Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Solução e Propriedades para Equação de Campos Neurais

por

Daniela da Silva Enéas †

sob orientação do

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Existência de Solução e Propriedades para Equação de Campos Neurais

por

Daniela da Silva Enéas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

____

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia

____

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho/2020

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus que esteve comigo em todas as horas, me concedendo força, saúde e que colocou em meu caminho muitas pessoas especiais que me ajudaram a chegar até aqui, e as quais citarei ao longo do texto.

Inicio minha lista de gratidão com o meus pais Evanildo Enéas e Erenilda Enéas, que desde do meu nascimento me conduziram com amor e carinho, estando ao meu lado em todos os meus sucessos e fracassos. Foram eles que me ensinaram que depois de uma queda devemos levantar e seguir em frente, lição sem a qual não estaria aqui. Prossigo a minha lista com o meu irmão preferido e amando Danilo Enéas, meu amigo e fiel companheiro para o que der e vier.

Com todo amor agradeço ao meu namorado Lucas da Silva, companheiro na vida e na Academia, que esteve presente em todos os momentos alegres e triste da minha jornada acadêmica, sem o qual eu não teria conseguido concluir mais essa etapa da minha vida.

Agradeço a todos os meus amigos da UFCG que fizeram parte da minha caminhada. Começo citando os que fazem parte do mestrado/doutorado: Lucas Siebra, Pedro, Geisa, Caio, José Lucas, Geovanny, Laise, Oliviero, Renan, Renato e Wallace. E todos os que conheci no PET matemática: Fábio, Luciana, Bruna, Amanda, Letícia, Otacilia, Luiz, Rodrigo, Gabriel, Pedro, Eduardo, Marcos, Isabella, Matheus e Jonas. Todos eles tornaram a vida mais alegre e doce durante todo a caminhada, o que me ajudou a encarar todas as dificuldades do curso. Em especial agradeço a Ismael, amigo que se tornou um irmão. O qual mesmo com abuso de vez enquanto, sempre me ajudou em tudo o que eu precisei.

Agradeço também a todos os funcionários e todo o corpo docente da UAMat-UFCG. Em especial agradeço ao professor Severino Horácio da Silva, que mesmo com todas as dificuldades que eu tive não me deixou desistir e me orientou, não somente nesse trabalho, mas também durante todo o curso de mestrado.

Agradeço também aos professores Aldo Trajano Lourêdo e Antonio Ronaldo Gomes Garcia pela disponibilidade em participar da banca.

Por fim agradeço a CAPES pelo o suporte financeiro.

Dedicatória

A Deus e a minha família.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de solução e algumas propriedades para equação de campos neurais

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t)), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Analisamos o caso em que a não linearidade é uma função Lipschitziana e um caso particular em que a não linearidade é descontínua. Além disso, estendemos os resultados sobre existência de solução, com parte não linear descontínua, para a equação de evolução

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + g\left(\beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t))\right) dy,$$

a qual generaliza a equação de campos neurais.

Palavras Chaves: Equação de Campos Neurais, Existência de solução, Função de Heaviside.

Abstract

In this work we stady the existence of solution and some properties for neural fields equations

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t)), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

We analyze the case in which the nonlinearity is a Lipschitzian function and a particular case in which the nonlinearity is a discontinuous function. In addition, we extend the results on the existence of a solution, with a discontinuous non-linear part, for the evolution equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + g\left(\beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t))\right) dy,$$

which generalizes the equation of neural fields.

Key words: Neural Fields Equations, Existence of solutions, Heaviside function.

Introdução

Neste trabalho nos baseamos em [9] para estudar existência e propriedades de solução para a equação de campos neurais

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t))dy \tag{1}$$

no espaço das funções continuas e limitadas. Em (1) u é uma função de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\omega : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é tal que $\omega(x, \cdot) \in L^1$ e $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m} \|\omega(x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \leq C_\omega$.

O modelo de Campos Neurais foi introduzido na literatura por Wilson e Cowan, [17], e a formulação dada em (1) foi dada Amari em [1].

Em (1), $u(x,t)$ denota o potencial da membrana neuronal na posição x, no tempo $t > 0$; $f(u(x,t))$ denota a atividade neuronal em $u(x,t)$ e ω representa a conexão neuronal da posição x para posição y (veja, por exemplo, [2], [4], [9], [11], [13], [12], [17] e [18]).).

Os objetivos desta dissertação consistem em: mostrar a existência e algumas propriedades da solução para equação (1) com a não linearidade contínua e mostrar existência e algumas propriedades para um caso particular de (1) em que a não linearidade é descontínua. Além disso, investigamos a validade dos resultados estudados para um modelo mais geral que estende tanto o modelo (1) quanto o modelo de separação de fases dado em [10].

Nosso trabalho está organizado como segue: No Capítulo 1, estudamos existência e unicidade da solução para equação de campos neurais (1) com f sendo uma função Lipschitziana. No Capítulo 2, estudamos existência de solução para a equação de campos neurais (1) em que f é a função de Heaviside. No capítulo 3, estudamos algumas propriedades para solução da equação de campos neurais no caso em que f é Heaviside. No capítulo 4, estendemos os resultados principais para um modelo mais geral proposto em [4] e que deixa a equação (1) como caso particular.

Capítulo 1

Equação de Campos Neurais com Parte Não-Linear Lipschitziana

Neste capítulo, seguimos a referência [9] para estudar a existência do problema de Cauchy associado a equação de campos neurais em que a parte linear é Lipschitziana. Mais precisamente estudamos a dinâmica do seguinte problema de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t))dy \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

A primeira equação em (1.1) foi introduzida na literatura por Amauri em [1] e é usada para modelar a atividade neuronal. Este modelo tem despertado a atenção de vários pesquisadores nas últimas décadas e muitas contribuições foram obtidas (veja, por exemplo, [2], [4],[9], [11], [12], [13], [14], [16] e [18]). Aqui $u(x,t)$ representa o potencial da membrana neuronal na posição x e no tempo $t \geq 0$; a função $f(u(x,t))$ denota a atividade neuronal em $u(x,t)$, e $w(x,y)$ representa a conexão sináptica do neurônio na posição x com o neurônio na posição y.

1.1 Terminologia e resultados preliminares

Nesta seção introduzimos alguns termos, conceitos e resultados preliminares que serão usados no decorrer do trabalho.

Começamos listando abaixo o conjunto de hipóteses assumidas sobre as funções

ω e f e que serão consideradas em nossos resultados sempre que necessário:

$(H1_\omega)$ $\omega(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m), \forall\, x \in \mathbb{R}^m$;

$(H2_\omega)$ $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^m} \|\omega(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \leq C_\omega$ para algum C_ω;

$(H3_\omega)$ $\|\omega(x,\cdot) - \omega(\overline{x},\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \leq C_\omega|x-\overline{x}|$, para todo $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^m$ para algum $C_\omega > 0$ depende de ω;

$(H4_\omega)$ $|w(x,y)| \leq C_\infty, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$, onde $C_\infty > 0$;

$(H5_\omega)$ O núcleo ω é sensível em qualquer conjunto aberto $G \subseteq \mathbb{R}^m$, isto é,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m} \left| \int_G \omega(x,y)dy \right| > 0.$$

$(H1_f)$ A função $f : \mathbb{R} \to [0,1]$;

$(H2_f)$ f é de classe C^1;

$(H3_f)$ f' é uma função limitada, isto é existe uma constante $L = L_f > 0$ tal que $|f'(x)| \leq L_f$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Segue de $(H2_f)$ e $(H3_f)$ que f é Lipschitziana com constante de Lipschitz L_f, ou seja,

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f|x-y|, \quad \forall \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Agora vamos definir os seguintes espaços, $BC^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m, L^1(\mathbb{R}^m))$ para $\alpha \in [0,1]$ como o espaço das funções $\omega(x,y)$ que cumpram as condições $(H1_\omega), (H2_\omega)$ e $(H3_\omega)$ com $|x-\overline{x}|$ sendo substituído por $|x-\overline{x}|^\alpha$ na condição $(H3_\omega)$, e, munido da norma,

$$\|\omega\|_{B^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m, L^1(\mathbb{R}^m))} := \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \|\omega(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} + \sup_{x\neq\overline{x}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\omega(x,y) - \omega(\overline{x},y)|}{|x-\overline{x}|^\alpha} dy.$$

Denotamos por $BC(\mathbb{R}^m, C^1(\mathbb{R}))$ como o espaço linear das funções $\varphi(x,t)$ limitadas e contínuas em x, diferenciável em t e com derivada limitada, munido da norma

$$\|\varphi\|_{BC(\mathbb{R}^m, C^1(\mathbb{R}_0^+))} := \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\, t>0} \left(|\varphi| + \left| \frac{d\varphi}{dt}(x,t) \right| \right).$$

Para $\rho > 0$, definimos $X_\rho = \{u : \mathbb{R}^n \times [0,\rho] \to \mathbb{R}$ contínuas e limitadas$\}$ com a norma

$$\|u\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}^m \;\; t\in[0,\rho]} |u(x,t)|.$$

Para facilitar o estudo de existência e unicidade de solução do problema (1.1) definiremos os operadores abaixo, os quais estão bem definidos sob as hipóteses para ω e f assumidas acima.

- $F : BC(\mathbb{R}^m, C^1(\mathbb{R}_0^+)) \to BC(\mathbb{R}^m, C^1(\mathbb{R}_0^+))$, dado por

$$F(u)(x,t) := -u(x,t) + \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t)) dy. \tag{1.2}$$

- $A : X_\rho \to X_\rho$, dado por

$$A(u)(x,t) := \int_0^t F(u)(x,s) ds. \tag{1.3}$$

- $J : BC(\mathbb{R}^m, C^1(\mathbb{R}_0^+)) \to BC(\mathbb{R}^m, C^1(\mathbb{R}_0^+))$, dado por

$$J(u)(x,t) := \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t)) dy. \tag{1.4}$$

A partir da definição do operador F dada em (1.2), podemos reescrever a equação (1.1) como o seguinte problema de Cauchy.

$$\begin{cases} u'(x,t) = F(u)(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Vamos começar mostrando a boa definição do operador F definido em (1.2) com o seguinte Lema.

Lema 1.1 *Assuma as hipóteses* $(H1_\omega) - (H4_\omega)$ *e* $(H1_f) - (H3_f)$*. Então, se a condição inicial* $u_0 \in BC(\mathbb{R}^m)$ *então a solução* $u(x,t)$ *de (1.1) é limitada, mais precisamente*

$$|u(x,t)| \leq C_{tot} = \max\{\|u_0\|_\infty, C_\omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0$$

Demonstração: Começamos observando que das hipóteses $(H1_f)$ e $(H2_\omega)$ segue que o operador $J(u)$, definido em (1.4), é limitado C_ω.

Em seguida, observamos que se $u(x,t)$ é uma solução de (1.1) então sua derivada com relação a t satisfaz

$$u'(x,t) \leq -bu(x,t) + c \;\text{ e }\; u'(x,t) \geq -bu(x,t) - c.$$

com $b = 1$ e $c = C_\omega$. Então o valor de $u(x,t)$ para x fixado será limitado pela solução de uma EDO do tipo

$$v'(t) = -bv(t) + C, \tag{1.6}$$

com condição inicial $v(0) = u_0(x) = a$. Mas, por cálculo direto verifica-se que a solução da EDO em (1.6) é dada por $v(t) = \frac{c}{b}(1 - e^{-bt}) + ae^{-bt}, \quad t > 0$. Daí, $|v(t)| \leq C_{tot} = \max\{a, \frac{c}{b}\}$. Consequentemente $|u(x,t)| \leq \{\|u_0\|, C_\omega\}$.

