm \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\Psi_W(t_0^\pm \omega^\pm) = \max_{t \geq 0} \Psi_W(t\omega^\pm).$$

Pela definição do nível do passo da montanha c , temos

$$\Psi_W(t_0^+ \omega^+) \geq c \quad \text{e} \quad \Psi_W(t_0^- \omega^-) \geq c \quad (1.28)$$

Substituindo t_0^+ em (1.26) e usando (1.28) nos obtemos

$$\Psi_W(\omega) = c \geq \Psi_W(t_0^+ \omega^+) + \Psi_W(t_0^+ \omega^-) \geq c + \Psi_W(t_0^+ \omega^-).$$

isto é,

$$\Psi_W(t_0^+ \omega^-) \leq 0,$$

isto implica que

$$t_0^+ > t_0^- \quad (1.29)$$

similarmente, temos

$$t_0^+ < t_0^- \quad (1.30)$$

De (1.29) e (1.30) teremos uma contradição, qual implica que $\omega^+ = 0$ ou $\omega^- = 0$.

Suponha que $\omega^- \neq 0$ ($\omega^+ = 0$). Defina o vetor $\widehat{\omega} = -\omega = (-\omega_1, -\omega_2) = \omega^-$. Neste caso, em vista de $\omega_1 \leq 0$ e $\omega_2 \leq 0$ teremos $\widehat{\omega}^+ \neq 0$ e $\widehat{\omega}^- = 0$. Além disso observe que

$$\Psi_W(\omega) = \Psi_W(\widehat{\omega}) \quad \text{e} \quad \Psi'_W(\omega)(\omega) = \Psi'_W(\widehat{\omega})(\widehat{\omega}).$$

Portanto, $\widehat{\omega} \in \mathcal{N} = \{z \in X \setminus \{0\}; \Psi'_W(z)(z) = 0\}$. Vamos mostrar que $\Psi'_W(\widehat{\omega}) = 0$.

No que segue denotamos

$$J(z) = \Psi'_W(z)(z)$$

disso segue que $\mathcal{N} = J^{-1}(\{0\}) \cap X$. Veja que 0 é valor regular de J , pois sendo

$$J(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx$$

temos

$$J'(\omega)(\omega) = \frac{q+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{((q+1)/q)+1}}{W_1^{1/q}} dx + \frac{p+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{((p+1)/p)+1}}{W_2^{1/p}} dx - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx$$

dessa forma, se $\omega \in \mathcal{N}$, temos

$$J'(\omega)(\omega) = \left(\frac{q+1}{q} - 2 \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{((q+1)/q)+1}}{W_1^{1/q}} dx + \left(\frac{p+1}{p} - 2 \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{((p+1)/p)+1}}{W_2^{1/p}} dx < 0$$

pois $(q+1)/q, (p+1)/p < 2$. Segue então que,

$$J'(\omega) \neq 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{N}.$$

Ademais, temos que J é limitada inferiormente em \mathcal{N} . Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Apêndice D) existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi'_W(\widehat{\omega}) = \lambda J'(\widehat{\omega}). \quad (1.31)$$

Note que, por (1.31) temos

$$\lambda J'(\widehat{\omega})(\widehat{\omega}) = 0$$

qual implica que $\lambda = 0$, pois $J'(\widehat{\omega})(\widehat{\omega}) \neq 0$. Portanto,

$$\Psi'_W(\widehat{\omega}) = 0,$$

isto é, $\widehat{\omega}$ é um ponto crítico não trivial de Ψ_W com entradas não negativas. Consequentemente de (1.11), desde que $\omega \neq (0, 0)$, $\omega_1, \omega_2 \geq 0$ e $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, temos que $(u, v) \neq (0, 0)$ e $u, v \geq 0$. Ademais (u, v) é solução do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = W_2(x)v^p, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + v = W_1(x)u^q, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0, v \geq 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, N \geq 2. \end{cases}$$

Desde que $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$, para isto veja em [30] e u satisfaz

$$-\Delta u + u = W_2(x)v^p \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N$$

usando o Princípio de Máximo Fraco (Apêndice C) temos que $u > 0$ em toda bola B_R com $R > 0$ grande. Dessa forma, concluímos que $u > 0$ em \mathbb{R}^N . Analogamente temos $v > 0$ em \mathbb{R}^N . Mostrando o resultado. ■

1.4 Demonstração do Teorema 1.2

Note que aplicando o Teorema 1, o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = V_2(x)|v|^{p-1}v, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + v = V_1(x)|u|^{q-1}u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & \text{quando } |x| \rightarrow \infty \\ u > 0, v > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, N \geq 2 \end{cases} \quad (1.32)$$

possui pelo menos uma solução positiva $\tilde{\omega} \in X$, que é um ponto crítico do funcional Ψ_V definido por

$$\begin{aligned} \Psi_V(\omega) &= \left(\frac{q}{q+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V_1^{1/q}} |\omega_1|^{(q+1)/q} dx + \left(\frac{p}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V_2^{1/p}} |\omega_2|^{(p+1)/p} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx \end{aligned}$$

com $\Psi_V(\tilde{\omega}) = c_1$ e $\Psi'_V(\tilde{\omega})\eta = 0$, $\eta \in X$, onde c_1 foi dado no Lema 1.2.

Como na demonstração do Teorema 1.1, pelo Lema 1.3 e o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti - Rabinowitz sem a condição (PS) , existe $\{\omega_n\} \subset X$ tal que

$$\Psi_W(\omega_n) \rightarrow c_\omega \quad \text{e} \quad \Psi'_W(\omega_n) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

onde

$$c_\omega = \inf_{\gamma \in \Gamma_W} \max_{t \in [0,1]} \Psi_W(\gamma(t)) > 0$$

e

$$\Gamma_W = \{\gamma \in C([0,1], X); \Psi_W(\gamma(0)) = 0, \Psi_W(\gamma(1)) < 0\}.$$

Pelo Lema 1.5, deduzimos que para uma subsequência, $\omega_n \rightarrow \omega$ fracamente em X , quando $n \rightarrow \infty$ e também que ω é uma solução de (1.1). Uma vez que a positividade, bem como o decaimento no infinito segue da prova do Teorema 1.1, é suficiente mostrar que $\omega \neq 0$. Supondo por contradição que $\omega = 0$, afirmamos que

Afirmção 1.4

- a) $|\Psi_W(\omega_n) - \Psi_V(\omega_n)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$
b) $|(\Psi'_W - \Psi'_V)(\omega_n)| = \sup_{\eta \in X, |\eta|=1} |(\Psi'_W - \Psi'_V)(\omega_n)\eta| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Assumindo a Afirmção 1.4 por um tempo, teremos

$$\Psi_V(\omega_n) \rightarrow c_\omega \quad \text{e} \quad \Psi'_V(\omega_n) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

então, sendo $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ a solução de (1.32), temos

$$0 < c_\omega \leq \sup_{t \geq 0} \Psi_W(t\tilde{\omega}) = \Psi_W(t^*\tilde{\omega}) \quad \text{para algum } t^* \in \mathbb{R}.$$

Em vista que $\tilde{\omega}_i > 0$, $i = 1, 2$, pelas hipóteses (1.3), (1.4) vemos que

$$c_\omega \leq \Psi_W(t^*\tilde{\omega}) < \Psi_V(t^*\tilde{\omega}) \leq \sup_{t \geq 0} \Psi_V(t\tilde{\omega}).$$

Como $\tilde{\omega} \in \mathcal{N}$ pelo Lema 1.4 obtemos $\sup_{t \geq 0} \Psi_V(t\tilde{\omega}) = \Psi_V(\tilde{\omega}) = c_1$, o que implica que $c_\omega < c_1$. Vamos provar a inequação reversa $c_1 \leq c_\omega$, obtendo assim uma contradição.

Uma vez que

$$\Psi'_V(\omega_n)\omega_n = o_n(1), \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty,$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\omega_1^n|^{(q+1)/q}}{V_1^{1/q}} + \frac{|\omega_2^n|^{(p+1)/p}}{V_2^{1/p}} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K\omega_n \rangle dx + o_n(1), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.33)$$

Desde que $\omega_n \rightharpoonup \omega$ fracamente em X quando $n \rightarrow \infty$ e $\{\omega_n\}$ é limitada em X , assumimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(q+1)/q}}{V_1^{1/q}} dx \rightarrow L_1, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (1.34)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{(p+1)/p}}{V_2^{1/p}} dx \rightarrow L_2, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (1.35)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K\omega_n \rangle dx \rightarrow L = L_1 + L_2, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.36)$$

Notemos que, $L > 0$, pois se $L = 0$, então

$$\|\omega_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

que é uma contradição com $c_\omega > 0$. Desta forma existe $\delta > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K\omega_n \rangle dx \geq \delta > 0, \quad n \geq n_0.$$

Assim, existe $\{t_n\} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi_V(t_n\omega_n) = \max_{t \geq 0} \Psi_V(t\omega_n), \quad n \geq n_0,$$

isto é,

$$\frac{1}{t_n^{1-1/q}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(q+1)/q}}{V_1^{1/q}} dx + \frac{1}{t_n^{1-1/p}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{(p+1)/p}}{V_2^{1/p}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K\omega_n \rangle dx \quad (1.37)$$

pois,

$$\Psi'_V(t_n\omega_n)(t_n\omega_n) = 0, \quad t_n\omega_n \in \mathcal{N}.$$

Por (1.37) observamos que $\{t_n\}$ é limitada superiormente. Além disso, desde que $L > 0$, assumimos, sem perda de generalidade, que

$$|\omega_1^n|_{(q+1)/q}^{(q+1)/q} \geq \delta_0 > 0.$$

Note que $t_n \nrightarrow 0$, pois caso contrário, como $\{\omega_n\}$ é limitada em X usando (1.37) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K\omega_n \rangle dx \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

o que é uma contradição devido a limitação de $\{\omega_n\}$. Agora, assumindo que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, por (1.37) temos

$$\int \langle \omega_n, K\omega_n \rangle dx \rightarrow 0,$$

concluindo que $\|\omega_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ o que contradiz o fato que $c_\omega > 0$. Então, por argumento similares feito no Corolário B.2 (Apêndice B) temos que $\{t_n\}$ é limitada, donde segue que a menos de subsequência existe $t_o \in (0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow t_o$. Subtraindo (1.37) de (1.33) obtemos

$$o_n(1) = (t_n^{(1/q)-1} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(q+1)/q}}{V_1^{1/q}} dx + (t_n^{(1/p)-1} - 1) \int \frac{|\omega_2^n|^{(p+1)/p}}{V_2^{1/p}} dx \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.38)$$

Passando o limite em (1.38), usando (1.34) e (1.35) obtemos

$$0 = (t_0^{1/q-1} - 1)L_1 + (t_0^{1/p-1} - 1)L_2.$$

Como L_1 ou $L_2 > 0$ temos que $t_0 = 1$, isto é,

$$t_n \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_1 &\leq \Psi_V(t_n \omega_n) \\ &= \Psi_V(\omega_n) - \Psi_V(\omega_n) + \Psi_V(t_n \omega_n) \\ &= \Psi_V(\omega_n) + (1 - t_n^2) \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K\omega_n \rangle dx - (1 - t_n^{(q+1)/q}) \frac{q}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{(q+1)/q}}{V_1^{1/q}} dx \\ &\quad - (1 - t_n^{(p+1)/p}) \frac{p}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{(p+1)/p}}{V_2^{1/p}} dx. \end{aligned}$$

Desde que $L > 0$ e $t_n \rightarrow 1$, passando o limite quando $n \rightarrow \infty$ na desigualdade anterior obtemos,

$$c_1 \leq c_\omega.$$

Para concluir a demonstração do Teorema 1.2, provaremos a seguir a Afirmação 1.4.

De fato, primeiramente, desde que V_i satisfaz (1.5) e $W_i = V_i - \overline{W}_i$, $i = 1, 2$, observamos que a desigualdade

$$\frac{1}{W_1^{1/q}} - \frac{1}{V_1^{1/q}} = \frac{V_1^{1/q} - W_1^{1/q}}{(V_1 W_1)^{1/q}} \leq C(V_1^{1/q} - W_1^{1/q}) = C\overline{W}_1^{1/q} \quad (1.39)$$

é obtida para alguma constante $C > 0$. Similarmente temos

$$\frac{1}{W_2^{1/p}} - \frac{1}{V_2^{1/p}} \leq C\overline{W}_2^{-1/p}. \quad (1.40)$$

Como na prova do item (a) do Lema 1.2 e desde que $\omega = 0$, assumimos que

$$\omega_1^n \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^{(q+1)/q}(B_R) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.41)$$

e

$$\omega_2^n \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^{(p+1)/p}(B_R) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.42)$$

para $R > 0$ suficientemente grande.

Observe

$$\begin{aligned} \Psi_W(\omega_n) - \Psi_V(\omega_n) &= \left(\frac{q}{q+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{W_1^{1/q} - V_1^{1/q}} |\omega_1|^{(q+1)/q} dx \\ &+ \left(\frac{p}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{W_2^{1/p} - V_2^{1/p}} |\omega_2|^{(p+1)/p} dx. \end{aligned}$$

Assim, de (1.39) e (1.40) para demonstrar a Afirmação 1.4 é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} \overline{W}_1 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty; \quad (1.43)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_2^n|^{(p+1)/p} \overline{W}_2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty; \quad (1.44)$$

$$\sup_{|\eta|=1} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_1^n|^{1/q-1} \omega_1^n \eta_1 \overline{W}_1 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty; \quad (1.45)$$

$$\sup_{|\eta|=1} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_2^n|^{1/p-1} \omega_2^n \eta_2 \overline{W}_2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.46)$$

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) \in X.$$

Verificação de (1.43): Separando as integrais temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} \overline{W}_1 dx = \int_{B_R} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} \overline{W}_1 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} \overline{W}_1 dx \quad (1.47)$$

Por (1.41) temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} \overline{W}_1 dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} \overline{W}_1 dx \leq C |\overline{W}_1|_{\infty, \mathbb{R}^N \setminus B_R}.$$

Agora para R suficientemente grande, usando (1.6) concluímos a prova de (1.43).

De maneira análoga verificamos (1.44).

Verificação de (1.45): Separando as integrais temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_1^n|^{1/q-1} \omega_1^n \eta_1 \overline{W_1} dx = \int_{B_R} |\omega_1^n|^{1/q-1} \omega_1^n \eta_1 \overline{W_1} dx + \int_{\mathbb{R}^N - B_R} |\omega_1^n|^{1/q-1} \omega_1^n \eta_1 \overline{W_1} dx = J_1 + J_2.$$

Pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$J_1 \leq \int_{B_R} |\omega_1^n|^{1/q} |\eta_1| |\overline{W_1}| dx \leq |\overline{W_1}|_\infty \left(\int_{B_R} |\omega_1^n|^{(q+1)/q} dx \right)^{1/(q+1)} \left(\int_{B_R} |\eta_1|^{(q+1)/q} dx \right)^{q/(q+1)}.$$

e por (1.6) temos

$$J_2 \leq \varepsilon \|\omega_n\| \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\eta_1|^{(q+1)/q} dx \right)^{q/(q+1)}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Então por (1.41) verificamos (1.45). Analogamente verificamos (1.46). ■

Capítulo 2

Existência e simetria de solução nodal de energia mínima para um Sistema Hamiltoniano

Neste capítulo, utilizando como texto base o artigo de Bonheure, Santos, Ramos e Tavares [6], vamos estudar a existência de solução nodal de energia mínima para o sistema Hamiltoniano com equação tipo Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\beta |v|^{q-1} v, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = |x|^\alpha |u|^{p-1} u, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ e as não-linearidades verificam

$$1 > \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N}. \quad (2.2)$$

Observe que (2.2) também é equivalente a $pq > 1$, pois

$$\begin{aligned} 1 > \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} &\Leftrightarrow 1 > \frac{p+q+2}{(p+1)(q+1)} \\ 1 > \frac{p+q+2}{pq+p+q+1} &\Leftrightarrow pq+p+q+1 > p+q+2 \Leftrightarrow pq > 1. \end{aligned}$$

No que segue, diremos que uma solução (u, v) de (2.1) é uma solução nodal, quando $u^\pm, v^\pm \neq 0$, onde $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{-u, 0\}$ e $v^+ = \max\{v, 0\}$, $v^- =$

$\max\{-v, 0\}$. O sistema (2.1) está fortemente acoplado no sentido que $u = 0$ se, e somente se, $v = 0$. Mais ainda, u muda de sinal se, e somente se, v muda de sinal. Considerando o funcional energia associado a (2.1) dado por

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |x|^{\alpha} |u|^{p+1} dx - \frac{1}{q+1} \int_{\Omega} |x|^{\beta} |v|^{q+1} dx$$

e o nível nodal de menor energia por

$$c_{\text{nod}} = \inf\{E(u, v), (u, v) \text{ é solução de (2.1) e } u^{\pm} \neq 0, v^{\pm} \neq 0\}.$$

O primeiro teorema deste capítulo mostramos que (2.1) tem solução nodal de energia mínima.

Teorema 2.1 *Se $N \geq 1, \alpha, \beta \geq 0$ e supondo que (2.2) é satisfeito. Então o nível c_{nod} é atingido, isto é, existe uma solução (u, v) de (2.1) tal que $u^{\pm} \neq 0, v^{\pm} \neq 0$ e $E(u, v) = c_{\text{nod}}$.*

Em seguida, supondo que $p = q, \alpha = \beta$ veremos que qualquer solução (u, v) de (2.1) é tal que $u = v$ onde u resolve

$$-\Delta u = |x|^{\beta} |u|^{q-1} u \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Teorema 2.2 *Assuma que $u, v \in H_0^1(\Omega)$ resolve o sistema*

$$-\Delta u = |x|^{\beta} |v|^{q-1} v, \quad -\Delta v = |x|^{\beta} |u|^{q-1} u, \quad \text{em } \Omega \quad u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (2.3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1, q > 1$ e $q+1 \leq 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$. Então $u=v$.

Por fim, mostramos uma quebra de simetria.

Teorema 2.3 *Assuma que $N \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ou é uma bola ou um anel centrado na origem. Seja q_0 satisfazendo*

$$q_0 > 1 \quad \text{e} \quad q_0 + 1 < 2N/(N-2) \quad \text{se} \quad N \geq 3.$$

Então existe $\delta_0 > 0$ tal que $p, q \in [q_0 - \delta, q_0 + \delta], \alpha, \beta \in [0, \delta_0]$, e a solução de energia mínima (2.1) é tal que ambas u e v não são radialmente simétricas.

