

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Comparação de Gráficos de Controle para Atributos baseado na Distribuição Birnbaum-Saunders

por

Maria Camila de Araújo Farias <sup>†</sup>

sob orientação da

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Michelli Karinne Barros da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# Comparação de Gráficos de Controle para Atributos baseado na Distribuição Birnbaum-Saunders

por

**Maria Camila de Araújo Farias**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Probabilidade e Estatística

Aprovada por:

---

**Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Tarciana Liberal Pereira - UFPB**

---

**Prof. Dr. João Batista Carvalho - UFCG**

---

**Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti - UFCG**

---

**Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Michelli Karinne Barros da Silva**

**Orientadora**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Dezembro/2020**

# Resumo

A qualidade do produto tornou-se uma das questões mais importantes no mercado global. Os métodos estatísticos são usados pelas empresas para melhorar e manter a qualidade do processo. Gráficos de controle têm sido amplamente usados na indústria para o monitoramento da qualidade, pois indicam instantaneamente a variação do processo para que os engenheiros possam determinar as causas das variações. Usando o gráfico de controle, é possível determinar se o processo de produção é estável ou se é afetado por alguma causa atribuível. Uma indicação rápida sobre a causa da variação no tempo ajuda a minimizar o número de itens não conformes, e conseqüentemente reduzir substancialmente o custo da má qualidade. Gráficos de controle de atributos são úteis quando queremos monitorar o número de itens não conformes. Nos últimos anos, muitos estudos têm sido desenvolvidos na construção de novos gráficos de controle de atributos e com aplicações em diversas áreas. Nesta pesquisa, fazemos um estudo comparativo dos gráficos de controle de atributos usando vários tipos de amostragem quando o tempo de vida de um produto segue a distribuição Birnbaum-Saunders. A eficiência dos gráficos de controle é avaliada através do comprimento médio de sequência. O gráfico de controle é considerado mais poderoso se fornecer uma indicação mais rápida sobre o processo alterado em comparação com outros gráficos de controle. Através de estudos de simulação avaliamos a eficiência dos gráficos propostos.

**Palavras-chave:** Comparação; Distribuição Birnbaum-Saunders; Gráfico de controle de atributos.

# Abstract

Product quality has become one of the most important issues in the global market. Statistical methods are used by companies to improve and maintain the quality of the process. Control charts have been widely used in the industry for quality monitoring, as they instantly indicate process variation so that engineers can determine the causes of the variations. Using the control chart, it is possible to determine whether the production process is stable or whether it is affected by any attributable cause. A quick indication of the cause of the variation in time helps to minimize the number of non-compliant items, and consequently substantially reduce the cost of poor quality. Attribute control charts are useful when you want to monitor the number of non-compliant items. In the last years, many studies have been developed in the construction of new graphics of control of attributes and with applications in several areas. In this research, we make a comparative study of the graphs of attribute control using various types of sampling when the lifetime of a product follows the Birnbaum-Saunders distribution. The efficiency of the control charts is assessed through the average sequence length. The control chart is considered more powerful if it provides a quicker indication of the changed process compared to other control charts. Through simulation studies we evaluate the efficiency of the proposed graphics.

**Keywords:** Comparison; Birnbaum-Saunders Distribution; Attribute Control Chart.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me guiado nessa caminhada, dando-me força, sabedoria e colocando em meu caminho pessoas especiais que me ajudaram a chegar até aqui. Sem Ele nada disso seria possível.

À minha família que esteve presente durante todo esse tempo, sempre apoiando, incentivando e acreditando em mim. Em especial aos meus pais Carlos e Márcia; meus irmãos Karla, Renata, Jaqueline e João; e meus sobrinhos Maria Fernanda e Miguel.

Aos meus colegas do mestrado, Raquel e Benedito, pelos momentos de estudo e companheirismo. Em especial, a minha amiga Raquel por todo apoio, incentivo e ensinamentos desde a graduação. Ela que sempre esteve presente desde os momentos de alegria até os momentos de dificuldades. Obrigada por sua amizade.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFCG por todos ensinamentos e contribuições durante a Graduação, em especial ao professor Lindomberg.

À professora Michelli Karinne Barros da Silva pelas aulas ministradas, orientação, apoio, dedicação, paciência e por todo o tempo a mim dedicado. Agradeço a oportunidade que me deu ainda na graduação, sendo minha orientadora de Iniciação Científica, o que me motivou a chegar até aqui. Tenho muito orgulho de ser sua aluna, és um exemplo a ser seguido.

Ao professor Aleksandro Bezerra Cavalcanti por todo apoio, ensinamentos e sugestões para realização do trabalho. Sua contribuição foi essencial.

Aos professores Joelson da Cruz Campos e Manoel Ferreira dos Santos Neto pelas aulas ministradas e por todo saber compartilhado ao longo do curso. Eles foram fundamentais para minha formação.

Aos professores que aceitaram participar da banca para avaliação desta dissertação e pelas suas sugestões para aprimorá-la.

À CAPES pelo apoio financeiro.

# Dedicatória

Aos meus pais, irmãos e sobrinhos.

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	1
<b>1 Gráficos de Controle</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1 Características gerais . . . . .	4
1.2 Tipos de gráficos . . . . .	6
1.2.1 Gráficos de controle para variáveis . . . . .	6
1.2.2 Gráficos de controle para atributos . . . . .	6
1.3 O gráfico de controle $np$ . . . . .	7
1.4 Comprimento médio da sequência (CMS) . . . . .	8
<b>2 A distribuição Birnbaum-Saunders</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1 Origem da distribuição . . . . .	9
2.2 Função densidade de probabilidade da BS . . . . .	12
<b>3 Tipos de amostragem</b> . . . . .	<b>15</b>
3.1 Amostragem simples . . . . .	16
3.2 Amostragem repetitiva . . . . .	17
3.3 Amostragem de estado dependente múltiplo . . . . .	20
3.4 Amostragem repetitiva de estado dependente múltiplo . . . . .	22
<b>4 Estudo de simulação</b> . . . . .	<b>25</b>
4.1 Comparações de CMS para diferentes tipos de amostragem . . . . .	25
4.1.1 Tabelas comparativas usando AS . . . . .	26
4.1.2 Tabelas comparativas usando AR . . . . .	27
4.1.3 Tabelas comparativas usando AEDM . . . . .	29
4.1.4 Tabelas comparativas usando AREDM . . . . .	33
4.2 Exemplo simulado . . . . .	37

<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>Tabelas comparativas para <math>r_0 = 200</math> e <math>300</math></b>	<b>42</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>66</b>



# Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função densidade da distribuição Birnbaum-Saunders para os valores indicados de $\alpha$ e $\beta = 1$ . . . . .	12
3.1	Procedimento operacional para os gráficos propostos . . . . .	18
4.1	Gráficos comparativos considerando $n = 20$ , $b = 0,31$ , $\sigma = 1,5$ e $l = 1,15$	38
4.2	Gráficos comparativos considerando $n = 20$ , $b = 0,31$ , $\sigma = 1,5$ e $l = 0,85$	39

# Lista de Tabelas

4.1	Valores de CMS para $r_0 = 370$ e $b = 0,31$ usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	26
4.2	Valores de CMS para $r_0 = 370$ e $b = 1,0$ usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	27
4.3	Valores de CMS para $r_0 = 370$ e $b = 0,31$ usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	28
4.4	Valores de CMS para $r_0 = 370$ e $b = 1,0$ usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	29
4.5	Valores de CMS para $r_0 = 370$ , $b = 0,31$ e $i = 2$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	30
4.6	Valores de CMS para $r_0 = 370$ , $b = 0,31$ e $i = 3$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	31
4.7	Valores de CMS para $r_0 = 370$ , $b = 1,0$ e $i = 2$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	32
4.8	Valores de CMS para $r_0 = 370$ , $b = 1,0$ e $i = 3$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	33
4.9	Valores de CMS para $r_0 = 370$ , $b = 0,31$ e $i = 2$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	34
4.10	Valores de CMS para $r_0 = 370$ , $b = 0,31$ e $i = 3$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	35
4.11	Valores de CMS para $r_0 = 370$ , $b = 1,0$ e $i = 2$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	36
4.12	Valores de CMS para $r_0 = 370$ , $b = 1,0$ e $i = 3$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	37

A.1	Valores de CMS para $r_0 = 200$ e $b = 0,31$ usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	42
A.2	Valores de CMS para $r_0 = 200$ e $b = 1,0$ usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	43
A.3	Valores de CMS para $r_0 = 300$ e $b = 0,31$ usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	44
A.4	Valores de CMS para $r_0 = 300$ e $b = 1,0$ usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	45
A.5	Valores de CMS para $r_0 = 200$ e $b = 0,31$ usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	46
A.6	Valores de CMS para $r_0 = 200$ indicado quando $b = 1,0$ usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	47
A.7	Valores de CMS para $r_0 = 300$ e $b = 0,31$ usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	48
A.8	Valores de CMS para $r_0 = 300$ e $b = 1,0$ usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	49
A.9	Valores de CMS para $r_0 = 200$ , $b = 0,31$ e $i = 2$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	50
A.10	Valores de CMS para $r_0 = 200$ , $b = 0,31$ e $i = 3$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	51
A.11	Valores de CMS para $r_0 = 200$ , $b = 1,0$ e $i = 2$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	52
A.12	Valores de CMS para $r_0 = 200$ , $b = 1,0$ e $i = 3$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	53
A.13	Valores de CMS para $r_0 = 300$ , $b = 0,31$ e $i = 2$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	54
A.14	Valores de CMS para $r_0 = 300$ , $b = 0,31$ e $i = 3$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	55
A.15	Valores de CMS para $r_0 = 300$ , $b = 1,0$ e $i = 2$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	56
A.16	Valores de CMS para $r_0 = 300$ , $b = 1,0$ e $i = 3$ usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	57

A.17 Valores de CMS para $r_0 = 200$ , $b = 0,31$ e $i = 2$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	58
A.18 Valores de CMS para $r_0 = 200$ , $b = 0,31$ e $i = 3$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	59
A.19 Valores de CMS para $r_0 = 200$ , $b = 1,0$ e $i = 2$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	60
A.20 Valores de CMS para $r_0 = 200$ , $b = 1,0$ e $i = 3$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	61
A.21 Valores de CMS para $r_0 = 300$ , $b = 0,31$ e $i = 2$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	62
A.22 Valores de CMS para $r_0 = 300$ , $b = 0,31$ e $i = 3$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	63
A.23 Valores de CMS para $r_0 = 300$ , $b = 1,0$ e $i = 2$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	64
A.24 Valores de CMS para $r_0 = 300$ , $b = 1,0$ e $i = 3$ usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	65

# Introdução

O conceito de qualidade é bem subjetivo, alguns autores entendem qualidade como uma ou mais características que um produto ou serviço deva ter, outros definem como adequação ao uso, ou seja, um produto tem boa qualidade se corresponde às expectativas do consumidor. [Balakrishnan et al. \(2007\)](#) afirmam que qualidade não é apenas uma opção ou objetivo das empresas, mas uma necessidade em um mercado global, é uma ferramenta de diferenciação entre empresas competitivas. Afim de melhorar e manter a qualidade de seus produtos, métodos estatísticos são utilizados para que as expectativas do produtor sejam correspondidas. Para avaliar a qualidade de um produto é importante analisar alguns aspectos essenciais, tais como o desempenho, confiabilidade, durabilidade, assistência técnica, entre outros.

Os gráficos de controle são bastante utilizados na indústria para monitoramento de qualidade, além da grande importância que possuem na redução da variabilidade e por fornecerem informações úteis à melhoria do processo. De acordo com [Jeyadurga et al. \(2018\)](#), os gráficos de controle monitoram a variação do processo ao longo do tempo e detectam as causas das variações, causas atribuíveis, que após a detecção são necessárias aplicações de algumas medidas corretivas apropriadas para eliminá-las de modo que a ação imediata possa ser tomada antes que o processo produza produtos com baixo nível de qualidade. Segundo [Aslam and Jun \(2015\)](#), os gráficos de controle são considerados ferramentas importantes na fabricação de produtos de alta qualidade. Essas ferramentas ajudam a fabricar o produto de acordo com os limites de especificações fornecidos, monitorando a qualidade. Os gráficos de controle são utilizados para exibir e detectar a variabilidade incomum do processo e também qualquer variável que possa afetá-lo.

O uso de gráficos de controle foi expandido para outras áreas, incluindo avaliação de risco ambiental. [Lund and Seymour \(1999\)](#) desenvolveram um gráfico de controle

para monitorar anomalias de temperaturas mensais para uma região geográfica. [Manly and Mackenzie \(2000\)](#) propuseram um tipo de método de soma acumulada para monitoramento ambiental. [Leiva et al. \(2015\)](#) desenvolveram um critério para avaliação ambiental usando gráficos de controle de atributos Birnbaum-Saunders.

