Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma desigualdade integral para hipersuperfícies com curvatura escalar constante

por

Lucas Siebra Rocha †

sob orientação do

Prof. Dr. Fabio Reis dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Uma desigualdade integral para hipersuperfícies com curvatura escalar constante

por

Lucas Siebra Rocha

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Cícero Pedro Aquino - UFPI

____

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG

____

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2020

Dedicatória

À minha família e aos meus amigos.

Resumo

Neste trabalho de dissertação estudaremos rigidez de hipersuperfícies fechadas (i.e., compactas sem bordo) com curvatura escalar constante imersas isometricamente em uma forma espacial Riemanniana com curvatura seccional constante. Nesta configuração, estabeleceremos uma fórmula do tipo Simons e, como aplicação desta, uma desigualdade integral envolvento a norma da segunda forma fundamental sem traço e uma certa função dependendo da curvatura escalar da hipersuperfície e da curvatura seccional do espaço ambiente. Mostraremos que a igualdade é alcançada nesta desigualdade integral nas hipersuperfícies totalmente umbílicas e em certos toros de Clifford, quando o ambiente é a esfera Euclidiana. Além disso, também exploramos esta desigualdade integral no caso em que o espaço ambiente é o Euclidiano e o hiperbólico.

Palavras-chave: Formas espaciais Riemannianas; hipersuperfícies fechadas com curvatura escalar constante; fórmula do tipo Simons.

Abstract

In this work we will study rigidity of closed hypersurfaces (i.e., compact without border) with constant scalar curvature isometrically immersed in a Riemannian space form with constant sectional curvature. In this configuration, we will establish a Simons-type formula and, as an application, an integral inequality with the norm of the second fundamental form without a trace and a certain function depending on the scalar curvature of the hypersurface and on the sectional curvature of the ambient space. We will show that equality is achieved in this integral inequality in a totally umbilical hypersurfaces and in a certain Clifford torus, when the environment is the Euclidean sphere. In addition, we also explore this integral inequality in the case in which the ambient space is the Euclidean and the hyperbolic.

Keywords: Riemannian space form; closed hypersurfaces with constant scalar curvature; Simons-type formula.

Conteúdo

Introdução

No final dos anos 70, Cheng e Yau [7] introduziram uma importante ferramenta analítica para o estudo de hispersuperfícies M^n completas com curvatura escalar constante R imersas isomentricamente em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ de curvatura seccional constante $c = 0, 1, -1$. De fato, eles introduziram um novo operador diferencial linear de segunda ordem denotado por $\square$. Naturalmente este operador estende o bem conhecido operador Laplaciano. No entanto, para gozar de algumas das propriedades do Laplaciano como, por exemplo, elipicidade e ser uma divergência, faz-se necessário algumas hipóteses geométricas adicionais. Como uma aplicação desse operador, no caso em que o espaço ambiente é a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, Cheng e Yau mostraram que as únicas hipersuperfícies compactas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar normalizada constante $R \geq 1$ e curvatura seccional não negativa são ou uma hipersuperfície totalmente umbílica ou uma hipersuperfície isométrica ao produto de esferas $\mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, com $1 \leq m \leq n-1$ e $0 < r < 1$.

Uma vez definido o operador quadrado por Cheng e Yau, surgiram diversas aplicações deste operador nos mais variados contextos. Neste sentido, seguindo sua abordagem, foram estabelecidos diferentes resultados de rigidez para hipersuperfícies com curvatura escalar constante. Li [12], por exemplo, estudou a rigidez de hipersuperfícies orientadas fechadas (compactas sem fronteira) com curvatura seccional não negativa imersas na esfera unitária com curvatura escalar proporcional à curvatura média. Na sequência, Li [13], caracterizou hipersupefícies totalmente umbílicas e toros com curvatura escalar constante da forma $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ em termos de uma nova estimativa da norma ao quadrado da segunda forma fundamental da hipersuperfície. Estendendo, assim, para o caso da curvatura escalar constante, um resultado prévio bem conhecido de Alencar e do Carmo [1] lidando com curvatura média constante.

Como uma consequência desse resultado de Li, podemos estabelecer o Teorema 0.1, encontrado logo a seguir, para hipersuperfícies compactas com curvatura escalar constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ em termos do tensor de umbilicidade (Veja [3]).

Teorema 0.1 *Seja M^n uma hipersuperfície compacta orientada isometricamente imersa na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, $(n \geq 3)$ com curvatura escalar R constante normalizada satisfazendo $R \geq 1$. Seja ainda Φ o tensor de umbilicidade da imersão e suponhamos que*

$$|\Phi|^2 \leq \alpha(n, R, 1) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(n(R-1)+2)} > 0.$$

Então:

(i) ou $|\Phi| = 0$ e M^n é superfície totalmente umbílica,

(ii) ou $|\Phi|^2 = \alpha_R > 0$ e Σ é um toro com curvatura média constante $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \in \mathbb{S}^{n+1}$, com $r = \sqrt{(n-2)/nR}$.

Recentemente, Alías e Meléndez [4] estudaram, a rigidez de hipersuperfícies compactas com curvatura escalar constante isometricamente imersas na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. Baseado nesse estudo, em nosso trabalho estamos interessados em estabelecer uma versão integral do Teorema anterior. Utilizaremos de uma desigualdade integral tipo Simons envolvendo a norma da segunda forma fundamental sem traço Φ, com a igualdade caracterizando as hipersuperfícies totalmente umbílicas e o toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$. Em outras palavras, mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 0.2 *Seja M^n uma hipersuperfície compacta orientada isometricamente imersa na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1}(n \geq 3)$ com curvatura escalar R constante satisfazendo $R > 1$. Então*

$$\int_M |\Phi|^{p+2} Q_R(|\Phi|) dM \geq 0$$

para todo número real $p > 2$, em que Q_R é a função real

$$Q_R(x) = (n-2)x^2 + (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-1)} - n(n-1)R.$$

Ademais, a igualdade vale se e somente se

(i) ou $|\Phi| = 0$ e M^n é hipersuperfície totalmente umbílica,

(ii) ou

$$|\Phi|^2 = \alpha(n, R, 1) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(n(R-1)+2)} > 0$$

e M^n *é isométrica a um toro de Clifford* $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$, *com* $r = \sqrt{(n-2)/nR}$.

Além deste, também estudamos o caso em que o espaço ambiente é o espaço Euclidiano ou o espaço hiperbólico. Neste sentido, obtemos o seguinte:

Teorema 0.3 *Seja* M^n *uma hipersuperfície compacta orientada isometricamente imersa em uma forma espacial Riemanniana* $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ ($c \in \{0, -1\}$ e $n \geq 3$) *com curvatura escalar* $R > 0$. *Então*

$$\int_M |\Phi|^{p+2} Q_{R,c}(|\Phi|) dM \geq 0$$

para todo número real $p > 2$, *em que* $Q_{R,c}$ *é a função real*

$$Q_{R,c}(x) = -(n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-c)} + n(n-1)R.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n *é totalmente umbílica.*

Observamos que neste último caso caracterizamos a igualdade apenas com as hipersuperfícies totalmente umbilicas, uma vez que nesses espaços as hipersuperfícies isoparamétricas com duas curvaturas principais distintas não são compactas.

Este trabalho de dissertação, teve como base o artigo intitulado: *Integral Inequalities for Compact Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in the Euclidean Sphere*, publicado em 2020 no Mediterranean Journal Mathematical [4].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como objetivo estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos deste trabalho. Para maiores detalhes, indicamos ao leitor a referência [9] e [16].

1.1 Tensores em Variedades

No que segue, $V_1, \ldots, V_s$ denotam módulos sobre um anel $\mathbb{K}$ e o conjunto

$$V_1 \times \ldots \times V_s = \{(v_1, \ldots, v_s);\ v_i \in V_i,\ 1 \leq i \leq s\}$$

munido com as operações usuais de soma e de multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$ é um módulo sobre $\mathbb{K}$ chamado *produto direto*.

Se W é também um módulo sobre $\mathbb{K}$, então dizemos que a função

$$A : V_1 \times \ldots \times V_s \to W$$

é $\mathbb{K}$-*multilinear* quando A é $\mathbb{K}-$linear em cada entrada. Se V é um módulo sobre $\mathbb{K}$, consideremos o conjunto

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{K};\ f \quad \text{é} \quad \mathbb{K} - linear\}.$$

Munido com as operações usuais de soma e de multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$, obtemos que V^* é um módulo sobre $\mathbb{K}$ chamado *módulo dual* de V ou simplesmente *dual* de V. Quando $V_i = V$ para todo $1 \leq i \leq s$, escrevemos

$$V^s = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s \ vezes}.$$

Definição 1.1 *Para inteiros $r, s \geq 0$ (ambos não nulos), uma função $\mathbb{K}$-multilinear*

$$A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K}$$

é chamado um tensor do tipo (r,s) em V. Quando r = 0, escrevemos $A : V^s \to \mathbb{K}$ e, de maneira análoga, quando s = 0 escrevemos $A : (V^*)^r \to \mathbb{K}$.

Denotemos por

$$\mathfrak{T}_s^r(V) = \{A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K};\ A \quad \text{é} \quad \mathbb{K} - multilinear\} \tag{1.1}$$

o conjunto do todos os tensores do tipo (r, s) em V.

Com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$, obtemos que $\mathfrak{T}_s^r(V)$ é um módulo sobre $\mathbb{K}$. Um tensor do tipo $(0, 0)$ sobre V é simplesmente um elemento de $\mathbb{K}$.

Consideremos agora uma variedade diferenciável M^n. Denotaremos, por simplicidade, M^n por M, em que n indica a dimensão da variedade.

Denotemos por $C^\infty(M)$ o anel das funções de valores reais em M e $\mathfrak{X}(M)$ o $C^\infty(M)$-módulo dos campos de vetores em M.

Definição 1.2 *Um campo tensorial A em M é um tensor sobre $C^\infty(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$. Assim, se A é um campo tensorial do tipo (r,s) em M, então*

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

é uma função $C^\infty(M)$-multilinear.

Observação 1.1 *Observemos que se $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) : M \to \mathbb{R}$$

é uma função suave, em que θ^i ocupa a i-ésima entrada contravariante e X_j a j-ésima entrada covariante.

De maneira análoga ao definido em (1.1), denotemos por $\mathfrak{T}_s^r(M)$ o conjunto de todos os tensores do tipo (r, s) sobre M que é um módulo sobre $C^\infty(M)$. Quando $r = s = 0$, temos $\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

A próxima definição nos mostra uma maneira de fazer o produto tensorial entre dois tensores.

Definição 1.3 *Sejam* $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ *e* $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$. *Então* $A \otimes B \in \mathfrak{T}^{r+r'}_{s+s'}(M)$, *dado por*

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_s, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}) \\ = \quad A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s,) \cdot B(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'})\end{aligned}$$

é um campo tensorial chamado produto tensorial de A e B.

Observação 1.2 *Quando* $r' = s' = 0$, *então B é uma função* $f \in C^\infty(M)$ *e definimos*

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Daí, se A também é do tipo $(0,0)$, o produto tensorial se reduz a multiplicação usual em $C^\infty(M)$. Em geral, o produto tensorial não é comutativo e mais a frente veremos uma definição na qual o produto tensorial se torna comutativo.

O exemplo abaixo nos diz algumas interpretações as quais nos permite identificar 1-formas e campos de tensores.

Exemplo 1 (Identificações)

(i) Seja ω *uma 1-forma suave sobre a variedade M. Então a função*

$$A : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dada por $A(X) = \omega(X)$ *é* $C^\infty(M)$*-linear. Portanto, A é um campo tensorial do tipo* $(0,1)$ *em M. Assim todo campo tensorial do tipo (0,1) é dado de maneira única como uma 1-forma e escrevemos*

$$\mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^0_1(M).$$

(ii) Seja V um campo tensorial suave sobre M. Então a função

$$V : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$$

dada por $V(\theta) = \theta(V)$ *é* $C^\infty(M)$*-linear. Portanto, V é um campo tensorial do tipo (1,0) em M. Assim, todo campo tensorial é dado de maneira única como um campo vetorial e escrevemos*

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^1_0(M).$$

(iii) Se $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ *é* $C^\infty(M)$*-multilinear, definamos*

$$\overline{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

como sendo

$$\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, X_n)),\ \forall\ \theta \in \mathfrak{X}^*(M) \text{ e } X_i \in \mathfrak{X}(M), \quad 1 \le i \le n.$$

Observemos que $\overline{A}$ *é* $C^\infty(M)$*-multilinear e, portanto,* $\overline{A}$ *é um campo tensorial do tipo (1,s) em M.*

Definição 1.4 *Os tensores do tipo* $(0, s)$ *são chamados de covariantes enquanto os tensores do tipo* $(r, 0)$ *são chamados de contravariantes.*

Como haviamos dito na Observação 1.2, a condição a qual o produto tensorial é comutativo é quando A é contravariante e B covariante e vice-versa.

O próximo resultado nos mostra que um campo tensorial A em M pode ser definido pontualmente em M, dando um valor A_p a cada ponto $p \in M$. Isso exatamente para campos e 1-formas. O fato essencial é que quando A é avaliado em campos e 1-formas para resultar na função de valores reais $A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s,)$, o valor desta função não depende de cada 1-forma ou de cada campo de vetores, mas somente dos valores dela em uma vizinhança do ponto p. Mais disso mostraremos o seguinte:

Lema 1.1 *Se uma das 1-formas ou um dos campos de vetores for igual a zero em* p*, então*

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0.$$

Prova. Suponhamos que $X_s|_p = 0$ e sejam $x^1, \ldots, x^n$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de p. Sendo assim, podemos escrever

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} X_s(x^i)\partial_i, \tag{1.2}$$

em que $\partial_1, \ldots, \partial_n$ é uma base do T_pM. Denotemos $X_s(x^i) = X^i \in C^\infty(M)$ e reescrevamos a equação (1.2) como

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} X^i\partial_i.$$

Daí, seja $f \in C^\infty(M)$ uma *função bump*[1] em p com $supp(f) \subset U$. Notemos que fx^i é uma função suave em M e, da mesma forma, $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$. Logo,

$$\begin{aligned} f^2 A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) &= A(\theta^1, \ldots, f^2 X_s) \\ &= A\left(\theta^1, \ldots, f^2 \sum_{i=1}^{n} X^i\partial_i\right) \\ &= A\left(\theta^1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} f^2 X^i\partial_i\right) \end{aligned}$$

[1]Dada qualquer vizinhança U de um ponto $p \in M$ existe uma função $f \in C^\infty(M)$, satisfazendo:
(i) $0 \leq f \leq 1$ sobre M;
(ii) $f = 1$ em alguma vizinhança de p;
(iii) $supp(f) \subset U$.

$$= A\left(\theta^1, \ldots, \left(\sum_{i=1}^{n} fX^i\right) f\partial_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} fX^i \cdot A(\theta^1, \ldots, f\partial_i),$$

que, avaliando no ponto p, obtemos

$$f^2(p)A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(p)X^i(p)\right) A(\theta^1, \ldots, f\partial_i)(p).$$

Como $X_s|_p = 0$, temos que $X^i(p) = X_s(x^i)|_p = 0$ e, por uma das propriedades de *função bump*, temos que em uma vizinhança U de p, $f(p) = 1$. Portanto

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0.$$

■

Proposição 1.5 *Sejam $p \in M$ e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Sejam também $\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^r$ e $\theta^1, \ldots, \theta^r$ as 1-formas tais que $\overline{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$, para todos $1 \leq i \leq r$ e $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s$ e $X_1, \ldots, X_s$ os campos de vetores tais que $\overline{X}_j|_p = X_j|_p$ para todo $1 \leq j \leq s$. Então*

$$A(\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^r, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s)(p) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p).$$

Prova. Faremos a prova para o caso $r = 1$ e $s = 2$, pois o caso geral segue desse. Denotemos por θ, $\overline{\theta}$ as 1-formas e X_i, $\overline{X}_i$, $1 \leq i \leq 2$, os campos de vetores. Ainda, consideremos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} A(\overline{\theta}, \overline{X}_1, \overline{X}_2) - A(\theta, X_1, X_2) &= A(\overline{\theta} - \theta, \overline{X}_1, \overline{X}_2) + A(\theta, \overline{X}_1 - X_1, \overline{X}_2) \\ &+ A(\theta, X_1, \overline{X_2} - X_2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Como por hipótese, $\overline{\theta}|_p = \theta|_p$, $\overline{X}_1|_p = X_1|_p$ e $\overline{X}_2|_p = X_2|_p$, então

$$\overline{\theta}|_p - \theta|_p = 0,\ \overline{X}_1|_p - X_1|_p = 0 \ e\ \overline{X}_2|_p - X_2|_p = 0.$$

Logo, avaliando a equação (1.3) em p e usando o Lema (1.1), segue que

$$A(\overline{\theta}, \overline{X}_1, \overline{X}_2)(p) - A(\theta, X_1, X_2)(p) = 0,$$

o que conclui a demonstração. ■

Encerraremos esta seção com a seguinte observação:

Observação 1.3 *Segue da última proposição que um campo tensorial $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ possui um valor A_p em cada ponto $p \in M$. Especificamente, a função*

$$A_p : ((T_pM)^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

definida da seguinte forma: se $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in (T_pM)^*$ e $v_1, \dots, v_s \in T_pM$, então

$$A_p(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

em que $\theta^1, \dots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}^*(M)$ são tais que $\theta^i|_p = \alpha^i$ $(1 \le i \le r)$ e $X_j|_p = v_j$ $(1 \le j \le s)$.

