Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Reticulados Distributivos de Subvariedades

por

Caio Antony Gomes de Matos Andrade

sob orientação de

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Campina Grande - PB
Fevereiro, 2021

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Caio Antony Gomes de Matos Andrade

Reticulados Distributivos de Subvariedades

Trabalho apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Campina Grande - PB, fevereiro de 2021
Curso de Mestrado em Matemática

Dedicatória

Em memória de Daniela Antony Gomes de Matos.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha mãe, Daniela Antony Gomes de Matos, por todos os anos de apoio, paciência e carinho que dedicou a mim, aos meus irmãos, nossos amigos e conhecidos. Tenho certeza que ela está muito feliz, de alguma forma.

Agradeço à minha família mais próxima Victor, Luluca, José Maria, Mãe Lu, e Gabriel, não só pela convivência, mas por mostrarem em tempos tão difíceis que conseguimos superar tudo. Agradeço também aos tios Evandro, Meire, Geórgia, Felipe, Paola, e minha avó Lúcia, por serem tão carinhosos que nem parecem que moram milhares de quilômetros daqui. Aos familiares que não compartilham meu sangue, Lula, Márcia, Laura, Joana, Paula, Eli que são queridos como se compartilhassem.

Agradeço ao meu orientador, Antônio Brandão, pelos 6 anos de trabalho que dividimos entre a minha graduação e mestrado, e pela compreensão com as dificuldades familiares que enfrentei no ano de 2020, à banca, por ter aceitado contribuir com esse trabalho, e à CAPES, por financiá-lo.

Agradeço à Ángel del Rio, Juan Jacobo, Àngel e Diogo por me receberem tão bem em Murcia, durante o começo do ano de 2020, por toda a contribuição que tiveram à minha formação, e por me proporcionarem a realização de um sonho - o qual espero poder repetir muitas vezes.

Agradeço aos professores, alunos e funcionários do departamento de matemática da UFCG, em particular aos membros e ex-membros do grupo PET-Matemática UFCG, em particular nosso tutor Daniel Cordeiro de Moraes Filho, por ser parte tão importante da minha formação, e ao grande Ismael Sandro da Silva, com quem dividi tantos trabalhos, biscoitos, e discussões produtivas e divertidas.

Agradeço aos colegas da álgebra, Geisa, Lucas, Laíse e Franciélia, por uma linda época da minha vida, aos demais colegas de mestrado por tantas alegrias que passamos, e aos companheiros de álgebra Felipe e Thiago, que me introduziram a esse mundo maravilhoso.

Agradeço aos professores Diogo e Claudemir, por tanta dedicação à formação dos alunos de álgebra da UFCG.

Agradeço às amigas Renata, Leticia e Sandra, por terem feito de mim parte de sua família durante o período mais difícil da minha vida.

Agradeço à Ana, cujo presente de aniversário me levou ao louco mundo da jardinagem, que hoje é meu hobby favorito, uma fonte inesgotável de alegria na minha vida.

Agradeço à Edyvania, amiga querida que sempre escolhe as melhores palavras pra me ajudar em um momento de ansiedade, e com quem gosto tanto de compartilhar as alegrias dos meus dias.

Agradeço aos amigos Neto, Ney, Cleribardo, o Gato e Jorge, pelas aventuras ceifando dragões pela costa da Espada, que tanto me fazem bem.

Agradeço à Julia Jaccoud, que me faz gostar cada vez mais de matemática, e cujas videochamadas me enchem de forças.

Agradeço à Nica, pessoa particularmente inspiradora, com quem dividi algumas das conversas mais legais que tive nessa vida.

Agradeço ao Santos Futebol Clube, por ter chegado à final da libertadores de 2020-2021, e quem sabe, já terem sido campeões no momento da apresentação desse trabalho.

Agradeço finalmente aos grandes amigos que essa vida me deu, e à cada pequeno gesto de carinho que eles me fizeram, sem os quais jamais teria conseguido concluir esse trabalho.

Obrigado!

Resumo

O conjunto das subvariedades de uma variedade de álgebras, munido da ordem de inclusão, é um reticulado. Neste trabalho, apresentaremos uma caracterização, via identidades polinomiais, de distributividade em reticulados de subvariedades de álgebras associativas e alternativas, apresentadas originalmente em [1] e [14]. Mais precisamente, mostraremos que um reticulado deste tipo é distributivo se, e somente se, a variedade satisfaz certas identidades polinomiais.

Palavras chave: Identidades, variedades de álgebras, distributividade.

Abstract

The set composed by the subvarieties of a variety of algebras, with the inclusion as an order, is a lattice. In this work, we will provide a charterization, using polynomial identities, of distributivity in lattices of subvarieties of associative and alternative algebras, presented originally in [1] and [14]. More precisely, we'll show that such lattices are distributive if, and only if, the variety satisfies certain polinomial identities.

Key words: Identities, varieties of algebras, distributivity.

Sumário

Introdução

Meus argumentos de teoria dos reticulados pareciam tão mais bonitos, e traziam de forma tão mais vívida a essência das considerações envolvidas, que eles eram obviamente as provas 'certas' a se usar

- Garret Birkhoff.

Um reticulado é um conjunto ordenado $(R, \leq)$ onde, para quaisquer $x, y \in R$, existem supremo e ínfimo do conjunto $\{x, y\}$. Uma definição tão simples sugere que reticulados existem naturalmente nas mais diversas áreas da matemática. De fato, qual estudo você conhece que não envolve um conjunto de conjuntos, ordenados pela inclusão? Esse é o exemplo mais simples de reticulado.

A origem da teoria dos reticulados se deu no século XIX, quando George Boole tentou formalizar a lógica proposicional de maneira algébrica. De fato, o conjunto de todas as proposições lógicas, munido da ordem de 'implicação', forma um reticulado, cujo supremo e ínfimo aparecem como os operadores lógicos 'ou' e 'e', respectivamente. Tal reticulado possui algumas propriedades importantes que não seguem da definição: há uma lei distributiva entre 'e' e 'ou', e toda proposição tem uma negação (algo semelhante ao conceito de complemento de conjuntos). Um reticulado que satisfaz essas propriedades ficou conhecido como Álgebra de Boole. A propriedade de distributividade se mostrou particularmente interessante. Reticulados que satisfazem essa propriedade foram chamados de reticulados *distributivos*, e seu estudo se mostrou historicamente o mais importante e satisfatório da teoria.

Ainda no fim do século XIX, Charles S. Peirce e Ernst Schröder introduziram o conceito de reticulados, e com o passar dos anos, outros reticulados foram estudados nas mais diversas áreas da matemática. Richard Dedekind estudou estruturas chamadas "grupos duais", que são módulos de anéis com as operações de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum (que nada mais são do que supremos e ínfimos). Tais reticulados satisfaziam uma propriedade mais fraca do que a distributividade, também importantíssima, a qual ficou conhecida como *modularidade.* Karl Menger trabalhou em um conjunto de axiomas caracterizando geometrias projetivas, que também formam um reticulado.

Um dos entusiastas da teoria de reticulados foi Garret Birkhoff, cujo interesse surgiu do fato de que subgrupos de um grupo, ordenados pela inclusão, formam um reticulado.

"Eu havia pensado muito sobre subgrupos e subgrupos normais de grupos, e sobre os artigos de Remak sobre estruturas de grupos. Tendo lido van der Waerden e Remak, fui convencido da importância dos reticulados para o entendimento de grupos."

- Garrett Birkhoff.

E sobre reticulados de subgrupos muitos resultados interessantes apareceram ao longo dos anos. A distributividade entre o supremo e o ínfimo, identificada nas álgebras de grupo, foi caracterizada em reticulados de subgrupos por Oystein Ore.

Teorema 0.1. ***(Teorema de Ore)*** *Dado um grupo G, o reticulado de subgrupos de G é distributivo se, e somente se, G é localmente cíclico.*

Naturalmente, tentou-se obter teoremas análogos para reticulados de subestruturas de outros objetos importantes. Em particular, para os reticulados de subvariedades de uma determinada variedade de álgebras (cuja ordem é a inclusão).

Para entender o que são subvariedades, primeiro é necessário falar de identidades polinomiais. Uma identidade polinomial $p(x_1, \cdots, x_n)$ para uma álgebra A (sobre um certo corpo K) é um polinômio (à princípio não associativo e não comutativo) tal que $p(a_1, \cdots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in A$. Dado um certo conjunto S de polinômios, o conjunto de todas as K-álgebras para as quais todos polinômios de S são identidades polinomiais é dito uma *variedade de álgebras.* Por exemplo, o conjunto de todas as álgebras comutativas, as quais são as álgebras que têm o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ com identidade, é uma variedade de álgebras. Também o conjunto de todas as álgebras associativas, as quais são as álgebras que têm o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$ como identidade, é uma variedade de álgebras. O conjunto de todas as subvariedades de uma certa variedade, munido da inclusão, é um reticulado.

O estudo de identidades polinomiais surgiu primeiramente nos trabalhos de Dehn [7] e Wagner [17], mas somente décadas depois, após a publicação de um artigo por Kaplansky [11], que se despertou o interesse geral no seu estudo. Desde então, tem sido uma fonte frutífera de pesquisa. Para o leitor que deseja se aprofundar nesse estudo, recomendamos [9], [8], [16].

Dada uma K-álgebra A, o conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais de A é um ideal *especial* da K-álgebra dos polinômios, chamado de *T-ideal da álgebra A*. O conjunto de todos os T-ideais da K-álgebra dos polinômios, munido da inclusão, é um reticulado. Existe uma relação entre reticulados de T-ideais e reticulados de subvariedades, e esta relação permite caracterizar distributividade em reticulados de subvariedades através da caracterização de distributividade en reticulados de T-ideais. Essas ideias, apresentadas aqui a título de motivação, serão detalhadas nos Capíulos *1* e *2* deste trabalho.

O presente trabalho está desenvolvido em quatro capítulos, sendo o primeiro destinado a apresentar conceitos e resultados básicos necessários ao entendimento dos principais resultados, os quais aparecerão nos dois últimos capítulos. No Capítulo *2*, caracterizaremos distributividade em reticulados de subvariedades em função da decomposição de módulos de identidades multilineares em submódulos irredutíveis. Muitos desses resultados podem ser encontrados em [2], mas os métodos utilizados fugiam do escopo deste trabalho, o que nos levou a construir nossas próprias demonstrações. Os Capítulos *3* e *4* mostram respectivamente os resultados apresentados nos artigos [1] e [14]. Em [1], vemos os estudos de A. Z. Anan'in, A. R. Kemer, que em 1974 caracterizaram essa distributividade em reticulados de subvariedades de álgebras associativas, enquanto em [14], V. D. Martirosyan em 1982 estendeu esse resultado para álgebras alternativas, isto é, álgebras onde o operador associador é antissimétrico. Em ambos os artigos, a caracterização de distributividade nos reticulados de subvariedades é mostrada através da caracterização de distributividade em reticulados de T-ideais. Basicamente, os resultados que mostram essas caracterizações dizem que o reticulado de subvariedades de uma certa variedade de álgebras é distributivo se, e somente se, todas as álgebras da variedades satisfazem certas identidades polinomiais.

Capítulo 1

Conceitos prévios

1.1 Álgebras e identidades polinomiais

1.1.1 Álgebras

Começaremos introduzindo o conceito de álgebras. Pelo resto desse texto, K será um corpo.

Definição 1.1. Uma **álgebra** $(A, *)$ sobre o corpo K, ou simplesmente K-**álgebra**, é um par onde A é um K-espaço vetorial e $*$ é uma operação binária em A que satisfaz as propriedades:

1. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$;
2. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$;
3. $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$,

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Chamamos $*$ de multiplicação. Por simplicidade de notação, denotaremos $(A, *)$ simplesmente por A quando estiver claro qual é a operação de multiplicação, além de denotar $a * b$ por ab. Definimos em uma álgebra A os elementos

$$[x, y] = xy - yx \quad \text{e} \quad (x, y, z) = (xy)z - x(yz)$$

para x, y, $z \in A$, os quais se chamam comutador e associador, respectivamente.

Uma álgebra A é dita:

1. **Unitária** se a multiplicação possui elemento neutro, isto é, se existe $1_A \in A$ tal que

$$1_A a = a 1_A = a,$$

para todo $a \in A$;

2. **Comutativa** se $[a,b] = 0$, isto é, $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$;

3. **Associativa** se $(a,b,c) = 0$, ou seja, $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$. Neste caso, denotamos

$$abc = (ab)c = a(bc);$$

4. **Alternativa** se valem

$$(a,a,b) = (a,b,b) = 0,$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Observe que toda álgebra associativa é alternativa, mas uma álgebra alternativa não precisa ser associativa. A motivação por trás do nome "álgebras alternativas" se dá porque, nessas condições, o associador $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$ é uma função antissimétrica, como será mostrado nos capítulos seguintes. O estudo dessas álgebras começou com o importante exemplo dos octônions (que será visto mais adiante), dado por Arthur Cayley, mas se impulsionou com a descoberta de conexões entre as álgebras alternativas e a teoria de planos projetivos.

Existem várias outras classes importantes de álgebras não associativas, como por exemplo as álgebras de Lie e as álgebras de Jordan, que não serão estudadas nesse texto.