2.1 Método dual e alguns lemas técnicos

Vamos introduzir de uma forma precisa a configuração variacional do método dual. Dados $r > 1$ e $\gamma \geq 0$, denotamos por

$$L^r(\Omega, |x|^{-\gamma}) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |u|^r |x|^{-\gamma} dx < \infty\}$$

o qual é um espaço de Banach com a norma

$$|u|_{r,\gamma} = \left(\int_{\Omega} |u|^r |x|^{-\gamma} dx \right)^{1/r}.$$

Observe que, desde que Ω é limitado e $\gamma \geq 0$, temos a inclusão

$$L^r(\Omega, |x|^{-\gamma}) \subset L^r(\Omega).$$

De fato, desde que $x \in \Omega$ temos

$$|x| \leq k, \quad \forall x \in \Omega, \quad k > 0$$

$$\Rightarrow |x|^\gamma \leq k^\gamma := C, \quad \forall x \in \Omega, \quad k > 0$$

daí,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^r dx &= \int_{\Omega} |u|^r \frac{|x|^\gamma}{|x|^\gamma} dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |u|^r |x|^{-\gamma} dx \end{aligned}$$

assim,

$$\left(\int_{\Omega} |u|^r dx \right)^{1/r} \leq C \left(\int_{\Omega} |u|^r |x|^{-\gamma} dx \right)^{1/r}$$

isto é,

$$|u|_r \leq C |u|_{r,\gamma} \quad \forall u \in L^r(\Omega, |x|^{-\gamma}), \quad r > 1, \gamma \geq 0. \quad (2.4)$$

Tomando o inverso do operador de Laplace e reescrevendo o sistema como

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-1}(|x|^\beta |v|^{q-1} v) &= u \\ (-\Delta)^{-1}(|x|^\alpha |u|^{p-1} u) &= v, \end{aligned} \quad (2.5)$$

definimos

$$\omega_1 = |x|^\alpha |u|^{p-1} u \quad \text{e} \quad \omega_2 = |x|^\beta |v|^{q-1} v \quad (2.6)$$

temos então,

$$(-\Delta)^{-1}\omega_2 = |x|^{\frac{-\alpha}{p}}|\omega_1|^{\frac{1}{p}-1}\omega_1, \quad (-\Delta)^{-1}\omega_1 = |x|^{\frac{-\beta}{q}}|\omega_2|^{\frac{1}{q}-1}\omega_2. \quad (2.7)$$

De fato, como $\omega_1 = |x|^\alpha|u|^{p-1}u$ temos

$$|\omega_1| = |x|^\alpha|u|^p$$

daí,

$$|\omega_1|^{\frac{1}{p}} = |x|^{\frac{\alpha}{p}}|u|$$

assim,

$$|u| = |\omega_1|^{\frac{1}{p}}|x|^{\frac{-\alpha}{p}}. \quad (2.8)$$

Por outro lado, temos

$$u = \omega_1|x|^{-\alpha}|u|^{1-p} \quad (2.9)$$

substituindo em (2.8) em (2.9) temos

$$\begin{aligned} u &= \omega_1|x|^{-\alpha}|\omega_1|^{\frac{1-p}{p}}|x|^{-\alpha\frac{1-p}{p}} \\ \Rightarrow u &= \omega_1|x|^{\frac{-\alpha}{p}}|\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \end{aligned}$$

daí,

$$(-\Delta)^{-1}\omega_2 = u = |x|^{\frac{-\alpha}{p}}|\omega_1|^{\frac{1}{p}-1}\omega_1.$$

Analogamente temos

$$(-\Delta)^{-1}\omega_1 = |x|^{-\beta q}|\omega_2|^{\frac{1}{q}-1}\omega_2.$$

Vamos trabalhar no espaço produto

$$X := L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{-\alpha}{p}}) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{\frac{-\beta}{q}})$$

o qual é um espaço Banach com a norma

$$\|(\omega_1, \omega_2)\| := |\omega_1|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} + |\omega_2|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}}, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in X$$

e usamos a aplicação $T : X \rightarrow L^1(\Omega)$ dada por

$$T\omega = \omega_1 K\omega_2 + \omega_2 K\omega_1, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in X$$

onde, com algum abuso de notação, K denota o inverso de $-\Delta$ com a condição $u|_{\partial\Omega} = 0$ no problema de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

Observe que estamos usando a mesma letra K para denotar ambos operadores

$$K_{\frac{p+1}{p}} : L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \rightarrow W^{2, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

e

$$K_{\frac{q+1}{q}} : L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \rightarrow W^{2, \frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega).$$

Mais tarde usaremos o fato de que

$$u \in L^t(\Omega) \cap L^s(\Omega) \Rightarrow K_t u = K_s u \quad (t, s > 1)$$

que é uma consequência imediata da unicidade do problema de Dirichlet. Usando a imersão compacta

$$W^{2, \frac{q+1}{q}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega) \quad (2.11)$$

$$W^{2, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega).$$

obtemos a compacidade de $K : L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \rightarrow L^{q+1}(\Omega)$ e $K : L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \rightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

Por (2.11) e pela Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\omega_1 K \omega_2| dx &\leq \|\omega_1\|_{\frac{p+1}{p}} \|K \omega_2\|_{p+1} \\ &\leq c_1 \|\omega_1\|_{\frac{p+1}{p}} \|K \omega_2\|_{W^{2, \frac{q+1}{q}}(\Omega)} \\ &\leq c_2 \|\omega_1\|_{\frac{p+1}{p}} \|\omega_2\|_{\frac{q+1}{q}} \\ &\leq c_3 \|\omega_1\|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} \|\omega_2\|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}} \end{aligned}$$

e analogamente obtemos uma estimativa para $\omega_2 K \omega_1$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |T\omega| dx &\leq \int_{\Omega} (|\omega_1 K \omega_2| + |\omega_2 K \omega_1|) dx \\ &= \int_{\Omega} |\omega_1 K \omega_2| dx + \int_{\Omega} |\omega_2 K \omega_1| dx \\ &\leq c_3 \|\omega_1\|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} \|\omega_2\|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}} + c_4 \|\omega_1\|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} \|\omega_2\|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}} \\ \Rightarrow \int_{\Omega} |T\omega| dx &\leq c \|\omega_1\|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} \|\omega_2\|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}}, \quad \text{onde } c = \max\{c_3, c_4\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usando a integração por partes temos

$$\int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2 dx = \int_{\Omega} \omega_2 K \omega_1 dx \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in X. \quad (2.13)$$

De fato, por (2.6) temos

$$\omega_1 = -\Delta v \text{ e } \omega_2 = -\Delta u$$

assim,

$$\int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2 dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx, \quad \text{pois } K = (-\Delta)^{-1} \text{ e } u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0,$$

usando a Identidade de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2 dx &= - \int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\Omega} \omega_2 K \omega_1 dx \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2 dx = \int_{\Omega} \omega_2 K \omega_1 dx. \end{aligned}$$

Agora, seja $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$I(\omega_1, \omega_2) = \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} T \omega dx \quad (2.14)$$

O funcional I é chamado funcional dual associado a (2.1). Temos que I está bem definido sendo de classe $C^1(X)$ com

$$I'(\omega)(\varphi, \Psi) = \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 \varphi |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \Psi |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx - \int_{\Omega} (\varphi K \omega_2 + \Psi K \omega_1) dx$$

para todo $\omega = (\omega_1, \omega_2), (\varphi, \Psi) \in X$.

A afirmação abaixo é crucial em nossa abordagem.

Afirmção 2.4 (ω_1, ω_2) é ponto crítico de I se, e somente se, (2.7) ocorre e também

$$(u, v) = (|x|^{\frac{-\alpha}{p}} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1, |x|^{\frac{-\beta}{q}} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2)$$

é uma solução do sistema (2.1). Neste caso temos

$$I(\omega_1, \omega_2) = E(u, v) = \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx > 0.$$

De fato, se (ω_1, ω_2) é ponto crítico de I , então dado $(\varphi, \Psi) \in X$

$$I'(\omega)(\varphi, \Psi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \varphi (|\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} - K \omega_2) dx + \int_{\Omega} \Psi (|\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 |x|^{\frac{-\beta}{q}} - K \omega_1) dx = 0.$$

Para $(\varphi, 0) \in X$ temos

$$\int_{\Omega} \varphi (|\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} - K \omega_2) dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

Em particular, temos $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, logo pelo Lema de Du Bois Raymond

$$\begin{aligned} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} - K\omega_2 &= 0 \\ \Rightarrow K\omega_2 &= |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} \\ \Rightarrow (-\Delta)^{-1} \omega_2 &= |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} = u. \end{aligned}$$

Analogamente para $(0, \Psi) \in X$ teremos

$$(-\Delta)^{-1} \omega_1 = |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 |x|^{\frac{-\beta}{q}} = v.$$

Por outro lado, se (2.7) ocorre, isto é,

$$(-\Delta)^{-1} \omega_1 = |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 |x|^{\frac{-\beta}{q}}$$

então como $K = (-\Delta)^{-1}$, dado $(\varphi, \Psi) \in X$

$$\begin{aligned} I'(\omega)(\varphi, \Psi) &= \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 \varphi |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \Psi |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (\varphi |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} + \Psi |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 |x|^{\frac{-\beta}{q}}) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ é ponto crítico de I . Por fim veja que

$$I(\omega_1, \omega_2) = E(u, v) = \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx > 0.$$

De (2.6) temos $|\omega_1| = |x|^{\alpha} |u|^p$ e como $u = |x|^{\frac{-\alpha}{p}} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 = (-\Delta)^{-1} \omega_2 = K\omega_2$ observamos que

$$\int_{\Omega} \omega_1 K\omega_2 dx = \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx$$

e

$$\int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx = \int_{\Omega} (|x|^{\alpha} |u|^p)^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx = \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx.$$

Logo, por (2.13) teremos

$$\begin{aligned}
I(\omega) - \frac{q}{q+1}I'(\omega)(\omega) &= \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \\
&- \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2 dx - \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\
&- \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx + \frac{2q}{q+1} \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2 dx \\
&= \left(\frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1} \right) \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \left(\frac{2q}{q+1} - 1 \right) \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2 dx \\
&= \left(\frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1} + \frac{2q}{q+1} - 1 \right) \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\
&= \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)} \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\
&= \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx - \frac{1}{q+1} \int_{\Omega} |v|^{q+1} |x|^{\beta} dx$$

e

$$E'(u, v)(u, v) = 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx - \int_{\Omega} |v|^{q+1} |x|^{\beta} dx$$

temos,

$$E(u, v) - \frac{1}{q+1} E'(u, v)(u, v) = \frac{q-1}{q+1} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx.$$

Usando a Identidade de Green temos

$$\begin{aligned}
E(u, v) - \frac{1}{q+1} E'(u, v)(u, v) &= \frac{q-1}{q+1} \int_{\Omega} u \Delta v dx + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx \\
&= -\frac{q-1}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx \\
&= -\frac{q-1}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx + \frac{p-q}{(p+1)(q+1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx \\
&= \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx > 0 \\
\Rightarrow E(u, v) &= \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx > 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I(\omega_1, \omega_2) = E(u, v) = \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} |x|^{\alpha} dx > 0.$$

Aqui, é importante observar que (u, v) é uma solução nodal se, e somente se, (ω_1, ω_2) é um ponto crítico nodal, isto é, $\omega_i^\pm \neq 0$, $i = 1, 2$.

Vamos agora definir o nível nodal de energia mínima por

$$c_{\text{nod}} = \inf \{I(\omega_1, \omega_2); \omega_1^\pm, \omega_2^\pm \neq 0, I'(\omega_1, \omega_2) = 0\}.$$

Definindo também

$$\lambda := \frac{2p(q+1)}{p+q+2pq} \quad \mu := \frac{2q(p+1)}{p+q+2pq} \quad (2.15)$$

e

$$\gamma := \lambda \frac{p+1}{p} = \mu \frac{q+1}{q} = \frac{2(p+1)(q+1)}{p+q+2pq} = \frac{2(pq+q+p+1)}{p+q+2pq},$$

temos,

$$\gamma \in (1, 2) \quad \text{e} \quad \lambda + \mu = 2$$

pois, desde que $pq > 1$ tem-se,

$$\begin{aligned} pq > 1 &\Leftrightarrow 2pq > 2 \Leftrightarrow 2pq + 2p > 2 + 2p \\ &\Leftrightarrow 2pq + 2p + 2q > 2 + 2p + 2q \\ &\Leftrightarrow 2pq + 2p + 2q + 2qp > 2 + 2p + 2q + 2pq \\ &\Leftrightarrow 2(p+q+2pq) > 2(p+q+pq+1) \\ &\Leftrightarrow 2 > \frac{2(p+q+pq+1)}{p+q+2pq} \\ &\Leftrightarrow 2 > 2 \frac{(q+1)(p+1)}{p+q+2pq} \\ &\Leftrightarrow \gamma < 2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\gamma > 1 \quad \text{pois} \quad \gamma = \frac{2(p+1)(q+1)}{p+q+2pq} = \frac{2(pq+q+p+1)}{p+q+2pq} > 1$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda + \mu &= \frac{2p(q+1)}{p+q+2pq} + \frac{2q(p+1)}{p+q+2pq} \\
&= \frac{2p(q+1) + 2q(p+1)}{p+q+2pq} \\
&= \frac{2[p(q+1) + q(p+1)]}{p+q+2pq} \\
&= \frac{2(pq + p + qp + q)}{p+q+2pq} \\
&= 2 \frac{p+q+2pq}{p+q+2pq} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

No que segue, consideramos o seguinte conjunto do tipo Nehari

$$\mathcal{N}_{\text{nod}} = \{(\omega_1, \omega_2) \in X; \omega_1^\pm, \omega_2^\pm \neq 0 \text{ e } I'(\omega)(\lambda\omega_1^+, \mu\omega_2^+) = I'(\omega)(\lambda\omega_1^-, \mu\omega_2^-) = 0\}$$

e o nível

$$\tilde{c}_{\text{nod}} = \inf_{\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}} I(\omega).$$

Dado $(\omega_1, \omega_2) \in X$ tal que $\omega_1^\pm, \omega_2^\pm \neq 0$, definimos $\theta = \theta_\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\theta(t, s) = I(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-).$$

Observe que se $t, s > 0$, então

$$\nabla \theta(t, s) = (0, 0) \Leftrightarrow (t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}. \quad (2.16)$$

No que segue será importante mostrar que θ_ω admite um ponto crítico. Introduzimos o seguinte conjunto auxiliar

$$\mathcal{N}_0 = \left\{ \omega = (\omega_1, \omega_2) \in X : \begin{array}{l} \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx > 0, \\ \lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^- dx < 0 \end{array} \right\}.$$

Considerando $\omega_1 = \omega_1^+ - \omega_1^-$ e $\omega_2 = \omega_2^+ - \omega_2^-$ e do fato que $\lambda + \mu = 2$, temos

$$\begin{aligned}
0 &< \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx \\
&= \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K (\omega_2^+ - \omega_2^-) dx + \mu \int_{\Omega} (\omega_1^+ - \omega_1^-) K \omega_2^+ dx \\
&= \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - \mu \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &< \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx \\
&= (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx - \mu \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx \\
&= 2 \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx - \mu \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx \\
\Rightarrow \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx &= \lambda C_1 + \mu C_2 < 2B^+
\end{aligned}$$

onde

$$B^+ = \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx \quad B^- = \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^- dx \quad (2.17)$$

e

$$C_1 = \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx \quad C_2 = \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx \quad (2.18)$$

Analogamente, vemos que

$$\lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^- dx = \mu C_1 + \lambda C_2 < 2B^-.$$

Dessa forma, escrevemos

$$\mathcal{N}_0 = \{\omega \in X, \lambda C_1 + \mu C_2 < 2B^+, \mu C_1 + \lambda C_2 < 2B^-\}.$$

Observe que B^+ e B^- são positivos pela definição de \mathcal{N}_0 . Isto por sua vez implica que $\omega_1^{\pm} \neq 0$ e $\omega_2^{\pm} \neq 0$. Então positividade estrita do operador K implica que $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$.

Lema 2.1 *O conjunto \mathcal{N}_0 é não vazio e $\mathcal{N}_{nod} \subseteq \mathcal{N}_0$.*

Demonstração.

Seja λ_2 o segundo autovalor de $-\Delta$ com condição de fronteira do problema de Dirichlet e denote φ_2 a autofunção associado a λ_2 . Desde que as funções φ_2^+ , φ_2^- tem suporte disjuntos e

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2, & \text{em } \Omega \\ \varphi_2 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$$K = (-\Delta)^{-1}, \quad \lambda + \mu = 2 \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \varphi_2^+ - \varphi_2^-$$

temos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\Omega} \varphi_2^+ K \varphi_2 dx + \mu \int_{\Omega} \varphi_2 K \varphi_2^+ dx &= \lambda \int_{\Omega} \varphi_2^+ K \varphi_2 dx + \mu \int_{\Omega} (\varphi_2^+ - \varphi_2^-) K \varphi_2^+ dx \\
&= \lambda \int_{\Omega} \varphi_2^+ \frac{\varphi_2}{\lambda_2} dx + \mu \int_{\Omega} \varphi_2^+ \frac{\varphi_2^+}{\lambda_2} dx - \mu \int_{\Omega} \varphi_2^- \frac{\varphi_2^+}{\lambda_2} dx \\
&= \lambda \int_{\Omega} \varphi_2^+ \frac{\varphi_2^+}{\lambda_2} dx + \mu \int_{\Omega} \varphi_2^+ \frac{\varphi_2^+}{\lambda_2} dx \\
&= (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \varphi_2^+ \frac{\varphi_2^+}{\lambda_2} dx = \frac{2}{\lambda_2} \int_{\Omega} (\varphi_2^+)^2 dx > 0.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lambda \int_{\Omega} \varphi_2^- K \varphi_2 dx + \mu \int_{\Omega} \varphi_2 K \varphi_2^- dx = -\frac{2}{\lambda_2} \int_{\Omega} (\varphi_2^-)^2 dx < 0.$$

Então, $(\varphi_2, \varphi_2) \in \mathcal{N}_0$, mostrando que $\mathcal{N}_0 \neq \emptyset$. Por fim seja $\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}$, com $\omega \neq 0$.

Temos

$$\begin{aligned}
&I'(\omega)(\lambda\omega_1^+, \mu\omega_2^+) = 0 \\
\Leftrightarrow \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 \lambda \omega_1^+ |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx + \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \mu \omega_2^+ |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx - \int_{\Omega} (\lambda\omega_1^+ K \omega_2 + \mu\omega_2^+ K \omega_1) dx &= 0 \\
\Leftrightarrow \int_{\Omega} (\lambda\omega_1^+ K \omega_2 + \mu\omega_2^+ K \omega_1) dx = \lambda \int_{\Omega} |\omega_1^+|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx + \mu \int_{\Omega} |\omega_2^+|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx \\
\Rightarrow \int_{\Omega} (\lambda\omega_1^+ K \omega_2 + \mu\omega_2^+ K \omega_1) dx > 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&I'(\omega)(\lambda\omega_1^-, \mu\omega_2^-) = 0 \\
\Leftrightarrow \lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^- dx = \\
-\lambda \int_{\Omega} |\omega_1^-|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx - \mu \int_{\Omega} |\omega_2^-|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{N}_{\text{nod}} \subseteq \mathcal{N}_0$. ■

Vamos agora estudar com detalhes a aplicação $\theta = \theta_{\omega}$ para $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in X$ tal que $\omega_1^{\pm} \neq 0$ e $\omega_2^{\pm} \neq 0$. Observe que podemos escrever

$$\theta(s, t) = A^+ t^{\gamma} + A^- s^{\gamma} - B^+ t^2 - B^- s^2 + C_1 t^{\lambda} s^{\mu} + C_2 t^{\mu} s^{\lambda}, \quad (2.19)$$

onde, B^+ , B^- , C_1 e C_2 são dadas em (2.33) e (2.18) e

$$A^{\pm} = \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\omega_1^{\pm}|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_2^{\pm}|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx > 0. \quad (2.20)$$

De fato, sabemos que

$$\begin{aligned}
\theta(t, s) &= I(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) \\
&= \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-)K(t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) + (t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-)K(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-)] dx
\end{aligned}$$

observe que

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2} \int_{\Omega} (t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-)K(t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) + (t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-)K(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-) dx \\
&= -\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} t^{(\lambda+\mu)} \omega_1^+ K \omega_2^+ - t^\lambda s^\mu \omega_1^+ K \omega_2^- - s^\lambda t^\mu \omega_1^- K \omega_2^+ + s^{(\lambda+\mu)} \omega_1^- K \omega_2^- dx \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} t^{(\lambda+\mu)} \omega_2^+ K \omega_1^+ - s^\lambda t^\mu \omega_2^+ K \omega_1^- - s^\mu t^\lambda \omega_2^- K \omega_1^+ + s^{(\lambda+\mu)} \omega_2^- K \omega_1^- dx \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} t^2 (\omega_1^+ K \omega_2^+ + \omega_2^+ K \omega_1^+) + s^2 (\omega_1^- K \omega_2^- + \omega_2^- K \omega_1^-) dx \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} s^\lambda t^\mu (\omega_1^- K \omega_2^+ + \omega_2^+ K \omega_1^-) + t^\lambda s^\mu (\omega_1^+ K \omega_2^- + \omega_2^- K \omega_1^+) dx \right) \\
&= -t^2 \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - s^2 \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^- dx + t^\lambda s^\mu \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx + t^\mu s^\lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx \\
&= -B^+ t^2 - B^- s^2 + C_1 t^\lambda s^\mu + C_2 t^\mu s^\lambda.
\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade usamos (2.13). Desde que as funções ω_1^+ e ω_1^- tem suporte disjunto e $\gamma = \lambda \frac{p+1}{p} = \mu \frac{q+1}{q}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx &= \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |t^\lambda \omega_1^+|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |s^\lambda \omega_1^-|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\
&= \frac{p}{p+1} \left(t^\gamma \int_{\Omega} |\omega_1^+|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + s^\gamma \int_{\Omega} |\omega_1^-|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \right).
\end{aligned}$$

De forma análoga mostramos que

$$\frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx = \frac{q}{q+1} \left(t^\gamma \int_{\Omega} |\omega_2^+|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx + s^\gamma \int_{\Omega} |\omega_2^-|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \right).$$

Assim,

$$\theta(s, t) = A^+ t^\gamma + A^- s^\gamma - B^+ t^2 - B^- s^2 + C_1 t^\lambda s^\mu + C_2 t^\mu s^\lambda.$$

Nosso objetivo é mostrar que θ_ω , para $\omega \in \mathcal{N}_0$, admite um único ponto crítico que é um máximo global atingindo em um par com entradas positivas. Dividiremos a prova em vários lemas.

Lema 2.2 *Seja $\omega \in \mathcal{N}_0$ e tome $\theta_\omega = \theta$. Então θ tem um máximo global para algum (t_0, s_0) , com $t_0, s_0 > 0$. Além disso, cada máximo local deve ter componentes positivas.*

Demonstração.

Da Desigualdade de Young temos

$$t^\lambda s^\mu = (t^2)^{\lambda/2} + (s^2)^{\mu/2} \leq \frac{\lambda t^2}{2} + \frac{\mu s^2}{2} \quad \text{e} \quad t^\mu s^\lambda = (t^2)^{\mu/2} + (s^2)^{\lambda/2} \leq \frac{\mu t^2}{2} + \frac{\lambda s^2}{2}$$

para todo $s, t \geq 0$ e $\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} = 1$. Então,

$$\theta(s, t) \leq A^+ t^\gamma + A^- s^\gamma + \left(\frac{1}{2}(\lambda C_1 + \mu C_2) - B^+ \right) t^2 + \left(\frac{1}{2}(\mu C_1 + \lambda C_2) - B^- \right) s^2.$$

Como, $\omega \in \mathcal{N}_0$, $\gamma < 2$ e os coeficientes dos termos quadráticos são negativos então

$$\theta(t, s) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad |t| + |s| \rightarrow \infty.$$

Daí, θ admite um máximo global (t_0, s_0) com componentes não negativas. Para concluir, veja que não é possível $t_0 = 0$ ou $s_0 = 0$. De fato, isto é consequência imediata do fato que

$$\theta(s, t) = A^+ t^\gamma - B^+ t^2 + s^\gamma (A^- - B^- s^{2-\gamma}) + C_1 t^\lambda s^\mu + C_2 t^\mu s^\lambda > \theta(t, 0)$$

para $s > 0$ suficientemente pequeno. Analogamente, $\theta(s, t) > \theta(0, s)$ para $t > 0$ suficientemente pequeno. \square

Lema 2.3 *Seja $\omega \in \mathcal{N}_0$ e tome $\theta_\omega = \theta$. Se (t, s) é um ponto crítico de θ com $t, s > 0$ então (t, s) é máximo local não degenerado.*

Demonstração.