Na análise do desempenho dos gráficos, as técnicas de amostragem são essenciais, pois através delas pode-se obter informações rápidas e eficientes quando os gráficos são comparados em termos de comprimento médio da sequência (CMS), que é o número médio de pontos que devem ser marcados antes que um ponto indique uma condição fora de controle. A amostragem simples (AS), amostragem repetitiva (AR), amostragem de estado dependente múltiplo (AEDM) e amostragem repetitiva de estado dependente múltiplo (AREDM), que é uma combinação de AR e AEDM, são algumas das técnicas usadas para fazer comparações sobre a sensibilidade e a eficiência de cada gráfico na detecção de mudanças no processo. Estudos sob diferentes distribuições como a exponencial, Weibull, Pareto e Birnbaum-Saunders (BS) considerando as diferentes técnicas de amostragem podem ser vistos em [Aslam et al. \(2015a\)](#), [Aslam \(2017\)](#), [Jeyadurga et al. \(2018\)](#), [Aslam et al. \(2016\)](#), [Aslam et al. \(2014\)](#), [Wortham and Baker \(1976\)](#), [Aldosari et al. \(2017\)](#), [Muhammad Aslam \(2019\)](#), entre outros.

Uma distribuição já mencionada e que iremos abordá-la em nosso contexto é a BS. Essa pode ser vista com aplicações em diferentes áreas, entre elas engenharia, indústrias alimentícias, eletrônica, economia e meio ambiente. [Leiva et al. \(2015\)](#) utilizaram gráficos de controle de atributos sob a distribuição BS como critério para avaliação ambiental considerando AS. [Aslam et al. \(2016\)](#) aplicaram a amostragem repetitiva em gráficos de controle baseados na BS. [Leiva et al. \(2014\)](#) sugeriram índices de capacidade de processos aplicados as indústrias eletrônica e alimentícia utilizando a BS. [Bourguignon et al. \(2020\)](#) utilizaram gráficos de controle para monitorar o parâmetro mediano da distribuição. [Aslam et al. \(2011\)](#) propuseram novos planos de amostragem de aceitação para teste de vida baseados na BS. Recentemente, [Aslam et al. \(2020\)](#) desenvolveram um novo gráfico de controle para a distribuição BS com base na AREDM. O gráfico de controle proposto é uma generalização dos gráficos de controle com base na AS, AR e AEDM, considerando deslocamentos em ambos os parâmetros.

Diante do exposto, o objetivo deste estudo é adaptar o gráfico de controle proposto por [Leiva et al. \(2015\)](#) para os tipos de amostragem AR, AEDM e AREDM, bem como

comparar os métodos propostos, em termos de CMS, analisando qual deles apresenta melhor desempenho. Nosso interesse é analisar se realmente há ganhos ao utilizarmos os tipos de amostragem propostos, em comparação com a AS.

Este trabalho de dissertação está dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo apresenta as características gerais dos gráficos de controle, bem como os tipos de gráficos existentes, além de algumas características do comprimento médio da sequência. No segundo capítulo, apresentamos uma breve revisão sobre a distribuição BS. No terceiro capítulo, são abordados os tipos de amostragem utilizados, bem como as características e propriedades. Um estudo de simulação é feito no quarto capítulo. Vários valores de CMS são calculados com intuito de avaliar o desempenho dos gráficos propostos. Por fim, são feitas as conclusões no último capítulo.

# Capítulo 1

## Gráficos de Controle

### 1.1 Características gerais

Os gráficos de controle surgiram devido à necessidade de introduzir métodos formais ao controle e melhoria da qualidade. Segundo [Andara \(2015\)](#), a origem e evolução dos processos produtivos deram-se em 1924, quando o Dr. Walter A. Shewhart, dos *Bell Telephone Laboratories*, elaborou os primeiros gráficos de controle com os quais era possível o acompanhamento da industrialização de um produto, verificando por meio gráfico a variabilidade existente e se essa ocorria dentro dos limites especificados. Geralmente, o gráfico de controle é composto por uma linha central (LC), que representa o estado do processo onde somente causas aleatórias estão presentes, limite superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC) que representam os limites aceitáveis, de forma que o maior número de pontos estejam entre eles. É importante que os pontos apresentem um padrão aleatório e estejam entre os limites para que o processo seja declarado sob controle.

Os gráficos, em geral, seguem o modelo dos gráficos de controle de Shewhart, ou seja, considera-se uma variável aleatória  $X$  que mede alguma característica da qualidade de interesse, tal que  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ . Os limites de controle são definidos da seguinte maneira

$$\begin{aligned}LSC &= \mu_X + k\sqrt{\sigma_X^2} \\LC &= \mu_X \\LIC &= \mu_X - k\sqrt{\sigma_X^2},\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde o coeficiente  $k$  representa a distância, em desvios padrões, de cada lado da média.



Usualmente, são considerados os limites três-sigma que indicam uma distância de três desvios padrões. Estes são escolhidos visando diminuir a variabilidade nas características de um produto, de modo que falhas e defeitos sejam quase improváveis.

O uso do gráfico de controle requer um bom planejamento. É necessário selecionar os limites de controle, o tamanho da amostra a ser usado e a frequência da amostragem, esses fatores tem impacto direto no poder em que os gráficos terão em detectar mudanças no processo. Para determinar os limites de controle devemos perceber que ao aproximarmos os limites da linha central aumentamos o risco de erro tipo I, ou seja, indicar condição fora de controle quando o processo está sob controle, enquanto o erro tipo II diminui, indicar condição sob controle quando o processo está fora controle. E ao afastarmos ocorre o processo inverso. O tamanho da amostra deve ser escolhido de acordo com a mudança que queremos detectar. Escolhendo-se uma amostra maior detecta-se mais rapidamente pequenas mudanças. Já para a frequência da amostragem, o ideal seria que fossem tomadas grandes amostras com frequência, porém essa decisão tem um custo alto na produção e acaba se tornando inviável muitas vezes.

Em um processo de produção sempre vai existir variabilidade, sendo esta decorrente de causas aleatórias ou causas atribuíveis. As causas aleatórias são conhecidas por pequenas perturbações no processo, sendo estas praticamente inevitáveis. Já as causas atribuíveis são aquelas que podem ser identificadas e causam um impacto maior. Ocorrem, em geral, devido a máquinas mal ajustadas ou matéria-prima defeituosa. Existem diferentes fontes de variabilidades, entre elas estão por exemplo, diferenças de materiais ou até mesmo na maneira como os operadores realizam suas tarefas. É importante saber o tipo de variabilidade existente e fazer análises no processo, com intuito de diminuí-la o máximo possível.

Os dados em análise podem variar em torno de um valor fixo, neste caso dizemos que eles apresentam um comportamento estacionário. Do contrário, os dados apresentam um comportamento não-estacionário. Além disso, os dados podem não apresentar correlação entre eles ou podem ser autocorrelacionados, dessa forma os dados são dependentes entre si e é possível identificar uma tendência nos mesmos. Na maior parte dos estudos referentes a gráficos de controle, considerando um processo sob controle, supomos que os dados apresentam comportamento estacionário e são não-correlacionados. Para mais detalhes ver [Montgomery \(2004\)](#).

## 1.2 Tipos de gráficos

Os gráficos de controle podem ser classificados em dois tipos: gráficos de controle para variáveis e para atributos. Cada qual com características distintas que veremos a seguir.

### 1.2.1 Gráficos de controle para variáveis

Os gráficos de controle para variáveis são aqueles em que a característica de qualidade pode ser expressa em alguma escala contínua de medida. Podemos citar como exemplo a média ou variabilidade. Os principais gráficos desse tipo são os gráficos de controle  $\bar{X}$ , que controlam a média do processo, os gráficos de amplitude ( $R$ ) e do desvio padrão ( $S$ ) que são utilizados para monitorar a variabilidade das variáveis.

Segundo [Montgomery \(2004\)](#), o gráfico  $R$  é mais utilizado que o gráfico  $S$ , devido ao fato dele não ser muito sensível a mudanças no desvio padrão do processo quando são consideradas pequenas amostras. Neste tipo de gráfico o desvio padrão é estimado indiretamente através da amplitude. Já o gráfico  $S$  é escolhido quando se deseja estimar o desvio diretamente através do desvio padrão amostral, geralmente é escolhido quando o tamanho da amostra é relativamente grande ou variável.

### 1.2.2 Gráficos de controle para atributos

Os gráficos de controle para atributos são aqueles que consideramos cada unidade do processo como conforme, não-conforme ou pode-se contar o número de não-conformidades que aparecem em uma unidade do produto. Os principais tipos desses gráficos são os gráficos  $p$ ,  $np$ ,  $c$  e  $u$ .

O gráfico  $p$  é utilizado quando a característica de qualidade é representada pela fração de itens defeituosos. Já o gráfico  $np$  é usado quando se deseja conhecer o número de itens não-conformes, ao invés da proporção. O gráfico  $c$  é empregado quando se deseja controlar o número de não-conformidades em uma unidade do produto e o gráfico  $u$  tem a mesma finalidade, porém deve-se considerar subgrupos maiores que um.

O gráfico de controle que será usado no monitoramento da característica de qualidade de interesse em nosso estudo será o gráfico  $np$ . Este será considerado em todos

os tipos de amostragem utilizados no decorrer do texto. Na literatura, encontramos diversos estudos com este tipo de gráfico, entre eles [Balamurali and Jeyadurga \(2019\)](#) consideraram o gráfico  $np$  para monitorar a vida média usando AEDM e [Jeyadurga et al. \(2018\)](#) monitoraram o processo baseando-se em amostragem repetitiva de grupos, ambos usando testes de vida truncados. Veremos na próxima seção algumas características do gráfico a ser utilizado.

### 1.3 O gráfico de controle $np$

O gráfico de controle  $np$  é um dos mais utilizados na área de controle de qualidade e sua construção tem por base a distribuição binomial. Para isso, precisamos lidar com amostras de tamanhos iguais. Considere que uma amostra aleatória de  $n$  unidades de um produto seja selecionada e  $D$  seja o número de unidades não-conformes do produto. Sabemos que  $D \sim Bin(n, p)$  e, conseqüentemente,  $\mu_D = np$  e  $\sigma_D^2 = np(1 - p)$ . Assim, os limites de controle do gráfico  $np$  são da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} LSC &= np + k\sqrt{np(1 - p)} \\ LC &= np \\ LIC &= \max[0, np - k\sqrt{np(1 - p)}], \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde  $k$  é um coeficiente de controle a ser determinado e  $p$  a probabilidade de um item não atender às especificações. Geralmente, são considerados os limites três-sigma, mas não iremos considerá-los em nosso estudo. O processo é dito estar sob controle se todas as observações estiverem entre os limites de controle. Caso contrário, é declarado fora de controle.

Iremos considerar um gráfico de controle  $np$  com dois pares de limites de controle, externos e internos, onde teríamos limites de alerta. Estes ajudam a detectar mais rapidamente o estado do processo. Os limites de controle são dados por

$$LSC_1 = np_0 + k_1\sqrt{np_0(1 - p_0)} \tag{1.3a}$$

$$LIC_1 = \max[0, np_0 - k_1\sqrt{np_0(1 - p_0)}] \tag{1.3b}$$

$$LSC_2 = np_0 + k_2\sqrt{np_0(1 - p_0)} \tag{1.3c}$$

$$LIC_2 = np_0 - k_2\sqrt{np_0(1 - p_0)}, \tag{1.3d}$$

em que  $p_0$  é a fração defeituosa para o processo considerado como sob controle e  $k_1$  e  $k_2$  são os coeficientes de controle que devem ser determinados considerando o erro do tipo I ou o CMS sob controle especificado,  $r_0$ .

## 1.4 Comprimento médio da sequência (CMS)

Podemos avaliar o desempenho dos gráficos de controle através do comprimento médio da sequência (CMS), conhecido como o número médio de pontos que devem ser plotados antes que um ponto indique uma condição fora de controle. Considerando que os dados do processo são não-correlacionados, o CMS é fornecido por

$$CMS = \frac{1}{p}. \quad (1.4)$$

O CMS é uma medida bem útil na decisão a ser tomada sobre tamanho de amostra e frequência de amostragem. Em geral, é conveniente tomar amostras maiores para que pequenos deslocamentos sejam detectados no processo. Nesse caso, podemos considerar um gráfico mais eficiente se ele indicar mais rapidamente o deslocamento existente. Para um processo sob controle, o comprimento médio da sequência é conhecido por  $CMS_0$  e para um processo fora de controle,  $CMS_1$ . Nesse caso, consideramos que houve um deslocamento no processo. Como visto, o subscrito 0 indica um processo sob controle, já o subscrito 1 será usado para indicar um processo deslocado.

# Capítulo 2

## A distribuição Birnbaum-Saunders

De acordo com [Lio et al. \(2019\)](#), as distribuições de Birnbaum-Saunders são uma família de modelos probabilísticos originados da lei sobre danos cumulativos relacionados à fadiga e resistência dos materiais. Suas origens permitem que o modelo de BS seja interpretado como uma distribuição de vida, pois descreve o tempo gasto até que a extensão de uma fissura ultrapasse um limiar que leva à falha. Na seção a seguir, iremos descrever como se deu a origem da distribuição BS.

### 2.1 Origem da distribuição

Quando um material é exposto a situações de estresse e tensão, é natural que este venha a sofrer algum dano estrutural, que recebe o nome de fadiga. De acordo com [Campos \(2011\)](#), na área de confiabilidade, é comum o interesse em modelar os processos de fadiga para descrever a variação aleatória dos tempos de falha associados aos materiais expostos à fadiga sob diferentes padrões e forças cíclicas. Para descrever a vida por fadiga, os modelos probabilísticos gama, lognormal e Weibull são os mais utilizados, pois apresentam um bom ajuste na região central da distribuição. Geralmente, estamos interessados nos percentis mais baixos ou mais altos da distribuição dos dados, mas o fato dessas regiões possuírem, em geral, poucos dados, faz com que o ajuste pelos modelos mencionados não seja adequado. Com o conhecimento sobre um tipo particular de fadiga, [Birnbaum and Saunders \(1969b\)](#) criaram uma nova distribuição denominada de distribuição BS. Essa distribuição apresentou-se como uma ótima alternativa quando o interesse é analisar o ajuste de um modelo nos percentis mais baixos ou mais altos da distribuição. Apresentaremos adiante o processo utilizado por

[Birnbaum and Saunders \(1969b\)](#) para o desenvolvimento dessa nova distribuição.