Não é difícil verificar que A_p é $\mathbb{R}$-multilinear. Então A é um tensor do tipo (r, s) em T_pM. Assim, podemos considerar $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ como um campo suave que associa a cada ponto $p \in M$ o tensor A_p.

1.1.1 Componentes de um Tensor

Definiremos agora as componentes de um tensor.

Definição 1.6 *Seja M uma variedade diferenciável. Consideremos um sistema de coordenadas $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ num conjunto aberto $U \subset M^n$. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, então as componentes de A em ξ são as funções*

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) : U \subset M \to \mathbb{R},$$

em que $i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s \in \{1, \dots, n\}$.

Faremos agora uma pequena aplicação da definição anterior.

Exemplo 2 *Se $A \in \mathfrak{T}^1_2(M)$, então escrevendo $X = \sum_i X^i \partial_i$, $Y = \sum_j X^j \partial_j$ e $\theta = \sum_k \theta_k dx^k$, obtemos*

$$\begin{aligned} A(\theta, X, Y) &= A\left(\sum_i X^i \partial_i, \sum_j X^j \partial_j, \sum_k \theta_k dx^k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} \theta_k X^i Y^j \underbrace{A(dx^k, \partial_i, \partial_j)}_{A^k_{ij}} \\ &= \sum_{i,j,k} A^k_{ij} \theta_k X^i Y^j. \end{aligned}$$

Observação 1.4 *Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$ são campos definidos em M, então as componentes de $A \otimes B \in \mathfrak{T}^{r+r'}_{s+s'}(M)$ são*

$$(A \otimes B)^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+r'}}_{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_{s+s'}} = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \cdot B^{i_{s+1} \dots i_{r+r'}}_{j_{r+1} \dots j_{s+s'}},$$

em que $i_1 \dots i_{r+r'}, j_1 \dots j_{s+s'} \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 1.2 *Seja $x^1, \ldots, x^n$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Então, temos em U*

$$A = A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_s},$$

em que $i_1 \ldots i_{r+r'}, j_1 \ldots j_{s+s'} \in \{1, \ldots, n\}$.

1.1.2 Contração de Tensores

Existe uma operação chamada contração que transforma tensores do tipo (r, s) em tensores do tipo $(r-1, s-1)$. A definição geral deste tipo especial de tensores segue a seguir:

Lema 1.3 *Existe uma única função $C^\infty(M)$-linear*

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{T}^r_s(M) \to C^\infty(M),$$

chamada (1,1)-contração, tal que $\mathfrak{C}(X \otimes \theta) = \theta(X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Prova. Da $C^\infty(M)$-linearidade, observamos que $\mathfrak{C}$ será uma operação pontual. Considere $A \in \mathfrak{T}^1_1(M)$. Se $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema local de coordenadas, então A pode ser escrito da forma

$$A = \sum_{ij} A^i_j \partial_i \otimes dx^j.$$

Queremos que $\mathfrak{C}(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta^j_i$. Logo, podemos definir localmente

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{T}^1_1(M) \to C^\infty(M)$$

dada por $\mathfrak{C}(A) = \sum_i A^i_i$ e, assim, $\mathfrak{C}$ possui a propriedade requerida.

Para estender o resultado em toda a variedade, basta mostrar que a definição independe do sistema de coordenadas escolhido. De fato, se $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ é um outro sistema de coordenadas local em M, então

$$\begin{aligned}
\sum_m A^m_m &= \sum_m A\left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) \\
&= \sum_m A\left(\sum_i \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j,k} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^m} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} A^i_j = \sum_{i,j} \delta^j_i A^i_j = \sum_i A^i_i.
\end{aligned}$$

■

Agora, para estender o Lema 1.3 para tensores de tipo mais elevado, o procedimento é especificar uma entrada covariante e uma entrada contravariante e aplicar o Lema 1.3 para estes tensores.

Sendo assim, suponhamos que $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$. Fixadas as 1-formas $\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}$ e campos de vetores $X_1, \ldots, X_{s-1}$, então a função

$$(\theta, X) \to A(\theta^1, \ldots, \theta, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X, \ldots, X_{s-1}),$$

em que θ ocupa a i-ésima entrada contravariante e X ocupa a j-ésima entrada covariante, é um tensor do tipo $(1,1)$ que pode ser escrito como

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}).$$

Aplicando o Lema 1.3 para este tensor, obtemos a função de valores reais dada por

$$(C_j^i A)(\theta^1, \ldots \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}).$$

Não é difícil ver que $C_j^i A$ é $C^\infty(M)$-multilinear nestes argumentos. Portanto, é um tensor do tipo $(r-1, s-1)$, chamado a *contração* de A sobre i, j.

Exemplo 3 *Se $A \in \mathfrak{T}_3^2(M)$, então $\mathfrak{C}_3^1(A) \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ é dado por*

$$(\mathfrak{C}_3^1(A))(\theta, X, Y) = \mathfrak{C}(A(\cdot, \theta, X, Y, \cdot)).$$

Se $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas, então

$$\begin{aligned}(\mathfrak{C}_3^1(A))_{ij}^k &= (\mathfrak{C}_3^1(A))(dx^k, \partial_i, \partial_j) = \mathfrak{C}(A(\cdot, dx^k, \partial_i, \partial_j, \cdot)) \\ &= \sum_m A(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m) = \sum_m A_{ijm}^{mk}.\end{aligned}$$

Uma consequência imediata é dada pelo corolário a seguir:

Corolário 1.7 *Sejam $i \in \{1, \ldots, r\}$ e $j \in \{1, \ldots, s\}$. Se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, então as componentes de $\mathfrak{C}_j^i(A) \in \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(M)$ são*

$$(\mathfrak{C}_j^i(A))_{j_1 \ldots j_{s-1}}^{i_1 \ldots i_{r-1}} = \sum_m A_{j_1 \ldots m \ldots j_{s-1}}^{i_1 \ldots m \ldots i_{r-1}},$$

em que m ocupa simultaneamente a i-ésima e a j-ésima entrada.

1.1.3 O Pullback

Definiremos agora uma importante operação que, por meio de uma aplicação diferenciável entre M e N, qualquer tensor covariante em N fornece um novo tensor em M.

Definição 1.8 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se $A \in \mathfrak{T}_s^0(N)$, com $s \geq 1$ e considerarmos*

$$(\phi^* A)_p : (T_p M)^s \to \mathbb{R},$$

dada por

$$(\phi^* A)_p(v_1, \ldots, v_s) = A(\phi(p))(d\phi_p(v_1), \ldots, d\phi_p(v_n)),$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_s \in T_p M$ e qualquer $p \in M$, então $\phi^* A$ é chamado "pullback" de A por ϕ.

Pela linearidade e multilinearidade das respectivas aplicações

$$d\phi_p : T_p M \to T_{\phi(p)} N \quad \text{e} \quad A_{\phi(p)} : (T_{\phi(p)} N)^s \to \mathbb{R},$$

obtemos que $(\phi^* A)_p : (T_p M)^s \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$-multilinear. Assim, $(\phi^* A)_p$ é um tensor do tipo $(0, s)$ em $T_p M$. Portanto $\phi^* A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ e convém observar que no caso em que $s = 0$, temos $A \in \mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$ e, neste caso, definimos

$$\phi^* A = A \circ \phi \in C^\infty(M).$$

O próximo resultado nos fornece algumas propriedades importantes do *pullback*.

Lema 1.4 *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis, $f \in C^\infty(M)$ e consideremos as seguintes aplicações*

$$\phi : M \to N, \;\; \psi : N \to P.$$

Então

(i) $\phi^*(df) = d(\phi^* f)$;

(ii) $\phi^* : \mathfrak{T}_s^0(N) \to \mathfrak{T}_s^0(M)$ *é $\mathbb{R}-$ linear para cada $s \geq 0$, e* $\phi^*(A \otimes B) = (\phi^* A) \otimes (\phi^* B)$;

(iii) $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{T}_s^0(P) \to \mathfrak{T}_s^0(M)$.

Prova.

(i) Se $p \in M$, então usando a Regra da Cadeia temos que

$$d(\phi^* f)_p = d(f \circ \phi)_p = df_{\phi(p)}(d\phi_p) = \phi^*(df_p).$$

Como p foi escolhido arbitrariamente, seque que $d(\phi^* f) = \phi^*(df)$.

(ii) A $\mathbb{R}$-linearidade de ϕ^* é consequência da última definição.

Sejam $A, B \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ e se $v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s \in T_pM$, então

$$\begin{aligned}
&\phi^*(A \otimes B)(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s) \\
&\qquad = (A \otimes B)(d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_s), d\phi(w_1), \ldots, d\phi(w_s)) \\
&\qquad = A(d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_s)) \cdot B(d\phi(w_1), \ldots, d\phi(w_s)) \\
&\qquad = (\phi^*A)(v_1, \ldots, v_s) \cdot (\phi^*B)(w_1, \ldots, w_s) \\
&\qquad = (\phi^*A) \otimes (\phi^*B)(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s).
\end{aligned}$$

Segue que $\phi^*(A \otimes B) = (\phi^*A) \otimes (\phi^*B)$.

(iii) Primeiramente observemos que $\psi \circ \phi : M \to P$ e que se dado $A \in \mathfrak{T}^0_s(P)$, teremos $\psi^*A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ e $\phi^*(\psi^*A) \in \mathfrak{T}^0_s(M)$.

Consideremos $v_1, \ldots, v_s \in T_pM$. Daí

$$\begin{aligned}
((\psi \circ \phi)^*A)(v_1, \ldots, v_s) &= A(d(\psi \circ \phi)(v_1), \ldots, d(\psi \circ \phi)(v_s)) \\
&= A(d\psi(d\phi(v_1)), \ldots, d(\psi(d\phi(v_s)))) \\
&= (\psi^*A)(d\phi(v_1), \ldots, d(\phi(v_s))) \\
&= (\phi^*(\psi^*A))(v_1, \ldots, v_s) \\
&= ((\phi^* \circ \psi^*)A)(v_1, \ldots, v_s).
\end{aligned}$$

Segue que $(\psi \circ \phi)^*A = (\phi^* \circ \psi^*)A$, para todo $A \in \mathfrak{T}^0_s(P)$, de onde concluímos que $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

■

1.1.4 Derivação de Tensores

Conheceremos agora um tipo de tensor chamado Tensor Derivação. Veremos algumas de suas propriedades e, por fim, definiremos a derivada de Lie.

Definição 1.9 *Uma derivação $\mathfrak{D}$ em uma variedade diferenciável M é um conjunto de funções $\mathbb{R}$-lineares*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^r_s : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_s(M) \ (r, s \geq 0),$$

tal que para quaisquer $A, B \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e toda contração $\mathfrak{C}$, tem-se *(i)* $\mathfrak{D}(A \otimes B) = (\mathfrak{D}A) \otimes B + A \otimes (\mathfrak{D}B)$*;*

(ii) $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}(A)) = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}A)$*.*

Definida desta maneira, $\mathfrak{D}$ é $\mathbb{R}$-linear, preserva o tipo do tensor, obedece a regra do produto e comuta com contrações. Para uma função $f \in C^\infty(M)$, temos $f \otimes A = f \cdot A$. Daí, $\mathfrak{D}(fA) = (\mathfrak{D}f)A + f(\mathfrak{D}A)$ e, quando $t = s = 0$, se $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0^0 : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é uma derivação em M, então existe um único $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathfrak{D}f = Xf$ para qualquer $f \in C^\infty(M)$.

Proposição 1.10 *Se $\mathfrak{D}$ é uma derivação em M e U é um aberto de M, então existe uma única derivação $\mathfrak{D}_U$ tal que*

$$\mathfrak{D}_U(A|_U) = (\mathfrak{D}A)|_U,$$

para todo tensor A em M. ($\mathfrak{D}_U$ é chamado a restrição de $\mathfrak{D}$ em U e daqui por diante, omitiremos o subíndice U).

Prova. Seja $B \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e considere $p \in U$ e f uma função bump em p. Então $fB \in \mathfrak{T}_s^r(M)$. Definamos

$$\mathfrak{D}_U(A|_U) = (\mathfrak{D}A)|_U.$$

Afirma-se que a definição acima independe da escolha da função bump. De fato, seja g uma outra função bump em p, então

$$\mathfrak{D}(gfB)_p = \mathfrak{D}(g(p))f(p)B_p + g(p)(\mathfrak{D}fB)_p = \mathfrak{D}(fB)_p.$$

De maneira análoga, $\mathfrak{D}(gfB)_p = \mathfrak{D}(gB)_p$. Assim, $\mathfrak{D}(fB)_p = \mathfrak{D}(gB)_p$ e a definição acima é uma boa definição.

Além disso, é possível mostrar que:

(i) $\mathfrak{D}_U B$ é um campo tensorial em U;

(ii) $\mathfrak{D}_U$ é uma derivação em U;

(iii) $\mathfrak{D}_U(B|_U) = (\mathfrak{D}B)|_U)$ para todo tensor B em M;

(iv) $\mathfrak{D}_U$ é único;

o que conclui a demonstração. ■

A fórmula de Leibniz $\mathfrak{D}(A \otimes B) = (\mathfrak{D}A) \otimes (\mathfrak{D}B)$ pode ser reformulada da seguinte maneira:

Proposição 1.11 (Regra do Produto) *Seja $\mathfrak{D}$ uma derivação em M. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ então*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)) &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\ldots,\mathfrak{D}\theta^i,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,\mathfrak{D}X_j,\ldots,X_s).\end{aligned}$$

Prova. Por simplicidade, façamos $r = s = 1$ e afirmamos que

$$A(\theta, X) = \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes X),$$

em que $\overline{\mathfrak{C}}$ é a composta de duas contrações.