Se (t, s) é um ponto crítico de θ , então

$$\begin{aligned} \theta_t(t, s) &= \gamma A^+ t^{\gamma-1} - 2B^+ t + \lambda C_1 t^{\lambda-1} s^\mu + \mu C_2 t^{\mu-1} s^\lambda = 0 \\ \Leftrightarrow 2B^+ t &= \gamma A^+ t^{\gamma-1} + \lambda C_1 t^{\lambda-1} s^\mu + \mu C_2 t^{\mu-1} s^\lambda \\ \Leftrightarrow 2B^+ &= \gamma A^+ t^{\gamma-2} + \lambda C_1 t^{\lambda-2} s^\mu + \mu C_2 t^{\mu-2} s^\lambda \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_s(t, s) &= \gamma A^- s^{\gamma-1} - 2B^- s + \mu C_1 t^\lambda s^{\mu-1} + \lambda C_2 t^\mu s^{\lambda-1} = 0 \\ \Leftrightarrow 2B^- s &= \gamma A^- s^{\gamma-1} + \mu C_1 t^\lambda s^{\mu-1} + \lambda C_2 t^\mu s^{\lambda-1} \\ \Leftrightarrow 2B^- &= \gamma A^- s^{\gamma-2} + \mu C_1 t^\lambda s^{\mu-2} + \lambda C_2 t^\mu s^{\lambda-2}. \end{aligned}$$

Assim, como $\lambda + \mu = 2$ e $\gamma \in (1, 2)$

$$\begin{aligned}\theta_{tt}(t, s) &= \gamma(\gamma - 1)A^+t^{\gamma-2} - 2B^+ + \lambda(\lambda - 1)C_1t^{\lambda-2}s^\mu + \mu(\mu - 1)C_2t^{\mu-2}s^\lambda \\ &= \gamma(\gamma - 2)A^+t^{\gamma-2} + \lambda(\lambda - 2)C_1t^{\lambda-2}s^\mu + \mu(\mu - 2)C_2t^{\mu-2}s^\lambda < 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{ss}(t, s) &= \gamma(\gamma - 1)A^-s^{\gamma-2} - 2B^- + \mu(\mu - 1)C_1t^\lambda s^{\mu-2} + \lambda(\lambda - 1)C_2t^\mu s^{\lambda-2} \\ &= \gamma(\gamma - 2)A^-s^{\gamma-2} + \mu(\mu - 2)C_1t^\lambda s^{\mu-2} + \lambda(\lambda - 2)C_2t^\mu s^{\lambda-2} < 0.\end{aligned}$$

e

$$\theta_{ts}(t, s) = \lambda\mu C_1t^{\lambda-1}s^{\mu-1} + \lambda\mu C_2t^{\mu-1}s^{\lambda-1}.$$

Vamos mostrar que (t, s) é máximo local não degenerado, para tanto mostremos que o determinante da matriz Hessiana de θ é não nulo, isto é, $\theta_{tt}\theta_{ss} - \theta_{ts}^2 > 0$ ou $\theta_{ts}^2 < \theta_{tt}\theta_{ss}$ o que é equivalente a

$$\begin{aligned}&\lambda^2 \mu^2 C_1^2 t^{2(\lambda-1)} s^{2(\mu-1)} + \lambda^2 \mu^2 C_2^2 t^{2(\mu-1)} s^{2(\lambda-1)} + 2\lambda^2 \mu^2 C_1 C_2 \\ &< \lambda(\lambda - 2)\mu(\mu - 2)C_1^2 t^{2(\lambda-1)} s^{2(\mu-1)} + \lambda(\lambda - 2)\mu(\mu - 2)C_2^2 t^{2(\mu-1)} s^{2(\lambda-1)} \\ &+ [\lambda^2(\lambda - 2)^2 + \mu^2(\mu - 2)^2]C_1 C_2 + \gamma^2(\gamma - 2)^2 A^+ A^- t^{\gamma-2} s^{\gamma-2} \\ &+ \gamma(\gamma - 2)\mu(\mu - 2)A^+ C_1 t^{\lambda+\gamma-2} s^{\mu-2} + \gamma(\gamma - 2)\lambda(\lambda - 2)A^- C_1 t^{\lambda-2} s^{\mu+\gamma-2} \\ &+ \gamma(\gamma - 2)\lambda(\lambda - 2)A^+ C_2 t^{\mu+\gamma-2} s^{\lambda-2} + \mu(\mu - 2)\gamma(\gamma - 2)C_2 A^- s^{\lambda+\gamma-2} t^{\mu-2}\end{aligned}\quad (2.21)$$

desde que temos $\mu^2\lambda^2 = \lambda(\lambda - 2)\mu(\mu - 2)$ como isso temos

$$2\lambda^2\mu^2 \leq \lambda^2(\lambda - 2)^2 + \mu^2(\mu - 2)^2. \quad (2.22)$$

De (2.21) e (2.22) teremos a desigualdade desejada. ■

Proposição 2.5 *Seja $\omega \in \mathcal{N}_0$. Então a aplicação θ_ω admite um único ponto crítico (t_0, s_0) com $t_0, s_0 > 0$ o qual corresponde a único ponto de máximo global. Além disso, o par (t_0, s_0) pode ser caracterizado como (única) solução do sistema*

$$\begin{cases} 2B^+ = \gamma A^+ t^{\gamma-2} + \lambda C_1 (s/t)^\mu + \mu C_2 (s/t)^\lambda \\ 2B^- = \gamma A^- s^{\gamma-2} + \mu C_1 (t/s)^\lambda + \lambda C_2 (t/s)^\mu. \end{cases} \quad (2.23)$$

Demonstração.

Pelos lemas anteriores basta mostrar a unicidade. Usaremos o Teorema de Holpf - Poincaré. (Apêndice D).

Seja (t_0, s_0) um máximo global como no Lema 2.2. Tome M como sendo um conjunto regular limitado contendo (t_0, s_0) que coincide com o quadrado $[\varepsilon, L] \times [\varepsilon, L]$ exceto nos canto onde é suave. Então, a característica de Euler - Poincaré é igual a 1, isto é, $\chi(M) = 1$ e considerando $Y = -\nabla\theta$ temos que Y aponta para fora em ∂M para ε suficientemente pequeno e L grande o suficiente.

Por outro lado, usando a Proposição D.3 (Apêndice D) segue do Lema 2.3 que $\text{index}(Y, (t, s)) = 1$ em cada ponto crítico (t, s) . Assim, provamos que (t_0, s_0) é o único ponto crítico de θ_ω , pois caso contrário pelo Teorema de Holpf - Poincaré teríamos que

$$\chi(M) = \sum_{i \in I} \text{index}(Y, (t_i, s_i)) > 1,$$

o que é uma contradição. ■

Lema 2.4 *Seja $\omega \in \mathcal{N}_{nod}$ tal que $I(\omega) = \tilde{c}_{nod}$, então $I'(\omega) = 0$.*

Demonstração.

Suponha por contradição que $I'(\omega) \neq 0$. Então $I'(\omega)$ é sobrejetivo e dessa forma existe $v \in X$ tal que $I'(\omega)v = -2$. Pela continuidade, existe $\varepsilon > 0$ pequeno tal que

$$I'((t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) + rv)v < -1,$$

$$\forall 0 \leq r \leq \varepsilon, |t - 1|, |s - 1| \leq \varepsilon.$$

Seja $D = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Fixando a função suave $\eta : D \rightarrow [0, \varepsilon]$ tal que $\eta(1, 1) = \varepsilon$ e $\eta = 0$ em ∂D , e denotemos

$$\begin{aligned} h(t, s) &:= (h_1(t, s), h_2(t, s)) := (t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) + \eta(t, s)v, \\ H(t, s) &:= (I'(h(t, s))(\lambda h_1^+(t, s), \mu h_2^+(t, s), I'(h(t, s))(\lambda h_1^-(t, s), \mu h_2^-(t, s))). \end{aligned}$$

Tomando ε pequeno podemos assegurar pela continuidade de η que

$$h(t, s) \in \mathcal{N}_0, \quad \forall (t, s) \in D.$$

De fato, como $\omega \in \mathcal{N}_{nod}$ pelo Lema 2.1 temos $\mathcal{N}_{nod} \subset \mathcal{N}_0$, isto é,

$$\lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx > 0,$$

e

$$\lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^- dx < 0$$

Assim, pela linearidade de K temos

$$\begin{aligned} 0 < \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx &= \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K (\omega_2^+ - \omega_2^-) dx + \mu \int_{\Omega} (\omega_1^+ - \omega_1^-) K \omega_2^+ dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx \\ &+ \mu \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - \mu \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 > \lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^- dx &= \lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K (\omega_2^+ - \omega_2^-) dx + \mu \int_{\Omega} (\omega_1^+ - \omega_1^-) K \omega_2^- dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx - \lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^- dx \\ &+ \mu \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx - \mu \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^- dx \end{aligned}$$

dessa forma teremos,

$$\lambda t^\mu \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - \lambda s^\mu \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx + \mu t^\lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx - \mu s^\lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx > 0$$

e

$$\lambda t^\mu \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx - \lambda s^\mu \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^- dx + \mu t^\lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx - \mu s^\lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^- dx < 0.$$

Mostrando que $(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) \in \mathcal{N}_0$. Logo, tomando ε pequeno pela continuidade de η temos

$$h(t, s) \in \mathcal{N}_0, \quad \forall (t, s) \in D.$$

Usaremos agora o clássico Teorema de Miranda (Apêndice D) para mostrar que existe $(t_0, s_0) \in D$ tal que $H(t_0, s_0) = (0, 0)$. Calculemos H sobre ∂D , onde $\eta = 0$,

$$\begin{aligned} H(t, s) &= \begin{pmatrix} I'(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-)(\lambda t^\lambda \omega_1^+, \mu t^\mu \omega_2^+) \\ I'(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-)(\lambda s^\lambda \omega_1^-, \mu s^\mu \omega_2^-) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t\theta_t(t, s) \\ -s\theta_s(t, s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}$ temos por (2.16) que $\nabla\theta(1, 1) = (0, 0)$ e, isto é,

$$\gamma A^+ - 2B^+ + \lambda C_1 + \mu C_2 = 0, \quad \gamma A^- - 2B^- + \mu C_1 + \lambda C_2 = 0,$$

$$\Rightarrow -2B^+ = -\gamma A^+ - \lambda C_1 - \mu C_2. \quad (2.24)$$

Para $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ temos que, se $t = 1 + \varepsilon$, de (2.24) e o fato de que $\mu + \lambda = 2$

$$\begin{aligned} \theta_t &= \gamma A^+(1 + \varepsilon)^{\gamma-1} - 2B^+(1 + \varepsilon) + \lambda C_1(1 + \varepsilon)^{\lambda-1} s^\mu + \mu C_2(1 + \varepsilon)^{\mu-1} s^\lambda \\ &\leq \gamma A^+(1 + \varepsilon)^{\gamma-1} - 2B^+(1 + \varepsilon) + \lambda C_1(1 + \varepsilon)^{\lambda-1} (1 + \varepsilon)^\mu + \mu C_2(1 + \varepsilon)^{\mu-1} (1 + \varepsilon)^\lambda \\ &= \gamma A^+(1 + \varepsilon)^{\gamma-1} - \gamma A^+(1 + \varepsilon) - \lambda C_1(1 + \varepsilon) - \mu C_2(1 + \varepsilon) \\ &+ C_1(1 + \varepsilon) + \mu C_2(1 + \varepsilon) \\ &= \gamma A^+(1 + \varepsilon)[(1 + \varepsilon)^{\gamma-2} - 1], \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta_t \leq \gamma A^+(1 + \varepsilon)[(1 + \varepsilon)^{\gamma-2} - 1] < 0$$

enquanto que se $t = 1 - \varepsilon$

$$\theta_t > \gamma A^+(1 - \varepsilon)[(1 - \varepsilon)^{\gamma-2} - 1] > 0.$$

Analogamente, para $t \in D$ temos

$$\theta_s < 0 \quad \text{para } s = 1 + \varepsilon \quad \text{e} \quad \theta_s > 0 \quad \text{para } s = 1 - \varepsilon.$$

Logo, pelo Teorema de Miranda $(t_0, s_0) \in D$ tal que $H(t_0, s_0) = (0, 0)$. Dessa forma temos $h(t_0, s_0) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}$ de onde segue que do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\text{nod}} &\leq I(h(t_0, s_0)) \\ &= I(h(t_0, s_0)) + I(t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) - I(t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) \\ &= I(t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) + \int_0^{\eta(t_0, s_0)} I'((t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) + rv) v dr \\ &\leq \theta_\omega(t_0, s_0) - \eta(t_0, s_0) \leq \theta_\omega(1, 1) - \eta(t_0, s_0) = \tilde{c}_{\text{nod}} - \eta(t_0, s_0) \end{aligned}$$

o que implica em $\eta(t_0, s_0) \leq (0, 0)$, como $\eta(t_0, s_0) \geq (0, 0)$ então, $\eta(t_0, s_0) = (0, 0)$ e, em particular, $\theta_\omega(t_0, s_0) = \theta(1, 1)$. Pela unicidade do máximo dado pela Proposição 2.3, devemos ter $(t_0, s_0) = (1, 1)$ enquanto que, por construção, $\eta(1, 1) = \varepsilon > 0$, o que é uma contradição. Portanto, $I'(\omega) = 0$. ■

2.2 Demonstração do Teorema 2.1

O próximo Teorema mostra que o número \tilde{c}_{nod} é atingido por uma função $\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}$ e pelo Lema 2.4 teríamos que ω é ponto crítico de I , isto é, $I'(\omega) = 0$. Com isso

provamos nosso primeiro resultado do capítulo, o Teorema 2.1. No entanto para mostrar o teorema regularizamos o problema, dado $\varepsilon > 0$ e

$$\tilde{X} = \left(W^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \times W^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega) \right) \cap X,$$

introduzindo o funcional auxiliar, $I_\varepsilon : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\tilde{X})$ definido por

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\omega_1, \omega_2) &= \frac{p}{p+1} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_1|^{\frac{p+1}{p}} dx + \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \right) \\ &+ \frac{q}{q+1} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_2|^{\frac{q+1}{q}} dx + \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \right) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} T\omega dx, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} I'_\varepsilon(\omega)(\varphi, \Psi) &= \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_1 \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{1}{q}-1} \omega_1 \varphi |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \nabla \omega_2 \nabla \Psi dx + \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \Psi |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \\ &- \int_{\Omega} (\varphi K \omega_2 + \Psi K \omega_1) dx \end{aligned}$$

para todo $(\omega_1, \omega_2), (\varphi, \Psi) \in \tilde{X}$.

Introduzir tal espaço e funcional energia faz-se necessário pela dificuldade de uma abordagem direta, pois o limite fraco de uma sequência minimizante de \tilde{c}_{nod} não pertence necessariamente a \mathcal{N}_0 e não podemos projetá-los em \mathcal{N}_{nod} .

Teorema 2.6 *Seja $\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}$, então $I(\omega) = \tilde{c}_{\text{nod}}$. Além disso,*

$$c_{\text{nod}} = \tilde{c}_{\text{nod}} = \inf_{\omega \in \mathcal{N}_0} \sup_{t, s > 0} I(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) > 0. \quad (2.25)$$

Desde que $\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}$, pelo Lema 2.1 $\omega \in \mathcal{N}_0$. Segue também da Proposição 2.5 que $\nabla \theta(t, s) = (0, 0)$, assim de (2.16) teremos

$$\tilde{c}_{\text{nod}} = \inf_{\omega \in \mathcal{N}_0} \sup_{t, s > 0} I(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) > 0. \quad (2.26)$$

Vamos agora explorar o fato de que \tilde{X} é denso em X .

Lema 2.5 *Seja $\tilde{X} = \left(W^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \times W^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega) \right) \cap X$ dotado com a norma*

$$|(\omega_1, \omega_2)| = |\nabla \omega_1|_{\frac{p+1}{p}} + |\nabla \omega_2|_{\frac{q+1}{q}} + |\omega_1|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} + |\omega_2|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}}.$$

Então \tilde{X} é um espaço e Banach reflexivo que é continuamente imerso em $W^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \times W^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega)$. Além disso, \tilde{X} é um subespaço denso em X .

Demonstração.

Vejam primeiro que \tilde{X} é um espaço de Banach reflexivo. Seja $\{\omega_n\} = \{\omega_1^n, \omega_2^n\} \subset \tilde{X}$ uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |\omega_m - \omega_n| < \varepsilon$$

isto é,

$$\begin{aligned} \varepsilon > |\omega_m - \omega_n| &= |\nabla(\omega_1^m - \omega_1^n)|_{\frac{p+1}{p}} + |\nabla(\omega_2^m - \omega_2^n)|_{\frac{q+1}{q}} \\ &+ |\omega_1^m - \omega_1^n|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} + |\omega_2^m - \omega_2^n|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}} \\ &\geq |\omega_1^m - \omega_1^n|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} + |\omega_2^m - \omega_2^n|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}}. \end{aligned}$$

Daí temos, $\{\omega_1^n\}$ e $\{\omega_2^n\}$ sequências de Cauchy em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}})$ e $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}})$, respectivamente. Dessa forma existem $\omega_1 \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}})$ e $\omega_2 \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}})$, tais que,

$$\omega_1^n \rightarrow \omega_1 \quad \text{em} \quad L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \quad \text{e} \quad \omega_2^n \rightarrow \omega_2 \quad \text{em} \quad L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Desde que $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \subset L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}}) \subset L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, temos

$$\omega_1^n \rightarrow \omega_1 \quad \text{em} \quad L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \quad \text{e} \quad \omega_2^n \rightarrow \omega_2 \quad \text{em} \quad L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega), \quad n \rightarrow \infty.$$

Temos também que $\{\omega_n\}$ de Cauchy em X e portanto por (2.27)

$$\omega_n \rightarrow \omega \quad \text{em} \quad X, \quad n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, $\{\omega_1^n\}$ e $\{\omega_2^n\}$ são sequências de Cauchy em $W^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $W^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega)$, respectivamente. Sendo $W^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \subset L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $W^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega) \subset L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ temos

$$\omega_1^n \rightarrow \omega_1 \quad \text{em} \quad W^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \quad \text{e} \quad \omega_2^n \rightarrow \omega_2 \quad \text{em} \quad W^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega), \quad n \rightarrow \infty.$$

Logo, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \tilde{X}$ e

$$|\omega_n - \omega| \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad \tilde{X}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Mostrando que \tilde{X} é Banach.

Veja que \tilde{X} é reflexivo, pois \tilde{X} é subespaço fechado do espaço reflexivo $W^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \times W^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega)$. Para mostrar que \tilde{X} é denso em X considere a aplicação

$$S : L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}})$$

definido por $S(f, g) = (f|x|^{\frac{\alpha}{p+1}}, g|x|^{\frac{\beta}{q+1}})$. Temos que S é um isomorfismo isométrico.

De fato, S é linear e

$$\begin{aligned} |S(f, g)| &= |(f|x|^{\frac{\alpha}{p+1}}, g|x|^{\frac{\beta}{q+1}})| \\ &= \left(\int_{\Omega} |f|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{\alpha}{p+1} \frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} + \left(\int_{\Omega} |g|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{\beta}{q+1} \frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} + \left(\int_{\Omega} |g|^{\frac{q+1}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \\ &= |(f, g)|. \end{aligned}$$

Assim, S é isometria e consequentemente é injetiva. Por fim, dados $(g, h) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{-\alpha}{p}}) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{\frac{-\beta}{q}})$, fixando $(f, \varphi) = (g|x|^{\frac{-\alpha}{p+1}}, h|x|^{\frac{-\beta}{q+1}}) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ temos $S(f, \varphi) = (g, h)$, mostrando que S é sobrejetiva.

Para cada $\delta > 0$ fixe $\varphi_{\delta} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$0 \leq \varphi_{\delta} \leq 1, \quad \varphi_{\delta}(x) = 1, \quad \text{se } |x| \geq 2\delta, \quad \text{e } \varphi_{\delta}(x) = 0 \quad \text{se } |x| \leq \delta.$$

Então, observe que $A = \cup\{(f\varphi_{\delta}, g\varphi_{\delta}); f, g \in C_c^{\infty}(\Omega, \cdot), \delta > 0\}$ é denso em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, pois dado $f_n \in C_0^{\infty}(\Omega)$ temos $f_n \rightarrow f$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e

$$|f_n \varphi_{\delta_n} - f|_{\frac{p+1}{p}} \leq |f_n|_{\frac{p+1}{p}} |\varphi_{\delta_n} - 1|_{\infty} + |f_n - f|_{\frac{p+1}{p}} \rightarrow 0$$

e além disso, $S(A) \subset \tilde{X} \subset X$. ■

Observamos que, (ω_1, ω_2) é ponto crítico de I_{ε} se, e somente se,

$$\begin{cases} -\varepsilon \operatorname{div}(|\nabla \omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_1) + |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} = K \omega_2, \\ -\varepsilon \operatorname{div}(|\nabla \omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \nabla \omega_2) + |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 |x|^{\frac{-\beta}{q}} = K \omega_1 \end{cases} \quad (2.28)$$

em \tilde{X}' . De fato, se (ω_1, ω_2) é ponto crítico de I_{ε} então,

$$\begin{aligned} I'_{\varepsilon}(\omega)(\varphi, \Psi) = 0 &\Leftrightarrow \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_1 \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{1}{q}-1} \omega_1 \varphi |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \nabla \omega_2 \nabla \Psi dx + \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \Psi |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \\ &- \int_{\Omega} (\varphi K \omega_2 + \Psi K \omega_1) dx = 0 \end{aligned}$$

$\forall (\varphi, \Psi) \in \tilde{X}$.

