Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de soluções heteroclínicas para algumas classes de Equações Elípticas Semilineares

por

Renan Jackson Soares Isneri †

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Existência de soluções heteroclínicas para algumas classes de Equações Elípticas Semilineares

por

Renan Jackson Soares Isneri

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares

Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2020

I84e Isneri, Renan Jackson Soares.

Existência de soluções heteroclínicas para algumas classes de equações elípticas semilineares / Renan Jackson Soares Isneri. – Campina Grande, 2020.

138 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.

"Orientação: Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves".

Referências.

1. Equações Elípticas. 2. Soluções Heteroclínicas. 3. Métodos Variacionais. 4. Espaços de Sobolev. I. Alves, Claudianor Oliveira. II. Título.

CDU 517.956.2(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Dedicatória

À minha família dedico este trabalho pelo companheirismo e incentivo. Em especial, à minha mãe Rilvânia Soares da Silva, e ao meu pai, Jardel Jackson Gomes Isneri, que são responsáveis pelo meu desenvolvimento intelectual.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por minha vida, família, amigos e estudos. Agradeço também por todos obstáculos que Deus colocou em meu caminho, pois mesmo não compreendendo as dificuldades são elas que me colocam em uma posição de estado pessoal agradável. Sou grato à Deus por tudo que me tem proporcionado ao longo da minha vida e antecipo, neste momento, os agradecimentos do que ainda Ele a de me proporcionar.

Agradeço à minha família, pelo amor, incentivo, confiança e apoio incondicional. Em especial, aos meus pais Rilvânia da Silva Soares e Jardel Jakson Gomes Isneri que me deram apoio em todas as minhas decisões, ao meu tio Jordean pelo carinho e incentivo nas horas difíceis, à minha avó, Desterro, por ser sempre uma segunda mãe para mim, aos meus irmãos Larissa, Jaqueline e Ryan. Agradeço também as minhas sobrinhas Lais e Alicia que de certa forma contribuíram na minha vida. Sem todos vocês eu não seria nada neste mundo!

Agradeço ao meu orientador Dr. Claudianor Oliveira Alves pela dedicação, atenção, apoio moral, compreensão, paciência, motivação e muito mais. O mesmo foi fundamental na minha vida pessoal e profissional. Ao doutor agradeço pelas oportunidades que foram dadas durante o mestrado, pois essas mesmas oportunidades foram necessárias para o término deste trabalho. Essas palavras são poucas diante da minha eterna gratidão por ti, professor!

Aos professores Leandro da Silva tavares e Denílson da Silva Pereira agradeço por estarem presente na minha banca e, principalmente, pelas contribuições de ambos em meu trabalho.

Ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG agradeço por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender.

Agradeço aos meus amigos Jonnas Henrique, Edvan Oliveira, Dimas Vicente, Leonardo Pereira, Anderson Wendel, Cicero Silva e muitos outros que não foram citados são irmãos na amizade que fizeram parte direta ou indiretamente da minha formação, que sempre me encorajaram para seguir em frente e que vão continuar presentes em toda minha vida.

Agradeço também aos meus amigos peruanos (todos são professores da Universidad Nacional de Trujillo, Perú) Hernan Cuti, Manoel Montalvo (Pepo) e César Torres por me proporcionarem conhecimento em matemática, bons momentos de distrações e muita sabedoria com suas belas histórias de vida. Gratifico à Olivério Pichardo por sua paciência e compreensão nos momentos difíceis.

Gratifico aos professores da UEPB que fazem parte da minha vida até os dias de hoje. Em especial, Vandenberg Lopes e Aldo Trajano, pois ambos foram e são fundamentais na minha vida pessoal e na minha carreira acadêmica.

Aproveito este momento para agradecer aos meus amigos de UEPB Weiller Felipe, Pedro Fellype e Wallace Gomes que hoje são meus colegas de doutorado.

É difícil agradecer todas as pessoas que de algum modo, nos momentos serenos e ou apreensivos, fizeram ou fazem parte da minha vida, por isso agradeço à todos de coração.

"A hipótese sugere

A demonstração confirma

E a conexão se estabelece..."

Resumo

Neste trabalho de dissertação usamos métodos variacionais para estudar a existência de soluções heteroclínicas para algumas classes de problemas elípticos em faixas infinitas do $\mathbb{R}^2$ ou cilindros infinitos do $\mathbb{R}^N$ com N maior do que ou igual a 3.

Palavras Chave: Soluções Heteroclínicas, Métodos Variacionais, Espaços de Sobolev.

Abstract

In this dissertation work, we use variational methods to study the existence of heteroclinic solutions for some classes of elliptic problem in infinite strip of $\mathbb{R}^2$ or infinite cylinders of $\mathbb{R}^N$ with N greater than or equal to 3.

Keywords: Heteroclinic Solutions, Variational Methods, Sobolev Spaces.

Lista de Figuras

Notaçõs e Simbologias

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{R}$ denotam o conjunto dos números naturais, inteiros e rais, respectivamente;
- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional usual;
- $|A|$ sugere a medida de Lebesgue do conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ retrata o gradiente de u;
- $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$;
- q.t.p significa em quase toda parte;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u;
- $\rightarrow$ simboliza a convergência forte em espaços vetoriais normados;
- $\rightharpoonup$ simboliza a convergência fraca em espaços vetoriais normados;
- $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ designa a derivada normal exterior de u na direção η;
- $o_n(1)$ representa uma sequência de números reais que converge para 0 quando $n \rightarrow \infty$;
- E' é o espaço dual do espaço normado E;
- g_u é a derivada da função $g(x, y, u)$ com relação a variável u;
- *supt* φ designa o suporte da função φ;
- $\hookrightarrow$ simboliza imersão contínua;

- $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ denota o expoente crítico de Sobolev;
- $C^1(X, \mathbb{R})$ é o espaço das funções continuamente diferenciáveis em X;
- $C^\infty(X)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em X;
- $C_0^\infty(X)$ designa o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em X;
- $\blacksquare$ significa o fim de uma demonstração;
- $(E, \|\cdot\|_E)$ representa o espaço vetorial E munido da norma $\|\cdot\|_E$;
- $\partial\Omega$ denota a fronteira do conjunto Ω;
- $C^{m,\alpha}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções reais m vezes diferenciáveis cujas as derivadas de ordem m são Hölder contínuas com expoente $0 \leq \alpha \leq 1$;
- $K \subset\subset \Omega$ significa que K está compactamente contido em Ω;
- $L^2_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável; } \displaystyle\int_K |u|^2 dx < \infty \text{ para qualquer } K \subset\subset \Omega\right\}$;
- $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; u \text{ é limitada q.t.p em } K \text{ para todo } K \subset\subset \Omega\}$;
- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ sempre que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$;
- $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$;
- $H^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega); D^\alpha u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$;
- $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(v)}$ denota a derivada de Gâteaux de I em u na direção v.

Sumário

Introdução

Equações diferenciais talvez seja o ramo da matemática que tem maior proximidade e interações com outras áreas das ciências, desde sua origem. O desenvolvimento desta teoria constitui-se em um dos melhores exemplos da interação bem-sucedida entre a Matemática e a Ciência em geral, o que tem se confirmado progressivamente com a Física, Química, Biologia, Economia e Engenharia. Esta interação surge naturalmente através dos modelos matemáticos que consiste na interpretação simplificada de um fenômeno físico segundo uma estrutura de conceitos mentais ou experimentais. Para leitores interessados na leitura de Equações Diferenciais sob um ponto de vista da Física Matemática, recomendamos a leitura Rodney e Wilson [8].

Problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos têm uma história antiga em Matemática e o seu estudo através dos tempos resultou em uma extensa teoria com implicações em diversas áreas do conhecimento. A origem do princípio físico de mínimo energia para situações de equilíbrio data pelo menos do século $XVII$ pois, nos trabalhos de E. Torricelli já está presente o postulado de que um sistema de corpos sob ação da gravidade será estável se o seu centro de gravidade ocupar a posição mais baixa possível. Neste caso, o que se requer é a minimização da energia potencial do sistema. Inspirado no trabalho de Joseph Louis Lagrange sobre Mecânica de Partículas, o matemático Lejeune Dirichlet desenvolveu um método de grande generalidade para o estudo das equações diferenciais parciais que foi denominado por Princípio de Dirichlet.

O Princípio de Dirichlet deu origem a uma parte indispensável da teoria contemporânea das equações diferenciais parciais e influenciou decisivamente os caminhos da Matemática, do final do século XIX até hoje. Este princípio, causou umas das grandes polêmicas da Matemática no século XIX e foi consagrado pelo matemático David Hilbert em 1899 ao utilizar esse método para provar a existência de solução do problema de Dirichlet. Para maiores detalhes sobre o aspecto histórico consulte Courant [13]. Para uma interpretação física deste princípio veja [8, Seção 7.3].

Durante todo o texto usaremos técnicas de Métodos Variacionais como a principal ferramenta para determinar solução heteroclínica. Figueiredo [15] menciona que Métodos Variacionais são, hoje em dia, uma das principais ferramentas utilizadas para atacar problemas na Teoria das Equações Diferenciais. A ideia central desta ferramenta consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional (função tomando valores reais) que são equivalentes, em um certo sentido, a soluções de uma equação diferencial. Em particular, investigamos a obtenção de pontos mínimos globais para funcionais associados a problemas elípticos semilineares. Para uma primeira leitura, na referência [15] o leitor pode encontrar uma motivação do estudo de método variacional juntamente com algumas técnicas para obtenção de pontos críticos. Já para uma leitura aprofundada recomendamos as referências [12], [20], [27] e [32]. Sugerimos também a leitura da obra [31] devido a Struwe, pois a mesma apresenta uma introdução concisa aos métodos variacionais e apresenta uma visão geral das áreas de pesquisa atual no campo. Além dessas considerações mais significativas, o livro possui uma valiosa bibliografia que contém 500 referências. Um outro fator importante é que o mesmo contém muitos resultados importantes que, de certa forma, seriam difíceis de encontrar em um único local. Na literatura, também existem trabalhos sobre existência de solução heteroclínica usando outras ferramentas. Por exemplo, em [24], Marcelli e Papalini empregam técnicas de Métodos de Ponto Fixo.

A presente dissertação estuda a existência de solução clássica do tipo heteroclínica para certas classes de equações diferenciais parciais (EDP) elípticas semilineares da forma

$$\Delta u = f(x, y, u) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1}$$

satisfazendo a condição de contorno de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, y) = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega$$

ou a condição de fronteira de Dirichlet

$$u(x, y) = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega,$$

onde $\Omega = \mathbb{R} \times D$, D é um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^{N-1}$ e f uma função de $\mathbb{R} \times \overline{D} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ de classe C^1 com certas propriedades. Essencialmente, uma solução do tipo heteroclínica é da seguinte forma: suponhamos que a equação (1) possua no mínimo duas soluções clássicas distintas u e v satisfazendo uma determinada condição de contorno. Uma solução clássica U da equação (1) satisfazendo a mesma condição de fronteira é dita Heteroclínica que conecta duas funções u e v se

$$U(x, \cdot) \to u \text{ quando } x \to -\infty \text{ uniformemente em } y \in D$$

e

$$U(x, \cdot) \to v \text{ quando } x \to +\infty \text{ uniformemente em } y \in D.$$

A existência de solução heteroclínica recebeu uma atenção especial nos últimos anos, porque esse tipo de solução aparece em muitos modelos matemáticos associados a problemas que aparecem em Mecânica, Química e Biologia. Marcelli e Papalini em [24] mencionam que o estudo sobre solução heteroclínica é motivada em vários aspectos biológicos, físicos e modelos químicos, como transição de fase, processos físicos nos quais a variável transita de um equilíbrio instável para um estável, ou propagação frontal em equações de reação-difusão.

Embora o foco do nosso trabalho seja dissertar sobre a existência de soluções heteroclínicas para algumas classes de equações diferenciais parciais, também existem trabalhos sobre o mesmo tema em equações diferenciais ordinárias. Por exemplo, ao considerar equações do tipo

$$x'' = f(t, x), \tag{2}$$

é de grande importância investigar trajetórias (soluções de (2)) que conectam equilíbrios (soluções constantes de (2)) desta equação. Quando a trajetória x conecta dois equilíbrios distintos p e q de (2), a mesma é chamada de trajetória heteroclínica (ou solução heteroclínica). Neste caso, pode-se ter

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = p \quad e \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = q.$$

Alves em [3] usa Método Variacional para provar a existência de solução heteroclínica para uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$x''(t) = a(\epsilon t) V'(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$x(t) \to -1 \text{ quando } t \to -\infty, \quad x(t) \to 1 \text{ quando } t \to +\infty, \tag{4}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro positivo e $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função verificando:

(V_1) $V \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(V_2) $V(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $V(\pm 1) = 0$;

(V_3) $V(t) > 0$ para todo $t \in (-1, 1)$;

(V_4) $V''(\pm 1) > 0$,

e $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua limitada satisfazendo algumas condições. Por exemplo, a pode ser uma função pertencente a $L^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\liminf_{|t| \to \infty} a(t) = a_\infty > \inf_{t \in \mathbb{R}} a(t) = a(0) > 0.$$

Gavioli [17] estudou a existência de solução heteroclínica de (3) e (4) supondo que existem $0 < l < L$ cumprindo

$$l \leq a(t) \leq L, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$a(t) \to L \text{ quando } |t| \to \infty,$$

e L/l é adequadamente limitada por cima. Rabinowitz [25] estabeleceu a existência de soluções heteroclínicas para um par de órbitas periódicas para a seguinte classe de sistemas Hamiltonianos

$$u''(t) + W_u(t, u(t)) = f(t),$$

onde $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, f é 1-periódica em $x \in \mathbb{R}$,

$$[f] = \int_0^1 f(t)dt = 0,$$

$W \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e 1 periódica em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Para o leitor interessado em dimensão 1 também recomendamos outras referências [18], [24] e [26].

Um dos trabalhos pioneiro sobre a existência de solução heteroclínica para equações diferenciais parciais usando Métodos Variacionais é devido a Rabinowitz, em [29], o qual foi motivado por alguns trabalhos sobre soluções heteroclínicas de sistemas hamiltonianos reversíveis no caso em dimensão 1. Especificamente, o mesmo foi inspirado pelos trabalhos [25] e [26]. Byeon, Montechiari e Rabinowitz [11] estabeleceram a existência de soluções heteroclínicas para uma classe de sistemas elípticos semilineares sobre domínio cilíndrico. O sistema considerado é da forma

$$\Delta u + V_u(x, y, u) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{5}$$

cumprindo a condição de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Omega, \tag{6}$$

onde $\Omega = \mathbb{R} \times D$, D um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^{N-1}$ com fronteira suave, $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e com as seguintes condições no potencial V:

(V_1) $V \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m)$ e $V(x, y, u)$ é 1-periódica em x;

(V_2) Existem pontos $a^- \neq a^+$ tais que $V(x, y, a^{\pm}) = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$ e $V(x, y) > 0$ caso contrário;

(V_3) Existe uma constante $\overline{V} > 0$ tal que

$$\liminf_{|u| \longrightarrow +\infty} V(x, y, u) \geq \overline{V} \quad \text{uniformemente em} \quad x \in \Omega;$$

(V_4) Para $N \geq 2$, existem constantes $A, B > 0$ tais que

$$|V_u(x, y, u)| \leq A + B|u|^p,$$

no qual $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ sempre que $N \geq 3$ e não há restrição de crescimento superior em p se $N = 2$.

Nessas condições, os autores provaram a existência de uma solução clássica U de (5) e (6) tal que

$$\lim_{x \to +\infty} U(x, y) = a^+ \quad \text{unifomemente para} \quad y \in D$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} U(x, y) = a^- \quad \text{unifomemente para} \quad y \in D.$$

Um trabalho bastante interessante de existência de solução heteroclínica no $\mathbb{R}^2$ todo é encontrado Alessio, Gui e Montecchiari [2], pois o mesmo mostram a existência e o comportamento assintótico de uma solução do tipo sela. Mais precisamente, determinam a existência de solução clássica v do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x,y)W'(u) = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \\ u(x,y) = u(x,y+1) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,y) = \pm 1, \ \text{ uniformemente em } \ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um potencial de Ginzburg-Landau. Os potenciais de Ginzburg-Landau aparece frequentemente em modelos físicos. Por exemplo, os mesmos são modelos mais simples que correspondem a uma mostra de supercondutividade. Para a função $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pedimos que seja contínua, par, periódica e estritamente positiva. Posto isto, os autores determinam uma solução clássica U do tipo sela, isto é, estabelecem uma função $U(x,y)$ que é estritamente positiva no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$,

$$U(x,y) = -U(-x,y) = -U(x,-y), \quad U(x,y) = U(y,x) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2$$

e

$$\|U - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[j,j+1])} \to 0 \ \text{ quando } \ j \to +\infty.$$

Existem trabalhos sobre a existência de soluções heteroclínicas no caso em que o operador diferencial é não local. Por exemplo, no caso do operador laplaciano fracionário, no artigo [5], Alves, Ambrosio e Torres Ledesma mostraram a existência de solução heteroclínica para o problema não local do tipo

$$\begin{cases} (-\Delta)^\alpha u + a(\epsilon x)V'(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -1 \ \text{ e } \ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1, \end{cases}$$

em que $\alpha \in (1/2, 1)$ e as funções V e a definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ satisfazem algumas condições técnicas. Por exemplo, neste mesmo trabalho V é um potencial de Ginzburg-Landau e a função a satisfazendo certas propriedades.

No **Capítulo 1**, baseado no trabalho de Rabinowitz [29] estudamos a existência de solução do tipo heteroclínica para o seguinte problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), \quad em \ \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, \quad sobre \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde a função g satisfaz as seguintes condições

(g_1) $g \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(g_2) $g(x,y,t)$ é par e 1- periódica em x;

(g_3) $G(x,y,t)$ é 1-periódica em t, no qual

$$G(x,y,t) = \int_0^t g(x,y,s)ds.$$

Na Subseção 1.1.1, nosso objetivo é o estudo da existência de solução periódica do problema (P_1). Em seguida, mostremos que a classe das funções g que satisfazem (g_1)-(g_3) que possuem o conjunto M das soluções periódicas de (P_1) formados por pontos isolados é não vazia. Por isso, consideramos a seguinte hipótese:

$(\mathcal{M})$ O conjunto M consiste de pontos isolados.

Diante disto, temos o seguinte resultado principal desta seção.

Teorema 0.1 *Seja a função g satisfazendo $(g_1) - (g_3)$ e $(\mathcal{M})$. Então, existe uma solução clássica do tipo heteroclínica para o problema (P_1).*

Na Seção 1.2, baseando-se nos argumentos variacionais da primeira seção, dedicamos ao estudo da existência de solução periódica e consequentemente de solução heteroclínica para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & em \ \ \Omega \\ u(x,y) = 0, & sobre \ \ \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_2).$$

O seguinte resultado é o principal da Seção 1.2.

Teorema 0.2 *Seja a função g satisfazendo $(g_1) - (g_3)$ e $(\mathcal{M})$. Então, existe uma solução clássica do tipo heteroclínica para o problema (P_2).*

Na Seção 1.3, apresentamos resultados análogos aos Teoremas 0.1 e 0.2 com algumas modificações nas hipóteses da função g. Em particular, um dos resultados é considerando g uma função que satisfaz $(g_1) - (g_2)$ e as condições:

(g_4) **(crescimento de Sobolev)** Existem constantes $A, B \geq 0$ e $p \in [1, \frac{N+2}{N-2})$ se $N \geq 3$ e $p \in [1, +\infty)$ se $N = 2$ tais que

$$|g(x,y,t)| \leq A + B|t|^p, \quad \forall (x,y,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R};$$

(g_5) $G(x,y,t) \leq 0$ e o conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} \mid G(x,y,t) = 0\}$ é finito de cardinalidade no mínimo 2;

(g_6) Existem $\beta > 0$ e $R \geq 0$ tais que

$$|G(x, y, t)| \geq \beta |t|^2, \quad \text{para} \quad |t| \geq R.$$

Nessas condições, temos os seguintes resultados.

Teorema 0.3 *Supondo que g satisfaz (g_1), (g_2) e $(g_4) - (g_6)$ então o problema (P_1) possui uma solução clássica do tipo heteroclínica.*

Teorema 0.4 *Supondo que g satisfaz (g_1), (g_2) e $(g_4) - (g_6)$ então o problema (P_2) possui uma solução clássica do tipo heteroclínica.*

O **Capítulo 2** foi baseado no estudo feito por Alves em [4], onde o mesmo foi motivado pelos trabalhos de [29] e [11]. Investigamos a existência de solução heteroclínica para a equação diferencial elíptica semilinear em que o termo da não linearidade é não periódico. Especificamente, consideramos a equação

$$-\Delta u + A(\epsilon x, y)V'(u) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{7}$$

com a condição de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, y) = 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega, \tag{8}$$

onde $\Omega = \mathbb{R} \times D$ é um cilindro infinito de $\mathbb{R}^N$ se $N > 2$ ou uma faixa infinita se $N = 2$. As hipóteses para a função $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

Condição em V:

(V_1) $V \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(V_2) $V(-1) = V(1) = 0$;

(V_3) $V(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Funções que satisfazem as condições $(V_1)-(V_3)$ são os potenciais de Ginszburg-Landau. Por exemplo, $V(t) = (t^2 - 1)^2$.

As seguintes condições para a função $A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são consideradas:

Condição em A:

A função A é de classe C^1 e pertence a uma das seguintes classes:

Classe 1:(A é assintótica no infinito a uma função periódica)

Existe uma função $A_p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e 1-periódica em x tal que

(A_1) $|A(x,y) - A_p(x,y)| \to 0$ quando $|(x,y)| \to \infty$;

(A_2) $0 < A_0 = \inf\limits_{\overline{\Omega}} A(x,y) \leq A(x,y) < A_p(x,y) \;\; \forall (x,y) \in \Omega$.

Classe 2:(Condição de Rabinowitz)

(A_3) $0 < \inf\limits_{\overline{\Omega}} A(x,y) \leq \sup\limits_{y \in \overline{D}} A(0,y) < \liminf\limits_{|(x,y)| \to \infty} A(x,y) = A_\infty < \infty$.

Na Seção 2.1 apresentamos algumas notações, simbologias e resultados preliminares para as seções subsequentes. Já a seção 2.2 é dedicada ao problema (7) e (8) no caso em que a função A pertence a Classe 1. O resultado principal desta seção é o seguinte:

Teorema 0.5 *Assume* (V_1)*-*(V_3)*,* $\epsilon = 1$ *e que* A *pertence a Classe 1. Então, o problema* (7) *e* (8) *possui uma solução heteroclínica de 1 a -1.*

Na Seção 2.3, consideramos o problema (7) e (8) supondo que A satisfaz a condição de Rabinowitz para provar o seguinte resultado.

Teorema 0.6 *Assume* (V_1)*-*(V_3) *e que* A *pertence a Classe 2. Então, existe um* $\epsilon_0 > 0$ *tal que o problema* (7) *e* (8) *possui uma solução heteroclínica de 1 a -1 para todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$*.*

No **Apêndice A** o leitor encontrará o que será necessário sobre o Princípio da Continuação Única no qual é destacado uma aplicação que será fundamental para o desenvolvimento do Capítulo 1.

O **Apêndice B** é um resumo do que se necessita de Análise do $\mathbb{R}^N$, Espaços de Lebesgue e Análise Funcional. Tais resultados são cruciais para uma boa compreensão dos Capítulos 1 e 2.

Conceitos importantes e alguns teoremas demandam conhecimento de Espaços de Sobolev, no nível e na extensão do que se encontra no **Apêndice C**. Em relação à espaços de Sobolev, o leitor deve dominar resultados de imersões para estudar os Capítulos 1 e 2.

É importante ressaltar neste momento que não adentramos em detalhes sobre resultados de regularidade presente aqui no texto pois os mesmos demandam de conhecimentos mais avançados de Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, por exemplo. Isto foge totalmente do objetivo da dissertação. Para este fim recomendamos as leituras [11], [10] e [19].

Capítulo 1

Existência de solução heteroclínica para o caso periódico

Neste capítulo, estudaremos inicialmente a existência de soluções periódicas para duas classes de problemas elípticos semilineares, para então determinar uma família M de soluções periódicas correspondente ao problema elíptico em questão. Em seguida, usaremos técnicas de minimizações para mostrar a existência de soluções do tipo heteroclínica que conecta duas soluções distintas em M.

1.1 Existência de solução para o caso de Neumann

Nesta seção, faremos o estudo da existência de soluções periódicas para um problema elíptico semilinear onde o operador diferencial em questão é o laplaciano satisfazendo a condição de contorno de Neumann.

1.1.1 Solução periódica

Para $N \geq 2$ vamos sempre assumir que D é um domínio limitado em $\mathbb{R}^{N-1}$, isto é, um conjunto aberto, conexo e limitado em $\mathbb{R}^{N-1}$, com fronteira ∂D suave[1] e $\Omega = \mathbb{R} \times D$ um cilindro infinito se $N > 2$ ou uma faixa infinita se $N = 2$. Neste caso, notemos que $\partial\Omega = \mathbb{R} \times \partial D$. Denotaremos os pontos de Ω por (x, y) no qual $x \in \mathbb{R}$ e $y \in D$.

[1] Veja a definição em [10, Section 9.6].

Suponhamos que g é uma função definida em $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ tomando valores em $\mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(g_1) $g \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$;

(g_2) $g(x,y,t)$ é par e 1- periódica em x, isto é,

$$g(x,y,t) = g(-x,y,t) \ \text{ e } \ g(x,y,t) = g(x+1,y,t), \quad \forall (x,y,t) \in \overline{\Omega}\times\mathbb{R};$$

(g_3) $G(x,y,t)$ é 1-periódica em t, em que

$$G(x,y,t) = \int_0^t g(x,y,s)ds.$$

Observação 1.1 *(i) Uma função que satisfaz as condições acima é* $g : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$g(x,y,t) = \cos(2\pi x)\sin(2\pi t).$$

(ii) Não é importante que os períodos de g em x e de G em t sejam os mesmos. Essa suposição é apenas para conveniência notacional.

(iii) Se $N = 1$, o trabalho se reduz ao estudo de equações diferenciais ordinárias em x. Para o estudo de soluções heteroclínicas para este caso recomendamos a leitura da dissertação [14].

De acordo com (g_2) temos que G é par e 1- periódica em x pois

$$G(x,y,t) = \int_0^t g(x,y,s)ds = \int_0^t g(-x,y,s)ds = G(-x,y,t)$$

e

$$G(x,y,t) = \int_0^t g(x,y,s)ds = \int_0^t g(x+1,y,s)ds = G(x+1,y,t),$$

respectivamente.

Inicialmente, estudaremos a existência de soluções periódicas para o seguinte problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & em \ \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, & sobre \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_2}$$

Para isto, vamos considerar $\Omega_1 = [0,1]\times D$ e

$$E_1 = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \in H^1(\Omega_1) \text{ e } u \text{ é 1- periódica em } x\}.$$

Notemos que Ω_1 satisfaz a propriedade do cone (veja Definição C.6 do Apêndice C) e que $E_1 \neq \emptyset$ pois as funções constantes estão em E_1. Verifica-se sem dificuldade que E_1 é um espaço vetorial. Além disso, podemos identificar E_1 como um subespaço vetorial de $H^1(\Omega_1)$. Posto isto, vamos munir E_1 com a norma usual de $H^1(\Omega_1)$ dada por

$$\|u\|_{H^1(\Omega_1)} = \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dxdy + \int_{\Omega_1} |u|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in E_1.$$

Afirmação 1.1 *$(E_1, \|\cdot\|_{H^1(\Omega_1)})$ é de Banach.*

Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em E_1. Então, (u_n) também é uma sequência de Cauchy em $H^1(\Omega_1)$. Daí, como $H^1(\Omega_1)$ é um espaço de Banach existe $u \in H^1(\Omega_1)$ tal que (u_n) converge para u em $H^1(\Omega_1)$. Sendo assim, como

$$\|u_n - u_m\|^2_{H^1([0,2]\times D)} = 2\|u_n - u_m\|^2_{H^1(\Omega_1)}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

temos que (u_n) é de Cauchy em $H^1([0,2] \times D)$. Logo, existe $v \in H^1([0,2] \times D)$ tal que

$$u_n \to v \;\text{ em }\; H^1([0,2] \times D) \;\text{ quando }\; n \to \infty.$$

Por unicidade de limite, $u = v$ em Ω_1. No entanto, pelo Teorema de Vainberg (veja o Teorema B.9 do Apêndice B) segue que a menos de subsequência

$$u_n(x,y) \to v(x,y) \;\text{ q.t.p }\; \text{em } \; \Omega_1.$$

Assim,

$$u_n(x+1,y) \to v(x+1,y) \;\text{ q.t.p }\; \text{em } \; \Omega_1.$$

Consequentemente, como $u_n(x+1,y) = u_n(x,y)$,

$$v(x+1,y) = v(x,y) \;\; em \;\; \Omega_1,$$

isto é, v é 1-periódica em x. Portanto, u é 1-periódica em x. Logo, $(E_1, \|\cdot\|_{H^1(\Omega_1)})$ é de Banach.

Para cada $u \in H^1(\Omega_1)$, definimos o funcional

$$I_1(u) = \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(x,y,u)\right) dxdy.$$

Uma propriedade deste funcional que será bastante útil no decorrer deste trabalho é que

$$I_1(u+k) = I_1(u), \quad \forall u \in E_1 \;\text{ e }\; \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

De fato, como G é 1-periódica em t segue que $k \in \mathbb{Z}$ também é um período para G em t, isto é,

$$G(x, y, t) = G(x + k, y, t), \quad \forall (x, y, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} I_1(u + k) &= \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2} |\nabla (u + k)|^2 - G(x, y, u + k) \right) dxdy \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, y, u) \right) dxdy \\ &= I_1(u). \end{aligned}$$

Vamos demonstrar o seguinte lema.

Lema 1.1 *Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado que satisfaz a propriedade do cone e $f : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory (veja Definição B.10 do Apêndice B) satisfazendo a condição de crescimento*

$$|f(x, t)| \leq A + B|t|^p,$$

com $A, B > 0$ e $0 \leq p < (N + 2)/(N - 2)$ se $N \geq 3$ ou $0 \leq p < +\infty$ se $N = 1, 2$. Então, sendo

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$$

o funcional

$$I(u) = \int_{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u) \right) dx, \quad u \in H^1(\mathcal{O}),$$

está bem definido e $I \in C^1(H^1(\mathcal{O}), \mathbb{R})$ com

$$I'(u)v = \int_{\mathcal{O}} (\nabla u \nabla v - f(x, u)v)\, dx, \quad \forall u, v \in H^1(\mathcal{O}).$$

Demonstração. Vamos dividir a prova em duas etapas.