Observação 1.2. *Se A é uma álgebra associativa e $x, y, z \in A$, então*

$$[xy, z] = xyz - zxy = xyz - xzy + xzy - zxy = x[y,z] + [x,z]y.$$

Tal propriedade é conhecida como ***derivação****.*

Observação 1.3. *Se A é um espaço vetorial, β é uma base de A e $f : \beta \times \beta \longmapsto A$ é uma aplicação qualquer, então existe uma única aplicação bilinear $F : A \times A \longmapsto A$ estendendo f. Assim, a multiplicação de uma álgebra é unicamente determinada pela forma como se comporta em uma base (do espaço vetorial) fixada da mesma. Uma vez que os operadores comutador e associador são bilinear e trilinear, respectivamente, observamos que as propriedades de comutatividade, associatividade podem ser verificadas apenas em numa base fixada. Com os resultados que mostraremos na Subseção 1.1.4, a definição de alternatividade é equivalente à serem satisfeitas certas identidades multilineares, de onde tal propriedade também pode ser verificada apenas em uma base fixada.*

Exemplo 1.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$. O K-espaço vetorial $M_n(K)$ é, com a operação usual de produto de matrizes, uma álgebra associativa e unitária, mas não comutativa (para $n \geq 2$).*

Exemplo 1.5. *Seja V um espaço vetorial de base $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$. Definimos a **álgebra de Grassmann** (ou álgebra exterior) de V, denotada por $E(V)$ (ou simplesmente E), como sendo a álgebra associativa e unitária com base*

$$\{1_E, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k};\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ k \geq 1\}$$

cuja multiplicação dos elementos da base é dada pela justaposição, obedecendo as relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Observe que

$$(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k})(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m}) \quad (1.1.1)$$

Exemplo 1.6. *Sejam K um corpo e G um grupo multiplicativo, e considere o conjunto KG de todas as somas formais $\sum_{g\in G}\alpha_g g$, onde $\alpha_g = 0$ a menos de uma quantidade finita de elementos $g \in G$. Considerando em KG as operações*

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g + \sum_{g\in G}\beta_g g = \sum_{g\in G}(\alpha_g + \beta_g)g,$$

$$\lambda\sum_{g\in G}\alpha_g g = \sum_{g\in G}(\lambda\alpha_g)g,$$

para $\sum_{g\in G}\alpha_g g, \sum_{g\in G}\beta_g g \in KG$ e $\lambda \in K$, vemos que KG é um K-espaço vetorial, do qual G é uma base. Ademais, conforme a Observação 1.3, podemos estender a multiplicação de G para KG, obtendo

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{g\in G}\beta_g g\right) = \sum_{g,h\in G}(\alpha_g\beta_h)gh,$$

$$\sum_{g\in G}\left(\sum_{hk=g}\alpha_h\beta_k\right)g.$$

Exemplo 1.7. *Considere $\mathbb{O}$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial gerado livremente pelos elementos $\{1 = e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, nos quais definiremos uma multiplicação de forma que $1 = e_0$ é a identidade, e*

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Chamamos $\mathbb{O}$ de álgebra dos octônions. Podemos reconstruir sua tábua de multiplicação com as seguintes propriedades:

1. $e_1, \ldots, e_7$ *são raízes quadradas de* -1*;*

2. *vale a anticomutatividade para* e_i *e* e_j *tais que* $i \neq 0$*, isto é*

$$e_i e_j = -e_j e_i$$

3. *vendo os índices da base como elementos de* $\mathbb{Z}_7$*, vale a identidade de ciclicidade dos índices:*

$$e_i e_j = e_k \implies e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1};$$

4. *vale a identidade de dobra do índice:*

$$e_i e_j = e_k \implies e_{2i} e_{2j} = e_{2k};$$

5. $e_1 e_2 = e_4$.

Os octônions formam uma álgebra não associativa, pois,

$$(e_1 e_2) e_5 = e_7 \quad e \quad e_1(e_2 e_5) = -e_7.$$

Dado um octônion $x = x_0 + \sum x_i e_i \in \mathbb{O}$*, podemos definir o conjugado de* x *como* $x^* = x_0 - \sum x_i e_i$*. Observe que*

$$xx^* = x^* x = \sum_{i=0}^{7} x_i^2.$$

Uma importante propriedade dos octônions é a existência de uma norma, a qual é definida por

$$||x|| = \sqrt{xx^*} = \sqrt{\sum_{i=0}^{7} x_i^2}$$

e possui a importante propriedade de que $||xy|| = ||x||||y||$ *(ver [6], Capítulo 6, Teorema 1). Uma álgebra que satisfaz essa propriedade é dita uma álgebra de composição, o que por [16], Lema 1 da seção 2.1 faz da mesma uma álgebra alternativa. Os octônions são também uma álgebra com divisão. O inverso do octônion* x *é dado por*

$$x^{-1} = \frac{x^*}{||x||^2}.$$

Recomendamos [3] para leitores que procuram saber mais sobre a história, propriedades e construção dos octônions.

Definição 1.8. Seja A uma álgebra. Dizemos que:

1. Um subespaço vetorial B de A é uma **subálgebra** de A se $b_1b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$.

2. Um subespaço vetorial I de A é um **ideal à direita** (resp. **à esquerda**) de A se $xa \in I$ (resp. $ax \in I$) para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.

3. Um subespaço vetorial I de A é um **ideal (bilateral)** de A se I é um ideal à esquerda e à direita de A.

Definição 1.9. Seja A uma álgebra arbitrária. Definimos o **centro associativo** $N(A)$**, o centro comutativo** $K(A)$ **e o centro** $Z(A)$, respectivamente, como

$$N(A) = \{a \in A; (a, A, A) = (A, a, A) = (A, A, a) = \{0\}\};$$

$$K(A) = \{b \in A; [b, A] = \{0\}\};$$
$$Z(A) = N(A) \cap K(A).$$

Exemplo 1.10. *Destacamos na álgebra de Grassmann E os subespaços vetoriais E_0, gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m}; m$ é par$\}$, e E_1, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}; k$ é ímpar$\}$. Temos que $E = E_0 \oplus E_1$. Observe que E_0 é uma subálgebra, mas não E_1. Segue da Equação 1.1.1 que E_0 é central, no sentido que $E_0 \subseteq Z(E)$. Mostra-se que se a característica do corpo K é diferente de 2, então $E_0 = Z(E)$.*

Exemplo 1.11. *Sejam A uma álgebra e $S \subseteq A$. Sendo $\Omega_S = \{B \subseteq A; B$ é subálgebra e $S \subseteq B\}$, chamamos de subálgebra de A gerada por S a subálgebra*

$$B_S = \bigcap_{B\in\Omega_S} B.$$

A mesma construção pode ser feita com $\Delta_S = \{I \subseteq A; I$ é ideal, $S \subseteq I\}$ para obter o ideal gerado por S:

$$I_S = \bigcap_{I\in\Delta_S} I.$$

Definição 1.12. Sejam A e B K-álgebras. Uma aplicação $\varphi : A \longrightarrow B$ é dita um **homomorfismo de álgebras** se φ é uma aplicação K-linear e $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para quaisquer a, $b \in A$. Se φ é bijetora, dizemos que φ é um isomorfismo, que A é isomorfa a B, e denotamos $A \simeq B$. Um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A$ é dito um endomorfismo.

Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Então o núcleo de φ

$$\ker \varphi = \{x \in A;\ \varphi(x) = 0\}$$

é um ideal de A e a imagem de φ

$$Im\varphi = \{y \in B; y = \varphi(x), \text{ para algum } x \in A\}$$

é uma subálgebra de B.

Exemplo 1.13. *Se A é uma K-álgebra e I é um ideal de A, o conjunto*

$$\frac{A}{I} = \{a + I; a \in A\}$$

(onde $a + I = \{a + x;\ x \in I\}$) com as operações

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \quad (a + I)(b + I) = (ab) + I$$

$$\lambda(a + I) = (\lambda a) + I \quad (\lambda \in K)$$

é uma álgebra, chamada ***álgebra quociente de*** *A* ***por*** *I. Ademais, se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, então*

$$\frac{A}{\ker \varphi} \simeq Im\varphi.$$

Destacamos para I um ideal de uma álgebra A o homomorfismo canônico

$$\pi : A \longrightarrow \frac{A}{I}$$

tal que $\pi(a) = a + I$.

1.1.2 Álgebras Livres, Identidades Polinomiais, T-ideais e Variedades

Fixado um conjunto infinito e enumerável $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, cujos elementos chamaremos de variáveis, adjuntemos a X os símbolos de parênteses à esquerda e à direita, obtendo o conjunto $X^* = X \cup \{(,)\}$. Considere Y o conjunto de todas as sequências finitas em X^*, onde duas sequências $a_1a_2 \ldots a_m$ e $b_1b_2 \ldots b_n$ são iguais se, e somente se, $m = n$ e $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Definimos indutivamente o subconjunto $V\{X\}$ de Y, cujos elementos chamaremos de **palavras não associativas no conjunto** X, da seguinte forma:

1. todos os elementos de X pertencem a $V\{X\}$;

2. Se $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V\{X\} - X$, então as sequências $x_1x_2, x_1(u), (v)x_2$ e $(u)(v)$ também pertencem ao conjunto $V\{X\}$.

Mostra-se indutivamente que todo elemento em $a_1a_2 \dots a_n \in V\{X\}$ tem o mesmo número de parênteses à esquerda e à direita, e que se $m \leq n$, e $a_1a_2 \dots a_m \in V\{X\}$ é uma palavra formada pelos m primeiros termos de $a_1a_2 \dots a_n$, então o número de parênteses à esquerda em $a_1a_2 \dots a_m$ é maior ou igual ao de parênteses à direita.

Podemos então definir em $V\{X\}$ um produto da seguinte forma: se $x_1, x_2 \in X$, $u \in v \in V\{X\} - X$, definimos

$$x_1 \cdot x_2 = x_1x_2, \qquad x_1 \cdot u = x_1(u),$$

$$v \cdot x_2 = (v)x_2, \qquad u \cdot v = (u)(v).$$

Proposição 1.14. *Toda palavra não associativa $v \in V\{X\} - X$ pode ser escrita de maneira única como produto de palavras formadas por menos elementos que v.*

Demonstração. Ver [16], Proposição 2, Capítulo 1. □

Podemos então definir a **álgebra absolutamente livre sobre K com conjunto de geradores livres** X, ou simplesmente álgebra absolutamente livre, denotada por $K\{X\}$, como sendo o K-espaço de base $V\{X\}$, cuja multiplicação estendida de $V\{X\}$ tem a regra

$$\left(\sum_i \alpha_i u_i\right)\left(\sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j u_i \cdot v_j.$$

Os elementos de $K\{X\}$ são chamados *polinômios não associativos nos elementos de X*.

A álgebra $K\{X\}$ possui a seguinte propriedade universal.

Teorema 1.15. *Sejam A uma K-álgebra arbitrária e $\theta : X \longrightarrow A$ uma função. Então, existe um único homomorfismo de álgebras de $K\{X\}$ em A que estende θ.*

Demonstração. Ver [16], Capítulo 1, Teorema 1. □

Sejam A uma K-álgebra arbitrária e $a_n \in A$, para $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema acima, existe um único homomorfismo $\varphi : K\{X\} \longrightarrow A$ que leva x_i em a_i, para todo $i \in \mathbb{N}$, o qual chamaremos homomorfismo avaliação em $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Denotamos a imagem de $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\{X\}$ pelo homomorfismo φ por $f(a_1, ..., a_n)$.

Definição 1.16. Um polinômio não associativo $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\{X\}$ é dito uma **identidade polinomial para a álgebra** A se $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. O conjunto de todas as identidades polinomiais para uma álgebra A é dito **T-ideal da álgebra** A e é denotado por $T(A)$.

Observação 1.17. *Se $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial para alguma álgebra A, e $g_1, \ldots, g_n \in K\{X\}$, então $f(g_1, \ldots, g_n)$ também é uma identidade polinomial para A. Como, pela propriedade universal, existe um endomorfismo de $K\{X\}$ mapeando x_i em g_i, segue então que $\varphi(T(A)) \subseteq T(A)$, para todo endomorfismo φ de $K\{X\}$.*

Nesse sentido, chamamos de **T-ideal** um ideal I de $K\{X\}$ que é fechado a endomorfismos (isto é, se $f \in I$, então $\varphi(f) \in I$ para todo $\varphi : K\{X\} \longrightarrow K\{X\}$ homomorfismo de álgebras). Ainda, se $S \subseteq K\{X\}$ é um conjunto qualquer, chamamos de **T-ideal de $K\{X\}$ gerado por** S, denotado por S^T (ou $T(S)$), como sendo o ideal de $K\{X\}$ gerado por todos os elementos da forma $f(g_1, \ldots, g_n)$, onde $f \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\{X\}$. Se $f, p \in K\{X\}$ e $p \in \{f\}^T$, dizemos que p é **consequência** de f.

Exemplo 1.18. *Se A é uma álgebra associativa, então o associador (x, y, z) é uma identidade polinomial para A, e se A_1 é uma álgebra alternativa, então os associadores (x, x, y) e (x, y, y) são identidades polinomiais para A_1.*

Exemplo 1.19. *A álgebra de Grassmann, definida no Eexemplo 1.5, satisfaz a identidade polinomial*

$$[[x, y], z] = 0.$$

Com efeito, sendo $a, b \in E$, com $a = a_0 + a_1$, $b = b_0 + b_1$, a_0, $b_0 \in E_0$ e a_1, $b_1 \in E_1$, temos

$$[a_0 + a_1, b_0 + b_1] = [a_0, b_0] + [a_0, b_1] + [a_1, b_0] + [a_1, b_1] = [a_1, b_1],$$

onde a última igualdade se dá pelo fato de que E_0 está contido no centro comutativo de E. Ademais, como $[a_1, b_1] \in E_0$ é também central, temos que

$$[[a, b], c] = [[a_1, b_1], c] = 0$$

para qualquer $c \in E$, o que mostra o resultado.

Definição 1.20. Seja S um subconjunto de $K\{X\}$. A classe V de todas as K-álgebras para as quais todos os elementos de S são identidades polinomiais é chamada **variedade de K-álgebras** determinada por S. O conjunto das identidades que são satisfeitas por todas as K-álgebras de V é denotado por $T(V)$, e é chamado *T-ideal da variedade V*.

Estudaremos particularmente as álgebras associativas e alternativas, cujas variedades são definidas pelos conjuntos $\{(x, y, z)\}$ e $\{(x, x, y), (x, y, y)\}$, respectivamente.

Assim como existem as álgebras absolutamentes livre, existem também as álgebras associativas livres e as álgebras alternativas livres. Em verdade, para qualquer variedade V de K-álgebras fixada, existe uma álgebra livre naquela variedade, no sentido do Teorema 1.15. Uma álgebra F é dita **livre na variedade V com o conjunto de geradores livres** Y se toda aplicação de Y em uma álgebra A de V pode ser estendida unicamente a um homomorfismo de F em A.

Teorema 1.21. *Seja V uma variedade não trivial de K-álgebras definida pelo conjunto de identidades I. Então, para qualquer conjunto de variáveis Y (ou seja, $Y \subseteq X$), a restrição a Y do homomorfismo canônico $\sigma : K\{X\} \longrightarrow \dfrac{K\{X\}}{I^T}$ é injetiva e a álgebra quociente*

$$K\sigma(Y) = \frac{K\{X\}}{I^T}$$

é livre na variedade V com conjunto de geradores livres $\sigma(Y)$.

Demonstração. Ver [16], Capítulo 1, Teorema 2. □

Podemos ainda mostrar uma forte relação entre o conceito de variedades e o de T-ideais.

Teorema 1.22. *Existe uma correspondência biunívoca entre T-ideais de $K\{X\}$ e variedades de álgebras. Nessa correspondência, uma variedade V corresponde ao T ideal de identidades $T(V)$ e um T-ideal I corresponde à variedade de todas as álgebras satisfazendo as identidades de I. Ademais, nessa correspondência,*

$$V_1 \subseteq V_2 \iff T(V_2) \subseteq T(V_1).$$

Demonstração. Considere a aplicação Φ que leva um T-ideal T na variedade $\Phi(T) = V$ de todas as álgebras que satisfazem as identidades polinomiais de T (isto é, $T(V) = T$). Tal aplicação é sobrejetiva no conjunto de todas as variedades de álgebras, uma vez que toda variedade tem um T-ideal. Ademais, se $T_1 \neq T_2$ são T-ideais, então $T_1 - T_2$ ou $T_2 - T_1$ é não vazio. Suponhamos sem perda de generalidade que $T_1 - T_2$ é não vazio, e tomemos $f \in T_1 - T_2$. Temos que f é identidade polinomial para $\Phi(T_1)$, mas não para a álgebra $K\{X\}/T_2 \in \Phi(T_2)$. Assim, $\Phi(T_1) \neq \Phi(T_2)$, o que mostra a injetividade da aplicação. É fácil ver que

$$T_1 \subseteq T_2 \iff \Phi(T_2) \subseteq \Phi(T_1),$$

o que mostra a correspondência. $\square$

No decorrer deste trabalho, usaremos as álgebras livres tanto na variedade das álgebras alternativas quanto na variedade das álgebras associativas. É possível construir uma álgebra livre nessas variedades com o método apresentado no Teorema 1.21, e no caso da álgebra associativa livre, é possível também fazer uma construção mais direta.