■

Integrando, de 0 até t, a primeira equação em (1.5), obtemos a seguinte equação

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t (Fu)(x,s)ds, \;\; x \in \mathbb{R}^m, \;\; t > 0,$$

a qual, pela definição do operador $A(u)$ em (1.3), pode ser reescrita da seguinte forma,

$$u(x,t) = u(x,0) + A(u)(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}^m, \;\; t > 0. \tag{1.7}$$

A equação (1.7) é chamada **equação integral**, ou **equação de Volterra**, a qual possui solução se, e somente se, o problema (1.1) tem solução como mostraremos no próximo lema.

Lema 1.2 *A equação de Volterra possui solução em $\mathbb{R}^m \times (0,\rho)$ com $\rho > 0$, se, e somente se, a equação (1.1) possui solução.*

Demonstração: Inicialmente vamos mostrar que a solução da equação de Volterra é uma solução para (1.1). Para isto, considere a função

$$g_x(t) := \int_0^t F(u)(x,s)ds.$$

Sabemos que $g_x(t)$ é diferenciável com relação a t, e a derivada é contínua para cada $x \in \mathbb{R}^m$. Assim a solução $u(\cdot,t)$ para a equação de Volterra é continuamente diferenciável com relação a $t > 0$ e a derivada é contínua em $[0,\infty]$, mostrando que $u(\cdot,t)$ é a solução para a equação (1.1).

Agora dada $u(\cdot,t)$ uma solução para (1.1) temos que

$$u'(x,t) = -u(x,t) + \int_{\mathbb{R}^m} w(x,y) f(u(y,t))dy.$$

Pela equação (1.2) obtemos,

$$u'(x,t) = F(u)(x,t).$$

Integrando ambos os membros da equação acima obtemos,

$$\int_0^t u'(x,s)ds = \int_0^t F(u)(x,s)ds.$$

Logo,

$$u(x,t) - u(x,0) = \int_0^t F(u)(x,s)ds.$$

Portanto,

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t F(u)(x,s)ds.$$

Logo, u é solução da equação de Volterra. ■

1.2 Existência e Unicidade de Solução

Nesta seção, provamos a existência e a unicidade de solução para o problema de Cauchy (1.1) no espaço de fase conveniente, X_ρ, e sob a hipótese da não linearidade ser Lipschitziana.

Conforme definimos no início do capítulo, para $\rho > 0$, definimos $X_\rho := BC\left(\mathbb{R}^m \times [0,\rho]\right)$, o espaço das funções contínuas $u : \mathbb{R}^m \times [0,\rho] \to \mathbb{R}$, munido da norma

$$\|u\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} |u(x,t)|.$$

Temos que $(X_\rho, \|u\|_\rho)$ é um espaço de Banach.

De fato, seja $(u_n) \subseteq X_\rho$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u_n - u_m\|_\rho < \varepsilon,\ \forall\, n, m \geq n_0.$$

Pela definição da norma $\|\cdot\|_\rho$ temos,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} |u_n(x,t) - u_m(x,t)| < \varepsilon, \forall\, n, m \geq n_0.$$

O que nos dá que,

$$|u_n(x,t) - u_m(x,t)| < \varepsilon, \forall\, n, m \geq n_0, \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,\rho]. \tag{1.8}$$

Daí, para cada $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^m \times [0,\rho]$ fixado, $(u_n(x_0,t_0))$ é uma sequência de Cauchy de números reais, e como $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach então existe $u(x_0,t_0)$ tal que $u_n(x_0,t_0) \to u(x_0,t_0)$, quando $n \to \infty$.

Agora fixando n em (1.8) e fazendo m tender ao infinto, obtemos

$$|u_n(x_0,t_0) - u(x_0,t_0)| < \varepsilon, \forall\, n \geq n_0, \forall\, (x_0,t_0) \in \mathbb{R}^m \times [0,\rho].$$

Isto significa que $u_n(x,t)$ converge para $u(x,t)$ uniformemente. Agora, basta observar que $u(x,t)$ é contínua e limitada, uma vez que é limite uniforme de funções limitadas e contínuas. Logo, concluímos que X_ρ é de Banach.

Quando $\rho = \infty$ temos $X := BC(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_0^+)$ e a norma $\|u\|_X$ é dada por $\|u\|_X := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^m,\ t>0} |u(x,t)|$.

Definição 1.3 *Chamamos o operador $T : X \to X$ de* ***contração****, se existir uma constante $q \in (0,1)$ tal que*

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq q\|u_1 - u_2\|,$$

para todo $u_1, u_2 \in X$.

Definição 1.4 *Seja $T : X \to X$ um operador sobre um espaço de Banach X. Dizemos que u é um* ***ponto fixo*** *T se $Tu_* = u_*$.*

Observação 1.4.1 *Para provar a existência e unicidade de solução para (1.1), usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach (veja Teorema A.2) que assegura a existência de um único ponto fixo para um operador $T : X \to X$ que é uma contração sobre um espaço métrico completo.*

Lema 1.5 *Para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, o operador A dado em (1.3) é uma contração no espaço X_ρ.*

Demonstração: Vamos decompor o operador A em $A = A_1 + A_2$, onde

$$A_1(v)(x,t) = -\int_0^t v(x,s)ds$$

e

$$A_2(v)(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} w(x,y) f(v(y,s)) dyds$$

com $x \in \mathbb{R}^m,\ \ t > 0$.

Começamos estimando a norma do operador A_1.

$$
\begin{aligned}
\|A_1 u\|_\rho &= \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} |A_1 u(x,t)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} \left| \int_0^t -u(x,s)ds \right| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} \int_0^t |u(x,s)|ds \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ s\in[0,\rho]} |u(x,s)|ds \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} \int_0^t \|u\|_\rho ds \\
&\leq \rho\|u\|_\rho.
\end{aligned}
$$

Como $A_1(u) - A_1(v) = A_1(u-v)$ segue que

$$
\|A_1 u - A_1 v\| \leq \rho\|u-v\|.
$$

Assim, para $\rho < 1$, o operador A_1 é uma contração.

Pela hipótese $(H3_f)$ a derivada da função f é limitada. Usando esta informação e o Teorema do Valor Médio de Lagrange (Ver Teorema (A.1)) concluímos que f é lipchistziana, ou seja, existe uma constante $L = L_f$ tal que

$$
|f(s) - f(\overline{s})| \leq L|s-\overline{s}|, \forall\ s, \overline{s} \in \mathbb{R}. \tag{1.9}
$$

A partir disso podemos fazer a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
|J(u_1)(x,t) - J(u_2)(x,t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} w(x,y) f(u_1(y,t))dy - \int_{\mathbb{R}^m} w(x,y) f(u_2(y,t))dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^m} w(x,y) \left[f(u_1(y,t)) - f(u_2(y,t)) \right] dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} |w(x,y)||f(u_1(y,t)) - f(u_2(y,t))|dy.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade (1.9) e a hipótese $(H2_\omega)$, temos

$$
\begin{aligned}
|J(u_1)(x,t) - J(u_2)(x,t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |w(x,y)| L |u_1(y,t) - u_2(y,t)| \\
&\leq L \int_{\mathbb{R}^m} |w(x,y)| \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ s\in[0,\rho]} |u_1(y,t) - u_2(y,t)| dy \\
&= L \int_{\mathbb{R}^m} |w(x,y)| \|u_1 - u_2\|_\rho dy \\
&= L \|u_1 - u_2\|_\rho \int_{\mathbb{R}^m} |w(x,y)| dy \\
&= L \|u_1 - u_2\|_\rho \|w(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \\
&\leq C_w L \|u_1 - u_2\|_\rho.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
|A_2(u_1)(x,t) - A_2(u_2)(x,t)| &= \left| \int_0^t J(u_1)(x,s) ds - \int_0^t J(u_2)(x,s) ds \right| \\
&= \left| \int_0^t (J(u_1)(x,s) - J(u_2)(x,s)) ds \right| \\
&\leq \int_0^t |J(u_1)(x,s) - J(u_2(x,s))| ds \\
&\leq \int_0^t C_w L \|u_1 - u_2\|_\rho ds \\
&\leq \rho L C_w \|u_1 - u_2\|_\rho.
\end{aligned}
$$

Portanto, para ρ suficientemente pequeno o operador A_2 é uma contração em X_ρ. Assim,

$$
\begin{aligned}
\|A(u_1) - A(u_2)\|_\rho &= \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} |A(u_1)(x,t) - A(u_2)(x,t)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} |A_1(u_1)(x,t) - A_1(u_2)(x,t) + A_2(u_1)(x,t) - A_2(u_2)(x,t)| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} |A_1(u_1)(x,t) - A_1(u_2)(x,t)| \\
&+ \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ t\in[0,\rho]} |A_2(u_1)(x,t) - A_2(u_2)(x,t)| \\
&\leq \rho \|u_1 - u_2\|_\rho + \rho L C_w \|u_1 - u_2\|_\rho \\
&= (1 + L C_w) \rho \|u_1 - u_2\|_\rho.
\end{aligned}
$$

Tomando $q := (1 + LC_w)\rho$ temos que A é uma contração em X_ρ, se $q < 1$. ∎

Teorema 1.6 (Existência e Unicidade Local de Solução) *Suponha que ω cumpra as hipóteses $(H1_\omega) - (H5_\omega)$ e que a função f cumpra as hipóteses $(H1_f) - (H3_f)$ e $q := (1 + LC_w)\rho < 1$. Então a equação (1.1) adimite existência e a unicidade de solução no intervalo $[0, \rho]$.*

Demonstração: Definimos o operador $\overline{A} : X_\rho \to X_\rho$ por

$$\overline{A}(u) = u_0 + Au. \tag{1.10}$$

Como provamos no Lema 1.5 A é uma contração em X_ρ. Daí,

$$\begin{aligned} \|\overline{A}(u_1) - \overline{A}(u_2)\|_\rho &= \|u_0 + A(u_1) - u_0 - A(u_2)\|_\rho \\ &= \|A(u_1) - A(u_2)\|_\rho \\ &\leq q\|u_1 - u_2\|_\rho, q \in (0, 1). \end{aligned}$$

Então, $\overline{A}$ é uma contração em X_ρ. Logo, aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach (Ver teorema (A.2)), existe um único $u \in X_\rho$ tal que $\overline{A}(u) = u$ e portanto

$$u = u_0 + A(u).$$

Portanto, u é a única solução da equação de Volterra em $[0, \rho]$. E como provamos no Lema 1.2, isso implica que u é a única solução da equação (1.1) em $[0, \rho]$. ∎

Teorema 1.7 (Existência e Unicidade Global de Solução) *Suponha que ω cumpra as hipóteses $(H1_\omega) - (H5_\omega)$ e que a função f cumpra as hipóteses $(H1_f) - (H3_f)$. Então, obtemos a existência e unicidade global de soluções para a equação (1.1).*

Demonstração: Primeiramente, observamos que pelo Teorema 1.6 temos a existência e unicidade de solução no intervalo $l_0 = [0, \rho]$ com $\rho = \dfrac{1}{2(1 + C_w)}$. Como as estimativas na prova do Teorema 1.6 não dependem da condição inicial, podemos repetir o processo para o problema de Cauchy com condição inicial $u_1 = u(x, \rho)$ e assim conseguiremos a existência e unicidade de solução para o intervalo $[\rho, 2\rho]$. Então, por iteração, poderemos obter a existência e unicidade de solução para qualquer intervalo $l_n = [n\rho, (n + 1)\rho]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. ∎

Capítulo 2

Equação de Campos Neurais com a Parte Não-linear Descontínua

Como vimos no Capítulo 1, quando o termo não linear da equação é Lipschitz, temos condições suficientes para mostrar a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy (1.1). Quando o lado direito de (1.1) é apenas uma função contínua já não podemos garantir a existência de solução, pois o Teorema de Peano não é válido em dimensão infinita (veja [3]). Neste capítulo, motivados por [9] estudamos o problema de Cauchy associado a Equação de Campos Neurais, em que a função de ativação f é dada pela função Heaviside, isto é, $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por

$$f(s) := \begin{cases} 0, \text{ se } s < \eta \\ 1, \text{ se } s \geq \eta, \end{cases}, \tag{2.1}$$

onde η descreve a lei do tudo ou nada da geração de potencial de ações. Estudamos, neste caso particular, métodos para analisar a existência de solução e outras propriedades para solução do problema.