1º etapa: Inicialmente definimos o funcional $\psi : H^1(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(u) = \int_{\mathcal{O}} F(x, u) dx.$$

Vamos mostrar que $\psi \in C^1(H^1(\mathcal{O}), \mathbb{R})$ com

$$\psi'(u)(v) = \int_{\mathcal{O}} f(x, u) v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathcal{O}).$$

De fato, notemos primeiramente que ψ está bem definida, pois $F(\cdot, u(\cdot))$ é mensurável para $u \in H^1(\mathcal{O})$ uma vez que f é de Carathéodory. Além disso, verifica-se que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|F(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^{p+1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora calcular $\partial\psi(u)/\partial v$ para todo $u, v \in H^1(\mathcal{O})$ no caso em que $N \geq 3$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(u)}{\partial v} &= \lim_{t\to 0}\frac{\psi(u+tv)-t\psi(u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathcal{O}}\left[\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\right]dx.\end{aligned}$$

Definimos

$$h_t(x) = \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}.$$

Pelo Teorema de Valor Médio (veja Teorema B.1 do Apêndice B), existe $\theta(x) \in [u(x), u(x)+tv(x)]$ ou $\theta(x) \in [u(x)+tv(x), u(x)]$ tal que

$$h_t(x) = f(x,\theta(x))v(x).$$

Posto isto, verifica-se que existem constantes $A_1, B_1 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}|h_t(x)| &= |f(x,\theta(x))v(x)|\\ &\leq \left(A_1 + B_1|\theta(x)|^{\frac{N+2}{N-2}}\right)|v(x)|.\end{aligned}$$

Agora, como $|\theta(x)| \leq 2|u(x)| + |v(x)|$ para todo $t \in [0,1]$ segue que existem contantes $A_2, A_3, A_4 > 0$ satisfazendo

$$|h_t(x)| \leq A_2|v(x)| + A_3|u(x)|^{\frac{N+2}{N-2}} + A_4|v(x)|^{2^*}.$$

Consequentemente, $h_t \in L^1(\mathcal{O})$. Por outro lado, como

$$h_t(x) \to f(x,u(x))v(x) \quad \text{quando} \quad t \to 0,$$

podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema B.7 do Apêndice B) para concluir

$$\int_{\mathcal{O}} h_t(x)dx \to \int_{\mathcal{O}} f(x,u(x))v(x)dx \quad \text{quando} \quad t \to 0.$$

Dessa forma, por unicidade de limite

$$\frac{\partial\psi(u)}{\partial v} = \int_{\mathcal{O}} f(x,u(x))v(x)dx. \tag{1.2}$$

Portanto, $\partial\psi(u)/\partial(\cdot) : H^1(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ existe para todo $u \in H^1(\mathcal{O})$. Para cada $u \in H^1(\mathcal{O})$ verifica-se que $\partial\psi(u)/\partial(\cdot)$ é linear. Além disso, para $v \in H^1(\mathcal{O})$ com $\|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq 1$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\psi(u)}{\partial v}\right| &\leq \int_{\mathcal{O}} |f(x,u)||v|dx\\ &\leq \int_{\mathcal{O}}\left(A_1 + B_1|u|^{\frac{N+2}{N-2}}\right)|v|dx\\ &\leq A_1\int_{\mathcal{O}}|v|dx + B_1\int_{\mathcal{O}}|u|^{\frac{N+2}{N-2}}|v|dx.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder (veja Teorema B.8 do Apêndice B),

$$\left|\frac{\partial\psi(u)}{\partial v}\right| \leq A_1\|v\|_{L^1(\mathcal{O})} + B_1\|u\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\mathcal{O})}\|v\|_{L^{2^*}(\mathcal{O})}.$$

Usando as imersões contínuas[2]

$$H^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^1(\mathcal{O}) \quad \text{e} \quad H^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathcal{O})$$

segue que existem constantes $C_3, C_4 > 0$ verificando

$$\left|\frac{\partial\psi(u)}{\partial v}\right| \leq \left(C_3 + C_4\|u\|^{2^*-1}_{H^1(\mathcal{O})}\right)\|v\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Agora, como $\|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq 1$ obtemos

$$\left|\frac{\partial\psi(u)}{\partial v}\right| \leq C_3 + C_4\|u\|^{2^*-1}_{H^1(\mathcal{O})},$$

mostrando que $\partial\psi(u)/\partial(\cdot)$ é um funcional linear contínuo, ou seja,

$$\frac{\partial\psi(u)}{\partial(\cdot)} \in (H^1(\mathcal{O}))'. \tag{1.3}$$

Por outro lado, seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathcal{O})$ e seja também $u \in H^1(\mathcal{O})$ com

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathcal{O}) \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Vamos provar que

$$\frac{\partial\psi(u_n)}{\partial(\cdot)} \to \frac{\partial\psi(u)}{\partial(\cdot)} \ \text{ em } \ (H^1(\mathcal{O}))'.$$

Com efeito, notemos inicialmente que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\psi(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u)}{\partial v}\right| &\leq \int_{\mathcal{O}} |f(x,u_n) - f(x,u)||v|dx \\ &\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathcal{O})}\|v\|_{L^{2^*}(\mathcal{O})} \\ &\leq C\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathcal{O})}\|v\|_{H^1(\mathcal{O})},\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|\frac{\partial\psi(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u)}{\partial v}\right| \leq C\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathcal{O})}\|v\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{1.4}$$

Recordemos agora que o operador de Nemytskii (veja Apêndice B), $N_f : L^{2^*}(\mathcal{O}) \to L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathcal{O})$ definido por

$$N_f(u) := f(\cdot, u(\cdot))$$

[2]Isto é uma consequência do Teorema C.7 do Apêndice C.

é contínuo. Por imersões de Sobolev,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^{2^*}(\mathcal{O}) \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Consequentemente,

$$N_f(u_n) \to N_f(u) \quad \text{em} \quad L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathcal{O}) \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

isto é,

$$f(x, u_n) \to f(x, u) \quad \text{em} \quad L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathcal{O}) \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.5}$$

Usando (1.4) e (1.5) obtemos

$$\sup_{\|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq 1} \left| \frac{\partial \psi(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial \psi(u)}{\partial v} \right| \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

ou seja,

$$\frac{\partial \psi(u_n)}{\partial (\cdot)} \to \frac{\partial \psi(u)}{\partial (\cdot)} \ \text{ em } \ (H^1(\mathcal{O}))'. \tag{1.6}$$

Portanto, por (1.2), (1.3) e (1.6) segue do Teorema B.16 que $\psi \in C^1(H^1(\mathcal{O}), \mathbb{R})$ com

$$\frac{\partial \psi(u)}{\partial v} = \int_{\mathcal{O}} f(x, u(x)) v(x) dx.$$

A demonstração da diferenciabilidade de ψ para $N = 1, 2$ se faz de modo semelhante.

2º etapa: Nesta etapa, vamos provar que o funcional

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2_{H^1(\mathcal{O})}$$

pertence a $C^1(H^1(\mathcal{O}), \mathbb{R})$ com

$$\phi'(u)v = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in H^1(\mathcal{O}),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $H^1(\mathcal{O})$. De fato, notemos inicialmente que para cada número real $t \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\phi(u + tv) - \phi(u)}{t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\|u + tv\|^2_{H^1(\mathcal{O})} - \|u\|^2_{H^1(\mathcal{O})}}{t} \right) \\ &= \langle u, v \rangle + \frac{t}{2} \|v\|^2_{H^1(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(u + tv) - \phi(u)}{t} = \langle u, v \rangle,$$

mostrando que

$$\phi'(u)v = \langle u, v\rangle, \quad \forall u, v \in H^1(\mathcal{O}).$$

Agora, consideremos $\partial\phi(u)/\partial(\cdot)$ sendo uma candidata para $\phi'(u)$. Desse modo,

$$\frac{\phi(u+v) - \phi(u) - \langle u, v\rangle}{\|v\|_{H^1(\mathcal{O})}} = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Portanto,

$$\lim_{\|v\|_{H^1(\mathcal{O})}\to 0} \frac{\phi(u+v) - \phi(u) - \langle u, v\rangle}{\|v\|_{H^1(\mathcal{O})}} = 0.$$

Assim, ϕ é Fréchet diferenciável com

$$\phi'(u)(v) = \langle u, v\rangle.$$

Para ver que $\phi \in C^1(H^1(\mathcal{O}), \mathbb{R})$ consideremos $u_n \to u$ em $H^1(\mathcal{O})$ e notemos

$$\begin{aligned} |\phi'(u_n)(v) - \phi'(u)(v)| &= |\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| \\ &= |\langle u_n - u, v\rangle| \\ &\leq \|u_n - u\|_{H^1(\mathcal{O})}\|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \end{aligned}$$

implicando em

$$\sup_{\|v\|_{H^1(\mathcal{O})}\leq 1} |\phi'(u_n)(v) - \phi'(u)(v)| \leq \|u_n - u\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Consequentemente,

$$\|\phi'(u_n) - \phi'(u)\| \to 0 \;\; \text{quando} \;\; u_n \to u \;\; \text{em} \;\; H^1(\mathcal{O}),$$

mostrando que ϕ' é contínua. Portanto, pelo Teorema B.16 $\phi \in C^1(H^1(\mathcal{O}), \mathbb{R})$. Por outro lado, verifica-se de modo análogo que o funcional

$$\nu(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

pertence $C^1(H^1(\mathcal{O}), \mathbb{R})$ com

$$\nu'(u)v = \int_{\mathcal{O}} uv dx, \quad \forall u, v \in L^2(\mathcal{O}).$$

Por fim, pelo que foi visto na primeira e segunda etapas concluímos que o funcional I pertence $C^1(H^1(\mathcal{O}), \mathbb{R})$ com

$$I'(u)v = \int_{\mathcal{O}} (\nabla u \nabla v - f(x, u)v)\, dx, \quad \forall u, v \in H^1(\mathcal{O}).$$

De fato, basta considerar

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\mathcal{O})} - \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathcal{O})} - \int_{\mathcal{O}} F(x,u)dx.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Pelo Lema 1.1, $I_1 \in C^1(E_1;\mathbb{R})$. De fato, basta notar que por (g_1) temos que g é uma função de Carathéodory e $g(x,y,u)$ é limitada sempre que $u \in E_1$. Portanto, $I_1 \in C^1(E_1;\mathbb{R})$ com

$$I_1'(u)v = \int_{\Omega_1} (\nabla u \nabla v - g(x,y,u)v)\, dxdy, \quad \forall u E_1 \;\text{ e }\; \forall v \in H^1(\Omega_1).$$

O funcional I_1 é limitado inferiormente em $H^1(\Omega_1)$. Com efeito, como $G(x,y,\cdot)$ é periódica e contínua em $\mathbb{R}$ temos que a mesma é limitada e sendo x e y estão definidos em um compacto segue que existe $C > 0$ tal que

$$G(x,y,t) \leq C, \quad \forall (x,y,t) \in \Omega_1 \times \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\int_{\Omega_1} G(x,y,t)dxdy \leq \int_{\Omega_1} Cdxdy = C|\Omega_1|. \tag{1.7}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(x,y,u)\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_1)} - \int_{\Omega_1} G(x,y,u)dxdy \\ &\geq -C|\Omega_1|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_1(u) \geq -C|\Omega_1|, \quad \forall\; u \in H^1(\Omega_1).$$

Por mais razão ainda, I_1 é limitado inferiormente em E_1. Por isso, seja

$$c_1 = \inf_{u \in E_1} I_1(u).$$

Daqui em diante, denotaremos

$$[u] = \frac{1}{|\Omega_1|}\int_{\Omega_1} udxdy.$$

Proposição 1.1 *Existe $\overline{u} \in E_1$ tal que $I_1(\overline{u}) = c_1$.*

Demonstração. Seja (u_m) uma sequência em E_1 tal que

$$I_1(u_m) \to c_1 \quad \text{quando} \quad m \to \infty.$$

Assim, a sequência $(I_1(u_m))$ é limitada em $\mathbb{R}$, isto é, existe $K > 0$ com a seguinte propriedade

$$I_1(u_m) \leq K, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

De (1.7) e (1.8),

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq I_1(u_m) + C|\Omega_1| \leq K + C|\Omega_1|, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Por outro lado, sendo $[u_m]$ um número real podemos escolher um número inteiro k_m tal que

$$0 \leq [u_m] + k_m < 1.$$

Então,

$$[u_m + k_m] = \frac{1}{|\Omega_1|}\int_{\Omega_1} (u_m + k_m)\, dx = \frac{1}{|\Omega_1|}\int_{\Omega_1} u_m dx + k_m = [u_m] + k_m < 1.$$

entretanto, de (1.1)

$$I_1(u_m + k_m) \to c_1 \;\; \text{quando} \;\; m \to \infty,$$

mostrando que $(u_m + k_m)$ também é uma sequência minimizante para o funcional I_1. Desse modo, sem perda de generalidade podemos supor

$$0 \leq [u_m] < 1. \tag{1.10}$$

Vamos mostrar agora que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C_1 \left(|[u]| + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)}\right), \quad \forall u \in H^1(\Omega_1). \tag{1.11}$$

De fato, suponhamos por absurdo que não exista tal $C_1 > 0$ verificando a desigualdade (1.11). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $v_k \in H^1(\Omega_1)$ com

$$\|v_k\|_{L^2(\Omega_1)} > k\left(|[v_k]| + \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega_1)}\right).$$

Fazendo $w_k = v_k/\|v_k\|_{L^2(\Omega_1)}$ temos

$$\frac{1}{k} > |[w_k]| + \|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega_1)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Por conseguinte,

$$\|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega_1)} < 1 \ \text{ e } \ \|w_k\|_{L^2(\Omega_1)} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo, a sequência (w_k) é uma sequência limitada em $H^1(\Omega_1)$. Sendo $H^1(\Omega_1)$ um espaço de Hilbert e, portanto reflexivo, segue do Teorema B.12 que existe $w \in H^1(\Omega_1)$ tal que, a menos de subsequência,

$$w_k \rightharpoonup w \ \text{ em } \ H^1(\Omega_1).$$

Assim sendo, pela imersão compacta de $H^1(\Omega_1)$ em $L^2(\Omega_1)$ (veja Apêndice C),

$$w_k \to w \ \text{ em } \ L^2(\Omega_1).$$

Dessa maneira,

$$\|w\|_{L^2(\Omega_1)} = 1$$

implicando em

$$w \neq 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1. \tag{1.13}$$

Por outro lado, por (1.12) temos a convergência

$$[w_k] \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Ademais,

$$\begin{aligned} |[w_k] - [w]| &= \left| \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} w_k dxdy - \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} w dxdy \right| \\ &= \frac{1}{|\Omega_1|} \left| \int_{\Omega_1} (w_k - w) dxdy \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} |w_k - w| dxdy. \end{aligned}$$

Pela imersão compacta $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^1(\Omega_1)$ (veja Apêndice C) constatamos que

$$[w_k] \to [w] \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Por unicidade de limite,

$$\int_{\Omega_1} w dxdy = 0. \tag{1.14}$$

Agora, como w é o limite fraco da sequência (w_k) temos[3]

$$\|w\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|w_k\|_{H^1(\Omega_1)}.$$

[3]Note que a norma é fracamente semicontínua inferiormente.

Daí, por (1.12),

$$\int_{\Omega_1} |\nabla w|^2 dxdy = 0 \tag{1.15}$$

acarretando que w é uma função constante. Logo, por (1.14) devemos ter $w = 0$ em Ω_1, um absurdo pois contraria (1.13). Portanto, existe $C_1 > 0$ verificando (1.11). Por (1.9), (1.10) e (1.11), (u_m) é uma sequência limitada em $H^1(\Omega_1)$. Logo, existe $\overline{u} \in E_1$ (pois E_1 é de Banach) de maneira que $u_m \rightharpoonup \overline{u}$ em $H^1(\Omega_1)$. Pelo Teorema C.10, I_1 é fracamente semicontínuo inferiormente e, portanto, $c_1 = I_1(\overline{u})$. ■

Pelo que foi visto anteriormente é claro que $I_1(\overline{u} + k) = c_1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por isso, consideremos o conjunto

$$M = \{u \in E_1 : I_1(u) = c_1\}.$$

Pela Proposição 1.1, $M \neq \emptyset$. Daqui em diante vamos denotar

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(x, y, u).$$

Proposição 1.2 *Consideremos* $\overline{c_1} = \inf\limits_{u \in H^1(\Omega_1)} I_1(u)$. *Então,* $\overline{c_1} = c_1$.

Demonstração. Primeiramente, recordemos que podemos identificar E_1 como um subespaço de $H^1(\Omega_1)$. Assim, $\overline{c_1} \leq c_1$. Suponhamos por absurdo que $\overline{c_1} < c_1$. Logo, por definição de ínfimo existe $u_0 \in H^1(\Omega_1)$ tal que $I_1(u_0) < c_1$. Para cada $u \in H^1(\Omega_1)$ escrevemos

$$I_1(u) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_D \mathcal{L}(u) dxdy = \alpha(u) + \beta(u), \tag{1.16}$$

onde

$$\alpha(u) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy \ \text{ e } \ \beta(u) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_D \mathcal{L}(u) dxdy.$$

Por conseguinte, devemos ter $\alpha(u_0)$ ou $\beta(u_0)$ menor do que$c_1/2$. Com efeito, se ambos fossem maiores do que $c_1/2$ teríamos por (1.16) que $I_1(u_0) \geq c_1$, um absurdo. Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha(u_0) < c_1/2$. Posto isto, definimos

$$\nu(x, y) = \begin{cases} u_0(x, y), & \text{se } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \ y \in D \\ u_0(1 - x, y), & \text{se } \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \ y \in D. \end{cases}$$

Desde que $\nu(0, y) = \nu(1, y)$ então podemos estender ν periodicamente em $\Omega = \mathbb{R} \times D$ da seguinte forma: se $z \in \mathbb{R}$ tomemos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq z < k + 1$ e fazemos

$\nu(z,y) = \nu(z-k,y)$. Dessa forma, ν é 1-periódica em x e portanto $\nu \in E_1$. Por outro lado, como G é uma função par e 1-periódica em x temos

$$\begin{aligned}\beta(\nu) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_D \mathcal{L}(\nu)dxdy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u_0(1-x,y)|^2 - G(x,y,u_0(1-x,y))\right)dxdy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u_0(1-x,y)|^2 - G(1-x,y,u_0(1-x,y))\right)dxdy.\end{aligned}$$

Fazendo $z = 1-x$ segue do Teorema de Mudança de Variável (ver Apêndice B) que

$$\begin{aligned}\beta(\nu) &= -\int_{\frac{1}{2}}^{0}\int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u_0(z,y)|^2 - G(z,y,u_0(z,y))\right)dzdy \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 - G(x,y,u_0)\right)dxdy \\ &= \alpha(u_0).\end{aligned}$$

Como naturalmente $\alpha(\nu) = \alpha(u_0)$ obtemos

$$I_1(\nu) = \alpha(\nu) + \beta(\nu) = \alpha(u_0) + \alpha(u_0) = 2\alpha(u_0) < c_1.$$

A demonstração está completa pois isso contradiz o fato que $\nu \in E_1$. ■

Corolário 1.3 *Seja $\overline{u}$ de acordo com a Proposição 1.1. Então, $\overline{u}$ é uma solução clássica para o problema (P_1) com $\overline{u}(x+1,y) = \overline{u}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$.*

Demonstração. Em conformidade com as Proposições 1.1 e 1.2 tem-se que $\overline{u}$ é um ponto crítico para o funcional I_1. Logo,

$$\int_{[0,1]\times D} \nabla\overline{u}\nabla v dxdy = \int_{[0,1]\times D} g(x,y,\overline{u})v dxdy, \quad \forall v \in H^1(\Omega_1). \tag{1.17}$$

Por outro lado, definimos o conjunto

$$E_1^2 = \{u : \Omega \to \mathbb{R} | u \in H^1([1,2]\times D) \text{ e } u \text{ é 1-periódica em } x\}$$

e o funcional

$$I_{1,2}(u) = \int_{[1,2]\times D} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(x,y,u)\right)dxdy, \quad \forall u \in E_1^2.$$

Pelo Teorema da Mudança de Variável,

$$I_{1,2}(u) = I_1(u), \quad \forall u \in E_1^2.$$

Verifica-se que as Proposições 1.1 e 1.2 valem também para $I_{1,2}$. Posto isto, $\overline{u}$ é um ponto crítico para $I_{1,2}$. Portanto,

$$\int_{[1,2]\times D} \nabla\overline{u}\nabla v dxdy = \int_{[1,2]\times D} g(x,y,\overline{u})v dxdy, \quad \forall v \in H^1([1,2]\times D). \tag{1.18}$$

Vamos mostrar agora que

$$\int_{[0,2]\times D} \nabla\overline{u}\nabla v dxdy = \int_{[0,2]\times D} g(x,y,\overline{u})v dxdy, \quad \forall v \in H^1([0,2]\times D).$$

Para isso, tomemos uma função arbitrária $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_2})$. Se o *supt* $\varphi \subset \Omega_1$, então vale a igualdade (1.17). Se caso *supt* φ está contido em $[1,2]\times D$ então vale a igualdade (1.18). Por último, no caso em que *supt* φ contém pontos de $[0,1]\times D$ quanto em $[1,2]\times D$ escrevemos $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, onde φ_1 é φ restrito ao bloco $[0,1]\times D$ e φ_2 é φ restrito ao bloco $[1,2]\times D$. Posto isto,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2]\times D} \nabla\overline{u}\nabla\varphi dxdy &= \int_{[0,1]\times D} \nabla\overline{u}\nabla\varphi_1 dxdy + \int_{[1,2]\times D} \nabla\overline{u}\nabla\varphi_2 dxdy \\
&= \int_{[0,1]\times D} g(x,y,\overline{u})\varphi_1 dxdy + \int_{[1,2]\times D} g(x,y,\overline{u})\varphi_2 dxdy \\
&= \int_{[0,2]\times D} g(x,y,\overline{u})\varphi dxdy.
\end{aligned}$$

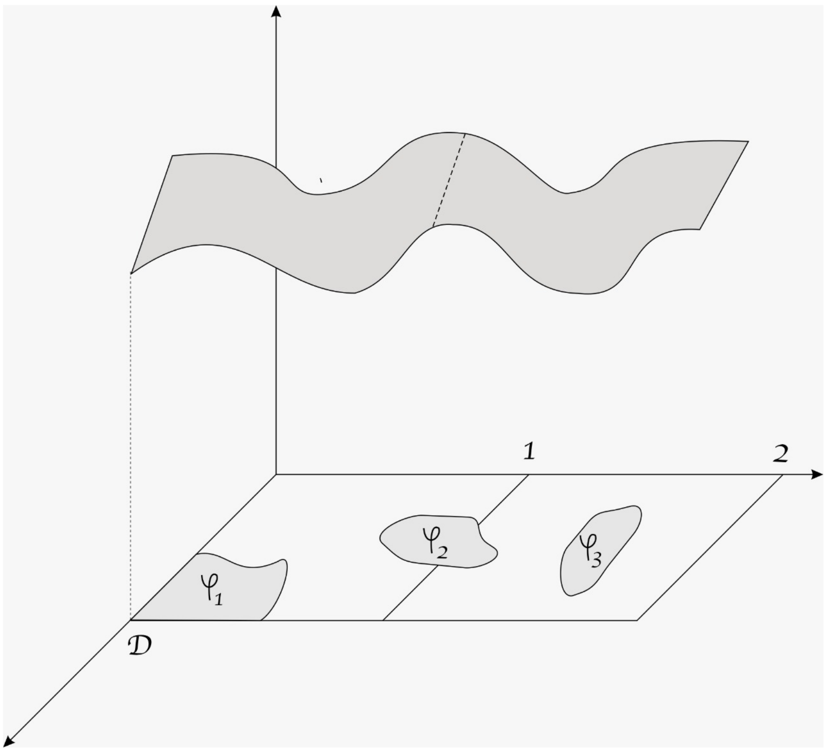

Figura 1.1: Ilustração na faixa.

Neste momento, desde que $C^\infty(\overline{[0,2]\times D})$ é denso em $H^1([0,2]\times D)$ temos

$$\int_{\Omega_2} \nabla\overline{u}\nabla v dxdy = \int_{\Omega_2} g(x,y,\overline{u}) v dxdy, \quad \forall v \in H^1([0,2]\times D).$$

Portanto, fazendo de modo análogo para cada bloco do tipo $[l,k]\times D$, com $l,k\in\mathbb{N}$, concluímos

$$\int_{\Omega} \nabla u\nabla v dxdy = \int_{\Omega} g(x,y,\overline{u}) v dxdy, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Assim sendo, $\overline{u}$ é uma solução fraca para o problema (P_1). Por um resultado de regularidade encontrado em [11, Theorem 3.1] concluímos que $\overline{u}$ é solução clássica para (P_1) sendo 1-periódica em x. ■

De acordo com o resultado acima nota-se que M é uma classe de soluções clássicas para (P_1) que são 1-periódicas em x.

Proposição 1.4 *Se $u\in H^1(\Omega_1)$ e $I_1(u)=c_1$, então $u\in M$ e u é par em x, isto é,*

$$u(x,y)=u(-x,y), \quad \forall (x,y)\in\Omega_1.$$

Demonstração. Suponhamos que $u\in H^1(\Omega_1)$ com $I_1(u)=c_1$. Seja

$$v(x,y)=\begin{cases} u(x,y), & \text{se} \quad 0\le x\le \frac{1}{2},\ y\in D \\ u(1-x,y), & \text{se} \quad \frac{1}{2}\le x\le 1,\ y\in D. \end{cases}$$

Estendemos v em Ω sendo 1-periódica em x. De acordo com a demonstração da Proposição 1.2 verifica-se a igualdade $I_1(v)=c_1$. De fato, basta notar que podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha(v)\le c_1/2$ para então obtermos $I_1(v)=2\alpha(v)$ e portanto $I_1(v)\le c_1$. Sendo $v\in E_1$ temos $I_1(v)=c_1$. Logo, pelo Corolário 1.3 temos que u e v são soluções fracas da equação

$$-\Delta u = g(x,y,u), \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Seja $w=u-v$. Então, w é solução fraca de

$$-\Delta w = g(x,y,u)-g(x,y,v) \ \text{ em } \ \Omega.$$

Definimos

$$b(x,y)=\begin{cases} \dfrac{g(x,y,u)-g(x,y,v)}{u-v}, & \text{se} \quad u(x,y)\ne v(x,y) \\ g_u(x,y,u), & \text{se} \quad u(x,y)=v(x,y). \end{cases}$$

Afirmamos que b é contínua em Ω. Efetivamente, se $(x_0, y_0) \in \Omega$ é tal que $u(x_0, y_0) \neq v(x_0, y_0)$, então pela continuidade de g, u e v segue a continuidade de b em (x_0, y_0). Por outro lado, seja $(x_0, y_0) \in \Omega$ verificando $u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$ e seja uma sequência (x_n, y_n) em Ω tal que $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$. Então, neste caso, pode existir duas subsequências tais que

i) $u(x_{n_k}, y_{n_k}) \neq v(x_{n_k}, y_{n_k})$;

ii) $u(x_{n_k}, y_{n_k}) = v(x_{n_k}, y_{n_k})$.

Para o primeiro caso,

$$b(x_{n_k}, y_{n_k}) = \frac{g(x_{n_k}, y_{n_k}, u) - g(x_{n_k}, y_{n_k}, v)}{u - v} \to g_u(x_0, y_0, u) = b(x_0, y_0).$$

Já para o caso *ii)*,

$$b(x_{n_k}, y_{n_k}) = g_u(x_{n_k}, y_{n_k}, u) \to g_u(x_0, y_0, u) = b(x_0, y_0),$$

pois g é uma função de classe C^1. Em ambos os casos, temos que b é contínua em (x_0, y_0). Em contrapartida, notemos que

$$-\Delta w = b(x, y)w, \quad \text{em} \quad \Omega_1$$

e que

$$w(x, y) = 0 \quad \text{em} \quad [0, 1/2] \times D \quad \text{e} \quad b \in L^\infty(\Omega_1).$$

Pelo Teorema C.4, $w \in H^2(\Omega)$, por mais razão ainda, $w \in H^2(\Omega_1)$. Pelo Princípio da Continuação Única (ver Apêndice A),

$$w = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1.$$

Portanto, $u = v$ implicando em $u \in M$. Além disso, u é par em x em razão de

$$u(-x, y) = u(1 - x, y) = u(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega_1.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Um caso especial de interesse é quando G é independente de x, ou seja, quando dados quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$ obtemos

$$G(x_1, y, t) = G(x_2, y, t), \quad \forall y \in D \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, os elementos de M possuem a mesma propriedade.

Proposição 1.5 *Se G é independente de x e $w \in M$, então w é independente de x.*

Demonstração. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ e $u \in H^1(\Omega_1)$ seja

$$I_1^\theta(u) = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(y,u)\right) dxdy.$$

Afirmação 1.2 *Se $u \in E_1$, então $I_1^\theta(u) = I_1(u)$.*

Seja $\theta - \frac{1}{2} = k + \epsilon$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $\epsilon \in [0,1)$. Logo,

$$\begin{aligned} I_1^\theta(u) &= \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta-\frac{1}{2}+1} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy \\ &= \int_{k+\epsilon}^{k+\epsilon+1} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy \\ &= \int_{k+\epsilon}^{k+1} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy + \int_{k+1}^{k+1+\epsilon} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy. \end{aligned}$$

Pela mudança de variáveis,

$$\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy = \int_\epsilon^1 \int_D \mathcal{L}(u(z+k,y)) dzdy + \int_0^\epsilon \int_D \mathcal{L}(u(z+k+1,y)) dzdy.$$

Da periodicidade segue que

$$\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy = \int_\epsilon^1 \int_D \mathcal{L}(u(z,y)) dzdy + \int_0^\epsilon \int_D \mathcal{L}(u(z,y)) dzdy.$$

Como z é uma variável muda, as integrais envolvidas podem ser escritas em termos de x da seguinte forma

$$\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} \int_D \mathcal{L}(u) dxdy = \int_\epsilon^1 \int_D \mathcal{L}(u) dxdy + \int_0^\epsilon \int_D \mathcal{L}(u) dxdy = \int_0^1 \int_D \mathcal{L}(u) dxdy,$$

mostrando a afirmação.

Desde que G é independente de x segue do argumento usado na Proposição 1.2 que se $w \in M$ e

$$\nu_\theta(x,y) = \begin{cases} w(x,y), & \text{se } \ \theta - \frac{1}{2} \le x \le \theta, \ y \in D \\ w(2\theta - x, y), & \text{se } \ \theta \le x \le \theta + \frac{1}{2}, \ y \in D, \end{cases}$$

então $I_1^\theta(\nu_\theta) = c_1$ para cada $\theta \in \mathbb{R}$. Dessa maneira,

$$I_1(\nu_\theta) = c_1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, nota-se que $w(x,y) = w(2\theta - x, y)$ sempre que $\theta - 1/2 \leq x \leq \theta$. Além disso, pelo Princípio da Continuação Única verifica-se que dado $\theta \in \mathbb{R}$ ocorre a igualdade $\nu_\theta = w$. Daí, dados dois números reais x_1 e x_2 com $|x_1 - x_2| \leq 1$ podemos tomar $\theta = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ de tal forma que

$$w(x_1, y) = w(2\theta - x_2, y) = w(x_2, y).$$

Portanto, como x_1 e x_2 são arbitrários temos que w é independente de x. ■

Para fins posteriores, dado $k \in \mathbb{N}$, devemos também estudar soluções periódicas para o problema (P_1) em

$$E_k = \{u : \Omega \to \mathbb{R} | u \in H^1(\Omega_k) \text{ e } u \text{ é k-periódica em } x\},$$

onde

$$\Omega_k = [0, k] \times D.$$

Definimos o funcional $I_k : H^1(\Omega_k) \to \mathbb{R}$ por

$$I_k(u) = \int_{\Omega_k} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, y, u) \right) dxdy.$$

Mostra-se que E_k é de Banach, $I_k \in C^1(E_1, \mathbb{R})$ e I_k é limitado inferiormente em E_k. Por isso, consideremos

$$c_k = \inf_{u \in E_k} I_k(u).$$

As ideias contidas nas provas das proposições anteriores mostram que existe $u \in E_k$ tal que $I_k(u) = c_k$ e, além disso, $\overline{c}_k = c_k$, onde

$$\overline{c}_k = \inf_{u \in H^1(\Omega_k)} I_k(u).$$

Neste caso, u é uma solução clássica k-periódica para (P_1). No entanto, nessas condições, provaremos que u é necessariamente 1-periódica.