Exemplo 1.23. *Considere F um corpo e $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. A álgebra $F\langle X\rangle$ dos polinômios não comutativos e associativos em X é chamada **álgebra associativa livre**. Observe que se A é uma álgebra associativa, e $m : X \longrightarrow A$ é uma aplicação, então existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : F\langle X\rangle \longrightarrow A$ que estende m, coincidindo assim com o conceito de álgebra livre apresentado anteriormente.*

1.1.3 Polinômios homogêneos e multilineares

Alguns tipos especiais de identidades polinomiais são as homogêneas e multilineares. Identidades multilineares de um grau n fixado nos serão de extrema importância, pois as mesmas formam as estruturas cujos reticulados iremos estudar.

Definição 1.24. Seja $\alpha v \in K\{X\}$ um monômio, com $\alpha \in K$ e $v \in V\{X\}$. Dizemos que αv possui **multigrau** $(n_1, n_2, ..., n_k)$ se x_i aparece exatamente n_i vezes na palavra v, para $1 \leq i \leq k$, e x_j não aparece em v, para todo $j > k$. Nessas condições, dizemos que o grau de αv na variável x_i é n_i.

Exemplo 1.25. *O monômio $\alpha v = \alpha((x_1x_2)x_2)(x_1x_4)$ tem multigrau $(2, 2, 0, 1)$. O grau de αv em x_3 é 0.*

Definição 1.26. Sendo $f(x) \in K\{X\}$ um polinômio, dizemos que $f(x)$ é **homogêneo** (ou multihomogêneo) se $f(x)$ pode ser escrito como uma soma de monômios de um mesmo multigrau fixado.

Exemplo 1.27. *O polinômio $(x_2x_3)x_2 - x_2(x_2x_3)$ é homogêneo de multigrau $(0, 2, 1)$. O polinômio $(x_2x_3)x_2 - x_2(x_2x_3) + x_2(x_3x_3)$ não é homogêneo.*

Consideremos $K^{(n_1,\ldots,n_k)}\{X\}$ o K-subespaço de $K\{X\}$ gerado pelos monômios de multigrau $(n_1, ..., n_k)$, isto é, o K-subespaço dos polinômios homogêneos de multigrau $(n_1, ..., n_k)$. Uma vez que $K\{X\}$ é livremente gerada pelo conjunto $V\{X\}$, e todo elemento de $V\{X\}$ tem um e somente um multigrau, segue que

$$K\{X\} = \bigoplus K^{(n_1,\ldots,n_k)}\{X\},$$

onde a soma direta percorre, para cada $n \in \mathbb{N}$, todos os multigraus $(n_1, \ldots, n_k)$ tais que $n_1 + \cdots + n_k = n$. Assim, se $f \in K\{X\}$, f pode ser escrito unicamente como soma de polinômios homogêneos. Chamamos tais polinômios homogêneos de **componentes homogêneas de** f.

Teorema 1.28. *Sejam K um corpo de característica zero e $f \in K\{X\}$ uma identidade para a K-álgebra A. Então, toda componente homogênea da identidade f é também uma identidade da álgebra A.*

Demonstração. Ver [16], Capítulo 1, Teorema 3 e seu Corolário 2. □

Definição 1.29. Um polinômio f é **linear** na variável x_i se x_i ocorre com grau 1 em todo monômio de f. Um polinômio que é linear em todas as suas variáveis é dito **multilinear**. Denotaremos por P_n o conjunto de todos os polinômios multilineares em $K\{X\}$ nas variáveis x_1, x_2, $\ldots$, x_n, chamados polinômios multilineares de grau n.

Teorema 1.30. *Se K é um corpo de característica 0 e A é uma álgebra A que satisfaz uma identidade polinomial de grau k, então A satisfaz uma identidade polinomial multilinear de grau menor ou igual a k.*

Demonstração. Suponha que $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial para A. Se f é multilinear, o problema está resolvido. Caso contrário, suponha sem perda de generalidade que o grau de x_1 em f é $d > 1$. O polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= f(y_1 + y_2, \ldots, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n)$$

ainda é uma identidade polinomial para A. Mostremos que h não é o polinômio nulo. Supondo que $h = 0$, então

$$h(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(2x_1, x_2, \ldots, x_n) - 2f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

E se decompormos $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$, onde f_k é a soma de todos os monômios de grau k em x_1, então segue da igualdade acima que

$$-f_0 + (2^2 - 2)f_2 + \cdots + (2^d - 2)f_d = 0$$

o que contradiz $d > 1$ (observe que $char K = 0 \neq 2$). Assim, h não é o polinômio nulo. Uma vez que o grau de h em y_1 e em y_2 é $d - 1$, o resultado vale por indução. □

Observação 1.31. *Na prática, se K é um corpo infinito e $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\{X\}$ é um uma identidade polinomial multihomogênea e que possui grau m em x_1. Se em cada monômio de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ substituirmos a primeira variável x_1 (da esquerda pra direita) por y_1, a segunda variável x_1 por y_2, e assim por diante, obteremos um polinômio $f_1(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_n)$. Definindo então $g(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_n)$ tal que*

$$g(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_m} f_1(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(m)}, x_2, \ldots, x_n),$$

*mostra-se que $g(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_n)$ é uma componente homogênea do polinômio $f(y_1 + \cdots + y_n, x_2, \ldots, x_n)$. Assim, segue do Teorema 1.28 que $g(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_n)$ é também uma identidade polinomial. Caso apliquemos esse método para todas as variáveis em que f tem grau > 1, obtemos uma identidade multilinear, a qual chamamos de **linearização (ou multilinearização) de** f, denotada por $lin(f)$.*

Exemplo 1.32. *Sabemos que $(x, x, z) = 0$ é uma identidade polinomial para álgebras alternativas. Aplicando o processo de linearização em tal polinômio, obtemos que*

$$(x, y, z) + (y, x, z) = 0$$

é também uma identidade polinomial para álgebras alternativas.

1.1.4 Álgebras Alternativas

Nesta seção, consideraremos $charK = 0$. Começamos recordando que uma álgebra A é dita alternativa quando vale

$$(a, a, b) = (a, b, b) = 0,$$

para quaisquer $a, b \in A$. Segue do Exemplo 1.32 que

$$0 = (x, y, z) + (y, x, z)$$

e analogamente, $(x, y, z) = -(x, z, y)$. De posse de tais identidades, é fácil ver que na classe das álgebras alternativas, o associador é um operador antissimétrico, ou seja,

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1)^{\sigma}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

para toda $\sigma \in S_3$, onde $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação σ.

Exemplo 1.33. *O principal exemplo de álgebra não associativa que é alternativa é a álgebra dos octônions.*

Proposição 1.34. *São equivalentes:*

1. *A é uma álgebra alternativa.*

2. *São satisfeitas duas das três identidades*

   i) $(x, x, y) = 0$*;*

   ii) $(y, x, x) = 0$*;*

   iii) $(x, y, x) = 0$*,*

3. *O associador* (x, y, z) *é antisimétrico em* A

Demonstração. A implicação $1 \implies 2$ segue da definição de álgebra alternativa, e $2 \implies 3$ é análoga à discussão acima. Ademais, se o operador (x, y, z) é antisimétrico, então $(x, x, z) = -(x, x, z)$ e $(x, z, z) = -(x, z, z)$, o que mostra $3 \implies 1$ (uma vez que $charK \neq 2$). □

Um importante resultado sobre álgebras alternativas é o Teorema de Artin.

Teorema 1.35. ***(Artin)****. Seja A uma álgebra alternativa. Toda subálgebra de A gerada por dois elementos é associativa.*

Demonstração. Ver [16], Seção 2.3, Teorema 2. □

Enumeramos agora algumas identidades que serão utilizadas no decorrer do Capítulo 4.

Lema 1.36. *Seja A uma álgebra alternativa. São válidas as seguintes identidades para quaisquer* x, y, $z \in A$*:*

i) $(x^2, y, x) = 0$*;*

ii) $x(yzy) = [(xy)z]y$ *(Identidade de Moufang à direita);*

iii) $(yzy)x = y[z(yx)]$ *(Identidade de Moufang à esquerda);*

iv) $(xy)(zx) = x(yz)x$ *(Identidade de Moufang ao meio, observando que podemos omitir os parênteses em* $x(yz)x$ *por estarmos em uma álgebra alternativa);*

v) $(x, xy, z) = (x, y, z)x$*;*

vi) $(x, yx, z) = x(x, y, z)$*.*

E considerando $x \circ y = xy + yx$*, valem ainda:*

vii) $(x^2, y, z) = (x, x \circ y, z)$*;*

viii) $(x^2, y, z) = x \circ (x, y, z)$*.*

Demonstração. i) Temos

$$(x^2y)x = [x(xy)]x = x[(xy)x] = x[x(yx)] = x^2(yx)$$

ou seja, $(x^2, y, x) = 0$.

ii) Vale

$$x(y^2y) = (xy^2)y - (x, y^2, y) = (xy^2)y + (y^2, x, y) = (xy^2)y = [(xy)y]y$$

sendo a penúltima igualdade consequência de i). Substituindo y por $y' = z + y$, a componente multihomogênea de multigrau $(1, 2, 1)$ (correspondendo a x, y, z respectivamente) de $x(y'y'y') - [(xy')y']y'$ é também uma identidade, de onde

$$0 = x(yzy) + x(y^2 \circ z) - [(xy)z]y - (xy^2)z - (xz)y^2$$

$$= x(yzy) - [(xy)z]y - (x, y^2, z) - (x, z, y^2) = x(yzy) - [(xy)z]y,$$

e portanto vale *ii)*, e *iii)* é mostrada analogamente. Ademais,

$$(xy)(zx) - x(yz)x = -(xy, z, x) + (x, y, z)x =$$

$$= (z, xy, x) + (z, x, y)x = [z(xy)]x - z(xyx) + [(zx)y]x - [z(xy)]x$$

Mas, pela identidade de Moufang à direita, $[(zx)y]x = z(xyx)$, temos que $(xy)(zx) = x(yz)x$ de onde segue *iv)*.

Para *v)*, temos pela antissimetria do associador e por *iv* que

$$(x, xy, z) = (xy, z, x) = ((xy)z)x - (xy)(zx) =$$

$$= ((xy)z)x - (x(yz))x = (x, y, z)x.$$

A identidade *vi)* é análoga a *v)*.

vii) Substituindo x por $x' = x + z$ em *i)* e tomando a componente multihomogênea de multigrau $(2, 1, 1)$, obtemos

$$0 = (x \circ z, y, x) + (x^2, y, z)$$

de onde segue *vii)*.

viii) Basta ver que

$$x \circ (x, y, z) = x(x, y, z) + (x, y, z)x = (x, xy, z) + (x, yx, z) = (x, x \circ y, z).$$

$\square$

Lema 1.37. *Em uma álgebra alternativa A, a seguinte identidade é válida*

$$[(a, b, c), d] = (ab, c, d) + (bc, a, d) + (ca, b, d).$$

Demonstração. Linearizando a identidade de Moufang do meio, temos

$$(ca)(bd) + (da)(bc) = (c(ab))d + (d(ab))c.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} d(a,b,c) &= d((ab)c) - d(a(bc)) = \\ &= -(d,ab,c) + (d(ab))c - d(a(bc)) \\ &= -(d,ab,c) + (d(ab))c + (d,a,bc) - (da)(bc) \end{aligned}$$

de onde usamos a identidade de Moufang do meio multilinearizada para concluir

$$\begin{aligned} d(a,b,c) &= -(ab,c,d) - (bc,a,d) - [c(ab)]d + (ca)(bd) \\ &= -(ab,c,d) - (bc,a,d) + (c,a,b)d - [(ca)b]d + (ca)(bd) \\ &= -(ab,c,d) - (bc,a,d) + (c,a,b)d - (ca,b,d), \end{aligned}$$

que é o que queríamos demonstrar □

Definição 1.38. Definimos a **função de Kleinfield**

$$f(t,x,y,z) = (tx,y,z) - (x,y,z)t - x(t,y,z).$$

Segue de [16], pg. 139, que a função de Kleinfield é anti-simétrica em álgebras alternativas, e que

$$f(t,x,y,z) = ([t,x],y,z) + ([y,z],t,x).$$

Observação 1.39. *Em uma álgebra alternativa A sobre um corpo K de característica* 0*, vale*

$$(K(A),A,A) = \{0\}.$$

Para essa demonstração, usaremos as notações

$$S_3^1(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\sigma\in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}$$

$$S_3^2(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\sigma\in S_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}),$$

as quais serão muito importantes no Capítulo 4 desse texto. Se $x_1 \in K(A)$, temos

$$S_3^1(x_1,x_2,x_3) - S_3^2(x_1,x_2,x_3) = x_1(x_2x_3) - x_1(x_3x_2) + (x_3x_2)x_1 - (x_2x_3)x_1 = 0$$

e, por outro lado,

$$S_3^1(x_1, x_2, x_3) - S_3^2(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Mas, uma vez que a álgebra A é alternativa, temos

$$\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = 6(x_1, x_2, x_3)$$

e visto que K tem característica 0, segue o resultado.

Observação 1.40. *De [16], pg. 136, vale*

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y + 3(x, y, z),$$

e assim, pelas identidades alternativas, vale

$$[x^2, z] = x[x, z] + [x, z]x.$$

1.1.5 Módulos sobre uma álgebra

Nesta seção, as álgebras serão associativas e unitárias.

Definição 1.41. Seja A uma K-álgebra. Definimos um A-**módulo** como sendo um K-espaço vetorial M, munido de um produto

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a, m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

que satisfaz:

1. $(a_1 + a_2) \cdot m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$;
2. $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$;
3. $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$;
4. $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$;
5. $1_A \cdot m = m$,

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in K$.

Exemplo 1.42. *Se A é uma álgebra, então A é naturalmente um módulo sobre si mesma. Denotamos esse módulo por ${}_A A$.*

Exemplo 1.43. *Sejam G um grupo, V um K-espaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ um homomorfismo de grupos, e denotemos $\varphi(g) = \varphi_g$. Considerando o produto $\cdot : KG \times V \longrightarrow V$ definido por*

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \cdot v = \sum_{g \in G} \lambda_g \varphi_g(v)$$

temos que V é um KG-módulo.