Com efeito, seja $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas local em M. Então pela Observação 1.4, $A \otimes \theta \otimes X$ tem componentes $A^i_j \theta_k X^l$.

Uma vez que $A(\theta, X) = \sum_{i,j} A^i_j \theta_i X^j$, temos

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(A(\theta, X)) &= \mathfrak{D}\overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes X) = \overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{D}(A \otimes \theta \otimes X) \\ &= \overline{\mathfrak{C}}(\mathfrak{D}A \otimes \theta \otimes X) + \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \mathfrak{D}\theta \otimes X) + \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes \mathfrak{D}X) \\ &= (\mathfrak{D}A)(\theta, X) + A(\mathfrak{D}\theta, X) + A(\theta, \mathfrak{D}X).\end{aligned}$$

A demonstração do caso geral segue desse. ∎

Corolário 1.12 *Se duas derivações $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ em M coincidem em funções reais definidas em M e em campos de vetores definidos em M, então $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$.*

Prova. Basta observarmos na proposição anterior que

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) = \mathfrak{D}(\theta(X)) - \theta(\mathfrak{D}X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. ∎

Se sabemos derivar sobre $C^\infty(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$, então é possível construir uma derivação sobre M. Especificamente temos o seguinte resultado:

Teorema 1.13 *Dados um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $\mathbb{R}$-linear $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que*

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X), \ \forall\ f \in C^\infty(M), \ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.4}$$

então existe uma única derivação $\mathfrak{D}$ em M tal que $\mathfrak{D}^0_0 = V : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ e $\mathfrak{D}^1_0 = \delta$.

Prova. Observemos que $\mathfrak{D}_0^0$ e $\mathfrak{D}_0^1$ já são dados. Segundo a demonstração do último corolário, definamos

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) = \mathfrak{D}(\theta(X)) - \theta(\mathfrak{D}X), \ \forall \ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{D}\theta)(X+Y) &= V(\theta(X+Y)) - \theta(\delta(X+Y)) \\
&= V(\theta(X)+\theta(Y)) - \theta(\delta(X)+\delta(Y)) \\
&= V(\theta(X)) + V(\theta(Y)) - \theta(\delta(X)) - \theta(\delta(Y)) \\
&= [V(\theta(X)) - \theta(\delta(X))] + [V(\theta(Y)) - -\theta(\delta(Y))] \\
&= (\mathfrak{D}\theta)(X) - (\mathfrak{D}X)(\theta),
\end{aligned}$$

e, usando a equação (1.4),

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{D})(fX) &= V(\theta(fX)) - \theta(\delta(fX)) \\
&= V(f\theta(X)) - \theta(V(f)X + f\delta(X)) \\
&= V(f)\theta(X) + fV(\theta(X)) - V(f)\theta(X) - f\theta(\delta(X)) \\
&= f[V(\theta(X)) - \theta(\delta(X))] \\
&= f(\mathfrak{D}\theta)(X),
\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $f \in C^\infty(M)$.

Logo, $\mathfrak{D}\theta$ é $C^\infty(M)$-linear, donde $\mathfrak{D}\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ e, portanto, obtemos a derivação

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1^0 : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M).$$

Agora, usando a regra do produto, estabelecida na Proposição 1.11, para um tensor A com $r+s \geq 2$, definimos

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{D}A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) &= \mathfrak{D}(A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathfrak{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \delta X_j, \ldots, X_s).
\end{aligned}$$

Pode ser mostrado que $\mathfrak{D}A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $\mathfrak{D} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M)$ é uma derivação em M. (Veja mais detalhes em [16], pág. 45). ∎

Para encerrar esta seção, apresentaremos agora uma aplicação do teorema anterior que é de grande importância.

Definição 1.14 *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$, então a derivação $\mathcal{L}_V$ tal que*

(i) $\mathcal{L}_V(f) = V(f),\ \forall\ f \in C^\infty(M)$

(ii) $\mathcal{L}_V(X) = [V, X],\ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M)$

é chamada Derivada de Lie com relação a V.

Observação 1.5 *Notemos que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V(fX) &= [V, fX] = V(fX) - fX(V) \\
&= V(f)X + fV(X) - fX(V) \\
&= V(f)X + f[V, X] \\
&= V(f)X + f\mathcal{L}_V(X),
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer $f \in C^\infty(M)$.

Logo, pelo Teorema 1.13, temos que $\mathcal{L}_V$ está bem definida. Ou seja, é um tensor derivação.

1.2 Algumas consideraçõs sobre variedades Riemannianas

Apresentaremos aqui alguns conhecimentos que estão intimamente relacionados com os nossos objetos de estudo.

1.2.1 Formas Bilineares Simétricas

No que segue, seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma forma bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma aplicação que satisfaz

(i) $b(au, v) = ab(u, v) = b(u, av), \quad \forall\ u, v \in V;$

(ii) $b(u + w, v) = b(u, v) + b(w, v)$ e $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w), \quad \forall\ u, v, w \in V.$

A forma b é dita *simétrica* se $b(u, v) = b(v, u), \quad \forall\ u, v \in V.$

Definição 1.15 *Dizemos que a forma bilinear b é:*

(i) positiva definida se para todo $v \in V$ com $v \neq 0$ implicar $b(v, v) > 0$;

(ii) negativa definida se para todo $v \in V$ com $v \neq 0$ implicar $b(v,v) < 0$;

(iii) não degenerada se $b(v,w) = 0$ para qualquer $w \in V$ implicar $v = 0$.

O caso em que b é semi-definida, define-se de maneira análoga a definido acima, trocando apenas a desigualdade estrita pela não estrita. Se b é uma forma bilinear simétrica em V, então para qualquer subespaço $W \subset V$, a restrição $b\big|_{W \times W}$, que vamos denotar por $b\big|_W$ é ainda simétrica e bilinear.

Lema 1.5 *Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se, a matriz relativa a uma base (e portanto a todas) é invertível.*

Prova. Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base para V. Se $u \in V$, então $b(u,v) = 0$ para todo $v \in V$ se, e somente se, $b(u, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Uma vez que (b_{ij}) é simétrica,

$$b(u, e_i) = b\left(\sum_j u_j e_j, e_i\right) = \sum_j u_j b(e_j, e_i) = \sum_j b_{ij} u_j.$$

Daí,b é degenerada se, e somente se, existem números não todos nulos $u_1, \ldots, u_n$ tais que $\sum_j b_{ij} u_j = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Mas isso é equivalente a dependência linear das colunas da matriz (b_{ij}), isto é, (b_{ij}) ser singular. ∎

Falaremos um pouco sobre produtos escalares. Exibiremos algumas de suas propriedades importantes e deixamos para maiores detalhes a referência [16], capítulo 2.

Definição 1.16 *Um produto escalar g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre V.*

Definição 1.17 *Seja V um espaço vetorial com produto escalar e seja W um subespaço de V. O complemento ortogonal de W é o subespaço $W^{\perp}$ de todos os vetores em V que são ortogonais a todo vetor em W, ou seja,*

$$W^{\perp} = \{v \in V;\ v \perp W\}.$$

Os próximos lemas descrevem algumas propriedades da operação $\perp$ que são usados em nossos estudos.

Lema 1.6 *Se W é um subespaço de um espaço com produto escalar V, então*

(i) $dimW + dimW^{\perp} = n = dimV$;

(ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Lema 1.7 *Seja $e_1 \dots, e_n$ uma base ortonormal de V. Então todo $v \in V$ é escrito de maneira única como*

$$v = \sum_i g(v, e_i) e_i.$$

Definiremos agora o que vem a ser um tensor métrico.

Definição 1.18 *Um tensor métrico g em uma variedade diferenciável M é um tensor do tipo $(0, 2)$ simétrico, não degenerado em M. Em outras palavras, $g \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ leva suavemente cada ponto $p \in M$ em um produto escalar g_p em T_pM, e o índice de g_p é o mesmo para todo $p \in T_pM$. Ou seja,*

$$\begin{array}{rcccccccc} g & : & M & \longrightarrow & \mathfrak{T}^0_2(M) & & & & \\ & & p & \longmapsto & g_p & : & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & & & (u, v) & \longmapsto & g_p(u, v) \end{array}$$

é uma aplicação suave tal que,

(i) $g_p(u, v) = g_p(v, u), \quad \forall\ u, v \in T_pM$

(ii) $g_p(u, v) = 0, \quad \forall\ v \in T_pM$ *implica* $u = 0$.

Definição 1.19 *Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável M munida com um tensor métrico g.*

Notação 1.20 *Denotemos por $g = \langle , \rangle$ o tensor métrico. Assim, podemos escrever $g(u, v) = \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, para todos $u, v \in T_pM$ e $g(U, V) = \langle U, V\rangle$ e para $U, V \in \mathfrak{X}(M)$.*

Para um sistema de coordenadas podemos escrever g sendo

$$g(U, V) = \langle U, V\rangle = \sum_{i,j} g_{ij} U^i V^j.$$

De fato, se $\xi = x^1, \dots, x^n$ é um sistema de coordenadas em $U \subset M$, então as componentes de g em U são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle, \quad \forall\ i = 1, \dots, n.$$

Logo, se $V = \sum_i v^i \partial_i \quad \text{e} \quad U = \sum_j u^j \partial_j$, temos que

$$g(U, V) = \langle U, V\rangle = \sum_{i,j} g_{ij} V^i U^j.$$

Como g é não degenerada, temos que em cada $p \in M$, a matriz $(g_{ij}(p))_{n\times n}$ é invertível e a sua inversa é denotada por $(g^{ij}(p))_{n\times n}$. A fórmula usual para a inversa de uma matriz nos garante que as funções g_{ij} são suaves em U. Além disso, como g é simétrica, então $g_{ij} = g_{ji}$ e, consequentemente $g^{ij} = g^{ji}$, para quaisquer $i = 1, \ldots, n$. Finalmente, em U o tensor métrico g pode ser escrito como

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Assim, se $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned} g(U,V) &= \sum_{ij} g_{ij}(dx^i \otimes dx^j)(U,V) \\ &= \sum_{ij} g_{ij} dx^i(U) \cdot dx^j(V) \\ &= \sum_{ij} g_{ij} U^i \cdot V^j. \end{aligned}$$

Exemplo 4 *Seja $M = \mathbb{R}^n$. Temos, para cada $p \in M$ que T_pM é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Daí, se $(x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas usuais do $\mathbb{R}^n$, então*

$$\langle u_p, v_p \rangle = \sum_i u^i v^i$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, em que $u_p = \sum_i u^i \partial_i$ e $v_p = \sum_j v^j \partial_j$. Desta maneira, $\mathbb{R}^n$ munido com esta métrica nos dá uma variedade Riemanniana chamada espaço Euclidiano $n-$dimensional.

Para cada $p \in M$, seja

$$\begin{array}{ccccccc} q & : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & & v & \longmapsto & q(v) & = & \langle v, v \rangle \end{array}$$

a forma quadrática associada ao produto escalar $\langle , \rangle$. Temos que q determina $\langle , \rangle$, mas observemos que

$$q(fV) = \langle fV, fV \rangle = f^2 \langle V, V \rangle = f^2 q(V),$$

para qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ e toda $f \in C^\infty(M)$. Assim, temos que q não é $C^\infty(M)$-linear e, portanto, não é um campo tensor.

Definição 1.21 *Sejam N uma subvariedade de uma variedade Riemanniana M munida de um tensor métrico g e $i : M \to N$ a aplicação inclusão. Se o pullback $i * g$ é um tensor métrico em N, então N é chamada uma subvariedade Riemanniana de M.*

1.2.2 A Conexão de Levi-Civita

Sejam M uma variedade Riemanniana e V, W dois campos de vetores em M. Em cada ponto $p \in M$, queremos calcular a taxa de variação de W na direção de V_p. Fazemos isso naturalmente no espaço Euclidiano com a derivada de um campo em relação a outro. Para o nosso contexto vamos introduzir o conceito de conexão.

Definição 1.22 *Sejam $u^1, \dots, u^n$ as coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n$. Se V e W são campos de vetores em $\mathbb{R}^n_\nu$, com $W = \sum_i W^i \partial_i$, o vetor*

$$D_V W = \sum_i V(W^i)\partial_i$$

é chamada a derivada covariante de W na direção de V.

Agora estabeleceremos o conceito de conexão em uma variedade diferenciável M.

Definição 1.23 *Uma conexão ∇ em uma variedade M é uma função*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

satisfazendo, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$,

(i) $\nabla_V W$ *é $C^\infty(M)$-linear em V;*

(ii) $\nabla_V W$ *é $\mathbb{R}$-linear em W;*

(iii) $\nabla_V (fW) = f\nabla_V W + V(f)W$ *para toda função $f \in C^\infty(M)$.*

Temos que $\nabla_V W$ é chamada a "derivada covariante" de W na direção de V com respeito a conexão ∇.

Observemos que o axioma (i) nos diz que $\nabla_V W$ é um tensor em V. Então podemos examinar o seu caráter pontual, isto é, dado $v \in T_pM$, o vetor $\nabla_v W \in T_pM$ está bem definido, denotando-o por $(\nabla_v W)_p$ em que V é um campo tensorial tal que $V_p = v$. O axioma (iii) nos diz que $\nabla_V W$ não é um tensor em W.

Vejamos agora um resultado de caráter algébrico, o qual nos diz que na presença da métrica, podemos identificar campos com 1-formas.

Proposição 1.24 *Seja M uma variedade Riemanniana. Se $V \in \mathfrak{X}(M)$, seja V^* uma 1-forma em M tal que*

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Então a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^*(M) \\ & & V & \longmapsto & f(V) = V^*(X) = \langle V, X \rangle \end{array}$$

é um isomorfismo $C^\infty(M)$-linear de $\mathfrak{X}(M)$ para $\mathfrak{X}^*(M)$.

Prova. Primeiramente observemos que f é $C^\infty(M)$-linear, pois é dada por uma 1-forma que é $C^\infty(M)$-linear. Para mostrarmos o isomorfismo, basta mostrar que a aplicação é uma bijeção, uma vez que já temos a linearidade.

(i) f é injetora.

De fato, seja $f(V) = f(W)$, então

$$\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Logo

$$\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle \Leftrightarrow \langle V - W, X \rangle = 0 \Leftrightarrow V = W,$$

uma vez que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer e a métrica é não degenerada. Portanto f é injetora.

(ii) f é sobrejetora.