Proposição 1.6 *De acordo com as notações anteriores temos $c_k = kc_1$. Além disso, se $I_k(u) = c_k$ então $u \in M$.*

Demonstração. Se $u \in E_1$, então é claro que $u \in E_k$. Além do mais, $I_k(u) = kI_1(u)$. Com isso,

$$c_k \leq kI_1(u), \quad \forall u \in E_1.$$

Em particular,

$$\frac{c_k}{k} \leq I_1(u), \quad \forall u \in E_1.$$

Dessa forma, devemos ter $c_k \leq kc_1$. Agora, seja $u \in E_k$ tal que $I_k(u) = c_k$. Suponhamos por absurdo que $c_k < kc_1$. Logo, existe $u \in H^1(\Omega_k)$ verificando $I_k(u) < kc_1$. Por outro lado, denotaremos

$$\begin{aligned} I_k(u) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_D \mathcal{L}(u)dxdy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_D \mathcal{L}(u)dxdy + \cdots + \int_{k-\frac{1}{2}}^k \int_D \mathcal{L}(u)dxdy \\ &= \alpha_1(u) + \alpha_2(u) + \cdots + \alpha_{2k}(u), \end{aligned}$$

no qual

$$\alpha_i(u) = \int_{\frac{i}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{i}{2}} \int_D \mathcal{L}(u)dxdy, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, 2k.$$

Segue então que deve existir $i \in \{1, 2, ..., 2k\}$ tal que $\alpha_i(u) < c_1/2$. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$\alpha_1(u) < \frac{c_1}{2}.$$

À vista disso, definimos

$$\nu(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & \text{se} \;\; 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2},\; y \in D \\ u(1-x,y), & \text{se} \;\; \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1,\; y \in D \\ u(x-1,y), & \text{se} \;\; 1 \leq x \leq \dfrac{3}{2},\; y \in D \\ u(2-x,y), & \text{se} \;\; \frac{3}{2} \leq x \leq 2,\; y \in D \\ \quad\vdots & \\ u(x-k+1,y), & \text{se} \;\; k-1 \leq x \leq k - \dfrac{1}{2},\; y \in D \\ u(k-x,y), & \text{se} \;\; k - \frac{1}{2} \leq x \leq k,\; y \in D. \end{cases}$$

Entretanto, estendendo ν periodicamente em Ω segue que $\nu \in E_1$. O argumento contido na prova da Proposição 1.2 mostra que $I_k(\nu) = 2k\alpha_1 < kc_1$. Mas sendo $I_k(\nu) = kI_1(\nu)$ concluímos $I_1(\nu) < c_1$, um absurdo. Portanto, $c_k = kc_1$. Por fim, se $I_k(u) = c_k$ então o raciocínio da demonstração da Proposição 1.4 diz que $I_k(\nu) = c_k$. Consequentemente, u e ν são soluções fracas da equação

$$-\Delta u = g(x,y,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega_k$$

Sendo $w = u - \nu$ obtemos

$$-\Delta w = g(x,y,u) - g(x,y,\nu) \;\; \text{em} \;\; \Omega_k.$$

Além disso, verifica-se que

$$-\Delta w = b(x,y)w, \quad \text{em} \quad \Omega_k,$$

onde

$$b(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x,y,u) - g(x,y,\nu)}{u-\nu}, & \text{se} \quad u(x,y) \neq \nu(x,y) \\ g_u(x,y,u), & \text{se} \quad u(x,y) = \nu(x,y), \end{cases}$$

é contínua. Pelo Teorema C.4, $w \in H^2(\Omega_k)$ e desde que $w = 0$ em $[0,1/2] \times D$ segue do Princípio da Continuação Única que $u = \nu$. Portanto, $u \in M$. ■

Um fato interessante de se observar é que valem as Proposições 1.4 e 1.5 para o funcional energia I_k.

1.1.2 Solução do tipo heteroclínica

Neste momento, recordamos a definição de solução do tipo heteroclínica para o problema (P_1).

Definição 1.7 *Sejam $v, w \in M$ com $v \neq w$. Se existe uma função $U \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ tal que U é solução clássica de (P_1),*

$$\|U - v\|_{L^\infty([n,n+1]\times D)} \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to -\infty,$$

isto é,

$$U(x,y) \to v(x,y) \quad \textit{quando} \quad x \to -\infty \quad \textit{uniformemente} \quad \textit{em} \quad y \in D,$$

e

$$\|U - w\|_{L^\infty([n,n+1]\times D)} \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to +\infty,$$

ou seja,

$$U(x,y) \to v(x,y) \quad \textit{quando} \quad x \to -\infty \quad \textit{uniformemente} \quad \textit{em} \quad y \in D,$$

*então dizemos que U é uma **solução do tipo heteroclínica** do problema (P_1).*

Daqui em diante, vamos considerar uma nova classe de funções para determinar soluções do tipo heteroclínica para o problema (P_1). Tomemos uma função g satisfazendo (g_1), (g_2), (g_3) e a seguinte hipótese:

$(\mathcal{M})$ O conjunto M consiste de pontos isolados.

Vamos mostrar que essa nova classe de funções é não vazia. De fato, seja g uma função que satisfaz (g_1), (g_2) e (g_3). Se M é formado por pontos isolados então não há nada a fazer. Caso contrário, podemos perturbar a função g, em certo sentido, produzindo uma nova função $\hat{g}$ para o qual M consiste de pontos isolados. Por exemplo, fixado $\overline{u} \in M$ definimos o funcional $\hat{G} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do seguinte modo

$$\hat{G}(x, y, t) = G(x, y, t) - \epsilon[t - (\overline{u}(x, y) + k)]^2, \tag{1.19}$$

onde $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$ é o único número inteiro cumprindo

$$|t - (\overline{u}(x, y) + k)| \leq \frac{1}{2}.$$

Neste caso,

$$\hat{g}(x, y, t) = g(x, y, t) - 2\epsilon[t - (\overline{u}(x, y) + k)].$$

Por fim, vejamos que $\hat{g}$ satisfaz $(g_1) - (g_3)$. Com efeito,

(g_1) $\hat{g} \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

Basta notar que $g \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(g_2) $\hat{g}(x, y, t)$ é par e 1- periódica em x

Segue pois g e $\overline{u}$ são par e 1- periódica em x.

(g_3) $\hat{G}(x, y, t)$ é 1- periódica em t

Dado um ponto $(x, y, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, seja k o único inteiro tal que

$$|t + 1 - (\overline{u}(x, y) + k)| \leq \frac{1}{2}.$$

Da periodicidade de G em t, temos

$$\begin{aligned}
\hat{G}(x, y, t + 1) &= G(x, y, t + 1) - \epsilon[t + 1 - (\overline{u}(x, y) + k)]^2 \\
&= G(x, y, t) - \epsilon[t - (\overline{u}(x, y) + k - 1)]^2 \\
&= \hat{G}(x, y, t),
\end{aligned}$$

pois $k - 1$ é o único inteiro satisfazendo $|t - (\overline{u}(x, y) + k - 1)| \leq \frac{1}{2}$.

Entretanto, o funcional associado a $\hat{g}$ é dado por

$$\hat{I}_1(u) = \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \hat{G}(x, y, u) \right) dxdy.$$

Para $u \in M$ tem-se que $\hat{G}(x, y, t) = G(x, y, t)$ pois $k = 0$ é o único inteiro verificando $|\overline{u} - (\overline{u} + k)| \leq \frac{1}{2}$. Por conseguinte,

$$\hat{I}_1(u) = I_1(u) = c_1, \quad \forall u \in M.$$

Porém, se $u \notin \overline{u} + \mathbb{Z} = \{\overline{u} + k : k \in \mathbb{Z}\}$ então de (1.19) temos $\hat{G}(u) < G(u)$ e assim

$$\hat{I}_1(u) > I_1(u).$$

Portanto, os únicos minimizadores de $\hat{I}_1$ são $\overline{u}$, $\overline{u}+1$, $\overline{u}+2, \ldots$ mostrando que o conjunto

$$\hat{M} = \{u \in E_1 : \hat{I}_1(u) = c_1\}$$

satisfaz a hipótese $(\mathcal{M})$.

Para provar o resultado principal deste capítulo é necessário considerar a seguinte proposição que é um resultado técnico cuja a demonstração é baseada em argumentos variacionais. No que segue

$$B_\rho(v) = \{u \in H^1(\Omega_1) : \|u - v\|_{H^1(\Omega_1)} < \rho\}$$

e para S um subconjunto de $H^1(\Omega_1)$ não vazio definimos

$$N_\rho(S) = \{u \in H^1(\Omega_1) : \|u - v\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \rho \quad \forall v \in S\}.$$

Proposição 1.8 *Suponhamos que g satisfaz $(g_1) - (g_3)$ e $(\mathcal{M})$. Então, existe uma constante ρ_0 tal que para cada $0 < \rho < \rho_0$ tem-se*

(i) $B_\rho(v) \cap B_\rho(w) = \emptyset, \quad \forall v, w \in M$ *com* $v \neq w$.

(ii) $I_1(u) > c_1, \quad \forall u \in H^1(\Omega_1) \setminus M$.

(iii) Existe $\alpha(\rho) > 0$ verificando

$$I_1(u) \geq c_1 + \alpha(\rho) \quad \forall u \in H^1(\Omega_1) \setminus N_\rho(M).$$

Demonstração. (i) Seja

$$\gamma = \inf\{\|v - w\|_{H^1(\Omega_1)} \mid v, w \in M \text{ e } v \neq w\}.$$

Afirmamos que $\gamma > 0$. Suponhamos que ocorra o contrário, isto é, $\gamma = 0$. Então, existem sequências (v_j) e (w_j) em M, com $v_j \neq w_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$\|v_j - w_j\|_{H^1(\Omega_1)} \to 0 \text{ quando } j \to \infty. \tag{1.20}$$

De acordo com a prova da Proposição 1.1, podemos supor sem perda de generalidade que existe uma constante $K > 0$ (dependente de c_1) verificando

$$\|v_j\|_{H^1(\Omega_1)},\ \|w_j\|_{H^1(\Omega_1)} \leq K, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sendo $H^1(\Omega_1)$ reflexivo, existem $v, w \in H^1(\Omega_1)$ tais que

$$v_j \rightharpoonup v \ \text{ e } \ w_j \rightharpoonup w \ \text{ em } \ H^1(\Omega_1),$$

a menos de subsequência. Consequentemente, pela imersão compacta $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\Omega_1)$ (veja Apêndice C) obtemos

$$\|v_j - w_j\|_{L^2(\Omega_1)} \to \|v - w\|_{L^2(\Omega_1)} \ \text{ quando } \ j \to \infty.$$

De (1.20),

$$\|v_j - w_j\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ j \to \infty.$$

Por unicidade de limite, $v = w$. Agora, desde que $v_j \in M$ temos

$$\int_{\Omega_1} |\nabla v_j|^2 dxdy = \int_{\Omega_1} g(x, y, v_j) v_j dxdy.$$

Sendo assim,

$$\int_{\Omega_1} |\nabla v_j|^2 dxdy \to \int_{\Omega_1} g(x, y, v) v dxdy. \tag{1.21}$$

Por outro lado, como $v_j \rightharpoonup v$ em $H^1(\Omega_1)$ segue que

$$\int_{\Omega_1} \nabla v \nabla \varphi dxdy = \int_{\Omega_1} g(x, y, v) \varphi dxdy, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_1).$$

Em particular,

$$\int_{\Omega_1} |\nabla v|^2 dxdy = \int_{\Omega_1} g(x, y, v) v dxdy. \tag{1.22}$$

Combinando (1.21) e (1.22),

$$\|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega_1)} \to \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_1)}.$$

Desse modo, uma vez que

$$\|v_j\|^2_{L^2(\Omega_1)} \to \|v\|^2_{L^2(\Omega_1)}$$

concluímos

$$\|v_j\|^2_{H^1(\Omega_1)} \to \|v\|^2_{H^1(\Omega_1)}.$$

logo, pelo Teorema B.15

$$v_j \to v \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1),$$

um absurdo pois M consiste de pontos isolados. Portanto, $\gamma > 0$. Por conseguinte, dado $\rho_0 = \frac{\gamma}{2}$ a propriedade (i) é satisfeita.

(ii) Sabemos das Proposições 1.2 e 1.4 que $\overline{c}_1 = c_1$ e se $u \in H^1(\Omega_1)$ e $I_1(u) = c_1$ então $u \in M$. Logo, devemos ter

$$I_1(u) > c_1, \quad \forall u \in H^1(\Omega_1) \setminus M.$$

(iii) Suponhamos que (iii) é falso. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m \in H^1(\Omega_1) \setminus N_\rho(M)$ tal que

$$c_1 \leq I_1(u_m) < c_1 + \frac{1}{n}.$$

Consequentemente,

$$I_1(u_m) \to c_1 \quad \text{quando} \quad m \to \infty. \tag{1.23}$$

De acordo com a prova da Proposição 1.1 podemos supor sem perda de generalidade que $0 \leq [u_m] < 1$ para obter a limitação da sequência (u_m) em $H^1(\Omega_1)$. Logo, a menos de subsequência, existe $u \in H^1(\Omega_1)$ cumprindo

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1) \quad \text{quando} \quad m \to \infty. \tag{1.24}$$

Ora, desde que I_1 é fracamente semicontínuo inferiormente temos $I_1(u) = c_1$. Pela Proposição 1.4, $u \in M$. Dado $m \in \mathbb{N}$ definimos a função $\varphi_m = u - u_m$. Nota-se que

$$\|\varphi_m\|_{H^1(\Omega_1)} > \rho, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

De fato, caso contrário existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_{m_0} - v\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \rho, \quad \forall v \in M,$$

isto é,

$$\|u - u_{m_0} - v\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \rho, \quad \forall v \in M.$$

Sendo $u \in M$, obtemos

$$\|u_{m_0}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \rho,$$

um absurdo. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
I_1(u_m) &= I_1(u-\varphi_m) \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2}|\nabla(u-\varphi_m)|^2 - G(x,y,u-\varphi_m) \right) dxdy \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \nabla u \nabla \varphi_m + \frac{1}{2}|\nabla \varphi_m|^2 - G(x,y,u-\varphi_m) \right) dxdy \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(x,y,u) \right) dxdy \ + \\
&\qquad \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{2}|\nabla \varphi_m|^2 - \nabla u \nabla \varphi_m - G(x,y,u-\varphi_m) + G(x,y,u) \right) dxdy \\
&= I_1(u) + \frac{1}{2}\|\varphi_m\|^2_{H^1(\Omega_1)} \ - \\
&\qquad \int_{\Omega_1} \left(\nabla u \nabla \varphi_m + G(x,y,u-\varphi_m) - G(x,y,u) + \frac{1}{2}|\varphi_m|^2 \right) dxdy \\
&\geq c_1 + \frac{1}{2}\rho^2 - \int_{\Omega_1} \left(\nabla u \nabla \varphi_m + G(x,y,u-\varphi_m) - G(x,y,u) + \frac{1}{2}|\varphi_m|^2 \right) dxdy,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
I_1(u_m) \geq c_1 + \frac{1}{2}\rho^2 - \int_{\Omega_1} \left(\nabla u \nabla \varphi_m + G(x,y,u-\varphi_m) - G(x,y,u) + \frac{1}{2}|\varphi_m|^2 \right) dxdy. \tag{1.25}
$$

Por (1.24),

$$
\varphi_m \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1) \quad \text{quando} \quad m \to \infty. \tag{1.26}
$$

Pelas imersões de Sobolev,

$$
\varphi_m \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega_1) \quad \text{quando} \quad m \to \infty. \tag{1.27}
$$

Assim, pelo Teorema de Vainberg (veja Apêndice B), existem $(\varphi_{m_k}) \subset (\varphi_m)$ e $f \in L^2(\Omega_1)$ tais que

1) $\varphi_{m_k} \to 0$ q.t.p em Ω_1;

2) $|\varphi_{m_k}| \leq f$ q.t.p em Ω_1 e para todo $k \in \mathbb{N}$.

Desse modo,

$$
G(x,y,u-\varphi_{m_k}) \to G(x,y,u) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega_1.
$$

Sendo g limitada em Ω_1, existe $C > 0$ tal que

$$
|G(x,y,u-\varphi_{m_k})| \leq C|u-\varphi_{m_k}| \leq C(|u|+f).
$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\Omega_1} G(x,y,u-\varphi_{m_k})dxdy \to \int_{\Omega_1} G(x,y,u)dxdy. \tag{1.28}$$

Também, por (1.26) e (1.27),

$$\int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \varphi_{m_k} dxdy \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_1} |\varphi_{m_k}|^2 dxdy \to 0. \tag{1.29}$$

Portanto, através de (1.28),(1.29) e (1.25) concluímos

$$c_1 \geq c_1 + \frac{1}{2}\rho^2,$$

um absurdo. Logo, a propriedade (iii) é verdadeira. ■

Observação 1.2 *(i) O mesmo argumento usado em i) mostra que*

$$\overline{\gamma} = \inf\{\|v-w\|_{L^2(\Omega_1)} \mid v,w \in M \ \ e \ v \neq w\} > 0.$$

(ii) O raciocínio de (iii) justifica a existência de uma constante $\alpha(\rho) > 0$ tal que

$$I_k(u) \geq kc_1 + \alpha(\rho), \quad \forall u \in H^1(\Omega_k) \setminus N_\rho^k(M),$$

no qual $N_\rho^k(M)$ denota a vizinhança de M de raio $\rho > 0$ em $H^1(\Omega_k)$.

Vamos agora introduzir algumas notações e conceitos. Sejam $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \overline{D})$ e $k \in \mathbb{Z}$. Definimos

$$P_k u = u|_{[k,k+1]\times\overline{D}}.$$

Pela definição acima podemos identificar $P_k u$ como uma função em $H^1(\Omega_1)$. Com efeito, basta considerar a função $w : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$w_k(x,y) = u(x+k,y).$$

Logo, $P_k u \in H^1(\Omega_1)$ a menos de identificação. Também, para cada $v \in M$ definimos o conjunto

$$\begin{aligned}\Gamma^-(v) = \{U \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D) \ :& \ \|P_k U - v\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ k \to -\infty \ \text{ e} \\ & \|P_k U - M \setminus \{v\}\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ k \to +\infty\}.\end{aligned}$$

Aqui, $\|P_k U - M \setminus \{v\}\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0$ quando $k \to +\infty$ significa que $P_k U$ converge para algum $w \in M \setminus \{v\}$ em $L^2(\Omega_1)$ quando $k \to +\infty$.

Afirmação 1.3 $\Gamma^-(v) \neq \emptyset$.

Considere φ_1 e φ_2 em $C^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) \to 1 \quad \text{quando} \quad x \to -\infty \quad \text{uniformemente} \quad \text{em} \quad y \in D \\ \varphi_1(x,y) \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to +\infty \quad \text{uniformemente} \quad \text{em} \quad y \in D \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \varphi_2(x,y) \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to -\infty \quad \text{uniformemente} \quad \text{em} \quad y \in D \\ \varphi_2(x,y) \to 1 \quad \text{quando} \quad x \to +\infty \quad \text{uniformemente} \quad \text{em} \quad y \in D. \end{cases}$$

Fixemos $w \in M$ diferente de v e definimos

$$\psi(x,y) = \varphi_1(x,y)v(x,y) + \varphi_2(x,y)w(x,y).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|P_k\psi - v\|^2_{L^2(\Omega_1)} &= \int_0^1 \int_D |P_k\psi - v|^2 dxdy \\ &= \int_0^1 \int_D |\psi(x+k,y) - v|^2 dxdy \\ &= \int_0^1 \int_D |\varphi_1(x+k,y)v + \varphi_2(x+k,y)w - v|^2 dxdy \\ &\leq \int_0^1 \int_D |\varphi_1(x+k,y) - 1|^2 |v|^2 dxdy + \int_0^1 \int_D |\varphi_2(x+k,y)|^2 |w|^2 dxdy. \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$|\varphi_1(x+k,y) - 1|^2 |v|^2 \to 0, \quad |\varphi_2(x+k,y)|^2 |w|^2 \to 0 \ \text{ quando } \ k \to -\infty$$

e as funções $|\varphi_1(x+k,y) - 1|^2|v|^2$ e $|\varphi_2(x+k,y)|^2|w|^2$ são dominadas por funções integráveis, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\|P_k\psi - v\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ k \to -\infty.$$

De modo análogo, mostra-se

$$\|P_k\psi - w\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ k \to +\infty.$$

Portanto, $\psi \in \Gamma^-(v)$.

Dado $k \in \mathbb{Z}$ definimos o funcional $a_k : \Gamma^-(v) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por

$$a_k(U) = \int_k^{k+1} \int_D (\mathcal{L}(U) - \mathcal{L}(v))\, dxdy.$$

Lema 1.2 *De acordo com as notações anteriores, dado cada $k \in \mathbb{Z}$ temos:*

(i) $a_k(U) \geq 0$;

(ii) $a_k(U) = 0 \Longleftrightarrow P_k U \in M$.

Demonstração. (i) De fato, pela periodicidade de v,

$$c_1 = \int_0^1 \int_D \mathcal{L}(v)dxdy = \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(v)dxdy. \tag{1.30}$$

Também, por mudança de variável,

$$\int_0^1 \int_D \mathcal{L}(P_k U)dxdy = \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(U)dxdy. \tag{1.31}$$

Logo, como $P_k U \in H^1(\Omega_1)$ segue da Proposição 1.2 que

$$c_1 \leq \int_0^1 \int_D \mathcal{L}(P_k U)dxdy. \tag{1.32}$$

Por (1.30)-(1.32),

$$\int_k^{k+1} \int_D (\mathcal{L}(U) - \mathcal{L}(v))\, dxdy \geq 0.$$

Portanto, $a_k(U) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $U \in \Gamma^-(v)$.

(ii) Desde que $v \in M$ obtemos

$$\begin{aligned}
a_k(U) = 0 &\Leftrightarrow \int_k^{k+1} \int_D (\mathcal{L}(U) - \mathcal{L}(v))\, dxdy = 0 \\
&\Leftrightarrow \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(U)dxdy = \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(v)dxdy \\
&\Leftrightarrow \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(U)dxdy = \int_0^1 \int_D \mathcal{L}(v)dxdy \\
&\Leftrightarrow \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(U)dxdy = c_1 \\
&\Leftrightarrow I_1(P_k U) = c_1.
\end{aligned}$$

Da Proposição 1.4 concluímos que $a_k(U) = 0$ se, e somente se, $P_k(U) \in M$. ■

Finalmente, definimos o funcional $J : \Gamma^-(v) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$J(U) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(U).$$

Tal funcional será responsável pela obtenção de solução do tipo heteroclínica para o problema (P_1). Pelo item (i) do Lema 1.2 temos a existência do número real

$$\sigma = \inf_{U \in \Gamma^-(v)} J(U).$$

0À primeira vista, pode parecer que $J(U)$ é igual a

$$\int_{\mathbb{R}\times D} (\mathcal{L}(U) - \mathcal{L}(v))\, dxdy$$

No entanto, existem funções $U \in \Gamma^-(v)$ tal que $J(U) < \infty$ mas para as quais a integral acima não é condicionalmente convergente.

Daqui em diante, dizemos que uma sequência $(U_m) \subset H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D)$ é limitada em $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D)$ no sentido de que dado qualquer $l \in \mathbb{N}$ a sequência (U_m) é limitada em $H^1([-l,l] \times D)$. Posto isto, dizemos também que (U_m) converge fraco para $U \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D)$, e denotaremos por

$$U_m \rightharpoonup U \quad \text{em} \quad H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D),$$

para indicar que dado qualquer $l \in \mathbb{N}$ temos $U_m \rightharpoonup U$ em $H^1([-l,l] \times D)$. De maneira análoga, denotaremos

$$U_m \to U \quad \text{em} \quad L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D)$$

para apontar que $U_m \to U$ em $L^2([-l,l] \times D)$ sempre que $l \in \mathbb{N}$.

Com a discussão feita anteriormente estamos em condições de provar o seguinte teorema.

Teorema 1.9 *Assuma que g satisfaz $(g_1) - (g_3)$ e $(\mathcal{M})$. Então, para cada $v \in M$, existe $U \in \Gamma^-(v)$ tal que $J(U) = \sigma$.*

Demonstração. A demonstração será dividida em 4 etapas principais:

(A) Construção de uma sequência minimizante para o funcional J que tem como limite fraco algum $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R} \times \overline{D})$;

(B) Estudo do comportamento assintótico de U com $x \to -\infty$;

(C) Estudo do comportamento assintótico de U com $x \to +\infty$;

(D) Prova de que U minimiza J em $\Gamma^-(v)$.

(A) Construção de uma sequência minimizante para o funcional J.

Dados $k \in \mathbb{Z}$ e $W \in \Gamma^-(v)$, considere

$$\chi_k W(x,y) = W(x-k, y).$$

Afirmação 1.4 $\chi_k W \in \Gamma^-(v)$.

De fato, notemos que

$$
\begin{aligned}
\|P_j(\chi_k W) - v\|^2_{L^2(\Omega_1)} &= \int_0^1 \int_D |P_j(\chi_k W) - v|^2 dxdy \\
&= \int_0^1 \int_D |P_j(W(x-k,y)) - v|^2 dxdy \\
&= \int_0^1 \int_D |W(x-k+j,y) - v(x,y)|^2 dxdy \\
&= \int_0^1 \int_D |W(x-k+j,y) - v(x-k+j,y)|^2 dxdy.
\end{aligned}
$$

Por mudança de variável,

$$
\|P_j(\chi_k W) - v\|^2_{L^2(\Omega_1)} = \int_{j-k}^{j-k+1} \int_D |W(x,y) - v(x,y)|^2 dxdy.
$$

Como $W \in \Gamma^-(v)$ devemos ter

$$
\|P_j(\chi_k W) - v\|^2_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ j \to -\infty.
$$

De modo análogo, dado $k \in \mathbb{Z}$ mostra-se que existe $w \in M \setminus \{v\}$ tal que

$$
\|P_j(\chi_k W) - w\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \text{ quando } j \to +\infty.
$$

Portanto, $\chi_k W \in \Gamma^-(v)$ sempre que $k \in \mathbb{Z}$ e $W \in \Gamma^-(v)$, o que prova a afirmação.

Por outro lado, como G é 1-periódica em x segue por mudança de variável que

$$
a_i(\chi_k W) = a_i(W), \quad \forall i, k \in \mathbb{Z}.
$$

Desse modo,

$$
J(\chi_k W) = J(W), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.33}
$$

Sabemos que existe uma sequência $(W_m) \subset \Gamma^-(v)$ minimizante para o funcional J, isto é,

$$
J(W_m) \to \sigma \ \text{ quando } \ m \to \infty. \tag{1.34}
$$

De (1.33)-(1.34) a sequência $(\chi_{k(m)} W_m)$ também é minimizante para J para qualquer que seja a sequência $(k(m))_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$. De acordo com a Observação 1.2 podemos escolher um número real $\overline{\rho}$ tal que

$$
\overline{\rho} \in (0, \frac{\overline{\gamma}}{3}).
$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, escolhemos $k(m)$ com a seguinte propriedade

$$\|P_j(\chi_{k(m)} W_m) - v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \overline{\rho}, \quad \forall j < 0 \tag{1.35}$$

e

$$\|P_0(\chi_{k(m)} W_m) - v\|_{L^2(\Omega_1)} > \overline{\rho}. \tag{1.36}$$

Com efeito, pela definição do conjunto $\Gamma^-(v)$ segue que dado $m \in \mathbb{N}$ existe $k_0(m) > 0$ verificando

$$\|P_j(W_m) - v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \overline{\rho}, \quad \forall j < -k_0(m).$$

Posto isto, vamos fixar $k(m)$ sendo o menor número natural tal que

$$\|P_j(W_m) - v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \overline{\rho}, \quad \forall j < -k(m).$$

Então,

$$\|P_j(W_m) - v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \overline{\rho}, \quad \forall j < -k(m)$$

e

$$\|P_j(W_m) - v\|_{L^2(\Omega_1)} > \overline{\rho}, \quad \forall j = -k(m), -k(m)+1, \ldots, -1, 0.$$

Diante disto, considerando a sequência $(\chi_{k(m)} W_m(x,y))$ verifica-se que a mesma satisfaz as desigualdades (1.35) e (1.36). Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $k(m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Em resumo, vamos considerar uma sequência minimizante (W_m) para J satisfazendo

$$\|P_j W_m - v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \overline{\rho}, \quad \forall j < 0 \tag{1.37}$$

e

$$\|P_0 W_m - v\|_{L^2(\Omega_1)} > \overline{\rho}. \tag{1.38}$$

Por (1.34), existe $C > 0$ tal que

$$J(W_m) \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.39}$$

Afirmação 1.5 *Para qualquer $l \in \mathbb{N}$, temos:*

(i) $\|W_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} \leq \|v\|_{L^2([-l,0]\times D)} + \overline{\rho} l, \quad \forall m \in \mathbb{N}$;

(ii) Existe $\alpha > 0$ verificando

$$\|\nabla W_m\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} \leq C + lc_1 + l\alpha|D|, \quad \forall m \in \mathbb{N};$$

(iii) Existe $\beta > 0$ tal que

$$\|\nabla W_m\|^2_{L^2([0,l]\times D)} \leq C + lc_1 + l\beta|D|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(i) Notemos inicialmente que

$$\|W_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} \leq \sum_{i=0}^{l-1} \|W_m\|_{L^2([-l+i,-l+i+1]\times D)}. \tag{1.40}$$

Por (1.37),

$$\|W_m\|_{L^2([j,j+1]\times D)} \leq \overline{\rho} + \|v\|_{L^2(\Omega_1)}, \quad \forall j < 0. \tag{1.41}$$

De (1.41) e (1.40) segue que

$$\|W_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} \leq \sum_{i=0}^{l-1} \left(\overline{\rho} + \|v\|_{L^2(\Omega_1)}\right) = l\left(\overline{\rho} + \|v\|_{L^2(\Omega_1)}\right) = l\overline{\rho} + \|v\|_{L^2([-l,0]\times D)},$$

ou seja,

$$\|W_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} \leq \|v\|_{L^2([-l,0]\times D)} + \overline{\rho}l, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(ii) Dado $m \in \mathbb{N}$, de (1.39) vem que

$$\begin{aligned}
\int_{-l}^{0}\int_D (\mathcal{L}(W_m) - \mathcal{L}(v))\,dxdy &= \sum_{i=0}^{l-1}\left(\int_{-l+i}^{-l+i+1}\int_D (\mathcal{L}(W_m) - \mathcal{L}(v))\,dxdy\right) \\
&= \sum_{i=-l}^{-1} a_i(W_m) \\
&\leq J(W_m) \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{-l}^{0}\int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla W_m|^2 - G(x,y,W_m)\right) dxdy \leq C + \int_{-l}^{0}\int_D \mathcal{L}(v)dxdy.$$

Isto nos permite concluir que

$$\|\nabla W_m\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} \leq C + lc_1 + \int_{-l}^{0}\int_D G(x,y,W_m)dxdy.$$

Mas tendo em visto que $G(x,y,t)$ é periódica e contínua na variável t temos a existência de $\alpha > 0$ tal que $G(x,y,t) \leq \alpha$ para todo $(x,y,t) \in [-l,0] \times \overline{D} \times \mathbb{R}$. Portanto,

$$\|\nabla W_m\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} \leq C + lc_1 + l\alpha|D|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(iii) Este caso é análogo ao item (ii).

A Afirmação 1.5 mostra que para cada $l \in \mathbb{N}$ a sequência (W_m) é limitada em $H^1([-l,0] \times D)$.

Afirmação 1.6 *Dado $l \in \mathbb{N}$, existe $C_0 > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2([0,l]\times D)} \leq C_0 \left(\|u\|_{L^2([-l,0]\times D)} + \|\nabla u\|_{L^2([-l,l]\times D)} \right), \ \forall u \in H^1([-l,l]\times D).$$

Suponhamos por absurdo que não existe $C_0 > 0$ verificando a desigualdade acima. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m \in H^1([-l,l]\times D)$ tal que

$$\|u_m\|_{L^2([0,l]\times D)} > m \left(\|u_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} + \|\nabla u_m\|_{L^2([-l,l]\times D)} \right).$$

Vamos supor sem perda de generalidade que

$$\|u_m\|_{L^2([0,l]\times D)} = 1 \ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Diante disto,

$$\|u_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} + \|\nabla u_m\|_{L^2([-l,l]\times D)} < \frac{1}{m}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

e portanto,

$$\|u_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} \to 0 \ \text{ e } \ \|\nabla u_m\|_{L^2([-l,l]\times D)} \to 0.$$

Em particular,

$$\|u_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} \to 0, \ \|\nabla u_m\|_{L^2([-l,0]\times D)} \to 0 \ \text{ e } \ \|\nabla u_m\|_{L^2([0,l]\times D)} \to 0. \tag{1.42}$$

Por (1.42), (u_m) é limitada em $H^1([-l,0]\times D)$. Logo, existem $(u_{m_k}) \subset (u_m)$ e $u \in H^1([-l,0]\times D)$ tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1([-l,0]\times D).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev,

$$u_{m_k} \to u \ \text{ em } \ L^2([-l,0]\times D). \tag{1.43}$$

Desse modo,

$$\|u_{m_k}\|_{L^2([-l,0]\times D)} \to \|u\|_{L^2([-l,0]\times D)}. \tag{1.44}$$

Combinando (1.42) e (1.44) temos

$$u = 0 \ \text{ q.t.p em } \ [-l,0]\times D.$$

No entanto, como $\|u_m\|_{L^2([0,l]\times D)} = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ segue de (1.42) que a seguência (u_m) é limitada em $H^1([0,l] \times D)$. Por conseguinte, existem $(u_{m_{k_i}}) \subset (u_{m_k})$ e $w \in H^1([0,l] \times D)$ satisfazendo

$$u_{m_{k_i}} \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad H^1([0,l] \times D).$$

Pelas imersões compacta de Sobolev,

$$u_{m_{k_i}} \to w \quad \text{em} \quad L^2([0,l] \times D). \tag{1.45}$$

Ora, por (1.45),

$$\|w\|_{L^2([0,l]\times D)} = 1. \tag{1.46}$$

Ademais, pela convergência fraca e por (1.42) e (1.45),

$$\begin{aligned}
\|w\|^2_{H^1([0,l]\times D)} &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\|u_{m_{k_i}}\|^2_{L^2([0,l]\times D)} + \|\nabla u_{m_{k_i}}\|^2_{L^2([0,l]\times D)} \right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \|u_{m_{k_i}}\|^2_{L^2([0,l]\times D)} \\
&= \|w\|^2_{L^2([0,l]\times D)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|w\|^2_{L^2([0,l]\times D)} + \|\nabla w\|^2_{L^2([0,l]\times D)} \leq \|w\|^2_{L^2([0,l]\times D)},$$

acarretando em

$$\|\nabla w\|^2_{L^2([0,l]\times D)} = 0.$$

Logo, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$w = c \quad \text{q.t.p em} \quad [0,l] \times D.$$

De (1.46), $c \neq 0$. Por fim, notemos que (u_m) é limitada em $H^1([-l,l] \times D)$. Por isso, a menos de subsequência, existe $z \in H^1([-l,l] \times D)$ cumprindo

$$u_{m_{k_i}} \to z \quad \text{em} \quad L^2([-l,l] \times D). \tag{1.47}$$

Em vista de (1.43), (1.45) e (1.47),

$$z = \begin{cases} 0 & \text{em} \quad [-l,0] \times D \\ c & \text{em} \quad [0,l] \times D. \end{cases}$$

Desde que $w \in H^1([-l,l] \times D)$ concluímos $c = 0$, um absurdo. Portanto, a Afirmação 1.6 fica satisfeita para todo $u \in H^1([-l,l] \times D)$ tal que $\|u\|_{L^2([0,l]\times D)} = 1$. Porém, para $u \neq 0$ em $H^1([-l,l] \times D)$ vale a desigualdade

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_{L^2(\Omega_l)}} \right\|_{L^2(\Omega_l)} \leq C_0 \left(\left\| \frac{u}{\|u\|_{L^2(\Omega_l)}} \right\|_{L^2([-l,0]\times D)} + \left\| \nabla \left(\frac{u}{\|u\|_{L^2(\Omega_l)}} \right) \right\|_{L^2([-l,l]\times D)} \right),$$

implicando em

$$\|u\|_{L^2([0,l]\times D)} \leq C_0 \left(\|u\|_{L^2([-l,0]\times D)} + \|\nabla u\|_{L^2([-l,l]\times D)} \right).$$

Como naturalmente a desigualdade ocorre para $u = 0$ concluímos a demonstração da Afirmação 1.6.