Para obter essa nova família de distribuições, foi considerado um material sujeito a um padrão cíclico de tensão e força. Eles consideraram também que a sequência de tensão imposta ao material era a mesma de ciclo para ciclo. Além disso, os autores assumiram que a falha por fadiga ocorria devido ao início, crescimento e extensão final de uma rachadura dominante, ou seja, a ocorrência da falha se dava quando a rachadura excedia um determinado comprimento, o que ocorre devido a exposição a situações de tensão e força. Desta forma, [Birnbaum and Saunders \(1969b\)](#) fizeram algumas suposições:

1. A extensão incremental da rachadura,  $X_i$ , resultante da aplicação da  $i$ -ésima oscilação de carga é uma variável aleatória com uma distribuição que só depende da rachadura atual causada pela tensão neste ciclo.

Segue dessa suposição que as extensões das rachaduras são independentes para diferentes ciclos.

2. A extensão da rachadura durante o  $(j + 1)$ -ésimo ciclo é

$$Y_{j+1} = X_{jm+1} + \dots + X_{jm+m}, \quad \text{para } j = 0, 1, \dots$$

em que  $X_{jm+i}$  é a extensão da rachadura após a  $i$ -ésima oscilação de carga do  $(j + 1)$ -ésimo ciclo.

3. A extensão total da rachadura,  $Y_j$ , devido ao  $j$ -ésimo ciclo é uma variável aleatória que segue uma distribuição com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots$

A extensão total da rachadura após  $n$ -ciclos é dada pela variável aleatória

$$W_n = \sum_{j=1}^n Y_j,$$

com fda dada por

$$H_n(w) = P(W_n \leq w),$$

para  $n = 1, 2, \dots$

Considere  $C$  o número de ciclos propostos até que seja observada a falha. A função de distribuição acumulada da variável aleatória  $C$  é

$$P(C \leq n) = P\left(\sum_{j=1}^n Y_j > w\right) = P(W_n > w) = 1 - H_n(w).$$

Note que,

$$\begin{aligned} P(C \leq n) &= P\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Como os  $Y_j$ 's são independentes e supondo que sejam identicamente distribuídos, segue do Teorema Central do Limite que

$$\begin{aligned} P(C \leq n) &\cong 1 - \Phi\left(\frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{n\mu - w}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{n\mu - w}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{w}{\sigma\sqrt{n}}\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que  $\Phi(\cdot)$  representa a fda da distribuição normal padrão.

A partir da equação (2.1), [Birnbaum and Saunders \(1969b\)](#) definiram uma distribuição contínua de vida. Segundo os autores, substituindo  $n$  por uma variável aleatória real não negativa  $t$ , tem-se que a variável aleatória  $T$  é a extensão contínua da variável aleatória discreta  $C$ , onde  $T$  representa o tempo total até que ocorra a falha. Logo, tomando

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu w}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{w}{\mu}$$

a função de distribuição acumulada (fda) de  $T$  fica da forma

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right], \quad t > 0, \tag{2.2}$$

$\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Dizemos então que  $T \sim BS(\alpha, \beta)$ , com  $\alpha$  sendo o parâmetro de forma e  $\beta$  o parâmetro de escala.

Uma importante relação pode ser vista entre a distribuição BS e a distribuição Normal, considerando

$$Z = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right) \sim N(0, 1) \tag{2.3}$$

consequentemente,

$$T = \beta \left[ \frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 + 1} \right]^2 \sim BS(\alpha, \beta). \quad (2.4)$$

A equação (2.2) ainda pode ser reescrita como

$$F_T(t) = \Phi \left( \frac{1}{\alpha} \xi \left( \frac{t}{\beta} \right) \right), \quad (2.5)$$

quando  $\xi(y) = \sqrt{y} - \sqrt{1/y}$ .

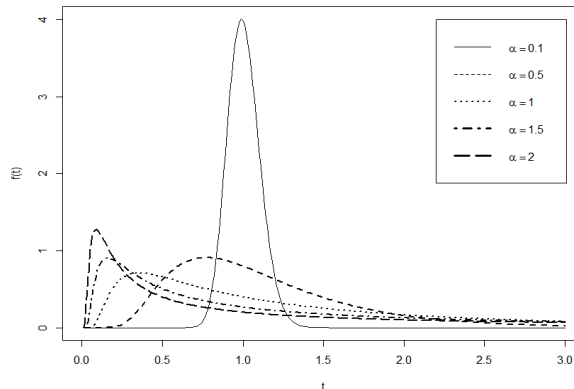
## 2.2 Função densidade de probabilidade da BS

A função densidade de probabilidade(fdp) da BS pode ser encontrada derivando a expressão (2.2) em relação a  $t$ , assim

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right]^2 \right\} \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\beta}{t}} + \frac{\beta}{2t^2} \sqrt{\frac{t}{\beta}} \right) \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{t} \right) \right\} \left( \sqrt{\frac{\beta}{t}} + \sqrt{\frac{\beta^4 t}{t^4 \beta}} \right) \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[ \left( \frac{\beta}{t} \right)^{1/2} + \left( \frac{\beta}{t} \right)^{3/2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

com  $t, \alpha, \beta > 0$  e  $\phi(\cdot)$  é a fdp da distribuição normal padrão.

Figura 2.1: Gráfico da função densidade da distribuição Birnbaum-Saunders para os valores indicados de  $\alpha$  e  $\beta = 1$





A Figura 2.1 ilustra o comportamento da função densidade da distribuição BS para diferentes valores do parâmetro de  $\alpha$  e  $\beta$  fixo. Nota-se que a forma do gráfico é alterada quando esse parâmetro cresce, tornando-se assimétrica.

A distribuição BS apresenta algumas propriedades interessantes, tais como:

**Propriedade 2.1:** Se  $T \sim BS(\alpha, \beta)$  então  $cT \sim BS(\alpha, c\beta)$ , para  $c > 0$ .

**Demonstração:** Considere a variável aleatória  $Y = cT$ , a fda de  $Y$  é dada por

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(cT \leq y) \\ &= P\left(T \leq \frac{y}{c}\right) \\ &= \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{y}{c\beta}} - \sqrt{\frac{c\beta}{y}}\right)\right] \end{aligned}$$

Portanto,  $Y \sim BS(\alpha, c\beta)$ .

**Propriedade 2.2:** Se  $T \sim BS(\alpha, \beta)$ , então o parâmetro de escala  $\beta$  é a mediana de  $T$ .

**Demonstração:** Note que,

$$F_T(\beta) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{\beta}}\right)\right] = \Phi(0) = 0,5.$$

**Propriedade 2.3:** Se  $T \sim BS(\alpha, \beta)$  então  $1/T \sim BS(\alpha, 1/\beta)$ .

**Demonstração:** Seja  $Y = 1/T$ , dessa forma temos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(1/T \leq y) \\ &= P\left(T \geq \frac{1}{y}\right) \\ &= 1 - F_T(1/y) \\ &= \Phi\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{y\beta}} - \sqrt{y\beta}\right)\right] \\ &= \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{y\beta} - \sqrt{\frac{1}{y\beta}}\right)\right] \end{aligned}$$

Assim,  $Y \sim BS(\alpha, 1/\beta)$ .

**Propriedade 2.4:** A média e a variância da distribuição BS são dadas, respectivamente, por

$$E[T] = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \text{ e } Var(T) = (\alpha\beta)^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right).$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em [Birnbaum and Saunders \(1969a\)](#) ou [Leiva \(2016\)](#).

Além das propriedades e características citadas anteriormente sobre a distribuição BS, mais informações podem ser vistas em [Leiva \(2016\)](#) e [Lio et al. \(2019\)](#).

# Capítulo 3

## Tipos de amostragem

Os esquemas de amostragem são bastante utilizados com o objetivo de melhorar a sensibilidade dos gráficos de controle na detecção de pequenos deslocamentos no processo. Nas seções abaixo, caracterizamos cada tipo de amostragem a ser usada quando consideramos a distribuição BS.

A partir de então iremos considerar a distribuição BS com parâmetros de forma e escala  $b$  e  $\sigma$ , respectivamente. Essa notação facilita a comparação com os artigos existentes.

Consideremos uma variável aleatória  $T$  contínua e não negativa. Como em [Leiva et al. \(2015\)](#), estamos interessados no número de vezes que  $T$  excede um valor especificado  $t$ . Por exemplo, podemos estar interessados no número de vezes ( $D$ ) que a concentração de um contaminante, do ar ou da água, excede um determinado valor ( $t$ ), estabelecido por algum regulamento oficial, dada uma probabilidade de excedência ( $p$ ), ou seja,  $p = P(T > t) = 1 - F_T(t)$ .

Vamos supor que  $T \sim BS(b, \sigma)$ . Então a probabilidade de um contaminante ultrapassar um valor estabelecido é dada por

$$p = 1 - F_T(t) = \Phi\left(-\frac{1}{b}\xi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right). \quad (3.1)$$

Seja  $p_0$  a fração não conforme correspondente a média  $\mu_0$  da variável aleatória  $T$  associada ao poluente atmosférico, quando a contaminação está sob controle. Vamos considerar a reparametrização da distribuição BS  $(b, \mu)$ , em que  $\mu = \sigma(1 + b^2/2)$ .

Considere  $t_0 = a\mu_0$ , em que  $a$  é uma constante de proporcionalidade. A fda da BS pode ser reparametrizada em termos de sua média e expressa em função de  $t_0$ . Assim,

temos

$$F_T(t_0) = \Phi \left( \frac{1}{b} \xi \left( \frac{a(1 + b^2/2)}{\mu/\mu_0} \right) \right). \quad (3.2)$$

Logo, quando o processo está sob controle temos  $\mu = \mu_0$ , assim a partir da expressão (3.2) segue que

$$p_0 = 1 - F_T(t_0) = \Phi \left( -\frac{1}{b} \xi \left( a \left( 1 + \frac{b^2}{2} \right) \right) \right). \quad (3.3)$$

Observe que a especificação do ponto  $t_0$  é equivalente a especificar a constante do ponto de inspeção  $a > 0$ , porque  $t_0 = a\mu_0$ , sendo  $\mu_0$  a média alvo, que se presume ser conhecida.

Consideremos agora um deslocamento na média do processo, ou seja,  $\mu_1 = l\mu_0$  sendo  $l > 0$  uma constante de deslocamento. Assim, a fração não conforme correspondente à nova média da variável aleatória  $T$  é obtida a partir da expressão (3.2) como

$$p_1 = 1 - F_T(t_0) = \Phi \left( -\frac{1}{b} \xi \left( \frac{a}{l} \left( 1 + \frac{b^2}{2} \right) \right) \right). \quad (3.4)$$

Conhecidas as frações não conformes de interesse, veremos a seguir como proceder em cada tipo de amostragem.

### 3.1 Amostragem simples

A amostragem simples (AS) é um esquema bastante utilizado, nesse procedimento apenas um par de limites é considerado, como visto na equação (1.2), e a decisão deve ser tomada com base na amostra observada. Para mais detalhes, ver [Leiva et al. \(2015\)](#).

O gráfico de controle  $np$  usando AS fica dado por:

1. Selecione uma amostra aleatória de tamanho  $n$  em cada subgrupo. Conte o número  $D$  de vezes em que  $T$  excede  $t_0$ .
2. Declare o processo como sob controle se  $LIC \leq D \leq LSC$ . Caso contrário, declare o processo como fora de controle.

Nesse método, as constantes  $a$  e  $k$  são escolhidas de modo que  $CMS_0 \geq r_0$ , sendo  $r_0$  o valor do CMS especificado.

Considerando a AS, a probabilidade de declarar o gráfico de controle proposto com sob controle é dada por

$$P_{sob}^0 = P(LIC \leq D \leq LSC) = \sum_{d=\lfloor LIC \rfloor + 1}^{\lfloor LSC \rfloor} \binom{n}{d} p_0^d (1 - p_0)^{n-d} \quad (3.5)$$

com  $d = 0, 1, 2, \dots, n$  e  $\lfloor \cdot \rfloor$  representando o maior número inteiro menor ou igual ao argumento.