Para $(\varphi, 0) \in \tilde{X}$ temos

$$\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_1 \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \varphi (|\omega_1|^{\frac{1}{q}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} - K \omega_2) dx = 0. \quad (2.29)$$

Observe que pela Identidade de Green

$$\int_{\Omega} |\nabla\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla\omega_1 \nabla\varphi dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla\omega_1) \varphi dx. \quad (2.30)$$

Dessa forma em (2.29) ficamos com

$$\int_{\Omega} \varphi (|\omega_1|^{\frac{1}{q}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} - K\omega_2 - \varepsilon |\nabla\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla\omega_1) dx,$$

pelo Lema de Du Bois Raymond

$$-\varepsilon \operatorname{div}(|\nabla\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla\omega_1) + |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} = K\omega_2.$$

De maneira análoga mostramos que

$$-\varepsilon \operatorname{div}(|\nabla\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \nabla\omega_2) + |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 |x|^{\frac{-\beta}{q}} = K\omega_1.$$

Por outro lado, se vale (2.28), então

$$\begin{aligned} I'_\varepsilon(\omega)(\varphi, \Psi) &= \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla\omega_1 \nabla\varphi dx + \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{1}{q}-1} \omega_1 \varphi |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \nabla\omega_2 \nabla\Psi dx + \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \Psi |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \\ &- \int_{\Omega} (\varphi K\omega_2 + \Psi K\omega_1) dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla\omega_1 \nabla\varphi dx + \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{1}{q}-1} \omega_1 \varphi |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \nabla\omega_2 \nabla\Psi dx + \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \Psi |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \nabla\omega_1) \varphi dx - \int_{\Omega} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 \varphi |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \nabla\omega_2) \Psi dx - \int_{\Omega} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \Psi |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx. \end{aligned}$$

Por (2.30) concluímos que

$$I'_\varepsilon(\omega)(\varphi, \Psi) = 0.$$

Defina agora,

$$\tilde{\mathcal{N}}_0 = \left\{ \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \tilde{X} : \begin{array}{l} \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K\omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K\omega_2^+ dx > 0, \\ \lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K\omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K\omega_2^- dx < 0 \end{array} \right\}$$

e, para todo $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon = \{(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{X}; \omega_1^\pm, \omega_2^\pm \neq 0 \text{ e } I'_\varepsilon(\omega)(\lambda\omega_1^+, \mu\omega_2^+) = I'_\varepsilon(\omega)(\lambda\omega_1^-, \mu\omega_2^-) = 0\}.$$

Analogamente como feito no Lema 2.1 e de $\tilde{X} \subset X$ segue-se que

$$\mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon \subset \tilde{\mathcal{N}}_0 \subset \mathcal{N}_0.$$

Lema 2.6 *Seja $\omega \in \tilde{\mathcal{N}}_0$. Então, a aplicação $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$(t, s) \mapsto I_\varepsilon(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-)$$

admite um único ponto crítico (t_0, s_0) o qual é um máximo global. Além disso, o par (t_0, s_0) pode ser caracterizado unicamente pela condição

$$(t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon,$$

ou equivalentemente através do sistema

$$\begin{cases} 2B^+ = \gamma \left(A^+ + \varepsilon \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_1^+|^{\frac{p+1}{p}} dx + \varepsilon \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_2^+|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) t_0^{\gamma-2} \\ \quad + \lambda C_1 (s_0/t_0)^\mu + \mu C_2 (s_0/t_0)^\lambda, \\ 2B^- = \gamma \left(A^- + \varepsilon \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_1^-|^{\frac{p+1}{p}} dx + \varepsilon \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_2^-|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) s_0^{\gamma-2} \\ \quad + \mu C_1 (t_0/s_0)^\lambda + \lambda C_2 (t_0/s_0)^\mu. \end{cases} \quad (2.31)$$

Demonstração.

Desde que o funcional I_ε tem exatamente a mesma geometria de I , podemos repetir as demonstrações dos Lemas 2.1 - 2.3 e da Proposição 2.2, substituindo \mathcal{N}_0 e \mathcal{N}_{nod} por $\tilde{\mathcal{N}}_0$ e $\mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon$, respectivamente, A^\pm por

$$A^\pm + \varepsilon \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_1^\pm|^{\frac{p+1}{p}} dx + \varepsilon \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_2^\pm|^{\frac{q+1}{q}} dx$$

■

Definimos o nível

$$c_{\text{nod}}^\varepsilon = \inf \{ I_\varepsilon(\omega_1, \omega_2); \omega \in \tilde{X}, \omega_1^\pm, \omega_2^\pm \neq 0, I'_\varepsilon(\omega_1, \omega_2) = 0 \}$$

e

$$\tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon = \inf_{\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon} I_\varepsilon(\omega).$$

Lema 2.7 *Dado $\varepsilon > 0$. Seja $\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon$ tal que $I_\varepsilon(\omega) = \tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon$. Então, $I'_\varepsilon(\omega) = 0$.*

Demonstração.

Assim como no Lema anterior a demonstração segue a mesma linha dos Lema 2.4 e Lema 2.6. ■

Proposição 2.7 *Dado $\varepsilon > 0$, o número $\tilde{c}_{nod}^\varepsilon$ é atingido para $\omega_\varepsilon \in \mathcal{N}_{nod}^\varepsilon$. Além disso, temos*

$$c_{nod}^\varepsilon = \tilde{c}_{nod}^\varepsilon = \inf_{\omega \in \tilde{\mathcal{N}}_0} \sup_{t,s>0} I_\varepsilon(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) > 0. \quad (2.32)$$

Demonstração.

Graças ao Lema 2.7 e o fato que $\tilde{c}_{nod}^\varepsilon \leq c_{nod}^\varepsilon$ é suficiente mostrar que $\tilde{c}_{nod}^\varepsilon$ é atingido e é positivo. Vamos dividir a demonstração em 3 passos.

Passo 1. $\mathcal{N}_{nod}^\varepsilon \neq 0, \forall \varepsilon > 0$.

Isto é claro pelo Lema 2.6.

Passo 2. Limitação das seqüências minimizantes.

Seja $\{\omega_n\} \in \mathcal{N}_{nod}^\varepsilon$ uma seqüência minimizante para $\tilde{c}_{nod}^\varepsilon$. Denote, por simplicidade,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{\Omega} |\omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx & a_n^\pm &= \int_{\Omega} |\omega_{1,n}^\pm|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\ b_n &= \int_{\Omega} |\omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx & b_n^\pm &= \int_{\Omega} |\omega_{2,n}^\pm|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx. \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} &\lambda \left(a_n^+ + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}^+|^{\frac{p+1}{p}} dx \right) + \mu \left(b_n^+ + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}^+|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) \\ &= \lambda \int_{\Omega} \omega_{1,n}^+ K \omega_{2,n} dx + \mu \int_{\Omega} \omega_{2,n}^+ K \omega_{1,n} dx \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} &\lambda \left(a_n^- + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}^-|^{\frac{p+1}{p}} dx \right) + \mu \left(b_n^- + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}^-|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) \\ &= \lambda \int_{\Omega} \omega_{1,n}^- K \omega_{2,n} dx + \mu \int_{\Omega} \omega_{2,n}^- K \omega_{1,n} dx. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Adicionando (2.33) e (2.34) obtemos

$$\lambda \left(a_n + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx \right) + \mu \left(b_n + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) = 2 \int_{\Omega} \omega_{1,n} K \omega_{2,n} dx \quad (2.35)$$

e deduzimos que

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\omega_n) &= \frac{(pq-1)p}{(p+1)(2pq+p+q)} \left(a_n + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx \right) \\ &+ \frac{(pq-1)q}{(q+1)(2pq+p+q)} \left(b_n + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) > 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

De fato, por (2.13) e (2.35) temos

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(\omega_n) &= \frac{p}{p+1} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx + a_n \right) \frac{q}{q+1} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx + b_n \right) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} T\omega_n dx \\
&= \frac{p}{p+1} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx + a_n \right) + \frac{q}{q+1} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx + b_n \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\lambda \left(a_n + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx \right) + \mu \left(b_n + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) \right) \\
&= \left(\frac{p}{p+1} - \frac{\lambda}{2} \right) \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx + a_n \right) \\
&\quad + \left(\frac{q}{q+1} - \frac{\mu}{2} \right) \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx + b_n \right) \\
&= \left(\frac{p}{p+1} - \frac{2p(q+1)}{2(2pq+p+q)} \right) \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx + a_n \right) \\
&\quad + \left(\frac{q}{q+1} - \frac{2q(p+1)}{2(2pq+p+q)} \right) \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx + b_n \right) \\
&= \frac{p(2pq+p+q) - p(q+1)(p+1)}{(2pq+q+p)(p+1)} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx + a_n \right) \\
&\quad + \frac{q(2pq+p+q) - q(p+1)(q+1)}{(2pq+q+p)(q+1)} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx + b_n \right) \\
&= \frac{(pq-1)p}{(p+1)(2pq+p+q)} \left(a_n + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,n}|^{\frac{p+1}{p}} dx \right) \\
&\quad + \frac{(pq-1)q}{(q+1)(2pq+p+q)} \left(b_n + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,n}|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) > 0
\end{aligned}$$

Observe que (2.36) nos dar a fórmula de I_ε em $\mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon$, o que mostra que I_ε é positivo em $\mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon$ e $c_{\text{nod}}^\varepsilon \geq 0$. Além disso, segue também de (2.36) que $\{\omega_n\}$ é limitada em \tilde{X} . Então, passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\omega_n \rightharpoonup \omega \quad \text{em} \quad \tilde{X}$$

Por outro lado, $\{\omega_n\} = \{\omega_{1,n}, \omega_{2,n}\}$ é limitada em $W^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \times W^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega)$ dessa forma, para alguma subsequência, existe $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ tal que

$$\omega_n \rightarrow \omega \quad \text{em} \quad L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

daí,

$$\omega_{1,n}^\pm \rightarrow \omega_1^\pm \quad \text{em} \quad L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \quad \text{e} \quad \omega_{2,n}^\pm \rightarrow \omega_2^\pm \quad \text{em} \quad L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega).$$

De fato, como $\omega_{1,n} \rightarrow \omega_1$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, a menos de subsequência, existem ω_1 e $f \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ tais que

$$\omega_{1,n}(x) \rightarrow \omega_1(x) \quad \text{q.t.p.} \quad \text{e} \quad |\omega_{1,n}| \leq f \quad \forall n. \quad (2.37)$$

Dessa forma, por (2.37) temos

$$\omega_{1,n}^\pm(x) \rightarrow \omega_1^\pm(x) \quad \text{q.t.p. e } |\omega_{1,n}^\pm| \leq f \quad \forall n.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\omega_{1,n}^\pm \rightarrow \omega_1^\pm \quad \text{em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

Analogamente temos,

$$\omega_{2,n}^\pm \rightarrow \omega_2^\pm \quad \text{em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega).$$

Dessa forma temos,

$$\begin{aligned} (\omega_{1,n}^\pm, \omega_{2,n}^\pm) &\rightarrow (\omega_1^\pm, \omega_2^\pm) \quad \text{em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \\ (\omega_{1,n}^\pm, \omega_{2,n}^\pm) &\rightarrow (\omega_1^\pm, \omega_2^\pm) \quad \text{em } \tilde{X}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Passo 3. $\omega \in \tilde{\mathcal{N}}_0$. Devemos mostrar que

$$\lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx > 0$$

e

$$\lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^- dx < 0.$$

Por (2.38) e da continuidade de K , pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que o lado direito de (2.33) e (2.34) convergem. Mostraremos que o lado esquerdo de (2.33) e (2.34) são limitadas longe de zero. Iniciamos por (2.33),

$$\lambda a_n^+ + \mu b_n^+ \leq \lambda \int_{\Omega} \omega_{1,n}^+ K \omega_{2,n}^+ dx + \mu \int_{\Omega} \omega_{2,n}^+ K \omega_{1,n}^+ dx = 2 \int_{\Omega} \omega_{1,n}^+ K \omega_{2,n}^+ dx,$$

o qual por (2.12) e pela Desigualdade de Young com $\frac{1}{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{p+1} = 1$, para algum

$\delta > 0$

$$\lambda a_n^+ + \mu b_n^+ \leq c \|\omega_{1,n}^+\|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} \|\omega_{2,n}^+\|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}} \leq c (a_n^+)^{\frac{p}{p+1}} (b_n^+)^{\frac{q}{q+1}} \leq \delta a_n^+ + \frac{C}{\delta} (b_n^+)^{\frac{q(p+1)}{q+1}}.$$

Desde que $\frac{q(p+1)}{q+1} > 1$, deduzimos que $b_n^+ \geq \tilde{\delta} > 0$ para algum $\tilde{\delta} > 0$. Analogamente, com argumentos similares segue que $a_n^\pm \geq \tilde{\delta} > 0$.

Portanto, pelo Lema 2.6, podemos tomar (t_0, s_0) tal que

$$(t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon.$$

Pela afirmação da unicidade do mesmo Lema e da norma ser fracamente semi - contínua inferiormente temos,

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon &\leq I_\varepsilon(t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) \\ &\leq \liminf I_\varepsilon(t_0^\lambda \omega_{1,n}^+ - s_0^\lambda \omega_{1,n}^-, t_0^\mu \omega_{2,n}^+ - s_0^\mu \omega_{2,n}^-) \\ &\leq \liminf I_\varepsilon(\omega_n) = \tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon.\end{aligned}$$

Consequentemente, $(t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon$ atinge $\tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon$. Finalmente, a caracterização (2.32) no nível crítico pode ser provado de uma maneira direta. ■

Nossa estratégia para provar o Teorema 2.6 agora consiste essencialmente em passar o limite em (2.28) quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como primeiro passo, provamos a convergência do nível crítico, isto é, $\tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon \rightarrow \tilde{c}_{\text{nod}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Começamos com dois lemas preliminares.

Lema 2.8 *Seja $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{\mathcal{N}}_0 \subset \mathcal{N}_0$ e (t_0, s_0) o único par tal que*

$$t_0, s_0 > 0, \quad (t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}$$

enquanto, para $\varepsilon > 0$, seja $(t_\varepsilon, s_\varepsilon)$ o único par que

$$t_\varepsilon, s_\varepsilon > 0, \quad (t_\varepsilon^\lambda \omega_1^+ - s_\varepsilon^\lambda \omega_1^-, t_\varepsilon^\mu \omega_2^+ - s_\varepsilon^\mu \omega_2^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon.$$

Então,

$$(t_\varepsilon, s_\varepsilon) \rightarrow (t_0, s_0) \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração.

Como o par (t_0, s_0) resolve (2.31), então

$$2B^+ t_\varepsilon^{2-\gamma} \geq \gamma A^+ \quad \text{e} \quad 2B^- s_\varepsilon^{2-\gamma} \geq \gamma A^-.$$

Desde que $2 - \gamma > 0$, temos que $s_\varepsilon, t_\varepsilon \geq a > 0$ para alguma constante a independente de ε , pois caso contrário teríamos

$$t_\varepsilon, s_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.39)$$

Dessa forma em (2.31) ficaria

$$B^+ \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

mas, por (2.39) podemos supor que

$$t_\varepsilon \leq 1$$

daí, desde que $\gamma > 1$ temos

$$B^+ \geq \frac{\gamma}{2}A^+ \quad \Rightarrow \quad B^+ > \frac{1}{2}A^+$$

o que é um absurdo.

Suponha por contradição que $\{t_\varepsilon, s_\varepsilon\}$ não é limitada quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Dessa forma temos os seguintes casos:

Caso 1. Existe $b > 0$ tal que $a \leq s_\varepsilon \leq b$ ou $a \leq t_\varepsilon \leq b$ para $\varepsilon \in (0, 1]$.

Na primeira alternativa, tomando o limite na primeira equação de (2.31) obtemos $2B^+ = 0$, o que é uma contradição. Na segunda alternativa, tomando o limite na segunda equação de (2.31) conduz a $2B^- = 0$, o que ainda é uma contradição.

Caso 2. Ambos $t_\varepsilon, s_\varepsilon \rightarrow +\infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Dividimos esse caso em dois subcasos.

Caso 2.1 $\frac{t_\varepsilon}{s_\varepsilon} \rightarrow +\infty$ ou $\frac{t_\varepsilon}{s_\varepsilon} \rightarrow 0$. Este caso leva novamente a $2B^+ = 0$ ou $2B^- = 0$.

Caso 2.2 $\frac{t_\varepsilon}{s_\varepsilon} \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Passando o limite em (2.31) nos dá

$$\begin{cases} 2B^+ &= \lambda C_1(1/l)^\mu + \mu C_2(1/l)^\lambda \\ 2B^- &= \mu C_1 l^\lambda + \lambda C_2 l^\mu. \end{cases}$$

Se $l \leq 1$, então $2B^- \leq \mu C_1 + \lambda C_2$ enquanto que $2B^+ < \lambda C_1 + \mu C_2$ se $l > 1$. Em ambos casos, obtemos uma desigualdade que contradiz o fato que $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{\mathcal{N}}_0$. Dessa forma concluímos que, a menos de subsequência, $t_\varepsilon \rightarrow \tilde{t} > 0$, $s_\varepsilon \rightarrow \tilde{s} > 0$ que satisfaz (2.23). Consequentemente, a afirmação da exclusividade na Proposição 2.2 implica que $(\tilde{t}, \tilde{s}) = (t_0, s_0)$. ■

O próximo lema mostra a continuidade da projeção em \mathcal{N}_{nod} em relação a convergência forte em X .

Lema 2.9 *Seja $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{N}_0$ e $\{\omega_n\} = \{\omega_{1,n}, \omega_{2,n}\} \in \tilde{\mathcal{N}}_0$ tal que*

$$\omega_n \rightarrow \omega \quad \text{em } X \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja $\{t_n, s_n\}$ e (t_0, s_0) os únicos pare de componentes positivas tal que

$$(t_n^\lambda \omega_{1,n}^+ - s_n^\lambda \omega_{1,n}^-, t_n^\mu \omega_{2,n}^+ - s_n^\mu \omega_{2,n}^-), (t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) \in \mathcal{N}_{nod}.$$

Então,

$$\{t_n, s_n\} \rightarrow (t_0, s_0), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração.

Temos

$$\begin{cases} 2B_n^+ = \gamma A_n^+ t_n^{\gamma-2} + \lambda C_{1,n} (s_n/t_n)^\mu + \mu C_{2,n} (s_n/t_n)^\lambda, \\ 2B_n^- = \gamma A_n^- s_n^{\gamma-2} + \mu C_{1,n} (t_n/s_n)^\lambda + \lambda C_{2,n} (t_n/s_n)^\mu. \end{cases} \quad (2.40)$$

Pela convergência forte em X temos

$$\omega_{1,n} \rightarrow \omega_1 \quad \text{em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \quad \text{e} \quad \omega_{2,n} \rightarrow \omega_2 \quad \text{em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}})$$

assim,

$$\omega_{1,n}^\pm \rightarrow \omega_1^\pm \quad \text{em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \quad \text{e} \quad \omega_{2,n}^\pm \rightarrow \omega_2^\pm \quad \text{em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_n^+ &:= \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\omega_{1,n}^\pm|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_{2,n}^\pm|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx \\ &\rightarrow \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\omega_1^\pm|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_2^\pm|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx =: A^+ > 0. \end{aligned}$$

Agora da continuidade de K , temos (recorde que $\omega_i^\pm \neq 0$, $i = 1, 2$, quando $\omega \in \mathcal{N}_0$),

$$B_n^+ := \int_{\Omega} \omega_{1,n}^\pm K \omega_{2,n}^\pm dx \rightarrow \int_{\Omega} \omega_1^\pm K \omega_2^\pm dx =: B > 0$$

e

$$C_{1,n} := \int_{\Omega} \omega_{1,n}^+ K \omega_{2,n}^- dx \rightarrow \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx =: C_1 > 0,$$

$$C_{2,n} := \int_{\Omega} \omega_{2,n}^+ K \omega_{1,n}^- dx \rightarrow \int_{\Omega} \omega_2^+ K \omega_1^- dx =: C_2 > 0.$$

Usando a Proposição 2.5 e argumentos exatamente como na prova do Lema 2.8, podemos concluir que $\{t_n, s_n\}$ é uma sequência limitada que na verdade converge para (t_0, s_0) . ■

Proposição 2.8 $\tilde{c}_{nod}^\varepsilon \rightarrow \tilde{c}_{nod}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração.

Lidaremos sucessivamente com a semi-continuidade superior e inferior.

Passo 1. Semi-continuidade superior.