Em conformidade com as Afirmações 1.5 e 1.6 deduzimos que a sequência (W_m) é limitada em $H^1([-l,l] \times D)$ sempre que $l \in \mathbb{N}$. Portanto, (W_m) é limitada em $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D)$. Logo, existe $U \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D)$ tal que

$$W_m \rightharpoonup U \quad \text{em} \quad H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D)$$

e

$$W_m \to U \quad \text{em} \quad L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D).$$

De (1.37) e (1.38) segue que

$$\|P_j U - v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \overline{\rho}, \quad \forall j < 0 \tag{1.48}$$

e

$$\|P_0 U - v\|_{L^2(\Omega_1)} > \overline{\rho}. \tag{1.49}$$

(B) Estudo do comportamento assintótico de U com $x \to -\infty$.

Em vista de (1.39) podemos estimar

$$\sum_{-l}^{l} a_k(W_m) \leq C, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Assim, como os funcionais a_k são fracamente semicontínuos inferiormente[4], obtemos

$$\sum_{-l}^{l} a_k(U) \leq C, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

[4]Veja o Teorema C.10.

Pela arbitrariedade de l,

$$J(U)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k(U)\leq C. \tag{1.50}$$

Sendo a série (1.50) convergente, devemos ter

$$a_k(U)\to 0 \;\text{ quando }\; |k|\to\infty. \tag{1.51}$$

Seja ρ um número real positivo cumprindo

$$\rho+\overline{\rho}<\frac{\overline{\gamma}}{2}. \tag{1.52}$$

De (1.51) existe $k_0\in\mathbb{N}$ verificando

$$a_k(U)<\frac{\alpha(\rho)}{2}, \quad \forall\, |k|>k_0, \tag{1.53}$$

onde $\alpha(\rho)>0$ é tomado de acordo com item (iii) da Proposição 1.8.

Afirmação 1.7 *Seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $|k|>k_0$. Então, $P_kU\in N_\rho(M)$.*

Com efeito, de (1.53)

$$a_k(U)=\int_k^{k+1}\int_D(\mathcal{L}(U)-\mathcal{L}(v))\,dxdy<\frac{\alpha(\rho)}{2}$$

acarretando em

$$\int_k^{k+1}\int_D\mathcal{L}(U)dxdy<\frac{\alpha(\rho)}{2}+\int_k^{k+1}\int_D\mathcal{L}(v)dxdy.$$

Assim,

$$I_1(P_kU)<\alpha(\rho)+c_1.$$

Portanto, pelo item (iii) da Proposição 1.8,

$$P_kU\in N_\rho(M), \;\; \forall\, |k|>k_0.$$

Isto conclui a afirmação.

Resulta da Afirmação 1.7 que para cada $|k|>k_0$ existe $u_k\in M$ tal que

$$\|P_kU-u_k\|_{H^1(\Omega_1)}\leq\rho. \tag{1.54}$$

Neste momento, consideremos

$$Q_kU=U|_{[k,k+2]\times D}.$$

Note que podemos identificar Q_kU sendo uma função em $H^1(\Omega_2)$. Para cada $|k| > k_0$ segue de (1.53) que

$$a_k(U) + a_{k+1}(U) < \alpha(\rho),$$

isto é,

$$I_2(Q_kU) < \alpha(\rho) + 2\int_{\Omega_1} \mathcal{L}(v)dxdy = \alpha(\rho) + 2c_1.$$

Pelo item (ii) da Observação 1.2, $Q_kU \in N_\rho^2(M)$ sempre que $|k| > k_0$. Assim,

$$\|Q_kU - u\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \rho, \quad \forall |k| > k_0 \ \text{ e } \ \forall u \in M,$$

onde M é interpretado como um subconjunto de E_2. Portanto, para cada $|k| > k_0$ existe $\overline{u}_k \in M$ tal que

$$\|Q_kU - \overline{u}_k\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \rho. \tag{1.55}$$

Além disso, verifica-se sem dificuldades que

$$\|Q_kU - \overline{u}_k\|^2_{H^1(\Omega_2)} = \|P_kU - \overline{u}_k\|^2_{H^1(\Omega_1)} + \|P_{k+1}U - \overline{u}_k\|^2_{H^1(\Omega_1)}. \tag{1.56}$$

Por (1.54)-(1.56),

$$\|u_k - \overline{u}_k\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \|P_kU - u_k\|_{H^1(\Omega_1)} + \|P_kU - \overline{u}_k\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \rho + \rho \leq 2\rho.$$

De modo similar, mostra-se que

$$\|u_{k+1} - \overline{u}_k\|_{H^1(\Omega_1)} \leq 2\rho.$$

Tomando $2\rho < \gamma$, onde γ é definido na prova do item (i) da Proposição 1.8, obtemos

$$u_k = u_{k+1} = \overline{u}_k, \quad \forall |k| > k_0. \tag{1.57}$$

Em vista de (1.48), (1.52) e (1.54),

$$\begin{aligned} k < -k_0 \Rightarrow \|u_k - v\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq \|u_k - P_kU\|_{L^2(\Omega_1)} + \|P_kU - v\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \rho + \overline{\rho} < \frac{\overline{\gamma}}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $v = u_k$ sempre que $k < -k_0$. Portanto, de (1.54)

$$\|P_kU - v\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \rho. \tag{1.58}$$

Afirmação 1.8 $\|P_kU - v\|_{H^1(\Omega_1)} \to 0$ *quando* $k \to -\infty$.

Por (1.51),

$$\int_0^1 \int_D \mathcal{L}(P_k U) dxdy \to \int_0^1 \int_D \mathcal{L}(v) dxdy \quad \text{quando} \quad |k| \to +\infty,$$

ou seja,

$$I_1(P_k U) \to c_1 \quad \text{quando} \quad |k| \to -\infty.$$

O argumento contido na prova da Proposição 1.1 mostra que $(P_k U)$ é limitada em $H^1(\Omega_1)$. Assim, existe $\overline{U} \in H^1(\Omega_1)$ tal que, a menos de subsequência,

$$P_k U \rightharpoonup \overline{U} \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1) \quad \text{quando} \quad k \to -\infty.$$

Desde que o funcional I_1 é fracamente semicontínuo inferiormente deduzimos $I_1(\overline{U}) \leq c_1$, e portanto, da Proposição 1.2 tem-se $I_1(\overline{U}) = c_1$. De acordo com a Proposição 1.4, concluímos $\overline{U} \in M$. Por (1.58),

$$\|\overline{U} - v\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \|P_k U - v\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \rho < \overline{\gamma}, \quad \forall k < -k_0$$

Portanto, $\overline{U} = v$. Então, pelas imersões compactas de Sobolev

$$\|P_k U\|_{L^2(\Omega_1)} \to \|v\|_{L^2(\Omega_1)} \quad \text{quando} \quad k \to -\infty.$$

O raciocínio da demonstração da Proposição 1.8 mostra que

$$P_k U \to v \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1) \quad \text{quando} \quad k \to -\infty.$$

Isto conclui a afirmação.

(C) O estudo do comportamento assintótico de U com $x \to +\infty$.

De (1.54) e (1.57) existe $w \in M$ tal que

$$\|P_k U - w\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \rho, \quad \forall k > k_0. \tag{1.59}$$

A prova da Afirmação 1.7 mostra que

$$P_k U \to w \quad \text{quando} \quad k \to +\infty \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1).$$

Nosso objetivo é mostrar que $w \neq v$. Para conseguir tal efeito vamos supor por absurdo que $w = v$. Por outro lado, afirmamos que existem $k \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tais que

$$\|P_k W_m - u\|_{H^1(\Omega_1)} > \beta, \quad \forall u \in M, \tag{1.60}$$

com m suficientemente grande. De fato, caso contrário, dado $k \geq 0$ existe uma sequência de números naturais $(m_i(k))$ com $m_i(k) \to +\infty$ quando $i \to +\infty$ e $(v_{m_i(k)}) \subset M$ tais que

$$\|P_k W_{m_i(k)} - v_{m_i(k)}\|_{H^1(\Omega_1)} \to 0 \text{ quando } \ i \to +\infty. \tag{1.61}$$

Em vista de que (W_m) converge fraco para U em $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ segue que para cada $k \geq 0$ fixado a sequência $(P_k W_m)$ converge fraco para $P_k U$ em $H^1(\Omega_1)$. Pelas imersões compactas de Sobolev,

$$P_k W_m \to P_k U \ \text{ em } \ L^2(\Omega_1) \ \text{ quando } \ m \to +\infty. \tag{1.62}$$

Por conseguinte, a sequência $(P_k W_m)$ é de Cauchy em $L^2(\Omega_1)$. Como

$$\begin{aligned}\|v_{m_i(k)} - v_{m_j(k)}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|P_k W_{m_i(k)} - v_{m_i(k)}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|P_k W_{m_j(k)} - P_k W_{m_i(k)}\|_{L^2(\Omega_1)} \\ + \|P_k W_{m_j(k)} - v_{m_j(k)}\|_{L^2(\Omega_1)}\end{aligned}$$

segue de (1.61) que

$$\|v_{m_i(k)} - v_{m_j(k)}\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ i, j \to +\infty.$$

Desse modo, pela item (i) da Observação 1.2 temos que existe apenas uma quantidade finita de funções em M que são possíveis candidatas para $v_{m_i(k)}$. Assim, sem perda de generalidade podemos supor que $v_{m_i(k)} = v_k$. Então, de (1.61) e (1.62) obtemos

$$P_k U = v_k, \quad \forall k \geq 0. \tag{1.63}$$

Por (1.52), (1.59), (1.63) e do item (i) da Observação 1.2,

$$v_k = w = P_k U, \quad \forall k > k_0. \tag{1.64}$$

Por outro lado, como $v_k \in M$ deduzimos que

$$v_k(0, y) = v_k(1, y) = v_{k+1}(0, y), \quad \forall k \geq 0.$$

De fato, da igualdade (1.63)

$$v_k(0, y) = v_k(1, y) = P_k U(1, y) = U(1 + k, y) = P_{k+1} U(0, y) = v_{k+1}(0, y).$$

Pelo Corolário 1.3, v_k é solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = g(x, y, w), & \textit{em} \ \ \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu}(x, y) = 0, & \textit{sobre} \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Diante disto, para cada $k \geq 0$ definimos

$$z_k = v_k - v_{k+1}.$$

Verifica-se que z_k é solução clássica para o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta z_k = g(x,y,v_k) - g(x,y,v_{k+1}), \quad em \;\; \Omega \\ z_k(0,y) = z_k(1,y) = 0, \quad com \;\; y \in D \\ \dfrac{\partial z_k}{\partial \nu}(0,y) = 0, \quad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora, consideremos a função $\hat{z}_k$ definida no cilindro $\Omega = \mathbb{R} \times D$ da seguinte forma

$$\hat{z}_k(x,y) = \begin{cases} z_k(x,y), & \text{se} \quad (x,y) \in \Omega_1 \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) \notin \Omega_1. \end{cases}$$

Desse modo, afirmamos $\hat{z}_k$ é solução fraca da equação

$$-\Delta \hat{z}_k = b_k(x,y)\hat{z}_k \;\; \text{em} \;\; \Omega,$$

onde $b_k : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$b_k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x,y,v_k) - g(x,y,v_{k+1})}{v_k - v_{k+1}}, & \text{se} \quad v_k(x,y) \neq v_{k+1}(x,y) \\ g_{v_k}(x,y,v_k), & \text{se} \quad v_k(x,y) = v_{k+1}(x,y) \end{cases}$$

é contínua (veja a prova da Proposição 1.4). De fato, é suficiente mostrar que

$$\int_\Omega \nabla \hat{z}_k \nabla \varphi dxdy = \int_\Omega b_k(x,y)\hat{z}_k \varphi dxdy,$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ com *supt* $\varphi \subset [0,2] \times D$. Sendo assim, sejam

$$Q_1 = ([0,1] \times D) \cap supt\ \varphi \;\; \text{e} \;\; Q_2 = ((1,2] \times D) \cap supt\ \varphi.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \hat{z}_k \nabla \varphi dxdy &= \int_{Q_1} \nabla \hat{z}_k \nabla \varphi dxdy + \int_{Q_2} \nabla \hat{z}_k \nabla \varphi dxdy \\ &= \int_{Q_1} \nabla z_k \nabla \varphi dxdy \\ &= -\int_{Q_1} (\Delta z_k)\varphi dxdy + \int_{\partial Q_1} \frac{\partial z_k}{\partial \eta} \varphi ds \\ &= -\int_{Q_1} (\Delta z_k)\varphi dxdy \\ &= \int_{Q_1} b_k(x,y)\hat{z}_k \varphi dxdy \\ &= \int_\Omega b_k(x,y)\hat{z}_k \varphi dxdy. \end{aligned}$$

Pelo Princípio da Continuação Única, $\hat{z}_k = 0$ em Ω e, portanto, $z_k = 0$ em Ω_1. Consequentemente,

$$v_k = v_{k+1}, \quad \forall k \geq 0. \tag{1.65}$$

Por (1.64) e (1.65),

$$v_k = w, \quad \forall k \geq 0.$$

Em particular,

$$v_0 = w = P_0 U.$$

Porém, como estamos supondo que $v = w$ temos

$$P_0 U = v.$$

No entanto, de (1.49)

$$P_0 U \neq v,$$

um absurdo. Portanto, existem $k \geq 0$ e $\beta \geq 0$ verificando a desigualdade (1.60). Entretanto, tomando β suficientemente pequeno, se necessário, segue de (1.60) e do item (iii) da Proposição 1.8 que existe $\alpha(\beta) > 0$ cumprindo

$$I_1(P_k W_m) \geq c_1 + \alpha(\beta),$$

para m suficientemente grande, ou seja,

$$a_k(W_m) \geq \alpha(\beta) \tag{1.66}$$

sempre que m for suficientemente grande. De outra forma, como $J(W_m) \to \sigma$ quando $m \to \infty$, então para m suficientemente grande obtemos

$$J(W_m) \leq \sigma + \frac{1}{3}\alpha(\beta). \tag{1.67}$$

No que segue fixamos

$$\delta \in \left(0, \frac{\overline{\gamma}}{2}\right) \tag{1.68}$$

de modo que

$$\max_{u \in \overline{B_{3\delta}}(w)} \int_{\Omega_1} (\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(w))\, dxdy \leq \frac{\alpha(\beta)}{3}. \tag{1.69}$$

Tomando $k \geq 0$ satisfazendo (1.60), temos que existe um número natural $\overline{k} = \overline{k}(\delta) > k$ tal que

$$k \geq \overline{k} \Rightarrow \|P_k U - w\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \frac{\delta}{4}, \tag{1.70}$$

pois $P_k U \to w$ em $H^1(\Omega_1)$ quando $k \to +\infty$.

Afirmação 1.9 *Existe um número natural $m = m(\delta)$ suficientemente grande tal que para algum $k = k(m) \geq \overline{k}$ tem-se*

$$\|P_k W_m - w\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \delta. \tag{1.71}$$

De fato, caso contrário, dado $k \geq \overline{k}$ e m suficientemente grande teríamos

$$\|P_k W_m - w\|_{H^1(\Omega_1)} > \delta. \tag{1.72}$$

Ora, para $k \geq \overline{k}$ segue de (1.70) que

$$\begin{aligned}\|P_k W_m - w\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq \|P_k W_m - P_k U\|_{L^2(\Omega_1)} + \|P_k U - w\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \|P_k W_m - P_k U\|_{L^2(\Omega_1)} + \frac{\delta}{4}.\end{aligned}$$

Mas como $P_k W_m \to P_k U$ em $L^2(\Omega_1)$ quando $m \to \infty$ segue que existe $\overline{m} = \overline{m}(k, \delta)$ verificando

$$k \geq \overline{k} \ \text{ e } \ m \geq \overline{m} \quad \Rightarrow \quad \|P_k W_m - w\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \frac{\delta}{2}. \tag{1.73}$$

No entanto, afirmamos que se $u \in M \setminus \{w\}$ então

$$\|P_k W_m - u\|_{H^1(\Omega_1)} \geq \frac{\delta}{2}, \quad \forall m \geq \overline{m}. \tag{1.74}$$

Com efeito, se fosse ao contrário teríamos por (1.73) que

$$\begin{aligned}\|u - w\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq \|P_k W_m - w\|_{L^2(\Omega_1)} + \|P_k W_m - u\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < \overline{\gamma}.\end{aligned}$$

Pelo item (i) da Observação 1.2, $u = w$, uma contradição. Consequentemente, de (1.72), (1.74) e do item (iii) da Proposição 1.8 temos que para cada $k \geq \overline{k}$ existe $\alpha(\frac{\delta}{2}) > 0$ satisfazendo

$$a_k(W_m) \geq \alpha\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad \forall m \geq \overline{m}. \tag{1.75}$$

Diante disto, tomemos $l = l(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$(l+1)\alpha\left(\frac{\delta}{2}\right) > \sigma + \frac{\alpha(\beta)}{3} \tag{1.76}$$

e

$$m \geq \max_{\overline{k} \leq k \leq \overline{k}+l} \overline{m}(k, \delta).$$

Por (1.75) e (1.76),

$$J(W_m) \geq \sum_{k=\overline{k}}^{\overline{k}+l} a_k(W_m) \geq \sum_{k=\overline{k}}^{\overline{k}+l} \alpha\left(\frac{\delta}{2}\right) = (l+1)\alpha\left(\frac{\delta}{2}\right) > \sigma + \frac{\alpha(\beta)}{3},$$

isto é,

$$J(W_m) > \sigma + \frac{\alpha(\beta)}{3},$$

o que contraria a desigualdade (1.67). Portanto, a Afirmação 1.9 é verdadeira.

Finalmente, vamos concluir a prova do item (C). Para isso, considerando os inteiros m e k dados de acordo com a Afirmação 1.9 podemos definir a função

$$U_m(x,y) = \begin{cases} v(x,y), & \text{se} \quad x \leq k,\ y \in D \\ ((k+1)-x)v(x,y) + (x-k)W_m(x,y), & \text{se} \quad k < x \leq k+1,\ y \in D \\ W_m(x,y), & \text{se} \quad k+1 < x,\ y \in D. \end{cases}$$

Então, pela definição de U_m fica claro que $U_m \in \Gamma^-(v)$. No entanto, como ainda estamos supondo que $v = w$ obtemos

$$\|P_k U_m - w\|_{H^1(\Omega_1)} = \|(k-x)(W_m - w)\|_{H^1(\Omega_1)}. \tag{1.77}$$

De fato, basta notar

$$\begin{aligned} P_k U_m(x,y) - w(x,y) &= ((k+1)-x)v(x,y) + (x-k)W_m(x,y) - w(x,y) \\ &= ((k+1)-x)w(x,y) + (x-k)W_m(x,y) - w(x,y) \\ &= kw(x,y) + w(x,y) - xw(x,y) + (x-k)W_m(x,y) - w(x,y) \\ &= (k-x)w(x,y) + (x-k)W_m(x,y) \\ &= (k-x)(W_m(x,y) - w(x,y)) \end{aligned}$$

implicando em

$$\|P_k U_m - w\|_{H^1(\Omega_1)} = \|(k-x)(W_m - w)\|_{H^1(\Omega_1)}.$$

Por outro lado, sendo $z = x - k$ temos

$$\begin{aligned} (k-x)(W_m(x,y) - w(x,y)) &= (k-x)W_m(x,y) - (k-x)w(x,y) \\ &= (k-(z+k))W_m(z+k,y) - (k-(z+k))w(z+k,y) \\ &= -zW_m(z+k,y) + zw(z+k,y) \\ &= -z(W_m(z+k) - w(z,y)). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\|(k-x)(W_m-w)\|_{H^1(\Omega_1)} = |z|\|P_kW_m-w\|_{H^1(\Omega_1)}. \tag{1.78}$$

Por conseguinte, como $|z| = |x-k| \leq 1$ segue da Afirmação 1.9 e de (1.77) e (1.78) que

$$\|P_kU_m-w\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \|P_kW_m-w\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \delta. \tag{1.79}$$

Por (1.69) e (1.79),

$$a_k(U_m) \leq \frac{\alpha(\beta)}{3}. \tag{1.80}$$

Agora, como $U_m = v$ para $x \leq k$ obtemos $a_p(U_m) = 0$ sempre que $p < k$. À vista disso,

$$J(U_m) = a_k(U_m) + \sum_{p=k+1}^{\infty} a_p(W_m). \tag{1.81}$$

Logo, de (1.66)-(1.67) e (1.80)-(1.81) temos

$$\begin{aligned} J(U_m) &\leq a_k(U_m) + J(W_m) - a_k(W_m) \\ &\leq \frac{\alpha(\beta)}{3} + \sigma + \frac{\alpha(\beta)}{3} - \alpha(\beta) \\ &\leq \sigma - \frac{\alpha(\beta)}{3} \\ &< \sigma, \end{aligned}$$

um absurdo. Portanto, $w \neq v$ com

$$\|P_kU-w\|_{H^1(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ qando } \ k \to +\infty.$$

Isto conclui a etapa (C).

(D) U minimiza J em $\Gamma^-(v)$.

Pelas etapas (A), (B) e (C), temos que $U \in \Gamma^-(v)$. De fato, por (B) que

$$P_kU \to v \ \text{ em } \ L^2(\Omega_1) \ \text{ quando } \ k \to -\infty$$

e por (C)

$$P_kU \to w \ \text{ em } \ L^2(\Omega_1) \ \text{ quando } \ k \to +\infty,$$

com $v \neq w$. Posto isto,

$$J(U) \geq \sigma. \tag{1.82}$$

No entanto, dados arbitrariamente $\epsilon > 0$, $l \in \mathbb{N}$ e m suficientemente grande obtemos

$$\sigma + \epsilon \geq J(W_m) \geq \sum_{k=-l}^{l} a_k(W_m).$$

Fazendo $m \to +\infty$ temos[5]

$$\sigma + \epsilon \geq \sum_{-l}^{l} a_k(U).$$

Desde que l é arbitrário,

$$\sigma + \epsilon \geq J(U).$$

Portanto,

$$\sigma \geq J(U). \tag{1.83}$$

Logo, por (1.82)-(1.83),

$$J(U) = \sigma.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Corolário 1.10 *U é uma solução clássica do tipo heteroclínica para o problema (P_1).*

Demonstração. Seja $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times D)$ com "suporte compacto" no sentido de que para $|x|$ suficientemente grande temos que $\varphi(x, y) = 0$. Dado $\delta \in \mathbb{R}$, então $U + \delta\varphi \in \Gamma^{-}(v)$. Com efeito, para $|x|$ suficientemente grande tem-se $U(x, y) = U(x, y) + \delta\varphi(x, y)$. Por conseguinte, $P_k(U + \delta\varphi) = P_k U$ sempre que $|x|$ for suficientemente grande. Logo,

$$P_k(U + \delta\varphi) \to v \text{ em } L^2(\Omega_1) \text{ quando } k \to -\infty$$

e existe $w \in M \setminus \{v\}$ tal que

$$P_k(U + \delta\varphi) \to w \text{ em } L^2(\Omega_1) \text{ quando } k \to +\infty.$$

Por outro lado, notemos também que para $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tem-se

$$\sum_{|k|>k_0} a_k(U + \delta\varphi) = \sum_{|k|>k_0} a_k(U).$$

[5] Note que somas finitas de fncionais fracamentes contínuos inferiormentes também o são.

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
J(U+t\varphi)-J(U) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(U+\delta\varphi) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(U) \\
&= \sum_{|k|>k_0} a_k(U+\delta\varphi) + \sum_{k=-k_0}^{k_0} a_k(U+\delta\varphi) - \sum_{|k|>k_0} a_k(U) - \sum_{k=-k_0}^{k_0} a_k(U) \\
&= \sum_{k=-k_0}^{k_0} a_k(U+\delta\varphi) - \sum_{k=-k_0}^{k_0} a_k(U) \\
&= \sum_{k=-k_0}^{k_0} \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(U+t\varphi)dxdy - \sum_{k=-k_0}^{k_0} \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(U)dxdy \\
&= \int_{-k_0}^{k_0} \int_D \left(\mathcal{L}(U+t\varphi) - \mathcal{L}(U)\right) dxdy.
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(U+t\varphi)-J(U)}{t} = \int_{-k_0}^{k_0} \int_D \left(\nabla u \nabla \varphi - g(x,y,U)\varphi\right) dxdy. \tag{1.84}$$

Agora, desde que φ é de "suporte compacto",

$$\int_{-\infty}^{-k_0} \int_D \left(\nabla u \nabla \varphi - g(x,y,U)\varphi\right) dxdy = \int_{k_0}^{+\infty} \int_D \left(\nabla u \nabla \varphi - g(x,y,U)\varphi\right) dxdy = 0. \tag{1.85}$$

Por (1.84) e (1.85),

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(U+t\varphi)-J(U)}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_D \left(\nabla u \nabla \varphi - g(x,y,U)\varphi\right) dxdy.$$

Todavia, denotando o lado direito da igualdade acima por $J'(U)\varphi$ temos então

$$J'(U)\varphi = \int_{\mathbb{R}\times D} \left(\nabla U \nabla \varphi - g(x,y,U)\varphi\right) dxdy.$$

Neste caso, U é uma solução fraca para o problema (P_1). Por um argumento encontrado em [11, Section 6], $U \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Logo U é uma solução clássica de (P_1). Por fim, seja $\|U\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = B$ e para cada $i \in \mathbb{Z}$ consideremos a função

$$U_i(x,y) = U(x+i,y), \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega_1}.$$

Então,

$$\|U_i\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_1})} \leq B, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Pelo Teorema C.11, temos a seguinte imersão compacta

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_1}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega_1}).$$

Segue daí que a sequência $(U_i)_{i\leq 0}$ possui uma subsequência $(U_{i_k})_{i_k\leq 0}$ convergente em $C^2(\overline{\Omega_1})$. Assim, existe $U_0 \in C(\overline{\Omega_1})$ tal que

$$U_{i_k} \to U_0 \ \text{ em } \ C^2(\overline{\Omega_1}) \ \text{ quando } \ i_k \to -\infty.$$

Em particular,

$$U_{i_k} \to U_0 \ \text{ em } \ \Omega_1 \ \text{ quando } \ i_k \to -\infty \ \text{ uniformemente } \ \text{em } \ y \in D.$$

De fato, como $(U_{i_k})_{i_k\leq 0}$ é limitada em $C^2(\overline{\Omega_1})$ segue que a mesma é limitada em $C^1(\overline{\Omega_1})$. Assim, existe $L > 0$ tal que

$$|U'(x,y)| \leq L, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega_1}.$$

Logo, pelo Teorema do valor Médio existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$|U_{i_k}(x_1,y) - U_{i_k}(x_2,y)| \leq |U'_{i_k}(\theta,y)||x_1 - x_2|, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall y \in D,$$

ou melhor,

$$|U_{i_k}(x_1,y) - U_{i_k}(x_2,y)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall y \in D,$$

mostrando que $(U_{i_k}(\cdot,y))_{i_k\leq 0}$ é equicontínua para todo $y \in D$. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá (veja Apêndice B),

$$U_{i_k} \to U_0 \ \text{ em } \ \Omega_1 \ \text{ quando } \ i_k \to -\infty \ \text{ uniformemente } \ \text{em } \ y \in D.$$

Por outro lado, como $U \in \Gamma^-(v)$ temos

$$U_{i_k} \to v \ \text{ em } \ L^2(\Omega_1) \ \text{ quando } \ i_k \to -\infty.$$

Pelo Teorema de Vainberg, existe $(U_{i_{k_j}})_{i_{k_j}\leq 0} \subset (U_{i_k})_{i_k\leq 0}$ tal que

$$U_{i_{k_j}}(x,y) \to v(x,y) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega_1 \ \text{ quando } \ i_{k_j} \to -\infty.$$

Por unicidade de limite, $U_0 = v$. Logo,

$$U_{i_k} \to v \ \text{ em } \ \Omega_1 \ \text{ quando } \ i_k \to -\infty \ \text{ uniformemente } \ \text{em } \ y \in D.$$

Afirmamos que

$$U_i \to v \ \text{ em } \ \Omega_1 \ \text{ quando } \ i \to -\infty \ \text{ uniformemente } \ \text{em } \ y \in D.$$

Com efeito, caso contrário existem $(U_{i_k})_{i_k\le 0} \subset (U_i)_{i\le 0}$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$\|U_{i_k} - v\|_{L^\infty(\Omega_1)} \ge \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ora, desde que a sequência (U_{i_k}) limitada segue do argumento anterior que existe $(U_{i_{k_j}})_{i_{k_j}\le 0} \subset (U_{i_k})_{i_k\le 0}$ tal que $U_{i_{k_j}}$ converge para v em Ω_1 uniformemente em $y \in D$, um absudo. Portanto,

$$U_i \to v \ \text{ em } \ \Omega_1 \ \text{ quando } \ i \to -\infty \ \text{ uniformemente } \text{ em } \ y \in D.$$

Logo,

$$\|U - v\|_{L^\infty(\Omega_i)} = \|U_i - v\|_{L^\infty(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ i \to -\infty.$$

De modo análogo, prova-se que existe $w \in M \setminus \{v\}$ tal que

$$\|U - w\|_{L^\infty(\Omega_i)} \to 0 \ \text{ quando } \ i \to +\infty.$$

À vista disso, U é uma solução do tipo heteroclínica para o problema (P_1). ■

Para finalizar esta seção faremos o seguinte comentário. Seja H o conjunto das soluções heteroclínicas do problema (P_1). Então, pelo Corolário 1.10 $H \neq \emptyset$. Afirmamos que $H \subset \Gamma^-(v)$, isto é, toda solução heteroclínica de (P_1) pertence ao conjunto $\Gamma^-(v)$. De fato, se $U \in H$ basta notar

$$\begin{aligned}
\|P_kU - v\|^2_{L^2(\Omega_1)} &= \int_0^1 \int_D |P_kU - v|^2 dxdy \\
&= \int_k^{k+1} \int_D |U - v|^2 dxdy \\
&\le |D| \|U(x+k, y) - v\|_{L^\infty(\Omega_1)}
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\|P_kU - v\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ k \to -\infty.$$

De modo semelhante, mostra-se que

$$\|P_kU - w\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \ \text{ quando } \ k \to +\infty,$$

para algum $w \in M \setminus \{v\}$. Isto conclui nossa afirmação. No entanto, é claro que existem funções de $\Gamma^-(v)$ que não pertencem ao conjunto das soluções heteroclínicas H.