2.1 Existência de Solução

Para começar, é necessário observar que ao considerar a função f descontínua, o operador $F(u)$ definido em (1.2) deixa de ser contínuo, fazendo com que não exista mais garantias de que o problema de Cauchy (1.5) com a função de ativação dada pela função de Heaviside tenha solução.

O objetivo dessa seção será mostrar que, embora não possamos aplicar os resultados clássicos de EDO em Espaços de Banach, neste caso particular, será possível garantir a existência de solução.

Lema 2.1 *Supondo que* ω *cumpre as hipóteses* $(H1_\omega) - (H5_\omega)$ *e que* f *é a função de Heaviside definida em* (2.1). *Então o operador* $F(u)$ *não depende continuamente de* $u \in X_\rho$.

Demonstração: Considere a sequência de funções $u_n \subseteq X$ dada por

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq -2; \\ (\eta - \frac{1}{n})(2+x), \text{ se } x \in (-2,-1); \\ \eta - \frac{1}{n}, \text{ se } x \in [-1,1]; \\ (\eta - \frac{1}{n})(2-x), \text{ se } x \in (1,2); \\ 0, \text{ se } x \geq 2, \end{cases} \tag{2.2}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Observe que o limite da sequência $(u_n(x))$ é a função $u(x)$, definida por

$$u(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq -2; \\ \eta(2+x), \text{ se } x \in (-2,-1); \\ \eta, \text{ se } x \in [-1,1]; \\ \eta(2-x), \text{ se } x \in (1,2); \\ 0, \text{ se } x \geq 2. \end{cases}$$

Veja o gráfico abaixo:

Pela lei de formação das funções, e pelo que podemos observar na Figura 2.1 temos:

$$u(x) = \eta, \text{ se } x \in [-1,1]$$

e

$$u(x) < \eta \text{ se } x \in [-1,1]^c.$$

e ainda $u_n(x) < \eta$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Com isso, obtemos

$$f(u(x)) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in [-1,1] \\ 0, \text{ se } x \in [-1,1]^c \end{cases}$$

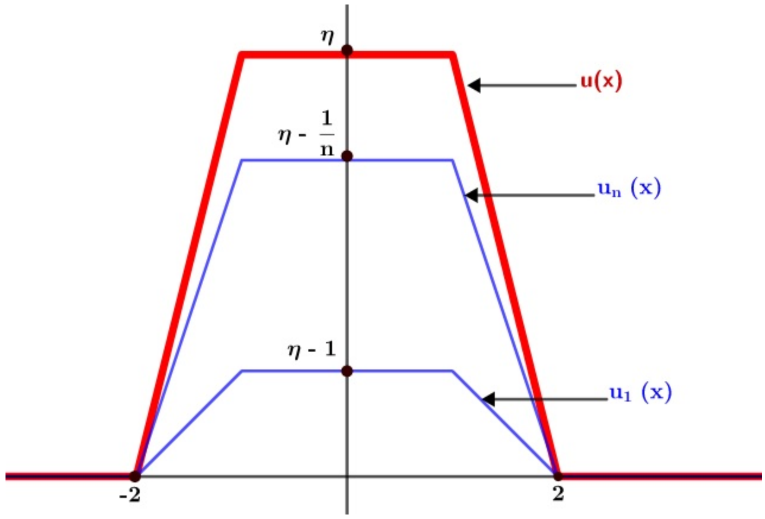

Figura 2.1: Comportamento da sequência u_n e de seu limite u

e $f(u_n(x)) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

Daí,

$$(Fu)(x) = -u(x) + \int_{[-1,1]} w(x,y)\eta dy$$

e

$$(Fu_n)(x) = -u_n(x).$$

Usando que,

$$\int_{[-1,1]} w(x,y)\eta dy = (J\eta)(x).$$

Temos,

$$\lim_{n\to\infty} [(Fu)(x) - (Fu_n)(x)] = \lim_{n\to\infty} [u(x) - u_n(x) + J\eta(x)] = J\eta(x).$$

Portanto, concluímos que F não é contínuo. ■

Uma importante conclusão do Lema 2.1 é que o operador $A(u)$, definido em (1.3), não pode ser uma contração no espaço X_ρ. Pois, caso contrário o operador $A(u)$ seria contínuo, mas isso não é verdade, pois

$$\begin{aligned}
|A(u_n)(x,t) - A(u)(x,t)| &= \left| \int_0^t F(u_n)(x,s)ds - \int_0^t F(u)(x,s)ds \right| \\
&= \left| \int_0^t [F(u_n)(x,s) - F(u)(x,s)]ds \right| \\
&= \left| \int_0^t J\eta(x)ds \right| \\
&\le |J\eta(x)||t|.
\end{aligned}$$

Logo, $\|A(u_n) - A(u)\|_\infty$ não tende necessariamente para zero quando $\|u_n - u\|_\infty \to 0$.

Por A não ser uma contração, não é possível aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, por isso é necessário usarmos alguns argumentos de compacidade. Para isto, considere o espaço de Hölder $X_{\rho,\alpha} := BC^\alpha(\mathbb{R}^m \times [0,\rho])$ para $\alpha \in [0,1]$, formado pelas funções contínuas $u : \mathbb{R}^m \times [0,\rho] \to \mathbb{R}$ e equipado com a norma de Hölder

$$\|\varphi\|_{\rho,\alpha} := \|\varphi\|_\rho + \sup_{t\in[0,\rho],x,y\in\mathbb{R}^m} \frac{|\varphi(x,t) - \varphi(y,t)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{t,s\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m} \frac{|\varphi(x,t) - \varphi(x,s)|}{|t-s|^\alpha}. \quad (2.3)$$

Embora o espaço de Hölder $X_{\rho,\alpha} = BC^\alpha(\mathbb{R}^m \times [0,\rho])$ não esteja compactamente imerso no espaço $X_\rho = BC(\mathbb{R}^m \times [0,\rho])$, é bem conhecido na literatura que quando nos restringimos a domínios limitados esta inclusão compacta ocorre (Ver Teorema A.4). Então para $R > 0$, se $B_R(0)$ denota a bola de centro na origem de $\mathbb{R}^m$ e raio R, o espaço de Hölder $X_{\rho,\alpha} = BC^\alpha(B_R(0) \times [0,\rho])$ está imerso compactamente no espaço $X_\rho = BC(B_R(0) \times [0,\rho])$. Isto é, dada uma sequência limitada (ψ_n) em $X_{\rho,\alpha}$ existe uma subsequência (ψ_{n_k}) que **converge localmente** para um elemento $\psi \in X_\rho$, isso significa que, dado $R > 0$

$$\sup_{t\in[0,\rho],x\in B_R(0)} |\psi_{n_k}(x,t) - \psi(x,t)| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Como o operador $A(u)$ pode ser reescrito como $A(u) = A_1(u) + A_2(u)$, com

$$A_1(u) := -u(x,t)$$

e

$$A_2(u)(x,t) := \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t)) dy.$$

Então é preciso mostrar algumas propriedades sobre os operadores $A_1(u)$ e $A_2(u)$ nos espaços X_ρ e $X_{\rho,\alpha}$, respectivamente.

Lema 2.2 *O operador $A_1(u)$ é um operador linear que leva os limitados de X_ρ em X_ρ com norma limitada por ρ. Em particular para $\rho < 1$ o operador $(I - A_1)$ é invertível em X_ρ com a inversa limitada dada por*

$$(I - A_1)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i.$$

Além disso, os operadores A_1, $I - A_1$ e $(I - A_1)^{-1}$ são ***locais com relação a variável x*** *com limitação local no sentido que*

$$A(\chi_M u) = (\chi_M A)(u), \ \ u \in X_\rho,$$

para todo conjunto aberto $M \subseteq \mathbb{R}^m$ onde $\chi_M \cdot A$ é limitado, por ρ, em $BC(M \times [0, \rho])$. Esses operadores levam sequências localmente convergentes em sequências localmente convergente.

Demonstração:

- A_1 é linear

$$\begin{aligned} A_1(u+v)(x,t) &= \int_0^t -(u+v)(x,s)ds \\ &= \int_0^t -[u(x,s)+v(x,s)]ds \\ &= \int_0^t \left[-u(x,s)-v(x,s)\right]ds \\ &= \int_0^t -u(x,s)ds + \int_0^t -v(x,s)ds \\ &= A_1(u)(x,s) + A_1(v)(x,t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1(\alpha u)(x,t) &= \int_0^t -(\alpha u)(x,s)ds \\ &= \int_0^t -\alpha u(x,s)ds \\ &= \alpha \int_0^t -u(x,s)ds \\ &= \alpha A_1(u)(x,t). \end{aligned}$$

- A_1 é limitado

$$\begin{aligned} \|A_1(u)\|_\rho &= \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m} |A_1(u)(x,t)| \\ &= \sup_{t\in[0,\rho],x\in\ \mathbb{R}^m} \left|\int_0^t -u(x,s)ds\right| \\ &\leq \sup_{t\in[0,\rho],x\in\ \mathbb{R}^m} \int_0^t \sup_{t\in[0,\rho],x\in\ \mathbb{R}^m} |u(x,s)|ds \\ &= \|u\|_\rho \int_0^t ds \\ &\leq \rho\|u\|_\rho. \end{aligned}$$

- $(I - A_1)$ é invertível.

  Primeiramente vamos mostrar que a série $\sum_{m=0}^{\infty} A_1^m$ é convergente. Temos,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|A_1^m\|_\rho \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|A_1\|_\rho^m.$$

  Como $\|A_1\|_\rho^m < 1$, então a série $\sum_{m=0}^{\infty} A_1^m$ é absolutamente convergente. E como X_ρ é um espaço de Banach, então $\sum_{0}^{\infty} A_1^m$ é convergente. Observe, agora, que por $\sum_{m=0}^{\infty} A_1^m$ convergir temos $\lim_{m\to\infty} A_1^m = 0$. E veja que,

$$(I - A_1^n) = (I - A_1)(I + A_1 + A_1^2 + ... + A_1^{n-1}). \tag{2.4}$$

  Passando o limite em n na equação (2.4) temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(I - A_1^n) &= \lim_{n\to\infty}(I - A_1)(I + A_1 + ... + A_1^{n-1}) \\ I &= (I - A_1)\lim_{n\to\infty}(I + A_1 + ... + A_1^{n-1}) \\ I &= (I - A_1)\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n. \end{aligned}$$

  Logo,

$$(I - A_1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_1^n.$$

- $A_1, (I - A_1)$ e $(I - A_1)^{-1}$ são locais. Veja que $\chi_A u$ é a restrição da função u aos pontos $(x,t) \in M \times [0,\rho]$. Logo,

$$A_1(\chi_M u) = \int_0^t -u(x,s)ds \;\text{ com }\; x \in M.$$

  Por outro lado,

$$\begin{aligned} \chi_M A_1 : M \times [0,\rho] &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\to (\chi_M A_1)(u)(x,t). \end{aligned}$$

  Logo, $[(\chi_M(A_1))u](x,t) = \int_0^t - u(x,s)ds$ com $x \in M$. E portanto,

$$A_1(\chi_M u) = (\chi_M A_1)u. \tag{2.5}$$

Concluíndo que o operador A_1 é local.