Fixe $\omega \in \mathcal{N}_0$. Desde que \tilde{X} é denso e \mathcal{N}_0 é aberto, existe $\{\omega_n\} \subset \tilde{\mathcal{N}}_0$ tal que $\omega_n \rightarrow \omega$ fortemente em X . Dado $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 2.6, existem únicos $t_{n,\varepsilon}, s_{n,\varepsilon} > 0$ tal que

$$(t_{n,\varepsilon}^\lambda \omega_{1,n}^+ - s_{n,\varepsilon}^\lambda \omega_{1,n}^-, t_{n,\varepsilon}^\mu \omega_{2,n}^+ - s_{n,\varepsilon}^\mu \omega_{2,n}^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon &\leq I_\varepsilon(t_{n,\varepsilon}^\lambda \omega_{1,n}^+ - s_{n,\varepsilon}^\lambda \omega_{1,n}^-, t_{n,\varepsilon}^\mu \omega_{2,n}^+ - s_{n,\varepsilon}^\mu \omega_{2,n}^-) \\ &= I(t_{n,\varepsilon}^\lambda \omega_{1,n}^+ - s_{n,\varepsilon}^\lambda \omega_{1,n}^-, t_{n,\varepsilon}^\mu \omega_{2,n}^+ - s_{n,\varepsilon}^\mu \omega_{2,n}^-) \\ &\quad + \varepsilon t_{n,\varepsilon}^\gamma \left(\frac{p}{p+1} \int_\Omega |\nabla \omega_{1,n}^+|^{\frac{p+1}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_\Omega |\nabla \omega_{2,n}^+|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) \\ &\quad + \varepsilon s_{n,\varepsilon}^\gamma \left(\frac{p}{p+1} \int_\Omega |\nabla \omega_{1,n}^-|^{\frac{p+1}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_\Omega |\nabla \omega_{2,n}^-|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Agora observe que pelo Lema 2.8, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, temos

$$(t_{n,\varepsilon}, s_{n,\varepsilon}) \rightarrow (t_{n,0}, s_{n,0}) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

onde $t_{n,0}, s_{n,0} > 0$ é o único par de componentes positivas tal que

$$(t_{n,0}^\lambda \omega_{1,n}^+ - s_{n,0}^\lambda \omega_{1,n}^-, t_{n,0}^\mu \omega_{2,n}^+ - s_{n,0}^\mu \omega_{2,n}^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}.$$

Tomando o limite em (2.41) com $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{\text{nod}}^\varepsilon \leq I(t_{n,0}^\lambda \omega_{1,n}^+ - s_{n,0}^\lambda \omega_{1,n}^-, t_{n,0}^\mu \omega_{2,n}^+ - s_{n,0}^\mu \omega_{2,n}^-).$$

Por outro lado, pelo Lema 2.9 temos

$$(t_{n,0}, s_{n,0}) \rightarrow (t_0, s_0), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

onde $t_0, s_0 > 0$ é o único par de componentes positivas tal que

$$(t_0^\lambda \omega_{1,n}^+ - s_0^\lambda \omega_{1,n}^-, t_0^\mu \omega_{2,n}^+ - s_0^\mu \omega_{2,n}^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}.$$

Então deduzimos que

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{\text{nod}}^\varepsilon &\leq I(t_0^\lambda \omega_1^+ - s_0^\lambda \omega_1^-, t_0^\mu \omega_2^+ - s_0^\mu \omega_2^-) \\ &= \sup_{t,s>0} I(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-) \end{aligned}$$

Desde que isso vale para todos $\omega \in \mathcal{N}_0$, (2.26) implica que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon \leq \inf_{\omega \in \mathcal{N}_0} \sup_{t, s > 0} I(t^\lambda \omega_{1,n}^+ - s^\lambda \omega_{1,n}^-, t^\mu \omega_{2,n}^+ - s^\mu \omega_{2,n}^-) = \tilde{c}_{\text{nod}}.$$

Passo 2. Semi-continuidade inferior.

Seja $\omega_\varepsilon \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon$ tal que $I_\varepsilon(\omega_\varepsilon) = \tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon$ e $I'_\varepsilon(\omega_\varepsilon) = 0$. Desde que $\mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon \subset \tilde{\mathcal{N}}_0 \subset \mathcal{N}_0$, pela Proposição 2.2 e (2.16) existe únicos $(t_\varepsilon, s_\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tal que

$$(t_\varepsilon^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^+ - s_\varepsilon^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^-, t_\varepsilon^\mu \omega_{2,\varepsilon}^+ - s_\varepsilon^\mu \omega_{2,\varepsilon}^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}.$$

além disso, temos

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon &\leq I(t_\varepsilon^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^+ - s_\varepsilon^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^-, t_\varepsilon^\mu \omega_{2,\varepsilon}^+ - s_\varepsilon^\mu \omega_{2,\varepsilon}^-) \\ &= I(t_\varepsilon^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^+ - s_\varepsilon^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^-, t_\varepsilon^\mu \omega_{2,\varepsilon}^+ - s_\varepsilon^\mu \omega_{2,\varepsilon}^-) \\ &\quad + \varepsilon t_\varepsilon^\gamma \left(\frac{p}{p+1} \int_\Omega |\nabla \omega_{1,\varepsilon}^+|^{\frac{p+1}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_\Omega |\nabla \omega_{2,\varepsilon}^+|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) \\ &\quad + \varepsilon s_\varepsilon^\gamma \left(\frac{p}{p+1} \int_\Omega |\nabla \omega_{1,\varepsilon}^-|^{\frac{p+1}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_\Omega |\nabla \omega_{2,\varepsilon}^-|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) \\ &\leq \sup_{t, s > 0} I_\varepsilon(t^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^+ - s^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^-, t^\mu \omega_{2,\varepsilon}^+ - s^\mu \omega_{2,\varepsilon}^-) \\ &= I_\varepsilon(\omega_\varepsilon) = \tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.42}$$

■

Considere agora

$$W_\varepsilon := \{(\omega_\varepsilon, \varepsilon) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^\varepsilon \times \mathbb{R}^+; I_\varepsilon(\omega_{1,\varepsilon}, \omega_{2,\varepsilon}) = \tilde{c}_{\text{nod}}^\varepsilon\}.$$

Nosso próximo passo é mostrar que, dada uma sequência $\{\varepsilon_n\}$ convergindo para zero e uma sequência $\{\omega_{\varepsilon_n}\}$ tal que $(\omega_{\varepsilon_n}, \varepsilon_n) \in W_{\varepsilon_n}$, $\{\omega_{\varepsilon_n}\}$ converge forte em X e atinge \tilde{c}_{nod} .

Argumentando exatamente na prova da Proposição 2.7, inferimos que

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\omega_\varepsilon) &= \frac{(pq-1)p}{(p+1)(2pq+p+q)} \left(\int_\Omega |\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{p+1}{p}} dx \right) \\ &\quad + \frac{(pq-1)q}{(q+1)(2pq+p+q)} \left(\int_\Omega |\omega_{2,\varepsilon}|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla \omega_{2,\varepsilon}|^{\frac{q+1}{q}} dx \right). \end{aligned}$$

Combinando esta identidade com a Proposição 2.8, deduzimos a existência de $c > 0$ tal que

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \left(\int_\Omega |\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx, \int_\Omega |\omega_{2,\varepsilon}|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \right) \leq c. \tag{2.43}$$

Ademais, argumentando como no passo 3 da Proposição 2.7 deduzimos que

$$\inf_{\varepsilon \in (0,1]} \left(\int_{\Omega} |\omega_{1,\varepsilon}^{\pm}|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx, \int_{\Omega} |\omega_{2,\varepsilon}^{\pm}|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \right) \geq \tilde{\delta} > 0 \quad (2.44)$$

e as estimativas

$$\lambda \int_{\Omega} \omega_{1,\varepsilon}^+ K \omega_{2,\varepsilon} dx + \mu \int_{\Omega} \omega_{2,\varepsilon}^+ K \omega_{1,\varepsilon} dx \geq \lambda a_n^+ + \mu b_n^+ \geq (\lambda + \mu) \tilde{\delta} = 2\tilde{\delta}, \quad (2.45)$$

$$-\lambda \int_{\Omega} \omega_{1,\varepsilon}^- K \omega_{2,\varepsilon} dx + \mu \int_{\Omega} \omega_{2,\varepsilon}^- K \omega_{1,\varepsilon} dx \geq \lambda a_n^- + \mu b_n^- \geq (\lambda + \mu) \tilde{\delta} = 2\tilde{\delta}, \quad (2.46)$$

para cada $\varepsilon \in (0, 1]$.

A seguir, provaremos que os termos gradientes desaparecem quando se toma o limite em $I'_\varepsilon(\omega_\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposição 2.9 *Seja $(\omega_\varepsilon, \varepsilon) \in W_\varepsilon$. Temos*

$$\max \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{p+1}{p}} dx, \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,\varepsilon}|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração.

Pela Proposição 2.8 e da desigualdade (2.42), deduzimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(t_\varepsilon^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^+ - s_\varepsilon^\lambda \omega_{1,\varepsilon}^-, t_\varepsilon^\mu \omega_{2,\varepsilon}^+ - s_\varepsilon^\mu \omega_{2,\varepsilon}^-) = \tilde{c}_{\text{nod}}.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon t_\varepsilon^\gamma \left(\frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,\varepsilon}^+|^{\frac{p+1}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,\varepsilon}^+|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) = 0$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon s_\varepsilon^\gamma \left(\frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,\varepsilon}^-|^{\frac{p+1}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,\varepsilon}^-|^{\frac{q+1}{q}} dx \right) = 0.$$

Observe que a conclusão é uma consequência óbvia da seguinte afirmação:

Afirmação: $t_\varepsilon, s_\varepsilon \rightarrow 0$.

Argumentando como na prova dos Lemas 2.8 e 2.9 o par $(t_\varepsilon, s_\varepsilon)$ satisfaz

$$2t_\varepsilon^{2-\gamma} B_\varepsilon^+ \geq \gamma A_\varepsilon^+ \quad 2s_\varepsilon^{2-\gamma} B_\varepsilon^- \geq \gamma A_\varepsilon^- \quad (2.47)$$

com

$$A_\varepsilon^\pm := \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\omega_{1,\varepsilon}^\pm|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |\omega_{2,\varepsilon}^\pm|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx,$$

$$B_\varepsilon^\pm := \int_{\Omega} \omega_{1,\varepsilon}^\pm K \omega_{2,\varepsilon}^\pm dx.$$

Por (2.43), deduzimos a existência de ω , $(f_+, g_+), (f_-, g_-) \in X$ tal que, a menos de subsequência, $\omega_\varepsilon \rightarrow \omega$ em X ,

$$\omega_{1,\varepsilon}^\pm \rightarrow f_\pm \geq 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}})$$

e

$$\omega_{2,\varepsilon}^\pm \rightarrow g_\pm \geq 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}})$$

Passando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em (2.45) – (2.46), da compacidade de K obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} f_+ K(g_+ - g_-) dx + \mu \int_{\Omega} g_+ K(f_+ - f_-) dx &\geq 2\tilde{\delta} \\ -\lambda \int_{\Omega} f_- K(g_+ - g_-) dx - \mu \int_{\Omega} g_- K(f_+ - f_-) dx &\geq 2\tilde{\delta}, \end{aligned}$$

e é claro que $f_\pm, g_\pm \neq 0$. Retornando para (2.47), vemos que a estimativa (2.44) nos dá $A_\varepsilon^\pm \geq \tilde{\delta} > 0$, onde $\tilde{\delta}$ é independente de ε . Desde que

$$B_\varepsilon^\pm \rightarrow \int_{\Omega} f_\pm K g_\pm dx > 0$$

temos que $t_\varepsilon, s_\varepsilon \rightarrow 0$, como queríamos. ■

Agora estamos prontos para provar nosso principal resultado. O ponto chave é a próxima afirmação.

Afirmção 2.10 *A menos de subsequência, $\omega_\varepsilon \rightarrow \omega$ fortemente em X para algum $\omega \in X$.*

Primeiramente deduzimos de (2.43) que $\{\omega_\varepsilon\}$ é limitada. Da reflexividade de X , a menos de subsequência, existem $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in X$ tal que $\omega_\varepsilon \rightarrow \omega$ fracamente em X e

$$|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} \rightarrow g_1 \quad \text{fracamente em} \quad L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}})$$

e

$$|\omega_{2,\varepsilon}|^{\frac{1}{q}-1} \omega_{2,\varepsilon} \rightarrow g_2 \quad \text{fracamente em} \quad L^{q+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}}),$$

onde $g_1 = |\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1 \in L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}})$ e $g_2 = |\omega_{2,\varepsilon}|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2 \in L^{q+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}})$. Veja que $(\omega_{1,\varepsilon}, \omega_{2,\varepsilon}) \rightarrow (\omega_1, \omega_2)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Pois, como $\omega_\varepsilon \rightarrow \omega$ em X temos que

$$f(\omega_\varepsilon) \rightarrow f(\omega) \quad \forall f \in X'.$$

Considerando o funcional linear e contínuo $g : L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \rightarrow \mathbb{R}$ e a projeção $\pi_1 : X \rightarrow L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}})$ dado por $\pi_1(\omega_{1,\varepsilon}, \omega_{2,\varepsilon}) = \omega_{1,\varepsilon}$. Temos, $g \circ \pi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e contínuo. Daí,

$$g \circ \pi_1(\omega_\varepsilon) \rightarrow g \circ \pi_1(\omega) \Rightarrow g(\omega_{1,\varepsilon}) \rightarrow g(\omega_1)$$

daí,

$$\omega_{1,\varepsilon} \rightharpoonup \omega_1 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

De maneira análoga temos $\Rightarrow \omega_{2,\varepsilon} \rightharpoonup \omega_2$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De (2.28), $(\omega_{1,\varepsilon}, \omega_{2,\varepsilon})$ é um ponto crítico, isto é,

$$\begin{aligned} 0 = I'_\varepsilon(\omega_\varepsilon)(\varphi, \Psi) &= \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_{1,\varepsilon} \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} \varphi |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{2,\varepsilon}|^{\frac{1}{q}-1} \nabla \omega_{2,\varepsilon} \nabla \Psi dx + \int_{\Omega} |\omega_{2,\varepsilon}|^{\frac{1}{q}-1} \omega_{2,\varepsilon} \Psi |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx \\ &- \int_{\Omega} (\varphi K \omega_{2,\varepsilon} + \Psi K \omega_{1,\varepsilon}) dx. \end{aligned}$$

$\forall (\varphi, \Psi) \in X$. Para $(\varphi, 0) \in X$ temos,

$$\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_{1,\varepsilon} \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} \varphi |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx - \int_{\Omega} \varphi K \omega_{2,\varepsilon} dx = 0 \quad (2.48)$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, pela Proposição 2.9 e a Desigualdade de Hölder temos,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_{1,\varepsilon} \nabla \varphi dx &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}} |\nabla \varphi| dx \\ &\leq \varepsilon^{p+1} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{\frac{p}{p+1}} dx \right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Desde que

$$|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} \rightharpoonup g_1 \quad \text{fracamente em} \quad L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}})$$

temos,

$$\int_{\Omega} |\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} \varphi |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \rightarrow \int_{\Omega} g_1 \varphi |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \quad \forall \varphi \in L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.50)$$

Por (2.49) e (2.50) em (2.48) temos

$$\int_{\Omega} (g_1 |x|^{-\frac{\alpha}{p}} - K \omega_{2,\varepsilon}) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \quad (2.51)$$

Portanto, em (2.51) temos

$$\int_{\Omega} (g_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} - K\omega_1) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in L^{p+1}(\Omega, |x|^{\frac{-\alpha}{p}}).$$

Logo, pelo Lema de Du Bois Raymond temos

$$g_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} = K\omega_2.$$

Analogamente, mostramos que

$$g_2 |x|^{\frac{-\beta}{q}} = K\omega_1,$$

isto implica em particular que

$$g_1 |x|^{\frac{-\alpha}{p}} \in W^{2, \frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1, \frac{q+1}{q}}(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega).$$

e

$$g_2 |x|^{\frac{-\beta}{q}} \in W^{2, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \subset L^{q+1}(\Omega).$$

Escrevendo $g_1 = |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1$, com $f_1 = |g_1|^{p-1} g_1$, observamos que $f_1 \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{-\alpha}{p}})$ por que

$$\int_{\Omega} |f_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx = \int_{\Omega} |g_1|^{p+1} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx < \infty.$$

Agora, considere $\delta > 0$ e fixe $h_\delta \in W^{11, \frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{-\alpha}{p}})$ tal que

$$|f_1 - h_\delta|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} < \delta \tag{2.52}$$

usando Identidade de Green e a função teste $\omega_{1,\varepsilon} - h_\delta$ na equação

$$-\varepsilon \operatorname{div} \left(|\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_{1,\varepsilon} \right) + \left(|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} - |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1 \right) |x|^{\frac{-\alpha}{p}} = K\omega_{2,\varepsilon} - K\omega_2,$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} - |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1) (\omega_{1,\varepsilon} - h_\delta) |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \\ &= -\varepsilon \int_{\Omega} (|\nabla \omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \nabla \omega_{1,\varepsilon}) \cdot \nabla (\omega_{1,\varepsilon} - h_\delta) dx \\ &+ \int_{\Omega} (K\omega_{2,\varepsilon} - K\omega_2) (\omega_{1,\varepsilon} - h_\delta) dx. \end{aligned}$$

A Proposição 2.9, o limite superior (2.43) e a compacidade do operador K agora implicam que o lado direito da última equação converge para 0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Consequentemente, podemos tomar $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que

$$\left| \int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} - |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1) (\omega_{1,\varepsilon} - h_\delta) |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx \right| < \delta, \quad \forall \varepsilon < \tilde{\varepsilon}. \tag{2.53}$$

Combinando (2.43), (2.52) e (2.53), temos que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} - |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1) (\omega_{1,\varepsilon} - f_1) |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \right| \\
& \leq \left| \int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} - |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1) (\omega_{1,\varepsilon} - h_{\delta}) |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \right| \\
& \quad + \left| \int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} - |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1) (h_{\delta} - f_1) |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \right| \\
& \leq \delta + \|h_{\delta} - f_1\|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} \| |\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1 \|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} \leq \delta + C\delta,
\end{aligned}$$

para algum $C > 0$ (independente de ε e δ). Concluimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} - |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1) (\omega_{1,\varepsilon} - f_1) |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx = 0. \quad (2.54)$$

Usando a Desigualdade de Tartar (Apêndice D)

$$(|\varepsilon|^{\frac{1}{p}-1} \varepsilon - |\eta|^{\frac{1}{p}-1} \eta) \cdot (\varepsilon - \eta) \geq 2^{\frac{p-1}{p}} |\varepsilon - \eta|^{\frac{p+1}{p}} \quad \text{se } 0 < p < 1,$$

deduzimos de (2.54) que $\omega_{1,\varepsilon} \rightarrow f_1 = \omega_1$ fortemente em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}})$ onde $p \leq 1$. No caso complementar $p > 1$ usando a Desigualdade de Tartar temos

$$(|\varepsilon|^{\frac{1}{p}-1} \varepsilon - |\eta|^{\frac{1}{p}-1} \eta) \cdot (\varepsilon - \eta) \geq 2^{\frac{p-1}{p}} |\varepsilon - \eta|^{\frac{p+1}{p}} \quad \text{se } p \geq 1,$$

observamos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon} - f_1|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) dx &= \int_{\Omega} \frac{|\omega_{1,\varepsilon} - f_1|^{\frac{p+1}{p}}}{(|\omega_{1,\varepsilon}| + |f_1|)^{\frac{p^2-1}{2p^2}}} (|\omega_{1,\varepsilon}| + |f_1|)^{\frac{p^2-1}{2p^2}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \frac{|\omega_{1,\varepsilon} - f_1|^2}{(|\omega_{1,\varepsilon}| + |f_1|)^{1-\frac{1}{p}}} dx \right)^{\frac{p+1}{2p}} \left(\int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon}| + |f_1|)^{\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \right) \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} (|\omega_{1,\varepsilon}|^{\frac{1}{p}-1} \omega_{1,\varepsilon} - |f_1|^{\frac{1}{p}-1} f_1) (\omega_{1,\varepsilon} - f_1) |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \right)^{\frac{p+1}{2p}}
\end{aligned}$$

e chegamos a mesma conclusão para $p \leq 1$. A convergência da componente $\omega_{2,\varepsilon}$ segue de maneira análoga.

A afirmação anterior garante que $\omega_{\varepsilon} \rightarrow \omega$ fortemente em X com $\omega_1^{\pm}, \omega_2^{\pm} \neq 0$, desde que (2.44) agora implica

$$\min \left(\int_{\Omega} |\omega_{1,\varepsilon}^{\pm}|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx, \int_{\Omega} |\omega_{2,\varepsilon}^{\pm}|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx \right) \geq \tilde{\delta} > 0.$$

Pela Proposição 2.8 e 2.9 junto com a convergência forte em X , concluímos que $I(\omega) = \tilde{c}_{\text{nod}}$ e que

$$I'(\omega)(\lambda\omega_1^\pm, \mu\omega_2^\pm) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I'_\varepsilon(\omega_\varepsilon)(\lambda\omega_{1,\varepsilon}^\pm, \mu\omega_{2,\varepsilon}^\pm) = 0.$$

Em particular, $\omega \in \mathcal{N}_{\text{nod}}$ é um minimizador e o Lema 2.4 nos dá $I'(\omega) = 0$. Por fim, a caracterização (2.25) do nível crítico segue de maneira direta como mencionada anteriormente. ■

2.3 Demonstração do Teorema 2.2

Demonstração.