É necessário exibirmos um $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$\theta(X) = \langle V, X \rangle, \ \forall \ X \in \mathfrak{X}(M).$$

A unicidade é dada pelo item (i). Mostraremos que podemos encontrar um tal campo V em uma vizinhança coordenada U arbitrária. Seja $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, então podemos escrever $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$ em U e tomemos $V \in \mathfrak{X}(M)$ dado por $V = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j$. Então desde que (g^{ij}) e (g_{ij}) são matrizes inversíveis, temos

$$\begin{aligned} \langle V, \partial_k \rangle &= \left\langle \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j, \partial_k \right\rangle = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle \\ &= \sum_{ij} g^{ij}\theta_i g_{jk} = \sum_{ij} \theta_i \delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k). \end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora. ∎

A conexão está diretamente ligada à métrica, desde que acrescentemos a compatibilidade e a simetria que é uma propriedade relacionada aos colchetes de Lie. Em verdade, é o que nos mostra o teorema de existência e unicidade da conexão de *Levi-Civita*:

Teorema 1.25 (Levi-Civita) *Em uma variedade Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que*

(i) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$;

(ii) $X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle, \quad \forall\ X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Temos que ∇ é chamada a conexão de Levi-Civita de M e é caracterizada pela "Fórmula de Koszul"

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X\rangle &= V\langle W, X\rangle + W\langle V, X\rangle - X\langle V, W\rangle \\ &- \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle. \end{aligned}$$

Prova. Suponhamos que ∇ é uma conexão em M satisfazendo os axiomas (i) e (ii) do teorema acima. Do lado direito da fórmula de Koszul, usemos o axioma (ii) nas três primeiras parcelas e o axioma (i) nas três ultimas. Com isso, alguns pares irão ser cancelados, o que nos levará a $2\langle \nabla_V W, X\rangle$. Assim, ∇ satisfaz a fórmula de Koszul e, portanto, se tal conexão existe, ela é única.

Para a existência, $F(V, W, X)$ como o lado direito da fórmula de Koszul. Para campos V, W fixados, um cálculo direto mostra que F é $C^\infty(M)$-linear e, portanto é uma 1-forma. Pela Proposição 1.24, existe um único campo vetorial, que denotaremos por $\nabla_V W$, tal que $2\langle \nabla_V W, X\rangle = F(V, W, X)$ para todo $x \in \mathfrak{X}(M)$. Podemos verificar que F satisfaz os três axiomas da Definição 1.23, a simetria e a compatibilidade com a métrica. Assim, usando a unicidade, mostramos a existência da conexão. ■

1.2.3 Curvaturas

Apresentaremos agora o tensor de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana.

Definição 1.26 *Seja M uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura R de M é a aplicação*

$$\begin{array}{rccccl} R\ : & \mathfrak{X}(M)^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) & & \\ & (X, Y, Z) & \longmapsto & R(X, Y, Z) & = & -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z. \end{array}$$

Uma vez fixados os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar o operador curvatura $R(X,Y)$ dado por

$$\begin{array}{rcll} R \; : \; \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) & \\ Z & \longmapsto & R(X,Y)Z & = R(X,Y,Z). \end{array}$$

Observemos que o tensor curvatura é linear em relação a aditividade e trilinear em relação ao produto com elementos do anel $C^{\infty}(M)$. Além disso, o tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades (veja, [16], Proposição 3.36).

Proposição 1.27 *Com as notações acima, para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$,*

(i) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$;

(ii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle = 0$;

(iii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = - \langle R(Y,X)Z, W\rangle$;

(iv) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = - \langle R(X,Y)W, Z\rangle$;

(v) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Definição 1.28 *Dizemos que uma variedade é flat quando o tensor curvatura é identicamente nulo.*

Um exemplo de variedade flat é o espaço Euclidiano n-dimensional, uma vez que em $\mathbb{R}^n$ os *Símbolos de Christoffel* são identicamente nulos,pois são dados pelas derivadas da métrica que são nulas neste espaço.

Intimamente relacionado com o operador de curvatura, temos a curvatura seccional que definiremos a seguir:

Lema 1.8 *Seja $M \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in M$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in M$.

Prova. Para quaisquer duas bases de M, podemos relaciona-las pelas equações

$$\begin{array}{rcccc} v & = & ax & + & by, \\ w & = & cx & + & dy, \end{array}$$

em que o determinante dos coeficientes $ad - bc$ é diferente de zero. Um cálculo mais aprofundado mostra que

$$\langle R(v,w)v,w\rangle = (ad-bc)^2\langle R(x,y)x,y\rangle$$

e

$$(|v|^2|w|^2 - \langle v,w\rangle^2) = (ad-bc)^2(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2),$$

donde $K(v,w) = K(x,y)$. ■

Definição 1.29 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $M \subset T_pM$, o número real $K(x,y) = K(M)$, em que $\{x,y\}$ é uma base qualquer de M é chamada a curvatura seccional de M em p.*

Observação 1.6 *Dizemos que uma aplicação multilinear $F : T_p(M)^4 \to \mathbb{R}$ é tipo-curvatura se ela satisfaz todos os itens da Proposição 1.27. Assim, se $F(x,y,x,y) = 0$ para quaisquer $x, y \in T_pM$ tais que $M = span(x,y)$ é um plano não-degenerado, então $F \equiv 0$.*

Lema 1.9 *Seja F uma função tipo-curvatura em T_pM tal que*

$$K(x,y) = \frac{F(x,y,x,y)}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}$$

sempre que $M = span(x,y)$ é um plano não-degenerado. Então,

$$\langle R(x,y)z,w\rangle = F(x,y,z,w),$$

para todos $x,y,z,w \in T_pM$.

Prova. Como a diferença de funções tipo-curvatura também é tipo curvatura, definimos $\Delta(x,y,z,w) = F(x,y,z,w) - \langle R(x,y)z,w\rangle$. Por hipótese, $\Delta(x,y,x,y) = 0$ se $M = span(x,y)$ é um plano não degenerado de T_pM. Portanto, pela observação feita antes deste lema, $\Delta = 0$. ■

Uma variedade Riemanniana M tem *curvatura constante* se a função curvatura seccional é constante. O próximo resultado nos fornece uma fórmula para R quando K é constante.

Corolário 1.30 *Se M tem curvatura seccional constante C, então*

$$R(x,y)z = C(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x).$$

Prova. Observe que definindo $F(x,y,z,w) = C(\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle)$, temos que F é uma função tipo-curvatura em cada ponto e

$$F(x,y,x,y) = C(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2.$$

Se $M = span(x,y)$ é um plano não-degenerado, então

$$K(x,y) = C = \frac{F(x,y,x,y)}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2},$$

e o resultado segue do lema anterior. ■

Seja $\mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$, o espaço Euclidiano de dimensão $(n+p)$ munido com a métrica canônica. Consideremos $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ a variedade Riemanniana $(n+p)$-dimensional completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante c. A variedade $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ damos o nome de forma espacial Riemanniana. De acordo com o sinal de c, podemos determinar a forma de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ (cf. por exemplo o Teorema 4.1 do capítulo VIII de [9]) como sendo:

(a) o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+p}$ se $c = 0$;

(b) a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+p}(c)$ se $c > 0$;

(c) o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p}(c)$ se $c < 0$.

1.2.4 Alguns Operadores Diferenciáveis

Nessa seção, estenderemos agora os conceitos de vetor gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano para variedades Riemannianas. O referencial $e_1, \ldots, e_n$ sempre denotará um referencial ortonormal em um ponto $p \in M$.

Definição 1.31 *O gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$, o qual denotaremos por ∇f, é um campo vetorial metricamente equivalente a diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ definido sobre m por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f), \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Em termos de um referencial ortonormal,

$$\langle \nabla f, e_j\rangle = df(e_j) = e_j(f).$$

Daí, pelo Lema 1.7, podemos escrever

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, e_i \rangle e_i$$

e, portanto,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

Proposição 1.32 (Propriedades gradiente) *O gradiente satisfaz às seguintes propriedades:*

i. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

ii. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$.

Prova.

i. Da definição de gradiente, temos

$$\langle \nabla(f+g), X \rangle = X(f+g) \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Como

$$X(f+g) = X(f) + X(g) = \langle \nabla(f), X \rangle + \langle \nabla(g), X \rangle, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M),$$

então $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

ii. Seguindo o mesmo raciocínio, teremos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(fg), X \rangle &= X(fg) \\ &= fX(g) + gX(f) = f\langle \nabla(g), X \rangle + g\langle \nabla(f), X \rangle, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

e, portanto,$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

■

Definição 1.33 *Dado um campo vetorial* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, definimos a divergência do campo* X *como a função* $divX : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$divX = traço(Y(p) \to \nabla_Y X(p)),\ p \in M.$$

Ademais, em um referencial ortonormal podemos escrever

$$divX = \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle. \tag{1.5}$$

Proposição 1.34 (Propriedades divergente) *A divergência satisfaz às seguintes igualldades:*

i. $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}(X) + \mathrm{div}(Y)$*;*

ii. $\mathrm{div}(fX) = X(f) + f\,\mathrm{div}(X)$*.*

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$*.*

Prova.

i. Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, da definição de divergente, teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(X+Y) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(X+Y), E_i \rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(X) + \nabla_{e_i}(Y), e_i \rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(X), E_i \rangle + \sum_i \langle \nabla_{e_i}(Y), e_i \rangle \\
&= \mathrm{div}(X) + \mathrm{div}(Y),
\end{aligned}$$

ii. bem como

$$\begin{aligned}
div(fX) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} fX, e_i \rangle \\
&= \sum_i \langle f\nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \sum_i \langle e_i(f)X, e_i \rangle \\
&= f \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + X(f) \\
&= f div(X) + \langle \nabla f, X \rangle.
\end{aligned}$$

■

Definição 1.35 *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. O Hessiano de* f*, denotado por* $Hessf$*, é o campo tensorial* $Hessf : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dado por*

$$(Hessf)(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle.$$

O próximo resultado nos dá uma importante propriedade do *Hessiano*.

Lema 1.10 *O Hessiano de f é um campo tensorial do tipo $(0,2)$ simétrico tal que*

$$(Hessf)(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f, \quad \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Prova. Temos que $Hessf$ é $C^\infty(M)$-linear em cada entrada. Desta forma, $Hessf$ é um tensor do tipo $(0,2)$.

Como $\langle \nabla f, Y\rangle = Y(f)$, temos que

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= X\langle \nabla f, Y\rangle = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hessf)(X,Y) + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hessf)(X,Y) + (\nabla_X Y)f,\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Para a simetria, vamos usar a definição dos colchetes. Observemos que por um lado

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

mas por outro lado, usando a simetria da conexão de Levi-Civita, temos

$$[X,Y](f) = (\nabla_X Y)f - (\nabla_Y X)f.$$

Daí

$$X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f.$$

Assim, por (1.6) temos

$$(Hessf)(X,Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f = (Hessf)(Y,X), \quad \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

o que conclui o Lema. ■

Outras propriedades podem ser encontradas abaixo.

Proposição 1.36 (Propriedade hessiana) *A Hessiana satisfaz às seguintes propriedades:*

i. $\operatorname{Hess} f(X+Y,Z) = \operatorname{Hess} f(X,Z) + \operatorname{Hess} f(Y,Z)$;

ii. $\operatorname{Hess}(f+g)(X,Y) = \operatorname{Hess} f(X,Y) + \operatorname{Hess} g(X,Y)$;

iii. $\operatorname{Hess}(fg)(X,Y) = f \operatorname{Hess} g + g \operatorname{Hess} f + X(f)\langle \nabla g, Y\rangle + X(g)\langle \nabla f, Y\rangle$;

para quaisquer $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Prova.

i. O primeiro item segue da definição de *Hessiana*, como podemos ver a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Hess}\, f(X+Y,Z) &= \langle \nabla_{X+Y}(\nabla f), Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X(\nabla f) + \nabla_Y(\nabla f), Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X(\nabla f), Z\rangle + \langle \nabla_Y(\nabla f), Z\rangle \\ &= \text{Hess}\, f(X,Z) + \text{Hess}\, f(Y,Z). \end{aligned}$$

ii. Para o segundo, utilizando o Lema 1.10, encontramos

$$\begin{aligned} \text{Hess}\,(f+g)(X,Y) &= X(Y(f+g)) - (\nabla_X Y)(f+g) \\ &= X(Y(f)+Y(g)) - (\nabla_X Y)f - (\nabla_X Y)g \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f + X(Y(g)) - (\nabla_X Y)g \\ &= \text{Hess}\, f(X,Y) + \text{Hess}\, g(X,Y). \end{aligned}$$

iii. Novamente do Lema 1.10, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Hess}\,(fg)(X,Y) &= X(Y(fg)) - (\nabla_X Y)(fg) \\ &= X(fY(g) + gY(f)) - [f(\nabla_X Y)(g) + g(\nabla_X Y)(f)] \\ &= X(fY(g)) + X(gY(f)) - [f(\nabla_X Y)(g) + g(\nabla_X Y)(f)] \\ &= fX(Y(g)) + X(f)Y(g) + gX(Y(f)) + X(g)Y(f) \\ &\quad -f(\nabla_X Y)(g) - g(\nabla_X Y)(f) \\ &= f[X(Y(g)) - (\nabla_X Y)g] + g[X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f] \\ &\quad +X(f)\langle \nabla g, Y\rangle + X(g)\langle \nabla f, Y\rangle \\ &= f\,\text{Hess}\, g + g\,\text{Hess}\, f + X(f)\langle \nabla g, Y\rangle + X(g)\langle \nabla f, Y\rangle. \end{aligned}$$

Valendo essas três propriedades para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ■

Definição 1.37 *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos o operador Laplaciano $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ de M por*

$$\Delta f = traço(Hess f),\ \forall\ f \in C^\infty(M).$$

Observemos que o Laplaciano também pode ser visto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_i \langle (Hess f)(e_i), e_i\rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(\nabla f), e_i\rangle \\ &= div(\nabla f). \end{aligned}$$

Finalizaremos esta seção citando a seguinte consequência do conhecido teorema de Stokes, que é o Teorema da Divergência para o caso em que a variedade Riemanniana M é fechada (compacta sem fronteira).

Teorema 1.38 *Sejam M uma variedade Riemanniana orientável fechada e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo suave definido em M^n, então*

$$\int_M \mathrm{div}(X) dM = 0,$$

em que dM denota o elemento volume de M^n.

1.3 Imersões Isométricas

Em toda esta seção, M^n e $\overline{M}^m$ são duas variedades diferenciáveis de dimensão n e m, respectivamente. Quando não houver possibilidade de confusão, vamos denotar por M e $\overline{M}$, respectivamente. Para maiores detalhes, indicamos [8], [9] e [16].

Definição 1.39 *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensões n e m, respectivamente, com $m > n$. Dizemos que a aplicação $x : M \to \overline{M}$ é uma imersão se a aplicação diferencial $dx_p : T_pM \to T_{x(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$.*

O número $k = m - n$ é chamado *codimensão* de x. Uma imersão $x : M \to \overline{M}$ entre duas variedades Riemannianas com métricas $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente, é chamada imersão isométrica se

$$\langle u, v \rangle_M = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle_{\overline{M}},$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Observamos que se $x : M \to \overline{M}$ é uma imersão e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$ é a métrica em $\overline{M}$, podemos definir uma métrica $\langle , \rangle_M$ em M pelo *pullback*.

Seja $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Ao redor de cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que $x\big|_U$ é um mergulho sobre $x(U)$. Logo,podemos identificar U com a sua imagem $x(U)$, isto é, x é localmente a aplicação inclusão.

Portanto, podemos considerar o espaço tangente de M em p com um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em p e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

em que $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Definição 1.40 *Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Então dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\overline{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^{\top} + (\nabla_X Y)^{\perp}.$$

Segue da unicidade da conexão de Levi-Civita que $(\nabla)^{\top}$ é a conexão de Levi-Civita de M e a denotamos por ∇.

Daí, obtemos a *Fórmula de Gauss*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

a qual define uma aplicação

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

chamada a *Segunda Forma Fundamental* da imersão x.