Exemplo 1.44. *Considere P_n o espaço dos polinômios multilineares de grau n. Então, o produto*

$$\cdot : KS_n \times P_n \longrightarrow P_n$$

tal que $\sigma \cdot \sum_{\tau \in S_n} \alpha_\tau x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)} = \sum_{\tau \in S_n} \alpha_\tau x_{\sigma\tau(1)} \dots x_{\sigma\tau(n)}$ faz de P_n um KS_n-módulo.

Definição 1.45. Sejam A uma álgebra e M um A-módulo.

1. Um subespaço vetorial N de M é um **submódulo** de M se $a \cdot n \in N$ para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$.

2. Um submódulo N de M é **minimal** se não existe submódulo N_1 de M tal que $0 \neq N_1 \subsetneq N$.

3. M é um A-módulo **irredutível** (ou simples) se seus únicos submódulos são $\{0\}$ e M.

Exemplo 1.46. *Considere A uma álgebra e considere o A-módulo ${}_AA$. Os submódulos de ${}_AA$ são exatamente os ideais à esquerda da álgebra A, e os submódulos minimais de ${}_AA$ são os ideais minimais à esquerda da álgebra A. Tal correspondência se mostrará importante levando em conta a Observação 1.43, pois associaremos representações irredutíveis de um grupo G a submódulos irredutíveis do KG-módulo ${}_{KG}KG$, que por sua vez são os ideais minimais à esquerda da álgebra de grupo KG.*

Definição 1.47. Sejam M_1 e M_2 A-módulos. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um **homomorfismo** de A-módulos se $\varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m)$, para quaisquer $a \in A$ e $m \in M_1$. No caso em que $M_1 = M_2 = M$, dizemos que φ é um **endomorfismo** de A-módulos.

Chamamos respectivamente de **núcleo** e **imagem** de φ os conjuntos

$$\ker \varphi = \{x \in M_1; \varphi(x) = 0_{M_2}\},$$

$$Im\varphi = \{y \in M_2; y = f(x), \text{ para algum } x \in M_1\}.$$

É fácil ver que tais objetos são submódulos do domínio e do contradomínio de φ, respectivamente.

Definimos um *isomorfismo* de A-módulos como sendo um homomorfismo bijetivo. Quando existe um isomorfismo $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$, dizemos que M_1 e M_2 são *módulos isomorfos*, e denotamos por $M_1 \simeq M_2$. Observa-se que $\varphi^{-1} : M_2 \longrightarrow M_1$ é também um isomorfismo de A-módulos.

Agora, enunciaremos e mostraremos uma proposição que dá a unicidade da decomposição de um A-módulo em A-submódulos irredutíveis. Tal proposição será usada para garantir a unicidade da decomposição de uma representação de grupo em representações irredutíveis.

Lema 1.48. *Sejam A uma álgebra, M um A-módulo e N um submódulo próprio de M. Então,*

a) Se $M_1, M_2, \dots, M_n$ são submódulos irredutíveis de M tais que $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$, então existem $j_1, ..., j_l \in \{1, 2, \dots n\}$ tais que $M = N \oplus M_{j_1} \oplus ... \oplus M_{j_l}$.

b) Se N_1 e N_2 são submódulos de M tais que $M = N \oplus N_1 = N \oplus N_2$, então $N_1 \simeq N_2$.

Demonstração. a) Uma vez que $N \neq M$, existe algum fator $j_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $M_{j_1} \nsubseteq N$. Como M_{j_1} é irredutível, segue então que $M_{j_1} \cap N = 0$. Se $M = N \oplus M_{j_1}$, vale o resultado. Caso contrário, podemos tomar $N_1 = N \oplus M_{j_1}$ e continuar a demonstração indutivamente.

b) Dado $m \in N_1$, propriedades de soma direta nos dizem que existem únicos $m' \in N$ e $m_2 \in N_2$ tais que $m = m' + m_2$. Defina

$$\begin{array}{rccl} f: & N_1 & \longrightarrow & N_2 \\ & m & \longmapsto & f(m) = m_2 \end{array}$$

aplicação essa que é um homomorfismo de A-módulos cujo núcleo é $N \cap N_1 = 0$. Ademais, se $n \in N_2$, então existem $n' \in N$ e $n_1 \in N_1$ tais que $n = n' + n_1$. Logo, $n_1 = (-n') + n$, e assim $f(n_1) = n$. Concluímos então que f é um isomorfismo de A-módulos. □

Proposição 1.49. *Sejam A uma álgebra e M e N A-módulos isomorfos. Se*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \quad e \quad N = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_m$$

onde M_i e N_j são submódulos minimais de M e N, respectivamente, então $m = n$ e $M_i \simeq N_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ (a menos de uma reordenação dos N_j's).

Demonstração. Provaremos por indução em m. Se $m = 1$, N é irredutível, e portanto M também é, de onde vale o resultado. Sendo $f : M \longrightarrow N$ um isomorfismo de A-módulos, temos que $N = f(M_1) \oplus f(M_2) \oplus \cdots \oplus f(M_n)$, onde cada $f(M_i)$ é um submódulo minimal. Pelo lema anterior, devem existir $j_1, ..., j_l \in \{1, 2, ..., n\}$ tais que $N = N_1 \oplus f(M_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_l})$, e assim, $f(M_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_l}) \simeq N_2 \oplus \cdots \oplus N_m$. Como $l < n$ (pois se $l = n$, teríamos $N = N_1 \oplus N$, de onde N_1 seria trivial), a indução nos garante que $l = m-1$, e $M_{j_1} \simeq N_2, \ldots, M_{j_t} \simeq N_m$. Sendo $\{j_{l+1}, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} - \{j_1, \ldots, j_l\}$, temos

$$N = (f(M_{j_{l+1}}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_n})) \oplus (f(M_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_l}),$$

de onde concluímos pelo lema anterior que $N_1 \simeq f(M_{j_{l+1}}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_n})$. Como N_1 é minimal, temos $n = l + 1$ e $N_1 \simeq f(M_{j_n})$, o que mostra o resultado. □

1.2 Representações Lineares de Grupos

Nesta seção apresentaremos o conceito de representações lineares de grupos. Durante toda a seção, K será um corpo. Na subseção sobre representações do grupo S_n, assumiremos também a hipótese de que K tem característica zero.

1.2.1 Definições, Exemplos e Resultados Preliminares

Definição 1.50. Sejam G um grupo e V um K-espaço vetorial. Definimos uma **representação (linear) de G em V** como sendo um homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g. \end{array}$$

chamamos $\dim_K V$ de **grau da representação** φ. No caso em que φ é injetora, dizemos que a representação é φ é **fiel**.

No caso em que o grau de φ é finito e igual a n, fixada uma base de V, há um isomorfismo natural $GL(V) \mapsto GL_n(K)$. Assim, podemos ver uma representação linear de grau finito como uma aplicação $\varphi : G \longmapsto GL_n(K)$.

Exemplo 1.51. *Uma vez que $GL_1(K) = K^* = K - \{0\}$, onde K^* é o grupo multiplicativo do corpo K, uma representação linear de grau 1 de um grupo G é um homomorfismo*

$$\varphi : G \longmapsto K^*.$$

Um caso particular importante é a ***representação trivial***

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & G & \longrightarrow & K^* \\ & g & \longmapsto & 1. \end{array}$$

Exemplo 1.52. *Seja S_n o grupo simétrico de sobre o conjunto $\{1,\ldots,n\}$ e V um K espaço de base $\beta=\{v_1,...,v_n\}$. Fixada $\sigma\in S_n$, considere a aplicação linear $\varphi_\sigma : V \longrightarrow V$ tal que $\varphi_\sigma(v_i)=v_{\sigma(i)}$. Cada φ_σ é um isomorfismo, visto que mapeia uma base em uma base. Assim, podemos definir*

$$\begin{array}{rccl}\varphi: & S_n & \longrightarrow & GL(V)\\ & \sigma & \longmapsto & \varphi(g)=\varphi_\sigma,\end{array}$$

a qual é um homomorfismo, e portanto uma representação do grupo S_n.

A matriz $[\varphi_\sigma]_\beta=(a_{ij})_{n\times n}$, associada à transformação linear φ_σ em relação à base β, tem entradas $a_{\sigma(j)j}=1$, e $a_{ij}=0$, se $i\neq\sigma(j)$, para qualquer $j\in\{1,...,n\}$.

Exemplo 1.53. *Sendo G um grupo e $g\in G$, e considere a álgebra de grupo KG definida no Exemplo 1.6. A aplicação*

$$\begin{array}{rccl}\varphi_g: & KG & \longrightarrow & KG\\ & x & \longmapsto & \varphi_g(x)=gx,\end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais. Uma vez que KG é um K-espaço vetorial, é uma representação de grupo a aplicação

$$\begin{array}{rccl}\varphi: & G & \longrightarrow & GL(KG)\\ & g & \longmapsto & \varphi(g)=\varphi_g,\end{array}$$

a qual é chamada representação regular à esquerda.

Definição 1.54. Sejam G um grupo, V um K-espaço vetorial e $\varphi: G\longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Dizemos que um subespaço W de V é **φ-invariante** se $\varphi_g(W)\subseteq W$ para todo $g\in G$. Se existe algum subespaço W φ-invariante de V tal que $\{0\}\neq W\neq V$, dizemos que φ é uma representação redutível; caso contrário, dizemos que φ é irredutível.

Sendo W um subespaço φ-invariante de V e $g\in G$, está bem definida a restrição

$$\varphi_g|_W : W \longrightarrow W$$

a qual é um isomorfismo, pois $\varphi_g(W)\subseteq W$ e $\varphi_{g^{-1}}(W)=\varphi_g^{-1}(W)\subseteq W$. Assim, podemos definir

$$\begin{array}{rccl}\varphi_W: & G & \longrightarrow & GL(W)\\ & g & \longmapsto & \varphi_W(g)=\varphi_g|_W,\end{array}$$

que é chamada **subrepresentação** de φ em W.

Exemplo 1.55. *Toda representação de grau 1 é irredutível.*

Exemplo 1.56. *Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de um grupo finito G e $v_0 \in V$ é um vetor não nulo. Considere os subespaços*

$$W_1 = \langle \varphi_g(v_0);\ g \in G \rangle \quad e \quad W_2 = \left\langle \sum_{g \in G} \varphi_g(v_0) \right\rangle.$$

Temos que W_1 e W_2 são φ-invariantes. Como toda φ_g é uma bijeção, segue que W_1 é não nulo, e como W_1 é gerado por $|G|$ elementos, segue que $\dim W_1 \leq |G|$. *Já $W_2 \subseteq W_1$ tem dimensão 0 ou 1. Observe que se* $\dim W_1 = |G|$, *então $\{\varphi_g(v_0); g \in G\}$ é LI, de onde $\sum_{g \in G} \varphi_g(v_0)$ é não nulo. Assim, concluímos que se o grau de uma representação φ é maior ou igual do que $|G|$, então W_1 ou W_2 é um subespaço φ-invariante não trivial de V de φ, e portanto φ é redutível.*

Exemplo 1.57. *Nas condições do Exemplo 1.52, o subespaço*

$$W = \{v_1 + \cdots + v_n\}$$

é φ-invariante e tem dimensão 1.

Definição 1.58. Sejam G um grupo e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Dizemos que φ é **completamente redutível** ou **semissimples** se existem $W_1, W_2, \cdots, W_n$ subespaços de V φ-invariantes tais que:

1. $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$;
2. As restrições de φ aos W_i's são todas irredutíveis.

O próximo resultado mostra que, nas hipóteses que assumiremos, não precisaremos nos preocupar com representações que não são completamente redutíveis.

Teorema 1.59. ***(Teorema de Maschke)*** *Seja G um grupo finito cuja ordem não é divisível por $charK$ (o que particularmente sempre vale quando $charK = 0$). Se $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação linear de grau finito e W é um subespaço φ-invariante de V, então existe W_1 subespaço φ-invariante de V tal que $V = W \oplus W_1$. Consequentemente, φ é completamente redutível.*

Demonstração. Nessas condições, uma vez que W é um subespaço vetorial de V, existe W_0 subespaço vetorial de V tal que $V = W \oplus W_0$. Usaremos W_0 e conhecidas propriedades de espaços vetoriais para construir W_1.

Nessas condições, considere a projeção $T : V = W \oplus W_0 \longrightarrow V$ tal que $T(w + w_0) = w$, para $w \in W$ e $w_0 \in W_0$. Tal aplicação é uma transformação linear. Considere então a aplicação $F : V \longrightarrow V$ tal que

$$F(v) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi_g^{-1} T \varphi_g)(v).$$

Temos que F é linear, visto que é obtida por composições e somas de aplicações lineares, $F|_W = Id_W$, $Im\ F = W$ e $F^2 = F$. Assim, F é uma projeção linear, e portanto $V = W \oplus \ker F$. Basta então mostrar que $\ker F$ é φ-invariante. Sejam $v \in \ker F$ e $x \in G$. Então, $\sum_{g \in G} (\varphi_g^{-1} T \varphi_g)(v) = 0$, e assim

$$|G| F(\varphi_x(v)) = \sum_{g \in G} (\varphi_g^{-1} T \varphi_g)(\varphi_x(v)) = \sum_{g \in G} \varphi_x (\varphi_{gx}^{-1} T \varphi_{gx})(v) =$$

$$\varphi_x \left(\sum_{g \in G} (\varphi_{gx}^{-1} T \varphi_{gx})(v) \right) = \varphi_x \left(\sum_{y \in G} (\varphi_y^{-1} T \varphi_y)(v) \right) = 0,$$

o que mostra o resultado. $\square$

Definição 1.60. Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais e φ, ψ representações de G em V e W, respectivamente. Dizemos que φ e ψ são **representações equivalentes** se existe uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ bijetora tal que $\psi_g T = T \varphi_g$, para todo $g \in G$.

Exemplo 1.61. *Duas K-representações de grau 1 $\varphi : G \longrightarrow K^*$ e $\psi : G \longrightarrow K^*$ são equivalentes se, e somente se, são iguais.*

Um importante caso particular é o do grupo $G = S_n$, para $n \geq 2$. As representações

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S_n & \longrightarrow & K^* \\ & \sigma & \longmapsto & \varphi(\sigma) = 1. \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \psi : & S_n & \longrightarrow & K^* \\ & \sigma & \longmapsto & \psi(\sigma) = (-1)^\sigma. \end{array}$$

não são equivalentes, e são as únicas representações de grau 1 possíveis do grupo S_n.

Mostraremos que a decomposição de uma representação completamente redutível em subrepresentações irredutíveis é única a menos de ordem dos fatores e de equivalência da subrepresentações. Para tal, primeiro observaremos a elegante correspondência entre os conceitos de representação de um grupo G e KG-módulos.

Seja $x = \sum a_n p^n$ $y = \sum b_n p^n$ tal que $b_i = a_i$ para $i \neq n^2$ e $b_{n^2} \neq b_{n^2}$

1.2.2 Representações e Módulos

Nos aprofundaremos na construção feita no Exemplo 1.43. Conforme já visto, seja G um grupo e V um espaço vetorial, e considere $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de G em V. Podemos fazer de V um KG-módulo com a operação

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot v = \sum_{g\in G} \lambda_g \varphi_g(v).$$

Podemos ainda fazer o processo contrário: se V é um KG-módulo, então $\psi : G \longmapsto GL(V)$ tal que

$$\psi_g(v) = g \cdot v$$

para $g \in G$ e $v \in V$, é uma representação do grupo G.