Multiplicando a primeira equação de (2.3) por u e a segunda equação de (2.3) por v e usando a Identidade de Green e a desigualdade Hölder, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |v|^{q-1} v u |x|^\beta dx \leq \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} |x|^\beta dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |u|^{q+1} |x|^\beta dx \right)^{\frac{1}{q+1}}$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = \int_{\Omega} |u|^{q-1} u v |x|^\beta dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{q+1} |x|^\beta dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} |x|^\beta dx \right)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Multiplicando agora primeira equação de (2.3) por v , e a segunda de (2.3) por u e usando novamente a Identidade de Green ficamos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} |v|^{q+1} |x|^\beta dx = \int_{\Omega} |u|^{q+1} |x|^\beta dx.$$

Colocando essas estimativas juntas, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &= \int_{\Omega} |v|^{q-1} v u |x|^\beta dx + \int_{\Omega} |u|^{q-1} u v |x|^\beta dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^{q+1} |x|^\beta dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} |x|^\beta dx \right)^{\frac{1}{q+1}} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} |u|^{q+1} |x|^\beta dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} |x|^\beta dx \right)^{\frac{1}{q+1}} \\ &= 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &\leq 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \\ \Leftrightarrow |u - v|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

E assim, $u = v$. ■

2.4 Quebra de Simetria

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u, & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Por [[2], Teorema 1.3] sabe-se que qualquer solução nodal de energia mínima não é radial quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ou é uma bola ou é um anel centrado na origem. Vamos mostrar que quando (p, q) está perto de algum (q_0, q_0) e (α, β) está perto de $(0, 0)$ esta propriedade ainda é verdadeira.

Tome q_0 satisfazendo

$$q_0 > 1 \quad \text{tal que} \quad q_0 + 1 < 2N/(N - 2) \quad \text{se} \quad N \geq 3, \quad (2.55)$$

e δ_0 tal que

$$q_0 - \delta_0 > 1 \quad \text{e} \quad q_0 + 1 + \delta_0 < 2N/(N - 2) \quad \text{se} \quad N \geq 3 \quad (2.56)$$

isto é, tal que o quadrado $[q_0 - \delta_0, q_0 + \delta_0]$ está contido na região do ponto (p, q) tal que (2.2) ocorre. A prova do Teorema 2.3 consiste em fazer algumas estimativas da solução nodal de energia mínima como $p, q \rightarrow q_0$ e $\alpha, \beta \rightarrow 0$, combinando com o fato mostrado em [[2], Teorema 1.3] de que no ponto (q_0, q_0) e $\alpha, \beta = 0$ a solução nodal de energia mínima não é radial. Tendo isso em mente introduzimos algumas notações. Dado (p, q) satisfazendo (2.2), $\alpha, \beta \geq 0$. Denotamos por $c_{\text{nod}}^{p,q,\alpha,\beta}$ o nível nodal de energia mínima de (2.1), e por $E_{p,q,\alpha,\beta}$ o funcional energia associado a (2.1). Também utilizaremos o quadro variacional introduzido na Seção 2.1, denotando por $I_{p,q,\alpha,\beta}$ o funcional energia (2.14) e o fato de que $E_{p,q,\alpha,\beta}(u, v) = I_{p,q,\alpha,\beta}(u, v)$ é ponto crítico sobre a relação

$$(u, v) := (|x|^{\frac{-\alpha}{p}} |\omega_1|^{\frac{1}{p}-1} \omega_1, |x|^{\frac{-\beta}{q}} |\omega_2|^{\frac{1}{q}-1} \omega_2).$$

Recordemos a caracterização do Teorema 2.6:

$$c_{\text{nod}}^{p,q,\alpha,\beta} = \inf_{\mathcal{N}_{\text{nod}}^{p,q,\alpha,\beta}} I_{p,q,\alpha,\beta} = \inf_{\omega \in \mathcal{N}_0^{p,q,\alpha,\beta}} \sup_{t,s>0} I_{p,q,\alpha,\beta}(t^\lambda \omega_1^+ - s^\lambda \omega_1^-, t^\mu \omega_2^+ - s^\mu \omega_2^-),$$

onde

$$\lambda = \lambda(p, q) = \frac{2p(q+1)}{p+q+2pq} \quad \mu = \mu(p, q) = \frac{2q(p+1)}{p+q+2pq},$$

$$\mathcal{N}_{\text{nod}}^{p,q,\alpha,\beta} =: \{\omega_1^\pm \neq 0, \omega_2^\pm \neq 0 \text{ e } I'_{p,q,\alpha,\beta}(\omega)(\lambda\omega_1^+, \mu\omega_2^+) = I'_{p,q,\alpha,\beta}(\omega)(\lambda\omega_1^-, \mu\omega_2^-) = 0\}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0^{p,q,\alpha,\beta} &:= \left\{ \omega \in X_{p,q,\alpha,\beta} : \begin{array}{l} \lambda \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx > 0, \\ \lambda \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2 dx + \mu \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^- dx < 0 \end{array} \right\} \\ &= \{\omega \in X_{p,q,\alpha,\beta}, \lambda C_1 + \mu C_2 < 2B^+, \mu C_1 + \lambda C_2 < 2B^-\} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} X_{p,q,\alpha,\beta} &= L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{-\frac{\alpha}{p}}) \times L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{-\frac{\beta}{q}}) \\ B^+ &= \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx & B^- &= \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^- dx \\ C_1 &= \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^- dx & C_2 &= \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2^+ dx. \end{aligned}$$

Por simplicidade, quando $p = q$ e $\alpha = \beta = 0$ usaremos a notação c_{nod}^p para $c_{\text{nod}}^{p,p,0,0}$.

Primeiramente, provemos um limite inferior uniforme para as partes positivas e negativas dos elementos de $\mathcal{N}_{\text{nod}}^{p,q,\alpha,\beta}$.

Lema 2.10 *Dado q_0 satisfazendo (2.55) existe $\delta_0 > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |\omega_1^\pm|^{-\frac{p+1}{p}} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} dx \geq \varepsilon \text{ e } \int_{\Omega} |\omega_2^\pm|^{-\frac{q+1}{q}} |x|^{-\frac{\beta}{q}} dx \geq \varepsilon$$

para todo $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^{p,q,\alpha,\beta}$ com $p, q \in [q_0 - \delta_0, q_0 + \delta_0]$ e $\alpha, \beta \in [0, \delta_0]$.

Demonstração.

Usaremos as estimativas da Proposição 2.5 no passo 3, desta vez mantendo um melhor controle das constantes. Dividiremos a prova em 3 passos.

Passo 1: Existe C_1 (independente de p e q) tal que

$$|u|_{p+1} \leq C_1 |u|_{W^{2, \frac{q+1}{q}}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{2, \frac{q+1}{q}}(\Omega), p, q \in [q_0 - \delta_0, q_0 + \delta_0].$$

Desde que Ω tem medida finita e $p \leq q_0 + \delta_0$ temos $p+1 \leq q_0 + \delta_0 + 1$ pela desigualdade de Hölder temos,

$$\begin{aligned} |u|_{p+1}^{p+1} &= \int_{\Omega} 1 \cdot |u|^{p+1} dx \leq |\Omega|^{\frac{q_0 + \delta_0 - p}{q_0 + \delta_0 + 1}} \| |u|^{p+1} \|_{\frac{q_0 + \delta_0 + 1}{p+1}} \\ &\Rightarrow |u|_{p+1} \leq |\Omega|^{\frac{q_0 + \delta_0 - p}{(p+1)(q_0 + \delta_0 + 1)}} |u|_{q_0 + \delta_0 + 1} \\ &\leq K_1 |\Omega|^{\frac{q_0 + \delta_0 - p}{(p+1)(q_0 + \delta_0 + 1)}} |u|_{W^{2, \frac{q_0 + \delta_0 + 1}{q_0 + \delta_0}}(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde K_1 é uma constante associada a imersão $W^{2, \frac{q_0+\delta_0+1}{q_0+\delta_0}}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_0+\delta_0+1}(\Omega)$; recorde que δ_0 é tal que (2.56) ocorre. Além disso, novamente usando Hölder e também que $(q_0 + \delta_0 + 1)/(q_0 + \delta_0) \leq (q_0 + 1)/q$,

$$\begin{aligned} |u|_{W^{2, \frac{q_0+\delta_0+1}{q_0+\delta_0}}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^{\frac{q_0+\delta_0+1}{q_0+\delta_0}} dx \right)^{\frac{q_0+\delta_0}{q_0+\delta_0+1}} \\ &\leq \left(|\Omega|^{\frac{q_0+\delta_0-q}{(q_0+1)(q_0+\delta_0)}} \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha u|^{\frac{q_0+\delta_0}{\frac{q_0+\delta_0+1}{q}}} \right)^{\frac{q_0+\delta_0}{q_0+\delta_0+1}} \\ &\leq \left(\frac{N(N-1)}{2} + N + 1 \right)^{\frac{q_0+\delta_0}{q_0+\delta_0+1}} |\Omega|^{\frac{q_0+\delta_0-q}{(q_0+1)(q_0+\delta_0+1)}} |u|_{W^{2, \frac{q+1}{q}}(\Omega)}, \end{aligned}$$

e portanto

$$|u|_{q+1} \leq k(p, q) |u|_{W^{2, \frac{q+1}{q}}(\Omega)},$$

com

$$k(p, q) = K_1 \left(\frac{N(N-1)}{2} + N + 1 \right)^{\frac{q_0+\delta_0}{q_0+\delta_0+1}} |\Omega|^{\frac{q_0+\delta_0-q}{(q_0+1)(q_0+\delta_0+1)}} |\Omega|^{\frac{q_0+\delta_0-p}{(p+1)(p+\delta_0+1)}},$$

que é limitado por cima por uma constante C_1 para todo $p, q \in [q_0 - \delta_0, q_0 + \delta_0]$.

Passo 2: Existe C_2 tal que, para todo $u \in W^{2, \frac{q_0+\delta_0+1}{q_0+\delta_0}}(\Omega) \cap W^{1, \frac{q_0+\delta_0+1}{q_0+}}(\Omega)$

$$|Ku|_{W^{2, \frac{q_0+\delta_0+1}{q_0+\delta_0}}(\Omega)} \leq C_2 |u|_{\frac{q_0+\delta_0+1}{q_0+\delta_0}},$$

veja [[16], Lema 9.17].

Passo 3: Como $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^{p, q, \alpha, \beta}$, pelo passo 1 e 2 obtemos existe $C > 0$ independente p, q, α, β tal que

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} |\omega_1^+|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \mu \int_{\Omega} |\omega_2^+|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx &\leq 2 \int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2^+ dx \\ &\leq 2 |\omega_1^+|_{\frac{p+1}{p}} |K \omega_2^+|_{p+1} \leq 2C_1 |\omega_1^+|_{\frac{p+1}{p}} |K \omega_2^+|_{W^{2, \frac{q_0+1+\delta_0}{q_0+\delta_0}}} \\ &\leq 2C_1 C_2 |\omega_1^+|_{\frac{p+1}{p}} |\omega_2^+|_{\frac{q_0+1+\delta_0}{q_0+\delta_0}} \leq \tilde{C} |\omega_1^+|_{\frac{p+1}{p}} |\omega_2^+|_{\frac{q+1}{q}} \\ &\leq C |\omega_1^+|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} |\omega_2^+|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{p}}, \end{aligned} \tag{2.57}$$

onde estamos usando a estimativa (2.4) e o fato que $q \leq q_0 + \delta_0$. Usando a Desigualdade de Young

$$Cab \leq \frac{a^{\frac{p+1}{p}}}{\frac{p+1}{p}} + \frac{C^{p+1} b^{p+1}}{p+1}, \quad \frac{1}{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{p+1} = 1 \quad \forall a, b \geq 0. \tag{2.58}$$

Recordando (2.15) e que $pq > 1$ vemos que

$$\begin{aligned} \frac{(2p)^p}{\lambda^p(p+1)^{p+1}} &= \frac{(2p)^p}{\frac{(2p)^p(q+1)^p}{(p+q+2pq)^p}(p+1)^{p+1}} \\ &= \frac{(p+q+2pq)^p}{(1+p+q+pq)^p(p+1)} \\ &\geq \frac{(p+q+2pq)^p}{(p+q+2pq)^p(p+1)} \\ &\geq \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2p(q+1)}{p+q+2pq} \geq \frac{p}{p+q} \\ \Leftrightarrow 2(q+p+pq+1) &\geq p+q+2pq \\ \Leftrightarrow 2q+2p+2 &\geq p+q \\ \Leftrightarrow p+q+2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Assim, em (2.58) teremos

$$Cab \leq \lambda a^{\frac{p+1}{p}} + \frac{(2p)^p C^{p+1}}{\lambda^p(p+1)^{p+1}} b^{p+1} \quad \forall a, b \geq 0.$$

Substituindo em (2.57) temos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} |\omega_1^+|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx + \mu \int_{\Omega} |\omega_2^+|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx &\leq C \|\omega_1^+\|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}} \|\omega_2^+\|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}} \\ &\leq \lambda \|\omega_1^+\|_{\frac{p+1}{p}, \frac{\alpha}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + \frac{(2p)^p C^{p+1}}{\lambda^p(p+1)^{p+1}} \|\omega_2^+\|_{\frac{q+1}{q}, \frac{\beta}{q}}^{p+1} \\ \Rightarrow \mu \int_{\Omega} |\omega_1^+|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{-\alpha}{p}} dx &\leq \frac{(2p)^p C^{p+1}}{\lambda^p(p+1)^{p+1}} \left(\int_{\Omega} |\omega_2^+|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \right)^{\frac{q(p+1)}{q+1}}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_{\Omega} |\omega_2^+|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \geq \left(\frac{\mu \lambda^p (p+1)^{p+1}}{(2p)^p C^{p+1}} \right)^{\frac{q+1}{pq-1}} =: K(p, q).$$

Como $K(p, q) > 0$, então para δ_0 suficientemente pequeno temos $K(p, q) \geq \varepsilon > 0$ para todos $p, q \in [q_0 - \delta_0, q_0 + \delta_0]$. De maneira análoga mostramos que

$$\int_{\Omega} |\omega_2^{\pm}|^{\frac{q+1}{q}} |x|^{\frac{-\beta}{q}} dx \geq \varepsilon.$$

■

Lema 2.11 *Temos*

$$\limsup c_{nod}^{p,q,\alpha,\beta} \leq c_{nod}^{q_0} \quad \text{quando } p, q \rightarrow q_0, \alpha, \beta \rightarrow 0.$$

Em particular, existe δ_0 e $k > 0$ tal que

$$0 < c_{nod}^{p,q,\alpha,\beta} \leq k \quad \forall p, q \in [q_0 - \delta_0, q_0 + \delta_0], \alpha, \beta \in [0, \delta_0].$$

Demonstração.

Considere $p_n, q_n \rightarrow q_0$ e $\alpha_n, \beta_n \rightarrow 0$. Dividiremos nossa prova em 3 passos.

Passo 1: Seja (ω_1, ω_2) tal que $\omega_1^\pm, \omega_2^\pm \neq 0$,

$$I_{q_0}(\omega_1, \omega_2) = c_{nod}^{q_0} \quad I'_{q_0}(\omega_1, \omega_2) = 0,$$

onde $I_{q_0} = I_{q_0, q_0, 0, 0}$. Denote

$$\lambda_n := \lambda(p_n, q_n) = \frac{2p_n(q_n + 1)}{p_n + q_n + 2p_nq_n} \quad \text{e} \quad \mu_n := \mu(p_n, q_n) = \frac{2q_n(p_n + 1)}{p_n + q_n + 2p_nq_n}.$$

Desde que $\lambda_n, \mu_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\int_{\Omega} \omega_1^+ K \omega_2 dx + \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^+ dx > 0, \quad \int_{\Omega} \omega_1^- K \omega_2 dx + \int_{\Omega} \omega_1 K \omega_2^- dx < 0,$$

então, $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{N}_0^{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}$ para n grande. Consequentemente, por (2.25) inferimos que, temos que

$$c_{nod}^{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n} \leq \sup_{t, s > 0} I_{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}(t^{\lambda_n} \omega_1^+ - s^{\lambda_n} \omega_1^-, t^{\mu_n} \omega_2^+ - s^{\mu_n} \omega_2^-).$$

Assumindo que o supremo do lado direito é alcançado em $(t, s) = (t_n, s_n)$.

Passo 2: $t_n, s_n \rightarrow 1$.

2 a): Primeiro observe que $\{t_n, s_n\}$ são limitadas. De fato, repetindo os argumentos do Lema 2.2, temos desta vez que

$$\begin{aligned} & I_{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}(t_n^{\lambda_n} \omega_1^+ - s_n^{\lambda_n} \omega_1^-, t_n^{\mu_n} \omega_2^+ - s_n^{\mu_n} \omega_2^-) \leq A_n^+ t_n^{\gamma_n} + A_n^- s_n^{\gamma_n} \\ & + \left(\frac{1}{2}(\lambda_n C_1 + \mu_n C_2) - B^+ \right) t_n^2 + \left(\frac{1}{2}(\mu_n C_1 + \lambda_n C_2) - B^- \right) s_n^2 \end{aligned}$$

com

$$A_n^\pm = \frac{p_n}{p_n + 1} \int_{\Omega} |\omega_1^\pm|^{\frac{p_n+1}{p_n}} |x|^{-\frac{\alpha_n}{p_n}} dx + \frac{q_n}{q_n + 1} \int_{\Omega} |\omega_2^\pm|^{\frac{q_n+1}{q_n}} |x|^{-\frac{\beta_n}{q_n}} dx,$$

(positivos e limitados em n), e

$$\gamma_n = \lambda_n \frac{p_n + 1}{p_n} = \mu_n = \frac{q_n + 1}{q_n} \rightarrow \frac{q_0 + 1}{q_0} \in (1, 2).$$

Desde que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_n C_1 + \mu_n C_2) - B^+ &\rightarrow \frac{1}{2}(C_1 + C_2) - B^+ < 0, \\ \frac{1}{2}(\mu_n C_1 + \lambda_n C_2) - B^- &\rightarrow \frac{1}{2}(C_1 + C_2) - B^- < 0 \end{aligned}$$

então, se $|s_n| + |t_n| \rightarrow \infty$ teríamos

$$0 < c_{\text{nod}}^{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n} \leq I_{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}(t_n^{\lambda_n} \omega_1^+ - s_n^{\lambda_n} \omega_1^-, t_n^{\mu_n} \omega_2^+ - s_n^{\mu_n} \omega_2^-) \rightarrow -\infty,$$

que é um contradição.

2 b): Temos $t_n, s_n \rightarrow 0$. De fato,

$$(t_n^{\lambda_n} \omega_1^+ - s_n^{\lambda_n} \omega_1^-, t_n^{\mu_n} \omega_2^+ - s_n^{\mu_n} \omega_2^-) \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n},$$

então pelo Lema 2.10

$$\int_{\Omega} |t_n^{\lambda_n} \omega_1^+|^{\frac{p_n+1}{p_n}} |x|^{-\frac{\alpha_n}{p_n}} dx, \int_{\Omega} |s_n^{\lambda_n} \omega_1^-|^{\frac{p_n+1}{p_n}} |x|^{-\frac{\alpha_n}{p_n}} dx \geq \varepsilon > 0,$$

o que prova a afirmação.

2 c): Temos $t_n \rightarrow \tilde{t} \neq 0, s_n \rightarrow \tilde{s} \neq 0$. Desde que

$$\begin{aligned} I_{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}(\omega_1, \omega_2) &\leq \sup_{t, s > 0} I_{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}(t^{\lambda_n} \omega_1^+ - s^{\lambda_n} \omega_1^-, t^{\mu_n} \omega_2^+ - s^{\mu_n} \omega_2^-) \\ &= I_{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}(t_n^{\lambda_n} \omega_1^+ - s_n^{\lambda_n} \omega_1^-, t_n^{\mu_n} \omega_2^+ - s_n^{\mu_n} \omega_2^-), \end{aligned}$$

passando o limite,

$$\sup_{t, s > 0} I_{q_0}(t\omega_1^+ - s\omega_1^-, t\omega_2^+ - s\omega_2^-) = I_{q_0}(\omega_1, \omega_2) \leq I_{q_0}(\tilde{t}\omega_1^+ - \tilde{s}\omega_1^-, \tilde{t}\omega_2^+ - \tilde{s}\omega_2^-).$$

Pela unicidade provada na Proposição 2.2 temos $\tilde{t} = \tilde{s} = 1$.

Passo 3: Finalmente, fazendo $n \rightarrow \infty$ na desigualdade

$$c_{\text{nod}}^{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n} \leq I_{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}(t_n^{\lambda_n} \omega_1^+ - s_n^{\lambda_n} \omega_1^-, t_n^{\mu_n} \omega_2^+ - s_n^{\mu_n} \omega_2^-),$$

obtemos

$$\limsup_n c_{\text{nod}}^{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n} \leq I_{q_0}(\omega_1, \omega_2) = c_{\text{nod}}^{q_0}$$

■

Como consequência temos o seguinte lema

Lema 2.12 *Dado q_0 satisfazendo (2.55) existem δ_0 e $k > 0$ tais que*

$$|(u, v)|_\infty \leq k$$

Demonstração.

Desde que a não linearidade em (2.1) satisfaz

$$||x|^\alpha |s|^{p_n} s| \leq C(1 + |s|^{q_0+1+\delta})$$

$$||x|^\beta |s|^{q_n} s| \leq C(1 + |s|^{q_0+1+\delta})$$

$\forall s \in \mathbb{R}$, para $p, q \in [q_0 + \delta_0, q_0 + \delta_0]$, $\delta \in [0, \delta_0]$, C independente de p, q, α, β , então podemos raciocinar exatamente como feito no Apêndice A.5 para obter a limitação uniforme.