Agora, vamos para o operador $(I - A_1)$. Usando a equação (2.5) temos

$$\begin{aligned}(I - A_1)(\chi_M u) &= I\chi_M u - A_1(\chi_M u)\\ &= \chi_M I u - (\chi_M A_1)u\\ &= \chi_M(Iu - A_1 u)\\ &= \chi_M(I - A_1)u.\end{aligned}$$

Mostrando que o operador $(I - A_1)$ é local.

Para finalizar precisamos mostrar que o operador $(I - A_1)^{-1}$ é local. Para isso começaremos mostrando, por indução, que

$$A_1^n(\chi_M u) = (\chi_M A_1^n)u \tag{2.6}$$

é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe que, para $n = 2$ a igualdade (2.6) é válido. De fato,

$$\begin{aligned}A_1^2(\chi_M u) &= A_1(A_1(\chi_M u))\\ &= A_1(\chi_M A_1 u)\\ &= (A_1\chi_M)(A_1 u)\\ &= \chi_M A_1(A_1 u)\\ &= \chi_M(A_1^2 u) = (\chi_M A_1^2)u.\end{aligned}$$

Supondo que a igualdade (2.6) é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que ela também é válida para $n + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}A_1^{n+1}(\chi_M u) &= A_1(A_1^n(\chi_M u))\\ &= A_1(\chi_M A_1^n)u\\ &= (\chi_M A_1 A_1^n)u\\ &= (\chi_M A^{n+1})u.\end{aligned}$$

Com isso concluímos que,

$$A_1^n(\chi_M u) = (\chi_M A_1^n), \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando a igualdade acima, conseguimos provar que

$$(A_1 + A_1^2 + ... + A_1^n)\chi_M u = \chi_M(A_1 + ... + A_1^n)(u). \tag{2.7}$$

De fato,

$$\begin{aligned}(A_1 + A_1^2 + ... + A_1^n)\chi_M u &= A_1\chi_M u + ... + A_1^n\chi_M u\\ &= \chi_M A_1 u + ... + \chi_M A_1^n u\\ &= \chi_M(A_1 + ... + A_1^n)u.\end{aligned}$$

Daí, fazendo n tender ao infinito na igualdade (2.7), temos

$$\begin{aligned}(I - A_1)^{-1}(\chi_M u) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n\right)(\chi_M u)\\ &= \lim_{n\to\infty}(I + A_1 + A_1^2 + ... + A_1^n)(\chi_M u)\\ &= \lim_{n\to\infty}\chi_M(I + A_1 + ... + A_1^n)u\\ &= \chi_M \lim_{n\to\infty}(I + A_1 + ... + A_1^n)u\\ &= \chi_M\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_1^n\right)u\\ &= \chi_M(I - A_1)^{-1}u.\end{aligned}$$

Mostrando que $(I - A_1)^{-1}$ é local.

- A_1, $(I - A_1)$ e $(I - A_1)^{-1}$ levam sequências localmente convergentes em sequências localmente convergentes.

  Dado $\psi_n \subseteq X_\rho$ localmente convergente para ψ, ou seja, existe uma subsequência (ψ_{n_k}) que converge para ψ em X_ρ. Isto é, para $R > 0$ fixado temos

$$\sup_{t\in[0,\rho],x\in B_R(0)} |\psi_{n_k}(x,t) - \psi(x,t)| \to 0.$$

  Por A_1 ser linear, temos,

$$|A_1(\psi_{n_k})(x,t) - A_1(\psi(x,t))| = |A_1(\psi_{n_k} - \psi)(x,t)|.$$

e

$$
\begin{aligned}
|A_1(\psi_{n_k}-\psi)(x,t)| &= \left|\int_0^t -(\psi_{n_k}-\psi(x,s))ds\right| \\
&\leq \int_0^t |\psi_{n_k}(x,s)-\psi(x,s)|ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{s\in[0,\rho],x\in B_R(0)} |\psi_{n_k}(x,s)-\psi(x,s)|ds \\
&= \|\psi_{n_k}-\psi\|_\rho \int_0^t ds \\
&\leq \rho\|\psi_{n_k}-\psi\|_\rho \to 0, \text{ quando } k\to\infty.
\end{aligned}
$$

Sendo assim,

$$
\sup_{t\in[0,\rho],x\in B_R(0)} |A_1(\psi_{n_k})(x,t)-\psi(x,t)| \to 0, \text{ quando } k\to\infty.
$$

Logo, A_1 leva sequências localmente convergentes em sequências localmente convergentes. Vamos mostrar a mesma propriedade para o operador $(I-A_1)$. Para isso temos,

$$
\begin{aligned}
|(I-A_1)(\psi_{n_k})(x,t)-(I-A_1)(\psi(x,t))| &= |(\psi_{n_k})(x,t)-A_1(\psi_{n_k})(x,t) \\
&\quad -\psi(x,t)+A_1\psi(x,t)| \\
&\leq |\psi_{n_k}(x,t)-\psi(x,t)| \\
&\quad +|A_1(\psi_{n_k})(x,t)-A_1(\psi)(x,t)|. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Como ψ_n converge localmente para ψ e $A_1(\psi_n)$ converge localmente para $A_1(\psi)$, então tem-se que (2.8) tende a zero quando k tende a infinito. Concluímos, daí que o operador $(I-A_1)$ leva sequência localmente convergente em localmente convergente. Só nos resta provar para o operador $(I-A_1)^{-1}$, e isto será feito por indução. Note que para os operadores I e para A_1 já foi provado que levam sequências localmente convergentes em sequências localmente convergentes. Suponha que para algum $i\in\mathbb{N}$ o operador A_1^i leva sequências localmente convergentes em sequências localmente convergentes, ou seja,

$$
|A_1^i(\psi_{n_k})(x,t)-A_1^i(\psi)(x,t)| \to 0, \text{ quando } k\to\infty.
$$

Provamos que essa propriedade também vale para A^{i+1}. De fato,

$$
|A_1^{i+1}(\psi_{n_k})(x,t)-A_1^{i+1}(\psi)(x,t)| = |A_1(A_1^i(\psi_{n_k})(x,t))-A_1(A_1^i(\psi)(x,t))|.
$$

Como $A_1^i(\psi_{n_k})(x,t)$ é uma sequência localmente convergente pela hipótese de indução, e como essa propriedade é válida para o operador A_1, então conclui-se que

$$|A_1(A_1^i(\psi_{n_k}(x,t))) - A_1(A_1^i(\psi(x,t)))| \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Logo, para qualquer $i \in \mathbb{N}$ o operador A_1^i leva sequências localmente convergente em sequência localmente convergente.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
&|(I - A_1)^{-1}(\psi_{n_k}(x,t)) - (I - A_1)^{-1}(\psi(x,t))| = \\
&|(\sum_{i=0}^{\infty} A_1^i)(\psi_{n_k}(x,t) - (\sum_{i=0}^{\infty} A_1^i)(\psi(x,t)))| = \\
&\lim_{p\to\infty} |\sum_{i=0}^{p} A^i \psi_{n_k}(x,t) - \sum_{i=0}^{p} A_1^i \psi(x,t)| = \\
&\lim_{p\to\infty} |\psi_{n_k}(x,t) + ... + A_1^p \psi_{n_k}(x,t) - \psi(x,t) - ... - A_1^p \psi(x,t)| \leq \\
&\lim_{p\to\infty} |\psi_{n_k}(x,t) - \psi(x,t)| + ... + \lim_{p\to\infty} |A_1^i \psi_{n_k} - A_1^i \psi(x,t)| = 0.
\end{aligned}$$

Com isso mostramos essa propriedade para os três operadores, completando a demonstração.

■

Teorema 2.3 *Assuma que f é a função de Heaviside e que $\omega \in BC^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m, L^1(\mathbb{R}^m))$ e satisfaz a hipótese $(H2_\omega)$, isto é, ω é uma função Hölder contínua na primeira variável e integrável com relação a segunda variável. Então, temos uma limitação para o operador A_2 de X_ρ para $X_{\rho,\alpha}$.*

Demonstração: O objetivo é mostrar que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|A_2 u\|_{\rho,\alpha} \leq K, \ \forall \ u \in X_\rho.$$

Lembrando que,

$$\|\varphi\|_{\rho,\alpha} = \|\rho\|_\rho + \sup_{t,s\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m} \frac{|\varphi(x,t) - \varphi(x,s)|}{|t-s|^\alpha} + \sup_{t\in[0,\rho],x,y\in\mathbb{R}^m} \frac{|\varphi(x,t) - \varphi(y,t)|}{|x-y|^\alpha},$$

faremos a estimativa por etapas,

$$\begin{aligned}
\|A_2(u)\|_\rho &= \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\, t\in[0,\rho]} |A_2(u)(x,t)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\, t\in[0,\rho]} \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(x,s)) dyds\right| \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\, t\in[0,\rho]} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} |\omega(x,y)||f(u(x,s))| dyds \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\, t\in[0,\rho]} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} |\omega(x,y)| dyds \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\, t\in[0,\rho]} \int_0^t \|\omega(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} ds \\
&= \|\omega(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\, t\in[0,\rho]} \int_0^t ds \\
&\le C_\omega \cdot \rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_2(u)(x,t) - A_2(u)(x,s)| &= \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,\theta)) dyd\theta - \int_0^s \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,\theta)) dyd\theta\right| \\
&= \left|\int_s^t \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,\theta)) dyd\theta\right| \\
&\le \int_s^t \int_{\mathbb{R}^m} |\omega(x,y)||f(u(y,\theta))| dyd\theta \\
&\le \int_s^t \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\omega(x,y)| dy\right) d\theta \\
&= \|\omega(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \int_s^t d\theta \\
&\le C_\omega |t-s|.
\end{aligned}$$

Assim, o operador $A_2(u)$ é lipschitz com relação a variável t. E pela imersão compacta de $BC^{0,1}([0,\rho])$ no espaço $BC^{0,\alpha}([0,\rho])$ para todo espaço de Hölder com $\alpha \in (0,1)$, obtemos $(A_2 u)$ é Hölder contínuo com relação a variável t, ou seja,

$$|A_2 u(x,t) - A_2 u(x,s)| \le C_\omega |t-s|^\alpha, \;\; \alpha \in (0,1).$$

E ainda usando a hipótese que ω é Hölder contínua,

$$\begin{aligned}
|A_2u(x,t) - A_2u(\overline{x},t)| &= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dyds - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}\omega(\overline{x},y)f(u(y,s))dyds\right| \\
&= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}[\omega(x,y) - \omega(\overline{x},y)]f(u(y,s))dyds\right| \\
&\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}|\omega(x,y) - \omega(\overline{x},y)||f(u(y,s))|dyds \\
&\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}|\omega(x,y) - \omega(\overline{x},y)|dyds \\
&= \|\omega(x,\cdot) - \omega(\overline{x},\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}\int_0^t ds \\
&\leq \rho|x - \overline{x}|^\alpha.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|A_2u\|_{\rho,\alpha} &= \|A_2u\|_\rho + \sup_{t,s\in[0,1],x\in\mathbb{R}^m}\frac{|A_2u(x,t) - A_2u(x,s)|}{|t-s|^\alpha} + \sup_{t\in[0,1],x,y\in\mathbb{R}^m}\frac{|A_2u(x,t) - A_2u(y,t)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq C_\omega\rho + \frac{|t-s|^\alpha}{|t-s|^\alpha}C_\omega + \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^\alpha}\rho \\
&= C_\omega\rho + C_\omega + \rho = K.
\end{aligned}$$

■

Considere, agora uma sequência de funções suaves e não lineares $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida nos intervalos $[-\infty, \eta - \frac{1}{n}]$ e $[\eta, \infty]$ como as constantes 0 e 1, respectivamente as quais serão ligadas por uma função suave e não linear no intervalo $(\eta - \frac{1}{n}, \eta)$.

Os operadores A_n e F_n são os que dependem de f_n, e o operador A_n pode ser decomposto da seguinte forma $A_n = A_1 + A_{2,n}$.