Existe então uma correspondência biunívoca entre as KG-módulos em V e as representações lineares de G em V. Toda a teoria de representações que desenvolvemos pode ser enunciada em função de KG-módulos, o que nos dá uma ideia muito mais intuitiva do que é um subespaço φ-invariante e uma equivalência entre representações.

Proposição 1.62. *Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações lineares de G, e V_1 um subespaço vetorial de V. Então valem:*

a) V_1 é φ-invariante se, e somente se, V_1 é um submódulo do KG-módulo V.

b) φ e ψ são equivalentes se, e somente se, os respectivos KG-módulos V e W são isomorfos.

c) φ é irredutível se, e somente se, o KG-módulo V é irredutível.

Observe que, com base nessa proposição e na Proposição 1.49, a decomposição de uma representação de um grupo G em sub-representações irredutíveis é única, a menos de equivalência das sub-representações.

Corolário 1.63. *Sejam G um grupo finito e K um corpo cuja característica não divide $|G|$. Se $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação linear de grau finito, então*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n,$$

onde cada W_i é φ-invariante, e a restrição de φ a cada um dos W_i's é irredutível. Ademais, se

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m,$$

com cada V_i φ-invariante, e a restrição de φ a cada um dos V_i's é irredutível, então $n = m$ e existe $\sigma \in S_n$ tal que φ_{W_i} é equivalente à $\varphi_{V_{\sigma(i)}}$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Pelo resto dessa seção, consideraremos G um grupo finito cuja ordem não é divisível por $charK$. Denotaremos o KG-módulo à esquerda KG por ${}_{KG}KG$, cuja definição e algumas propriedades constam nos exemplos 1.42 e 1.46. Reforçamos que os KG-submódulos de KG são os ideais à esquerda de KG (como álgebra), e que, com as hipóteses do Teorema de Maschke 1.59 (as quais sempre teremos), podemos escrever KG como soma direta de uma quantidade finita de ideais minimais à esquerda.

Lema 1.64. *Todo KG-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de KG. Em outras palavras, toda representação linear irredutível de G é equivalente a uma sub-representação da representação regular à esquerda de G.*

Demonstração. Seja V um KG-módulo irredutível e fixemos $v_0 \in V - \{0\}$. Como G é uma base de KG como K-espaço vetorial, podemos definir a aplicação linear $T : KG \longmapsto V$ tal que $T(g) = g \cdot v_0$, para $g \in G$. Uma vez que

$$T(g_1 g) = (g_1 g) \cdot v_0 = g_1 \cdot (g \cdot v_0) = g_1 T(g),$$

vemos que T é também um homomorfismo de KG-módulos. Como $v_0 \in ImT$, concluímos que ImT é um KG-submódulo não nulo de V, que por sua vez é irredutível. Assim, T é sobrejetiva.

Seja I um ideal à esquerda de KG tal que $KG = \ker T \oplus I$ (que existe pelo Teorema de Maschke). Considerando a restrição de T a I

$$\begin{array}{rccl} T_1 : & I & \longrightarrow & V \\ & \alpha & \longmapsto & T_1(\alpha) = \alpha \cdot v_0. \end{array}$$

temos que $ImT_1 = ImT$, de onde T_1 é também sobrejetiva. Ademais, $\ker T_1 \subseteq \ker T \cap I$, de onde $kerT_1 = 0$, e portanto T_1 é um isomorfismo de KG-módulos. □

Seja m o número de representações irredutíveis, a menos de equivalência de G, e tomemos $I_1, I_2, \ldots, I_m$ ideais minimais à esquerda de KG dois a dois não isomorfos como KG-módulos. Observe que todo ideal minimal à esquerda de KG é isomorfo como KG-módulo a um deles. Para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, consideremos o ideal bilateral $J_j = I_J KG = \sum_{\alpha \in KG} I_j \alpha$.

Proposição 1.65. *Sendo G um grupo finito e K um corpo tal que $charK$ não divide $|G|$, então*

$$KG = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_m$$

.

Demonstração. Ver [13], Teorema 25.15, página 168. □

1.2.3 Representações do grupo S_n

Vimos no Exemplo 1.44 que o espaço P_n dos polinômios multilineares de grau n é um KS_n-módulo, o que torna as representações do grupo S_n bastante relevantes para o estudo de identidades polinomiais. Para o leitor que deseja se aprofundar nesse assunto, recomendamos o Capítulo 2 de [9].

Nessa seção, I_n denotará o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ e K será um corpo de **característica 0**.

Definição 1.66. Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos uma **partição** de n como sendo uma r-upla $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ de números naturais tais que $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r > 0$ e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Nesse caso, denotamos $(n_1, n_2, \ldots, n_r) \vdash n$. Denotamos por $p(n)$ o número de partições de n.

Denotaremos a repetição de elementos em uma partição com a notação de potências. Por exemplo, $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n})$ será denotada por (1^n). A cada partição λ, associaremos o **diagrama de Young** D_λ, que é o conjunto

$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i\}.$$

Sendo $\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$, o diagrama D_λ costuma ser representado por n quadrados dispostos em r filas horizontais (linhas), onde a i-ésima linha é composta por n_i quadrados.

Exemplo 1.67. *Para $n = 7$, $\lambda = (3, 2, 1, 1)$, temos*

$$D_\lambda = \ydiagram{3,2,1,1}\ .$$

Definição 1.68. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_r) \vdash n$, c_j o número de quadrados na j-ésima coluna de D_λ. Definimos uma **tabela de Young** do diagrama D_λ como sendo uma função bijetora $T : D_\lambda \longmapsto I_n$. Dizemos que uma tabela de Young T é **standard** se satisfaz as seguintes condições:

1. $T(i, j) < T(i, j + 1)$, para $1 \leq i \leq r, 1 \leq j < n_i$;
2. $T(i, j) < T(i + 1, j)$, para $1 \leq j \leq n_1, 1 \leq i < c_j$.

Exemplo 1.69. *A tabela*

$$T = \begin{ytableau} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 \end{ytableau}$$

é standard.

Definição 1.70. Dada uma tabela de Young T, definimos o grupo das permutações nas linhas de T, denotado por $R(T)$, como sendo

$$R(T) = \{\sigma \in S_n; \sigma(L) = L, \text{ para toda linha } L \text{ de } T\},$$

o grupo de permutações nas colunas de T, denotado por $C(T)$, como sendo

$$C(T) = \{\sigma \in S_n; \sigma(C) = C \text{ para toda coluna } C \text{ de } T\},$$

e

$$e_T = \sum_{\sigma \in R(T), \mu \in C(T)} (-1)^{\mu} \sigma\mu \in KS_n$$

onde $(-1)^{\mu}$ denota o sinal da permutação μ.

Proposição 1.71. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2 \vdash n$ e T_1, T_2 tabelas de Young dos diagramas $D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}$, respectivamente. Então:*

1. *$KS_n e_{T_1}$ é um KS_n-módulo irredutível;*
2. *$KS_n e_{T_1}$ e $KS_n e_{T_2}$ são isomorfos se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$.*
3. *Todo KS_n-módulo irredutível é isomorfo a $KS_n e_T$, para alguma tabela de young T, de algum diagrama de Young D_λ, de alguma partição λ de n.*

Demonstração. Ver [5], Teoremas 3.1 e 3.2, Capítulo IV, §3. □

Denotaremos a classe de isomorfismo de KS_n-módulos associados a uma determinada partição λ por $M(\lambda)$. Consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{p(n)}$ as distintas partições de n e T_i tabelas de Young dos diagramas D_{λ_i}, $i = 1, \ldots, p(n)$. Considerando os ideais bilaterais $J_i = KS_n e_{T_i} KS_n$ de KS_n, para todo $i = 1, \ldots, p(n)$., temos

$$KS_n = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_{p(n)}.$$

Por último, citaremos alguns resultados que relacionam o número de tabelas standard para uma partição λ e o grau da representação irredutível correspondente ao KS_n-módulo $M(\lambda) = KSe_{T_\lambda}$.

Teorema 1.72. *Sejam λ uma partição de n. Se T é uma tabela de Young de D_λ, então $\dim_K KS_n e_T = ST(\lambda)$, o número de tabelas standard associadas a λ.*

Demonstração. Ver [5], Teorema 4.6, página 121. □

Definição 1.73. Sejam $\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_r) \vdash n$ e $(i_0, j_0) \in D_\lambda$. Definimos o **gancho** de (i_0, j_0) em D_λ como sendo o conjunto

$$\{(i_0, j); j_0 \leq j \leq n_{i_0}\} \cup \{(i, j_0); i_0 \leq i \leq c_{j_0}\},$$

onde c_{j_0} é o comprimento da coluna j_0. Ademais, chamamos de $h_{i_0 j_0}$ o número de elementos do gancho (i_0, j_0).

Teorema 1.74. ***(Fórmula do Gancho)*** *Sendo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ uma partição de n e $ST(\lambda)$ o número de tabelas standard do diagrama D_λ, temos*

$$ST(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in D_\lambda} h_{ij}}.$$

Demonstração. Ver [9], Proposição 2.2.8. □

1.3 Reticulados

Falaremos agora sobre reticulados, uma classe especial de conjuntos parcialmente ordenados, nos quais existem supremo e ínfimo de qualquer subconjunto de 2 elementos. O menor exemplo de um conjunto ordenado que não é um reticulado é o conjunto $\{x_1, x_2\}$ munido da igualdade

$$x \leq y \iff x = y,$$

pois não existe cota inferior nem superior para o conjunto $\{x_1, x_2\}$, não podendo assim existir supremo ou ínfimo.

Definição 1.75. Um conjunto parcialmente ordenado $(R, \leq)$ é dito um **reticulado** se existe $\inf\{x, y\}$ e $\sup\{x, y\}$ para quaisquer $x, y \in R$. Nesse caso, denotamos

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \qquad \text{e} \qquad x \wedge y = \inf\{x, y\}.$$

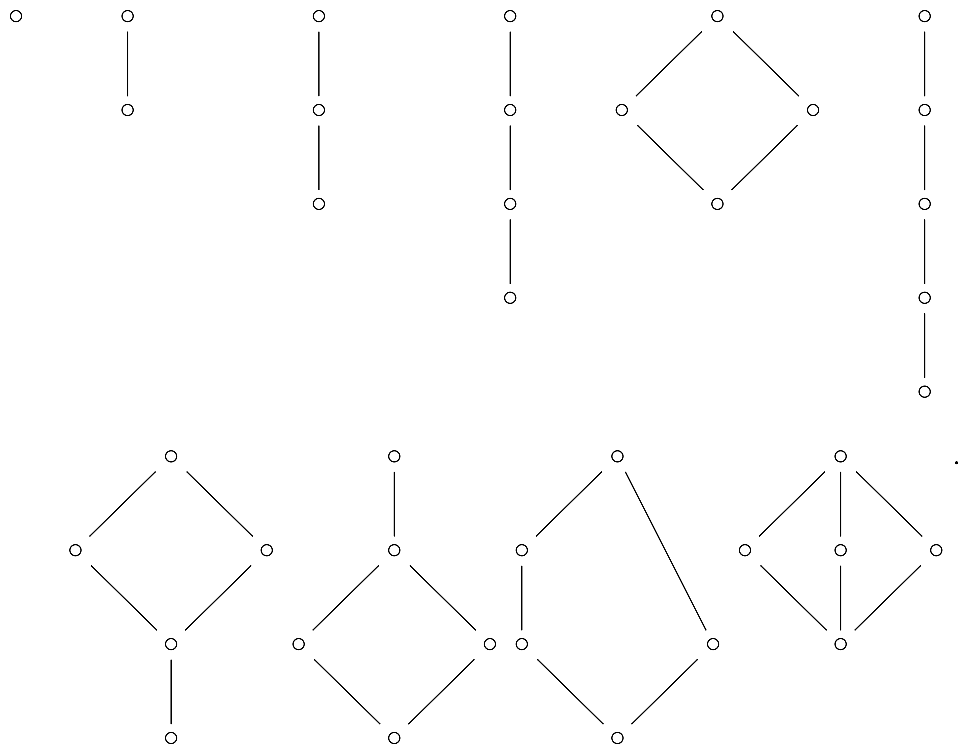
Exemplo 1.76. *O conjunto R de todos os ideais de um anel A, munido da ordem de inclusão, é um reticulado, onde*

$$I \vee J = I + J \qquad e \qquad I \wedge J = I \cap J$$

são o ínfimo e supremo de $I, J \in R$.

Reticulados finitos são costumeiramente denotados por diagramas, chamados diagramas de Hasse. Neles, cada elemento é representado por um ponto, e se $x < y$ (isto é, $x \leq y$ e $x \neq y$), então o ponto que representa y é escrito acima do ponto que representa x. Ademais, se não existe nenhum z tal que $x < z < y$, então uma reta é traçada de x para y.

Exemplo 1.77. *Os diagramas de Hasse de todos os reticulados com* 5 *elementos ou menos são*



Damos especial importância aos dois últimos reticulados acima, os quais chamaremos de pentágono e reticulado de Klein, respectivamente.

Exemplo 1.78. *Seja V uma variedade de álgebras e considere R o conjunto de todas as subvariedades de V, munido da relação de inclusão $\subseteq$. Se $V_1, V_2 \in R$, então $V_1 \cap V_2$ é ainda uma subvariedade de V e é a maior cota inferior de $\{V_1, V_2\}$ em R, sendo portanto ínfimo do conjunto. Ademais, a variedade V_3 cujo ideal de identidades é $T(V_3) = T(V_1) \cap T(V_2)$ é uma cota superior para $\{V_1, V_2\}$ (visto que toda álgebra que satisfaz as identidades de $T(V_1)$ e $T(V_2)$ necessariamente satisfaz todas as identidades da interseção), e da mesma forma, é a menor cota superior para tal conjunto. Concluímos então que o conjunto de subvariedades de uma variedade de álgebras munido da inclusão é um reticulado.*

Observe que pela correspondência descrita no Teorema 1.22, o conjunto dos T-ideais que contém um certo T-ideal I fixado, munido da inclusão, é ainda um reticulado, cujo ínfimo e o supremo são, respectivamente, o supremo e o ínfimo do reticulado das subvariedades da variedade $V(I)$. Tal relação é chamada de dualidade.

Entre as propriedades básicas de reticulados, estão as relações de semi-distributividade

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \text{e} \quad (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [12], Teorema 2.1.11. É intuitivo que se questione em que condições vale a igualdade em tais relações (como no conjunto das partes $P(A)$ de um certo conjunto A, munido da ordem de inclusão, cujos ínfimo e supremo são a interseção e união de conjuntos). Tal pergunta é central na teoria de reticulados, e foco dessa dissertação.