Logo, o CMS quando o processo está sob controle é

$$CMS_0 = \frac{1}{1 - P_{sob}^0}. \quad (3.6)$$

Já para um processo deslocado, temos que a probabilidade de declarar o processo sob controle quando o processo passou para um estado fora de controle é a seguinte

$$P_{sob}^1 = P(LIC \leq D \leq LSC) = \sum_{d=\lfloor LIC \rfloor + 1}^{\lfloor LSC \rfloor} \binom{n}{d} p_1^d (1 - p_1)^{n-d}. \quad (3.7)$$

Logo, o CMS para o processo deslocado é

$$CMS_1 = \frac{1}{1 - P_{sob}^1}. \quad (3.8)$$

## 3.2 Amostragem repetitiva

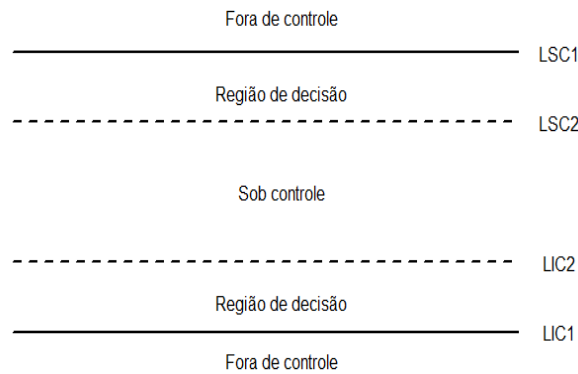
A amostragem repetitiva (AR) é uma técnica bem empregada em estudos sobre gráficos de controle. Este tipo de amostragem se mostra mais eficiente que a amostragem simples. Nesta técnica de amostragem, se a decisão não puder ser tomada baseada na primeira amostra é permitido que seja repetida a amostragem até que uma decisão adequada possa ser tomada.

Estudos com amostragem repetitiva podem ser vistos em vários artigos. [Aslam et al. \(2014\)](#) desenvolveram estudos sobre novos gráficos de controle de atributos e variáveis usando AR. Podemos citar também [Jeyadurga et al. \(2018\)](#) que utilizaram a AR para testes de vida truncados. [Aslam et al. \(2016\)](#) projetaram um gráfico de controle de atributos baseado na distribuição Birnbaum-Saunders utilizando AR. Ao

utilizar a amostragem repetitiva são construídos dois pares de limites de controle chamados limites de controle internos e externos. Nesse caso, o processo é declarado como sob controle se os pontos plotados estiverem entre os limites de controle internos. No entanto, se alguns dos pontos plotados estiverem além dos limites de controle externos, o processo é declarado fora de controle. Agora, se algum ponto se localizar entre os limites internos e externos, uma nova amostra é selecionada e ocorre a repetição do processo até que uma decisão possa ser tomada.

O procedimento operacional para a AR e para as amostragens seguintes, AEDM e AREDM, é ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3.1: Procedimento operacional para os gráficos propostos



O gráfico de controle  $np$  usando AR fica dado por:

1. Selecione uma amostra aleatória de tamanho  $n$  em cada subgrupo. Conte o número  $D$  de vezes em que  $T$  excede  $t_0$ .
2. Declare o processo como fora de controle se  $D > LSC_1$  ou  $D < LIC_1$ . Declare o processo como sob controle se  $LIC_2 \leq D \leq LSC_2$ . Se  $LSC_2 < D \leq LSC_1$  ou  $LIC_1 \leq D < LIC_2$ , repita a Etapa 1.

Observe que o procedimento será repetido até que uma decisão apropriada possa ser tomada. Nesse método, as constantes  $a$ ,  $k_1$  e  $k_2$  são escolhidas de modo que  $CMS_0 \geq r_0$ , sendo  $r_0$  o valor do CMS especificado. Observe que, para  $k_1 = k_2$ , obtemos um único par de limites de controle e o gráfico proposto se reduz ao tradicional gráfico de controle proposto por [Leiva et al. \(2015\)](#).

Como visto no procedimento operacional, precisamos analisar alguns casos. Vamos considerar

$$A_1^0 = P(LIC_2 \leq D \leq LSC_2) = \sum_{d=\lfloor LIC_2 \rfloor + 1}^{\lfloor LSC_2 \rfloor} \binom{n}{d} p_0^d (1 - p_0)^{n-d} \quad (3.9)$$

$$A_2^0 = P(LIC_1 \leq D < LIC_2) = \sum_{d=\lfloor LIC_1 \rfloor + 1}^{\lfloor LIC_2 \rfloor} \binom{n}{d} p_0^d (1 - p_0)^{n-d} \quad (3.10)$$

$$A_3^0 = P(LSC_2 < D \leq LSC_1) = \sum_{d=\lfloor LSC_2 \rfloor + 1}^{\lfloor LSC_1 \rfloor} \binom{n}{d} p_0^d (1 - p_0)^{n-d}. \quad (3.11)$$

Desse modo, a probabilidade do processo ser declarado sob controle em cada subgrupo quando o processo está realmente sob controle é dado da seguinte maneira

$$P_{sob,1}^0 = P(LIC_2 \leq D \leq LSC_2) = A_1^0. \quad (3.12)$$

A probabilidade de amostragem repetitiva é dada por

$$P_{rep}^0 = P(LIC_1 \leq D < LIC_2) + P(LSC_2 < D \leq LSC_1) = A_2^0 + A_3^0. \quad (3.13)$$

Portanto, a probabilidade de declarar o processo sob controle, usando  $AR$ , quando o processo está realmente sob controle é dada por

$$P_{sob}^0 = \frac{P_{sob,1}^0}{1 - P_{rep}^0}. \quad (3.14)$$

Logo, o CMS quando o processo está sob controle é

$$CMS_0 = \frac{1}{1 - P_{sob}^0}. \quad (3.15)$$

As expressões (3.9), (3.10) e (3.11) são utilizadas considerando um processo sob controle. Para o processo deslocado, consideramos as seguintes expressões

$$A_1^1 = \sum_{d=\lfloor LIC_2 \rfloor + 1}^{\lfloor LSC_2 \rfloor} \binom{n}{d} p_1^d (1 - p_1)^{n-d} \quad (3.16)$$

$$A_2^1 = \sum_{d=\lfloor LIC_1 \rfloor + 1}^{\lfloor LIC_2 \rfloor} \binom{n}{d} p_1^d (1 - p_1)^{n-d} \quad (3.17)$$

$$A_3^1 = \sum_{d=\lfloor LSC_2 \rfloor + 1}^{\lfloor LSC_1 \rfloor} \binom{n}{d} p_1^d (1 - p_1)^{n-d}. \quad (3.18)$$

Assim, a probabilidade do processo ser declarado sob controle em cada subgrupo quando o processo foi deslocado é dada por

$$P_{sob,1}^1 = P(LIC_2 \leq D \leq LSC_2) = A_1^1. \quad (3.19)$$

A probabilidade de amostragem repetitiva é dada por

$$P_{rep}^1 = P(LIC_1 \leq D < LIC_2) + P(LSC_2 < D \leq LSC_1) = A_2^1 + A_3^1. \quad (3.20)$$

Logo, a probabilidade de declarar como sob controle o processo, usando  $AR$ , quando o processo foi deslocado é

$$P_{sob}^1 = \frac{P_{sob,1}^1}{1 - P_{rep}^1}. \quad (3.21)$$

Portanto, o CMS para o processo deslocado é dado por

$$CMS_1 = \frac{1}{1 - P_{sob}^1}. \quad (3.22)$$

Para maiores detalhes sobre esse método de amostragem, ver [Aslam et al. \(2014\)](#) e [Aslam \(2017\)](#).

### 3.3 Amostragem de estado dependente múltiplo

A amostragem de estado dependente múltiplo (AEDM) é outro esquema que tem ganhado destaque em estudos sobre o desempenho dos gráficos de controle. Neste tipo de amostragem, são consideradas as informações de  $i$  subgrupos anteriores para tomada de decisão sobre o estado atual do processo. As constantes  $a$ ,  $k_1$  e  $k_2$  devem ser determinados considerando o valor do  $CMS$  especificado,  $r_0$ . Observe que, se  $k_1 = k_2$  e  $i = 0$ , retornamos ao caso do tradicional gráfico de controle. A probabilidade  $p_0$  que um contaminante exceda uma concentração perigosa é a mesma usada em (3.3), tendo como base a distribuição  $BS$ .

[Aslam \(2017\)](#) e [Aslam et al. \(2015a\)](#) realizaram estudos com gráficos de controle sob a distribuição Weibull e exponencial, respectivamente, usando a AEDM. [Aslam et al. \(2015b\)](#) e [Balamurali \(2007\)](#) também foram alguns dos autores que realizaram



pesquisas envolvendo este tipo de amostragem. Nesse esquema de amostragem, o processo será declarado como sob controle se todos os pontos estiverem entre os limites de controle internos. Em contrapartida, se um ou mais pontos estiverem além dos limites de controle externos o processo será declarado fora de controle. Caso contrário, serão considerados  $i$  subgrupos anteriores que declararão o processo sob controle desde que eles estejam sob controle. Se esta condição não for satisfeita o processo será considerado fora de controle.

Desta forma, o procedimento operacional para o gráfico proposto utilizando a AEDM é apresentado nas seguintes etapas:

1. Selecione uma amostra aleatória de tamanho  $n$  em cada subgrupo. Conte o número  $D$  de vezes em que  $T$  excede  $t_0$ .
2. Declare o processo como sob controle se  $LIC_2 \leq D \leq LSC_2$ . Declare o processo como fora de controle se  $D > LSC_1$  ou  $D < LIC_1$ . Caso contrário, vá para a etapa 3.
3. Declare que o processo está sob controle se  $i$  subgrupos anteriores declararem o processo como sob controle. Quando não, declare que o processo está fora de controle.

Considerando a AEDM, a probabilidade de declarar o gráfico de controle proposto como sob controle é dada por

$$\begin{aligned}
 P_{sob}^0 &= P(LIC_2 \leq D \leq LSC_2) + \{P(LIC_1 \leq D < LIC_2) + \\
 &\quad P(LSC_2 < D \leq LSC_1)\} \times \{P(LIC_2 \leq D \leq LSC_2)\}^i \quad (3.23) \\
 &= A_1^0 + \{A_2^0 + A_3^0\} \times \{A_1^0\}^i.
 \end{aligned}$$

Aqui foi considerada uma probabilidade condicional, dado que para declarar o processo como sob controle foi necessário observar além da região entre os limites internos, se os subgrupos anteriores estavam declarando o processo sob controle.

Assim, o valor do CMS para o processo sob controle é dado por

$$CMS_0 = \frac{1}{1 - P_{sob}^0}. \quad (3.24)$$

Quando o processo é deslocado, temos que a probabilidade de declarar o processo sob controle quando o processo passou para um estado fora de controle é a seguinte

$$P_{sob}^1 = A_1^1 + \{A_2^1 + A_3^1\} \times \{A_1^1\}^i. \quad (3.25)$$

considerando as probabilidades anteriormente mencionadas.

Desta forma, o CMS para o processo deslocado é

$$CMS_1 = \frac{1}{1 - P_{sob}^1}. \quad (3.26)$$

Para maiores detalhes dos gráficos de controle baseado na AEDM, ver [Aslam et al. \(2015b\)](#).

### 3.4 Amostragem repetitiva de estado dependente múltiplo

Assim como a AEDM, a amostragem repetitiva de estado dependente múltiplo (AREDM) é utilizada na análise do desempenho dos gráficos. Nesse caso o processo deve ser repetido caso não possa ser tomada uma decisão no primeiro momento, a partir de  $i$  subgrupos anteriores. Estudos sobre esse tipo de amostragem podem ser vistos em [Aldosari et al. \(2017\)](#).

Os coeficientes  $a$ ,  $k_1$  e  $k_2$ , devem ser determinados considerando o valor do  $r_0$ , de forma que  $CMS_0 \geq r_0$ . A partir desses valores obtidos, pode-se determinar valores de CMS para diferentes deslocamentos. É importante observar que, neste tipo de amostragem, se  $k_1 = k_2$  e  $LIC_2 = LSC_2$ , o gráfico proposto se torna o gráfico proposto por [Leiva et al. \(2015\)](#), já se  $i = 0$  este se reduz apenas ao gráfico usando amostragem repetitiva.

O procedimento operacional do gráfico usando AREDM é o seguinte:

1. Selecione uma amostra aleatória de tamanho  $n$  em cada subgrupo. Conte o número  $D$  de vezes em que  $T$  excede  $t_0$ .
2. Declare o processo como sob controle se  $LIC_2 \leq D \leq LSC_2$ . Se  $D > LSC_1$  ou  $D < LIC_1$ , declare o processo como fora de controle. Caso contrário, vá para o passo 3.

3. Declare que o processo está sob controle se  $i$  subgrupos anteriores foram considerados como sob controle. Caso contrário, repita o passo 1.

A probabilidade de declarar o gráfico de controle proposto como sob controle com base em um único subgrupo e AEDM é a mesma dada em (3.23), ou seja,

$$P_{sob,1}^0 = A_1^0 + \{A_2^0 + A_3^0\} \times \{A_1^0\}^i. \quad (3.27)$$

A probabilidade de amostragem repetitiva é dada por

$$P_{rep}^0 = \{P(LIC_1 \leq D < LIC_2) + P(LSC_2 < D \leq LSC_1)\} \\ \times (1 - \{P(LIC_2 \leq D \leq LSC_2)\}^i). \quad (3.28)$$

Nesse caso, também é considerada uma probabilidade condicional. Ou seja, a probabilidade é calculada considerando que os pontos estão na região de decisão e os  $i$  subgrupos anteriores não estão declarando o processo como sob controle.