Proposição 1.41 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ dada por $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

Prova. Observemos que pelas propriedades da conexão, segue que α é linear na primeira e na segunda entrada. Para a simetria, basta vermos que

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) &= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - \overline{\nabla}_Y X + \nabla_Y X \\
&= (\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X) + (\nabla_Y X - \nabla_X Y) \\
&= [\overline{X}, \overline{Y}] + [Y, X] \\
&= [X, Y] - [X, Y] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

em que usamos o fato de que quando restritos a M, os campos são iguais, seguindo o resultado. ■

Consideremos agora campos de vetores $X \in M$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, e denotemos por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\ \overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi X = -\ (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Uma vez que para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$0 = X\langle \xi, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y \rangle,$$

pela fórmula de Gauss, temos

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle.$$

Em particular, a aplicação $A : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X,\xi) = A_\xi X$ é bilinear sobre $C^\infty(M)$. Assim, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $C^\infty(M)$ e também auto adjunta, isto é, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A aplicação A_ξ é chamada *Operador de Forma* ou *Operador de Weingarten* da imersão x.

Não é difícil ver que a componente normal de $\overline{\nabla}_X\xi$, denotada por $(\overline{\nabla}_X\xi)^\perp$, define uma conexão compatível com o fibrado tangente normal $TM^\perp$. Dizemos que $\nabla^\perp$ é a conexão normal de x e obtemos a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi.$$

Agora, usando a fórmula de Gauss e Weingarten, obteremos as equações básicas das imersões isométricas para o nosso interesse: a equação de Gauss e de Codazzi.

Proposição 1.42 *Seja M uma subvariedade Riemanniana de $\overline{M}$. Sejam R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente, e α o tensor de forma de M. Então para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

(i) Equação de Gauss:

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle;$$

(ii) Equação de Codazzi:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y\alpha)(X,Z).$$

Prova.

(i) Como pela Definição 1.5 temos

$$\overline{R}(X,Y)Z = -\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z,$$

então

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z - \alpha(Y,Z)) = -\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z - \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z) \\ &= -\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) - \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z) \\ &= -\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X - \nabla^\perp_X\alpha(Y,Z). \end{aligned}$$

De maneira análoga, encontramos

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)} Y + \nabla_Y^{\perp} \alpha(X, Z)$$

e

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X, Y], Z).$$

Somando os termos acima temos

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \quad = \quad & -\nabla_X \nabla_Y Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y,Z)} X \\ & - \nabla_X^{\perp} \alpha(Y, Z) + \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) \\ & - A_{\alpha(X,Z)} Y + \nabla_Y^{\perp} \alpha(X, Z) \\ & + \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X, Y], Z), \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z \quad = \quad & R(X, Y)Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) + \alpha(Y, \nabla_X Z) + A_{\alpha(Y,Z)} X - A_{\alpha(X,Z)} Y \\ & - \nabla_X^{\perp} \alpha(Y, Z) + \nabla_Y^{\perp} \alpha(X, Z) + \alpha([X, Y], Z). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Fazendo o produto escalar com um campo $W \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, temos

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle \quad = \quad & \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), W \rangle + \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), W \rangle \\ & + \langle A_{\alpha(Y,Z)} X, W \rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)} Y, W \rangle - \langle \nabla_X^{\perp} \alpha(Y, Z), W \rangle \\ & + \langle \nabla_Y^{\perp} \alpha(X, Z), W \rangle + \langle \alpha([X, Y], Z), W \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle \quad = \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle A_{\alpha(Y,Z)} X, W \rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)} Y, W \rangle.$$

Mas

$$\langle A_{\alpha(Y,Z)} X, W \rangle = \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle \quad \text{e} \quad \langle A_{\alpha(X,Z)} Y, W \rangle = \langle \alpha(Y, W), \alpha(X, Z) \rangle$$

e, portanto,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle.$$

(ii) Antes de mostrarmos esta equação, faremos uma pequena observação. Uma vez que $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ é um campo, pelo Exemplo 1 podemos vê-lo como um tensor. Isto é,

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times (\mathfrak{X}(M)^{\perp})^{*} \to C^{\infty}(M).$$

Pela Proposição 1.24, sabemos que na presença da métrica podemos identificar campos com 1-formas. Assim, $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to C^{\infty}(M)$ é um tensor do tipo $(0,3)$ cuja diferencial covariante é o tensor

$$\overline{\nabla}\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \times \mathfrak{X}(M) \to C^{\infty}(M)$$

do tipo $(0,4)$ em M.

Diante do exposto acima, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, temos pela regra do produto da Proposição 1.11 que

$$(\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y, Z, \eta) = X(\alpha(Y, Z, \eta)) - \alpha(\nabla_X Y, Z, \eta) - \alpha(Y, \nabla_X Z, \eta) - \alpha(Y, Z, \nabla_X \eta).$$

Mas

$$(\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y, Z, \eta) = \langle (\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y, Z), \eta \rangle,$$

então

$$\langle (\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y, Z), \eta \rangle = \langle \nabla_X^{\perp}\alpha(Y, Z), \eta \rangle - \langle \alpha(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle. \quad (1.8)$$

De maneira análoga encontramos

$$\langle (\nabla_Y^{\perp}\alpha)(X, Z), \eta \rangle = \langle \nabla_Y^{\perp}\alpha(X, Z), \eta \rangle - \langle \alpha(\nabla_Y X, Z), \eta \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle. \quad (1.9)$$

Por outro lado, fazendo o produto escalar com um campo qualquer $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ na expressão (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle &= \langle R(X, Y)Z, \eta \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle + \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle \\ &\quad + \langle A_{\alpha(Y,Z)}X, \eta \rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)}Y, \eta \rangle - \langle \nabla_X^{\perp}\alpha(Y, Z), \eta \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_Y^{\perp}\alpha(X, Z), \eta \rangle + \langle \alpha([X, Y], Z), \eta \rangle \end{aligned}$$

e, daí,

$$\begin{aligned} \langle (\overline{R}(X, Y)Z)^{\perp}, \eta \rangle &= - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle + \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle - \langle \nabla_X^{\perp}\alpha(Y, Z), \eta \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_Y^{\perp}\alpha(X, Z), \eta \rangle + \langle \alpha([X, Y], Z), \eta \rangle. \end{aligned}$$

Ainda neste contexto, podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned}\langle(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp},\eta\rangle \;=\;& -\langle\alpha(X,\nabla_Y Z),\eta\rangle+\langle\alpha(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle-\langle\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z),\eta\rangle\\ &+\langle\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z),\eta\rangle+\langle\alpha(\nabla_X Y,Z),\eta\rangle-\langle\alpha(\nabla_Y X,Z),\eta\rangle\end{aligned}$$

e, substituindo (1.8) e (1.9) nesta expressão, concluir que

$$\langle(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp},\eta\rangle=\langle(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z),\eta\rangle-\langle(\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z),\eta\rangle.$$

Como $\eta\in\mathfrak{X}(M)$ foi escolhido arbitrariamente, segue o resultado.

■

Corolário 1.43 *Se $\{X,Y\}$ é uma base para um plano tangente não degenerado de M gerado por $X,Y\in T_pM$, então*

$$\overline{K}(X,Y)=K(X,Y)+\frac{\langle\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle-\langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2},$$

em que $\overline{K}$ e K denotam as curvaturas seccionais de $\overline{M}$ e M, respectivamente.

Prova. Observemos que fazendo $X=Z$ e $W=Y$ na equação de Gauss, dada na Proposição 1.42, ainda encontramos que

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle=\langle\overline{R}(X,Y)X,Y\rangle+\langle\alpha(X,Y),\alpha(Y,X)\rangle-\langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle.$$

Uma vez que $|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2\neq 0$, temos

$$\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}=\frac{\langle\overline{R}(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}+\frac{\langle\alpha(X,Y),\alpha(Y,X)\rangle-\langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2},$$

o que implica

$$K(X,Y)=\overline{K}(X,Y)+\frac{\langle\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle-\langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}.$$

■

Faremos uma aplicação da Equação de Gauss usando a Definição 1.28.

Exemplo 5 *Mostremos que a esfera n-dimensional*

$$S^n(r)=\{p\in\mathbb{R}^{n+1}\ ;\ \langle p,p\rangle=r^2\}$$

tem curvatura seccional constante $K=\dfrac{1}{r^2}$, se $n\geq 2$.

Com efeito, seja $p = \sum_i u^i \partial_i$ *o vetor posição de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *para* $p \in S^n(r)$. *Se* $\overline{\nabla}$ *é a conexão de Levi-Civita de* $\mathbb{R}^{n+1}$, *então*

$$\overline{\nabla}_X p = \sum_i X(u^i)\partial_i = X, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(S^n).$$

Daí,

$$\langle p, p\rangle = r^2 \Rightarrow 0 = X\langle p, p\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X p, p\rangle = 2\langle X, p\rangle,$$

o que implica

$$0 = \langle X, p\rangle, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(S^n),$$

isto é, o vetor posição p *é ortogonal a* S^n.

Consideremos agora $U = \dfrac{p}{|p|} = \dfrac{p}{\sqrt{\langle p, p\rangle}} = \dfrac{p}{r}$ *e afirmamos que*

$$\alpha(V, W) = -\ \frac{1}{r}\langle V, W\rangle U, \quad \forall\ V, W \in \mathfrak{X}(S^n).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(V, W), U\rangle &= \langle (\overline{\nabla}_V W)^{\perp}, U\rangle = \frac{1}{r}\langle (\overline{\nabla}_V W)^{\perp}, p\rangle \\
&= \frac{1}{r}\langle \overline{\nabla}_V W, p\rangle = -\ \frac{1}{r}\langle W, \overline{\nabla}_V p\rangle \\
&= -\ \frac{1}{r}\langle V, W\rangle, \quad \forall\ V, W \in \mathfrak{X}(S^n).
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^{n+1}$ *é flat, concluímos pelo Corolário 1.43 que*

$$K(V, W) = \frac{1}{r^2}.$$

Se a variedade Riemanniana $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante C, então para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, podemos reescrever as equações de Gauss e Codazzi da seguinte maneira:

(i) *Equação de Gauss:*

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Z, W\rangle &= C(\langle Z, X\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Z, Y\rangle\langle X, W\rangle) \\
&\quad + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z)\rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W)\rangle;
\end{aligned}$$

(ii) *Equação de Codazzi:*

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X, Z).$$

1.4 Hipersuperfícies em Formas Espaciais

Na presente seção, reescreveremos as equações básicas das imersões isométricas apresentadas na seção anterior para o caso em que o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional e M^n é uma hipersuperfície imersa. Uma vez escolhida a orientação da hipersuperfície imersa, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, denotaremos por N essa escolha e também denominaremos N como sendo a *Aplicação Normal de Gauss* de M^n.

Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ a hipersuperfície dada acima. Como existe apenas uma direção normal, deixaremos de escrever o subíndice em A para denotar a direção normal. Com exceção da métrica, denotaremos por $\overline{\nabla}$ e $\overline{R}$ a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente, e por ∇ e R a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de M^n, respectivamente.

Então dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, é fácil ver que a fórmula de Gauss é dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N.$$

Por outro lado, uma vez que N é um campo unitário e normal, temos $\langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle = 0$ e, portanto $\nabla^{\perp}_X N = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, podemos escrever a fórmula de Weingarten como

$$\overline{\nabla}_X N = -\ AX.$$

Usando o fato que $\alpha(X, Y) = -\ \langle AX, Y \rangle N$, podemos ver que a equação de Gauss pode ser escrita como

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^{\top} - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX$$

e a equação de Codazzi por

$$(\overline{R}(X, Y)N)^{\top} = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X,$$

em que, por definição,

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y).$$

No caso em que a curvatura seccional de $\overline{M}^{n+1}$ é constante C, as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente

$$R(X, Y)Z = C(\langle Z, X \rangle Y - \langle Z, Y \rangle X) - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX \tag{1.10}$$

e

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y. \tag{1.11}$$

Neste momento, convém introduzir a seguinte definição:

Definição 1.44 *Uma hipersuperfície é dita ser* isoparamétrica *quando todos os autovalores do operador de Weingarten são constantes. No contexto acima, este fato se traduz como $\nabla A = 0$.*

Encerraremos esta seção citando um resultado clássico de caracterização de hipersuperfícies isoparamétricas em formas espaciais Riemannianas. Veja por exemplo as referências: [6, 11, 17].

Teorema 1.45 *Seja M^n uma hipersuperfície Riemanniana imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ de curvatura seccional constante c. Suponha que M^n admite no máximo duas curvaturas principais distintas e constantes. Então, a menos de isometrias, M^n é uma subvariedade aberta de:*

(i) $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, *em que* $c_1 > 0$, *quando* $c = 0$;

(ii) $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(c_2)$, *em que* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *e* $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, *quando* $c > 0$;

(iii) $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{H}^{n-k}(c_2)$, *em que* $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ *e* $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, *quando* $c < 0$,

em que $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Capítulo 2

Resultados auxiliares

2.1 Uma fórmula tipo Simons

Nesta seção aplicaremos os conhecimentos descritos no capítulo anterior para a obtenção da fórmula de Simons para hipersuperfícies orientadas imersas em uma forma espacial Riemanniana. Aqui seguiremos a abordagem feita por Nomizu e Smyth [14].

Seja M^n uma hipersuperfície orientada imersa isometricamente em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ e denotemos por A sua segunda forma fundamental com respeito ao campo de vetores normal e unitário globalmente definido N. Recordemos que a diferencial covariante de A, $\nabla A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é definida por

$$\nabla A(X,Y) = (\nabla_Y A)X = \nabla_Y A(X) - A(\nabla_Y X), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

com a sua segunda derivada satisfazendo:

$$\nabla^2 A(X,Y,Z) = (\nabla_Z \nabla A)(X,Y), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.1}$$

Usando esta linguagem, o primeiro resultado desta seção mostra as simetrias do operador de forma nas duas primeiras e nas duas últimas entradas.