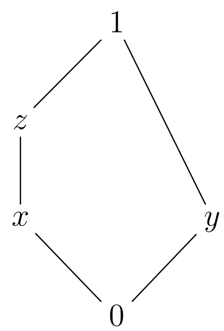
Definição 1.79. Seja R um reticulado. Dizemos que R é **distributivo** se são satisfeitas as equações

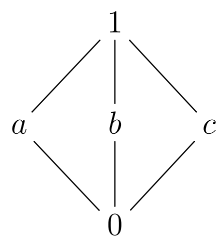
1. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
2. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$,

para quaisquer a, b, $c \in R$.

Observação 1.80. *Segue de [12], Teorema 2.4.1., que as duas igualdades que definem reticulado distributivo são na verdade equivalentes.*

Exemplo 1.81. *Todos os reticulados com 4 ou menos elementos são distributivos. Todos os reticulados de 5 elementos, a menos de*





são distributivos. Com efeito, observe que

$$x \vee (y \wedge z) = x, \quad (x \vee y) \wedge (x \vee z) = z,$$

$$a \vee (b \wedge c) = a, \quad (a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1.$$

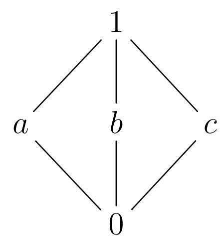
Como será visto no que segue, tais reticulados são intrínsecos à noção de distributividade.

Destacamos que "sub-estruturas" costumam formar um reticulado, cuja relação de ordem é a inclusão, como o exemplo de subgrupos de um certo grupo G fixado ou subespaços de um certo espaço vetorial V. Destacamos aqui o Teorema de Ore, que pode ser encontrado em [12] (onde é o Teorema 3.2.5). Tal teorema diz que a distributividade no reticulado de subgrupos de um grupo G é válida se, e somente se, G é localmente cíclico. Já a distributividade em reticulados de subespaços vetoriais só é válida para espaços de dimensão menor ou igual que 1 (o que seguirá trivialmente dos resultados dessa seção).

Definição 1.82. Um reticulado R é dito **modular** se satisfaz a condição

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z, \text{ para } x, y, z \in R \text{ tais que } x \leq z$$

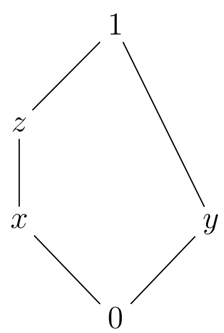
Exemplo 1.83. *Segue de [12], Exemplo 2.4.13, que todo reticulado distributivo é modular. Dito isso, nem todo reticulado modular é distributivo. Em verdade, considere R o reticulado de Klein*



não é distributivo, mas é modular. De fato, se $x \geq y$, então $x = 0$ ou $y = 1$. Tomemos $x = 0$ e $y = a$. Temos para qualquer $z \in R$ que

$$a \vee (0 \wedge z) = a \vee z = (a \vee 0) \wedge z,$$

as demais igualdades são análogas. Observe ainda que pentágono



não é modular, pois $x \leq z$, mas

$$x \vee (y \wedge z) = x, \quad (x \vee y) \wedge z = z.$$

Como os demais reticulados com 5 ou menos elementos são distributivos, concluímos que o pentágono é o único reticulado com 5 ou menos elementos que não é modular.

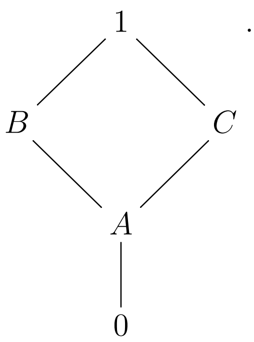
Exemplo 1.84. *Um reticulado de ideais, e em particular de T-ideais, é sempre modular. Com efeito, sejam A um anel, e I, J, K ideais de A, tais que $K \subseteq I$. A inclusão*

$$K + (J \cap I) \subseteq (K + J) \cap I$$

segue das relações de semidistributividade, que são satisfeitas em todo reticulado. Para a inclusão contrária, tomemos $x \in (K + J) \cap I$. Temos que $x \in I$ e que existe $z \in K$ tal que $x - z \in J$. Como $K \subseteq I$, temos que $x - z \in I$, e portanto $x - z \in I \cap J$. Concluímos que $x \in K + (J \cap I)$, o que mostra a inclusão contrária. Tais reticulados não precisam necessariamente ser distributivos.

Definição 1.85. Sejam $(R, \leq)$ um reticulado e L um subconjunto não vazio de R. Dizemos que L é um **sub-reticulado** de R se $x \vee y$ e $x \wedge y$ pertencem a L, para todos $x, y \in L$.

Exemplo 1.86. *Considere o reticulado R*



O subconjunto $\{1, A, B, C\}$ é um sub-reticulado de R, mas o conjunto $\{1, 0, B, C\}$ não é.

Definição 1.87. Sejam R_1 e R_2 reticulados, e $\varphi, \psi : R_1 \longrightarrow R_2$ aplicações. Dizemos que φ é um **isomorfismo de conjuntos ordenados** se φ é bijetiva e

$$x \leq_{R_1} y \iff \varphi(x) \leq_{R_2} \varphi(y), \text{ para todos } x, y \in R_1.$$

Ademais, **homomorfismo de reticulados** se ψ se

$$\psi(x \vee y) = \psi(x) \vee \psi(y), \quad \psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y)$$

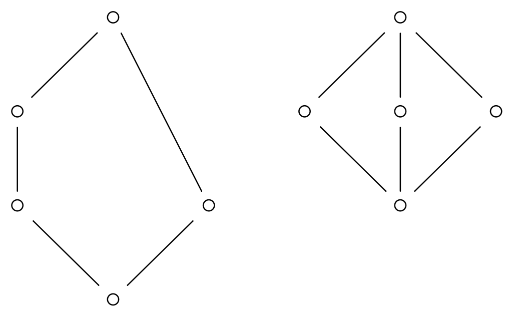
para todos $x, y \in R_1$. No caso de ψ ser um homomorfismo de reticulados bijetivo, dizemos que ψ é um **isomorfismo de reticulados**.

Observação 1.88. *Dois conjuntos ordenados isomorfos possuem o mesmo diagrama de Hasse.*

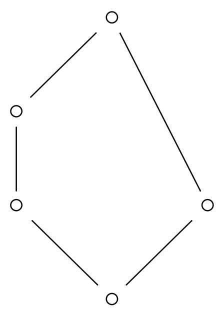
Exemplo 1.89. *Sejam R um reticulado e L um sub-reticulado de R, então a aplicação inclusão $i : L \longrightarrow R$ é um homomorfismo injetivo de reticulados. Reciprocamente, se R_1, R_2 são reticulados e $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ é um homomorfismo injetivo de reticulados, então a restrição de $\varphi : R_1 \longrightarrow \varphi(R_1)$ é um isomorfismo de reticulados, de onde R_2 possui um sub-reticulado isomorfo a R_1.*

Usaremos uma caracterização de distributividade de reticulados em função de seus sub-reticulados.

Teorema 1.90. *Um reticulado R é distributivo se, e somente se, não possui sub-reticulado isomorfo aos reticulados pentágono ou de Klein*

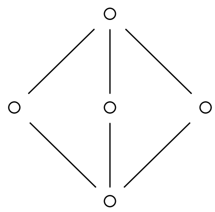


Um reticulado R é modular se, e somente se, não possui nenhum sub-reticulado isomorfo ao pentágono



Demonstração. Ver [12], Teorema 2.4.18. □

Corolário 1.91. *Um reticulado modular R é distributivo se, e somente se,* *não possui um sub-reticulado de Klein*



Consequentemente, reticulados de T-ideais e de subvariedades são distributivos se, e somente se, não possuem nenhum sub-reticulado isomorfo ao reticulado de Klein.

Demonstração. Já foi discutido que um reticulado de T-ideais é sempre modular. Tendo em vista o Teorema 1.90, segue o resultado para reticulados de T-ideais. Para ver que isso também é verdade para reticulados de subvariedades, basta ver que se $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ é um conjunto de variedades que formam um pentágono com respeito à inclusão, então suas pré-imagens pela correspondência $T \mapsto V(T)$ também formam um pentágono com respeito à inclusão, o que é um absurdo. $\square$

Capítulo 2

Caracterizações de distributividade

Nesse capítulo, vamos caracterizar a distributividade de um reticulado de subvariedades. Conforme argumentado nas seções anteriores, existe uma correspondência biunívoca entre variedades e T-ideais que inverte inclusões. Assim, ao invés de discutir a distributividade de subvariedades de uma variedade V, nossos argumentos serão construídos sobre reticulados de T-ideais que contêm $T(A)$. Ainda, podemos considerar uma certa álgebra A cujo T-ideal é $T(V)$.

Sejam A uma álgebra cujo T-ideal é $T(A) = T(V)$, $L(A)$ o reticulado de T-ideais que contêm $T(V)$, e $L_n(A)$ o reticulado de KS_n-submódulos de $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap T(A)}$.

Os resultados apresentados nesse capítulo podem ser encontrados em [2] e [14], mas suas demonstrações usam argumentos que fogem do escopo desse trabalho. Escolhemos apresentar uma demonstração de nossa autoria para o Lema 2.2, usando os resultados apresentados no capítulo anterior.

Lema 2.1. *O reticulado $L(A)$ é distributivo se, e somente se, os reticulados $L_n(A)$ são distributivos, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Primeiramente, supondo I e J T-ideais temos que

$$(I + J) \cap P_n \supseteq (I \cap P_n) + (J \cap P_n) \quad \text{(uma das leis semidistributivas).}$$

Supondo agora $h \in (I+J) \cap P_n$, tomemos $f \in I$ e $g \in J$ tais que $h = f+g$. Agora, sejam f_1 e g_1 as componentes multilineares de f e g, respectivamente, nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sejam também f_2 a soma das demais componentes multihomogêneas de f e g_2 a soma das demais componentes multihomogêneas de g. Temos $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$, $f_1 \in I$ e $g_1 \in J$ (pela multihomogeneidade dos T-ideais). Como $f+g=(f_1+g_1)+(f_2+g_2)\in P_n$, devemos ter $f_2+g_2=0$ e assim

$$h=f_1+g_1\in(I\cap P_n)+(J\cap P_n).$$

Considere agora M um KS_n-submódulo de P_n. Vale $\langle M\rangle^T\cap P_n=M$. De fato, é trivial que $\langle M\rangle^T\cap P_n\supseteq M$, e elementos de $\langle M\rangle^T\cap P_n$ são obtidos de elementos de M a partir de somas, produtos por escalar e substituições da forma $x_i\mapsto\sum_{j=1}^n\alpha_jx_j$ que mantenham a multilinearidade, operações essas às quais M é fechado, o que mostra a inclusão contrária. Assim, todo KS_n-submódulo de P_n é a interseção de algum T-ideal com P_n.

Fixado n, considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl}\varphi_n: & L(A) & \longrightarrow & P_n(A)\\ & I & \longmapsto & \varphi_n(I)=I_n\end{array}$$

onde $I_n=(P_n\cap I)/(P_n\cap T(A))$. Tomando X um KS_n-submódulo de $P_n(A)$, temos que $X=Z/(P_n\cap T(A))$, onde Z é um KS_n-submódulo de P_n que contém $P_n\cap T(A)$. Sendo I um T-ideal de $K\{X\}$ tal que $Z=P_n\cap I$, temos que

$$P_n\cap(I+T(A))=(P_n\cap I)+(P_n\cap T(A))=Z+(P_n\cap T(A))=Z.$$

Logo, $I+T(A)\in L(A)$ e $\varphi_n(I+T(A))=X$, ou seja φ_n é sobrejetora. Para quaisquer $I,\ J\in L(A)$, temos

$$\varphi_n(I\cap J)=\varphi_n(I)\cap\varphi_n(J)\quad\text{e}\quad\varphi_n(I+J)=\varphi_n(I)+\varphi_n(J).\qquad(*)$$

A primeira é bem imediata e a segunda é consequência da conta feita acima: $(I+J)\cap P_n=(I\cap P_n)+(J\cap P_n)$. Sendo $L(A)$ distributivo e φ_n sobrejetora, segue que $L_n(A)$ é distributivo.

Considere o conjunto $R=\Pi_{n\in\mathbb{N}}L_n(A)$, o produto direto dos $L_n(A)$, $n\in\mathbb{N}$, e a relação de ordem é dada por

$$(X_1,\dots,X_n,\dots)\leq(Y_1,\dots,Y_n,\dots)\iff X_n\subseteq Y_n,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Tal conjunto é um reticulado, cujo supremo e ínfimo é tomado coordenada à coordenada. Supondo que cada $L_n(A)$ é distributivo, o reticulado R é também distributivo. Considere agora a aplicação

$$\begin{array}{rccl}\Phi: & L(A) & \longrightarrow & R\\ & J & \longmapsto & \Phi(J)=(J_1,J_2,...,J_n,...)\end{array}$$

onde $J_n = (P_n \cap J)/(P_n \cap T(A))$. Essa aplicação é injetora, pois se I, $J \in L(A)$ são tais que $\Phi(I) = \Phi(J)$, então $P_n \cap I = P_n \cap J$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, I e J têm os mesmos polinômios multilineares e assim $I = J$, uma vez que estamos em característica 0.

É bem imediato que $I \subseteq J$ implica em $\Phi(I) \leq \Phi(J)$. Ademais, se I, $J \in L(A)$ são tais que $\Phi(I) \leq \Phi(J)$, então $P_n \cap I \subseteq P_n \cap J$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como em característica 0 todo T-ideal é consequência dos seus polinômios multilineares, devemos ter $I \subseteq J$. Logo, existe um isomorfismo de conjuntos ordenados entre $L(A)$ e $Im\ \Phi$. Segue das igualdades em $(*)$ que $Im\ \Phi$ é um sub-reticulado de R. Supondo $L_n(A)$ distributivo para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que R é distributivo e portanto $Im\ \Phi$ é distributivo. Logo, $L(A)$ é distributivo. $\square$

Lema 2.2. *Sendo K um corpo de característica zero, G um grupo finito e M um KG-módulo de dimensão finita, o reticulado L de KG-submódulos de M é distributivo se, e somente se, M é uma soma direta de submódulos irredutíveis dois a dois não isomorfos. Consequentemente, o reticulado $L_n(A)$ é distributivo se, e somente se, o KS_n-módulo $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap T(A)}$ é uma soma direta de KS_n-submódulos dois a dois não isomorfos.*

Demonstração. Uma vez que L é sempre um reticulado modular, a não-distributividade de L é equivalente à existência de um sub-reticulado da forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A_1 \arrow[dr, dash] & A_2 \arrow[d, dash] & A_3 \arrow[dl, dash] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}\ .$$

Como estamos nas hipóteses do Teorema de Maschke (Teorema 1.59), temos que $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$, onde M_i é irredutível para todo i. Suponhamos então que $M_1 \simeq M_2$, e considere $\varphi : M_1 \to M_2$ um isomorfismo de KG-módulos e

$$N = \{x + \varphi(x);\ x \in M_1\} \subseteq M_1 \oplus M_2.$$

Temos que N é um KG-submódulo de M, $N \cap M_1 = N \cap M_2 = \{0\}$ e $N + M_1 = N + M_2 = M_1 \oplus M_2$, de onde o seguinte reticulado é um sub-reticulado de L

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& M_1 \oplus M_2 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
M_1 \arrow[dr, dash] & M_2 \arrow[d, dash] & N \arrow[dl, dash] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

o que mostra a não distributividade de L.