Assim, das expressões (3.9), (3.10) e (3.11) temos

$$P_{rep}^0 = \{A_2^0 + A_3^0\} \times (1 - \{A_1^0\}^i). \quad (3.29)$$

Portanto, a probabilidade de declarar sob controle o gráfico de controle proposto usando AEDM quando o processo está sob controle é dada por

$$P_{sob}^0 = \frac{P_{sob,1}^0}{1 - P_{rep}^0}. \quad (3.30)$$

Logo, o CMS quando o processo está sob controle é

$$CMS_0 = \frac{1}{1 - P_{sob}^0}. \quad (3.31)$$

Considerando um processo deslocado, da expressão (3.25), obtemos que a probabilidade de declarar o processo sob controle com base em um único subgrupo e AEDM para o processo deslocado é

$$P_{sob,1}^1 = A_1^1 + \{A_2^1 + A_3^1\} \times \{A_1^1\}^i. \quad (3.32)$$

Do mesmo modo, usando as expressões (3.16), (3.17) e (3.18), a probabilidade de amostragem repetitiva para o processo deslocado é dada por

$$P_{rep}^1 = \{A_2^1 + A_3^1\} \times (1 - \{A_1^1\}^i). \quad (3.33)$$

Assim, a probabilidade de declarar o processo sob controle quando o processo foi deslocado é dada por

$$P_{sob}^1 = \frac{P_{sob,1}^1}{1 - P_{rep}^1}. \quad (3.34)$$

Portanto, o CMS para o processo deslocado é

$$CMS_1 = \frac{1}{1 - P_{sob}^1}. \quad (3.35)$$

# Capítulo 4

## Estudo de simulação

Para avaliar o desempenho dos gráficos de controle, foram feitos vários estudos de simulação, abordando os tipos de amostragem aqui considerados. Comparações de CMS são feitas com o objetivo de avaliar a sensibilidade dos gráficos na detecção de pequenas mudanças no processo. O *software* R em sua versão 3.4.2 para Windows foi utilizado para construção de gráficos, bem como nos estudos de simulação em geral. Este se encontra disponível em <https://www.r-project.org>. Além de ser gratuito, o R é um excelente *software* para simulação, programação e construção de gráficos.

### 4.1 Comparações de CMS para diferentes tipos de amostragem

Um estudo de simulação foi usado para determinar os valores de  $CMS_0$  e  $CMS_1$  para diferentes parâmetros especificados, de modo que  $CMS_0 \geq r_0$ . A comparação é feita entre a AS, AR, AEDM e AREDM. Para cada tipo de amostragem, foram considerados  $r_0 = 200, 300$  e  $370$ , parâmetros de forma  $b = 0, 31$  e  $b = 1, 0$ , tamanhos de amostra  $n = 20, 30$  e  $40$  e constante de deslocamento  $l$ , dada nas tabelas. Os parâmetros de forma foram escolhidos desta maneira, devido ao fato da distribuição se tornar mais simétrica para valores próximos de zero.

Iremos nos deter apenas ao casos em que  $r_0 = 370$ , comportamento similar pode ser visto para os casos  $r_0 = 200$  e  $r_0 = 300$ . Para mais detalhes, ver Apêndice A.

### 4.1.1 Tabelas comparativas usando AS

As Tabelas 4.1 e 4.2 indicam valores de CMS para diferentes tamanhos de amostras e parâmetros de forma, utilizando a amostragem simples. Em cada uma delas, os coeficientes  $a$  e  $k$  foram obtidos de acordo com o  $r_0 = 370$ , de forma que  $CMS_0 \geq r_0$ . Percebe-se que à medida que o tamanho da amostra aumenta, em geral, os valores de CMS diminuem, ou seja, o gráfico proposto é mais sensível para grandes amostras. O gráfico de controle não apresenta o mesmo comportamento nos casos em que  $b = 1,0$  e  $1,10 \leq l \leq 1,20$ .

Tabela 4.1: Valores de CMS para  $r_0 = 370$  e  $b = 0,31$  usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$l$	$a = 0,9625; k = 2,953$	$a = 0,919; k = 2,86$	$a = 0,8561; k = 2,886$
1,00	370,56	370,04	370,44
0,95	104,75	74,01	48,60
0,90	25,45	13,95	8,10
0,80	3,30	1,80	1,29
0,70	1,26	1,03	1,00
0,60	1,01	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	50,36	28,71	26,92
1,20	7,66	4,09	3,50
1,30	2,59	1,61	1,44
1,40	1,48	1,13	1,08
1,50	1,15	1,02	1,01
1,60	1,04	1,00	1,00
1,70	1,01	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Quando o parâmetro de forma  $b$  muda de 0,31 para 1,0 os valores CMS demoram mais para caírem, sendo assim o gráfico demora mais para detectar o deslocamento. Isso pode se dá devido ao fato de que à medida que o parâmetro  $b$  aumenta a distribuição

BS fica mais assimétrica. Além disso, para  $b = 0,31$  a mudança já pode ser detectada na primeira amostra quando  $l < 0,60$  e  $l > 1,70$ .

Comparando as duas direções do deslocamento observamos que quando deslocamos em 0,10 nos dois sentidos, o gráfico consegue detectar melhor para deslocamentos menores que 1,00. Como por exemplo, quando comparamos  $l = 0,90$  com  $l = 1,10$ .

Tabela 4.2: Valores de CMS para  $r_0 = 370$  e  $b = 1,0$  usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$l$	$a = 0,6479; k = 2,986$	$a = 0,7821; k = 2,912$	$a = 0,4706; k = 2,886$
1,00	370,17	370,03	370,09
0,95	376,41	260,74	212,35
0,90	284,74	148,59	103,14
0,80	103,53	43,01	24,50
0,70	33,88	13,28	6,96
0,60	11,61	4,71	2,58
0,50	4,39	2,07	1,35
0,30	1,19	1,02	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	194,94	246,06	284,71
1,20	89,73	94,26	99,44
1,30	45,53	40,17	39,49
1,40	25,68	19,92	18,65
1,50	15,84	11,22	10,16
1,60	10,52	7,01	6,22
1,70	7,43	4,77	4,19
1,80	5,52	3,49	3,05
2,00	3,45	2,19	1,93

Fonte: O autor.

#### 4.1.2 Tabelas comparativas usando AR

Nas Tabelas 4.3 e 4.4, estão dispostos os valores de CMS para diferentes tamanhos de amostras e parâmetros de forma, utilizando a amostragem repetitiva. Como visto na AS, percebemos que à medida que o tamanho da amostra aumenta, o gráfico proposto é mais sensível. Além disso, quando o parâmetro de forma  $b$  muda de 0,31 para 1,0 os valores de CMS decrescem mais devagar. O gráfico proposto apresenta uma maior

sensibilidade para valores de deslocamentos menores que um.

Os valores de CMS utilizando a AR em geral são menores que os valores observados na AS, logo a AR se mostra mais eficiente que a AS na detecção de pequenas mudanças no processo.

Tabela 4.3: Valores de CMS para  $r_0 = 370$  e  $b = 0,31$  usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 1,01; k_1 = 2,955$	$a = 0,8903; k_1 = 2,912$	$a = 0,9188; k_1 = 2,898$
$l$	$k_2 = 1,834$	$k_2 = 1,573$	$k_2 = 1,29$
1,00	370,00	370,03	370,38
0,95	101,25	68,75	40,90
0,90	22,56	8,97	3,76
0,80	2,11	1,09	1,01
0,70	1,04	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	41,12	18,27	10,80
1,20	3,82	1,69	1,21
1,30	1,27	1,03	1,00
1,40	1,03	1,00	1,00
1,50	1,00	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.



Tabela 4.4: Valores de CMS para  $r_0 = 370$  e  $b = 1,0$  usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,7634; k_1 = 2,858$	$a = 0,8342; k_1 = 3,023$	$a = 0,7524; k_1 = 2,928$
$l$	$k_2 = 1,573$	$k_2 = 1,554$	$k_2 = 1,299$
1,00	370,07	370,95	370,07
0,95	344,29	322,35	316,09
0,90	241,31	191,66	160,73
0,80	79,34	45,97	26,67
0,70	22,16	9,84	4,25
0,60	5,88	2,39	1,30
0,50	1,86	1,15	1,01
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	205,02	166,20	130,43
1,20	87,58	56,25	37,11
1,30	39,73	21,42	12,45
1,40	19,75	9,37	5,05
1,50	10,70	4,72	2,55
1,60	6,29	2,75	1,63
1,70	4,01	1,87	1,27
1,80	2,77	1,44	1,12
2,00	1,66	1,13	1,02

Fonte: O autor.

### 4.1.3 Tabelas comparativas usando AEDM

Nas Tabelas 4.5 - 4.8, estão dispostos os valores de CMS para diferentes tamanhos de amostras e parâmetros de forma, utilizando a amostragem de estado dependente múltiplo para  $r_0 = 370$ . Também foram considerados os valores de  $i = 2$  e  $3$ . Esses valores de  $i$  são os subgrupos anteriores que devem ser observados para declarar o estado atual do processo. Para cada  $r_0$  dado, foram obtidos os coeficientes  $a$ ,  $k_1$  e  $k_2$ .

Como já vínhamos observando nas amostragens anteriores, quando aumentamos o tamanho da amostra, o gráfico proposto pela AEDM também fica mais sensível. Percebemos que a sensibilidade do gráfico proposto é maior que a dos gráficos anteriores quando  $l < 1,00$ . Por exemplo, para  $b = 1$  e  $n = 20$  no deslocamento  $l = 0,90$

a mudança é detectada aproximadamente na observação 170, já para  $l = 1,10$  essa mudança só pode ser detectada na observação 303, ver Tabela 4.7.

Os valores de CMS para  $b = 0,31$  seguem o mesmo padrão, decrescem mais rápido e para  $l < 0,70$  e  $l > 1,50$  o gráfico proposto consegue detectar mudança na primeira amostra. Quando observados os subgrupos anteriores, em geral, o gráfico se torna mais sensível quando  $i = 2$  para valores de deslocamentos menores que 1,00, ou seja,  $l < 1,00$ . Já para  $i = 3$ , a sensibilidade maior pode ser vista para  $l > 1,00$ .

Tabela 4.5: Valores de CMS para  $r_0 = 370$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 2$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,919; k_1 = 2,959$	$a = 0,8742; k_1 = 2,8804$	$a = 0,9527; k_1 = 2,9464$
$l$	$k_2 = 2,488$	$k_2 = 2,4742$	$k_2 = 2,3879$
1,00	370,51	370,11	370,07
0,95	95,06	59,98	59,81
0,90	19,25	9,90	7,02
0,80	2,12	1,38	1,16
0,70	1,07	1,01	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	44,92	23,93	8,86
1,20	5,58	2,60	1,47
1,30	1,90	1,24	1,04
1,40	1,23	1,04	1,00
1,50	1,06	1,00	1,00
1,60	1,02	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela 4.6: Valores de CMS para  $r_0 = 370$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 3$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9953; k_1 = 2,7684$	$a = 0,8715; k_1 = 2,9753$	$a = 0,8393; k_1 = 2,9184$
$l$	$k_2 = 2,3106$	$k_2 = 2,4564$	$k_2 = 2,5214$
1,00	370,99	370,77	370,41
0,95	137,43	63,56	43,98
0,90	26,62	10,06	6,30
0,80	2,54	1,40	1,16
0,70	1,14	1,01	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	26,55	17,36	14,99
1,20	3,63	2,24	1,90
1,30	1,52	1,21	1,12
1,40	1,12	1,03	1,01
1,50	1,03	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela 4.7: Valores de CMS para  $r_0 = 370$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 2$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,5909; k_1 = 3,0670$	$a = 0,5297; k_1 = 2,9690$	$a = 0,464; k_1 = 3,212$
$l$	$k_2 = 2,3644$	$k_2 = 2,3664$	$k_2 = 2,196$
1,00	370,35	370,42	370,28
0,95	274,82	261,76	188,96
0,90	170,50	136,29	76,35
0,80	54,34	29,74	12,75
0,70	16,69	7,25	3,23
0,60	5,53	2,46	1,45
0,50	2,26	1,32	1,07
0,30	1,04	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	302,59	223,55	280,63
1,20	142,98	84,90	75,41
1,30	66,56	35,40	22,98
1,40	33,78	16,89	9,15
1,50	18,78	9,14	4,62
1,60	11,37	5,54	2,82
1,70	7,42	3,71	1,99
1,80	5,19	2,71	1,57
2,00	3,00	1,76	1,21

Fonte: O autor.

Tabela 4.8: Valores de CMS para  $r_0 = 370$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 3$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,5982; k_1 = 3,1558$	$a = 0,7465; k_1 = 3,1880$	$a = 0,6725; k_1 = 3,2806$
$l$	$k_2 = 2,2782$	$k_2 = 2,1421$	$k_2 = 2,1793$
1,00	370,06	370,82	370,10
0,95	398,36	360,61	321,81
0,90	297,85	212,37	159,56
0,80	84,98	40,33	24,87
0,70	19,88	8,28	5,01
0,60	5,48	2,59	1,82
0,50	2,14	1,36	1,15
0,30	1,03	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	159,77	130,11	106,26
1,20	58,91	37,31	25,26
1,30	24,79	13,55	8,58
1,40	12,26	6,33	4,04
1,50	7,00	3,64	2,45
1,60	4,51	2,46	1,77
1,70	3,20	1,87	1,44
1,80	2,46	1,55	1,26
2,00	1,72	1,24	1,09

Fonte: O autor.