Lema 2.1 *Seja M^n uma variedade Riemanniana imersa em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com operador de Weingarten A. Então*

(a) $\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(X,Z,Y) - R(Z,Y)A(X) + A\left(R(Z,Y)X\right);$

(b) $\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(Y,X,Z);$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Prova. (a) Inicialmente observemos que, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Y,Z) &= \nabla_Z\left(\nabla A(X,Y)\right) - \nabla A\left(\nabla_Z X, Y\right) - \nabla A\left(X, \nabla_Z Y\right)\\ &= \nabla_Z\left(\nabla_Y A(X) - A(\nabla_Y X)\right) - \nabla_Y A(\nabla_Z X) + A\left(\nabla_Y \nabla_Z X\right)\\ &\quad - \nabla_{\nabla_Z Y} A(X) + A\left(\nabla_{\nabla_Z Y} X\right)\\ &= \nabla_Z \nabla_Y A(X) - \nabla_Z A(\nabla_Y X) - \nabla_Y A(\nabla_Z X) + A\left(\nabla_Y \nabla_Z X\right)\\ &\quad - \nabla_{\nabla_Z Y} A(X) + A\left(\nabla_{\nabla_Z Y} X\right).\end{aligned}$$

De maneira totalmente análoga, também temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Z,Y) &= \nabla_Y \nabla_Z A(X) - \nabla_Y A(\nabla_Z X) - \nabla_Z A(\nabla_Y X) + A\left(\nabla_Z \nabla_Y X\right)\\ &\quad - \nabla_{\nabla_Y Z} A(X) + A\left(\nabla_{\nabla_Y Z} X\right).\end{aligned}$$

Portanto, pela definição do tensor curvatura (1.5),

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Y,Z) - \nabla^2 A(X,Z,Y) &= \nabla_Z \nabla_Y A(X) + A\left(\nabla_Y \nabla_Z X\right) - \nabla_Y \nabla_Z A(X) - A\left(\nabla_Z \nabla_Y X\right)\\ &\quad - \nabla_{\nabla_Z Y} A(X) + A\left(\nabla_{\nabla_Z Y} X\right) + \nabla_{\nabla_Y Z} A(X) - A\left(\nabla_{\nabla_Y Z} X\right)\\ &= A\left(R(Z,Y)X\right) - R(Z,Y)A(X).\end{aligned}$$

(b) Lembremos que a Equação de Codazzi 1.11 nos garante que

$$\nabla A(X,Y) = \nabla A(Y,X),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então, pela Definição 2.1,

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Y,Z) &= (\nabla_Z \nabla A)(X,Y)\\ &= \nabla_Z \nabla A(X,Y) - \nabla A(\nabla_Z X, Y) - \nabla A(X, \nabla_Z Y)\\ &= \nabla_Z \nabla A(Y,X) - \nabla A(Y, \nabla_Z X) - \nabla A(\nabla_Z Y, X)\\ &= (\nabla_Z \nabla A)(X,Y)\\ &= \nabla^2 A(X,Y,Z)\end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. ■

Lema 2.2 *Seja* M^n *uma hipersuperfície imersa isomericamente em* $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ *com operador de Weingarten* A. *Então, para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *vale* *(a)* $\mathrm{tr}(\nabla_X A) = n\langle \nabla H, X\rangle$;

(b) para cada $p \in M^n$*,* $\nabla_X A : T_pM \to T_pM$ *é auto-adjunto.*

Prova. (a) Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal ao longo de M^n que é geodésico[1] em $p \in M^n$. Sabemos que

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), e_i\rangle. \tag{2.2}$$

Daí, de (2.1) e tomando a derivada covariante em (2.2),

$$\begin{aligned} X(H) &= \frac{1}{n}X\left(\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), e_i\rangle\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X\langle A(e_i), e_i\rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X A(e_i), e_i\rangle + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), \nabla_X e_i\rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla_X A)e_i, e_i\rangle, \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que foi usado que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é geodésico em p para garantir que $(\nabla_X e_i)(p) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Por outro lado,

$$\mathrm{tr}(\nabla_X A) = \sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla_X A)e_i, e_i\rangle. \tag{2.4}$$

Consequentemente, substituindo (2.4) em (2.3), temos $nX(H) = \mathrm{tr}(\nabla_X A)$ e, utilizando a Definição 1.31, $\mathrm{tr}(\nabla_X A) = n\langle \nabla H, X\rangle$, obtendo o resultado desejado.

(b) Temos que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X A)Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X A(Y), Z\rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z\rangle \\ &= X\langle A(Y), Z\rangle - \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle \nabla_X Y, A(Z)\rangle \\ &= X\langle A(Y), Z\rangle - \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle - X\langle Y, A(Z)\rangle + \langle Y, \nabla_X A(Z)\rangle \\ &= -\langle A(Y), \nabla_X Z\rangle + \langle Y, \nabla_X A(Z)\rangle \\ &= \langle Y, (\nabla_X A)Z\rangle, \end{aligned}$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Isto é, em cada ponto $p \in M^n$, $\nabla_X A : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto. ■

[1] Um referencial é dito ser geodésico se, para cada $p \in M^n$, existe um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ ao redor de uma vizinhança de p satisfazendo $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$.

Na sequência, definimos o Laplaciano áspero $\Delta T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de um tensor T da seguinte forma:

$$\Delta T = \mathrm{div}(\nabla T). \tag{2.5}$$

Logo, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal ao longo de M^n, escrevemos

$$\Delta T(X) = \mathrm{tr}\left(\nabla^2 T(X, \cdot, \cdot)\right) = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 T(X, e_i, e_i), \tag{2.6}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Juntando todas essas informações, obtemos:

Proposição 2.1 *Seja M^n uma hipersuperfície imersa isomericamente em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com operador de Weingarten A. Então, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\Delta A(X) = \nabla_X \nabla H - \sum_{i=1}^{n} R(e_i, X)A(e_i) + \sum_{i=1}^{n} A(R(e_i, X)e_i),$$

em que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal ao longo de M^n.

Prova. Pelos itens (a) e (b) do Lema 2.1, escrevemos

$$\begin{aligned} \Delta A(X) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A(X, e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A(e_i, e_i, X) - \sum_{i=1}^{n} R(e_i, X)A(e_i) + \sum_{i=1}^{n} A\left(R(e_i, X)e_i\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por outro lado, consideremos um campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrário, observemos que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^2 A(e_i, e_i, X), Z \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_X \nabla A)(e_i, e_i), Z \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X \nabla A(e_i, e_i), Z \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} X \langle \nabla A(e_i, e_i), Z \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla A(e_i, e_i), \nabla_X Z \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} X \langle (\nabla_{e_i} A)e_i, Z \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} A)e_i, \nabla_X Z \rangle. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2, $\nabla_{e_i} A$ é auto-adjunto, para cada $i = 1, \ldots, n$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^2 A(e_i, e_i, X), Z \rangle = \sum_{i=1}^{n} X \langle e_i, (\nabla_{e_i} A)Z \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, (\nabla_{e_i} A)\nabla_X Z \rangle$$

e, pela equação de Codazzi dada em (1.11),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla^2 A(e_i,e_i,X),Z\rangle &= \sum_{i=1}^{n} X\langle e_i,(\nabla_Z A)e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle e_i,(\nabla_{\nabla_X Z}A)e_i\rangle\\ &= X\left(\mathrm{tr}(\nabla_Z A)\right) - \mathrm{tr}(\nabla_{\nabla_X Z}A).\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 2.2 mais uma vez,

$$\mathrm{tr}(\nabla_Z A) = n\langle \nabla H, Z\rangle \quad \text{e} \quad \mathrm{tr}(\nabla_{\nabla_X Z}A) = n\langle \nabla H, \nabla_X Z\rangle.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla^2 A(e_i,e_i,X),Z\rangle &= nX\langle \nabla H, Z\rangle - n\langle \nabla H, \nabla_X Z\rangle\\ &= n\langle \nabla_X \nabla H, Z\rangle + n\langle \nabla H, \nabla_X Z\rangle - n\langle \nabla H, \nabla_X Z\rangle\\ &= n\langle \nabla_X \nabla H, Z\rangle,\end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, inserindo (2.8) em (2.7), obtemos o resultado. ∎

Para o que segue, sejam T e S dois tensores simétricos do tipo $(0,2)$. Definimos o produto interno de Hilbert-Schmidt de T por S, como

$$\langle T, S\rangle := \mathrm{tr}(T\circ S^*) = \sum_{i=1}^{n}\langle T(e_i), S(e_i)\rangle, \tag{2.9}$$

em que $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é um referencial ortonormal ao longo de M^n. Em particular, a norma de Hilbert-Schmidt do operador de Weingarten A é dada por

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), A(e_i)\rangle.$$

O seguinte resultado será providencial.

Lema 2.3 *Seja M^n uma hipersuperfície imersa isomericamente em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com operador de Weingarten A. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = \langle \Delta A, A\rangle + |\nabla A|^2.$$

Prova. Sejam $p \in M^n$ e $\{e_1,\ldots,e_n\}$ um referencial móvel em uma vizinhança $U \subset M^n$ de p, geodésico em p. De (2.6), temos

$$
\begin{aligned}
\Delta|A|^2 = \Delta\langle A, A\rangle &= \sum_{j=1}^{n} e_j(e_j\langle A, A\rangle) = \sum_{i,j=1}^{n} e_j(e_j\langle A(e_i), A(e_i)\rangle) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} e_j(\langle \nabla_{e_j} A(e_i), A(e_i)\rangle) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_j} A(e_i), A(e_i)\rangle + 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{e_j} A(e_i), \nabla_{e_j} A(e_i)\rangle \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{e_j}(\nabla A(e_i, e_j)), A(e_i)\rangle + 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{e_j} A(e_i), \nabla_{e_j} A(e_i)\rangle \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla^2 A(e_i, e_j, e_j)), A(e_i)\rangle + 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla A(e_i, e_j), \nabla A(e_i, e_j)\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\langle \sum_{j=1}^{n} \nabla^2 A(e_i, e_j, e_j)), A(e_i)\rangle + 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla A(e_i, e_j), \nabla A(e_i, e_j)\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\langle \Delta A(e_i), A(e_i)\rangle + 2\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla A(e_i), \nabla A(e_i)\rangle \\
&= 2\langle \Delta A, A\rangle + 2|\nabla A|^2,
\end{aligned}
$$

como afirmado. ∎

Encerraremos esta subseção com a seguinte fórmula de Simons:

Proposição 2.2 *Seja M^n uma hipersuperfície imersa isomericamente em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com operador de Weingarten A. Então*

$$
\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + n\mathrm{tr}(A \circ \mathrm{Hess}\, H) - cn^2H^2 + cn|A|^2 + nH\mathrm{tr}(A^3) - |A|^4.
$$

Prova. Vejamos que

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta A, A\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\langle \Delta A(e_j), A(e_j)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_{e_j}\nabla H, A(e_j)\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle R(e_i, e_j)A(e_i), A(e_j)\rangle \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(R(e_i, e_j)e_i), A(e_j)\rangle.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Pela equação de Gauss dada em (1.10), um cálculo direto nos permite comprovar que

$$
\sum_{i,j=1}^{n}\langle R(e_i, e_j)A(e_i), A(e_j)\rangle = c\left(n^2H^2 - |A|^2\right)
$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n}\langle R(e_i,e_j)e_i, A^2(e_j)\rangle = c(n-1)|A|^2 + nH\mathrm{tr}(A^3) - |A|^4.$$

Logo, de (2.10),

$$\langle \Delta A, A\rangle = n\mathrm{tr}(A\circ \mathrm{Hess}\, H) - cn^2H^2 + cn|A|^2 + nH\mathrm{tr}(A^3) - |A|^4 \tag{2.11}$$

e, portanto, inserindo (2.11) no Lema 2.3, concluímos que

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + n\mathrm{tr}(A\circ \mathrm{Hess}\, H) - cn^2H^2 + cn|A|^2 + nH\mathrm{tr}(A^3) - |A|^4. \tag{2.12}$$

■

2.2 O operador quadrado de Cheng-Yau

Na busca por resultados de rigidez de hipersuperfícies com curvatura escalar constante imersas em formas espaciais Riemannianas, os matemáticos Cheng e Yau [7], introduziram um importante operador diferencial de segunda ordem o qual foi chamado de operador $\Box$. Para o nosso estudo, definiremos a seguir o operador quadrado associado a segunda forma fundamental de uma imersão isométrica.

Definição 2.3 *Seja M^n uma hipersuperfície orientada imersa isometricamente em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$. Para qualquer função $f\in\mathcal{C}^2(M)$, definimos o operador quadrado atuando sobre f por*

$$\Box(f) = \mathrm{tr}(P\circ \mathrm{Hess}\, f), \tag{2.13}$$

em que

$$P = nHI - A, \tag{2.14}$$

com I denotando o tensor identidade.

Acerca do tensor P, não é difícil verificar que:

i. P comuta com A;

ii. P é simétrico;

iii. $\mathrm{tr}(P) = n(n-1)H$.

A seguir, veremos um importante resultado que nos auxiliará na prova de algumas propriedades do operador de Cheng-Yau.

Proposição 2.4 *O operador de Cheng-Yau é uma divergência, isto é, dado* $f \in \mathcal{C}^2(M)$,

$$\Box(f) = \mathrm{div}(P(\nabla f)).$$

Prova. Partindo de (2.13), observemos que da compatibilidade da conexão com a métrica que

$$\begin{aligned}\Box(f) &= \sum_{i=1}^{n}\langle (P \circ \mathrm{Hess}\, f)e_i, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla f, P(e_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[e_i\langle \nabla f, P(e_i)\rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i}P(e_i)\rangle\right].\end{aligned}$$

Usando (2.1), mais uma vez da compatibilidade segue que

$$\begin{aligned}\Box(f) &= \sum_{i=1}^{n}\left[e_i\langle P(\nabla f), e_i\rangle - \langle \nabla f, (\nabla_{e_i}P)e_i\rangle\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\langle \nabla_{e_i}P(\nabla f), e_i\rangle - \langle \nabla f, (\nabla_{e_i}P)e_i\rangle\right] \\ &= \mathrm{div}\left(P(\nabla f)\right) - \langle \nabla f, \mathrm{div}(P)\rangle,\end{aligned} \tag{2.15}$$

em que, por (1.5), $\mathrm{div}(P)$ é definido como sendo $\mathrm{tr}(\nabla P)$.

Por outro lado, pela definição de P, não é difícil verificar de (2.1) que

$$\nabla P(X,Y) = nX(H)Y - \nabla A(X,Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Daí, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}(P), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla P(e_i,e_i), X\rangle \\ &= n\sum_{i=1}^{n}\langle e_i(H)e_i, X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla A(e_i,e_i), X\rangle \\ &= n\langle \nabla H, X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla_{e_i}A)e_i, X\rangle.\end{aligned}$$

Agora pelo Lema 2.2 e pela equação de Codazzi,

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{div}(P), X\rangle &= n\langle \nabla H, X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, (\nabla_{e_i}A)X\rangle \\ &= n\langle \nabla H, X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, (\nabla_X A)e_i\rangle \\ &= n\langle \nabla H, X\rangle - \operatorname{tr}(\nabla_X A) = 0,\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Consequentemente, $\operatorname{div}(P) = 0$. Inserindo este fato em (2.15), obtemos a igualdade desejada. ■

Corolário 2.5 *Dados $f, g \in \mathcal{C}^2(M)$ e $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, o operador $\square$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\square(\phi \circ f) = \phi'(f)\square(f) + \phi''(f)\langle P(\nabla f), \nabla f\rangle$;

(b) $\square(fg) = g\square(f) + f\square(g) + 2\langle P(\nabla f), \nabla g\rangle$,

(c) $\square(f^2) = 2f\square(f) + 2\langle P(\nabla f), \nabla f\rangle$.

(d) Se M^n é fechada, então o operador $\square$ é auto-adjunto com respeito ao produto interno de L^2 de M^n, isto é,

$$\int_M f\square(g)dM = \int_M g\square(f)dM,$$

dM denota o elemento volume de M^n.

Prova.

(a) Utilizando regra da cadeia e propriedades de divergente dadas na Proposição 1.34,

$$\begin{aligned}\square(\phi\circ f) &= \operatorname{div}(P(\nabla(\phi\circ f))) \\ &= \operatorname{div}(P(\phi'(f)\nabla f)) \\ &= \phi'(f)\operatorname{div}(P(\nabla f)) + \langle \phi''(f)\nabla f, P(\nabla f)\rangle \\ &= \phi'(f)\square(f) + \phi''(f)\langle P(\nabla f), \nabla f\rangle.\end{aligned}$$

(b) Podemos utilizar as propriedades de gradiente e de divergente para obtermos

$$\begin{aligned}\square(fg) &= \operatorname{div}(P(\nabla fg)) \\ &= \operatorname{div}(P(f\nabla g + g\nabla f)) \\ &= \operatorname{div}(P(f\nabla g)) + \operatorname{div}(P(g\nabla f)) \\ &= f\operatorname{div}(P(\nabla g)) + \langle \nabla f, P(\nabla g)\rangle + g\operatorname{div}(P(\nabla f)) + \langle \nabla g, P(\nabla f)\rangle \\ &= f\square(g) + g\square(f) + 2\langle P(\nabla f), \nabla g\rangle.\end{aligned}$$

(c) Do ítem (b), teremos

$$\begin{aligned}\square(f^2) &= f\square(f) + f\square(f) + 2\langle P(\nabla f), \nabla f\rangle \\ &= 2f\square(f) + 2\langle P(\nabla f), \nabla f\rangle.\end{aligned}$$

(d) Segue do item (b) e das propriedades de divergente que

$$\operatorname{div}(P(\nabla(fg)) = \square(fg) = f\square(g) + g\square(f) + 2\langle P(\nabla f), \nabla g\rangle.$$

Por outro lado, consideremos o campo $X = fP(\nabla g)$. Calculando a sua divergência,

$$\operatorname{div}(X) = f\square(g) + \langle P(\nabla f), \nabla g\rangle.$$

Substituindo a expressão acima na anterior, temos

$$\operatorname{div}(P(\nabla(fg)) = -f\square(g) + g\square(f) + 2\operatorname{div}(X).$$

Agora tomando a integral em ambos os lado e usando o teorema de Stokes, concluímos

$$\int_M f\square g dM = \int_M g\square f dM,$$

como desejado.