A descontinuidade de f traz algumas dificuldades para trabalhar com A_2 e $A_{2,n}$, as quais são refletidas nos seguintes resultados.

Lema 2.4 *Para $u \in X_\rho$ fixado, temos que $A_{2,n}$ converge para A_2 localmente. A convergência não se mantém na norma do operador.*

Demonstração: Considere,

$$\begin{aligned}
\sigma_n &:= |A_2u(x,t) - A_{2,n}u(x,t)| \\
&= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s)) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f_n(u(y,s))dyds\right| \\
&= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)[f(u(y,s)) - f_n(u(y,s))]dyds\right|.
\end{aligned}$$

Definimos agora o conjunto,

$$M_n(t) = \{y \in \mathbb{R}^m; u(y,t) \in \text{supp}(f - f_n)\}.$$

Daí,

$$\sigma_n \leq \int_0^t \int_{M_n(t)} |\omega(x,y)| dyds.$$

Para conjuntos compactos, temos a convergência uniforme, daí

$$\int_0^t \int_{M_n(t)} |\omega(x,y)| dyds \to 0.$$

Isso não ocorre fora de conjuntos compactos. ∎

Dada uma função $v \in X_\rho$, definimos o conjunto

$$M_{\eta,\rho,R}[v] := \{(y,s) \in \overline{B_R(0)}; v(y,s) = \eta\}. \quad (2.9)$$

Quando, na definição acima, $R = \infty$, temos $\overline{B_\infty(0)} = \mathbb{R}^m$.

Denotaremos a **medida** de um conjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ por

$$\mu(M) := \int_M 1dy.$$

Chamaremos o operador A de **localmente contínuo** se dada uma sequência u_n localmente convergente para u, tivermos $A(u_n) \to A(u)$.

Lema 2.5 *Supondo que ω cumpre as hipóteses $(H1_\omega) - (H5_\omega)$e f é a função de Heaviside. O operador A_2 é localmente contínuo em $v \in X_\rho$ se, e somente se, a medida do conjunto $M_{\eta,\rho,\infty}[v]$ definido em (2.9), é zero. E ainda se (u_n) converge localmente para u temos $A_{2,n}(u_n) \to A_{2,n}(u)$.*

Antes de começarmos a provar o Lema 2.5 vamos fazer algumas observações.

Observação 2.5.1 *Se $\mu(M_{\eta,\rho,\infty}[v]) = 0$, então $\mu(M_{\eta,\rho,R}[v]) = 0$, para qualquer $R > 0$. De fato,*

$$0 \leq \left| \int_{M_{\eta,\rho,R}[v]} 1\, dy \right| \leq \left| \int_{M_{\eta,\rho,\infty}[v]} 1\, dy \right| = 0 \Rightarrow \left| \int_{M_{\eta,\rho,R}[v]} 1\, dy \right| = 0.$$

Logo, $\mu(M_{\eta,rho,R}[v]) = 0$.

Observação 2.5.2 *O conjunto $M_{\eta,\rho,R}[v]$ é fechado para qualquer $R > 0$.*

De fato, dado $(y,s) \in \overline{M_{\eta,\rho,R}[v]}$ existe uma sequência $((y_n,s_n)) \in M_{\eta,\rho,R}[v]$ tal que $((y_n,s_n))$ converge para (y,s). Daí temos $v(y_n,s_n) = \eta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que nos dá $\lim\limits_{n\to\infty} v(y_n,s_n) = \eta$. Por outro lado, v é uma função contínua, então

$$\lim_{n\to\infty} v(y_n,s_n) = v(\lim_{n\to\infty}(y_n,s_n)) = v(y,s).$$

E pela unicidade do limite, temos $v(y,s) = \eta$. Logo, $(y,s) \in M_{\eta,\rho,R}[v]$. Mostrando que $M_{\eta,\rho,R}[v]$ é fechado.

Observação 2.5.3 *Da observação anterior podemos concluir que $(B_R(0) \times [0,\rho]) \smallsetminus M_{\eta,\rho,R}[v]$ é um aberto relativo. Daí podemos escolher uma sequência $(G_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de conjuntos fechados contidos em $(B_R(0) \times [0,\rho]) \smallsetminus M_{\eta,\rho,R}[v]$, tal que*

$$\mu_l := \mu((\overline{B_R(0)} \times [0,\rho]) \smallsetminus G_l) \to 0, \ \text{quando } l \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

E ainda, se v_n converge localmente para v em X_ρ, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(v_n(y,s)) = f(v(y,s)),$$

para $n \geq N$ e $(y,s) \in G_l$.

De fato, por v_n convergir localmente para v temos que

$$\sup_{s\in[0,\rho],\, y\in\mathbb{R}^m} |v_n - v| \to 0 \ \text{quando } n \to \infty.$$

Donde segue que,

$$|v_n(y,s) - v(y,s)| \to 0$$

quando $n \to \infty$ e para todo $(y,s) \in B_R(0) \times [0,\rho]$. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|v_n(y,s) - v(y,s)| < \varepsilon, \ \forall\ n \geq N \ \text{e} \ \forall\ (y,s) \in B_R(0) \times [0,\rho]. \tag{2.11}$$

Como $G_l \subseteq (B_R(0) \times [0,\rho]) \smallsetminus M_{\eta,\rho,R}[v]$, então dado $(y,s) \in G_l$ temos

$$v_n(y,s) \neq \eta \ \text{e} \ v(y,s) \neq \eta.$$

Por (2.11), $v_n(y,s)$ e $v(y,s)$ estão tão próximos quando se queira, logo ou

$$v_n(y,s) > \eta \ \text{e} \ v(y,s) > \eta$$

ou

$$v_n(y,s) < \eta \;\; e \;\; v(y,s) < \eta.$$

Daí,

$$f(v_n(y,s)) = f(v(y,s)), \;\; \forall \;\; n \geq N \;\; e \;\; (y,s) \in G_l. \tag{2.12}$$

Agora, estamos prontos para provar o Lema 2.5.

Demonstração: Dado $v \in X_\rho$ tal que $\mu(M_{\eta,\rho,\infty}[v]) = 0$ e v_n uma sequência em X_ρ tal que v_n converge localmente para v. Daí, dado $r > 0$ e $\varepsilon > 0$ analisamos as seguintes situações:

1. Escolhemos $R > 0$ tal que

$$\rho \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_R(0)} |\omega(x,y)| dy < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ com }\; x \in B_R(0).$$

   A existência de R é uma consequência da condição $\omega(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ e que é contínuo em $x \in \mathbb{R}^m$ e limitado em um conjunto compacto $\overline{B_r(0)}$.

2. Por (2.10) podemos escolher $L \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_R(0)\setminus G_L} |\omega(x,y)| dy \leq \int_{B_R(0)\setminus G_L} C_\infty dy = C_\infty \int_{B_R(0)\setminus G_L} 1 dy = C_\infty \mu_L < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. Por (2.12), dado $L \in \mathbb{N}$ podemos escolher um $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que em G_L temos,

$$f(v_n(y,s)) = f(v(y,s)), (y,s) \in G_L, n \geq N.$$

   Agora,

$$|A_2 v_n(y,s) - A_2 v(y,s)| \leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y)[f(v_n(y,s) - f(v(y,s))] dy ds \right|.$$

   Então, decompondo $\mathbb{R}^m$ nos conjuntos $M_1 := \mathbb{R}^m \setminus B_R(0), M_2 := B_R(0) \setminus$

$G_L, M_3 := G_L$, e usando $(1)-(3)$, obtemos,

$$\begin{aligned}
|A_2(v_n(x,s)) - A_2(v(x,s))| &\leq \bigg| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_R(0)} \omega(x,y)[f(v_n(y,s)) - f(v(y,s))]dyds \\
&+ \int_0^t \int_{B_R(0)\setminus G_L} \omega(x,y)[f(v_n(y,s)) - f(v(y,s))]dyds \\
&+ \int_0^t \int_{G_L} \omega(x,y)[f(v_n(y,s)) - f(v(y,s))]dyds \bigg| \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_R(0)} |\omega(x,y)|dyds + \int_0^t \int_{B_R(0)\setminus G_L} |\omega(x,y)|dyds \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $x \in B_R(0)$ e para todo $t \in [0,\rho]$, e $n \geq N(\varepsilon)$. Assim mostramos a continuidade local de A_2 em v.

Reciprocamente, suponha que a medida de $M_{\eta,\rho,\infty}[v]$ não é zero, então existe $G \subseteq M_{\eta,\rho,\infty}[v]$ tal que $\mu(G) > 0$ e onde $v(y,s) = \eta$ para todo $(y,s) \in G$. Neste caso podemos construir uma sequência $v_n \in X_\rho$ dada por

$$v_n(y,s) = v(y,s), \text{ quando } (y,s) \in (\mathbb{R}^m \times [0,\rho]) \setminus G$$

e

$$v_n(y,s) = v(y,s) - \frac{1}{n} \text{ quando } (y,s) \in G.$$

E assim,

$$\begin{aligned}
|A_2 v_n(y,s) - A_2 v(y,s)| &= \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y)[f(v_n(x,s)) - f(v(y,s))]dyds \right| \\
&= \left| \int_0^t \int_G \omega(x,y)dyds \right| > 0.
\end{aligned}$$

Isso prova que o operador A_2 não é localmente contínuo.

Para completar a prova, basta observamos que o operador $A_{2,n}(u)$ é formado por f_n que são funções contínuas, implicando que $A_{2,n}$ é um operador contínuo, e portanto é também localmente contínuo. ■

Com isso estamos prontos para realizar as etapas básicas para estudar a solubilidade da equação de campos neurais com a não linearidade descontínua.

Como (f_n) é uma sequência de funções contínuas, então pelo o que foi mostrado no Capítulo 1, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in X_\rho$ tal que u_n é solução da equação de

Volterra com a função f_n, isto é,

$$u_0 = u_n - A_n(u_n), \forall \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Tomando ρ tal que $\rho < 1$, provamos no Lema 2.2 que o operador $(I - A_1)$ é linear, invertível em X_ρ e com inversa linear. Daí, multiplicando a equação (2.13) por $(I - A_1)^{-1}$ temos

$$\begin{aligned}
(I - A_1)^{-1}u_0 &= (I - A_1)^{-1}u_n - (I - A_1)^{-1}A_n u_n \\
&= (I - A_1)^{-1}u_n - (I - A_1)^{-1}(A_1 + A_{2,n})u_n \\
&= (I - A_1)^{-1}u_n - (I - A_1)^{-1}A_1 u_n - (I - A_1)^{-1}A_{2,n}u_n \\
&= (I - A_1)^{-1}(I - A_1)u_n - (I - A_1)^{-1}A_{2,n}u_n \\
&= u_n - (I - A_1)^{-1}A_{2,n}u_n. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

De acordo com o Lema 1.1 temos que a sequência (u_n) é uniformemente limitada em X_ρ. Logo, definindo a sequência

$$\psi_n := A_{2,n}(u_n)$$

temos que ψ_n é limitada em $X_{\rho,\alpha}$ para $\alpha \in (0, 1)$. E pela imersão localmente compacta de $X_{\rho,\alpha}$ em X_ρ temos que a sequência (ψ_n) possui uma subsequência localmente convergente para ψ_*. Como o operador $(I - A_1)^{-1}$ leva sequência localmente convergente em sequência localmente convergente, existe uma (u_{n_k}), subsequência de (u_n) tal que

$$u_{n_k} = (I - A_1)^{-1}u_0 + (I - A_1)^{-1}A_{2,n_k}(u_{n_k}), \tag{2.15}$$

é localmente convergente para uma função $u_* \in X_\rho$. Aplicando $(I - A_1)$ na equação (2.15) temos

$$\begin{aligned}
(I - A_1)u_{n_k} &= u_0 + A_{2,n_k}u_{n_k} \\
u_{n_k} - A_1 u_{n_k} &= u_0 + A_{2,n_k}u_{n_k}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_{n_k} - A_1 u_{n_k} - A_{2,n_k}u_{n_k} \\
&= u_{n_k} - A_1 u_{n_k} - \psi_{n_k}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Fazendo k tender ao infinito na equação (2.16) temos

$$u_0 = u_* - A_1 u_* - \psi_*.$$

Se mostrarmos que $A_2 u_* = \psi_*$ então teremos que u_* é uma solução para a equação de Volterra com f sendo a função de Heaviside, ou seja,

$$u_0 = u_* + A u_*.$$

Para isso, precisamos que A_2 seja um operador localmente contínuo em $u_* \in X_\rho$, e pelo Lema 2.5 temos que é necessário e suficiente que $\mu(M_{\eta,\rho,\infty}[v]) = 0$. Portanto, podemos resumir o que estudamos nos seguintes resultados.