#### 4.1.4 Tabelas comparativas usando AREDM

Nas Tabelas 4.9 - 4.12, são apresentados os valores de CMS para diferentes tamanhos de amostras e parâmetros de forma, utilizando a amostragem repetitiva de estado dependente múltiplo. Os valores de  $i$  são os mesmos considerados na AEDM. Os coeficientes necessários foram obtidos de acordo com o  $r_0$  especificado.

Analisando as tabelas observamos o mesmo que já vinha acontecendo nas amostragens anteriores, para  $b = 0,31$  os valores de CMS decrescem mais rápido, dando sinal de mudança na primeira amostra para  $l < 0,70$  e  $l > 1,50$ . Para o parâmetro  $b = 1,0$  os valores de CMS demoram mais para cair. Quando consideramos 2 subgru-

pos a sensibilidade maior pode ser vista para  $l > 1,00$ . Já para valores menores de deslocamento o gráfico é mais sensível quando  $i = 3$ . Para  $b = 0,31$  esses valores são bem próximos quando  $i = 2$  e  $i = 3$ .

Apesar de apresentarem valores próximos para os diferentes deslocamentos, a AREDM se mostra melhor em alguns casos específicos, mas no geral a AEDM apresenta valores menores de CMS, conseguindo assim detectar mais rápido mudanças no processo.

Tabela 4.9: Valores de CMS para  $r_0 = 370$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 2$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

$l$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9241; k_1 = 2,9888$ $k_2 = 2,1229$	$a = 0,9187; k_1 = 2,9567$ $k_2 = 2,0271$	$a = 1,063; k_1 = 2,984$ $k_2 = 2,466$
1,00	370,18	370,05	370,15
0,95	90,96	74,21	126,96
0,90	20,41	13,06	18,77
0,80	1,89	1,33	1,42
0,70	1,02	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	64,48	24,95	10,53
1,20	7,62	2,26	1,65
1,30	1,87	1,08	1,05
1,40	1,13	1,01	1,00
1,50	1,02	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela 4.10: Valores de CMS para  $r_0 = 370$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 3$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,924; k_1 = 2,923$	$a = 0,9912; k_1 = 2,9589$	$a = 1,064; k_1 = 2,809$
$l$	$k_2 = 2,084$	$k_2 = 2,0181$	$k_2 = 2,115$
1,00	370,10	370,20	370,12
0,95	90,61	112,14	122,74
0,90	19,88	17,00	15,92
0,80	1,83	1,29	1,21
0,70	1,02	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	63,51	17,29	8,75
1,20	7,15	2,10	1,28
1,30	1,80	1,10	1,01
1,40	1,13	1,01	1,00
1,50	1,02	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela 4.11: Valores de CMS para  $r_0 = 370$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 2$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,7406; k_1 = 2,9864$	$a = 0,7542; k_1 = 3,0495$	$a = 0,9455; k_1 = 3,1164$
$l$	$k_2 = 1,8234$	$k_2 = 1,7676$	$k_2 = 1,8061$
1,00	371,52	370,10	370,09
0,95	414,98	342,43	396,41
0,90	338,03	215,91	243,38
0,80	123,69	58,55	52,76
0,70	35,40	14,48	9,84
0,60	8,90	3,54	2,08
0,50	2,30	1,33	1,08
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	177,39	164,36	118,47
1,20	79,16	60,68	37,98
1,30	39,07	25,47	14,78
1,40	21,20	12,01	6,72
1,50	12,40	6,26	3,53
1,60	7,72	3,62	2,17
1,70	5,09	2,35	1,57
1,80	3,55	1,72	1,28
2,00	2,05	1,22	1,08

Fonte: O autor.



Tabela 4.12: Valores de CMS para  $r_0 = 370$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 3$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,685; k_1 = 2,869$	$a = 0,7745; k_1 = 2,9771$	$a = 0,4689; k_1 = 2,9563$
$l$	$k_2 = 1,892$	$k_2 = 1,6366$	$k_2 = 1,5078$
1,00	370,03	370,00	370,31
0,95	279,90	277,55	215,55
0,90	178,80	159,60	102,45
0,80	61,46	42,52	20,80
0,70	19,82	10,43	4,31
0,60	6,12	2,72	1,44
0,50	2,11	1,23	1,04
0,30	1,01	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	300,47	211,81	261,46
1,20	145,47	74,84	84,34
1,30	70,21	28,33	29,02
1,40	36,75	11,96	11,21
1,50	20,70	5,70	4,98
1,60	12,39	3,14	2,66
1,70	7,84	2,03	1,73
1,80	5,23	1,53	1,33
2,00	2,74	1,15	1,08

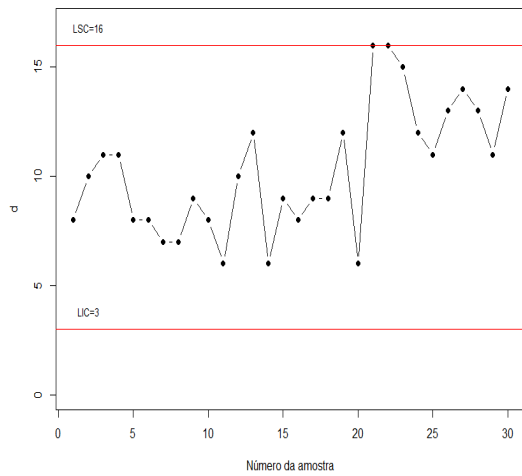
Fonte: O autor.

## 4.2 Exemplo simulado

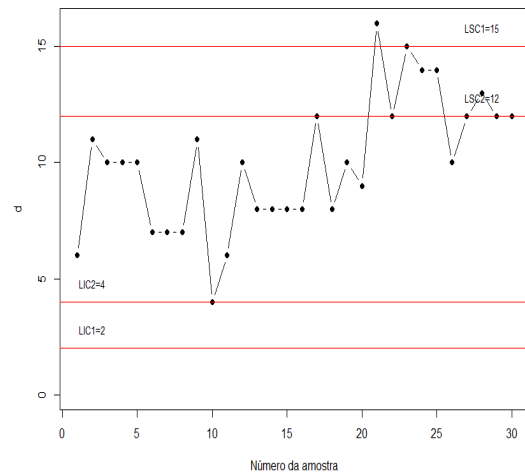
Nesta seção, mostramos os gráficos propostos para um exemplo simulado a fim de ilustrar melhor a metodologia estudada. Assumimos os valores  $b = 0,31$  e  $\sigma = 1,5$  para os parâmetros de forma e escala, respectivamente. O valor do CMS especificado foi  $r_0 = 370$  e o tamanho de amostra utilizado foi  $n = 20$ . Além disso, foi considerado  $i = 2$  subgrupos na AEDM e AREDM, para a tomada de decisão.

Os dados foram obtidos a partir de uma distribuição BS. Foram gerados 30 subgrupos sendo os 20 primeiros gerados a partir do processo sob controle e os próximos 10 subgrupos a partir de um processo deslocado. Os deslocamentos que consideramos foram  $l = 1,15$  e  $0,85$ . Os respectivos gráficos podem ser vistos nas Figuras 4.1 e 4.2.

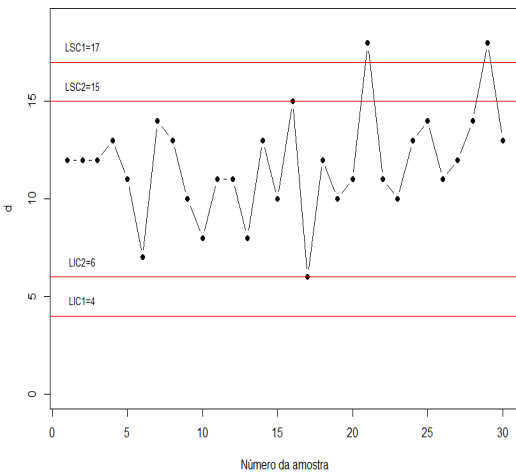
Figura 4.1: Gráficos comparativos considerando  $n = 20$ ,  $b = 0,31$ ,  $\sigma = 1,5$  e  $l = 1, 15$



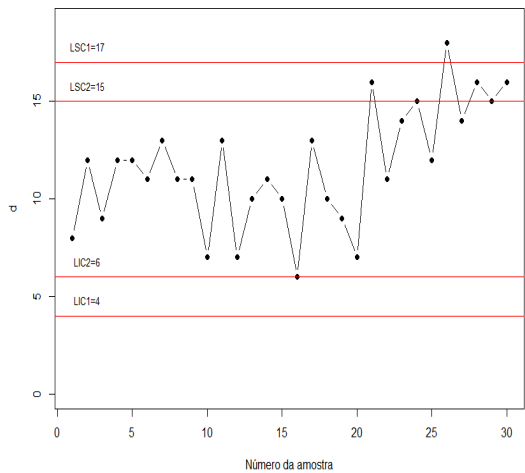
(a) Gráfico BS baseado na AS



(b) Gráfico BS baseado na AR



(c) Gráfico BS baseado na AEDM

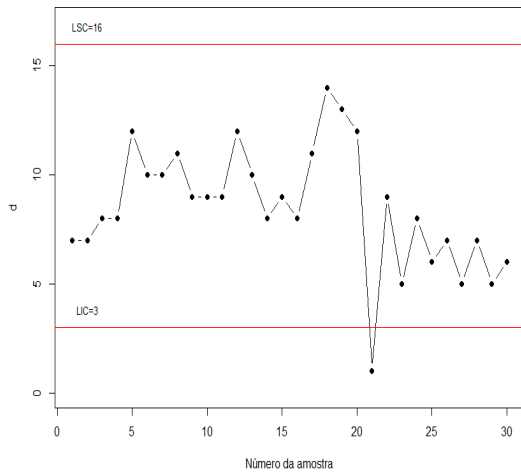


(d) Gráfico BS baseado na AREDM

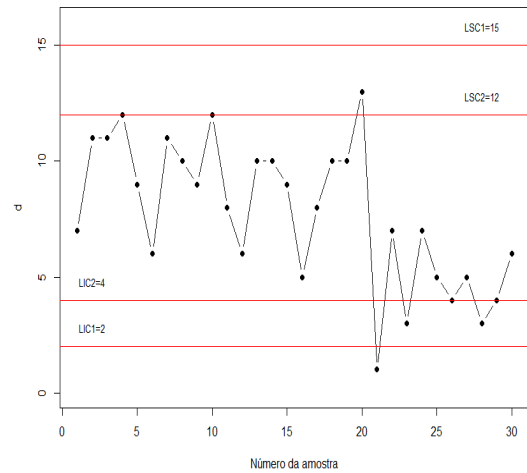
Da Figura 4.1, percebemos que, para o gráfico usando a AS, todos os pontos estão situados dentro dos limites de controle, logo o processo é declarado sob controle. Para a AR, a mudança é detectada no 21<sup>o</sup>subgrupo, quando o processo sai de controle. Na AEDM a mudança também é detectada no 21<sup>o</sup>subgrupo e o processo sai de controle sem a necessidade de observar os dois subgrupos anteriores para tomar uma decisão. Observando o gráfico usando a AREDM, notamos que o 21<sup>o</sup>subgrupo se encontra na região de decisão, nesse caso observamos os dois subgrupos anteriores e estes declaram o processo sob controle. Seguimos o processo e somente no 26<sup>o</sup>subgrupo o processo é

declarado fora de controle.

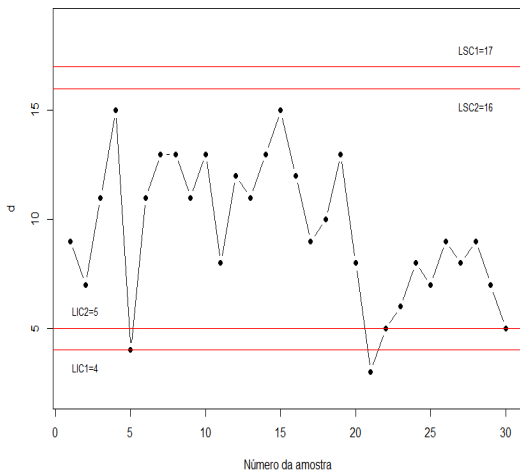
Figura 4.2: Gráficos comparativos considerando  $n = 20$ ,  $b = 0,31$ ,  $\sigma = 1,5$  e  $l = 0,85$



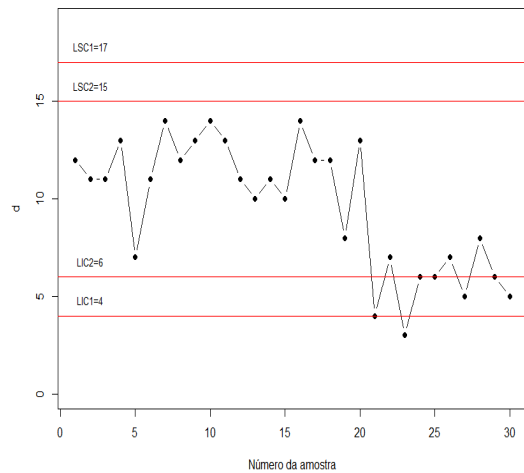
(a) Gráfico BS baseado na AS



(b) Gráfico BS baseado na AR



(c) Gráfico BS baseado na AEDM



(d) Gráfico BS baseado na AREDM

Comportamento similar pode ser observado na Figura 4.2. Considerando  $l = 0,85$  os gráficos usando AS e AR conseguem detectar a mudança no 21<sup>o</sup> subgrupo, ou seja, no 1<sup>o</sup> subgrupo após o processo ser deslocado, a mudança detectada já leva a um processo fora de controle. Para a AEDM, o 5<sup>o</sup> subgrupo já se encontra na região de decisão, porém os 2 anteriores declaram o processo sob controle. Somente no 21<sup>o</sup> subgrupo o processo entra em um estado fora de controle. Considerando a AREDM a mudança também é detectada no 21<sup>o</sup> subgrupo, porém os dois anteriores o declaram como sob

controle. Para esse tipo de amostragem, o processo só é declarado fora de controle no 23<sup>o</sup>subgrupo.