■

Lema 2.13 *Seja q_0 satisfazendo (2.55). Então,*

$$c_{nod}^{p,q,\alpha,\beta} \rightarrow c_{nod}^{q_0} \quad \text{quando} \quad p, q \rightarrow q_0 \quad \alpha, \beta \rightarrow \infty$$

Além disso, as soluções nodais de energia mínima convergem: se $(u_{p,q,\alpha,\beta}, v_{p,q,\alpha,\beta})$ é uma solução que muda de sinal (2.1) com

$$E_{p,q,\alpha,\beta}(u_{p,q,\alpha,\beta}, v_{p,q,\alpha,\beta}) = c_{nod}^{p,q,\alpha,\beta},$$

então,

$$u_{p,q,\alpha,\beta} \rightarrow u \quad v_{p,q,\alpha,\beta} \rightarrow v \quad \text{em} \quad C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$$

para todo $0 < \gamma < 1$, onde (u, v) resolve (2.1) para $p = q = q_0$, $\alpha, \beta = 0$ e $E_{q_0}(u, v) = c_{nod}^{q_0}$.

Demonstração.

Seja $p_n, q_n \rightarrow q_0$ e $\{u_n, v_n\}$ solução nodal de energia mínima de (2.1) com $(p, q, \alpha, \beta) = (p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n)$, pelo lema anterior $|(u_n, v_n)|_\infty \leq k$, dessa forma a sequência $\{u_n, v_n\}$ é uniformemente limitada em $W^{2,s}(\Omega) \times W^{2,t}(\Omega)$ para todo $t, s > 1$. Então, existem u, v tal que $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$ em $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ e (u, v) resolve

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{q_0-1}v, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = |u|^{q_0-1}u, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.59)$$

Definindo

$$\omega_{1,n} = |x|^{\alpha_n} |u_n|^{p_n-1} u_n, \quad \omega_{2,n} = |x|^{\beta_n} |v_n|^{q_n-1} v_n,$$

temos do Lema 2.10 que

$$\int_{\Omega} |u_n^{\pm}|^{p_n+1} |x|^{\alpha_n} dx = \int_{\Omega} |\omega_{1,n}^{\pm}|^{\frac{p_n+1}{p_n}} |x|^{-\frac{\alpha_n}{p_n}} dx \geq \varepsilon,$$

$$\int_{\Omega} |v_n^{\pm}|^{q_n+1} |x|^{\beta_n} dx = \int_{\Omega} |\omega_{2,n}^{\pm}|^{\frac{q_n+1}{q_n}} |x|^{-\frac{\beta_n}{q_n}} dx \geq \varepsilon,$$

para algum $\varepsilon > 0$ independente de n . Portanto, (u, v) é um solução que muda de sinal de (2.59), e

$$c_{\text{nod}}^{q_0} \leq E_{q_0}(u, v) = \lim_n E_{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}(u_n, v_n) = \lim_n c_{\text{nod}}^{p_n, q_n, \alpha_n, \beta_n}$$

combinando essa informação com o Lema 2.11 teremos o resultado desejado. ■

Agora, por fim, demonstramos o Teorema 2.3.

Suponha por absurdo, que a solução de energia mínima (2.1) são ambas u e v radialmente simétricas. Pelo Lema 2.13 (u, v) é solução que muda de sinal de

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{q-1} v, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = |u|^{p-1} u, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 2.2 temos

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1} u, & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Assim, u é uma solução radial nodal de energia mínima radialmente simétrica do problema o que contradiz [[2], Teorema 1.3]. ■

Apêndice A

Regularidade

Baseado no trabalho de Sirakov [30], mostraremos regularidade da solução de (1.1) do Capítulo 1 e que $u(x), v(x) \rightarrow \infty$, quando $|x| \rightarrow \infty$.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(x, v), & \text{em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + v = f(x, u) & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde $N \geq 3$ e $f, g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e verificam:

(i) Existem $c > 0, \delta > 0$ tais que

$$|f(x, t)| \leq C|t|, \quad |g(x, t)| \leq C|t|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad |t| \leq \delta; \quad (\text{A.2})$$

(ii) existe $c > 0, p$ e q tais que $\forall x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$

$$|f(x, t)| \leq C(1 + |t|^p), \quad (\text{A.3})$$

$$|g(x, t)| \leq C(1 + |t|^q). \quad (\text{A.4})$$

e suponha que p e q para $N \geq 3$ estão abaixo da hipérbole crítica, isto é,

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N}. \quad (\text{A.5})$$

Suponha que (A.2) e (A.3) ocorrem, mostraremos que a solução fraca de (A.1) pertence a $W^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ para todo $2 \leq s < \infty$ e que $u(x), v(x) \rightarrow \infty$, quando $|x| \rightarrow \infty$.

Veja que se $p \leq \frac{2}{N-2}$ (ou $q \leq \frac{2}{N-2}$) então $p(N-2) \leq 2 \Rightarrow pN \leq 2(p+1) \Rightarrow \frac{p+1}{p} \geq \frac{N}{2}$ e pelo Teorema C.5 da imersão de Sobolev, $W^{2, \frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in [\frac{p+1}{p}, \infty)$. Então aplicando o Teorema de Agmon - Douglis - Nirenberg [ADN] a (A.1) teremos a regularidade da solução. Supondo agora que $p, q > \frac{2}{N-2}$. Outra maneira de escrever a hipótese (A.5) é $p \in (1, p_0)$ com

$$p_0 = \frac{2q + N + 2}{(N-2)q - 2}$$

e, respectivamente, $q \in (1, q_0)$ com $q_0 = \frac{2p+N+2}{(N-2)p-2}$. De fato, supondo (A.5)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N} \\ \Leftrightarrow & \frac{p+q+2}{(p+1)(q+1)} > \frac{N-2}{N} \\ \Leftrightarrow & (p+q+2)N > (N-2)(pq+q+p+1) \\ \Leftrightarrow & pN+qN+2N > pqN+qN+pN+N-2pq-2q-2p-2 \\ \Leftrightarrow & 2q+N+2 > pqN-2pq-2p \\ \Leftrightarrow & p < \frac{2q+N+2}{(N-2)q-2} \end{aligned}$$

Desde que (u, v) é solução de (A.1), a imersão de Sobolev $W^{2,s}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{t/(tN-ts)}(\mathbb{R}^N)$ implica que $v \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in [\frac{p+1}{p}, p_1]$ onde

$$p_1 = \frac{N(p+1)}{Np-2(p+1)}$$

e, respectivamente, $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in [\frac{q+1}{q}, q_1]$, $q_1 = \frac{N(q+1)}{Nq-2(q+1)}$. Observe que $p_1 > p+1$ ou $q_1 > q+1$. De fato,

$$\begin{aligned} & p_1 > p+1 \\ \Leftrightarrow & \frac{N(p+1)}{Np-2(p+1)} > p+1 \\ \Leftrightarrow & N(p+1) > (p+1)(Np-2(p+1)) \\ \Leftrightarrow & N > Np-2(p+1) \\ \Leftrightarrow & N+2 > p(N-2) \\ \Leftrightarrow & p < \frac{N+2}{N-2}. \end{aligned}$$

analogamente, $q_1 > q+1 \Leftrightarrow q < \frac{N+2}{N-2}$, e por (A.5) não podemos ter simultaneamente $p, q \geq \frac{N+2}{N-2}$, pois se

$$p \geq \frac{N+2}{N-2} \Leftrightarrow p+1 \geq \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} \leq \frac{N-2}{2N}$$

e

$$q \geq \frac{N+2}{N-2} \Leftrightarrow q+1 \geq \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow \frac{1}{q+1} \leq \frac{N-2}{2N}.$$

Daí,

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq 1 - \frac{2}{N}$$

o que contradiz (A.5). Considere $q_1 > q+1$. Então, (A.2) e (A.3) implicam

$$|f(x, t)| \leq C(|t| + |t|^p) \quad \text{e} \quad |g(x, t)| \leq C(|t| + |t|^q), \quad (\text{A.6})$$

e $g(x, v) \in L^{\frac{q_1}{q}}(\mathbb{R}^N)$. De fato, usando (A.6) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x, v)|^{\frac{q_1}{q}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} C(|v| + |v|^q)^{\frac{q_1}{q}} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{q_1}{q}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_1} dx \right) < \infty.$$

Aplicando [ADN], temos que $u \in W^{2, \frac{q_1}{q}}(\mathbb{R}^N)$, pela imersão de Sobolev $u \in L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$, com

$$p_2 = \frac{Nq_1}{Nq - 2q_1}.$$

Vamos montar um processo de bootstrap que nos fornecerá o resultado desejado. Observe que, se em qualquer estágio desse processo o denominador não for positivo, por exemplo, $Np - 2(p+1) \leq 0 \Rightarrow \frac{p+1}{p} \geq \frac{N}{2}$, então u ou v pertence a $L^s(\mathbb{R}^N)$ para s arbitrário grande, e podemos concluir a prova com a teoria da regularidade.

Temos $p_2 > p+1$. De fato, isto é equivalente a $p < \frac{(N+2)q_1 - Nq}{Nq - 2q}$,

$$\begin{aligned} & p_2 > p+1 \\ \Leftrightarrow & \frac{(N+2)\frac{N(q+1)}{Nq-2(q+1)}}{Nq - 2\frac{N(q+1)}{Nq-2(q+1)}} > p+1 \\ \Leftrightarrow & \frac{(N+2)N(q+1)}{Nq[Nq-2(q+1)] - 2N(q+1)} > p+1 \\ \Leftrightarrow & \frac{(N+2)(q+1)}{q[Nq-2(q+1)] - 2(q+1)} > p+1 \\ \Leftrightarrow & \frac{(N+2)(q+1)}{q[Nq-2(q+1)] - 2(q+1)} - 1 > p \\ \Leftrightarrow & \frac{(N+2)(q+1) - q[Nq-2(q+1)] + 2(q+1)}{q[Nq-2(q+1)] - 2(q+1)} > p \\ \Leftrightarrow & p < \frac{(N+2)q_1 - Nq}{Nq - 2q} \end{aligned}$$

e a última desigualdade é válida se $p_0 < \frac{(N+2)q_1 - Nq}{Nq - 2q}$, mas isto é equivalente a $q_1 > q+1$,

de fato

$$\begin{aligned}
p_0 &< \frac{(N+2)q_1 - Nq}{Nq - 2q} \\
\Leftrightarrow \frac{2q + N + 2}{(N-2)q - 2} &< \frac{(N+2)q_1 - Nq}{Nq - 2q_1} \\
\Leftrightarrow (2q + N + 2)(Nq + 2q_1) &< [(N+2)q_1 - Nq][(N-2)q - 2] \\
\Leftrightarrow 2Nq^2 - 4qq_1 + N^2q - 2Nq_1 + 2Nq - 4q_1 &< N^2qq_1 - 2Nqq_1 - 2Nq_1 + 2Nqq_1 - 4qq_1 \\
&\quad - 4q_1 - N^2q^2 + 2Nq^2 + 2Nq \\
\Leftrightarrow N^2q < N^2qq_1 - N^2q^2 &\Leftrightarrow q < q(q_1 - q) \Leftrightarrow q + 1 < q_1.
\end{aligned}$$

Então, $f(x, u) \in L^{\frac{p_2}{p}}(\mathbb{R}^N)$ e de novo por [ADN] $v \in W^{2, \frac{p_2}{p}}(\mathbb{R}^N)$, um espaço que é imerso em $L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$, com

$$q_2 = \frac{Np_2}{Np - 2p_2}.$$

Afirmamos que $q_2 > q_1$. Veja que isto é equivalente a

$$q_1 > \frac{N(pq - 1)}{2p + 2}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
q_2 > q_1 &\Leftrightarrow \frac{Np_2}{Np - 2p_2} > q_1 \Leftrightarrow \frac{N[Nq_1/(Nq - 2q_1)]}{Np - 2[Nq_1/(Nq - 2q_1)]} > q_1 \\
\frac{N^2q_1}{N^2pq - 2Npq_1 - 2Nq_1} &> q_1 \Leftrightarrow \frac{N}{Npq - 2pq_1 - 2q_1} > 1 \Leftrightarrow N > Npq - (2p + 2)q_1 \\
\Leftrightarrow q_1 &> \frac{N(pq - 1)}{2p + 2} =: h_q(p).
\end{aligned}$$

Então, para cada q fixado, considerando a função

$$h_q(p) = \frac{N(pq - 1)}{2p + 2}$$

vemos que ela é crescente, pois

$$h'_q(p) >= \frac{Nq(2p + 2) - 2N(pq - 1)}{(2p + 2)^2} > 0$$

uma vez que $Nq(2p+2) - 2N(pq-1) = 2N(q+1) > 0$, pois $n \geq 3$ e $q > 1$. Em particular, $h_q(p)$ é crescente em $[1, p_0]$ e atinge o máximo em p_0 . Além disso, $h_q(p_0) = q + 1$ o que comprova a afirmação, desde que $q_1 > q + 1$. Agora podemos realizar nosso argumento de bootstrap. Temos $g(x, v) \in L^{\frac{q_2}{q}}(\mathbb{R}^N)$ e portanto $v \in L^{p_3}(\mathbb{R}^N)$, com

$$p_3 = \frac{Nq_2}{Nq - 2q_2}.$$

onde $p_3 > p_2$ é equivalente a $q_2 > q_1$. Continuando com o processo, temos $v \in L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$ com $q_3 > q_2$ equivalente a $p_3 > p_2$.

De tal forma construímos duas sequências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$, tal que

$$p_{n+1} = \frac{Nq_n}{Nq - 2q_n} \quad \text{e} \quad p_{n+1} > p_n \quad \text{para} \quad n \geq 2,$$

$$q_{n+1} = \frac{Np_{n+1}}{Np - 2p_{n+1}} \quad \text{e} \quad q_{n+1} > q_n \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Provaremos que $p_n \rightarrow \infty$ e $q_n \rightarrow \infty$, o que mostra que precisamos fazer este procedimento de bootstrap um número finito de vezes apenas para obter a conclusão desejada. Suponha por contradição que $p_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ e $q_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$. Então,

$$l_1 = \frac{Nl_2}{Nq - 2l_2} \quad \text{e} \quad l_2 = \frac{Nl_1}{Np - 2l_1},$$

a partir do qual obtemos

$$l_2 = \frac{N(pq - 1)}{2p + 2}$$

com efeito,

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{Nl_2}{Np - 2l_2} \\ &= \frac{N \frac{Nl_2}{Nq - 2l_2}}{Np - 2 \frac{Nl_2}{Nq - 2l_2}} \\ &= \frac{N^2 l_2}{Np(Nq - 2l_2) - 2Nl_2} \\ &= \frac{Nl_2}{p(Nq - 2l_2) - 2l_2} \\ &\Leftrightarrow l_2[p(Nq - 2l_2) - 2l_2] = Nl_2 \\ &\Leftrightarrow Npq - 2pl_2 - 2l_2 = N \\ &\Leftrightarrow -l_2(p + 2) = N(1 - pq) \\ &\Leftrightarrow l_2 = \frac{N(pq - 1)}{2p + 2}. \end{aligned}$$

acima mostramos que a implicação $l_2 \leq q + 1$ é uma contradição o fato de que $q_{n+1} > q_n$ para todo n . Portanto, ambas as sequências tendem ao infinito. Assim, concluímos que $u, v \in W^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ para todo $s < \infty$. Dessa forma $u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ para todo $s < \infty$, assim existe $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ e pelo Teorema de Morrey (Apêndice C) temos que $u_n \rightarrow u$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|u_n(x) - u(x)|_\infty < \varepsilon \quad \text{e} \quad u_n(x) = 0 \quad \text{sempre que} \quad |x| > R.$$

Assim, para $|x| > R$ temos $|u(x)| < \varepsilon$, isto é, $u(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. De maneira análoga vemos que $v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

Apêndice B

Variedade de Nehari

Nesse Apêndice apresentaremos a variedade de Nehari para o funcional Ψ_W definido no Capítulo 1 e algumas propriedades.

B.1 Variedade de Nehari

Definimos a Variedade de Nehari para o funcional Ψ_W como sendo o seguinte conjunto

$$\mathcal{N} = \{\omega \in X \setminus \{0\}; \Psi'_W(\omega)(\omega) = 0\}.$$

B.1.1 Propriedades da Variedade de Nehari

Lema B.1 *Para cada $\omega \in X \setminus \{0\}$ existe um único $t_\omega \in (0, +\infty)$ tal que $t_\omega\omega \in \mathcal{N}$.*

Demonstração.

Para cada $\omega \in X = L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \times L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N)$, considere a aplicação

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto h(t) = \Psi_W(t\omega). \end{aligned}$$

Para $t \neq 0$, temos

$$h'(t_\omega) = 0 \Leftrightarrow \Psi'_W(t_\omega\omega)(\omega) = 0 \Leftrightarrow \Psi'_W(t_\omega\omega)(t_\omega\omega) = 0 \Leftrightarrow t_\omega\omega \in \mathcal{N} \quad (\text{B.1})$$

Pelo Lema 1 item (ii) do Capítulo 1 já vimos que

$$\Psi_W(t\omega) \rightarrow -\infty \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

daí,

$$h(t) \rightarrow -\infty \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Dessa forma, existe $t_\omega \in [0, +\infty)$ com $h(t_\omega)$ máximo global. Pelo Lema 1 item (i) do Capítulo 1, temos $h(t_\omega) > 0$ para $t \approx 0^+$. Vamos mostrar que t_ω é o único ponto crítico de h consequentemente por (B.1) teremos $t_\omega\omega \in \mathcal{N}$. De fato,

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow At^{(q+1)/q} + Bt^{(p+1)/p} - Ct^2 = 0$$

onde,

$$A = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{(q+1)/q}}{W_1^{1/q}} dx, \quad B = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{(p+1)/p}}{W_2^{1/p}} dx \quad \text{e} \quad C = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx.$$

chamando $\alpha = (q+1)/q$ e $\beta = (p+1)/p$ temos

$$At^\alpha + Bt^\beta - Ct^2 = 0 \Leftrightarrow At^\alpha + Bt^\beta = Ct^2$$

como $\alpha, \beta < 2$ consideremos, sem perda de generalidade, $\alpha < \beta$ temos para $t > 0$

$$A + t^{\beta-\alpha} = Ct^{2-\alpha}.$$

Agora fazendo $r = \beta - \alpha$ e $s = 2 - \alpha$ temos

$$A = Ct^s - Bt^r := g(t) \quad 0 < r < s < 1, \quad t > 0.$$

Temos:

- i) g é contínua;
- ii) $g(0) = 0 < A$;
- iii) $g(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t \in (0, +\infty)$ tal que $g(t) = A$. Vamos mostrar que este $t_A := t$ é único. Por (iii) temos $g(t) < 0$ para $t \in [0, \delta]$ para algum δ . Por outro lado, se t_0 é ponto crítico de g temos

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= B_1 t_0^{r-1} - C_1 t_0^{s-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow B_1 = C_1 t_0^{s-r} \\ &\Leftrightarrow t_0 = \left(\frac{B_1}{C_1} \right)^{1/(s-r)}. \end{aligned}$$

Logo, g possui um único ponto crítico $t_0 > 0$. Dessa forma, temos g estritamente crescente no intervalo $[t_0, +\infty)$, pois se fosse $g'(t) < 0$, $t \in (t_0, +\infty)$, não teríamos (iii) e se g' muda de sinal em $(t_0, +\infty)$ o Teorema do Valor Intermediário nos dar um t_1 com $g'(t_1) = 0$. Segue então que, $g'(t) > 0$ para $t \in (t_0, +\infty)$. Logo, g é injetora no intervalo $(t_0, +\infty)$, sendo $A > 0$ temos $t_A \in [t_0, +\infty)$ e como $g|_{[t_0, +\infty)} \leq 0$ se houvesse outro t com $g(t) = A$ deveríamos ter $t \in (t_0, +\infty)$, mas g é injetora em $[t_0, +\infty)$. Conseqüentemente, se $t_1, t_2 > 0 \in \mathcal{N}$ e $t_1\omega, t_2\omega \in \mathcal{N}$ então $t_1 = t_2$. ■

Corolário B.1 *Se $\omega \in \mathcal{N}$ e $t_\omega > 0$ tal que $t_\omega\omega \in \mathcal{N}$, então $t_\omega = 1$.*

Demonstração.

Desde que $1 \cdot \omega \in \mathcal{N}$, pelo lema anterior, como $t_\omega\omega \in \mathcal{N}$, $t_\omega > 0$, então $t_\omega = 1$. ■

Corolário B.2 *A aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi : X \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \Phi(\omega) = t_\omega \end{aligned}$$

é contínua, isto é, se $\omega_n \rightarrow \omega$ em $X \setminus \{0\}$ então $t_{\omega_n} \rightarrow t_\omega$.

Demonstração.