Teorema 2.6 (Existência Local de solução quando f é a função Heviside) *Seja $\omega \in BC^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m, L^1(\mathbb{R}^m))$ cumprindo as hipóteses $((H1_\omega) - (H5_\omega))$ e f a função Heaviside definida em* (2.1)*. Se u_* é um ponto de acumulação do conjunto de suluções da equação $u_n - A_n u_n = u_0$ e $\mu(M_{\eta,\rho\ \infty}[u_*]) = 0$, então u_* é solução da equação* (1.1) *em X_ρ.*

Além disso, procedendo como no Teorema 1.7, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.7 (Existência Global de Solução quando f ê Função Heviside) *Seja $\omega \in BC^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m, L^1(\mathbb{R}^m))$ cumprindo as hipóteses $(H1_\omega) - (H5_\omega)$ e f a função Heaviside definida em* (2.1)*. Se u_* é um ponto de acumulação do conjunto de suluções da equação $u_n - A_n u_n = u_0$ e $\mu(M_{\eta,\rho\ \infty}[u_*]) = 0$, então u_* é uma solução global da equação* (1.1) *quando $t > 0$.*

Capítulo 3

Propriedades da Solução para o Caso Particular

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades para solução $u(\cdot, t)$ do problema de Cauchy do caso particular em que f é a função de Heaviside.

3.1 Velocidade da Onda

Essa seção tem como objetivo estudar a velocidade de uma onda neural, para isso devemos observar que por a função f ser uma função de Heaviside com limite η, então o operador $J(u)$ definido em (1.4) será não nulo somente quando $u(x,t) \geq \eta$. Dessa forma chamaremos o campo de onda de **relevante** em um ponto $x \in \mathbb{R}^m$ para $t > 0$ se $u(x,t) \geq \eta$. Caso contrário dizemos que o campo é **irrelevante** em x.

Além disso, vamos considerar o tempo nos campos que podem até se anular em algumas partes, mas que atingem uma magnitude ou uma amplitude significativas.

Considere a condição inicial u_0 com suporte no conjunto convexo e limitado M contido em $\mathbb{R}^m$. Chamaremos esse tipo de condição inicial de **condição admissível**. Definiremos também $T(x)$ como o ínfimo de todos os tempos $t > 0$ para os quais a função $u(x,t) \geq \eta$, isto é, $T(x)$ é o tempo mínimo para que o campo da onda seja relevante em $x \in \mathbb{R}^m$.

Chamaremos de **velocidade da onda**, o quociente dado por

$$V(x) := \frac{d(x, M)}{T(x)}, x \in \mathbb{R}^m. \tag{3.1}$$

E a **velocidade maximal** da onda é definida como o supremo das velocidades definida acima, ou seja,

$$V_{max} := \sup_{u_0 \text{ é admissível}, \, x \in \mathbb{R}^m} |V(x)|. \tag{3.2}$$

É possível obter estimativas para o tempo $T(x)$ usado na definição da velocidade da onda dada em 3.1.

Teorema 3.1 *Se ω cumpre as hipóteses $(H1_\omega) - (H5_\omega)$ e f a função Heaviside, então o $T(x)$ limitado por*

$$T(x) \leq -\ln\left(1 - \frac{\eta}{C_\omega}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}^m. \tag{3.3}$$

Além disso, dado $x \in \mathbb{R}^m$, é possível uma construção de núcleos ω tais que obtenha uma igualdade.

Demonstração: Tomando $u(x,0) = 0$ a condição inicial da equação (1.1), considere a equação,

$$V'(x,t) = -bV(x,t) + c, \tag{3.4}$$

com $V(x,0) = u(x,0) = 0$, $b = 1$ e $c = C_\omega$. A qual foi resolvida na demonstração do Lema 1.1 e cuja a solução é dada por

$$V(x,t) = C_\omega(1 - e^{-t})$$

e que $u(x,t) \leq V(x,t)$, ou seja, V é uma supersolução para a equação (1.1).

Sendo assim, o crescimento mais rápido do campo $u(x,t)$ em um ponto $x \in \mathbb{R}^m$ é dado por $V(x,t)$.

Observe que como temos $u(x,0) = V(x,0) = 0$, e para que faça sentido esse estudo na função u, é necessário que exista $x \in \mathbb{R}^m$ onde u seja relevante, ou seja, $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $u(x,t) \geq \eta$. Então vamos admitir que existe pelo menos um ponto onde $u(x,t) = \eta$.

Mas, supondo que $V(x,t) \geq u(x,t) \geq \eta$, teremos que $C_\omega(1 - e^{-t}) \geq \eta$. Isso implica que existe $t(x) > 0$ tal que $1 - e^{-t(x)\frac{1}{\eta}} \geq \frac{\eta}{c_\omega}$. O que nos dará,

$$t(x) \geq -\ln\left(1 - \frac{\eta}{c_\omega}\right).$$

Portanto, como $T(x)$ é o ínfimo, então

$$T(x) \leq -\ln\left(1 - \frac{\eta}{c_\omega}\right).$$

■

Observe que para limitar a velocidade as propriedades assumidas para ω não são suficientes. De fato, se $d(x, M) \to \infty$ então $v(x) \to \infty$. Contudo se mais uma propriedade for imposta ao núcleo sináptico, de acordo com [9], é possível obter uma limitação para a velocidade máxima. Mais precisamente, em [9] é proposto o seguinte resultado.

Proposição 3.2 *Assumindo que o núcleo sináptico $\omega(x, y)$ satisfaz a estimativa*

$$|\omega(x,y)| \leq \frac{C}{(1+|x-y|)^{m+s}}, \forall x, y \in \mathbb{R}^m, x \neq y, \tag{3.5}$$

para alguma constante $C > 0$ e $s \geq 1$. Então a velocidade maximal das soluções para a equação (1.1) *são limitadas, mais precisamente*

$$V_{max} \leq \frac{C_\omega - \eta}{s \cdot \eta}. \tag{3.6}$$

3.2 Limitação Exponencial para a Solução

Dizemos que ω é um **núcleo sináptico pesado**, da equação de Campos Neurais (1.1) direcionada se existe uma direção $d_0 \in S$ tal que

$$\omega(x,y) \leq 0, \ \forall \ \ (x-y) \cdot d_0 \geq 0.$$

A direção de um núcleo significa a influência para o crescimento do campo em alguma parte do espaço limitado para a direção d com $d \cdot d_0 \geq 0$. Usamos a notação

$$H(\tau) = \{y \in \mathbb{R}^m; y \cdot d \leq \tau\}$$

especialmente para um semiespaço do espaço $\mathbb{R}^m$. Aqui vamos assumir que os núcleos são não- degenerados no sentido da condição

$$\int_{H(\tau)-H(\tau_0)} |\omega(x,y)| \to 0, \tau \to \tau_0$$

para $\tau \geq \tau_0$ uniformemente para $\tau_0 \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^m$.

Isso significa que quanto mais τ_0 se aproxima de τ mais reduzimos a faixa de influências máximas sobre o crescimento do campo.

O próximo resultado assegura que campos com condições iniciais que possuem suporte compacto e que é solução da equação (1.1) com núcleo dirigido tem limite de durabilidade em alguma região do espaço.

Teorema 3.3 *Suponha que a condição inicial u_0 tenha suporte compacto em $\mathbb{R}^m$ e seja ω um núcleo sináptico com peso não degenerado e com direção $d_0 \in S$. Então, dado $x \in \mathbb{R}^m$ existe um tempo $T(x) > 0$ tal que para $t > T(x)$ o campo $u(x,t)$ tem um decaimento exponencial.*

Demonstração: Já que u_0 tem suporte compacto existe um parametro τ_0 tal que u_0 é zero em $\{x \in \mathbb{R}^m : x \cdot d \leq \tau_0\}$. Escolhemos $\tau_1 > \tau_0$ suficientemente pequeno tal que

$$C_1 := \sup_{x \in H(\tau_1)} \int_{H(\tau_1) \setminus H(\tau_0)} |\omega(x,y)| dy < \eta. \tag{3.7}$$

Então a derivada $u'(x,t)$ para $x \in H(\tau)$ é menor que $-u(x,t)+c_\tau$ e maior que $-u(x,t)-c_\tau$. Isso significa que a função $u(x,t)$ é limitada pelas soluções das equações $v'(x,t) = -bv(x,t) - c$ e $V'(x,t) = -bV(x,t) + c$, com $b = 1$ e $c = c_\tau$, isto é,

$$u(x,t) \leq c_\tau + (u_0(x) - c_\tau)e^{-t}, x \in H(\tau_1), t \geq 0.$$

Já que $c_1 < \eta$ existe um tempo finito T dependendo somente de c_1 e η tal que $u(y,t) < \eta$ para $t \geq T$ para todo $y \in H(\tau_1)$. Então, $f(u(y,t)) = 0$ para $t \geq T$ e $y \in H(\tau_1)$. Isso significa que para $t \geq T$ e $x \in H(\tau_1)$ o campo $u(x,t)$ satisfaz $u'(x,t) = -u(x,t)$, o que acarreta uma convergência exponencial para zero.

Podemos repetir estes mesmos argumentos com τ_2, τ_1 em vez de, τ_1, τ_0, onde $\tau_2 - \tau_1 = \tau_1 - \tau_0$. Já que o campo em $H(\tau_0)$ é menor que η, então não influência o campo em $H(\tau) \setminus H(\tau_0)$ para algum $\tau > \tau_0$. isso gera um tempo finito T_2 tal que $u(x,t)$ mostra um decaimento exponencial em $H(\tau_2)$.

Então, dado $x \in \mathbb{R}^m$, depois de um tempo finito haverá um decaimento do campo $u(x,t)$, provando o que queríamos.

■

Capítulo 4

Existência de Solução para uma Extensão do Modelo de Campos Neurais

Neste capítulo consideramos o problema de evolução, descrito pelas equações abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + g\left(\beta \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t))dy\right) \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

A primeira equação em (4.1) foi introduzida na literatura em [4] e estende a equação de campos neurais estudada nos capítulos anteriores e também estende uma classe de equações de evolução associada ao modelo ferro-magnético estudado em [8] e [10].

Note que, se $g(x) = \frac{x}{\beta}$, a primeira equação em (4.1) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t))dy,$$

que coincide com a equação estudada nos capítulos anteriores.

Por outro lado, se $f(x) = x$, então a primeira equação em (4.1) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + g\left(\beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) u(y,t)dy\right),$$

que é a equação estudada em [8] e [10].

Assumimos neste capítulo que a função g é Lipschitziana, f é a função Heaviside, como definimos em (2.1), ω satisfaz as hipóteses dos capítulos anteriores e β é uma constante não negativa. A diferença de (4.1) e a equação considerada em [4] é que aqui estamos considerando a função de Heaviside enquanto que em [4] é assumido que f também é uma função Lipschitziana.