# Capítulo 5

## Conclusões

Uma comparação de gráficos de controle para atributos baseada na distribuição Birnbaum-Saunders foi proposta, considerando diferentes tipos de amostragem e avaliando o desempenho de cada um, através dos valores de CMS. Foram construídas várias tabelas com diferentes valores de  $r_0$  e com deslocamentos seguindo duas direções. Além disso, um estudo de simulação foi feito para que essa mudança pudesse ser vista graficamente.

Podemos perceber uma sensibilidade maior dos gráficos para tamanhos de amostras grandes e parâmetro de forma pequeno. Os gráficos utilizados no exemplo simulado nos ajudaram na identificação dos tipos de amostragem que conseguem detectar melhor pequenas mudanças no processo. De modo geral, há um ganho considerável de todos os tipos de amostragem considerados, em relação à amostragem simples. Desta forma, concluímos que estes são mais eficientes para detectar mudanças no processo, garantindo o melhoramento do mesmo.

Como trabalhos futuros, pretendemos aplicar os gráficos de controle propostos na área ambiental, mais precisamente, a dados da poluição no Brasil.

# Apêndice A

## Tabelas comparativas para $r_0 = 200$ e 300

Tabela A.1: Valores de CMS para  $r_0 = 200$  e  $b = 0,31$  usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$l$	$a = 0,8871; k = 2,795$	$a = 0,9084; k = 2,722$	$a = 1,069; k = 2,817$
1,00	200,13	200,53	200,17
0,95	86,38	43,18	103,62
0,90	20,98	9,28	17,24
0,80	2,74	1,54	1,92
0,70	1,15	1,01	1,04
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	24,74	20,73	7,19
1,20	5,20	3,41	1,58
1,30	2,16	1,48	1,05
1,40	1,38	1,10	1,00
1,50	1,13	1,02	1,00
1,60	1,04	1,00	1,00
1,70	1,01	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.2: Valores de CMS para  $r_0 = 200$  e  $b = 1,0$  usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$l$	$a = 0,8177; k = 2,567$	$a = 0,5694; k = 2,844$	$a = 0,4875; k = 2,876$
1,00	200,06	200,07	200,19
0,95	189,66	138,84	124,41
0,90	141,44	80,23	64,32
0,80	56,38	24,46	16,93
0,70	20,91	8,16	5,32
0,60	8,13	3,22	2,18
0,50	3,48	1,62	1,26
0,30	1,15	1,01	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	119,53	153,08	145,87
1,20	57,51	65,59	54,43
1,30	29,87	30,15	23,09
1,40	17,22	15,85	11,59
1,50	10,86	9,36	6,69
1,60	7,38	6,08	4,32
1,70	5,34	4,27	3,05
1,80	4,06	3,19	2,33
2,00	2,66	2,08	1,59

Fonte: O autor.

Tabela A.3: Valores de CMS para  $r_0 = 300$  e  $b = 0,31$  usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$l$	$a = 0,9336; k = 2,921$	$a = 0,8371; k = 2,882$	$a = 0,8135; k = 2,875$
1,00	300,65	300,05	300,63
0,95	68,83	48,73	37,21
0,90	17,52	9,88	6,74
0,80	2,60	1,53	1,23
0,70	1,15	1,01	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	87,39	55,71	41,53
1,20	11,92	7,43	5,05
1,30	3,58	2,47	1,81
1,40	1,82	1,43	1,19
1,50	1,29	1,13	1,04
1,60	1,10	1,04	1,01
1,70	1,03	1,01	1,00
1,80	1,01	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.



Tabela A.4: Valores de CMS para  $r_0 = 300$  e  $b = 1,0$  usando AS com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
$l$	$a = 0,4259; k = 2,639$	$a = 0,4382; k = 2,886$	$a = 0,5349; k = 3,001$
1,00	300,24	300,55	300,32
0,95	184,92	174,43	193,75
0,90	108,99	93,01	98,29
0,80	37,46	26,58	23,99
0,70	13,56	8,54	6,91
0,60	5,38	3,28	2,58
0,50	2,47	1,63	1,36
0,30	1,06	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	509,60	372,53	181,41
1,20	375,26	174,43	63,26
1,30	203,30	77,23	25,95
1,40	112,45	38,51	12,70
1,50	66,78	21,48	7,18
1,60	42,41	13,15	4,56
1,70	28,53	8,70	3,18
1,80	20,15	6,14	2,40
2,00	11,32	3,57	1,62

Fonte: O autor.

Tabela A.5: Valores de CMS para  $r_0 = 200$  e  $b = 0,31$  usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,8681; k_1 = 2,753$	$a = 0,9055; k_1 = 2,766$	$a = 0,9106; k_1 = 2,868$
$l$	$k_2 = 1,917$	$k_2 = 2,109$	$k_2 = 1,163$
1,00	200,77	200,12	200,15
0,95	46,71	44,14	23,38
0,90	10,59	8,04	2,60
0,80	1,45	1,21	1,00
0,70	1,01	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	53,91	15,86	7,52
1,20	6,65	2,15	1,14
1,30	1,84	1,12	1,00
1,40	1,14	1,01	1,00
1,50	1,02	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.6: Valores de CMS para  $r_0 = 200$  indicado quando  $b = 1,0$  usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 1,152; k_1 = 2,621$	$a = 1,083; k_1 = 2,669$	$a = 0,9206; k_1 = 2,829$
$l$	$k_2 = 2,194$	$k_2 = 2,152$	$k_2 = 2,061$
1,00	203,01	200,29	200,09
0,95	255,85	224,03	183,20
0,90	246,90	167,32	107,03
0,80	118,21	52,49	24,89
0,70	42,67	14,42	5,76
0,60	14,70	4,11	1,79
0,50	5,04	1,56	1,08
0,30	1,13	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	91,24	79,93	78,03
1,20	41,30	30,41	26,51
1,30	21,03	13,51	10,91
1,40	11,95	6,95	5,39
1,50	7,44	4,07	3,12
1,60	5,01	2,68	2,09
1,70	3,61	1,96	1,59
1,80	2,76	1,57	1,32
2,00	1,85	1,21	1,10

Fonte: O autor.

Tabela A.7: Valores de CMS para  $r_0 = 300$  e  $b = 0,31$  usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9371; k_1 = 2,899$	$a = 0,9009; k_1 = 3,027$	$a = 1,015; k_1 = 3,056$
$l$	$k_2 = 1,814$	$k_2 = 1,543$	$k_2 = 1,009$
1,00	300,51	300,45	300,07
0,95	197,46	42,76	44,38
0,90	36,33	6,08	3,61
0,80	2,06	1,06	1,00
0,70	1,02	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	21,04	28,20	4,63
1,20	3,09	2,07	1,04
1,30	1,29	1,05	1,00
1,40	1,04	1,00	1,00
1,50	1,01	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.8: Valores de CMS para  $r_0 = 300$  e  $b = 1,0$  usando AR com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,8626; k_1 = 2,999$	$a = 0,8219; k_1 = 2,816$	$a = 0,8876; k_1 = 2,982$
$l$	$k_2 = 1,053$	$k_2 = 1,292$	$k_2 = 1,655$
1,00	300,08	300,10	300,46
0,95	330,83	297,89	288,19
0,90	256,98	188,23	164,72
0,80	77,12	42,91	33,82
0,70	16,49	8,18	6,57
0,60	3,34	1,92	1,75
0,50	1,23	1,07	1,06
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	138,75	116,04	101,32
1,20	57,20	37,69	30,36
1,30	25,38	13,86	10,98
1,40	12,32	5,94	4,82
1,50	6,57	3,04	2,60
1,60	3,87	1,89	1,71
1,70	2,54	1,41	1,33
1,80	1,85	1,19	1,16
2,00	1,28	1,05	1,04

Fonte: O autor.

Tabela A.9: Valores de CMS para  $r_0 = 200$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 2$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,8715; k_1 = 3,1052$	$a = 0,9082; k_1 = 2,6309$	$a = 1,052; k_1 = 2,753$
$l$	$k_2 = 2,274$	$k_2 = 2,1583$	$k_2 = 2,293$
1,00	200,51	200,45	200,03
0,95	40,53	34,95	23,02
0,90	9,39	5,43	3,46
0,80	1,57	1,16	1,06
0,70	1,03	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	92,04	9,56	7,38
1,20	8,69	1,62	1,37
1,30	2,55	1,07	1,03
1,40	1,45	1,01	1,00
1,50	1,15	1,00	1,00
1,60	1,06	1,00	1,00
1,70	1,02	1,00	1,00
1,80	1,01	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.10: Valores de CMS para  $r_0 = 200$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 3$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9168; k_1 = 3,1589$	$a = 0,8277; k_1 = 2,9305$	$a = 0,8245; k_1 = 2,8608$
$l$	$k_2 = 2,0147$	$k_2 = 2,0793$	$k_2 = 2,2700$
1,00	200,10	200,04	200,63
0,95	53,72	38,87	28,09
0,90	9,25	5,95	4,07
0,80	1,47	1,20	1,08
0,70	1,02	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	15,39	11,06	8,15
1,20	2,46	1,96	1,57
1,30	1,29	1,18	1,08
1,40	1,07	1,03	1,01
1,50	1,01	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.11: Valores de CMS para  $r_0 = 200$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 2$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,7047; k_1 = 3,1009$	$a = 0,5005; k_1 = 2,776$	$a = 0,5973; k_1 = 2,9372$
$l$	$k_2 = 2,0348$	$k_2 = 2,2928$	$k_2 = 2,0798$
1,00	200,31	200,33	200,11
0,95	141,11	158,92	119,92
0,90	82,03	89,76	55,09
0,80	23,12	21,37	10,90
0,70	7,04	5,69	3,04
0,60	2,72	2,14	1,43
0,50	1,46	1,25	1,07
0,30	1,01	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	177,34	112,03	123,30
1,20	83,88	44,88	35,02
1,30	37,06	19,91	11,97
1,40	18,01	10,13	5,36
1,50	9,88	5,86	3,03
1,60	6,06	3,80	2,05
1,70	4,09	2,71	1,58
1,80	3,00	2,10	1,33
2,00	1,93	1,49	1,12

Fonte: O autor.



Tabela A.12: Valores de CMS para  $r_0 = 200$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 3$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,5857; k_1 = 3,2646$	$a = 0,4968; k_1 = 3,2180$	$a = 0,6577; k_1 = 3,2667$
$l$	$k_2 = 1,8968$	$k_2 = 2,0611$	$k_2 = 2,0880$
1,00	200,30	200,35	200,37
0,95	163,71	188,00	172,47
0,90	103,29	114,44	87,65
0,80	28,78	24,64	14,91
0,70	8,07	5,78	3,56
0,60	2,94	2,11	1,55
0,50	1,54	1,25	1,10
0,30	1,01	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	132,24	79,44	67,60
1,20	54,35	25,03	18,03
1,30	23,09	9,93	6,67
1,40	11,38	5,01	3,37
1,50	6,50	3,06	2,16
1,60	4,20	2,17	1,62
1,70	3,00	1,71	1,36
1,80	2,32	1,45	1,21
2,00	1,65	1,20	1,07

Fonte: O autor.

Tabela A.13: Valores de CMS para  $r_0 = 300$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 2$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9011; k_1 = 2,9237$	$a = 0,8259; k_1 = 3,0402$	$a = 0,8764; k_1 = 3,1434$
$l$	$k_2 = 2,1616$	$k_2 = 2,1829$	$k_2 = 2,0833$
1,00	300,43	300,01	300,14
0,95	101,56	49,56	39,99
0,90	16,39	7,32	4,73
0,80	1,75	1,22	1,08
0,70	1,04	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	25,88	15,69	6,95
1,20	3,97	2,19	1,36
1,30	1,62	1,18	1,03
1,40	1,16	1,03	1,00
1,50	1,04	1,00	1,00
1,60	1,01	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.14: Valores de CMS para  $r_0 = 300$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 3$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9399; k_1 = 2,8851$	$a = 0,9061; k_1 = 2,9458$	$a = 0,8715; k_1 = 3,1052$
$l$	$k_2 = 2,4354$	$k_2 = 2,4725$	$k_2 = 2,2747$
1,00	300,08	300,18	300,31
0,95	177,20	71,51	31,72
0,90	33,14	8,99	4,35
0,80	2,67	1,30	1,09
0,70	1,14	1,01	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	18,78	14,05	9,74
1,20	3,09	2,22	1,55
1,30	1,45	1,21	1,06
1,40	1,11	1,03	1,00
1,50	1,02	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.15: Valores de CMS para  $r_0 = 300$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 2$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,7779; k_1 = 2,8447$	$a = 0,686; k_1 = 2,878$	$a = 0,760; k_1 = 3,217$
$l$	$k_2 = 2,3224$	$k_2 = 2,343$	$k_2 = 2,106$
1,00	300,64	300,48	300,07
0,95	281,10	254,43	222,02
0,90	199,49	144,78	104,21
0,80	69,29	32,54	17,39
0,70	21,26	7,84	3,99
0,60	6,78	2,59	1,60
0,50	2,60	1,35	1,09
0,30	1,05	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	155,87	144,13	117,16
1,20	60,30	53,87	29,73
1,30	25,85	22,95	10,00
1,40	12,86	11,33	4,55
1,50	7,32	6,39	2,64
1,60	4,68	4,05	1,84
1,70	3,29	2,84	1,46
1,80	2,49	2,17	1,26
2,00	1,71	1,51	1,09

Fonte: O autor.