Dado $\omega_n = (\omega_1^n, \omega_2^n) \in X \setminus \{0\}$ e $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ tal que $\omega_n \rightarrow \omega$, temos

$$\begin{aligned} \omega_1^n &\rightarrow \omega_1 \quad \text{em } L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \\ \omega_2^n &\rightarrow \omega_2 \quad \text{em } L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por outro como $t_{\omega_n}\omega_n \in \mathcal{N}$ temos,

$$\begin{aligned} &\Psi'_W(t_{\omega_n}\omega_n)(t_{\omega_n}\omega_n)dx = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|t_{\omega_n}\omega_1^n|^{\frac{1}{q}+1}}{W_1^{1/q}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|t_{\omega_n}\omega_2^n|^{\frac{1}{p}+1}}{W_2^{1/p}} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \langle t_{\omega_n}\omega_n, K t_{\omega_n}\omega_n \rangle dx = 0 \\ \Leftrightarrow &t_{\omega_n}^{\frac{1}{q}+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{\frac{1}{q}+1}}{W_1^{1/q}} dx + t_{\omega_n}^{\frac{1}{p}+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{\frac{1}{p}+1}}{W_2^{1/p}} dx - t_{\omega_n}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K \omega_n \rangle dx = 0 \end{aligned}$$

Fazendo

$$x_n = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1^n|^{\frac{1}{q}+1}}{W_1^{1/q}} dx, \quad y_n = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2^n|^{\frac{1}{p}+1}}{W_2^{1/p}} dx, \quad z_n = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega_n, K \omega_n \rangle dx$$

e

$$\alpha = (q + 1)/q, \quad \beta = (p + 1)/p,$$

temos assim,

$$t_{\omega_n}^\alpha x_n + t_{\omega_n}^\beta y_n - t_{\omega_n}^2 z_n = 0, \quad \alpha < \beta.$$

Para concluir nosso argumento é suficiente mostrar que t_{ω_n} possui subsequência convergindo para t_ω . Definindo o conjunto $N = \{n \in \mathbb{N}; t_{\omega_n} \leq 1\}$, observamos que se N é infinito então teremos que (t_{ω_n}) possui subsequência convergente. Por outro lado, se o conjunto N é finito considerando $t_{\omega_n} > 1 \forall n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned} t_{\omega_n}^2 z_n &\leq t_{\omega_n}^\beta (x_n + y_n) \\ \Rightarrow t_{\omega_n}^{2-\beta} z_n &\leq x_n + y_n \leq c, \quad \text{com } c > 0 \\ \Rightarrow t_{\omega_n}^{2-\beta} &\leq \frac{c}{z_n} \leq A, \quad \text{com } A > 0 \end{aligned}$$

Mostrando que $\{t_{\omega_n}\}$ é limitada. Logo, existe uma subsequência de $\{t_{\omega_n}\}$, a qual denotaremos por $\{t_{\omega_n}\}$, tal que $t_{\omega_n} \rightarrow k$ em \mathbb{R} . Assim,

$$0 = t_{\omega_n}^\alpha x_n + t_{\omega_n}^\beta y_n - t_{\omega_n}^2 z_n \rightarrow k^\alpha x + k^\beta y - k^2 z,$$

onde

$$x = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_1|^{\frac{1}{q}+1}}{W_1^{1/q}} dx, \quad y = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\omega_2|^{\frac{1}{p}+1}}{W_2^{1/p}} dx, \quad z = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \omega, K\omega \rangle dx.$$

Daí, $k\omega \in \mathcal{N}$, pelo Lema B.1, $k = t_\omega$. Portanto Φ é uma função contínua. ■

Corolário B.3 \mathcal{N} e $S = \{\omega \in X \setminus \{0\}; \|\omega\| = 1\}$ são homeomorfos.

Demonstração.

Considere as aplicações

$$\begin{aligned} f: \mathcal{N} &\rightarrow S \\ \omega &\mapsto f(\omega) = \frac{\omega}{\|\omega\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: S &\rightarrow \mathcal{N} \\ \omega &\mapsto g(\omega) = t_\omega \omega \end{aligned}$$

Temos f e g contínuas,

$$f(g(\omega)) = f(t_\omega \omega) = \frac{t_\omega \omega}{t_\omega \|\omega\|} = \omega,$$

pois $\omega \in S$.

Por outro lado,

$$g(f(\omega)) = g\left(\frac{\omega}{\|\omega\|}\right) = \frac{\omega}{\|\omega\|} \cdot t_{(\omega/\|\omega\|)} = \omega$$

para $t_{(\omega/\|\omega\|)} = \|\omega\|$. Mostrando que \mathcal{N} e S são homeomorfos. ■

Apêndice C

Os espaços de Sobolev

Neste Apêndice apresentaremos alguns resultados de Análise funcional, Teoria da medida, Espaços de Sobolev e demonstraremos o Lema devido a P.L. Lions utilizado no Capítulo 1.

Definição C.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Denotamos o conjunto

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

e a aplicação

$$\begin{aligned} N : H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto N(v) = \left(\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

define uma norma em $H^1(\Omega)$ que torna o espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx.$$

Além disso definimos o espaço $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{| \cdot |}_{H^1(\Omega)}$.

Teorema C.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)

Sejam Ω um conjunto mensurável de \mathbb{R}^N e $\{u_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que

$$(i) \quad u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

(ii) Existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) dx = \int_{\Omega} u(x) dx.$$

Demonstração. [9] ■

Teorema C.3 Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ tal que $|u_n|_p \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

Então, a menos de subsequência, existe uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

$$(a) \quad u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

$$(b) \quad |u_n(x)| \leq h(x), \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ q.t.p. de } \Omega.$$

Demonstração. [9] ■

Desigualdade 1 (Desigualdade de Interpolação)

Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$.

Além disso,

$$|u|_r \leq |u|_p^\theta |u|_q^{1-\theta}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração. [25] ■

Lema C.1 (P. L. Lions, 1984)

Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

então $u_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$.

Demonstração.

Consideremos o caso $N \geq 3$ (para $N = 2$ a prova é similar, veja por exemplo [23]). Seja $q < s < 2^*$ e $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelas Desigualdades de Interpolação e Hölder

temos

$$\begin{aligned} |u_n|_{L^s(B(y,r))} &\leq |u_n|_{L^q(B(y,r))}^{1-\lambda} |u_n|_{L^{2^*}(B(y,r))}^\lambda \\ &\leq C |u_n|_{L^q(B(y,r))}^{1-\lambda} \left[\int_{B(y,r)} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dx \right]^{\lambda/2} \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{2^*} + \frac{1-\lambda}{q} \Leftrightarrow \lambda = \frac{s-q}{2^*-q} \frac{2^*}{s}$. Escolhendo $\lambda = \frac{2}{s}$, obtemos

$$\int_{B(y,r)} |u_n|^s dx \leq C^s |u_n|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\lambda)s} \int_{B(y,r)} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dx.$$

Agora, cobrindo \mathbb{R}^N por bolas do raio r , de tal modo que cada ponto \mathbb{R}^N esteja contido em no máximo $N+1$ bolas, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^s dx &= \int_{\cup_{i=1}^\infty B(y_i,r)} |u_n|^s dx \leq \sum_{i=1}^\infty \int_{B(y_i,r)} |u_n|^s dx \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \left(C^s |u_n|_{L^q(B(y_i,r))}^{(1-\lambda)s} \int_{B(y_i,r)} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dx \right) \\ &\leq C^s \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u_n|^q dx \right]^{(1-\lambda)(s/q)} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) \sum_{i=1}^\infty \chi(B(y_i,r)) dx. \end{aligned}$$

Fixando x , por hipótese, existem no máximo $N+1$ bolas, digamos, y_{i_1}, \dots, y_{i_k} , $k \in \mathbb{N}$, tais que $x \in B(y_{i_j}, r)$, $j = 1, \dots, k$, onde podemos assegurar $k \leq N+1$. Segue que $\chi_{B(y_{i_j}, r)}(x) = 1$ e para $x \notin B(y_{i_j}, r)$, $\chi_{B(y_{i_j}, r)}(x) = 0$. Assim,

$$\sum_{i=1}^\infty \chi(B(y_i, r))(x) = k \leq N+1$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^s dx &= C^s \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u_n|^q dx \right]^{(1-\lambda)(s/q)} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) \sum_{i=1}^\infty \chi(B(y_i, r)) dx \\ &\leq (N+1) C^s \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u_n|^q dx \right]^{(1-\lambda)(s/q)} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dx. \end{aligned}$$

Usando as hipóteses sobre $\{u_n\}$, segue que $u_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$. ■

Teorema C.4 *Seja Ω um domínio limitado regular, $j, m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então as imersões abaixo são contínuas*

(i) Se $m < \frac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \quad q \in \left[p, \frac{Np}{N-mp} \right];$$

(ii) Se $m - 1 < \frac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega) \quad 0 < \alpha < m - \frac{N}{p};$$

(iii) Se $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq m < k - \frac{N}{p}$:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega}).$$

Demonstração. [9] ■

Teorema C.5 *As seguintes imersões são contínuas:*

(i) Se $mp < N$

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad p \leq q \leq \frac{Np}{N - mp};$$

(ii) Se $mp = N$

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad p \leq q < \infty;$$

[] (iii) Se $mp > N$

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N),$$

onde k é um inteiro verificando $k < m - Np \leq k + 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < \alpha \leq m - k - \frac{N}{p} = \alpha_0$ se $0 < \alpha_0 < 1$ e $0 < \alpha < 1$ se $\alpha_0 = 1$.

Demonstração. [1] ■

Teorema C.6 (Rellich - Kondrachov)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio regular e limitado, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$.

Então as seguintes imersões são compactas

(i) Se $m < \frac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad q \in [1, 2^*];$$

(ii) Se $m = \frac{N}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad \text{para } q \in [1, +\infty) \quad \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0;$$

(iii) Se $m > \frac{m}{p}$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega});$$

(iv) Se $\frac{m-1}{p} \leq \frac{N}{p} < m$:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega), \quad \alpha \in \left(0, m - \frac{N}{p}\right).$$

Demonstração. [1] ■

Teorema C.7 (Agmon - Douglis - Nirenberg [ADN])

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é de classe $C^2(\Omega)$ com $\partial\Omega$ limitada. Seja $1 < p < \infty$. Então, para todo $f \in L^p(\Omega)$, existe uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ da equação

$$-\Delta u + u = f \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, se Ω é de classe $C^{m+2}(\Omega)$ e $f \in W^{m,p}(\Omega)$ ($m \geq 1$), então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad e \quad |u|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C|f|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. [9] ■

Teorema C.8 (Princípio do Máximo para o Problema de Dirichlet) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto geral aberto. Assuma que

$$f \in L^2(\Omega) \quad e \quad u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, para todo $x \in \Omega$,

$$\min \left\{ \inf_{\Gamma} u, \inf_{\Omega} f \right\} \leq u(x) \leq \max \left\{ \sup_{\Gamma} u, \sup_{\Omega} u \right\}.$$

Demonstração.[9] ■

Teorema C.9 (Princípio do Máximo fraco)

Seja

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

um operador elíptico definido em domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Suponha que

$$Lu \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{em } \Omega \quad c = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Então o máximo (mínimo) de u em $\bar{\Omega}$ é atingido em $\partial\Omega$, isto é,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Demonstração.[16] ■

Teorema C.10 (Morrey)

Seja $p > N$. Então, temos a imersão contínua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, para $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha |\nabla u|_p \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

onde $\alpha = 1 - (N/p)$ e C é uma constante (dependendo apenas de p e N).

Demonstração.[9] ■

Apêndice D

Outros Resultados

Neste apêndice apresentaremos mais resultados importantes utilizados em nosso trabalho. Aqui enunciaremos alguns resultados específicos sobre o grau para superfícies compactas orientadas, para mais detalhes veja [26] capítulo 5.

Considere duas superfícies orientadas M e N , de mesma dimensão, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se M é compacta, definimos o grau de f da seguinte forma. Seja $p \in M$ um ponto regular para f , de modo que $df(p)$ é um isomorfismo linear entre os espaços vetoriais T_pM e $T_{f(p)}N$, dado $q \in N$ um valor regular para f , o grau de f em q é dado por

$$d(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}\{q\}} \text{sign}(df(p)).$$

Onde $\text{sign } df(p)$ é o sinal da diferencial $df(p)$, definido como sendo $+1$, se $df(p)$ preserva a orientação, ou sendo -1 , se $df(p)$ inverte a orientação.

Seja X uma variedade compacta orientada com bordo ∂X e ξ um campo vetorial em X . Chama-se singularidade de ξ , um ponto $p \in X$ para o qual $\xi(p) = 0$. Uma singularidade $p \in X$ é isolada se p for o único zero de ξ numa vizinhança de p .

Definição D.1 *Seja p uma singularidade isolada de ξ . Chama-se índice de ξ em p ao número inteiro $\text{index}(\xi, p) = d(f, q)$ onde $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $f(x) = \xi(x)/\|\xi(x)\|$, $n = \dim(X)$ e \mathbb{D} é um disco centrado em p , que não contém nenhuma outra singularidade de ξ .*

Definição D.2 *Seja S uma superfície orientada. Uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita τ de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, tal que*

1. $\cup_{i=1}^n T_i = R$.

2. *Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .*

Definição D.3 *Dada uma triangulação τ de uma região $R \subset S$ de uma superfície S , denotaremos por F o número de triângulos (faces), por E o número de lados (arestas), e por V o número de vértices da triangulação. O número*

$$F - E + V = \chi$$

é chamado característica de Euler - Poincaré da triangulação.

Proposição D.4 *Se $R \subset S$ é uma região regular de uma superfície S , a característica de Euler - Poincaré não depende da triangulação de R . Convém, portanto, denotá-lo por $\chi(R)$.*

Demonstração. [10]

Definição D.5 *Uma singularidade $p \in M$ de um campo vetorial ξ de uma variedade compacta orientada X diz-se não - degenerada se a diferencial $d\xi(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ é um isomorfismo.*

Proposição D.6 *Se $p \in M$ é uma singularidade não - degenerada de um campo vetorial ξ de uma variedade compacta orientada X , então:*

$$\text{index}(\xi, p) = \begin{cases} 1, & \text{se } \det(d\xi(p)) > 0, \\ -1, & \text{se } \det(d\xi(p)) < 0. \end{cases}$$

Demonstração. [26] ■

Teorema D.7 (Teorema de Holpf - Poincaré) *Se M é uma superfície compacta e orientada, X é um campo vetorial com singularidades p_1, \dots, p_k , todas isoladas, então*

$$\chi(M) = \sum_{i \in I} \text{index}(X, p_i),$$

onde $\chi(\cdot)$ é a característica de Euler - Poincaré.

Demonstração. [26] ■

Definição D.8 Diremos que $\{\omega_n\} \subset X$ é uma sequência Palais - Smale no nível c , denotada por $(PS)_c$, quando

$$I(\omega_n) \rightarrow c \quad e \quad I'(\omega_n) \rightarrow 0 \quad em \quad X \quad quando \quad n \rightarrow \infty.$$

Definição D.9 Diremos que I verifica a condição de Palais-Smale, ou simplesmente a condição (PS) , quando toda sequência $(PS)_c$ para $c \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge forte em X , isto é,

$$I(\omega_n) \rightarrow c \quad e \quad I'(\omega_n) \rightarrow 0$$

implica que existe $(\omega_{n_j}) \subset (\omega_n)$ e $\omega_0 \in X$ tais que

$$\omega_{n_j} \rightarrow \omega_0 \quad em \quad X.$$

Teorema D.10 (Teorema do Passo da Montanha (Sem a condição (PS)))

Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ verificando as seguintes condições:

i) Existem $r, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq r > I(0), \quad \|u\| = \rho.$$

ii) Existe $e \in X \setminus \overline{B_\rho(0)}$ tal que

$$I(e) < r.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ pequeno, existe $u_\varepsilon \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$ com

$$|I'(u_\varepsilon)| < 2\varepsilon$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq r$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X); \quad \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

O nível c é conhecido como nível do Passo da Montanha.

Demonstração. [32] ■

Teorema D.11 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange)

Sejam X um espaço de Banach, $J, \Psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais de classe C^1 e

$$M = \{u \in X; \quad \Psi(u) = 1\} = \Psi^{-1}(\{1\})$$

com

$$\Psi'(u) \neq 0 \quad \text{para todo } u \in M.$$

Se J é limitado inferiormente em M e existe $u_0 \in M$ verificando

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) tal que

$$J'(u_0) = \lambda \Psi'(u_0).$$

Em outras palavras, u_0 é ponto crítico de J restrito a M .

Demonstração. [32] ■

Desigualdade 2 (Tartar)

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ não simultaneamente nulos, então vale a seguinte desigualdade

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq \begin{cases} C_p |x - y|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ C_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2 \end{cases}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$ denota o produto interno usual de \mathbb{R}^N e $C_p > 0$.

Teorema D.12 (Teorema de Miranda, 1940)

Sejam $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < R, \quad i = 1, 2, \dots, N\}$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua satisfazendo

$$(i) \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, R, x_{i+1}, \dots, x_N) \leq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\};$$

$$(ii) \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, -R, x_{i+1}, \dots, x_N) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Então, existe $\bar{x} \in \Omega$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Demonstração. [27] ■

Teorema D.13 (Teorema da Alfândega)

Seja $X \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto arbitrário. Se um conjunto $C \subset \mathbb{R}^N$ contém um ponto $a \in X$ e um ponto $b \notin X$ então C contém algum ponto da fronteira de X .

Demonstração. [21] ■

Bibliografia

- [1] ADAMS R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] AFTALION, A. e FILOMENA, P., Qualitative properties of nodal solutions of semilinear elliptic equations in radially symmetric domains. Elsevier SAS, C. R. Math. Acad. Sci, p. 339-344, 4 jul. 2004.
- [3] ALVES, C. O.; CARRIÃO, P. C.; MIYAGAKI, O. H., Nonlinear perturbation of a periodic elliptic problem with critical growth. Journal of Mathematical Analysis and Applications 260, p. 133-146, 14 ago. 2001.
- [4] ALVES, C. O.; CARRIÃO, P. C.; MIYAGAKI, O. H., On the existence of positive solutions of a perturbed Hamiltonian system in \mathbb{R}^N . Journal of Mathematical Analysis and Applications 276, p. 673-690, 19 dez. 2001.
- [5] ALVES, C. O. e SOARES, S. H. M., Singularly perturbed elliptic systems. Elsevier SAS, p. 109-129, 10 jun. 2005.
- [6] BONHEURE, D.; MOREIRA, E. S.; TAVARES, H., Existence and symmetry of least energy nodal solutions for Hamiltonian elliptic systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications 104, p. 1075-1107, 26 set. 2014.
- [7] BONHEURE, D.; MOREIRA, E. S.; TAVARES, H., Hamiltonian elliptic systems: a guide to variational methods, Portugal. Math. (N.S.), p. 301-395, 2014..
- [8] BONHEURE, D. et al., Classical and non-classical solutions of a prescribed curvature equation. J. Differential Equations 243, p. 208-237, 13 jul. 2007.
- [9] BRÉZIS, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2010.

-
- [10] CARMO, M. P., Geometria diferencial de curvas e superfícies,-6. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [11] CLÉMENT, Ph. e VAN DER VORST, R.C.A.M., On a semilinear elliptic system. *Differential and Integral Equations*, p. 1317 - 1329., 13 jul. 1995.
- [12] CLÉMENT, Ph.; DE FIGUEREIDO D. G.; MITIDIERI, E., Positive solutions of semilinear elliptic systems, *Comm. Partial Differential Equations* 17 (1992) 923-940.
- [13] COSTA D.G. e MAGALHÃES, C.A., A variational approach to noncooperative elliptic systems, *Nonlinear Anal.* 25 (1995) 699-715.
- [14] DE FIGUEIREDO D. G. e FELMER P., On superquadratic elliptic systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 343 (1994) 99-116.
- [15] DE FIGUEIREDO, D. G., Semilinear elliptic systems: existence, multiplicity, symmetry of solutions, in: *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, in: *Handb. Differ. Equ.*, vol.V, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008, pp.1-48.
- [16] GILBARG D. e TRUDINGER N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, *Class. Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 2001, reprint of the 1998 edition.
- [17] HÉNON, M., Nonnumerical experiment on the stability of spherical stellar systems, *Astronomiy and Astrophysics* 24 (1973) 229-238.
- [18] HULSHOF J. e VAN DER VORST, R.C.A.M., Differential systems with strongly indefinite variational structure, *J. Funct. Anal.* 114 (1993) 32-58.
- [19] KAVIAN O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.
- [20] LADYZHENSKAYA O.; URAL'TSEVA, N., Local estimates for the gradients of solutions to the simplest regularization of a class of nonuniformly elliptic equations, *Zap. Nau. Semin. POMI* 213 (1994), *Kraev. Zadachi Mat. Fiz. Smezh. Voprosy Teor. Funktsii.* 25 (1994) 75-92, 225 (in Russian); translation in *J. Math. Sci.* 84(1) (1997) 862-872.

- [21] LIMAS, E. L., Análise real vol.2, 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016
- [22] LI, S. e WILLEM, M., Applications of local linking to critical point theory. J. Math. Anal. Appl. 189: 6-32, (1995).
- [23] LIONS, P.L., The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part II, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984) 223-283.
- [24] MAWHIN, J.; WILLEM, M., Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer - Verlag, Heidelberg, 1980.
- [25] MEDEIROS, L. A. e MIRANDA, M. M., Espaço de Sobolev: Iniciação ao Problemas Elípticos não Homogêneo. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.
- [26] MILNOR, J. W., Topology from the Differentiable Viewpoint, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.
- [27] MIRANDA, C., Unosservazione su un teorema di Brouwer, Bollettino dell Unione Matematica Italiana, vol. 3, pp. 5-7, 1940.
- [28] PELETIER, L.A. e VAN DER VORST, R.C.A.M., Existence and non-existence of positive solutions of non-linear elliptic systems and the biharmonic equation, Diff. Int. Eq. 5 (1992), 747-767.
- [29] RAMOS M.; TAVARES H., ZOU W., A Bahri-Lions theorem revisited, Adv. Math. 222(6) (2009) 2173-2195.
- [30] SIRAKOV, B., On the existence of solutions of Hamiltonian elliptic systems in \mathbb{R}^N , Adv. Differ. Equ. 5(10-12) (2000) 1445-1464.
- [31] TEMAN, R., Solutions généralisées de certaines équations du type hypersurfaces minima, Arch. Ration. Mech. Anal. 44 (1971) 121-156.
- [32] WILLEM, M., Minimax theorems, Birkhauser, Boston, 1996.
- [33] YANG J., Nontrivial solutions of semilinear elliptic systems in \mathbb{R}^N , Electron. J. Differential Equations Conf. 6 (2001) 343-357.