■

Com base na prévia digressão, voltemos à fórmula tipo Simons. Consideremos $f = nH$ em (2.13) e, da equação (2.14) e da Definição 1.37, garantimos o seguinte:

$$\begin{aligned}\square(nH) &= \operatorname{tr}(P \circ \operatorname{Hess} nH) \\ &= nH\Delta(nH) - n\operatorname{tr}(A \circ \operatorname{Hess} H).\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\Delta(nH)^2 = 2nH\Delta(nH) + 2n^2|\nabla H|^2,$$

obtemos

$$\square(nH) = \frac{1}{2}\Delta(nH)^2 - n^2|\nabla H|^2 - n\operatorname{tr}(A \circ \operatorname{Hess} H). \tag{2.16}$$

Tomando o traço duas vezes na equação de Gauss, temos

$$n(n-1)R = n(n-1)c + n^2H^2 - |A|^2. \tag{2.17}$$

Portanto, inserindo (2.17) em (2.16) e estas na Proposição 2.2, obtemos a seguinte formulá do tipo Simons para o operador de Cheng-Yau.

Proposição 2.6 *Seja M^n uma hipersuperfície imersa isomericamente em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com operador de Weingarten A. Então*

$$\begin{aligned}\square(nH) = &\frac{n(n-1)}{2}\Delta R + |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 \\ &- cn^2H^2 + cn|A|^2 + nH\mathrm{tr}(A^3) - |A|^4.\end{aligned}$$

Essa fórmula foi obtida pela primeira vez por Alencar, do Carmo e Colares em [2] e depois estendida ao conceito dos bem conhecidos operadores linearizados L_r, por Caminha em [5].

2.3 Alguns lemas importantes

No que segue, apresentaremos alguns resultados os quais nos irão garantir a fundação necessária à obtenção dos resultados. Iniciaremos com a clássica desigualdade de Kato.

Lema 2.4 *Seja M^n uma variedade Riemanniana e T um tensor simétrico do tipo $(0,2)$. Então, vale a desigualdade de Kato*

$$|\nabla |T||^2 \leq |\nabla T|^2.$$

Prova. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal ao longo de M^n. Por (2.9), escrevemos,

$$|T|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle T(e_i), T(e_i)\rangle. \tag{2.18}$$

Derivando ambos os lados com respeito a e_k e usando a compatibilidade,

$$e_k(|T|^2) = \sum_{i=1}^{n} e_k\langle T(e_i), T(e_i)\rangle = 2\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla T(e_i, e_k), T(e_i)\rangle, \tag{2.19}$$

donde segue, levando ambos os lados da equação ao quadrado que

$$e_k(|T|^2)^2 = 4\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla T(e_i, e_k), T(e_i)\rangle\right)^2. \tag{2.20}$$

Daí, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|\nabla|T|^2|^2 = \sum_{k=1}^{n} e_k(|T|^2)^2 &= 4\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla T(e_i, e_k), T(e_i)\rangle\right)^2 \\ &\leq 4\sum_{i,k=1}^{n} |\nabla T(e_i, e_k)|^2 \sum_{i=1}^{n} |T(e_i)|^2 \\ &= 4|\nabla T|^2|T|^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $|\nabla|T|^2|^2 = 4|T|^2|\nabla|T||^2$, temos

$$|T|^2|\nabla|T||^2 \leq |T|^2|\nabla T|^2.$$

Portanto, ou

$$|T|^2 = 0 \quad \text{e} \quad |\nabla T|^2 = |\nabla|T||^2 = 0$$

ou

$$|\nabla T|^2 \geq |\nabla|T||^2.$$

■

Como aplicação da desigualdade de Kato, obtemos:

Lema 2.5 *Seja M^n uma hipersuperfície imersa em uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com curvatura escalar constante $R \geq c$. Então,*

$$|\nabla A|^2 \geq n^2|\nabla H|^2. \tag{2.21}$$

Além disso, se $R > c$ e a igualdade ocorre em (2.21) *sobre M^n, então H é constante em M^n e, consequentemente, M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica.*

Prova. Como a curvatura escalar é constante, tomamos a derivada covariante em (2.17) a fim de obter

$$n^2 H\nabla H = |A|\nabla|A|$$

e consequentemente,

$$n^4H^2|\nabla H|^2 = |A|^2|\nabla|A||^2.$$

Por outro lado, considerando $T = A$ no Lema 2.4, escrevemos

$$|\nabla|A||^2 \leq |\nabla A|^2.$$

Logo

$$n^4H^2|\nabla H|^2 = |A|^2|\nabla|A||^2 \leq |A|^2|\nabla A|^2.$$

Usando mais uma vez (2.17) e que $R \geq c$,

$$|A|^2|\nabla A|^2 \geq n^4H^2|\nabla H|^2 = n^2[|A|^2 + n(n-1)(R-c)]|\nabla H|^2 \geq n^2|A|^2|\nabla H|^2. \tag{2.22}$$

Portanto, obtemos que ou,

$$|A|^2 = 0 \quad \text{e} \quad |\nabla A|^2 = 4|\nabla H|^2 = 0,$$

ou então

$$|\nabla A|^2 \geq 4|\nabla H|^2,$$

o que mostra a primeira parte deste lema.

Para a segunda parte, se $R > c$, da equação (2.17) temos que $4n^2H^2 > 4|A|^2$. Agora, assumiremos em adição, que a igualdade em (2.21) ocorre sobre M^n. Neste caso, o nosso objetivo é mostrar que H é constante sobre M^n. De fato, suponhamos por contradição que isso não ocorre, então existe um ponto $p \in M^n$ tal que $|\nabla H(p)| > 0$. Daí, deduzimos de (2.22) que $4|A|^2|\nabla A|^2(p) > 4n^2|A|^2(p)|\nabla H(p)|^2$ e, uma vez que $|\nabla A|^2(p) = n^2|\nabla H(p)|^2 > 0$, chegamos a uma contradição. Portanto, neste caso, concluímos que H deve ser constante sobre M^n. ■

Observação 2.1 *Pela equação* (2.17), *temos*

$$n^2H^2 = |A|^2 + n(n-1)(R-c). \tag{2.23}$$

Suponhamos que $R > c$, segue de (2.23) *que $H(p) \neq 0$ para cada $p \in M^n$. Caso contrário, se existe um $p_0 \in M^n$ tal que $H(p_0) = 0$, aplicamos a equação* (2.23) *e obtemos que*

$$0 = n^2H^2(p_0) = |A|^2(p_0) + n(n-1)(R-c) > |A|^2(p_0),$$

chegando a um absurdo. Logo, neste caso, escolhemos a orientação sobre M^n de tal forma $H > 0$.

Lema 2.6 *Seja M^n uma hipersuperfície imersa em uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com curvatura escalar constante $R \geq c$. No caso em que $R > c$, escolhamos a orientação tal que $H \geq 0$. No caso em que $R = c$, assumamos que a função curvatura média H não muda de sinal. Sejam μ_- e μ_+, respectivamente, o mínimo e o máximo dos autovalores do operador P definido em* (2.14) *em cada ponto $p \in M^n$. Então P é positivo semidefinido com*

$$\mu_- \geq 0 \quad e \quad \mu_+ \leq 2nH.$$

Além disso, no caso em que $R > c$ sobre M^n, as desigualdades acima são estritas com P sendo positivo definido e o operador $\square$ sendo elíptico.

Prova. Por meio da equação (2.17) chegamos a

$$n^2H^2 = |A|^2 + n(n-1)(R-c) \geq \lambda_i^2, \tag{2.24}$$

para cada curvatura principal λ_i de M^n, $i = 1, \ldots, n$.

Por outro lado, a partir da análise realizada na Observação 2.1, obtemos que $H \geq 0$. Logo, de (2.24) temos

$$-nH \leq \lambda_i \leq nH, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Daí, para cada i, a desigualdade

$$0 \leq nH - \lambda_i \leq 2nH$$

se verifica. Contudo, se definirmos $\mu_i := nH - \lambda_i$, podemos inferir que os μ_i's são precisamente os autovalores do operador P. Em particular, concluímos que $\mu_- \geq 0$ e $\mu_+ \leq 2nH$.

Além disso, se $R > c$ sobre M^n, então obtemos $\mu_- > 0$ e $\mu_+ < 2nH$, o que significa que o espectro do operador P é positivo definido e, portanto, $\square$ é elíptico. ■

Prosseguindo no sentido de estabelecer os nossos resultados de caracterização, citaremos um lema algébrico devido a Okumura [15], que foi completado com o caso obtido por Alencar e do Carmo em [1] em que ocorre a igualdade.

Lema 2.7 *Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais tais que $\sum_i a_i = 0$ e $\sum_i a_i^2 = \beta^2$, com $\beta \geq 0$. Então,*

$$-\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_i a_i^3 \leq \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3, \tag{2.25}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, pelo menos $(n-1)$ dos números a_i são iguais.

Prova. Utilizaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos da função $f = \sum_i a_i^3$ sob as condições de $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ e $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \beta^2$, para uma constante $\beta > 0$. Segue que os pontos críticos de f são os valores de a_i que satisfazem a equação $a_i - \lambda a_i - \alpha = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, após uma reenumeração, caso necessário, os pontos críticos são dados por

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_p = a > 0, \qquad a_{i+1} = a_{i+2} = \cdots = a_n = b < 0.$$

Desde que

$$\beta^2 = \sum_{i=1} a_i^2 = pa^2 + (n-p)b^2,$$

$$0 = \sum_{i=1} a_i = pa - (n-p)b,$$

$$f = \sum_{i=1} a_i^3 = pa^3 + (n-p)b^3,$$

concluímos que

$$a^2 = \frac{n-p}{pn}\beta^2, \qquad b^2 = \frac{p}{n-p}\beta^2, \qquad f = \left(\frac{n-p}{n}a - \frac{p}{n}b\right)\beta^2.$$

Daí, f diminui quando p cresce e, assim, f atinge máximo quando $p = 1$, que é dado por

$$\begin{aligned} a^3 - (n-1)b^3 &= ((n-1)b)^3 - (n-1)b^3 = (n-2)n(n-1)b^2b \\ &= \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3, \end{aligned}$$

obtendo o desejado, já que f é simétrica.

Por fim, observemos da prova acima que a igualdade

$$f = \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3$$

ocorrerá apenas quando $p = 1$. Ou seja, se e somente se $(n-1)$ dos $a_i's$ são da forma $-b = -(\frac{1}{n}(n-1))^{\frac{1}{2}}\beta$ e o restante dos $a_i's$ são da forma $a = (\frac{n-1}{n})^{\frac{1}{2}}\beta$. ■

Capítulo 3

Resultados principais

Nesta seção provaremos os resultados principais desta dissertação. Antes, introduziremos o operador sem traço que é comumente usado na obtenção de resultados de rigidez. Seja $\Phi = A - HI$ e vejamos que em cada ponto de M^n, Φ é um operador linear e auto-adjunto. Além disso o operador Φ possui traço nulo. Ademais, vale a seguinte relação

$$|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2. \tag{3.1}$$

Pela própria definição do operador Φ, é possível verificar que ele é simétrico e que qualquer base que diagonaliza o operador de Weingarten também o diagonaliza. Além disso, quando $|\Phi| = 0$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos que a imersão é totalmente umbílica. Por fim, juntando a equação (3.1) a (2.23), obtemos

$$|\Phi|^2 = n(n-1)H^2 - n(n-1)(R-c). \tag{3.2}$$

Diante do exposto acima e no capítulo anterior, o próximo resultado garante uma limitação para o operador $\square$ agindo sobre o quadrado da norma do operador sem traço de uma hipersuperfície com curvatura escalar constante imersa em uma forma espacial. Em outras palavras,

Proposição 3.1 *Seja M^n uma hipersuperfície imersa em uma forma espacial $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com curvatura escalar constante $R \geq c$. Nos casos em que $R > c$, escolhamos a orientação tal que $H \geq 0$. No caso em que $R = c$, assumamos que a função curvatura média H não muda de sinal. Então,*

$$\square(|\Phi|^2) \geq -\frac{2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2 Q_{R,c}(|\Phi|)\left(\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R-c)}\right), \tag{3.3}$$

em que Q_R é a função real dada por

$$Q_{R,c}(x) = (n-2)x^2 + (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-c)} - n(n-1)R. \tag{3.4}$$

Prova. A ideia é usar a Proposição 2.6. Uma vez que estamos supondo que M^n possui curvatura escalar constante, reescrevemos a Proposição 2.6 como segue:

$$\square(nH) = |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 - cn^2H^2 + cn|A|^2 + nH\mathrm{tr}(A^3) - |A|^4. \tag{3.5}$$

Por outro lado, pela definição de Φ,

$$A^3 = (\Phi + HI)^3 = \Phi^3 + 3\Phi^2 H + 3\Phi H^2 + H^3$$

e também pela expressão (3.1), temos

$$|A|^4 = (|\Phi|^2 + nH^2)^2 = |\Phi|^4 + 2n|\Phi|^2H^2 + n^2H^4.$$

Logo,

$$\begin{aligned} nH\mathrm{tr}(A^3) - |A|^4 &= nH\mathrm{tr}(\Phi^3) + 3n|\Phi|^2H^2 + n^2H^4 - |\Phi|^4 - 2n|\Phi|^2H^2 - n^2H^4 \\ &= nH\mathrm{tr}(\Phi^3) + n|\Phi|^2H^2 - |\Phi|^4. \end{aligned}$$

Portanto, inserindo essa equação em (3.5), chegamos a

$$\begin{aligned} \square(nH) &= |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 \\ &\quad - cn^2H^2 + cn|A|^2 + nH\mathrm{tr}(\Phi^3) + n|\Phi|^2H^2 - |\Phi|^4 \\ &= |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 + cn(|A|^2 - nH^2) + nH\mathrm{tr}(\Phi^3) + n|\Phi|^2H^2 - |\Phi|^4 \\ &= |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 + |\Phi|^2\left(-|\Phi|^2 + nH^2 + nc\right) + nH\mathrm{tr}(\Phi^3). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora, aplicando o Lema 2.7,

$$nH\mathrm{tr}(\Phi^3) \geq -nH|\mathrm{tr}(\Phi^3)| \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^3. \tag{3.7}$$

Como estamos supondo $R \geq c$, segue do Lema 2.5 que

$$|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 \geq 0. \tag{3.8}$$

Assim, inserindo (3.7) e (3.8) na equação (3.6), obtemos

$$\square(nH) \geq |\Phi|^2\left(-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(H^2 + c)\right). \tag{3.9}$$

Por outro lado, da equação (3.2), escrevemos

$$\frac{n}{n-1}|\Phi|^2 = n^2H^2 - n^2(R-c). \tag{3.10}$$

Além disso, da hipótese $R \geq c$ (resp. $R > c$), o Lema 2.6 assegura-nos que o operador $\square$ é positivo semidefinido (resp. positivo definido). Logo, da equação (3.10) e do item (d) da Proposição 2.5, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n-1}\square(|\Phi|^2) &= 2nH\square(nH) + 2n^2\langle P(\nabla H), \nabla H\rangle \\ &\geq 2nH\square(nH). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, substituindo (3.9) em (3.11), chegamos a

$$\frac{n}{2(n-1)}\square(|\Phi|^2) \geq nH|\Phi|^2\left(-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(H^2+c)\right). \tag{3.12}$$

Evidenciando a curvatura média na equação (3.2) em termos da curvatura escalar normalizada, temos

$$H^2 = \frac{1}{n(n-1)}|\Phi|^2 + R - c \tag{3.13}$$

e, consequentemente, levando em conta que $H \geq 0$, podemos escrever

$$H = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R-c)}. \tag{3.14}$$

Após um simples cálculo, das equações (3.13) e (3.14), temos

$$-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(H^2+c) = \frac{1}{n-1}Q_R(|\Phi|), \tag{3.15}$$

em que

$$Q_{R,c}(x) = -(n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-c)} + n(n-1)R.$$

Portanto, de (3.12) e (3.15) obtemos a limitação desejada. ∎

Vejamos as seguintes informações, necessárias para as demonstrações que virão nesse último capítulo.