Tabela A.16: Valores de CMS para  $r_0 = 300$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 3$  usando AEDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,6361; k_1 = 2,8845$	$a = 1,034; k_1 = 3,277$	$a = 0,4578; k_1 = 3,2946$
$l$	$k_2 = 2,4347$	$k_2 = 2,232$	$k_2 = 2,1573$
1,00	302,80	300,12	300,49
0,95	344,34	291,36	167,89
0,90	283,00	175,77	69,21
0,80	99,78	36,03	11,48
0,70	27,76	7,99	3,02
0,60	7,99	2,62	1,44
0,50	2,84	1,38	1,08
0,30	1,07	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	139,44	110,23	182,21
1,20	59,29	32,45	47,71
1,30	27,91	12,01	15,15
1,40	14,75	5,72	6,45
1,50	8,68	3,36	3,51
1,60	5,62	2,31	2,31
1,70	3,96	1,79	1,75
1,80	2,99	1,49	1,45
2,00	2,00	1,21	1,18

Fonte: O autor.

Tabela A.17: Valores de CMS para  $r_0 = 200$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 2$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,8872; k_1 = 2,6902$	$a = 0,9082; k_1 = 2,6309$	$a = 1,052; k_1 = 2,735$
$l$	$k_2 = 2,3124$	$k_2 = 2,1583$	$k_2 = 2,293$
1,00	200,13	200,73	200,18
0,95	85,89	42,85	67,55
0,90	20,60	8,34	11,08
0,80	2,32	1,20	1,23
0,70	1,06	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	24,38	19,34	7,66
1,20	4,56	2,40	1,47
1,30	1,69	1,13	1,03
1,40	1,15	1,01	1,00
1,50	1,03	1,00	1,00
1,60	1,01	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.18: Valores de CMS para  $r_0 = 200$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 3$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 1,026; k_1 = 2,667$	$a = 1,002; k_1 = 2,643$	$a = 0,8519; k_1 = 2,8346$
$l$	$k_2 = 2,318$	$k_2 = 2,163$	$k_2 = 2,2206$
1,00	200,16	200,08	200,11
0,95	71,31	76,64	28,02
0,90	19,36	14,17	5,27
0,80	2,47	1,40	1,11
0,70	1,10	1,01	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	26,20	10,65	21,69
1,20	4,13	1,66	2,23
1,30	1,53	1,05	1,10
1,40	1,10	1,00	1,01
1,50	1,02	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.19: Valores de CMS para  $r_0 = 200$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 2$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,8416; k_1 = 2,7268$	$a = 0,8219; k_1 = 2,7761$	$a = 0,9133; k_1 = 2,8105$
$l$	$k_2 = 2,0508$	$k_2 = 2,0048$	$k_2 = 2,1710$
1,00	200,07	200,78	201,87
0,95	165,44	142,33	204,08
0,90	114,23	83,85	128,24
0,80	44,59	25,75	33,17
0,70	16,72	7,87	8,55
0,60	6,33	2,58	2,49
0,50	2,53	1,26	1,20
0,30	1,03	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	147,22	146,60	74,06
1,20	72,39	58,96	26,00
1,30	36,19	24,91	11,08
1,40	19,65	11,75	5,54
1,50	11,50	6,14	3,19
1,60	7,18	3,56	2,10
1,70	4,76	2,32	1,57
1,80	3,35	1,71	1,31
2,00	1,97	1,22	1,09

Fonte: O autor.



Tabela A.20: Valores de CMS para  $r_0 = 200$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 3$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,8186; k_1 = 2,6604$	$a = 0,8218; k_1 = 2,7739$	$a = 0,9601; k_1 = 2,8764$
$l$	$k_2 = 2,1802$	$k_2 = 2,0238$	$k_2 = 2,0272$
1,00	200,21	200,19	200,91
0,95	188,68	141,91	256,11
0,90	140,09	83,46	187,55
0,80	55,46	25,33	46,54
0,70	20,10	7,54	9,84
0,60	7,26	2,47	2,35
0,50	2,75	1,25	1,14
0,30	1,04	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	120,38	145,61	63,93
1,20	57,78	57,97	22,43
1,30	29,76	24,07	9,58
1,40	16,89	11,13	4,81
1,50	10,40	5,75	2,81
1,60	6,85	3,35	1,91
1,70	4,79	2,22	1,48
1,80	3,52	1,66	1,26
2,00	2,20	1,21	1,08

Fonte: O autor.

Tabela A.21: Valores de CMS para  $r_0 = 300$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 2$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9334; k_1 = 2,8842$	$a = 0,929; k_1 = 2,926$	$a = 1,022; k_1 = 2,973$
$l$	$k_2 = 2,0064$	$k_2 = 2,238$	$k_2 = 2,462$
1,00	300,95	300,01	300,01
0,95	67,84	50,89	79,18
0,90	15,87	10,32	12,78
0,80	1,68	1,42	1,41
0,70	1,02	1,01	1,01
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	84,96	38,57	10,27
1,20	9,52	3,74	1,65
1,30	2,12	1,25	1,05
1,40	1,17	1,03	1,00
1,50	1,03	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.22: Valores de CMS para  $r_0 = 300$ ,  $b = 0,31$  e  $i = 3$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9336; k_1 = 2,9271$	$a = 0,9286; k_1 = 2,9344$	$a = 1,022; k_1 = 2,827$
$l$	$k_2 = 2,0798$	$k_2 = 2,0113$	$k_2 = 2,072$
1,00	300,07	302,39	300,07
0,95	68,49	50,74	74,59
0,90	17,00	9,37	9,93
0,80	2,11	1,23	1,12
0,70	1,06	1,00	1,00
0,60	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	1,00
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	84,74	34,42	8,55
1,20	9,03	2,65	1,27
1,30	2,04	1,11	1,01
1,40	1,16	1,01	1,00
1,50	1,03	1,00	1,00
1,60	1,00	1,00	1,00
1,70	1,00	1,00	1,00
1,80	1,00	1,00	1,00
2,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: O autor.

Tabela A.23: Valores de CMS para  $r_0 = 300$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 2$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,9334; k_1 = 2,9618$	$a = 0,7269; k_1 = 2,9315$	$a = 0,8744; k_1 = 2,8892$
$l$	$k_2 = 0,8589$	$k_2 = 2,1968$	$k_2 = 2,0144$
1,00	300,01	300,51	300,56
0,95	347,23	382,02	345,50
0,90	282,31	307,12	225,56
0,80	89,05	90,71	52,79
0,70	18,90	23,32	11,43
0,60	3,58	6,11	2,65
0,50	1,24	1,89	1,17
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	128,17	109,43	95,23
1,20	49,07	42,25	31,38
1,30	20,10	19,11	12,47
1,40	9,03	9,81	5,78
1,50	4,55	5,58	3,11
1,60	2,64	3,48	1,98
1,70	1,79	2,39	1,47
1,80	1,40	1,80	1,23
2,00	1,11	1,28	1,06

Fonte: O autor.

Tabela A.24: Valores de CMS para  $r_0 = 300$ ,  $b = 1,0$  e  $i = 3$  usando AREDM com base na distribuição Birnbaum-Saunders

	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
	$a = 0,8600; k_1 = 2,9271$	$a = 0,9286; k_1 = 2,9344$	$a = 1,022; k_1 = 2,827$
$l$	$k_2 = 2,0798$	$k_2 = 2,0113$	$k_2 = 2,072$
1,00	300,05	301,04	300,48
0,95	235,25	380,26	345,82
0,90	149,46	302,81	225,69
0,80	45,49	86,39	52,03
0,70	11,55	19,94	10,84
0,60	2,95	4,44	2,51
0,50	1,26	1,46	1,16
0,30	1,00	1,00	1,00
0,10	1,00	1,00	1,00
1,10	210,14	109,79	95,70
1,20	85,58	42,16	32,13
1,30	33,93	18,87	13,20
1,40	14,54	9,55	6,37
1,50	6,92	5,37	3,55
1,60	3,74	3,34	2,28
1,70	2,33	2,31	1,67
1,80	1,67	1,76	1,37
2,00	1,19	1,27	1,12

Fonte: O autor.

# Referências Bibliográficas

- Aldosari, M. S., Aslam, M., and Jun, C.-H. (2017). A new attribute control chart using multiple dependent state repetitive sampling. *IEEE Access*, 5:6192–6197.
- Andara, F. R. (2015). Avaliação de um processo de eletro galvanização por meio de modelagem estatística e cartas de controle. *Dissertação-UFSM, RS*.
- Aslam, M. (2017). Time truncated attribute control chart for the weibull distribution using multiple dependent state sampling. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 48(4):1219–1228.
- Aslam, M., Arif, O. H., and Jun, C.-H. (2016). An attribute control chart based on the birnbaum-saunders distribution using repetitive sampling. *IEEE Access*, 4:9350–9360.
- Aslam, M., Azam, M., and Jun, C.-H. (2014). New attributes and variables control charts under repetitive sampling. *Industrial Engineering & Management Systems*, 13(1):101–106.
- Aslam, M., Azam, M., Khan, N., and Jun, C.-H. (2015a). A control chart for an exponential distribution using multiple dependent state sampling. *Quality & Quantity*, 49(2):455–462.
- Aslam, M. and Jun, C.-H. (2015). Attribute control charts for the weibull distribution under truncated life tests. *Quality Engineering*, 27(3):283–288.
- Aslam, M., Jun, C.-H., and Ahmad, M. (2011). New acceptance sampling plans based on life tests for birnbaum-saunders distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(4):461–470.

- Aslam, M., Nazir, A., and Jun, C.-H. (2015b). A new attribute control chart using multiple dependent state sampling. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 37(4):569–576.
- Aslam, M., Shafqat, A., Rao, G. S., Malela-Majika, J.-C., and Shongwe, S. C. (2020). Multiple dependent state repetitive sampling-based control chart for birnbaum–saunders distribution. *Journal of Mathematics*, 2020:1–11.
- Balakrishnan, N., Leiva, V., and López, J. (2007). Acceptance sampling plans from truncated life tests based on the generalized birnbaum–saunders distribution. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*.
- Balamurali, S. & Jun, C.-H. (2007). Multiple dependent state sampling plans for lot acceptance based on measurement data. *European Journal of Operational Research*.
- Balamurali, S. and Jeyadurga, P. (2019). An attribute np control chart for monitoring mean life using multiple deferred state sampling based on truncated life tests. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 26(01):1950004.
- Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969a). Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of Applied probability*, 6(2):328–347.
- Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969b). A new family of life distributions. *Journal of applied probability*, 6(2):319–327.
- Bourguignon, M., Ho, L. L., and Fernandes, F. H. (2020). Control charts for monitoring the median parameter of birnbaum-saunders distribution. *Quality and Reliability Engineering International*, 36(4):1333–1363.
- Campos, J. C. (2011). Modelos de regressão log-birnbaum-saunders generalizados para dados com censura intervalar. *Dissertação-UFMG, Campina Grande*.
- Jeyadurga, P., Balamurali, S., and Aslam, M. (2018). Design of an attribute np control chart for process monitoring based on repetitive group sampling under truncated life tests. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(24):5934–5955.
- Leiva, V. (2016). The birnbaum-saunders distribution. (1 ed.). *Elsevier, Academic Press*.

- Leiva, V., Marchant, C., Ruggeri, F., and Saulo, H. (2015). A criterion for environmental assessment using birnbaum–saunders attribute control charts. *Environmetrics*, 26(7):463–476.
- Leiva, V., Marchant, C., Saulo, H., Aslam, M., and Rojas, F. (2014). Capability indices for birnbaum–saunders processes applied to electronic and food industries. *Journal of Applied Statistics*, 41(9):1881–1902.
- Lio, Y., Ng, H. K. T., Tsai, T.-R., and Chen, D.-G., editors (2019). *Statistical Quality Technologies*. Springer International Publishing.
- Lund, R. and Seymour, L. (1999). Assessing temperature anomalies for a geographical region: a control chart approach. *Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society*, 10(2):163–177.
- Manly, B. F. and Mackenzie, D. (2000). A cumulative sum type of method for environmental monitoring. *Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society*, 11(2):151–166.
- Montgomery, D. C. (2004). Introdução ao controle estatístico de qualidade, 4<sup>o</sup> edição. *Rio de Janeiro, RJ, LTC*.
- Muhammad Aslam, Saminathan Balamurali, J. P. N. K. (2019). Designing of an attribute control chart based on modified multiple dependent state sampling using accelerated life test under weibull distributio. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*.
- Wortham, A. W. and Baker, R. C. (1976). Multiple deferred state sampling inspection. *International Journal of Production Research*, 14(6):719–731.