1.2 Existência de solução para o caso de Dirichlet

Nesta seção, temos por objetivo mostrar a existência de solução heteroclínica para o problema de Dirichlet. A construção desta seção é, em certo sentido, um pouco mais sútil do que o caso de Neumann. Porém, a essência da construção é a mesma.

1.2.1 Solução periódica

Consideremos o problema elíptico semilinear com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & em \;\; \Omega \\ u(x,y) = 0, & sobre \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_2}$$

onde g satisfaz (g_1)-(g_3) e $(\mathcal{M})$. Para determinar a existência de solução heteroclínica para o problema (P_2) vamos considerar inicialmente o conjunto

$$\overline{E}_1 = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \in H^1(\Omega_1),\ u(x,y) = 0 \text{ sobre } (0,1) \times \partial D \text{ e } u \text{ é 1-periódica em } x\}.$$

Verifica-se que $\overline{E}_1$ é um espaço vetorial. Além disso, podemos identificar o mesmo como um subespaço de $H^1(\Omega_1)$.

O seguinte resultado mostra que vale uma desigualdade de Poincaré em $\overline{E}_1$. O mesmo é crucial para a discussão de existência de solução heteroclínica para o problema (P_2).

Proposição 1.11 *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega_1} |u|^2 dxdy \leq C \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dxdy, \quad \forall u \in \overline{E}_1.$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que não existe $C > 0$ verificando a desigualdade de acima. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in \overline{E}_1$ tal que

$$\int_{\Omega_1} |u_n|^2 dxdy > n \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dxdy. \tag{1.86}$$

Sem perda de generalidade podemos supor

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega_1)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.87}$$

Por conseguinte, de (1.86) e (1.87) obtemos

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dxdy < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dxdy \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.88}$$

Por (1.87) e (1.88), (u_n) é uma sequência limitada em $H^1(\Omega_1)$. Sendo assim, existe $u \in H^1(\Omega_1)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1) \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Pelas imersões de Sobolev,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega_1) \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.89}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\Omega_1)} &\leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \|u_n\|^2_{H^1(\Omega_1)} \\ &\leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega_1} |u_n|^2 dxdy + \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dxdy \right). \end{aligned}$$

Por (1.88) e (1.89),

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_1)} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega_1)},$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_1} |u|^2 dxdy + \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dxdy \leq \int_{\Omega_1} |u|^2 dxdy$$

implicando em

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dxdy = 0. \tag{1.90}$$

Por (1.88)-(1.90),

$$\|u\|_{H^1(\Omega_1)} \to \|u\|_{H^1(\Omega_1)} \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Daí, como $H^1(\Omega_1)$ é um espaço uniformemente convexo devemos ter

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1) \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.91}$$

Entretanto, desde que $H^1(\Omega_1)$ está imerso continuamente em $L^2(\partial\Omega_1)$ (veja Apêndice

C) existe $L > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\int_{(0,1)\times\partial D}|u_n|^2ds-\int_{(0,1)\times\partial D}|u|^2ds\right| &\leq \int_{(0,1)\times\partial D}\left||u_n|^2-|u|^2\right|ds\\ &\leq \int_{\partial\Omega_1}\left||u_n|^2-|u|^2\right|ds\\ &\leq \int_{\partial\Omega_1}|u_n-u|^2ds\\ &\leq \|u_n-u\|^2_{L^2(\partial\Omega_1)}\\ &\leq L\|u_n-u\|^2_{H^1(\Omega_1)}.\end{aligned}$$

Desse modo, por (1.91)

$$\int_{(0,1)\times\partial D}|u_n|^2ds \to \int_{(0,1)\times\partial D}|u|^2ds \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Portanto,

$$\int_{(0,1)\times\partial D}|u|^2ds = 0,$$

pois $(u_n) \subset \overline{E}_1$. Logo, por (1.90) devemos ter que u é constante em Ω_1, mas como $u = 0$ sobre $(0,1)\times\partial D$ então concluímos que $u = 0$ em Ω_1, um absurdo uma vez que de (1.86) temos $u \neq 0$ em Ω_1. Isto nós permite concluir que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_1}|u|^2dxdy \leq C\int_{\Omega_1}|\nabla u|^2dxdy, \quad \forall u \in \overline{E}_1,$$

finalizando a demonstração. ∎

De modo análogo a Proposição 1.11, mostra-se que se $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $u(x,y) = 0$ sobre $\mathbb{R}\times\partial D$ então para todo $l \in \mathbb{N}$ existe $C_l > 0$ independente de u tal que

$$\int_{-l}^{l}\int_D|u|^2dxdy \leq C_l\int_{-l}^{l}\int_D|\nabla u|^2dxdy. \tag{1.92}$$

Além disso, em $\overline{E}_1$ temos a seguinte norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega_1}|\nabla u|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A mesma é proveniente do produto interno

$$\langle u,v\rangle = \int_{\Omega_1}\nabla u\nabla v dxdy, \quad \forall u,v \in \overline{E}_1.$$

Afirmação 1.10 *$\overline{E}_1$ munido da norma $\|\cdot\|$ é um espaço de Hilbert.*

Inicialmente, notemos que $\overline{E}_1$ munido da norma usual de $H^1(\Omega_1)$ é fechado. De fato, se (u_m) é uma sequência em $\overline{E}_1$ tal que

$$u_m \to u \text{ em } (\overline{E}_1, \|\cdot\|_{H^1(\Omega_1)}) \text{ quando } m \to \infty,$$

então pela imersão contínua $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega_1)$ obtemos

$$u_m \to u \text{ em } L^2(\partial\Omega_1) \text{ quando } m \to \infty.$$

Por conseguinte,

$$u_m \to u \text{ em } L^2((0,1) \times \partial D) \text{ quando } m \to \infty.$$

Portanto,

$$u = 0 \quad \text{em} \quad (0,1) \times \partial D,$$

mostrando que $u \in \overline{E}_1$. Por outro lado, a prova da Afirmação 1.1 nós permite concluir que $\overline{E}_1$ munido da norma usual de $H^1(\Omega_1)$ é de Banach. Por fim, da desigualdade de Poincaré em $\overline{E}_1$ segue que a norma $\|\cdot\|$ é equivalente a norma usual de $H^1(\Omega_1)$. Portanto, $(\overline{E}_1, \|\cdot\|)$ é de Hilbert.

Com tudo, definimos o funcional $\overline{I}_1$ dado por

$$\overline{I}_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dxdy - \int_{\Omega_1} G(x,y,u)dxdy, \quad u \in \overline{E}_1.$$

Pelo Lema 1.1, $\overline{I}_1$ é de classe C^1 e para cada $u \in \overline{E}_1$ tem-se

$$\overline{I}_1'(u)v = \int_{\Omega_1} (\nabla u \nabla v - g(x,y,u)v)\, dxdy, \quad \forall v \in H^1(\Omega_1).$$

De acordo com a Seção 1.1 o funcional $\overline{I}_1$ é limitado inferiormente em $H^1(\Omega_1)$. Por isso, seja

$$d_1 = \inf_{u \in \overline{E}_1} \overline{I}_1.$$

Sendo $(u_m) \subset \overline{E}_1$ uma sequência minimizante para d_1 segue por (1.9) que existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|u_m\|^2 \leq L, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

mostrando que (u_m) é uma sequência limitada em $\overline{E}_1$. Pela prova da Proposição 1.1 existe $u \in \overline{E}_1$ tal que $\overline{I}_1(u) = d_1$. Então, seja

$$\overline{M} = \{u \in \overline{E}_1 \;:\; \overline{I}_1(u) = d_1\}.$$

Considerando

$$\overline{d}_1 \inf_{u\in H^1(\Omega_1)} \overline{I}_1(u)$$

então a demonstração da Proposição 1.2 nós diz que

$$\overline{d}_1 = d_1.$$

Proposição 1.12 *O problema (P_2) possui uma solução clássica periódica em x.*

Demonstração. Pelo que foi discutido anteriormente segue que existe $u \in \overline{M}$ tal que $\overline{I}_1(u) = d_1$. Assim, u é um ponto crítico para o funcional $\overline{I}_1$. Por conseguinte,

$$\int_0^1 \int_D \nabla u \nabla \varphi dxdy = \int_0^1 \int_D g(x,y,u)\varphi dxdy, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

Além disso, usando o argumento da prova do Corolário 1.3 mostra-se que para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\int_{-k}^k \int_D \nabla u \nabla \varphi dxdy = \int_{-k}^k \int_D g(x,y,u)\varphi dxdy, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([-k,k]\times D).$$

Desse modo, tomando qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ sabe-se que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que o suporte de φ está contido em $[-k,k]\times D$. Por isso, identificando φ como uma função de $C_0^\infty([-k,k]\times D)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}\times D} \nabla u \nabla \varphi dxdy = \int_{\mathbb{R}\times D} g(x,y,u)\varphi dxdy, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

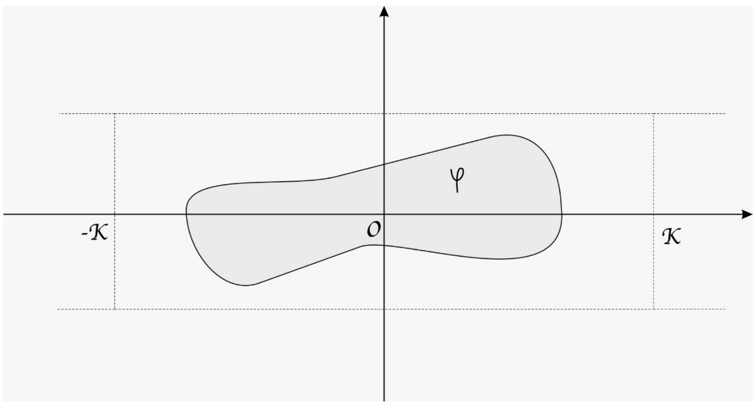

Figura 1.2: Ilustração do suporte da função φ na faixa.

Portanto, u é uma solução fraca para o problema (P_2). Por resultados de regularidade para u encontrados em [10, Chapter 9] e [19, Chapters 8-9] concluímos que u é uma

solução clássica para o problema (P_2). Além disso, u é 1-periódica em x pois $u \in \overline{E}_1$.
■

Observa-se que as Proposições 1.4, 1.5 e 1.6 também são válidas para o caso de Dirichlet.

1.2.2 Solução do tipo heteroclínica

Afim de provar a existência de solução heteroclínica para o caso de Dirichlet, à vista da Seção 1.1, o seguinte resultado variacional é crucial.

Proposição 1.13 *Suponhamos que g satisfaz $(g_1) - (g_3)$ e $(\mathcal{M})$. Então existe uma constante ρ_0 tal que para cada $0 < \rho < \rho_0$ tem-se*

i) $B_\rho(v) \cap B_\rho(w) = \emptyset, \quad \forall v, w \in \overline{M}$ *com* $v \neq w$;

ii) $\overline{I}_1(u) > d_1, \quad \forall u \in H^1(\Omega_1) \setminus \overline{M}$;

iii) *existe* $\alpha(\rho) > 0$ *verificando*

$$\overline{I}_1(u) \geq d_1 + \alpha(\rho) \quad \forall u \in H^1(\Omega_1) \setminus N_\rho(\overline{M}).$$

Demonstração. A prova é semelhante a demonstração da Proposição 1.8. ■

Corolário 1.14 *Temos:*

i) $\overline{\beta} = \inf \{\|v - w\|_{L^2(\Omega_1)} \mid v, w \in \overline{M} \text{ e } v \neq w\} > 0$;

ii) $\overline{I}_k(u) \geq kd_1 + \alpha(\rho), \quad \forall u \in H^1(\Omega_k) \setminus N_\rho^k(\overline{M})$, *onde* $N_\rho^k(\overline{M})$ *denota a vizinhança de* $\overline{M}$ *de raio* $\rho > 0$ *em* $H^1(\Omega_k)$ *e*

$$\overline{I}_k(u) = \int_0^k \int_D \mathcal{L}(u) dx dy.$$

Demonstração. É análoga a prova da Proposição 1.13. ■

Dado $v \in M$ definimos o conjunto

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^-(v) = \{U \in {H^1}_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times D) | u(x,y) = 0 \text{ sobre } \mathbb{R} \times \partial D, \ \|P_k U - v\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \\ \text{quando } k \to -\infty \text{ e existe } w \in \overline{M} \setminus \{v\} \text{ tal que} \\ \|P_k U - w\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \text{ quando } k \to +\infty\}. \end{aligned}$$

Verifica-se que $\overline{\Gamma}^-(v) \neq \emptyset$. Dados $k \in \mathbb{Z}$ e $U \in \overline{\Gamma}^-(v)$ definimos

$$a_k(U) = \int_k^{k+1} \int_D (\mathcal{L}(U) - \mathcal{L}(v)) \, dx dy.$$

Conforme a demonstração do Lema 1.2 verifica-se que

$$a_k(U) \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ \forall U \in \Gamma^-(v)$$

e

$$a_k(U) = 0 \ \text{ se e somente se } \ P_k U \in \overline{M}.$$

Definimos também o funcional $\overline{J} : \overline{\Gamma}^-(v) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por

$$\overline{J}(U) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(U).$$

Seja

$$\overline{\sigma} = \inf_{U \in \overline{\Gamma}^-(v)} \overline{J}(U).$$

Teorema 1.15 *Seja a função g satisfazendo $(g_1) - (g_3)$ e $(\mathcal{M})$. Então, para cada $v \in \overline{M}$, existe $U \in \overline{\Gamma}^-(v)$ tal que $\overline{J}(U) = \overline{\sigma}$.*

Demonstração. Repetindo os argumentos da demonstração do Teorema 1.9 vamos encontrar uma sequência $(W_m) \subset \overline{\Gamma}^-(v)$ minimizante para $\overline{J}$ com

$$\|P_j W_m - v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \overline{\rho}, \quad \forall j < 0$$

e

$$\|P_0 W_m - v\|_{L^2(\Omega_1)} > \overline{\rho},$$

em que $\overline{\rho} \in (0, \frac{\overline{\beta}}{3})$. Ainda em conformidade com a prova do Teorema 1.9 segue que existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla W_m\|_{L^2([-l,l]\times D)} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Pela desigualdade de Poincaré em (1.92) temos

$$\|W_m\|_{L^2([-l,l]\times D)} \leq C_l, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a sequência (W_m) é limitada em $H^1([-l,l] \times D)$ para todo $l \in \mathbb{N}$ e, por conseguinte, (W_m) é limitada em $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Logo, existe $U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$W_m \rightharpoonup U \ \text{ em } \ H^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

e

$$W_m \to U \ \text{ em } \ L^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

O compartamento assintótico de U com $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$ são obtidos de modo análogo as etapas (B) e (C) do Teorema 1.9. Pela etapa (D) deduz-se $\overline{J}(U) = \overline{\sigma}$. ■

Corolário 1.16 *U é uma solução clássica do tipo heteroclínica para o problema (P_2).*

Demonstração. Pela prova do Corolário 1.10 podemos concluir

$$J'(U)\varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi - g(x,y,U)\varphi)\, dxdy, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Diante disto, temos que U é uma solução fraca para o problema (P_2). Por resultados de regularidade para U encontrados em [10, Chapter 9] e [19, Chapters 8-9] segue que $U \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. O argumento da prova do Corolário 1.10 mostra que U é uma solução do tipo heteroclínica para (P_2). ■

1.3 Alguns problemas relacionados

Nesta seção, mostraremos como os resultados das Seções 1.1 e 1.2 são transferidos, em certo sentido, para outras situações. Como as ideias são tão próximas aos resultados anteriores, a exposição aqui será breve.

A primeira variante envolve o problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & \textit{em} \ \ \Omega_0 \\ u(0,y) = \psi(y), & \textit{com} \ \ y \in D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, & \textit{sobre} \ \ \partial\Omega_0, \end{cases} \tag{P_3}$$

em que $\Omega_0 = (-\infty, 0] \times D$ é uma semifaixa infinita se $N = 2$ ou um semicilindro infinito se $N > 2$ e ψ é suave com

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}(y) = 0 \ \ \text{sobre} \ \ \partial D.$$

Desse modo, as condições de contorno são compatíveis. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$\Omega_{-k} = [-k, 0] \times D.$$

Consideremos o conjunto

$$\Gamma^- = \{U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega_0) : U|_{x=0} = \psi \text{ e existe } w \in M \text{ tal que } \\ \|P_k U - w\|_{H^1(\Omega_{-1})} \to 0 \text{ quando } k \to -\infty\},$$

onde M é o conjunto das soluções periódicas[6] do problema (P_3). Notemos que $\Gamma^- \neq \emptyset$. De fato, consideremos $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{\infty}(\Omega_0)$ com as seguintes propriedades:

[6] A construção deste conjunto é feita de modo análogo ao que se encontra na Seção 1.1.

1) $\varphi_1(0, y) = 0$ com $y \in D$;

2) $\varphi_1(x, y) \to 1$ quando $x \to -\infty$ uniformemente em $y \in D$;

3) $\varphi_2(0, y) = 1$ com $y \in D$;

4) $supt\varphi_2$ é compacto em Ω_0.

Com isso, para cada $w \in M$ definimos a função $\nu_w : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ por

$$\nu_w(x, y) = \varphi_1(x, y)w(x, y) + \varphi_2(x, y)\psi(y).$$

Baseando-se na prova da Afirmação 1.3 constatamos

$$P_k U \to \nu_w \ \text{ em } \ H^1(\Omega_{-1}) \ \text{ quando } \ k \to -\infty.$$

Portanto, fica justificado que $\eta_v \in \Gamma^-$.

Para cada $U \in \Gamma^-$ definimos o funcional

$$J_0(U) = \sum_{-\infty}^{0} a_k(U),$$

no qual

$$a_k(U) = \int_k^{k+1} \int_D (\mathcal{L}(U) - \mathcal{L}(v))\, dxdy,$$

com $v \in M$ fixado e $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq -1$. Como $a_k(U) \geq 0$ para todo $U \in \Gamma^-$ temos

$$J_0(U) \geq 0, \ \ \forall\, U \in \Gamma^-.$$

Por isso, seja

$$\sigma_0 = \inf_{U \in \Gamma^-} J_0(U).$$

Teorema 1.17 *Sejam $(g_1)-(g_3)$ satisfeitos. Então, existe $U \in \Gamma^-$ tal que $J_0(U) = \sigma_0$. Além disso, U é uma solução clássica para (P_3) e*

$$\|P_k U - w\|_{H^1(\Omega_{-1})} \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ k \to -\infty,$$

para algum $w \in M$.

Demonstração. Notemos inicialmente que sem perda de generalidade podemos supor que (W_m) é uma sequência minimizante para o funcional J_0, isto é,

$$J_0(W_m) \to \sigma_0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty, \tag{1.93}$$

satisfazendo

$$\|P_k W_m - w_m\|_{H^1(\Omega_{-1})} \to 0 \;\text{ quando }\; k \to -\infty, \tag{1.94}$$

sendo (w_m) uma sequência em M limitada em $H^1(\Omega_{-1})$. De fato, como $(W_m) \subset \Gamma$ segue que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $w_m \in M$ tal que

$$\|P_k W_m - w_m\|_{H^1(\Omega_{-1})} \to 0 \;\text{ quando }\; k \to -\infty.$$

Conforme a demonstração da Proposição 1.1 temos que existe uma sequência (k_m) de números inteiros tal que $(w_m + k_m) \subset M$ e é limitada em $H^1(\Omega_{-1})$. No entanto, verifica-se que $(W_m + k_m)$ está contido em Γ e é uma sequência minimizante para J_0. Portanto, as sequências $(w_m + k_m)$ e $(W_m + k_m)$ verificam (1.94).

Dado $l \in \mathbb{N}$ podemos usar uma desigualdade de Poincaré[7] para as funções $W_m - \psi$ e então obter uma constante $C > 0$ tal que[8]

$$\begin{aligned}
\|W_m\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} &= \|W_m - \psi + \psi\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} \\
&\leq \|W_m - \psi\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} + \|\psi\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} \\
&\leq C\|\nabla(W_m - \psi)\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} + \|\psi\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} \\
&\leq C\left(\|\psi\|^2_{H^1([-l,0]\times D)} + \|\nabla W_m\|^2_{L^2([-l,0]\times D)}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|W_m\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} \leq C\left(\|\psi\|^2_{H^1([-l,0]\times D)} + \|\nabla W_m\|^2_{L^2([-l,0]\times D)}\right). \tag{1.95}$$

Segundo a demonstração do Teorema 1.9 temos que existe uma constante C_1 (dependente de l) tal que

$$\|\nabla W_m\|^2_{L^2([-l,0]\times D)} \leq C_1, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.96}$$

Por (1.95) e (1.96), a sequência minimizante (W_m) é limitada em $H^1([-l,0] \times D)$. Desde que l é arbitrário, (W_m) é limitada em $H^1_{\text{loc}}(\Omega_0)$. Com isto, existe $U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega_0)$ tal que

$$W_m \rightharpoonup U \;\text{ em }\; H^1_{\text{loc}}(\Omega_0).$$

Por (1.93) $J(W_m)$ existe $C > 0$ satisfazendo

$$\sum_{-l}^{0} a_k(W_m) \leq C, \quad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

[7]A desigualdade segue de modo análogo ao que foi feito para as funções em $\overline{E}_1$

[8]Denotamos por C várias constantes.

Por conseguinte,

$$\sum_{-l}^{0} a_k(U) \leq C, \quad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

Pela arbitrariedade de l,

$$J_0(U) = \sum_{-\infty}^{0} a_k(U) \leq C. \tag{1.97}$$

Por outro lado, tomemos um número real positivo ρ tal que

$$\rho + \overline{\rho} < \frac{\overline{\beta}}{2},$$

onde[9] $\rho \in (0, \overline{\beta}/3)$ e

$$\overline{\beta} = \inf\{\|v - w\|_{L^2(\Omega_{-1})} : v, w \in M \quad \text{e} \quad v \neq w\} > 0.$$

Daí, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$a_k(U) < \frac{\alpha(\rho)}{2} \quad \text{para} \quad -k < -k_0, \tag{1.98}$$

no qual $\alpha(\rho) > 0$ é tomado de acordo com o item (iii) da Proposição 1.8 referente a este caso. Posto isto, $P_k U \in N_\rho(M)$ sempre que $-k < -k_0$. Logo, para cada $-k < -k_0$ existe $u_k \in M$ verificando

$$\|P_k U - u_k\|_{H^1(\Omega_{-1})} \leq \rho. \tag{1.99}$$

Para $k \leq -2$ definimos

$$Q_k U = U|_{[k,k+2]\times D}.$$

Então, para $k < -k_0$ existe $\overline{u}_k \in M$ tal que

$$\|Q_k U - \overline{u}_k\|_{H^1(\Omega_{-2})} \leq \rho. \tag{1.100}$$

Ademais, verifica-se

$$\|Q_k U - \overline{u}_k\|^2_{H^1(\Omega_{-2})} = \|P_k U - \overline{u}_k\|^2_{H^1(\Omega_{-1})} + \|P_{k+1} U - \overline{u}_k\|^2_{H^1(\Omega_{-1})}. \tag{1.101}$$

Por (1.99), (1.100) e (1.101),

$$\|u_k - \overline{u}_k\|_{H^1(\Omega_{-1})} \leq 2\rho \quad \text{e} \quad \|u_{k+1} - \overline{u}_k\|_{H^1(\Omega_{-1})} \leq 2\rho.$$

Daí, sendo $2\rho < \overline{\beta}$ obtemos

$$u_k = u_{k+1} = \overline{u}_k, \quad \forall -k < -k_0.$$

[9] Veja a demonstração da Proposição 1.8.

Entretanto, como (w_m) é limitada em $H^1(\Omega_{-1})$ temos que existe $w \in H^1(\Omega_{-1})$ tal que

$$w_m \rightharpoonup w \quad \text{quando} \quad m \to \infty.$$

Usando as ideias contidas na Seção 1.1 deduz-se que $w \in M$. Logo, como $P_kW_m \rightharpoonup U$ obtemos

$$\|P_kU - w\|_{H^1(\Omega_{-1})} \leq \liminf_{m\to\infty} \|P_kW_m - w_m\|_{H^1(\Omega_{-1})}$$

Aumentando k_0 se necessário atingimos

$$\|P_kU - w\|_{H^1(\Omega_{-1})} \leq \overline{\rho}, \quad \forall -k < -k_0$$

Por (1.94) e (1.99),

$$\begin{aligned} k < -k_0 \Rightarrow \|u_k - w\|_{L^2(\Omega_{-1})} &\leq \|u_k - P_kU\|_{L^2(\Omega_{-1})} + \|P_kU - w\|_{L^2(\Omega_{-1})} \\ &\leq \overline{\rho} + \rho < \frac{\overline{\beta}}{2} \end{aligned}$$

implicando em

$$w = u_k \quad \forall\, k < -k_0.$$

Portanto, de (1.99)

$$\|P_kU - w\|_{H^1(\Omega_{-1})} \leq \rho.$$

Diante disto, mostra-se que

$$\|P_kU - w\|_{L^2(\Omega_{-1})} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to -\infty.$$

O raciocínio da etapa (D) do Teorema 1.9 concede $J_0(U) = \sigma_0$. ■

Neste momento, estudaremos a existência de soluções heteroclínicas para mais duas classes de problemas elípticos com algumas variações em relação as hipóteses (g_1)-(g_3). Para enunciar o primeiro problema reexaminamos o que foi feito na Seção 1.1 mais abstratamente. Consideremos o problema (P_1). Suponhamos que a função g satisfaz $(g_1) - (g_2)$ e

(g_4) **(crescimento de Sobolev)** Existem constantes $A, B \geq 0$ e $p \in \left[1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ se $N \geq 3$ ou $p \in [1, +\infty)$ se $N = 2$ tais que

$$|g(x, y, t)| \leq A + B|t|^p, \quad \forall (x, y, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Sejam E_1 e I_1 definidos como na Subseção 1.1.1. Por (g_1) e (g_4) concluímos:

(i) I_1 leva limitado em limitado;

(ii) I_1 é fracamente semicontínuo inferiormente.

Seja

$$c_1 = \inf_{u \in E_1} I_1(u).$$

Notemos que c_1 existe em $\mathbb{R}$ pois para cada $u \in E_1$ a função $G(\cdot, y, u(\cdot, y)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e 1-periódica em $\mathbb{R}$ e, portanto, é limitada.

Observação 1.3 *Note que mediante as hipóteses (g_1), (g_2) e (g_4) temos que o funcional I_1 não é necessariamente limitada inferiormente em $H^1(\Omega_1)$.*

Assumimos que g cumpre as seguintes condições:

(g_5) $G(x, y, t) \leq 0$ e o conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} \mid G(x, y, t) = 0\}$ é finito de cardinalidade no mínimo 2;

(g_6) Existem $\beta > 0$ e $R \geq 0$ tais que

$$|G(x, y, t)| \geq \beta |t|^2, \quad \text{para} \quad |t| \geq R.$$

Agora, sim! Pela condição (g_5) temos que I_1 é necessariamente limitada inferiormente em $H^1(\Omega_1)$ com seu ínfimo maior ou igual do que 0. Portanto, $c_1 \geq 0$.

Observação 1.4 *Por (g_1) e (g_5) G possui máximas locais para $(x, y) \in \mathbb{R} \times D$ e $t \in F$. Portanto, $g(x, y, t) = 0$ em tais pontos.*

Assumimos a seguinte hipótese:

(a_1) Qualquer sequência minimizante para c_1 é limitada.

Observação 1.5 *Em geral, (a_1) não é verdade. Por exemplo, na Seção 1.1 empregamos a condição (g_3) para usar a simetria em $\mathbb{Z}$ e então obter a condição (a_1).*

Dado (a_1), então vale a Proposição 1.1 para o caso em que g satisfaz (g_1), (g_2) e (g_4)-(g_6). Assim, obtemos $M \neq \emptyset$, no qual

$$M = \{u \in H^1(\Omega_1) : I_1(u) = c_1\}.$$

Nessas condições, também valem as Proposições 1.2, 1.4 e 1.5 e o Corolário 1.3 para este caso. Consideremos também a seguinte condição:

(a_k) Qualquer sequência minimizante para c_k é limitada.

Aqui, c_k é definido de acordo com a Subseção 1.1.1. Neste caso, vale a Proposição 1.6. Suponhamos que g verifica a condição $(\mathcal{M})$ e a seguinte hipótese:

(b) A cardinalidade de M é pelo menos 2.

Por (b), tem-se a validade da Proposição 1.8. Por outro lado, para qualquer $v \in M$, conideremos $\Gamma^{-}(v)$, J e σ definidos de acordo com Subseção 1.1.2. Com tudo, o Teorema 1.9 e o Corolário 1.10 são válidos se assumimos que:

(c) Qualquer sequência minimizante para σ é limitada em $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Recapitulando, dados (g_1), (g_2) e (g_4)-(g_6) então existe um Teorema 1.9 e um Corolário 1.10 desde que (a_1), (a_k), (b), (c) e $(\mathcal{M})$ são satisfeitos.

Proposição 1.18 *Se g satisfaz $(g_1) - (g_2)$ e $(g_4) - (g_6)$, então (a_1), (a_k), (b), (c) e $(\mathcal{M})$ são satisfeitos.*

Demonstração. Por (g_1) e (g_5), $M = F$ e $c_1 = 0$. De fato, já sabemos que $c_1 \geq 0$. Por outro lado, se $t_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $G(x, y, t_0) = 0$, então definindo $u_0(x, y) := t_0$ tem-se que $u_0 \in E_1$ com $I_1(u_0) = 0$. Por conseguinte, $c_1 = 0$. Isto nós diz que $F \subset M$. Além disso, se $u \in M$, então é sabido que $I_1(u) = 0$. Posto isto,

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dxdy - \int_{\Omega_1} G(x, y, u)dxdy = 0.$$

Usando (g_1) e (g_5) obtemos $G(x, y, u) = 0$ e, assim, $u \in F$. Portanto, $M = F$. Logo, por (g_5) concluímos que (b) e $(\mathcal{M})$ são satisfeitos. Para concluir mostremos que (a_1) também é satisfeito. Com efeito, sendo (u_m) uma sequência minimizante para c_1 temos que existe $K > 0$ tal que

$$I_1(u_m) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} |\nabla u_m|^2 dxdy - \int_{\Omega_1} G(x, y, u_m)dxdy \leq K, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.102}$$

Por (g_5),

$$\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega_1)} \leq 2K, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

No entanto, pelas hipóteses (g_5), (g_6) e por (2.11) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |u_m|^2 dxdy &= \int_{\{(x,y);|u_m|\leq R\}} |u_m|^2 dxdy + \int_{\{(x,y);|u_m|>R\}} |u_m|^2 dxdy \\ &\leq R^2|\Omega_1| + \beta^{-1}\int_{\{(x,y);|u_m|>R\}} |G(x,y,u_m)|dxdy \\ &\leq R^2|\Omega_1| - \beta^{-1}\int_{\{(x,y);|u_m|>R\}} G(x,y,u_m)dxdy \\ &\leq R^2|\Omega_1| + \beta^{-1}K,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_1} |u_m|^2 dxdy \leq R^2|\Omega_1| + \beta^{-1}K, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, (u_m) é limitada em $H^1(\Omega_1)$. De modo similar, mostra-se que (a_k) é válido. Por fim, para a validade de (c) tomemos uma sequência minimizante (W_m) para σ. Daí, segue da definição do funcional J que para cada $l \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_{-l}^{l}\int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u_m|^2 - G(x,y,u_m)\right) dxdy \leq C + lc_1,$$

para alguma constante $C > 0$. Pela validade de (a_k) concluímos que (c) é satisfeito. Isto completa a prova. ■

Aplicando a construção da Proposição 1.18 temos, a menos de detalhes, os seguintes teoremas.

Teorema 1.19 *Supondo que g satisfaz (g_1), (g_2) e $(g_4) - (g_6)$ então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & em \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, & sobre \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma solução clássica heteroclínica.

Teorema 1.20 *Supondo que g satisfaz (g_1), (g_2) e $(g_4) - (g_6)$ então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & em \;\; \Omega \\ u(x,y) = 0, & sobre \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma solução clássica heteroclínica.

Para concluir esta seção, vamos considerar uma outra classe de funções g para determinar a existência de solução heteroclínica para um problema de Dirichlet. Para este tipo de problema, já sabemos que vale a desigualdade de Poincaré, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)}, \quad \forall u \in \overline{E}_1, \tag{1.103}$$

onde $\overline{E}_1$ é definido na Seção 1.2. Além disso, daqui em diante vamos considerar toda a notação da mesma seção.