Reciprocamente, suponha que L tem um sub-reticulado da forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& N \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A \arrow[dr, dash] & B \arrow[d, dash] & C \arrow[dl, dash] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Temos que $\dfrac{A}{Q} \subseteq \dfrac{B}{Q} \oplus \dfrac{C}{Q} = \dfrac{N}{Q}$. Definamos então a aplicação

$$\varphi_B : \frac{A}{Q} \longrightarrow \frac{B}{Q}$$

$$\overline{a} = \overline{b} + \overline{c} \mapsto \overline{b}$$

que é um homomorfismo, já que é a restrição a $\dfrac{A}{Q}$ do homomorfismo projeção de $\dfrac{B}{Q} \oplus \dfrac{C}{Q}$ em $\dfrac{B}{Q}$. Ademais, $\ker \varphi_B \subseteq \frac{A}{Q} \cap \frac{C}{Q} = \{0\}$, e φ_B é sobrejetivo, pois sendo $\overline{b} \in \frac{B}{Q}$, segue de $\dfrac{B}{Q} \subseteq \dfrac{A}{Q} \oplus \dfrac{C}{Q}$ que existem $\overline{a} \in \dfrac{A}{Q}$ e $\overline{c} \in \dfrac{C}{Q}$ tais que

$$\overline{b} = \overline{a} + \overline{c}$$

ou ainda

$$\overline{a} = \overline{b} + \overline{(-c)}.$$

Assim, concluímos que

$$\frac{A}{Q} \simeq \frac{B}{Q}. \tag{2.0.1}$$

Consideremos então X e Y KG-submódulos de A e B tais que $A = Q \oplus X$ e $B = Q \oplus Y$ (os quais existem pelo Teorema de Maschke). Segue de (2.0.1) e do fato de que $X \simeq \dfrac{A}{Q}$ e $Y \simeq \dfrac{B}{Q}$, que $X \simeq Y$. Ademais, de $X \cap Y \subseteq A \cap B = Q$ e $X \cap Y \subseteq X$, temos que $X \cap Y \subseteq Q \cap X = \{0\}$.

Tomando agora X_1 um submódulo minimal de X e $\psi : X \longrightarrow Y$ um isomorfismo de KG-módulos, temos que $Y_1 = \psi(X_1)$ é um submódulo minimal de Y. Como $X_1 \cap Y_1 = \{0\}$ segue do Teorema de Maschke que

$$M = X_1 \oplus Y_1 \oplus Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_t$$

onde cada Z_i é um submódulo minimal de M. Como $X_1 \simeq Y_1$, observando a unicidade da decomposição de M (Proposição 1.49), concluímos a demonstração. $\square$

Lema 2.3. *Supondo* $charK = 0$, *considere* M *um* KS_n*-módulo. Então,*
a) Se λ *é uma partição de* n, T *é uma tabela de Young de* D_λ *e* $f \in M$ *é tal que* $e_T f \neq 0$, *então* $KS_n e_T f$ *é um submódulo minimal de* M.
b) Se M *é irredutível, então* $M = KS_n e_T h$ *para alguma tabela de Young* T *de algum diagrama* D_λ *(sendo* $\lambda \vdash n$*), e algum* $h \in M$.

Demonstração. a) Basta observar que $KS_n e_T f$ é um submódulo de M e que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & KS_n e_T & \longrightarrow & KS_n e_T f \\ & \alpha & \longmapsto & \varphi(\alpha) = \alpha f \end{array}$$

é um isomorfismo de KS_n-módulos.

b) Veja [9], página 52, Lema 2.4.1. $\square$

Uma vez que sabemos quais são os submódulos irredutíveis de um KS_n módulo, podemos ainda usar o Lema 2.2 para chegar a uma caracterização de distributividade ainda mais palpável.

Proposição 2.4. *A distributividade do reticulado* $L_n(A)$ *é equivalente à seguinte condição: sendo* $\lambda = (n_1, ..., n_k)$ *uma partição de* n, T_1 *e* T_2 *tabelas de Young do diagrama* D_λ *e* $f_1, f_2 \in P_n(A)$ *tais que* $e_{T_1} f_1 \neq 0$ *e* $e_{T_2} f_2 \neq 0$, *então,* $KS_n e_{T_1} f_1 = KS_n e_{T_2} f_2$.

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $L_n(A)$ é distributivo. Nesse caso, segue de 1.71 que $KS_n e_{T_1}$ e $KS_n e_{T_2}$ são isomorfos. Ainda, para $i = 1, 2$, segue das aplicações

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & KS_n e_{T_i} & \longrightarrow & KS_n e_{T_i} f_i \\ & \alpha & \longmapsto & \varphi(\alpha) = \alpha f_i \end{array}$$

que $KS_n e_{T_1} f_1$ e $KS_n e_{T_2} f_2$ são também isomorfos. Ademais, do Lema 2.2, tais módulos são iguais.

Reciprocamente, sejam M_1, M_2 são dois KS_n-módulos irredutíveis e isomorfos de $P_n(A)$. Do Lema 2.3, existem T_1 e T_2 tabelas de Young do diagrama D_λ e $f_1, f_2 \in P_n(A)$ tais que $M_1 = KS_n e_{T_1} f_1$ e $M_2 = KS_n e_{T_2} f_2$. Como M_1, M_2 são irredutíveis, são também não nulos, de onde $e_{T_1} f_1, e_{T_2} f_2 \neq 0$. Assim, segue das hipóteses que $M_1 = M_2$, e portanto $P_n(A)$ tem no máximo um módulo irredutível de cada classe de isomorfismo. Do Lema 2.2, $L_n(A)$ é distributivo. □

Vamos usar uma versão ainda mais forte da caracterização anterior:

Proposição 2.5. *A distributividade do reticulado $L_n(A)$ é equivalente à condição: sendo $\lambda = (n_1, ..., n_k)$ uma partição de n, T uma tabela de Young do diagrama D_λ e $v_1, v_2 \in P_n(A)$ monômios tais que $e_T v_1 \neq 0$ e $e_T v_2 \neq 0$, então $KS_n e_T v_1 = KS_n e_T v_2$.*

Demonstração. Supondo que $L_n(A)$ é distributivo, a validade da condição segue imediatamente da Proposição 2.4. Suponhamos agora que a condição é válida. Primeiramente, observemos que se $f \in P_n(A)$, então f é uma combinação linear de monômios em $P_n(A)$, e daí o submódulo $KS_n e_T f$ está contido em uma soma de submódulos da forma $KS_n e_T w$, com w monômio em $P_n(A)$. Mas, pela condição, dois submódulos não nulos desta forma são iguais. Logo, se $e_T f \neq 0$, então $\{0\} \neq KS_n e_T f \subseteq KS_n e_T v$, para algum monômio $v \in P_n(A)$, donde $KS_n e_T f = KS_n e_T v$, uma vez que $KS_n e_T v$ é um submódulo minimal.

Consideremos agora T_1 e T_2 tabelas de Young do diagrama D_λ e $f_1, f_2 \in P_n(A)$ tais que $e_{T_1} f_1 \neq 0$ e $e_{T_2} f_2 \neq 0$. Pelo que acabamos de ver, existem v_1 e v_2 monômios em $P_n(A)$ tais que $KS_n e_{T_1} f_1 = KS_n e_{T_1} v_1$ e $KS_n e_{T_2} f_2 = KS_n e_{T_2} v_2$. Tomando agora $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma T_1 = T_2$ (tal permutação σ existe, pois T_1 e T_2 são tabelas do mesmo diagrama), temos $e_{T_2} = \sigma e_{T_1} \sigma^{-1}$ e assim

$$KS_n e_{T_2} v_2 = KS_n \sigma e_{T_1} \sigma^{-1} v_2 = KS_n e_{T_1} v_3$$

onde $v_3 = \sigma^{-1} v_2$ é um monômio em $P_n(A)$. Como $e_{T_1} v_1$ e $e_{T_1} v_3$ são ambos não nulos, segue da condição que $KS_n e_{T_1} v_1 = KS_n e_{T_1} v_3$ e assim $KS_n e_{T_1} f_1 = KS_n e_{T_2} f_2$. Pela Proposição 2.4, temos a distributividade de $L_n(A)$. □

Nos será muito útil descrever $e_D f$ em casos particulares onde o polinômio f não é linear. Assim, poderemos igualar algumas variáveis de f antes de analisar igualdades da forma $KS_n e_D f$, reduzindo o número de casos a se estudar.

Observação 2.6. *Considere uma variedade de álgebras V, a partição $\lambda = (k_1, \ldots, k_m)$ de n, e $f \in P_n(V)$. Dado um diagrama de Young D, sejam*

$l_{i1}, l_{i2}, \ldots, l_{ik_i}$ os k_i números com os quais foram preenchidos a i-ésima linha, e faça,

$$x_{l_{i1}} = x_{l_{i2}} = \cdots = x_{l_{ik_i}}$$

para $i = 1, \ldots, m$, e tome $g \in F\{X\}/T(V)$ como sendo f após a substituição acima. Dessa forma, segue da Observação 1.31 que

$$lin(g) = \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma f,$$

Se em particular, $f = e_D v$ para algum $v \in P_n(V)$, então

$$lin(g) = \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma e_D v = |R(T)| e_D v = |R(T)| f.$$

Proposição 2.7. *Sejam D um diagrama de Young e $v_1, v_2 \in P_n(V)$ polinômios tais que $e_D v_1, e_D v_2 \neq 0$, e g_1 e g_2 os polinômios obtidos de $f_1 = e_D v_1$ e $f_2 = e_D v_2$ usando as substituições de variáveis feitas na Observação 2.6. Se g_1 e g_2 são linearmente dependentes, então $KS_n e_D v_1 = KS_n e_D v_2$.*

Demonstração. Vemos da Observação 2.6, que se g_1 e g_2 são linearmente dependentes, então $e_D v_1$ e $e_D v_2$ são também linearmente dependentes, gerando assim o mesmo KS_n módulo. $\square$

No contexto da Proposição 2.5, nos é relevante analisar para quais diagramas de Young D a igualdade $KS_n e_D v_1 = KS_n e_D v_2$ é trivial, ou ao menos é simples de se mostrar.

Proposição 2.8. *Seja V uma variedade de álgebras alternativas, e sejam D_1 e D_2 as únicas tabelas standard dos diagramas de Young formados por uma linha e uma coluna, respectivamente. Então,*

1. a condição $KS_n e_{D_1} v_1 = KS_n e_{D_1} v_2$ é sempre válida para monômios $v_1, v_2 \in P_n(V)$ tais que $e_{D_1} v_i \neq 0$;

2. $KS_n e_{D_2} v_1 = KS_n e_{D_2} v_2$ é equivalente à dependência linear dos polinômios $e_{D_2} v_1$ e $e_{D_2} v_2$.

Demonstração. Para *1*, basta ver que com as substituições feitas na Observação 2.6, qualquer monômio de $P_n(V)$ se torna x^n a menos de um escalar.

Para *2*, temos $e_{D_2} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma$, e segue da unidimensionalidade dos módulos $KS_n e_{D_2} v$ que a condição $KS_n e_{D_2} v_1 = KS_n e_{D_2} v_2$ é equivalente à dependência linear dos polinômios $e_{D_2} v_1$ e $e_{D_2} v_2$. $\square$

Capítulo 3

Distributividade de reticulados de subvariedades de álgebras associativas

Neste capítulo, K é um corpo de característica 0 e $K\langle X\rangle$ é a álgebra associativa livre sem unidade. Recordamos que há um isomorfismo entre KS_n como um KS_n-módulo à esquerda e o KS_n-módulo P_n dos polinômios associativos multilineares de grau n. Então, por simplicidade de notação, muitas vezes consideraremos os elementos

$$\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma \qquad \text{e} \qquad \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$$

como se fossem o mesmo objeto.

Baseado no artigo [1], nosso objetivo principal é mostrar

Teorema: *O reticulado de subvariedades de V é distributivo se, e só se, para certos $\alpha, \beta \in K$, com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, todas as álgebras em V satisfazem a identidade*

$$\alpha[x, y]y + \beta y[x, y] = 0. \qquad (3.0.1)$$

3.1 Resultados Preliminares

Seguem alguns lemas que serão utilizados para a demonstração do resultado principal dessa seção.

Lema 3.1. *Em uma álgebra associativa A, vale a identidade de Jacobi*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Demonstração. Temos que

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] =$$

$$xyz-xzy-yzx+zyx+yzx-yxz-zxy+xzy+zxy-zyx-xyz+yxz=0$$

□

Lema 3.2. *Para $\alpha,\beta\in K$, com $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, o submódulo de P_3 gerado por $\theta(x,y,z)=\alpha([x,y]z+[x,z]y)+\beta(y[x,z]+z[x,y])$ é minimal e tem dimensão 2.*

Demonstração. Considerando S_3 como o grupo das permutações de $\{x,y,z\}$ e $H=\langle(y\ \ z)\rangle$. Observe que $(y\ \ z)\theta=\theta$. Como

$$S_3=H\cup(x\ \ y)H\cup(x\ \ z)H,$$

segue que o submódulo $KS_3\theta$ de P_3 é gerado (como espaço vetorial) pelos elementos θ, $(x\ \ y)\theta$ e $(x\ \ z)\theta$. Mas, a soma desses 3 elementos é 0, e daí $\dim KS_3\theta=2$.

Se $KS_3\theta$ não fosse irredutível, deveria ser a soma de 2 submódulos de dimensão 1 de P_3. Só que P_3 possui apenas 2 submódulos unidimensionais, que são gerados por

$$h_3(x,y,z)=\sum_{\sigma\in S_3}\sigma \quad \text{e} \quad s_3(x,y,z)=\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma\sigma.$$

Daí, $h_3(x,y,z)$ seria consequência de $\theta(x,y,z)$, o que não acontece, pois $\theta(x,y,z)$ é identidade para toda álgebra associativa, comutativa com unidade, mas $h_3(x,y,z)$ não é.

□

Lema 3.3. *Sejam I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e $f=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}\in I$ um polinômio multilinear de grau $n\in\mathbb{N}$.*

1. *Sendo $A_n\leq S_n$ o subgrupo formado pelas permutações pares, $A=\sum_{\sigma\in A_n}\alpha_\sigma\neq B=\sum_{\sigma\in S_n-A_n}\alpha_\sigma$, então o polinômio standard $s_n(x_1,...,x_n)$ pertence a I.*

2. *Se $C=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma\neq 0$, então*

$$h_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}$$

pertence a I.