Mesmo a função g sendo Lipschitziana, o operador $\mathcal{F} : X_\rho \to X_\rho$ dado por

$$\mathcal{F}u(x,t) = -u(x,t) + g\left(\beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(u(y,t))dy\right) \tag{4.2}$$

não pode ser contínuo, pois a função f permanece sendo descontínua. Mas precisamente, temos o seguinte resultado.

Lema 4.1 *Suponha que ω satisfaz as hipóteses $(H1_\omega) - (H5_\omega)$, f é a função de Heaviside e $g\left(\beta \int_{-1}^{1} \omega(x,y)dy\right) \neq g(0)$. Então, o operador $\mathcal{F}u$ dada em (4.2) não depende continuamente de $u \in X$.*

Demonstração: Considerando a mesma sequência (u_n) definida em (2.2) temos que

$$u(x,t) = \eta, \text{ se } x \in [-1,1]$$

e

$$u(x,t) < \eta \text{ se } x \in [-1,1]^c,$$

e ainda $u_n(x,t) < \eta$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Com isso, obtemos que

$$f(u(x,t)) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-1,1] \\ 0, & \text{se } x \in [-1,1]^c \end{cases}$$

e $f(u_n(x)) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Daí,

$$(\mathcal{F}u)(x,t) = -u(x,t) + g\left(\beta \int_{-1}^{1} \omega(x,y)dy\right)$$

e

$$(\mathcal{F}u_n)(x,t) = -u_n(x,t) + g(0).$$

Então

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}u(x,t) - \mathcal{F}u_n(x,t)] &= \left| -u(x,t) + g\left(\beta \int_{-1}^{1} \omega(x,y)dy\right) + u_n(x,t) - g(0) \right| \\ &= \left[-(-u_n(x,t) + u(x,t)) + \left(g\left(\beta \int_{-1}^{1} \omega(x,y)dy\right) - g(0) \right) \right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Usando $(H5_\omega)$ e a hipótese que $g\left(\beta\int_{-1}^{1}\omega(x,y)dy\right)\neq g(0)$, temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}|\mathcal{F}u(x,t)-\mathcal{F}u_n(x,t)| &= \lim_{n\to\infty}\left|u_n(x,t)-u(x,t)+\left(g\left(\beta\int_{-1}^{1}\omega(x,y)dy\right)-g(0)\right)\right|. \\
&= \left|g\left(\beta\int_{-1}^{1}\omega(x,y)dy\right)-g(0)\right|>0
\end{aligned}
$$

E portanto, concluímos que o operador $\mathcal{F}$ não é contínuo em $u\in X$. ■

Daí, observamos que o operador $A(u)$ não pode ser uma contração, pois caso contrário $A(u)$ seria contínuo o que implicaria na continuidade de $\mathcal{F}$, o que não pode ocorrer pelo Lema 4.1. Daí, vamos seguir os mesmos argumentos do Capítulo 2 para mostrar a existência de solução.

Teorema 4.2 *Suponha que ω cumpra as hipóteses $(H2_\omega)$, a função g seja lipschitziana e $\omega\in BC^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m,L^1(\mathbb{R}^m))$ para $\alpha\in(0,1)$. Então, operador $A_2(u)$ é limitado na norma de $X_{\rho,\alpha}$ definida em* (2.3)*.*

Demonstração: Lembrando que a norma do espaço $X_{\rho,\alpha}$ é dada por

$$
\|A_2u\|_{\rho,\alpha}:=\|A_2u\|_\rho+\sup_{t\in[0,\rho],x,y\in\mathbb{R}^m}\frac{|A_2u(x,t)-A_2u(y,t)|}{|x-y|^\alpha}+\sup_{t,s\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m}\frac{|A_2u(x,t)-A_2u(x,s)|}{|t-s|^\alpha},
$$

vamos trabalhar por etapas, limitando cada parte da soma.

Primeira parte do nosso trabalho é mostrar limitação do operador $A_2(u)$ na norma de X_ρ.

$$
\begin{aligned}
\|A_2u\|_\rho &= \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m}|A_2u(x,t)| \\
&= \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m}\left|\int_0^t g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right)ds\right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m}\int_0^t\left|g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right)\right|ds.
\end{aligned}
$$

Mas, como a função g é lipschitziana, existe uma constante $K_1>0$ tal que, para todo $x\in\mathbb{R}$ temos que

$$
|g(x)-g(0)|\leq K_1|x|,
$$

o que implica em

$$
|g(x)|\leq K_1|x|+|g(0)|. \tag{4.4}
$$

Pela condição (4.4) temos,

$$
\begin{aligned}
\|A_2u\|_\rho &\le \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m} \int_0^t \left[K_1\left|\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right| + |g(0)|\right] ds\\
&\le \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m} \int_0^t K_1\left|\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right| + \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m}\int_0^t |g(0)|ds\\
&\le \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m} \int_0^t K_1\left|\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)dy\right| ds + |g(0)|\sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m}\int_0^t ds\\
&\le \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m} \int_0^t K_1\beta\int_{\mathbb{R}^m}|\omega(x,y)dy|\, ds + |g(0)|\sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m}\int_0^t ds\\
&\le \sup_{t\in[0,\rho],x\in\mathbb{R}^m} \int_0^t K_1\beta\|\omega(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}ds + |g(0)|\rho\\
&\le K_1\beta\|\omega(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}\rho + |g(0)|\rho.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\|A_2u\|_\rho \le \rho\left(K_1\beta C_\omega + |g(0)|\right). \tag{4.5}
$$

Vamos agora para a segunda parcela da soma.

$$
\begin{aligned}
|A_2u(x,t) - A_2u(\overline{x},t)| &= \left|\int_0^t\left(g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right) - g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(\overline{x},s)f(u(y,s))dy\right)\right) ds\right|\\
&\le \int_0^t\left|\left(g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right) - g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(\overline{x},s)f(u(y,s))dy\right)\right)\right| ds
\end{aligned}
$$

Por g ser uma função lipschitziana e por $\omega \in BC^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m, L^1(\mathbb{R}^m))$, para $\alpha \in (0,1)$, temos

$$
\begin{aligned}
|A_2u(x,t) - A_2u(\overline{x},t)| &\le \int_0^t\left|\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy - \beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(\overline{x},s)f(u(y,s))dy\right| ds\\
&= \int_0^t \beta\left(\int_{\mathbb{R}^m}|\omega(x,y) - \omega(\overline{x},y)|\, f(u(y,s)|dy\right) ds\\
&\le \int_0^t \beta\left(\int_{\mathbb{R}^m}|\omega(x,y) - \omega(\overline{x},y)|\, dy\right) ds\\
&\le \int_0^t \beta\|\omega(x,\cdot) - \omega(\overline{x},\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}ds\\
&= \beta\|\omega(x,\cdot) - \omega(\overline{x},\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}\int_0^t ds\\
&\le \beta|x-\overline{x}|^\alpha\rho.
\end{aligned}
$$

Isso implica que

$$
\frac{|A_2u(x,t) - A_2u(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^\alpha} \le \beta\rho. \tag{4.6}
$$

Para a terceira parcela da soma temos,

$$
\begin{aligned}
\left|A_2(u)(x,t) - A_2(u)(x,\bar{t})\right| &= \left|\int_0^t g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right)ds\right.\\
&\quad \left. - \int_0^{\bar{t}} g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right)ds\right|\\
&= \left|\int_{\bar{t}}^t g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right)ds\right|\\
&\le \int_{\bar{t}}^t \left|g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right)\right|ds.
\end{aligned}
$$

Pela condição (4.4) obtemos,

$$
\begin{aligned}
\left|A_2(u)(x,t) - A_2(u)(x,\bar{t})\right| &\le \int_{\bar{t}}^t \left(K_1\left|\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(u(y,s))dy\right| + |g(0)|\right)ds\\
&\le K_1\beta\int_{\bar{t}}^t\int_{\mathbb{R}^m}|\omega(x,y)|dyds + \int_{\bar{t}}^t |g(0)|ds\\
&\le K_1\beta\int_{\bar{t}}^t\left|\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)dy\right|ds + |g(0)|\int_{\bar{t}}^t ds\\
&\le K_1\beta\|w(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}\int_{\bar{t}}^t ds + |g(0)|\int_{\bar{t}}^t ds\\
&\le \left(K_1\beta\|w(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} + |g(0)|\right)\int_{\bar{t}}^t ds\\
&\le \left(K_1\beta C_\omega + |g(0)|\right)|t-\bar{t}|.
\end{aligned}
$$

E como $BC^{0,1}([0,\rho])$ está compactamente imersa em $BC^{0,\alpha}([0,\rho])$ para todo espaço de Hölder com $\alpha \in (0,1)$, então temos o operador A_2u é Hölder contínua na segunda variável, sendo assim

$$
\frac{\left|A_2(u)(x,t) - A_2(u)(x,\bar{t})\right|}{|t-\bar{t}|^\alpha} \le K_1\beta C_\omega + |g(0)| \tag{4.7}
$$

Pelas desigualdades $(4.5), (4.6), (4.7)$, temos

$$
\|A_2u\|_{\rho,\alpha} \le \rho\left(K_1\beta C_\omega + |g(0)|\right) + \beta\rho + K_1\beta C_\omega + |g(0)|
$$

Mostrando que o operador A_2u é limitado na norma do espaço $X_{\rho,\alpha}$. ■

Usando as Observações $(2.5.1), (2.5.2)$ e $(2.5.3)$, provamos o seguinte resultado.

Lema 4.3 *Seja ω cumprindo as hipóteses $(H1_\omega) - (H5_\omega)$, f a função de Heaviside e g uma função lipchitziana. O operador A_2u é localmente contínuo em $v \in X_\rho$ se, e somente se, a medida de $M_{\eta,\rho,\infty}[v]$, definido em (2.9), é zero. E ainda se (u_n) converge localmente para u, temos $A_{2,n}u_n \to A_{2,n}u$.*

Demonstração: Dado $v \in X_\rho$ tal que $\mu(M_{\eta,\rho,\infty}[v]) = 0$ e v_n uma sequência em X_ρ tal que v_n converge localmente para v. E ainda, dado $r > 0$ e $\varepsilon > 0$ analisamos as seguintes situações:

1. Escolhemos $R > 0$ tal que
$$\rho \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_R(0)} |\omega(x,y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ com } x \in B_R(0).$$
A existência de R é uma consequência da condição $\omega(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ e que é contínuo em $x \in \mathbb{R}^m$ e limitado em um conjunto compacto $\overline{B_r(0)}$.