Suponhamos que g é uma função que satisfaz (g_1), (g_2) e

(g_7) Existe $K > 0$ tal que

$$|g(x, y, t)| \leq K, \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \overline{D} \times \mathbb{R};$$

(g_8) $g(x, y, 0) = 0$;

(g_9) Existe $\varphi \in \overline{E}_1$ tal que $\overline{I}_1(\varphi) < 0$;

(g_{10}) $g(x, y, t) = -g(x, y, -t)$ para todo $(x, y, t) \in \mathbb{R} \times \overline{D} \times \mathbb{R}$.

Observação 1.6 *Segundo [29], o estudo dessa classe de funções foi motivada pelo trabalho de Kirchgässner [21], que considerou um problema que surge na Teoria das Ondas de Água.*

Por (g_7), (g_4) é verificada. Por (1.103), qualquer sequência minimizante para d_1 é limitada. Assim, (a_1) é satisfeita e, similarmente, as condições (a_k) e (c) também são satisfeitas. Observamos também que de (g_9) obtemos $I_1(0) = 0 > d_1$. Mediante (g_{10}), se $v \in \overline{M}$ então

$$-v \in \overline{M} \quad \text{e} \quad v \neq -v.$$

De fato, via o Teorema de Mudança de Variável temos

$$\begin{aligned}
\overline{I}_1(-v) &= \int_0^1 \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla(-v)|^2 - G(x,y,-v) \right) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_D \frac{1}{2} |\nabla(-v)|^2 dxdy - \int_0^1 \int_D \int_0^{-v} g(x,y,t) dtdxdy \\
&= \int_0^1 \int_D \frac{1}{2} |\nabla v|^2 dxdy - \int_0^1 \int_D \int_0^{-v} -g(x,y,-t) dtdxdy \\
&= \int_0^1 \int_D \frac{1}{2} |\nabla v|^2 dxdy - \int_0^1 \int_D \int_0^{v} g(x,y,t) dtdxdy \\
&= \int_0^1 \int_D \frac{1}{2} |\nabla v|^2 dxdy - \int_0^1 \int_D G(x,y,v) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - G(x,y,v) \right) dxdy \\
&= \overline{I}_1(v).
\end{aligned}$$

Ademais, se decorresse $v \in \overline{M}$ com $v = -v$ teríamos $v = 0$ e, portanto, $\overline{I}_1(v) = 0$, um absurdo pois $d_1 < 0$. À vista disso, $-v \in \overline{M}$ e $v \neq -v$. Logo, (b) é satisfeito. Em geral, $(\mathcal{M})$ não é satisfeito. Porém, assim como foi feito na Subseção 1.1.2 podemos considerar uma nova classe de função para a qual $(\mathcal{M})$ se obtém.

Para um exemplo de uma classe de funções que satisfazem (g_1), (g_2) e (g_7)-(g_{10}), consideremos

$$g(x,y,t) = \lambda a(y)t - h(x,y,t,\lambda)t,$$

no qual $\lambda > \lambda_1$, com λ_1 o primeiro autovalor[10] do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(y) u, \quad em \quad \Omega_1 \\ u(x,y) = 0, \quad sobre \quad (0,1) \times \partial D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, \quad sobre \quad \{0,1\} \times D, \end{cases}$$

$a(y) > 0$ em $\overline{D}$ e de classe C^1, h também de classe C^1, par e 1-periódica em x, $h(x,y,0) = 0$, $h(x,y,-t) = h(x,y,t)$ e existe $R > 0$ tal que

$$h(x,y,R) > \lambda a(y). \tag{1.104}$$

Além disso, $h(x,y,t,\lambda) = o(|t|)$ quando $|t| \to 0$ uniformemente em intervalos limitados que contém λ. Verifica-se facilmente que g satisfaz (g_1), (g_2), (g_8) e (g_{10}).

[10] Consulte [17, Capítulo 4] para um estudo sobre o primeiro autovalor.

Afirmação 1.11 *g verifica a condição (g_9).*

De fato, neste caso o funcional é dado por

$$\overline{I}_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dxdy - \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_1} a|u|^2 dxdy + \int_{\Omega_1} H(x,y,u,\lambda)dxdy,$$

em que

$$H(x,y,t,\lambda) = \int_0^t h(x,y,z,\lambda)dz.$$

Tomando φ uma autofunção associada a λ_1 e para $s > 0$ notemos

$$\begin{aligned}\overline{I}_1(s\varphi) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} |\nabla(s\varphi)|^2 dxdy - \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_1} a|s\varphi|^2 dxdy + \int_{\Omega_1} H(x,y,s\varphi,\lambda)dxdy\\ &= \frac{s^2}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\int_{\Omega_1} |\nabla\varphi|^2 dxdy - \int_{\Omega_1} H(x,y,s\varphi,\lambda)dxdy\\ &= s^2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\int_{\Omega_1} |\nabla\varphi|^2 dxdy - \int_{\Omega_1} \frac{H(x,y,s\varphi,\lambda)}{s^2}dxdy\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{I}_1(s\varphi) = s^2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\int_{\Omega_1} |\nabla\varphi|^2 dxdy - \int_{\Omega_1} \frac{H(x,y,s\varphi,\lambda)}{s^2}dxdy\right]. \tag{1.105}$$

Por outro lado, usando as hipóteses sobre a função h e o Teorema do Valor Médio sobre a função H obtemos a existência de um número $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\frac{H(x,y,s\varphi,\lambda)}{s^2}\right| &= \left|\frac{H(x,y,s\varphi,\lambda) - H(x,y,0,\lambda)}{s^2}\right|\\ &= \left|\frac{h(x,y,\theta s\varphi,\lambda)s\varphi}{s^2}\right|\\ &= \left|\frac{h(x,y,\theta s\varphi,\lambda)s\theta\varphi^2}{s\theta\varphi}\right|.\end{aligned}$$

Mas como $h(x,y,t,\lambda) = o(|t|)$ quando $|t| \to 0$ uniformemente em intervalos limitados que contém λ, então dado $\epsilon > 0$ tem-se

$$\left|\frac{h(x,y,\theta s\varphi,\lambda)s\theta\varphi^2}{s\theta\varphi}\right| \leq \epsilon\theta|\varphi|^2,$$

sempre que $s > 0$ é suficientemente pequeno. Por conseguinte,

$$\left|\frac{H(x,y,s\varphi,\lambda)}{s^2}\right| \leq \epsilon\theta|\varphi|. \tag{1.106}$$

Por (1.105) e (1.106),

$$\overline{I}_1(s\varphi) \leq s^2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\int_{\Omega_1} |\nabla\varphi|^2 dxdy + \epsilon\theta\int_{\Omega_1} |\varphi|dxdy\right].$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, se necessário, concluímos

$$\overline{I}_1(s\varphi) < 0$$

pois $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} < 0$. Portanto, vale a afirmação.

Em geral, (g_7) não é satisfeita. Porém, é possível obter uma função através de g que satisfaz (g_1), (g_2) e (g_7)-(g_{10}). Para obter tal função basta considerar

$$\hat{g}(x,y,t) = \begin{cases} g(x,y,R), & \text{se} \quad t < -R \\ g(x,y,t), & \text{se} \quad |t| \leq R \\ g(x,y,R), & \text{se} \quad t > R. \end{cases} \tag{1.107}$$

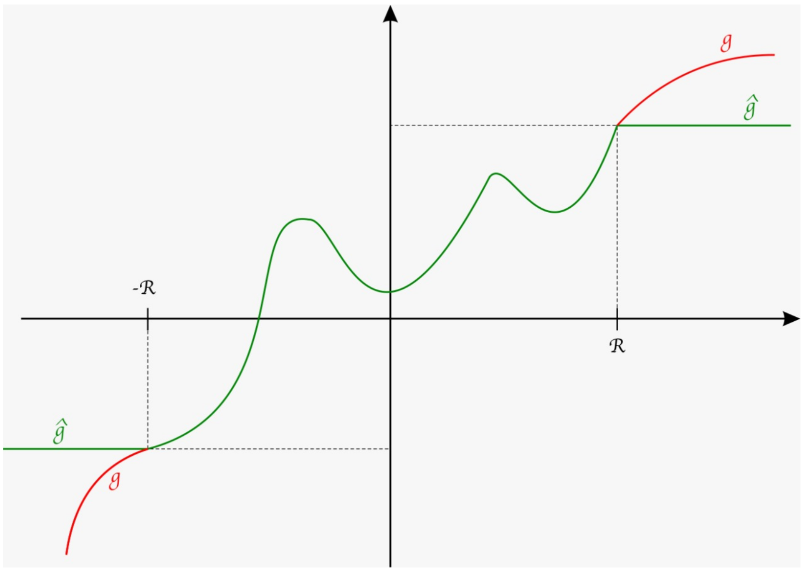

Figura 1.3: Representação geométrica de uma função $\hat{g}$ no plano.

De fato, sendo g uma função 1-periódica em x e y definida em um compacto temos que $g(x,y,R)$ é limitada. Portanto, deduzimos que $\hat{g}$ satisfaz (g_7). Feita as considerações acima, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.21 *A classe das funções g que satisfazem (g_1), (g_2), (g_7)-(g_{10}) e $(\mathcal{M})$ é não vazia. Ademais, o problema elíptico*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & em \quad \Omega \\ u(x,y) = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma solução heteroclínica, ou seja, existem funções $u, v \in \overline{M}$, $v \neq u$, e $U \in \overline{\Gamma}^-(v)$ soluções clássicas do problema acima com

$$U(x,y) \to v \quad quando \quad x \to -\infty \quad uniformemente \quad em \quad y \in D$$

e

$$U(x,y) \to u \quad quando \quad x \to +\infty \quad uniformemente \quad em \quad y \in D.$$

Seja g uma função satisfazendo (g_1), (g_2), (g_8)-(g_{10}). Considerando $\hat{g}$ como em (1.107) segue que $\hat{g}$ satisfaz (g_1), (g_2) e (g_7)-(g_{10}). Sendo assim, vamos considerar os seguintes problemas elípticos

Problema Inicial:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & em \quad \Omega \\ u(x,y) = 0, & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Problema Auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta u = \hat{g}(x,y,u), & em \quad \Omega \\ u(x,y) = 0, & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Através de uma solução heteroclínica do problema auxiliar podemos determinar uma solução também do tipo heteroclínica para o problema inicial. De fato, em concordância com o Teorema 1.21 desfrutamos da existência de uma solução heteroclínica U para o problema auxiliar. Alegamos que U satisfaz

$$\|U\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)} \leq R. \tag{1.108}$$

Com efeito, sejam $\hat{M}$ o conjunto das soluções periódicas minimizadoras do problema auxiliar e $v \in \hat{M}$ tal que

$$U(x,y) \to v \quad \text{quando} \quad x \to -\infty \quad \text{uniformemente em} \quad y \in D. \tag{1.109}$$

Então, por (g_9), $v \neq 0$. Desse modo, como v é uma solução clássica temos que a mesma possui máximo positivo ou mínimo negativo em Ω_1, digamos $(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{R}\times D$. Assumimos o primeiro caso, isto é, v detém máximo positivo no ponto $(\hat{x},\hat{y})$. Se $v(\hat{x},\hat{y}) \geq R$, de (1.104) e do Teorema B.3

$$0 \leq -\Delta v(\hat{x},\hat{y}) = \hat{g}(\hat{x},\hat{y},v) = g(\hat{x},\hat{y},R) = \lambda a(y)R - h(\hat{x},\hat{y},R,\lambda)R < 0,$$

um absurdo. Portanto, $v(\hat{x},\hat{y}) < R$. Por outro lado, supondo o segundo caso, se $v(\hat{x},\hat{y}) \leq -R$ então de modo similar obtemos

$$0 \geq -\Delta v(\hat{x},\hat{y}) = \hat{g}(\hat{x},\hat{y},v) = -g(\hat{x},\hat{y},-R) = \lambda - a(y)R + h(\hat{x},\hat{y},R,\lambda)R > 0,$$

uma contradição. Portanto, em todos os casos temos $|v| < R$ em Ω_1, ou seja,

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega_1)} < R. \tag{1.110}$$

Por conseguinte, v é solução periódica do problema inicial pois $\hat{g}(x,y,v) = g(x,y,v)$, isto é, $v \in \overline{M}$. Finalmente, por (1.109) e (1.110) existe $L > 0$ tal que

$$|U(x,y)| \leq R \quad \text{para} \quad |x| \geq L. \tag{1.111}$$

Agora, como $U \neq 0$ (pois se aproxima uniformemente de v) então temos que U possui um máximo positivo ou um mínimo negativo em $[-L,L] \times D$. Daí, usando o mesmo argumento acima concluímos

$$\|U\|_{L^\infty([-L,L]\times D)} \leq R. \tag{1.112}$$

Por (1.111) e (1.112),

$$\|U\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times D)} \leq R.$$

Portanto, U é uma solução heteroclínica para o problema inicial, pois neste caso

$$\hat{g}(x,y,U) = g(x,y,U).$$

Em súmula, portamos o seguinte resultado.

Teorema 1.22 *Se g satisfaz (g_1), (g_2), (g_8)-(g_{10}) e $(\mathcal{M})$ então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,y,u), & em \;\; \Omega \\ u(x,y) = 0, & sobre \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma solução heteroclínica.

Capítulo 2

Existência de solução heteroclínica para o caso não periódico

Neste capítulo, complementando o Capítulo 1, vamos estudar a existência de solução heteroclínica para duas classes de funções no caso em que a não linearidade do problema elíptico é não periódica. Especificamente, estudaremos a existência de solução do tipo heteroclínica para a equação o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + A(\epsilon x, y)V'(u) = 0, \quad em \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x, y) = 0, \quad sobre \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_4}$$

no qual assumiremos as seguintes condições para as funções $A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Condição em V:

(V_1) $V \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(V_2) $V(-1) = V(1) = 0$;

(V_3) $V(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Um exemplo de uma função V que satisfaz as condições $(V_1) - (V_3)$ é o potencial de Ginzburg-Landau $V(t) = (t^2 - 1)^2$.

Condição em A:

Ao longo deste trabalho, A é uma função de classe C^1 que pertence a uma das seguintes classes:

Classe 1:(A é assintótica no infinito a uma função periódica)

Existe uma função $A_p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sendo 1-periódica em x tal que

(A_1) $|A(x,y) - A_p(x,y)| \to 0$ quando $|(x,y)| \to +\infty$;

(A_2) $0 < A_0 = \inf\limits_{\overline{\Omega}} A(x,y) \leq A(x,y) < A_p(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

Classe 2:(Condição de Rabinowitz)

(A_3) $0 < \inf\limits_{\overline{\Omega}} A(x,y) \leq \sup\limits_{y \in \overline{D}} A(0,y) < \liminf\limits_{|(x,y)| \to +\infty} A(x,y) = A_\infty < +\infty$.

A condição (A_3) foi introduzida por Rabinowitz [28, Theorem 4.33] para o estudo da existência de soluções para equações do tipo

$$-\epsilon \Delta u + A(x)u = f(u), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $\epsilon > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento subcrítico e $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo

$$0 < \inf_{\mathbb{R}^N} A(x) < \liminf_{|x| \to +\infty} A(x).$$

Assim como Alves [4], chamaremos a condição (A_3) por **condição de Rabinowitz**.

Estamos interessados em existência de solução do tipo heteroclínica em x de 1 a -1 para o problema (P_4). Aqui, uma solução heteroclínica de 1 a -1 é uma função $U \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ verificando (P_4) com

$$U(x,y) \to 1 \quad \text{quando} \quad x \to -\infty \quad \text{uniformemente em} \quad y \in D$$

e

$$U(x,y) \to -1 \quad \text{quando} \quad x \to +\infty \quad \text{uniformemente em} \quad y \in D.$$

2.1 Resultados preliminares

Consideremos o problema (P_4) com $\epsilon = 1$, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u + A(x,y)V'(u) = 0, & em \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja

$$\Gamma = \{U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \|P_k U - 1\|_{L^2([0,1]\times D)} \to 0 \text{ quando } k \to -\infty \text{ e}$$
$$\|P_k U + 1\|_{L^2([0,1]\times D)} \to 0 \text{ quando } k \to +\infty\}.$$

Verifica-se que $\Gamma \neq \emptyset$. De fato, para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado podemos considerar a função

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x < j, \ y \in D \\ 2j + 1 - 2x, & \text{se } \ j \leq x \leq j+1, \ y \in D \\ -1, & \text{se } \ j+1 < x, \ y \in D. \end{cases}$$

Assim, pelas ideias contidas no Capítulo 1 concluímos $\varphi \in \Gamma$.

Daqui em diante, vamos fixar a seguinte notação

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + A(x,y)V(u).$$

Definimos o funcional $J : \Gamma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$J(U) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} I_k(U),$$

em que o funcional $I_k : H^1([k,k+1] \times D) \to \mathbb{R}$ é definido por

$$I_k(U) = \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(U) dx dy.$$

Nota-se que $I_k(U) \geq 0$ para todo $U \in \Gamma$ e $k \in \mathbb{Z}$. Com efeito, basta notar

$$\begin{aligned} I_k(U) &= \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}(U) dx dy \\ &= \int_k^{k+1} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + A(x,y)V(u) \right) dx dy \\ &\geq \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \int_D |\nabla u|^2 dx dy + \inf_{\Omega} A \int_k^{k+1} \int_D V(U) dx dy. \end{aligned}$$

Sendo A e V funções positivas,

$$I_k(U) \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ \forall U \in \Gamma.$$

Desse modo, devemos ter $J(U) \geq 0$ para todo $U \in \Gamma$. Portanto, existe o número real

$$\theta^* = \inf_{U \in \Gamma} J(U).$$

Por definição de ínfimo, existe uma sequência minimizante $(U_m) \subset \Gamma$ para J, isto é,

$$J(U_m) \to \theta^* \text{ quando } m \to \infty.$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que

$$-1 \leq U_m(x,y) \leq 1, \ \forall (x,y) \in \Omega.$$

De fato, para cada $m \in \mathbb{N}$ basta considerar a função

$$\tilde{U}_m(x,y) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad U_m(x,y) \leq -1 \\ U_m(x,y), & \text{se} \quad -1 \leq U_m(x,y) \leq 1 \\ 1, & \text{se} \quad U_m(x,y) \geq 1. \end{cases}$$

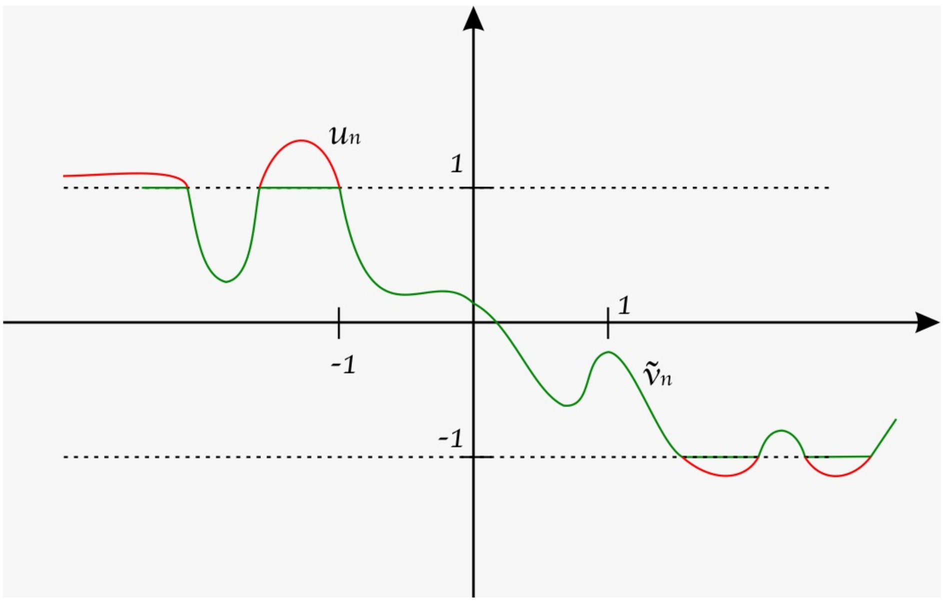

Figura 2.1: Uma ilustração da função $\tilde{U}_m$ na faixa $\Omega = \mathbb{R} \times (-1,1)$.

Por definição, $\tilde{U}_m \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. No entanto, dados $(x,y) \in \Omega$ e $m \in \mathbb{N}$ tem-se

$$|\tilde{U}_m(x,y) - 1| \leq |U_m(x,y) - 1| \quad \text{e} \quad |\tilde{U}_m(x,y) + 1| \leq |U_m(x,y) + 1|.$$

De fato, notemos que

1) se $\tilde{U}_m(x,y) = 1$ então $|\tilde{U}_m(x,y) - 1| = 0 \leq |U_m(x,y) - 1|$;

2) se $\tilde{U}_m(x,y) = -1$ então $|\tilde{U}_m(x,y) - 1| = 2 \leq |U_m(x,y) - 1|$;

3) se $\tilde{U}_m(x,y) = U_m(x,y)$ então $|\tilde{U}_m(x,y) - 1| = |U_m(x,y) - 1|$.

Em todos os casos,

$$|\tilde{U}_m(x,y) - 1| \leq |U_m(x,y) - 1|, \quad \forall (x,y) \in \Omega \ \text{ e } \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Para outra desigualdade, verifica-se de modo semelhante. Com tudo, concluímos que $(\tilde{U}_m) \subset \Gamma$. Consequentemente,

$$\theta^* \leq J(\tilde{U}_m), \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ademais, é claro que

$$|\nabla \tilde{U}_m| \leq |\nabla U_m|, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

e pela definição do potencial V,

$$V(\tilde{U}_m) \leq V(U_m), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$J(\tilde{U}_m) \leq J(U_m), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por conseguinte,

$$\theta^* \leq J(\tilde{U}_m) \leq J(U_m) = \theta^* + o_m(1).$$

Portanto, $(\tilde{U}_m)$ é uma sequência minimizante para J em Γ com

$$-1 \leq \tilde{U}_m(x,y) \leq 1, \forall (x,y) \in \Omega.$$

Em resumo, daqui em diante vamos considerar a sequência minimizante $(U_m) \subset \Gamma$ para J, isto é,

$$J(U_m) \to \theta^* \ \text{ quando } \ m \to \infty, \tag{2.1}$$

satisfazendo

$$-1 \leq U_m(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{2.2}$$

Afirmação 2.1 *Dados $l, k \in \mathbb{Z}$ com $k < l$ segue que existe $C > 0$ (dependente de k e l) tal que*

$$\|\nabla U_m\|_{L^2([k,l]\times D)} + \|U_m\|_{L^2([k,l]\times D)} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

De fato, por (2.1) existe $C_0 > 0$ de maneira que

$$J(U_m) \leq C_0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

À vista disso,

$$\sum_k^l I_i(U_m) \leq C_0, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\int_k^l \int_D |\nabla U_m|^2 dxdy + \int_k^l \int_D A(x,y)V(U_m)dxdy \leq C_0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Daí, sendo $A(x,y)V(U_m) \geq 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$ segue que

$$\frac{1}{2}\|\nabla U_m\|^2_{L^2([k,l]\times D)} \leq C_0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Entretanto, de (2.2)

$$\int_k^l \int_D |U_m|^2 dxdy \leq \int_k^l \int_D dxdy = (l-k)|D|, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\|U_m\|_{L^2([k,l]\times D)} \leq (l-k)|D|, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Portanto, por (2.3) e (2.4) existe $C > 0$ satisfazendo a Afirmação 2.1.

A partir de agora, para cada l e k inteiros distintos, com $k < l$, denotaremos o domínio $\Lambda_{k,l}$ por

$$\Lambda_{k,l} = [k,l] \times D.$$

Em particular, se $l = k+1$ denotaremos $\Lambda_k = [k, k+1] \times D$. Por exemplo,

$$\Lambda_0 = [0,1] \times D.$$

Posto isto, segue da Afirmação 2.1 que a sequência (U_m) é limitada em $H^1(\Lambda_{k,l})$ para quaisquer que sejam $k, l \in \mathbb{Z}$ com $k < l$. Dessa maneira, a menos de subsequência, existe $U \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que

$$U_m \rightharpoonup U \quad \text{em} \quad H^1(\Lambda_{k,l}),\ \forall k,l \in \mathbb{Z}, \quad k < l,$$

e

$$U_m \to U \quad \text{em} \quad L^2(\Lambda_{k,l}),\ \forall k,l \in \mathbb{Z}, \quad k < l.$$

Em particular,

$$U_m \rightharpoonup U \quad \text{em} \quad H^1(\Lambda_k),\ \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

$$U_m \to U \quad \text{em} \quad L^2(\Lambda_k),\ \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{2.6}$$

e

$$U_m(x,y) \to U(x,y) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega. \tag{2.7}$$

Dado $\epsilon > 0$ percorre de (2.1) que para m suficientemente grande atingimos

$$\sum_{-k}^{k} a_k(U_m) \leq J(U_m) \leq \theta^* + \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \to \infty$,

$$\sum_{-k}^{k} a_k(U) \leq \theta^* + \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pela arbitrariedade de k e ϵ concluímos

$$J(U) \leq \theta^*. \tag{2.8}$$

Além disso, de (2.2)

$$-1 \leq U(x,y) \leq 1 \ \text{ q.t.p em } \ \Omega. \tag{2.9}$$

2.2 A função A é assintótica no infinito a uma função periódica

Neste seção, vamos estudar a existência de solução heteroclínica, no caso em que $\epsilon = 1$ e a função A pertence a Classe 1, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + A(\epsilon x, y)V'(u) = 0, \quad em \ \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, \quad sobre \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Para isso, é necessário o estudo da seguinte Subseção 2.2.1 sobre a existência de solução do tipo heteroclínica para a equação diferencial

$$-\Delta u + A_p(x,y)V'(u) = 0 \ \text{ em } \ \Omega$$

munido da condição de fronteira

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0 \ \text{ sobre } \ \Omega.$$

2.2.1 O caso periódico

Inicialmente, lembramos que a função A_p é de classe C^1 e 1-periódica em x satisfazendo

(A_1) $|A(x,y) - A_p(x,y)| \to 0$ quando $|(x,y)| \to \infty$;

(A_2) $0 < A_0 = \inf\limits_{\overline{\Omega}} A(x,y) \leq A(x,y) < A_p(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

Consideremos o seguinte problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + A_p(x,y)V'(u) = 0, & em \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, & sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_5}$$

Afirmação 2.2 *O problema (P_5) possui uma solução heteroclínica.*

Sejam $R_1 > 1$ e $R > R_1$ a ser fixado. Definimos a função $\tilde{V} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{V}(t) = \begin{cases} V(t), & \text{se} \quad |t| \leq R_1 \\ \varphi(t), & \text{se} \quad R_1 \leq |t| \leq R \\ t^2, & \text{se} \quad |t| \geq R, \end{cases}$$

em que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave que conecta suavemente (em certo sentido) a função V na função t^2 em $R_1 \leq |t| \leq R$ de maneira que o potencial $\tilde{V}$ é de classe C^2.

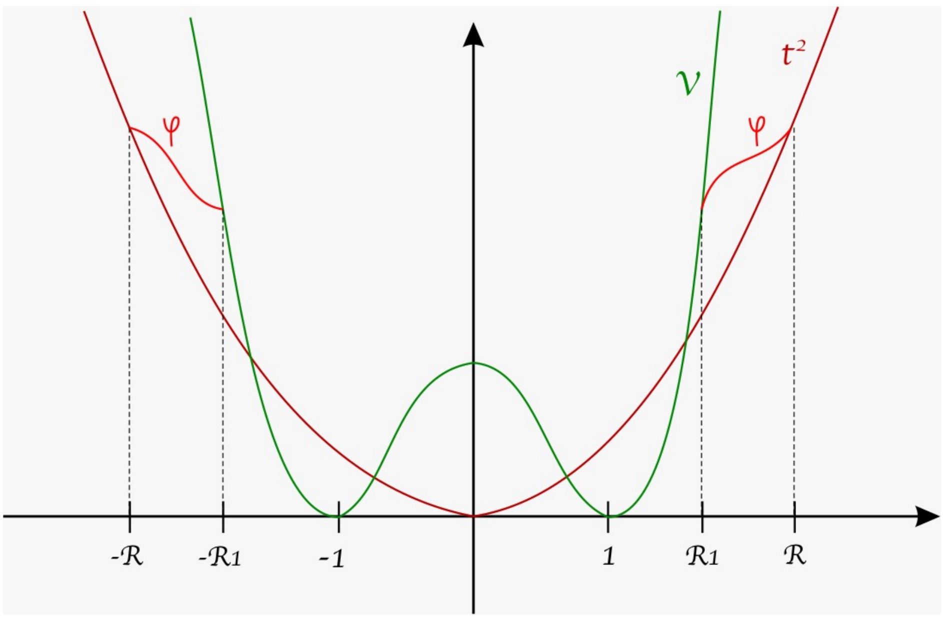

Figura 2.2: Uma ilustração do potencial $\tilde{V}$ no plano.

Diante disto, definimos a função $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y, t) = -A_p(x, y)\tilde{V}'(t).$$

Desse modo, é claro que g satisfaz as condições (g_1) e (g_2), isto é, g é de classe C^1 e 1-periódica em x. Vejamos também que g satisfaz (g_4)-(g_6) (veja a Seção 1.3):

1) g verifica (g_4);

Como A_p é 1-periódica e contínua em $x \in \mathbb{R}$ com $y \in D$ definido em um compacto, segue que existe $C_0 > 0$ tal que

$$|A_p(x, y)| \leq C_0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times D.$$

Além disso, como $\tilde{V}'$ também é contínua temos que existe $C_1 > 0$ verificando

$$|\tilde{V}'(t)| \leq C_1, \quad \forall t \in [-R, R].$$

Tomando $C = C_0 \cdot C_1$ obtemos

$$|g(x, y, t)| \leq C + C_0|t|^2, \quad \forall (x, y, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Portanto, g satisfaz o crescimento de Sobolev.

2) g verifica (g_5);

De fato, notemos primeiramente que a primitiva de g em t é dado por

$$G(x, y, t) = -A_p(x, y)\tilde{V}(t).$$

Daí, por $(V_1) - (V_3)$ e $(A_1) - (A_2)$,

$$G(x, y, t) \leq 0, \quad \forall\ (x, y, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Além disso, como $V(1) = V(-1) = 0$ e $\tilde{V}$ coincide com o potencial V no intervalo $[-1, 1]$ obtemos

$$\tilde{V}(1) = \tilde{V}(-1) = 0$$

implicando em

$$G(x, y, -1) = G(x, y, 1) = 0.$$

Portanto, de (V_3) o conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : G(x, y, t) = 0\}$ tem cardinalidade 2.

3) g verifica (g_6);

Com efeito, pela condição (A_2),

$$\begin{aligned} |G(x,y,t)| &= A_p(x,y,t)\tilde{V}(t) \\ &\geq A(x,y)\tilde{V}(t) \\ &\geq A_0\tilde{V}(t). \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$|G(x,y,t)| \geq A_0|t|^2, \quad \forall |t| \geq R,$$

mostrando que g satisfaz (g_6).

Mediante as observações anteriores, segue do Teorema 1.19 que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + A_p(x,y)\tilde{V}'(u) = 0, & em \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, & sobre \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma solução heteroclínica W^*. As ideias contidas na Seção 2.1 permite supor sem perde de generalidade que

$$-1 \leq W^*(x,y) \leq 1 \;\; \text{q.t.p em} \;\; \Omega.$$

Desse modo, pela definição do potencial $\tilde{V}$

$$V(W^*) = \tilde{V}(W^*).$$

Logo, W^* satisfaz

$$-\Delta W^* + A_p(x,y)V'(W^*) = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega.$$

Posto isto, W^* é uma solução heteroclínica para o problema (P_5). Além disso, W^* deve necessariamente conectar 1 e -1 pois neste caso $F = M = \{-1, 1\}$.

Vamos fixar algumas notações que serão fundamentais ao longo desse capítulo. Seja $J_p : \Gamma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional definido por

$$J_p(U) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_{k,p}(U),$$

em que $I_{k,p} : H^1(\Lambda_k) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$I_{k,p}(U) = \int_k^{k+1} \int_D \mathcal{L}_p(U)dxdy$$

e

$$\mathcal{L}_p(U) = \frac{1}{2}|\nabla U|^2 + A_p(x,y)V(U).$$

Afirmação 2.3 *Sendo* $\theta_p^* = \inf_{U\in\Gamma} J_p(U)$, *então* $\theta^* < \theta_p^*$.