Observação 3.1 *Para $R > 1$, a função Q_R, definida em (3.4), é estritamente crescente para $x \geq 0$ com*

$$Q_{R,c}(0) = -n(n-1)R < 0.$$

Além disso, $Q_{R,c}$ possui uma única raiz real positiva. De fato, suponha que exista x_0 tal que $Q_{R,c}(x_0) = 0$. Então

$$-(n-2)x_0^2 - (n-2)x_0\sqrt{x_0^2 + n(n-1)(R-c)} + n(n-1)R = 0.$$

Equivalentemente,

$$-(n-2)x_0^2 + n(n-1)R = (n-2)x_0\sqrt{x_0^2 + n(n-1)(R-c)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}(n-2)x_0^4 - 2n(n-1)Rx_0^2 + \frac{n^2(n-1)^2}{(n-2)}R^2 &= (n-2)x_0^2(x_0^2 + n(n-1)(R-c)) \\ &= (n-2)x_0^4 + n(n-1)(n-2)(R-c)x_0^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha(n,R,c) = x_0 = \sqrt{\frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(n(R-c)+2)}}.$$

Exemplo 6 (Toro de Clifford) *Seja M^n o produto Riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, com $0 < r < 1$ em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, $n \geq 3$. Neste caso, o vetor posição é*

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$$

e o vetor normal e unitário, neste ponto x, é dado por

$$e_{n+1} = \left(\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}x_1, -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}x_2\right).$$

Suas curvaturas principais são

$$\lambda_1 = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \quad e \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Logo, não é difícil checar que

$$H = \frac{n(1-r^2)-1}{nr\sqrt{1-r^2}} \quad e \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)}.$$

Além disso, pela equação (2.23), a curvatura escalar de R é dada por

$$R = \frac{n-2}{nr^2}.$$

Um cálculo rápido nos conduz à $r = \sqrt{(n-2)/nR}$, e portanto

$$|\Phi|^2 = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(n(R-1)+2)}.$$

Agora somos capazes de provar os resultados principais desta dissertação. O primeiro deles refere-se ao caso $c = 1$.

Teorema 3.2 *Seja M^n uma hipersuperfície compacta orientada isometricamente imersa na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1} (n \geq 3)$ com curvatura escalar R constante satisfazendo $R > 1$. Então*

$$\int_M |\Phi|^{p+2} Q_R(|\Phi|)dM \geq 0 \tag{3.16}$$

para todo número real $p > 2$, em que Q_R é a função real

$$Q_R(x) = (n-2)x^2 + (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-1)} - n(n-1)R. \tag{3.17}$$

Ademais, a igualdade vale se e somente se

(i) ou $|\Phi| = 0$ e M é hipersuperfície totalmente umbílica,

(ii) ou

$$|\Phi|^2 = \alpha(n, R, 1) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(n(R-1)+2)} > 0$$

e M é isométrica a um toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$, com $r = \sqrt{(n-2)/nR}$.

Prova. Por simplicidade, consideremos $u = |\Phi|^2$. Daí, pela Proposição 3.1, temos

$$\frac{1}{2}\square(u) \geq -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} u Q_R(\sqrt{u})\sqrt{u + n(n-1)(R-1)}, \tag{3.18}$$

em que a função Q_R está definida em (3.17).

Uma vez que $R > 1$ e $u \geq 0$, obtemos

$$\frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} \frac{u^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{u + n(n-1)(R-1)}} \square(u) \geq -u^{\frac{p+2}{2}} Q_R(\sqrt{u}),$$

para todo $p > 0$. Ou seja,

$$u^{\frac{p+2}{2}} Q_R(\sqrt{u}) \geq -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} \frac{u^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{u + n(n-1)(R-1)}} \square(u).$$

Sendo M^n compacta, integramos ambos os lados da equação anterior a fim de obter

$$\int_M u^{\frac{p+2}{2}} Q_R(\sqrt{u})dM \geq -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} \int_M \frac{u^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{u + n(n-1)(R-1)}} \square(u)dM. \tag{3.19}$$

Por outro lado, pela Proposição 2.4 e pelas propriedades do divergente,

$$f(u)\square(u) = f(u)\text{div}(P(\nabla f)) = \text{div}(f(u)P(\nabla u)) - f'(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle,$$

para toda função suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Novamente, integrando ambos os lados dessa equação e aplicando o Teorema 1.38, encontramos

$$-\int_M f(u)\square(u)dM = \int_M f'(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle dM. \tag{3.20}$$

Visto isso, podemos definir a função f como segue:

$$f(t) = \frac{t^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{t + n(n-1)(R-1)}}\square(u), \qquad \forall \quad t \geq 0.$$

Já que $R > 1$, f está bem definida e é diferenciável. Além disso, $f \geq 0$. Consequentemente,

$$f'(t) = \frac{(p-1)t^{\frac{p}{2}} + n(n-1)(R-1)pt^{\frac{p-2}{2}}}{2(t + n(n-1)(R-1))^{\frac{3}{2}}} \geq 0, \tag{3.21}$$

para todo $p \geq 2$. Daí, inserindo (3.20) e (3.21) em (3.19),

$$\int_M u^{\frac{p+2}{2}} Q_R(\sqrt{u})dM \geq \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2}\int_M f'(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle dM \geq 0, \tag{3.22}$$

em que na última desigualdade usamos a Proposição 2.6 , a qual garante que o operador P é positivo semidefinido. Portanto,

$$\int_M |\Phi|^{p+2} Q_R(|\Phi|)dM \geq 0, \tag{3.23}$$

provando a desigualdade desejada.

Suponhamos agora que a igualdade ocorre em (3.3) e que $R > 1$. Logo, a desigualdade em (3.22) deve converter-se na seguinte igualdade

$$\int_M f'(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle dM = 0. \tag{3.24}$$

Mas

$$f'(u) = \frac{(p-1)u^{\frac{p}{2}} + n(n-1)(R-1)pu^{\frac{p-2}{2}}}{2(u + n(n-1)(R-1))^{\frac{3}{2}}} \geq 0,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $p > 2$ e $u = 0$. Além disso, a Proposição 2.6 garante a positividade do operador P, isto é

$$\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle \geq 0,$$

com a igualdade se, e somente se, $\nabla u = 0$. Assim, $f'(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle \geq 0$ e, por (3.24) devemos ter

$$f'(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle = 0$$

em M^n. Se $f'(u) = 0$, como $p > 2$, concluímos que $u = 0$. Do contrário, a positividade de P nos assegura que a função $u = |\Phi|^2$ é constante. Neste ponto dividiremos a prova em duas partes:

Caso 1: $|\Phi|^2 = u \equiv 0$. Neste caso temos que M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica e não totalamente geodésica, pois $R > 1$.

Caso 2: $|\Phi|^2 \equiv u_0 > 0$. Neste caso, da igualdade (3.23), segue que $Q_R(|\Phi|) = 0$. Assim, pela Observação 3.1, u_0 deve ser igual a única raiz positiva da função Q_R, isto é, $|\Phi|^2 = \alpha(n, R, 1)$. Portanto, inserindo isto em (3.18), temos

$$0 = \frac{1}{2}\square(|\Phi|^2) \geq -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|)\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R-1)} = 0.$$

Logo, todas as desigualdades obtidas ao longo da prova da Proposição 3.1 tornam-se igualdades. Em particular a igualdade ocorre em (3.8). Sendo $R > 1$, o Lema 2.5 garante que $\nabla A = 0$, ou seja, M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$. Além dessa, a desigualdade (3.7) também torna-se igualdade. Esta igualdade implica igualdade no Lema 2.7. Daí, M^n deve ter duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples.

Portanto, podemos aplicar o teorema clássico de classificação das hipersuperfícies isoparamétricas, o Teorema 1.45, para assegurar-nos que M^n deve ser isométrica ao produto Riemanniano $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^n$, com $0 < r < 1$ e com curvaturas principais constantes dadas por

$$\lambda_1 = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Segue do Exemplo 6

$$H = \frac{n(1-r^2)-1}{nr\sqrt{1-r^2}} \quad \text{e} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)},$$

bem como sua curvatura escalar constante, a qual é dada por (3.2), é

$$R = \frac{n-2}{nr^2}$$

Em particular, $R > 1$ se, e somente se, $r < \sqrt{(n-2)/n}$. Obviamente, $r = \sqrt{(n-2)/nR} < \sqrt{(n-2)/n}$, com

$$|\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)} = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(n(R-1)+2)},$$

em que nos dá a caracterização da igualdade no Teorema 3.2, finalizando a prova.

■

A partir desse teorema, podemos enfim, aplicá-lo para obter o Teorema 0.1, enunciado a seguir como corolário:

Corolário 3.3 *Seja M^n uma hipersuperfície compacta orientada isometricamente imersa na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, $(n \geq 3)$ com curvatura escalar R constante normalizada satisfazendo $R \geq 1$. Seja ainda Φ o tensor de umbilicidade da imersão e suponhamos que*

$$|\Phi|^2 \leq \alpha(n, R, 1) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(n(R-1)+2)} > 0.$$

Então:

(i) ou $|\Phi| = 0$ e M^n é superfície totalmente umbílica,

(ii) ou $|\Phi|^2 = \alpha_R > 0$ e Σ é um toro com curvatura média constante $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \in \mathbb{S}^{n+1}$, com $r = \sqrt{(n-2)/nR}$.

Prova. Desde que $Q_R(x) \leq 0$ para todo $0 \leq x \leq \sqrt{\alpha(n, R, 1)}$, assumindo as hipóteses do Teorema 0.1, temos que $Q_R(x) \leq 0$ em M, o que nos dá a igualdade na equação (3.16):

$$\int_M |\Phi|^{p+2} Q_R(|\Phi|) dM = 0,$$

fazendo que o Teorema 0.1 seja consequência direta do nosso teorema principal. ■

Para o caso em que o espaço ambiente é ou o espaço euclidiano ou o espaço hiperbólico, finalizamos nosso trabalho com o seguinte resultado:

Teorema 3.4 *Seja M^n uma hipersuperfície compacta orientada isometricamente imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ ($c \in \{0, -1\}$ e $n \geq 3$) com curvatura escalar $R > 0$. Então*

$$\int_M |\Phi|^{p+2} Q_{R,c}(|\Phi|) dM \geq 0 \tag{3.25}$$

para todo número real $p > 2$, em que $Q_{R,c}$ é a função real

$$Q_{R,c}(x) = -(n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-c)} + n(n-1)R.$$

Além disso, a igualdade vale em (3.25) se, e somente se, M^n é totalmente umbílica.

Prova. A prova segue como a do Teorema (3.2) até encontrarmos a inequação (3.25). Se a igualdade vale, de (3.24) teremos

$$\langle P(\nabla|\Phi|^2), \nabla|\Phi|^2 \rangle = 0, \tag{3.26}$$

desde que

$$f'(|\Phi|) = \frac{4(p-1)|\Phi|^p + 4n(n-1)(R-c)p|\Phi|^{p-2}}{2\left(4|\Phi|^2 + 4n(n-1)(R-c)\right)^{3/2}} > 0,$$

pois $p > 2$ e $R > 0$. Consequentemente, sendo P positivo definido, de (3.26) segue que $\nabla|\Phi|^2 = 0$ e, daí, $|\Phi|$ é constante em M^n. Caso $|\Phi| = 0$, então M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$. Caso contrário, $|\Phi|$ deve ser a única raiz positiva da função $Q_{R,c}$ vista na Observação 3.1 e, consequentemente, M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$. Assim, pelo Teorema 1.45, concluímos que M^n deve ser ou isométrica a um cilindro circular $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{R}$, quando $c = 0$, ou a um cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, quando $c = -1$, que não são variedades limitadas.

Portanto, vale a igualdade em (3.25) se, e somente se, M^n é uma esfera totalmente umbílica em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$. $\blacksquare$

Bibliografia

[1] Alencar, H. e do Carmo, M. P., *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*. Proc. Am. Math. Soc., **120**, 1223-1229 (1994).

[2] Alencar, H.; do Carmo, M. P. e Colares, G., *Stable Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature*. Math. Z., **213**, 117-1319 (1993).

[3] Alías, L. J., García-Martínez, S. C. e Rigoli, M., *A maximum principle for hypersurfaces with constant scalar curvature and applications*. Ann. Glob. Anal. Geom., **41**, 307-320 (2012).

[4] Alías, L. J. e Meléndez, J., *Integral Inequalities for Compact Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in the Euclidean Sphere*. Mediterr. J. Math., **61** (2020).

[5] Caminha, A., *On hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature*. Kodai Math. J., **29**, 185-210 (2006).

[6] Cartan, É., *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*. Ann. Mat. Pura Appl., **17**, 177-191 (1938).

[7] Cheng, S. Y. e Yau, S. T., *Hypersurfaces with constant scalar curvature*. Math. Ann., **225**, 195-204 (1977).

[8] Dajczer, M., *Submanifolds and Isometric Immersions*. Publish or Perish Inc., Huston.

[9] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro (2008).

[10] Lawson, H. B., *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*. Ann. of Math, **89**, 187-197 (1969).

[11] Levi-Civitta, T., *Famiglia di superfici isoparametriche nell'ordinario spazio Euclideo.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend., **26**, 355-362 (1937).

[12] Li, H., *Global rigidity theorems of hypersurfaces.* Ark. Mat. **35**, 327?351 (1997).

[13] Li, H., *Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms.* Math. Ann., **305**, 665-672 (1996).

[14] Nomizu, K. e Smyth, B., *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature.* J. Dif. Geom., **3**, 367-377 (1969).

[15] Okumura, M., *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor.* Amer. J. Math., **96**, 207-213 (1974).

[16] O'Neil, B., *Semi-Riemannian Geometry with Aplications to Relativity.* Academic Press, New York (1983).

[17] Segre, B., *Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli pazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend., **27**, 203-207 (1938).