2. Por (2.10) podemos escolher $L \in \mathbb{N}$ tal que
$$\int_{B_R(0)\setminus G_L} |\omega(x,y)| dy \leq \int_{B_R(0)\setminus G_L} C_\infty dy = C_\infty \int_{B_R(0)\setminus G_L} 1 dy = C_\infty \mu_L \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. Dado $L \in \mathbb{N}$ escolhemos um N suficientemente grande tal que em G_L, temos
$$f(v_n(y,s)) = f(v(y,s)), (y,s) \in G_L, n \geq N.$$

Sendo assim,
$$\begin{aligned} |A_2(v_n)(x,t) - A_2(v)(x,t)| &= \left| \int_0^t \left[g\left(\beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(v_n(y,s)) dy\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - g\left(\beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(v(y,s)) dy\right)\right] ds \right| \\ &\leq \int_0^t \left| g\left(\beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(v_n(y,s)) dy\right) \right. \\ &\quad \left. - g\left(\beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(v(y,s)) dy\right)\right| ds. \end{aligned}$$

Pela a função g ser lipschiziana temos,
$$\begin{aligned} |A_2v_n(x,t) - A_2v(x,t)| &\leq \int_0^t K_1 \left| \beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(v_n(y,s)) dy - \beta \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x,y) f(v(y,s)) dy \right| ds \\ &\leq \int_0^t K_1 \beta \int_{\mathbb{R}^m} |\omega(x,y)| |f(v_n(y,s)) - f(v(y,s))| dy ds. \end{aligned}$$

Decompondo $\mathbb{R}^m$ nos seguintes conjuntos

$$M_1 := \mathbb{R}^m \setminus B_R(0), M_2 := B_R(0) \setminus G_L, M_3 := G_L$$

e usando $(1)-(3)$ obtemos

$$\begin{aligned}
|A_2v_n(x,t) - A_2v(x,t)| &\leq \beta \int_0^t \left[\int_{M_1} |\omega(x,y)||f(v_n(y,s)) - f(v(y,s))|dy \right. \\
&+ \int_{M_2} |\omega(x,y)||f(v_n(y,s)) - f(v(y,s))|dy \\
&+ \left. \int_{M_3} |\omega(x,y)||f(v_n(y,s)) - f(v(y,s))|dy \right] ds \\
&\leq \beta \left[\int_{M_1} |\omega(x,y)|dy + \int_{M_2} |\omega(x,y)|dy \right] ds \\
&\leq \int_0^t \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) ds \\
&\leq \beta\varepsilon\rho.
\end{aligned}$$

Concluímos daí que $A_2(v_n)$ converge localmente para $A_2(v)$.

Reciprocamente, supondo que a medida de $M_{\eta,\rho,\infty}[v]$ é diferente de zero, então existe um conjunto $G \subsetneqq M_{\eta,\rho,\infty}[v]$ tal que $\mu(G) \neq 0$. E portanto, podemos construir uma sequência $v_n(y,s)$ dada por

$$v_n(y,s) = v(y,s) = \eta, \text{ se } (y,s) \in G^c$$

e

$$v_n(y,s) = v(y,s) - \frac{1}{\eta} \text{ se } (y,s) \in G.$$

Daí, usando que g é uma função lipschitziana e usando a condição $(H5_\omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|A_2v_n(x,t) - A_2v(x,t)| &= \left|\int_0^t \left[g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(v_n(y,s))dy\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(v(y,s))dy\right)\right]ds\right|\\
&\leq \int_0^t\left|g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(v_n(y,s))dy\right)\right.\\
&\left.-g\left(\beta\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(v(y,s))dy\right)\right|ds\\
&\leq \int_0^t K_1\beta\left|\int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(v_n(y,s))dy - \int_{\mathbb{R}^m}\omega(x,y)f(v(y,s))dy\right|ds\\
&\leq K_1\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^m}|\omega(x,y)||f(v_n)(y,s) - f(v(y,s))|dyds\\
&= K_1\beta\int_0^t\left[\int_G|\omega(x,y)||f(v_n)(y,s) - f(v(y,s))|dy\right.\\
&\left.+\int_{G^c}|\omega(x,y)||f(v_n)(y,s) - f(v(y,s))|dy\right]ds\\
&= K_1\beta\int_0^t\int_G|\omega(x,y)|dyds\\
&= K_1\beta\left(\int_G|\omega(x,y)|dy\right)t.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $|A_2(v_n)(x,t) - A_2(v)(x,y)|$ tende a zero, somente se $t = 0$. Mostrando que A_2 não é localmente convergente para $A_2(u)$.

Para completar a demonstração basta observamos que por f_n ser uma sequência de funções contínuas, então $A_{2,n}$ é um operador contínuo. Logo, dada v_n localmente convergente para v temos $A_{2,n}(v_n)$ convergindo para $A_{2,n}(v)$. ■

Agora, procedendo de forma inteiramente análoga ao que foi feito no Capítulo 2, é de fácil verificação os resultados enunciados abaixo.

Teorema 4.4 (Existência Local de Solução da Equação (4.1)**)** *Seja g uma função lipchitziana, $\omega \in BC^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m, L^1(\mathbb{R}^m))$ satisfazendo as hipóteses $((H1_\omega) - (H5_\omega))$ e f a função Heaviside definida em* (2.1)*. Se u_* é um ponto de acumulação do conjunto de suluções da equação $u_n - A_nu_n = u_0$ e $\mu(M_{\eta,\rho\ \infty}[u_*]) = 0$, então u_* é solução da equação* (1.1) *em X_ρ.*

Teorema 4.5 (Existência Global de Solução da Equação (4.1)**)** *Seja g uma função lipchitziana, $\omega \in BC^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m, L^1(\mathbb{R}^m))$ cumprindo as hipóteses $(H1_\omega) - (H5_\omega)$ e f*

a função Heaviside definida em (2.1). *Se* u_* *é um ponto de acumulação do conjunto de suluções da equação* $u_n - A_n u_n = u_0$ *e* $\mu(M_{\eta,\rho\ \infty}[u_*]) = 0$, *então* u_* *é solução da equação* (1.1) *em* X_ρ.

Apêndice A

Outros Resultados

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados auxiliares, que foram necessários na construção do nosso trabalho.

Teorema A.1 (Teorema do Valor Intermediário de Lagrange) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* f *é derivável em* (a,b), *existe* $c \in (a,b)$, *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Demonstração: Ver referência [5]. ■

Através do Teorema A.1 provamos que dada uma função f com derivada limitada, então f é uma função lipschitziana. De fato, dado $x, y \in \mathbb{R}$, existe $c \in (x,y)$ tal que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = f'(c). \tag{A.1}$$

Como f' é limitada então existe $K > 0$ tal que

$$|f'(c)| \leq K. \tag{A.2}$$

Por $(A.1)$ e $(A.2)$ obtemos

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq K,$$

o que nos

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostrando que a função f é lipschitziana.

Teorema A.2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M. Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...,$ a sequência converge em M e $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ é o único ponto fixo de f.*

Demonstração: Ver referência [6]. ■

Teorema A.3 (Teorema de Ascoli-Arzelá) *Seja E um conjunto de aplicações contínuas $f : K \to N$, onde K é compacto. A fim de que $E \subseteq \mathfrak{C}(K; N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:*

1. *E seja equicontínuo;*

2. *Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja relativamente compacto em N.*

Demonstração: Ver referência [6]. ■

Teorema A.4 *Dado K contido em $\mathbb{R}^m \times [0, \rho]$ compacto, temos $BC^\alpha(K)$ é compactamente imerso em $BC(K)$.*

Demonstração: Para isso considere o operador inclusão

$$I : (BC^\alpha(K), \|\cdot\|_{\rho,\alpha}) \longrightarrow (BC(K), \|\cdot\|_\rho).$$

Vamos mostrar que esse operador é compacto, ou seja, que dado $E \subseteq BC^\alpha(K)$ limitado, $\overline{E} \subseteq BC(K)$ é compacto.

Dado $E \subseteq BC^\alpha(K)$ limitado temos que E ainda é limitado em $BC(K)$, ou seja, dada $\psi \in E$ existe $c > 0$ tal que

$$\|\psi\|_\rho \leq c.$$

Daí, temos $\sup\limits_{x\in K}|\psi(x)| \leq c$, isto é,

$$|\psi(x)| \leq c, \forall x \in K.$$

Concluímos, portanto, que $E(x)$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$. Portanto, $E(x)$ é relativamente compacto em $\mathbb{R}$.

Além disso observe que E é equicontínuo. Para mostrarmos isso vamos usar novamente o fato de E ser limitado, isto é, dado $\psi \in E$ existe $L \in \mathbb{R}^+$ tal que, $\|\psi\|_{\rho,\alpha} \leq L$. O que implica,

$$\sup_{x,y\in K} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq L.$$

E sendo assim, para quaisquer $x, y \in K$ temos,

$$\frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq L.$$

Ou seja,

$$|\psi(x)-\psi(y)| \leq L|x-y|^\alpha.$$

Em particular,

$$|\psi(x)-\psi(y)| \leq L|x-y|.$$

Daí, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$, então

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |\psi(x)-\psi(y)| < \varepsilon.$$

Logo, E é equicontínuo. Sendo assim, pelo Teorema A.3 concluímos que é relativamente compacto em $B(K)$. Mostrando assim que, $BC^\alpha(K)$ está compactamente imerso em $BC(K)$. ■

Teorema A.5 (Regra da Cadeia) *Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subseteq Y, a \in X \cap X', b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$ então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, valendo*

$$(g \circ f)'(a) = g'(a) \cdot f'(a).$$

Demonstração: Ver [5], página 206. ■

Teorema A.6 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Se uma função integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui uma primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Em outros termos, se uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F(t)dt.$$

Demonstração: Ver [5], página 256. ■

Bibliografia

[1] AMARI, S. I. Redes homogêneas de elementos similares a neurônios. Biol Cybern, [S. l.], p. 211-220, 1975.

[2] AMARI, S. I. Dinâmica da formação de padrões em campos neurais do tipo inibição lateral. Biol Cybern, [S. l.], p. 77-87, 1977.

[3] ARAGÃO, G. Equações Diferenciais em Espaços de Banach. Dissertação de Mestrado. IME-USP, 2006.

[4] DA SILVA, S.H.; GARCIA, A.R.G.; Lucena, Bruna EP Propriedade dissipativa para equações de evolução não local. Touro. Belg. Matemática. Soc. Simon Stevin 26 (2019), n. 1, 91-117. doi: 10.36045 / bbms / 1553047231. https://projecteuclid.org/euclid.bbms/1553047231

[5] LIMA, E.L. Curso de Análise. 15ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. 431 p. v. 1. ISBN 9788524404689.

[6] LIMA, E.L. Espaços Métricos. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 299 p. ISBN 9788524401589

[7] SILVA , M.B.. Comportamento Assintótico para Equação de Campos Neurais. Orientador: Severino Horácio da Silva. 2014. Dissertação - Universidade Federal de Campina Grande, 2014.

[8] PEREIRA , A.L.; DA SILVA , S.H. Existence of global attractors and gradient property for a class of non local evolution equations. São Paulo Journal of Mathematical Sciences, [S. l.], 2008.

[9] POTTHAST, R.; GRABEN, P. B.. Existence and Properties of solutions for Neural Field Equations. Wiely InterScience , 2009.

[10] PEREIRA. A.L. e DA SILVA S.H.. Continuitu of Global Attractors for a Class of Non Local Evolution Equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Volume 26, Number 3, 2010. Doi:10.3934/dcds.2010.26.1073

[11] PINTO, D. J. e ERMENTROUT. G. B.. Spatially structured activity in synaptically coupled neuronal networks: I traveling fronts and pulses. SIAM Journal on Applied Mathematics. **62**, (2001a.) 206–225.

[12] RUKATMATAKUL, S. e YIMPRAYOON, P.. Traveling wave front solutions in lateral-excitatory neuronal networks. Songklanakarin J. Sci. Tecnol. **30** (3), (2008) 313–321.

[13] DA SILVA, S.H. e PEREIRA, A.L.. Global attractors for neural fields in a weighted space. Matemática Contemporanea, **36** (2009) 139-153.

[14] DA SILVA, S.H.. Existence and upper semicontinuity of global attractors for neural fields in an unbounded domain. Electronic Journal of Differential Equations, **2010**, no. 138, (2010) 1-12.

[15] DA SILVA, S.H.. Existence and upper semicontinuity of global attractors for neural network in a bounded domain. Differential Equations and Dynamical Systems, **19**, no. 1-2, (2011) 87-96.

[16] DA SILVA, S.H.. Properties of an equation for neural fields ina bounded domain. Electronic Journal of Differential Equations, **2012**, no. 42, (2012) 1-9.

[17] H.R. e COWAN, J. D.. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. Biophys. J. **12**, (1972) 1-24.

[18] ZHANG, L.. Existence, uniqueness and exponential stability of traveling wave solutions of some integral differential equations arising from neuronal networks, Journal of Differential Equations. **197**, (2004) 162–196.