De fato, notemos que $A < A_p$ em Ω e por construção $J_p(W^*) = \theta_p^*$.

$$\begin{aligned}
\theta^* \leq J(W^*) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} I_k(W^*) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_K^{k+1} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla W^*|^2 + A(x,y)V(W^*)\right) dxdy \\
&< \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_K^{k+1} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla W^*|^2 + A_p(x,y)V(W^*)\right) dxdy \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} I_{k,p}(W^*) = J_p(W^*) = \theta_p^*,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\theta^* < \theta_p^*.$$

2.2.2 O caso não periódico

Vamos assumir por um momento que a seguinte proposição é verdadeira.

Proposição 2.1 *Para* $\delta \in (0, \sqrt{|\Lambda_0|})$, *existe* $j_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|U - 1\|_{L^2(\Lambda_{-j})} \leq \delta \quad e \quad \|U + 1\|_{L^2(\Lambda_j)} \leq \delta, \quad \forall j \geq j_0,$$

no qual U *é dado de acordo com* (2.5) - (2.9).

A Proposição 2.1 é crucial para a obtenção de solução heteroclínica para o problema (P_4) no caso em que $\epsilon = 1$ e A pertence a Classe 1. Além disso, a demonstração da mesma apresenta ideias diferentes das quais são encontradas no Capítulo 1, como veremos mais adiante.

Teorema 2.2 *Assuma* (V_1)-(V_3), $\epsilon = 1$ *e que* A *pertence a Classe 1. Então, o problema* (P_4) *possui uma solução heteroclínica de 1 a -1.*

Demonstração. Inicialmente, observamos que (U_m) é uma sequência minimizante para J e que converge fraco (a menos de subsequência) para $U \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Então,

$$J(U) \leq \theta^*.$$

Pela definição do funcional J,

$$I_j(U) \to 0 \ \text{ quando } \ j \to \pm\infty,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|\nabla P_j U\|^2_{L^2(\Lambda_0)} + \int_0^1 \int_D A(x,y)V(P_jU)dxdy \to 0 \ \text{ quando } \ j \to \pm\infty. \tag{2.10}$$

Assim, como as funções A e V são positivas devemos ter

$$\|\nabla P_j U\|^2_{L^2(\Lambda_0)} \to 0 \ \text{ quando } \ j \to \pm\infty. \tag{2.11}$$

No entanto, por (2.9) segue que existe $C > 0$ tal que

$$\|P_j U\|_{L^2(\Lambda_0)} \leq C, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

Desse modo, por (2.10) e (2.11) concluímos que a sequência $(P_{-j}U)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\Lambda_0)$. Por isso, existem uma subsequência $(P_{-j_k}U)$ e $\hat{U} \in H^1(\Lambda_0)$ tais que

$$P_{-j_k}U \rightharpoonup \hat{U} \ \text{ em } \ H^1(\Lambda_0) \ \text{ quando } \ j_k \to +\infty,$$

$$P_{-j_k}U \to \hat{U} \ \text{ em } \ L^2(\Lambda_0) \ \text{ quando } \ j_k \to +\infty$$

e

$$P_{-j_k}U(x,y) \to \hat{U}(x,y) \ \text{ q.t.p. em } \ \Lambda_0 \ \text{ quando } \ j_k \to +\infty.$$

Ainda por (2.10),

$$\int_0^1 \int_D V(P_{-j_k}U)dxdy \to 0 \ \text{ quando } \ j_k \to +\infty.$$

De fato, basta notar que

$$\int_0^1 \int_D V(P_{-j_k}U)dxdy \leq \frac{1}{A_0}\int_0^1 \int_D A(x,y)V(P_{-j_k}U)dxdy$$

e

$$\int_0^1 \int_D A(x,y)V(P_{-j_k}U)dxdy \to 0 \ \text{ quando } \ j_k \to +\infty.$$

Consequentemente,

$$\int_0^1 \int_D V(\hat{U})dxdy = 0.$$

Portanto, $V(\hat{U}) = 0$ em Λ_0. Pelas condições (V_1)-(V_3),

$$\hat{U} = 1 \quad \text{ou} \quad \hat{U} = -1.$$

Por conseguinte,

$$P_{-j_k}U \to 1 \ \text{ ou } \ P_{-j_k}U \to -1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j_k \to +\infty.$$

Afirmação 2.4 *$P_{-j_k}U \to 1$ em $L^2(\Lambda_0)$ quando $j_k \to +\infty$.*

De fato, supondo por absurdo que $\hat{U} = -1$ temos

$$\|U-1\|^2_{L^2(\Lambda_{-j_k})} = \int_0^1 \int_D |P_{-j_k}U - 1|^2 dxdy \to 4|\Lambda_0|.$$

Logo, como $\delta < \sqrt{|\Lambda_0|}$ segue que para todo j_k suficientemente grande

$$\|U-1\|_{L^2(\Lambda_{-j_k})} > \delta$$

o que contraria a Proposição 2.1. Portanto,

$$P_{-j_k}U \to 1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j_k \to +\infty.$$

De modo análogo, verifica-se que toda subsequência de $(P_{-j}U)_{j\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para 1. Então,

$$P_{-j}U \to 1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j \to +\infty.$$

De modo semelhante, mostra-se

$$P_jU \to -1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j \to +\infty.$$

Com tudo, $U \in \Gamma$ e portanto $J(U) = \theta^*$. As ideias presentes na prova do Corolário 1.10 mostra que U é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + A(x,y)V'(u) = 0, & em \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, & sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Por [11, Theorem 3.1] tem-se $U \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ com

$$U(x,y) \to 1 \;\; \text{quando} \;\; x \longrightarrow -\infty \;\; \text{uniformemente em} \;\; y \in D$$

e

$$U(x,y) \to -1 \;\; \text{quando} \;\; x \longrightarrow +\infty \;\; \text{uniformemente em} \;\; y \in D.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Vamos agora demonstrar a Proposição 2.1.

Prova da Proposição 2.1.

De acordo com a demonstração do Teorema 2.2 mostra-se que existe uma subsequência (P_{j_k}) de (P_jU) tal que

$$P_{j_k}U \to 1 \;\; \text{ou} \;\; P_{j_k}U \to -1 \;\; \text{em} \;\; L^2(\Lambda_0) \;\; \text{quando} \;\; j_k \to +\infty.$$

Afirmação 2.5 *$P_{j_k}U \to -1$ em $L^2(\Lambda_0)$ quando $j_k \to +\infty$.*

Suponhamos por absurdo que a afirmação acima seja falsa. Assim,

$$P_{j_k} \to 1 \quad \text{em} \quad L^2(\Lambda_0) \quad \text{quando} \quad j_k \to +\infty. \tag{2.13}$$

Por outro lado, lembramos que a sequência $(U_m) \subset \Gamma$ é uma sequência minimizante para o funcional J. Usando este fato, vamos mostrar que existem uma subsequência (U_{m_s}) de (U_m), uma sequência (k_s) de números naturais e $i_* \in \mathbb{N}$ tal que $i_* < k_s$ para todo $s \in \mathbb{N}$, $k_s \to +\infty$ e

$$\|P_j U_{m_s} - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} < \delta \quad \text{e} \quad \|P_{k_s} U_{m_s} - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \geq \delta, \ \forall j \in [i_*, k_s - 1] \cap \mathbb{N}.$$

De fato, por (2.13) existe $i_* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|P_{j_n} U - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} < \delta, \quad \forall j_n \geq i_*. \tag{2.14}$$

Em particular, para $j_n = i_*$,

$$\|U - 1\|_{L^2([i_*, i_*+1])} < \delta.$$

Agora, como $U_m \to U$ em $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ segue que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que (por preservação de sinal)

$$\|U_{m_1} - 1\|_{L^2([i_*, i_*+1])} < \delta.$$

Desde que $U_{m_1} \in \Gamma$, vamos fixar $k_1 \in \mathbb{N}$ com $k_1 \geq i_* + 1$ sendo o primeiro número satisfazendo

$$\|U_{m_1} - 1\|_{L^2([j,j+1]\times D)} < \delta \quad \text{e} \quad \|U_{m_1} - 1\|_{L^2([k_1,k_1+1]\times D)} \geq \delta, \ \forall j \in [i_*, k_1] \cap \mathbb{N}.$$

Por (2.14),

$$\|U - 1\|_{L^2([i_*, i_*+1]\times D)} < \delta \quad \text{e} \quad \|U - 1\|_{L^2([i_*+1, i_*+2]\times D)} < \delta.$$

Consequentemente, usando novamente o fato que $U_m \to U$ em $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ temos que existe $m_2 \in \mathbb{N}$ verificando

$$\|U_{m_2} - 1\|_{L^2([i_*, i_*+1]\times D)} < \delta \quad \text{e} \quad \|U_{m_2} - 1\|_{L^2([i_*+1, i_*+2]\times D)} < \delta.$$

Sendo $U_{m_2} \in \Gamma$, podemos fixar $k_2 \in \mathbb{N}$ com $k_2 \geq i_* + 2$ como sendo o primeiro número verificando

$$\|U_{m_2} - 1\|_{L^2([j,j+1]\times D)} < \delta \quad \text{e} \quad \|U_{m_2} - 1\|_{L^2([k_2,k_2+1]\times D)} \geq \delta, \ \forall j \in [i_*, k_2 - 1] \cap \mathbb{N}.$$

Por outro lado, por (2.14),

$$\|U - 1\|_{L^2([i_*,i_*+1]\times D)} < \delta, \ \ \|U - 1\|_{L^2([i_*+1,i_*+2]\times D)} < \delta \ \text{ e } \ \|U - 1\|_{L^2([i_*+2,i_*+3]\times D)} < \delta.$$

Desse modo, existe $m_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U_{m_3}-1\|_{L^2([i_*,i_*+1]\times D)} < \delta, \ \|U_{m_3}-1\|_{L^2([i_*+1,i_*+2]\times D)} < \delta, \ \|U_{m_3}-1\|_{L^2([i_*+2,i_*+3]\times D)} < \delta.$$

Sendo $U_{m_3} \in \Gamma$ temos que existe $k_3 \in \mathbb{N}$, com $k_3 \geq i_* + 3$, satisfazendo

$$\|U_{m_3} - 1\|_{L^2([j,j+1]\times D)} < \delta \quad \text{e} \quad \|U_{m_3} - 1\|_{L^2([k_3,k_3+1]\times D)} \geq \delta, \ \forall j \in [i_*, k_3 - 1] \cap \mathbb{N}.$$

Repetindo este argumento encontraremos uma sequência $(U_{m_s}) \subset \Gamma$ e uma sequência de números naturais (k_s) tais que

$$\|U_{m_s} - 1\|_{L^2([j,j+1]\times D)} < \delta \quad \text{e} \quad \|U_{m_s} - 1\|_{L^2([k_s,k_s+1]\times D)} \geq \delta, \ \forall j \in [i_*, k_s - 1] \cap \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

com $k_s \to +\infty$ quando $s \to +\infty$ pois $k_s \geq i_* + s$ para todo $s \in \mathbb{N}$. De outro ponto de vista, sendo (U_m) uma sequência limitada em $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, a sequência (Q_{m_s}) dada por

$$Q_{m_s}(x,y) = U_{m_s}(x + k_s, y)$$

também é limitada em $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, existe $W \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ de maneira que

$$Q_{m_s} \rightharpoonup W \quad \text{em} \quad H^1(\Lambda_k), \ \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{2.16}$$

$$Q_{m_s} \to W \quad \text{em} \quad L^2(\Lambda_k), \ \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{2.17}$$

$$Q_{m_s}(x,y) \to W(x,y) \ \text{ q.t.p. em } \Omega \tag{2.18}$$

e

$$-1 \leq W(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{2.19}$$

Notemos que a desigualdade (2.19) ocorre pois

$$|U_m(x,y)| \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Por outro lado, definindo o funcional $\tilde{I}_j^s : H^1(\Lambda_j) \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{I}_j^s(U) = \int_j^{j+1} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla U|^2 + A(x+k_s, y)V(U) \right) dxdy,$$

temos por mudança de variável que

$$\tilde{I}_j^s(Q_{m_s}) = I_{j+k_s}(U_{m_s}).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_j^s(Q_{m_s}) &= \int_j^{j+1} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla Q_{m_s}|^2 + A(x+k_s, y)V(Q_{m_s}) \right) dxdy \\
&= \int_j^{j+1} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla U_{m_s}(x+k_s, y)|^2 + A(x+k_s, y)V(U_{m_s}(x+k_s, y)) \right) dxdy \\
&= \int_{j+k_s}^{j+k_s+1} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla U_{m_s}(x, y)|^2 + A(x, y)V(U_{m_s}(x, y)) \right) dxdy \\
&= I_{j+k_s}(U_{m_s}).
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{I}_j^s(Q_{m_s}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} I_j(U_{m_s}) = J(U_{m_s}) = \theta^* + o_{m_s}(1) \leq \theta^* + 1 \tag{2.20}$$

e

$$J_p(W) \leq \theta^*. \tag{2.21}$$

Com efeito, por (2.20),

$$\sum_{-l}^{l} \tilde{I}_j^s(Q_{m_s}) \leq \theta^* + o_{m_s}(1), \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Agora, como $Q_{m_s} \rightharpoonup W$ em Λ_k para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $\tilde{I}_j^s$ é um funcional fracamente semicontínuo inferiormente e

$$A(x+k_s, y) \to A_p(x, y) \text{ quando } s \to \infty$$

obtemos

$$I_{j,p}(W) \leq \liminf_{s \to +\infty} \tilde{I}_j(Q_{m_s}).$$

Consequentemente,

$$\sum_{-l}^{l} I_{j,p}(W) \leq \sum_{-l}^{l} \liminf_{s \to +\infty} \tilde{I}_j(Q_{m_s}) \leq \liminf_{s \to +\infty} \sum_{-l}^{l} \tilde{I}_j(Q_{m_s}), \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Desse modo,

$$\sum_{-l}^{l} I_{j,p}(W) \le \theta^*, \quad \forall l \in \mathbb{Z},$$

o que justifica a desigualdade (2.21). Sendo assim, temos

$$I_{j,p}(W) \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \pm\infty. \tag{2.22}$$

Por outro lado, para cada $j \in \mathbb{N}$ denotaremos a função

$$\tilde{W}_j = P_{-j}W.$$

Segue daí que a sequência $(\tilde{W}_j)$ é limitada em $H^1(\Lambda_0)$. Logo, existe $W_0 \in H^1(\Lambda_0)$ tal que, a menos de subsequência,

$$\tilde{W}_j \rightharpoonup W_0 \ \text{ em } \ H^1(\Lambda_0) \ \text{ quando } \ j \to +\infty.$$

Pelas imersões compactas de Sobolev,

$$\tilde{W}_j \to W_0 \ \text{ em } \ L^2(\Lambda_0) \ \text{ quando } \ j \to +\infty.$$

Por (2.15), para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $m_* = m_*(j) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U_m - 1\|_{L^2([-j+k_m,-j+k_m+1]\times D)} \le \delta, \quad \forall m \ge m_*,$$

isto é,

$$\|P_{-j}Q_m - 1\|_{L^2(Lambda_0)} \le \delta, \quad \forall m \ge m_*.$$

Consequentemente, fazendo $m \to +\infty$ temos

$$\|\tilde{W}_j - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \le \delta, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $j \to +\infty$ concluímos

$$\|W_0 - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \le \delta. \tag{2.23}$$

Por outro lado, por (2.22) e por um argumento feito na prova do Teorema 2.2 temos

$$W_0 = 1 \quad \text{ou} \quad W_0 = -1.$$

Como $\delta \in (0, \sqrt{|\Lambda_0|})$ e por (2.23) devemos ter $W_0 = 1$. Com efeito, se $W_0 = -1$ segue de (2.23) que

$$\begin{aligned}\|W_0 - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \leq \delta \Rightarrow & \left(\int_{\Lambda_0} |2|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta \\ \Rightarrow & (4|\Lambda_0|)^{\frac{1}{2}} \leq \delta \\ \Rightarrow & \sqrt{|\Lambda_0|} \leq \frac{\delta}{2} < \delta,\end{aligned}$$

um absurdo. Portanto, $W_0 = 1$. Por conseguinte,

$$\|\tilde{W}_j - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \to 0 \ \text{ quando } \ j \to +\infty.$$

Por outro lado, denotaremos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$W_j = P_j W.$$

De modo análogo, existe $\hat{W}_0 \in L^2(\Lambda_0)$ tal que, a menos de subsequência,

$$W_j \to \hat{W}_0 \ \text{ em } \ L^2(\Lambda_0) \ \text{ quando } \ j \to +\infty.$$

Além disso, verifica-se que

$$\hat{W}_0 = 1 \quad \text{ou} \quad \hat{W}_0 = -1.$$

Vamos mostrar que $\hat{W}_0 = -1$. Para tal, suponhamos por absurdo que $\hat{W}_0 = 1$. Segue de (2.15) que existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|W - 1\|_{L^2([j_1-1,j_1]\times D)} \geq \delta \ \text{ e } \ \|W - 1\|_{L^2([j_1,j_1+1]\times D)} \leq \delta.$$

Por outro lado, como $Q_m \to W$ em $L^2([j_1 - 1, j_1 + 1] \times D)$ segue que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|Q_m - W\|_{L^2([j_1,j_1+1]\times D)} \leq \delta \ \text{ e } \ \|Q_m - W\|_{L^2([j_1-1,j_1]\times D)} \leq \frac{\delta}{2} \ \ \forall m \geq m_0.$$

Consequentemente, por desigualdade triangular

$$\|Q_m - 1\|_{L^2([j_1,j_1+1]\times D)} \leq \|Q_m - W\|_{L^2([j_1,j_1+1]\times D)} + \|W - 1\|_{L^2([j_1,j_1+1]\times D)}$$

e

$$\|Q_m - 1\|_{L^2([j_1-1,j_1]\times D)} \geq \|W - 1\|_{L^2([j_1-1,j_1]\times D)} - \|Q_m - W\|_{L^2([j_1-1,j_1]\times D)},$$

ou seja,

$$\|Q_m - 1\|_{L^2(\Lambda_{j_1-1})} \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad \|Q_m - 1\|_{L^2(\Lambda_{j_1})} \leq 2\delta, \quad \forall m \geq m_0. \tag{2.24}$$

No que segue, vamos denotar $\beta = \beta(\delta)$ o número real dado por

$$\frac{\beta}{\tilde{A}_0} = \inf_{u \in \mathcal{N}_\delta} I_{*,\delta}(u),$$

em que $\tilde{A}_0 = \min\{1, A_0\}$, $I_{*,\delta} : H^1((-1,1) \times D) \to \mathbb{R}$ é definido por

$$I_{*,\delta}(u) = \int_{-1}^{1} \int_D \big(|\nabla u|^2 + V(u)\big)\, dxdy$$

e

$$\mathcal{N}_\delta = \{u \in H^1((-1,1)\times D) : \|u\|_{L^\infty((-1,1)\times D)} \leq 1,\ \|u-1\|_{L^2(\Lambda_{-1})} \geq \frac{\delta}{2} \text{ e } \|u-1\|_{L^2(\Lambda_0)} \leq 2\delta\}.$$

Por (2.24) obtemos $Q_{m-j_1} \in \mathcal{N}_\delta$ para todo $m \geq m_0$. Daí,

$$\int_{j_1-1}^{j_1+1} \int_D \big(|\nabla Q_m|^2 + V(Q_m)\big)\, dxdy \geq \frac{\beta}{\tilde{A}_0}, \quad \forall m \geq m_0. \tag{2.25}$$

Afirmação 2.6 $\beta > 0$.

De fato, se $\beta = 0$ então existe uma sequência $(u_k) \in \mathcal{N}_\delta$ tal que

$$I_{*,\delta}(u_k) \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Consequentemente,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{1} \int_D |\nabla u_k|^2 dxdy = \lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{1} \int_D V(u_k) dxdy = 0. \tag{2.26}$$

Segue daí que a sequência (u_k) é limitada em $H^1((-1,1) \times D)$. Logo, existe $u \in H^1((-1,1) \times D)$ de maneira que, a menos de subsequência,

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\Lambda_{-1,1})$$

e

$$u_k \to u \quad \text{em} \quad L^2(\Lambda_{-1,1}). \tag{2.27}$$

Por conseguinte, de (2.26) e (2.27),

$$\int_{-1}^{1} \int_D V(u) dxdy = 0.$$

Assim devemos ter $V(u) = 0$. Portanto $u = -1$ ou $u = 1$. Se $u = 1$, então por (2.27) segue que para $\delta > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_k - 1\|_{L^2([-1,1]\times D)} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Em particular,

$$\|u_k - 1\|_{L^2([-1,0]\times D)} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall k \geq k_0$$

o que contraria o fato de $(u_k) \in \mathcal{N}_\delta$. Se caso $u = -1$ então

$$\|u - 1\|_{L^2([0,1]\times D)} = 2|\Lambda_0|^{\frac{1}{2}} \leq \|u_k - u\|_{L^2([0,1]\times D)} + \|u_k - 1\|_{L^2([0,1]\times D)}.$$

Daí, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar k suficientemente grande tal que

$$|\Lambda_0|^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon + \delta.$$

Desde que $\epsilon > 0$ é arbitrário obtemos

$$\sqrt{|\Lambda_0|} \leq \delta,$$

um absurdo. Portanto, $\beta > 0$.

Por outro lado, aumentando m_0 se necessário temos

$$J(U_m) \leq \theta^* + \frac{\beta}{4}, \quad \forall m \geq m_0. \tag{2.28}$$

No que segue, para cada $j \geq j_1 + 2$ e cada $m \geq m_0$ vamos considerar a função

$$Z_{j,m}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \leq j, \ y \in D \\ ((j+1) - x) + (x - j)Q_m(x,y), & \text{se} \quad j < x \leq j+1, \ y \in D \\ Q_m(x,y), & \text{se} \quad j+1 < x, \ y \in D. \end{cases}$$

Desde que $Q_m \in \Gamma$ para todo $m \in \mathbb{N}$ verifica-se que $Z_{j,m} \in \Gamma$ para cada $j \geq j_1 + 2$. Além disso,

$$J_p(Z_{j,m}) = I_{p,j}(Z_{j,m}) + \sum_{k=j+1}^{\infty} I_{p,k}(Q_m),$$

pois

$$I_{p,k}(Z_{j,m}) = 0 \quad \text{para} \quad k < j.$$

Desse modo,

$$\theta_p^* \leq I_{p,j}(Z_{j,m}) + \sum_{k=j+1}^{\infty} I_{p,k}(Q_m). \tag{2.29}$$

Como a função A verifica (A_1)-(A_2) e $(J(U_m))$ é uma sequência limitada, então aumentando m_0 se necessário, obtemos

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} I_{p,k}(Q_m) = \sum_{k=j+1+k_m}^{\infty} I_{p,k}(U_m) \leq \sum_{k=j+1+k_m}^{\infty} I_k(U_m) + \frac{\beta}{4}, \quad \forall m \geq m_0. \tag{2.30}$$

Agora, como $j \geq j_1 + 2$, (2.25), (2.29) e (2.30) implicam em

$$\theta_p^* \leq I_{p,j}(Z_{j,m}) + J(U_m) - \tilde{A}_0 \int_{j_1-1}^{j_1+1} \int_D \left(|\nabla Q_m|^2 + V(Q_m)\right) dxdy + \frac{\beta}{4}.$$

Combinando com (2.25) e (2.28) - (2.30) concluímos

$$\begin{aligned} \theta_p^* &\leq I_{p,j}(Z_{j,m}) + \theta^* + \frac{\beta}{4} - \tilde{A}_0 \frac{\beta}{\tilde{A}_0} + \frac{\beta}{4} \\ &\leq I_{p,j}(Z_{j,m}) + \theta^* - \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\theta_p^* \leq I_{p,j}(Z_{j,m}) + \theta^* - \frac{\beta}{2}. \tag{2.31}$$

Agora, como

$$-1 \leq W_j(x,y) \leq 1 \ \text{ para } \ \text{todo } \ j \in \mathbb{N}$$

e

$$W_j \to 1 \ \text{ em } \ L^2(\Lambda_0) \ \text{ quando } \ j \to +\infty$$

temos

$$\lim_{j \to +\infty} \int_0^1 \int_D A(x+j,y) V(-x+1+xW_j) dxdy = 0$$

e

$$\lim_{j \to +\infty} \int_0^1 \int_D |1 - W_j|^2 dxdy = 0.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $j_0 = j_0(\epsilon) > j_1 + 2$, independente de m, tal que

$$\int_0^1 \int_D A(x+j,y) V(-x+1+xW_j) dxdy < \epsilon, \quad \forall j \geq j_0 \tag{2.32}$$

e

$$\int_0^1 \int_D |1 - W_j|^2 dxdy < \epsilon, \quad \forall j \geq j_0. \tag{2.33}$$

Por outro lado, afirmamos que existem $j \geq j_0$ e $m \geq m_0$ de maneira que

$$I_{p,j}(Z_{j,m}) = \int_j^{j+1} \int_D \mathcal{L}(Z_{j,m}) dxdy < \frac{\beta}{2}.$$

Suponhamos por absurdo que tal afirmação não é verdadeira. Assim, para cada $j \geq j_0$ existe $m_1 = m_1(j) \geq m_0$ verificando

$$\int_j^{j+1} \int_D \mathcal{L}(Z_{j,m}) dxdy \geq \frac{\beta}{2}, \quad \forall m \geq m_1.$$

Daí, a partir da definição de $Z_{j,m}$ e da condição (A_2) temos

$$\int_j^{j+1} \int_D |\nabla Z_{j,m}|^2 dxdy \geq \frac{\beta}{2} - \int_j^{j+1} \int_D A_p(x,y) V\left((j+1) - x + (x-j)Q_m\right) dxdy$$

para todo $m \geq m_1$. Por outro lado, observamos que (2.32) também ocorre para o caso periódico, isto é,

$$\int_0^1 \int_D A_p(x,y) V(-x + 1 + xW_j) dxdy < \epsilon, \quad \forall j \geq j_0.$$

Desse modo, tomando $\epsilon < \beta/4$ existe $m_2 = m_2(j) \geq m_1(j)$ tal que

$$\int_j^{j+1} \int_D |\nabla Z_{j,m}|^2 dxdy \geq \frac{\beta}{4}, \quad \forall m \geq m_2(j). \tag{2.34}$$

Usando novamente a definição de $Z_{j,m}$ e do gradiente segue que existe $C > 0$ tal que

$$\int_j^{j+1} \int_D |\nabla Z_{j,m}|^2 dxdy \leq C \left(\int_0^1 \int_D |1 - P_j Q_m|^2 dxdy + \int_j^{j+1} \int_D |\nabla Q_m|^2 dxdy \right). \tag{2.35}$$

Agora, fixando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno em (2.33), (2.34) e (2.35) implicam em

$$\int_j^{j+1} \int_D |\nabla Q_m|^2 dxdy \geq \frac{\beta}{8}, \quad \forall m \geq m_2(j).$$

Seja $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$(l+1)\frac{\beta}{8} > \theta^* + 1$$

e fixemos $m > \max\{m_2(j) : j_0 \leq j \leq j_0 + l\}$. Então,

$$\begin{aligned}
J(U_m) &\geq \sum_{k=j_0}^{j_0+l} \tilde{I}_k(Q_m) \\
&\geq \sum_{k=j_0}^{j_0+l} \left(\int_k^{k+1} \int_D |\nabla Q_m|^2 dxdy + \int_k^{k+1} \int_D A(x + k_m, y) V(Q_m) dxdy \right) \\
&\geq (l+1)\frac{\beta}{8} + \sum_{k=j_0}^{j_0+l} \int_k^{k+1} \int_D A(x + k_m, y) V(Q_m) dxdy \\
&\geq (l+1)\frac{\beta}{8} \\
&> \theta^* + 1,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$J(U_m) > \theta^* + 1,$$

um absurdo pois $J(U_m) \leq \theta^* + 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, existem $j = j(m)$ e $m \geq m_0$ tais que

$$I_{p,j}(Z_{j,m}) < \frac{\beta}{2}.$$

Consequentemente, por (2.31),

$$\theta_p^* \leq \theta^*,$$

um absurdo. Portanto, devemos ter $\hat{W}_0 = -1$. Desse modo, temos $W \in \Gamma$ e como $J_p(W) \leq \theta^*$ segue que

$$\theta_p^* \leq J_p(W) \leq \theta^*,$$

o que também é um absurdo. Portanto, vale a Afirmação 2.5, isto é,

$$P_{j_k}U \to -1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j_k \to +\infty.$$

Agora, repetindo o mesmo processo segue que toda subsequência de (P_jU) possui uma subsequência que converge em $L^2(\Lambda_0)$ para -1. Assim,

$$P_jU \to -1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j \to +\infty.$$

Logo, existe $j_* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|P_jU + 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \leq \delta, \quad \forall j \geq j_*.$$

Usando um argumento similar prova-se que

$$P_jU \to 1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j \to -\infty.$$

Daí, existe $k_* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|P_jU - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \leq \delta, \quad \forall j \geq -k_*.$$

A Proposição 2.1 fica concluída tomando $j_0 = \max\{j_*, k_*\}$. $\blacksquare$

2.3 A função A verifica a condição de Rabinowitz

Nesta seção, vamos estabelecer a existência de solução do tipo heteroclínica no caso em que a função A pertence a Classe 2. A seguir, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + A(\epsilon x, y)V'(u) = 0, \quad em \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\epsilon > 0$ e A satisfazendo a condição de Rabinowitz

(A_3) $0 < \inf\limits_{\overline{\Omega}} A(x,y) \leq \sup\limits_{y \in \overline{D}} A(0,y) < \liminf\limits_{|(x,y)| \to +\infty} A(x,y) = A_\infty < +\infty.$

De agora em diante, denotaremos $J_\epsilon, J_\infty : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ os funcionais definidos por

$$J_\epsilon(U) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_{\epsilon,k}(U) \quad \text{e} \quad J_\infty(U) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_{\infty,k}(U),$$

em que $I_{\epsilon,k}(U) : H^1(\Lambda_k) \to \mathbb{R}$ e $I_{\infty,k}(U) : H^1(\Lambda_k) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$I_{\epsilon,k}(U) = \int_k^{k+1} \int_D \left(|\nabla U|^2 + A(\epsilon x, y)V(U) \right) dxdy$$

e

$$I_{\infty,k}(U) = \int_k^{k+1} \int_D \left(|\nabla U|^2 + A_\infty V(U) \right) dxdy.$$

Além disso, denotaremos por θ_ϵ e θ_∞ os números reais

$$\theta_\epsilon = \inf_\Gamma J_\epsilon(U) \quad \text{e} \quad \theta_\infty = \inf_\Gamma J_\infty(U).$$

Definimos também os funcionais $I_{\max,k}(U) : H^1(\Lambda_k) \to \mathbb{R}$ e $J_{\max,k} : \Gamma \to \mathbb{R}$ por

$$I_{\max,k}(U) = \int_k^{k+1} \int_D \left(|\nabla U|^2 + A_0 V(U) \right) dxdy,$$

com $A_0 = \max\limits_{y \in \overline{D}} A(0,y)$, e

$$J_{\max}(U) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_{\max,k}(U).$$

Seja também o número real $\theta_{\max}$ dado por

$$\theta_{\max} = \inf_\Gamma J_{\max}(U).$$

Desde de que A_0 e A_∞ são números reais segue da Seção 2.2 que existem $W_\infty, W_{\max} \in \Gamma$ verificando

$$J_{\max}(W_{\max}) = \theta_{\max} \quad \text{e} \quad J_\infty(W_\infty) = \theta_\infty.$$

Lema 2.1 *De acordo com a notação anterior,*

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \theta_\epsilon \leq \theta_{\max} \quad e \quad \theta_{\max} < \theta_\infty.$$

Demonstração. Para cada $\epsilon > 0$,

$$\theta_\epsilon \leq J_\epsilon(U), \quad \forall U \in \Gamma.$$

Em particular,

$$\theta_\epsilon \leq J_\epsilon(W_{\max}).$$

No entanto, como

$$A(\epsilon x, y) \to A(0, y) \text{ uniformemente em } y \in D \text{ quando } \epsilon \to 0$$

obtemos

$$\lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon(W_{\max}) \leq J_{\max}(W_{\max}).$$

Sendo $\theta_{\max} = J_{\max}(W_{\max})$ concluímos

$$\lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon(W_{\max}) \leq \theta_{\max}.$$

Consequentemente,

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \theta_\epsilon \leq \theta_{\max}. \tag{2.36}$$

Por outro lado, pela condição (A_3) temos

$$J_{\max}(U) < J_\infty(U), \quad \forall U \in \Gamma.$$

Em particular,

$$\theta_{\max} \leq J_{\max}(W_\infty) < J_\infty(W_\infty) = \theta_\infty. \tag{2.37}$$

Portanto, por (2.36) e (2.37) concluímos a demostração do lema, isto é,

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \theta_\epsilon \leq \theta_{\max} \quad \text{e} \quad \theta_{\max} < \theta_\infty.$$

Isto completa a demonstração. ■

Na sequência, vamos fixar $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\theta_\epsilon < \theta_\infty, \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Usando o mesmo argumento da seção anterior mostra-se que para cada $\epsilon > 0$ existe uma sequência minimizante $(U_m) \subset \Gamma$ para J_ϵ, isto é,

$$J_\epsilon(U_m) \to \theta_\epsilon \ \text{ quando } \ m \to +\infty,$$

com

$$-1 \leq U_m(x,y) \leq 1, \ \ \forall (x,y) \in \Omega \ \text{ e } \ \forall m \in \mathbb{N}$$

e Além disso, verifica-se também que existe $U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$U_m \rightharpoonup U \text{ em } H^1(\Lambda_k), \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$U_m \to U \text{ em } L^2(\Lambda_k), \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$U_m(x,y) \to U(x,y) \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$-1 \leq U(x,y) \leq 1, \ \ \forall (x,y) \in \Omega,$$

e

$$J_\epsilon(U) \leq \theta_\epsilon.$$

Proposição 2.3 *Para $\delta \in (0, \sqrt{|\Lambda_0|})$ e fixado $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|U - 1\|_{L^2(\Lambda_{-j})} \leq \delta \ e \ \|U + 1\|_{L^2(\Lambda_j)} \leq \delta, \quad \forall j \geq j_0.$$

Demonstração. Para $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ o argumento do Teorema 2.2 mostra que existe uma subsequência $(P_{j_k}U)$ de (P_jU) tal que

$$P_{j_k}U \to 1 \text{ ou } P_{j_k}U \to -1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j_k \to +\infty.$$

Afirmação 2.7 *$P_{j_k}U \to -1$ em $L^2(\Lambda_0)$ quando $j_k \to +\infty$.*

Suponhamos por absurdo que ocorra

$$P_{j_k}U \to 1 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j_k \to +\infty.$$

De acordo com a prova da Proposição 2.1 segue que existem uma subsequência (U_{m_s}) de (U_m) e $i_* \in \mathbb{N}$, com $i_* < k_s$ para todo $s \in \mathbb{N}$ e $k_s \to +\infty$ quando $s \to +\infty$, tais que

$$\|U_{m_s}(\cdot + j, y) - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} < \delta \text{ e } \|U_{m_s}(\cdot + k_s, y) - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \geq \delta, \forall j \in [i_*, k_s - 1] \cap \mathbb{N}.$$

Verifica-se que a sequência

$$Q_{m_s}(x,y) = U_{m_s}(x + k_s, y)$$

é uma sequência limitada em $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Logo, a menos de subsequência, existe $W \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que

$$Q_m \rightharpoonup W \text{ em } H^1(\Lambda_k), \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$Q_m \to W \text{ em } L^2(\Lambda_k), \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$Q_m(x,y) \to W(x,y) \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

e

$$-1 \leq W(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Por outro lado, vamos definir o funcional $\tilde{I}^s_{\epsilon,j} : H^1(\Lambda_j) \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{I}^s_{\epsilon,j}(U) = \int_j^{j+1} \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla U|^2 + A(\epsilon x + \epsilon k_s, y) V(U) \right) dxdy.$$

Por mudança de variável,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{I}^s_{\epsilon,j}(Q_m) = J_\epsilon(U_{m_s}) = \theta_\epsilon + o_{m_s}(1). \tag{2.38}$$

Agora, como (U_m) é uma sequência minimizante para o funcional J_ϵ segue do Lema de Fatou e de (2.38) que

$$J_\infty(W) \leq \theta_\epsilon.$$

Consequentemente,

$$I_{\infty,j}(W) \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \pm\infty. \tag{2.39}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos a função

$$W_j = P_{-j} W.$$

Pelo fato que $W \in L^\infty(\Omega)$ existe $W_0 \in H^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$W_j \rightharpoonup W_0 \text{ em } H^1(\Lambda_0) \text{ quando } j \to +\infty.$$

Por conseguinte,

$$W_j \to W_0 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j \to +\infty.$$

Argumentando de modo similar a Proposição 2.1, temos

$$\|W_0 - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \leq \delta.$$

Por outro lado, por (2.39)

$$W_0 = 1 \quad \text{ou} \quad W_0 = -1.$$

Como $\delta \in (0, \sqrt{|\Lambda_0|})$ devemos ter $W_0 = 1$. Então,

$$\|W_j - 1\|_{L^2(\Lambda_0)} \to 0 \text{ quando } j \to +\infty.$$

Agora, fixando

$$\hat{W}_j = P_j W$$

verifica-se que existe $\hat{W}_0 \in H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$ tal que, a menos de subsequência,

$$\hat{W}_j \to \hat{W}_0 \text{ em } L^2(\Lambda_0) \text{ quando } j \to +\infty.$$

Além disso, verifica-se também que $\hat{W}_0 = -1$. De fato, assumindo por contradição que $\hat{W}_0 = 1$ segue que para cada $j \in \mathbb{N}$ definindo a função

$$H_j(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \leq j, \ y \in D \\ ((j+1) - x) + (x - j)Q_m(x,y), & \text{se} \quad j < x \leq j+1, \ y \in D \\ Q_m(x,y), & \text{se} \quad j+1 < x, \ y \in D \end{cases}$$

obtemos $\theta_\infty \leq \theta_\epsilon$ o que contraria o Lema 2.1. Logo, $\hat{W}_0 = -1$. Portanto, de acordo com a prova da Proposição 2.1 concluímos a demonstração da proposição. ■

Teorema 2.4 *Assume (V_1)-(V_3) e que A pertence a Classe 2. Então, existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que o problema (P_3) possui uma solução heteroclínica de 1 a -1 para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.*

Demonstração. Tomando ϵ_0 de acordo com a Proposição 2.1 segue que para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ deve existir $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U - 1\|_{L^2(\Omega_{-j})} \leq \delta \quad \text{e} \quad \|U + 1\|_{L^2(\Omega_j)} \leq \delta, \quad \forall j \geq j_0.$$

Fazendo os mesmos argumentos da prova da Teorema 2.2 temos que $U \in \Gamma$ com $J_\epsilon(U) = \theta_\epsilon$. Ademais, $U \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ sendo U solução heteroclínica do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + A(\epsilon x, y)V'(u) = 0, \quad em \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) = 0, \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é,

$$U(x,y) \to 1 \quad \text{quando} \quad x \to -\infty \quad \text{uniformemente em} \quad y \in D$$

e

$$U(x,y) \to -1 \quad \text{quando} \quad x \to +\infty \quad \text{uniformemente em} \quad y \in D.$$

Isto conclui a demonstração do teorema. ■

Apêndice A

Princípio da continuação única

Neste apêndice, vamos introduzir o Princípio da Continuação Única via uma Hipersuperfície. Tal resultado é muito importante na teoria das equações elípticas. Por fim, faremos uma aplicação fundamental para a construção do conteúdo encontrado no Capítulo 1.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Vamos considerar o operador elíptico da forma

$$Pu = -\Delta u + qu,$$

em que $q \in L^\infty(\Omega)$.

Teorema A.1 (Princípio da Continuação Única via uma Hipersuperfície) *Seja S uma hipersuperfície de classe C^∞ tal que*

$$\Omega = S_+ \cup S \cup S_-$$

onde S_+ e S_- denotam os dois lados de S. Se $x_0 \in S$, V é uma vizinhança aberta de x_0 em Ω, $u \in H^2(V)$ satisfaz

$$Pu = 0 \text{ em } V$$

e

$$u = 0 \text{ em } V \cap S_-,$$

então $u = 0$ em alguma vizinhança de x_0.

Demonstração. Ver [30, Theorem 1.3]. ■

A imagem a seguir ilustra geometricamente a noção do conjunto Ω.

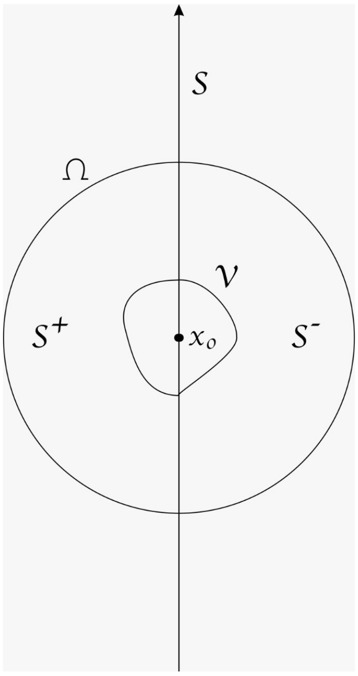

Figura A.1: Uma representação geométrica do conjunto Ω.

Uma aplicação do Princípio da continuação única é o seguinte resultado.

Aplicação: Seja $\Omega_1 = [0,1] \times D$, em que $D \subset \mathbb{R}^{N-1}$, $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira suave. Seja também $w \in H^2(\Omega_1)$ tal que

$$-\Delta w - bw = 0 \quad \Omega,$$

porquanto $b \in L^\infty(\Omega_1)$ e $w(x,y) = 0$ em $[0, \frac{1}{2}] \times D$.

Afirmação A.1 $w = 0$ *em* Ω_1.

Tomemos $x_0 = \frac{1}{2}$ e V uma vizinhança de (x_0, y_0) em Ω_1, no qual $y_0 \in D$ é fixado. Seja S sendo a hipersuperfície $x_0 = \frac{1}{2}$ e S_- a região $[0, \frac{1}{2}) \times D$. Diante disto,

$$w = 0 \ \text{ em } \ V \cap S_-.$$

Pelo Princípio da Continuação Única via uma Hipersuperfície, temos que existe uma vizinhança U_{y_0} de (x_0, y_0) em Ω_1 tal que

$$w = 0 \quad \text{em} \quad U_{y_0}.$$

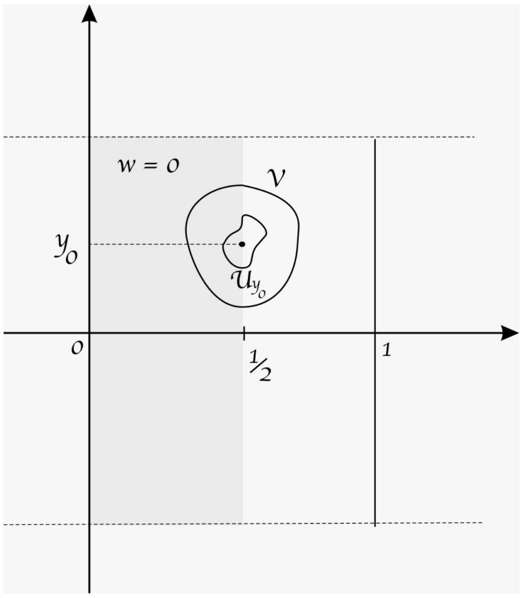

Figura A.2: Representação geométrica da Aplicação.

Fazendo de modo análogo para cada ponto (x_0, y), com $y \in D$, encontraremos uma vizinhança U_y de (x_0, y) em Ω_1 tal que

$$w = 0 \quad \text{em} \quad U_y.$$

Agora, consideremos o conjunto aberto

$$U_{x_0} = \bigcup_{y \in D} U_y.$$

Como $\{x_0\} \times \overline{D}$ é compacto segue que existem $y_1, \ldots, y_m \in D$ tais que

$$U_{x_0} \subset U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_m}.$$

Consequentemente, o número real

$$x_\lambda = \inf\{x \in [0,1] \times D; x \geq 1/2 \text{ e } w(t,y) = 0 \text{ para todo } 0 \leq t \leq x \text{ e } y \in D\}$$

satisfaz

$$x_\lambda > 1/2.$$

Por conseguinte,

$$w(x,y) = 0 \text{ para todo } 0 \leq x \leq x_\lambda \text{ e } y \in D.$$

De modo análogo, prova-se que na vizinhança de cada ponto (x_λ, y), $y \in D$ existe $x_\alpha > x_\lambda$ tal que

$$w(x,y) = 0 \text{ para todo } 0 \leq x \leq x_\alpha \text{ e } y \in D.$$

Portanto, fazendo este processo chagamos a conclusão que $w = 0$ em Ω_1.

Apêndice B

Resultados gerais

Neste apêndice, vamos fazer um resumo do que se necessita de Resultados das teorias de Análise do $\mathbb{R}^N$, Análise Funcional e Espaços de Lebesgue.

B.1 Resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$

Nesta seção, vamos enunciar alguns resultados específicos de Análise no $\mathbb{R}^N$. Para um estudo mais detalhado recomendamos as leituras Lima [22, 23] e Bartle [7].

Teorema B.1 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a+v]$ esteja contido em U, que a restrição $f|[a, a+v]$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v, em todo ponto $x \in (a, a+v)$. Então, existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

Demonstração. Veja [23]. ■

Teorema B.2 (Teorema de Mudança de Variável) *Sejam $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $U, V \in \mathbb{R}^N$, $X \in U$ um compacto mensurável segundo Jordan e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |det.h'(x)|dx.$$

Demonstração. Veja [23]. ■

Teorema B.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas de segunda ordem contínuas em Ω. Se $c \in \Omega$ é um ponto de mínimo relativo (respectivamente, máximo) de f, então*

$$D^2 f(c)(w)^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) w_i w_j \geq 0$$

(respectivamente, $D^2 f(c)(w)^2 \leq 0$) para todo $w \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Veja [7, Theorem 42.4]. ■

Um resultado indispensável para o estudo da matemática em geral é o Teorema de Ascoli-Arzelá. A fim de enunciar tal resultado sejam $K \subset \mathbb{R}$ e $f_n : K \to \mathbb{R}$. Diz-se que a sequência (f_n) é **equicontínua** se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in K, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \forall x_0 \in K.$$

Teorema B.4 (Ascoli-Arzelá) *Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda sequência equicontínua e limitada de funções $f_n : K \to \mathbb{R}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Demonstração. Veja [22]. ■

B.2 Os espaços de Lebesgue

Nesta seção, vamos introduzir o conceito dos espaços de Lebesgue e alguns resultados relacionados.

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ de todas as classes μ-equivalentes de funções reais $\mathcal{A}$-mensuráveis f, em que $|f|^p$ tem integral finita em relação a μ sobre X. Definimos também a norma em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ dada por

$$\|f\|_{L^p(X,\mathcal{A},\mu)} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para o caso $p = \infty$ o espaço $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência das funções reais $\mathcal{A}$-mensuráveis que são limitadas quase sempre. Se $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $M \in \mathcal{A}$ com $\mu(M) = 0$, então definimos

$$S_f(M) = \sup\{|f(x)| : x \notin M\}$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)} = \inf\{S(M) : M \in \mathcal{A} \ \text{ e } \ \mu(M) = 0\}.$$

Os espaços $(L^p(X,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_{L^p(X,\mathcal{A},\mu)})$, $1 \leq p \leq \infty$, são denominados **espaços de Lebesgue**.

Teorema B.5 *O espaço de Lebesgue $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ é de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Veja [6, Theorem 6.14 e 6.16] ou [10, Theorem 4.8]. ■

Daqui em diante, vamos considerar Ω como um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ mensurável a Lebesgue. Nota-se que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\int_\Omega uvdx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Entretanto, se Ω é limitado então

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q \leq p < +\infty. \tag{B.1}$$

De fato, se $f \in L^p(\Omega)$ então

$$\int_\Omega |f|^q dx \leq |\Omega|^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} = |\Omega|^{\frac{p-q}{p}} \|f\|^q_{L^p(\Omega)} < +\infty$$

evidenciando que $f \in L^q(\Omega)$ com

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

A seguir enunciaremos alguns resultados clássicos referentes aos espaços de Lebesgue.

Teorema B.6 (Lema de Fatou) *Se (f_n) é uma sequência de funções definidas em Ω e tomando valores em $\mathbb{R}$ e mensuráveis sendo não-negativas, então*

$$\int_\Omega (\liminf f_n) dx \leq \liminf \int_\Omega f_n dx.$$

Demonstração. Ver [6, Theorem 4.8]. ■

Teorema B.7 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Sejam (f_n) uma sequência de funções mensuráveis e Ω um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^N$ tais que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω*;*

(ii) Existe $h \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n(x)| \leq h(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Então,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x) = \int_\Omega f(x) dx.$$

Demonstração. Ver [6, Theorem 5.6]. ■

Teorema B.8 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $p, q > 1$ e $1/p + 1/q = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [6, Theorem 6.9] ou [10, Theorem 4.6]. ■

Teorema B.9 (Vainberg) *Sejam $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$f_n \to f \quad em \quad L^p(\Omega) \quad quando \quad n \to +\infty.$$

Então, existem $h \in L^p(\Omega)$ e uma subsequência (f_{n_k}) tais que

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω;

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q.t.p em Ω para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja [10, Theorem 4.9]. ■

Uma classe muito importante de operadores não-lineares atuando entre os espaços de Lebesgue é a dos operadores de Nemytskii, os quais passamos a estudar em seguida.

Definição B.10 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma aplicação $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a* ***condição de Carathéodory*** *se:*

(i) A função $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado;

(ii) A função $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua q.t.p em X.

Teorema B.11 *Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ mensurável a Lebesgue com medida finita, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a condição de Carathéodory e $1 \leq p, q < \infty$. Suponha que exista constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que*

$$|f(x,t)| \leq C_1 + C_2 |t|^{p/q} \quad q.t.p \ em \quad X \quad e \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então, o operador de Nemytskii

$$N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad N_f(u)(x) := f(x, u(x)),$$

está bem definido e é contínuo.

Demonstração. Veja [9, Teorema 9.1.4] ■

B.3 Resultados de Análise Funcional

Vamos fazer uma breve discussão sobre alguns resultados de Análise Funcional. Para uma leitura geral sobre este tema aconselhamos as leituras [9] e [10]. Daqui em diante vamos denotar E como sendo um espaço real de Banach munido da norma $\|\cdot\|$.

Teorema B.12 *Sejam E um espaço reflexivo e (u_n) uma sequência limitada em E. Então, existem uma subsequência (u_{n_k}) e $u \in E$ tais que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad em \quad E \quad quando \quad k \to \infty.$$

Demonstração. Veja [10, Theorem 3.18]. ■

Definição B.13 *Um espaço E é chamado uniformemente convexo se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leq 1 - \delta \quad sempre\ que \quad \|u\|, \|v\| \leq 1 \quad e \quad \|u - v\| \geq \epsilon.$$

Exemplos de espaços uniformemente convexos são os espaços de Hilbert. De fato, sendo H um espaço de Hilbert segue da Lei do Paralelogramo que

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 = \frac{\|u\|^2}{2} + \frac{\|v\|^2}{2} - \frac{\|u-v\|^2}{4}, \quad \forall u, v \in H.$$

Desse modo, dados $\epsilon > 0$ e $u, v \in H$ com $\|u\|, \|v\| \leq 1$ e $\|u - v\| \geq \epsilon$ obtemos

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Portanto, basta tomar

$$\delta = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Em particular, o espaço $H^1(\Omega)$ é uniformemente convexo porquanto é de Hilbert.

Teorema B.14 (Milman-Pettis) *Todo espaço uniformemente convexo de Banach é um espaço reflexivo.*

Demonstração. Veja [10, Theorem 3.31]. ■

Teorema B.15 *Assumimos que E é um espaço uniformemente convexo. Seja (u_n) uma sequência em E tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E e*

$$\limsup_{n \to \infty} \|u_n\| \leq \|u\|.$$

Então,

$$u_n \to u \quad em \quad E \quad quando \quad n \to \infty.$$

Demonstração. Veja [10, Proposition 3.32]. ■

O seguinte resultado é sobre a diferenciabilidade de funcionais definidos em espaços normados.

Teorema B.16 *Sejam E um espaço normado e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional verificando:*

i) $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} : E \to \mathbb{R}$ *existe para todo* $u \in E$;

ii) $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} \in E'$ *para todo* $u \in E$;

iii) Se $u_n \to u$ *em* E, *então*

$$\frac{\partial I(u_n)}{\partial(\cdot)} \to \frac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} \quad em \quad E'.$$

Então, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *com*

$$I'(u)v = \frac{\partial I(u)}{\partial(v)}, \quad \forall u, v \in E.$$

Demonstração. Veja [32]. ■

Apêndice C

Os espaços de Sobolev

Nessa apêndice, enunciaremos conceitos importantes e alguns teoremas clássicos sobre os espaços de Sobolev. Para uma leitura geral sobre este tema indicamos o livro Adams [1].

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável com relação à medida de Lebegue, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^N$ e $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^N$. Definimos

i) $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$;

ii) $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$;

iii) $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$;

iv) $\alpha \leq \beta$ sempre que $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Posto isto, definimos o operador diferencial D^α por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Definição C.1 *Para $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$, definimos por $W^{m,p}(\Omega)$ o seguinte subconjunto de $L^p(\Omega)$*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad para \quad 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

*O conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ é dito **espaço de Sobolev**.*

Em $W^{m,p}(\Omega)$ vamos considerar a seguinte norma

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Teorema C.2 *$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço vetorial normado. Além disso, o mesmo é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [1, Theorem 3.3] ■

Em particular, no caso em que $m = 1$ e $p = 2$ denotaremos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Entretanto, vamos considerar a seguinte norma usual em $H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Verifica-se que a mesma é equivalente a norma $\|\cdot\|_{1,2}$. Tal espaço é de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Em contrapartida, definimos o espaço

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$$

com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema C.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, $C^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Veja [1, Theorem 3.22] ■

Um resultado importante sobre regularidade de soluções fracas é o seguinte resultado.

Teorema C.4 *Seja $\Omega = \mathbb{R} \times D$ sendo D um aberto limitado do $\mathbb{R}^{N-1}$ com fronteira suave. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ (ou $u \in H_0^1(\Omega)$) satisfazendo*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx dy = \int_\Omega f v dx dy, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (ou \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$.

Demonstração. A prova é análoga a demonstração encontrada em [10, Theorem 9.25] (sendo semelhante ao caso do $\mathbb{R}_+^N$). ■

C.1 Imersões

Nesta seção, trataremos das imersões de Sobolev. Em particular, abordaremos as imersões sobre domínios que satisfazem a propriedade do cone.

Definição C.5 *Sejam* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *espaços normados. Diremos que* $(X, \|\cdot\|_X)$ *está imerso continuamente em* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *quando:*

a) X *é um subespaço vetorial de* Y*;*

b) A aplicação identidade $I : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *é contínua.*

Além disso, diremos que $(X, \|\cdot\|_X)$ *está imerso compactamente em* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *quando vale a) e*

c) A aplicação identidade $I : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *é compacta.*

De acordo com (B.1),

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \text{ continuamente com } \ 1 \le q \le p < +\infty. \tag{C.1}$$

Como toda aplicação linear compacta é contínua segue que toda imersão compacta é contínua.

Os seguintes resultados sobre imersões são importantíssimos para o estudo de EDP Elípticas quando se trata do uso da ferramenta Método Variacionais.

Definição C.6 (A condição do cone) *Dizemos que um domínio* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *satisfaz a* ***propriedade do cone*** *se existe um cone finito* $\mathcal{C}$ *tal que para cada* $x \in \Omega$ *seja o vértice de um cone finito* $\mathcal{C}_x$ *contido em* Ω *e congruente a* $\mathcal{C}$*. Observe que* $\mathcal{C}_x$ *não precisa ser obtido de* $\mathcal{C}$ *por uma translação paralela, mas simplesmente por movimento rígido.*

Consideremos os seguintes teoremas de imersões sobre domínios que satisfazem a propriedade do cone.

Teorema C.7 *Sejam* Ω *um domínio satisfazendo a propriedade do cone,* $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \le p \le \infty$*. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

a) Se $mp > N$*, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para} \quad p \le q \le \infty;$$

b) Se $mp = N$*, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para} \quad p \le q < \infty;$$

c) Se $mp < N$, então

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para} \quad p \leq q \leq Np/(N-mp).$$

Demonstração. Veja [1, Theorem 4.12] ■

Teorema C.8 (Rellich-Kondrachov) *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ satisfazendo a propriedade do cone de fronteira suave e $1 \leq p \leq \infty$. Então, as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$ se $p < n$;

b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$ se $p = n$;

c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ se $p > n$.

Demonstração. Veja [1, Theorem 6.3]. ■

E relação ao Teorema C.7, segue que se $N \geq 3$ a seguinte imersão é contínua

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega).$$

No entanto, em conformidade com o Teorema de Rellich-Kondrachov a seguinte imersão é compacta

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq p < \infty.$$

Em particular,

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega). \tag{C.2}$$

Por fim, como composição de uma aplicação linear contínua com uma aplicação linear compacta é compacta (veja, por exemplo [9, Proposição 7.2.6]), temos por (C.1) e (C.2) que

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega) \quad \text{compactamente.} \tag{C.3}$$

Definição C.9 *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Um funcional $I : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é dito **semicontínuo inferiormente** quando para toda sequência (u_n) em E com $u_n \to u$ em E tivermos que*

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n). \tag{C.4}$$

*Dizemos que I é **fracamente semicontínuo inferiormente** quando $u_n \rightharpoonup u$ em E implica em (C.4).*

Um primeiro exemplo de um funcional fracamente semicontínuo inferiormente é a norma de um espaço normado. Para outro exemplo, notemos o próximo resultado.

Teorema C.10 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado que satisfaz a propriedade do cone e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo a condição de crescimento*

$$|f(x,t)| \leq A + B|t|^p,$$

com $A, B > 0$ e $0 \leq p < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$ ou $0 \leq p < +\infty$ se $N = 1, 2$. Então, sendo

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$$

o funcional

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) \right) dx, \quad u \in H^1(\Omega)$$

é fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração. Vamos considerar os funcionais

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad \psi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Partimos inicialmente para a prova de que o funciona ψ é fracamente semicontínuo inferiormente para o caso em que $N \geq 3$. Pelo Teorema C.8,

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \;\; \text{compactamente} \quad \forall\, 1 \leq q < \frac{N+2}{N-2}.$$

Daí, se (u_n) é uma sequência em $H^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$ então

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega).$$

Consequentemente, do Teorema B.11 concluímos

$$F(\cdot, u_n) \to F(\cdot, u) \quad \text{em} \quad L^{q/p}(\Omega).$$

Desde que Ω é limitado segue que $L^{q/p}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ e assim

$$F(\cdot, u_n) \to F(\cdot, u) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \psi(u_n) = \psi(u)$$

sempre que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$. Logo, ψ é fracamente semicontínuo inferiormente. Por outro lado, como a norma é fracamente semicontínuo inferiormente segue que o funcional ϕ também o é. Verifica-se que soma de funcionais fracamente semicontínuos inferiormente também o é. O caso $N = 1, 2$ é análogo. Isto conclui a prova. ■

Teorema C.11 *Sejam Ω um domínio limitado, m um inteiro não negativo e $0 < \alpha < 1$. Então existe a seguinte imersão compacta:*

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Ver [1, Theorem 1.34] ■

Definição C.12 (Operadores de extensão) *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$. Para m e p dados, um operador linear E de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ é chamado de (m,p)-* ***operador de extensão simples*** *para Ω se existe a constante $K = K(m,p)$ tal que para cada u as seguintes condições são válidas:*

(i) $Eu(x) = u(x)$ *q.t.p em* Ω*;*

(ii) $\|E(u)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq K\|E(u)\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Teorema C.13 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Suponhamos que existe um (m,p)-operador de extensão simples para Ω e que $mp < n$ e $p \leq q \leq p^* = (N-1)p/(N-mp)$. Então, vale a seguinte imersão contínua*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega).$$

Se $mp = n$, então a imersão acima é válida para $p \leq q < \infty$.

Demonstração. Ver [1, Theorem 5.36] ■

Em particular, se Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira suave então

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F.. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York-San Francisco-London, 2003.

[2] ALESSIO, F.; GUI, C.; M, P.. *Saddle solutions to Allen-Cahn equations in doubly periodic media.* Indiana University Mathematics Journal. Vol 65, No. 1, 22 pg. 2016.

[3] ALVES, C. O.. *Existence of heteroclinic solution for a class of non-autonomous second-order equation.* Nonlinear Differential Equations and Applications. v.22, pp. 1195-1212, 2015. Disponível em doi 10.1007/s00030-015-0319-0

[4] ALVES, C. O.. *Existence of a heteroclinic solution for a double well potential equation in an infinite cylinder of* $\mathbb{R}^N$*.* Adv. Nonlinear Sdud. 14 pg. 2018. Disponível em https://doi.ogr/10.1515/ans-2018-2014.

[5] ALVES, C. O.; AMBROSIO, V.; TORRES LEDESMA, C. E.. *Existence of heteroclinic solutions for a class of problems involving the fractional Laplacian.* Analysis and Applications, Vol. 17, No. 3 (2019) 425-451.

[6] BARTLE, R. G.. *The elements of integration and Lebesgue measure.* Wiley Classics Library. 1995.

[7] BARTLE, R. G.. *The elements of real analysis.* New York, J. Wiley, 1964.

[8] BASSANEZI, R. C.; JUNIOR, W. C. F.. *Equações diferenciais com aplicações* São Paulo: Editora HARBRA ltda., 1988.

[9] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E.. *Fundamentos de análise funcional.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] BRÉZIS, H.. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, 2010.

[11] BYEON, J.; MONTECCHIARI, P.; RABINOWITZ, P. H.. *A double well potential system.* Vol 9, No. 7, 35 pg. 2016. Disponível em dx.doi.org/10.2140/apde.2016.9.1737

[12] COSTA, D. G.. *An invitation to variational methods in differential equations.* Las Vegas: Birkhäuser, 2007.

[13] COURANT, R.. *Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces.* New York Springer-Verlag, 1977.

[14] CUNHA, A. C.. *Existência de solução heteroclínica para problemas não-autônomos de segunda ordem.* 2016. 77 f. UFCG, Campina Grande, 2016.

[15] FIGUEIREDO, D. G.. *Métodos variacionais em equações diferenciais.* Matemática Universitária, No. 7, 26 pg. 1988.

[16] FIGUEIREDO, G. J. M.. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos.* 01-08 de Nov. de 2012. 190 f. Notas de Aula.

[17] GAVIOLI, A.. *On the existence of heteroclinic trajectories for asymptotically autonomous equations.* Topol. Method Nonlinear Anal. 34, 251-266, 2009.

[18] GAVIOLI, A.. *Monotone heteroclinic solutions to non-autonomous equations via phase plane analysis.* Nonlinear Differ. Equ. Appl. 18, 79-100, 2011.

[19] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.. *Elliptic partial differential equations of second Order.* Classics in Mathematics, Springer, 2001.

[20] KAVIAN, O.. *Introduction à la théorie des points critiques: et applications aux problemes elliptiques.* Springer, 3º ed., 1993.

[21] KIRCHGÄSSNER, K.. *Wave-solutions of reversible systems and applications.* Journal of Diferential Equations, 1981.

[22] LIMA, E. L.. *Curso de análise.* Vol 1, Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[23] LIMA, E. L.. *Curso de análise.* Vol 2, Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[24] MARCELLI, C.; PAPALINI, F.. *Heteroclinic connections for fully non-linear non-autonomous second-order differential equations.* J. Differential Equations. 241 (2007), 160-183. Disponível em doi:10.1016/j.jde.2007.05.038

[25] RABINOWITZ, P. H.. *Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system.* To appear in Ergodic Th. and Dynamical Sys.

[26] RABINOWITZ, P. H.. *Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system, 2.* Differential and Integral Equations. Vol 7, No. 6, 1557-1572. 1994.

[27] RABINOWITZ, P. H.. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.* CBMS Reg. Conf. Ser. in Math, No. 65, AMS 1986.

[28] RABINOWITZ, P. H.. *On a class of Schödinger equations.* Z. Angew. Math. Phys. 43, no. 2, 270-291, 1992.

[29] RABINOWITZ, P. H.. *Solutions of heteroclinic type for some classes of semilinear elliptic PDE*, J. Math, Sci. Univ. Tokyo 1, 525-550. 1994.

[30] SALO, M. *Unique continuation for elliptic equations.* University of Jyväskylä. Notes, fall 2014. http://users.jyu.fi/ salomi/lecturenotes/index.html

[31] STRUWE, M.. *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.* Springer, 4º 2008.

[32] WILLEM, M.. *Minimax theorems.* Quinn-Woodbine: Birkhäuser, 1996.