Demonstração. 1. Considere $\tau \in A_n$ uma permutação par fixada e φ_τ o endomorfismo de $K\langle X\rangle$ que leva x_i em $x_{\tau^{-1}(i)}$, se $1 \leq i \leq n$, e deixa fixos os demais x_j. Temos que $\varphi_\tau f \in I$ é multilinear e, em $\varphi_\tau f$, o coeficiente da permutação $\sigma \in S_n$ é $\alpha_{\tau\sigma}$. Logo, sendo $\sigma \in S_n$ fixado, enquanto τ percorre A_n, temos que $\tau\sigma$ percorre a classe lateral $A_n\sigma$. Logo,

$$g(x_1, ..., x_n) = \sum_{\tau \in A_n} \varphi_\tau f = \sum_{\sigma \in A_n} A x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n - A_n} B x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)}$$

Ainda, considerando $h(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = g(x_2, x_1, x_3, ..., x_n)$ (isto é, permutando a primeira e a segunda variáveis em g), temos

$$h(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in A_n} B x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n - A_n} A x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)}$$

Ademais, como $A \neq B$, temos que $p = \frac{1}{A-B}(g - h)$ é bem definida, pertence a I e $p = s_n(x_1, \ldots, x_n)$.

2. Observe que

$$\sum_{\mu \in S_n} \mu f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = B h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

de onde $h \in KS_n f \subseteq I$. □

Lema 3.4. *Se vale*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] = [x_1, x_4][x_2, x_3], \tag{3.1.1}$$

então

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6[x_1, x_2][x_3, x_4].$$

Demonstração. Sabe-se que

$$s_4 = [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_4][x_1, x_2] + [x_1, x_3][x_4, x_2] +$$

$$+ [x_4, x_2][x_1, x_3] + [x_1, x_4][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_4]$$

Temos que mostrar que as parcelas do segundo membro desta igualdade, as quais denotaremos como (I), (II),(III),(IV),(V), (VI), respectivamente, são todas iguais a $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Enquanto a igualdade (I)=$[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é trivial, outra delas segue da identidade (3.1.1), a saber, a igualdade entre (I) e (V). Quanto às outras igualdades:

a) Definindo um endomorfismo de $K\langle X\rangle$ tal que $x_1 \mapsto x_1$, $x_2 \mapsto x_3$, $x_3 \mapsto x_4$, $x_4 \mapsto x_2$, a identidade (3.1.1) toma a forma

$$[x_1, x_3][x_4, x_2] = [x_1, x_2][x_3, x_4]$$

o que mostra a igualdade entre (I) e (III).

b) Fazendo agora $x_1 \mapsto x_2$, $x_2 \mapsto x_4$, $x_3 \mapsto x_3$, $x_4 \mapsto x_1$, concluímos que

$$[x_2, x_4][x_3, x_1] = [x_2, x_1][x_4, x_3] = [x_1, x_2][x_3, x_4]$$

o que mostra a igualdade entre (I) e (IV), pois $[a, b] = -[b, a]$.

c) Com $x_1 \mapsto x_3$, $x_2 \mapsto x_1$, $x_3 \mapsto x_2$, $x_4 \mapsto x_4$, temos

$$[x_3, x_1][x_2, x_4] = [x_3, x_4][x_1, x_2]$$

de onde (II) é igual a (III), que por sua vez é igual a (I).

d) Finalmente, fazendo $x_1 \mapsto x_3$, $x_2 \mapsto x_4$, $x_3 \mapsto x_1$, $x_4 \mapsto x_2$, vemos que

$$[x_3, x_4][x_1, x_2] = [x_3, x_2][x_4, x_1]$$

de onde (VI) é igual a (II), que por sua vez é igual a (I). □

Descreveremos ainda os KS_n-módulos para a álgebra de Grasmann E (Exemplo 1.5), que será importante na demonstração do teorema principal. Fixado $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $H_n(1,1)$ o conjunto de todas as partições de n da forma

$$\lambda = (p, 1, ..., 1) = (p, 1^{-n-p}), \quad 1 \leq p \leq n.$$

Proposição 3.5. *Sendo E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo K de característica 0, valem*

1) O T-ideal de identidades de E é gerado pelo polinômio $[x_1, x_2, x_3]$;

2) $\dim P_n(E) = 2^{n-1}$;

3) $P_n(E) = \sum_{\lambda \in H_n(1,1)} M(\lambda)$;

Demonstração. Recordemos do Exemplo 1.19 que E satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2, x_3] = 0. \tag{3.1.2}$$

Logo, denotando por V a variedade determinada por 3.1.2, temos $E \in V$. Segue da propriedade de derivação do comutador em álgebras associativas (Observação 1.2) que

$$0 = [[x, y^2], z] = [[x, y]y + y[x, y], z] = [[x, y]y, z] + [y[x, y], z] =$$

$$= [x,y][y,z] + [[x,y],z]y + [y,z][x,y] + y[[x,y],z]$$

de onde $0 = [x,y][y,z] + [y,z][x,y]$, e assim

$$0 = [x,y][y,z] + [x,y][y,z] - [x,y][y,z] + [y,z][x,y]$$

$$0 = 2[x,y][y,z] + [[x,y],[y,z]]$$

Mas uma vez que $[[x,y],[y,z]] = 0$, segue que

$$0 = [x,y][y,z]$$

E multilinearizando, obtemos

$$0 = [x,y][z,t] + [x,z][y,t]$$

Ou simplesmente (chamando y, z, t de y_1, y_2, z, respectivamente)

$$0 = [x,y_1][z,y_2] + [x,y_2][z,y_1] \tag{3.1.3}$$

em virtude da Proposição 4.3.3 da referência [8] e (3.1.2), toda identidade polinomial multilinear de G em $x_1,...,x_n$ pode ser escrito como combinação linear de produtos da forma

$$x_{i_1}...x_{i_k}[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2m-1}}, x_{j2m}]; \quad 2m + k = n \tag{3.1.4}$$

e com $i_1 < \cdots < i_k$, e por (3.1.3), podemos supor também $j_1 < j_2 < \cdots < j_{2m}$ (o que mesmo ordenando a base não seria possível, poderíamos ter por exemplo $[x_1,x_3][x_2,x_4]$). O número de polinômios satisfazendo essas condições é (para contar, basta pensar na parte de baixo de cada coeficiente binomial como sendo os comutadores)

$$s_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{2q}$$

onde q é a parte inteira de $\frac{n}{2}$. Denotando por s_1 a soma de todos os coeficientes $\binom{n}{i}$ com $i \leq n$ ímpar, então segue do binômio de Newton

$$2^n = (1+1)^n = s_0 + s_1, \quad 0 = (1-1)^n = s_0 - s_1.$$

Concluímos que $s_0 = s_1 = 2^{n-1}$, e obtemos a seguinte cota superior para $c_n(V)$

$$\dim P_n(V) \leq 2^{n-1},$$

e uma vez que $E \in V$, obtemos também $\dim P_n(E) \leq \dim P_n(V) \leq 2^{n-1}$.

Para mostrar uma cota inferior para dim $P_n(V)$, mostraremos a seguinte afirmação:

Afirmação: Todos os S_n-módulos irredutíveis (a menos de isomorfismo) $M(\lambda)$ associados a uma partição $\lambda \subset H(1,1)$ aparecem com multiplicidade α_λ não nula ao se representar $P_n(E) = \bigoplus \alpha_\lambda M(\lambda)$.

De fato, sendo $\lambda = (k, 1^{n-k})$ uma de tais partições, D_λ o diagrama de Young correspondente, T_λ a tabela standard

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \ldots & k \\ \hline \vdots & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} n & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Temos que

$$R_{T_\lambda} = S_k \quad \text{e} \quad C_{T_\lambda} = S_{n-k+1}(\{1, k+1, ..., n\}) := S.$$

Aplicando o elemento idempotente e_{T_λ} ao monômio $w = x_1...x_n$, obtemos

$$w_k = e_{T_\lambda} w =$$

$$= \left(\sum_{\sigma\in S_k} \sigma\right)\left(\sum_{\tau\in S} (-1)^\tau x_{\tau(1)} x_2 ... x_k x_{\tau(k+1)} ... x_{\tau(n)}\right).$$

Mostremos que w_k não é uma identidade de E. De fato, substituindo $x_1, ..., x_n$ por $\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}$, respectivamente, onde

$$\overline{x_1} = e_1 \ , \ \overline{x_{k+1}} = e_2 \ , \ ... \ , \ \overline{x_n} = e_{n-k+1}$$

e

$$\overline{x_2} = e_{n-k+2} e_{n-k+3} \ , \ \overline{x_3} = e_{n-k+4} e_{n-k+5} \ , \ ... \ , \ \overline{x_k} = e_{n+k-2} e_{n+k-1}.$$

Uma vez que $\overline{x_2}, ..., \overline{x_k}$ são centrais em E, obtemos

$$w_k = \left(\sum_{\sigma\in S_k} \sigma\right) \overline{x_2}, ..., \overline{x_k} St_{n-k+1}(\overline{x_1}, \overline{x_{k+1}}, ..., \overline{x_n}),$$

onde $St_{n-k+1}(\overline{x_1}, \overline{x_{k+1}}, ..., \overline{x_n}) = \sum_{\sigma\in S_{n-k+1}} (-1)^\sigma \overline{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)}}, ..., \overline{x_{\sigma(1)}}$. Como

$$St_{n-k+1}(\overline{x_1}, \overline{x_{k+1}}, ..., \overline{x_n}) = (n-k+1)! e_1 e_{k+1} ... e_n \neq 0,$$

obtemos

$$w_k(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = (n-k+1)! \left(\sum_{\sigma\in S_k} \sigma\right) \overline{x_2} ... \overline{x_k x_1 x_{k+1}} ... \overline{x_n}$$

$$= (n-k+1)!k!\overline{x_1}...\overline{x_k x_{k+1}}...\overline{x_n} = (n-k+1)!k!e_1e_2...e_{n+k-1} \neq 0.$$

O que mostra que w_k não é uma identidade de E. Logo,

$$0 \neq KS_n e_{T_\lambda} w_k \simeq M(\lambda),$$

o que mostra que na decomposição

$$P_n(E) = \bigoplus \alpha_\lambda M(\lambda)$$

a multiplicidade de $M(\lambda^k)$, para $\lambda^k = (k, 1^{n-k})$, $k = 1, ..., n$ é maior ou igual a um, e

$$\dim P_n(E) \geq \sum_{k=1}^{n} \dim M(\lambda^k).$$

Basta então calcular $\dim M(\lambda^k)$, o que é feito usando a fórmula do gancho (Teorema 1.74)

$$\dim M(\lambda^k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!n} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}$$

de onde

$$\dim P_n(E) \geq \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}.$$

E portanto, $\dim P_n(E) = 2^{n-1}$. Uma vez que $\dim P_n(E) \leq \dim P_n(V)$, observamos também que $2^{n-1} \leq \dim P_n(V)$, o que mostra o resultado que $var(E) = V$. □

3.2 Resultado Principal

Em toda esta seção, consideremos V uma variedade de álgebras associativas. Vamos agora à demonstração do principal resultado deste capítulo:

Teorema 3.6. *O reticulado de subvariedades de V é distributivo se, e só se, para certos $\alpha, \beta \in K$, com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, todas as álgebras em V satisfazem a identidade*

$$\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] = 0 \tag{3.2.1}$$

Pelo Lema 2.2, segue que os módulos de $P_1 = M(1)$ e $P_2 = M(1^2) \oplus M(2)$ são sempre distributivos. Assim, para uma álgebra associativa A, os módulos $P_1(A)$ e $P_2(A)$ são distributivos, uma vez que são quocientes de P_1 e P_2, respectivamente. Iremos mostrar a seguinte Proposição, que é equivalente ao Teorema 3.6, pelo Lema 2.1.

Proposição 3.7. *Seja $A \in V$. O reticulado de submódulos de $P_n(A)$ é distributivo para todo $n \geq 3$ se, e somente se, para certos $\alpha, \beta \in K$, com $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, temos*

$$\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] \in T(A).$$

O caso $n = 3$ pode ser estudado separadamente.

Proposição 3.8. *Seja $A \in V$ uma álgebra na variedade V. O reticulado de submódulos de $P_3(A) = \dfrac{P_3}{T(A) \cap P_3}$ é distributivo se, e somente se, para certos $\alpha, \beta \in F$, com $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, temos*

$$\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] \in T(A).$$

Demonstração. Sejam T_1 e T_2 as tabelas

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Temos que $P_3 = M(1^3) \oplus M(3) \oplus M_1 \oplus M_2$, onde $M_1 = KS_3e(T_1)$ e $M_2 = KS_3e(T_2)$ são isomorfos. Suponhamos que $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] \in T(A)$. Sendo

$$\theta(x,y,z) = \alpha([x,y]z + [x,z]y) + \beta(y[x,z] + z[x,y]),$$

segue de 1.31 que $\theta(x,y,z) \in P_3 \cap T(A)$. Do Lema 3.2, temos ainda que $KS_3\theta$ é um KS_3-módulo irredutível e tem dimensão 2. Segue então que $P_3(A)$ tem dimensão ≤ 4, e

$$P_3(A) \subseteq M(1^3) \oplus M(3) \oplus M$$

com M um KS_3-módulo irredutível de dimensão 2 (a saber, um complemento de $KS_3\theta$ em $M_1 \oplus M_2$ obtido pelo Teorema de Maschke), de onde segue do Lema 2.2 a distributividade do reticulado de KS_3-submódulos de $P_3(A)$.

Reciprocamente, suponhamos que $P_3(A)$ é distributivo. Pelo Lema 2.2, segue que em $T(A) \cap P_3$ há um KS_3-submódulo irredutível de dimensão 2. Consideremos os polinômios

$$\theta_1(x,y,z) = [x,y]z + [x,z]y \quad \text{e} \quad \theta_2(x,y,z) = y[x,z] + z[x,y],$$

que pelo Lema 3.2 geram KS_3-submódulos irredutíveis de dimensão 2. Considerando a álgebra $M = \{aE_{11} + bE_{12} \mid a, b \in K\}$, temos que θ_1 é identidade de M, mas θ_2 não é. Logo, $\theta_2 \notin KS_3\theta_1$ e daí $KS_3\theta_1 \cap KS_3\theta_2 = 0$.

Seja J a soma de todos os submódulos minimais de P_3 de dimensão 2. Temos que $\dim J = 4$ e assim $J = KS_3\theta_1 \oplus KS_3\theta_2$. Pelo que foi visto no Lema 3.2,

$$\{\theta_1(x,y,z), (x\ \ z)\theta_1(x,y,z)\} \qquad \{\theta_2(x,y,z), (x\ \ z)\theta_2(x,y,z)\}$$

são base de $KS_3\theta_1$ e $KS_3\theta_2$, respectivamente. Logo, se A é uma álgebra associativa tal que $J \cap T(A) \neq 0$, então existem a, b, c, $d \in K$ tais que

$$q(x,y,z) = a([x,y]z + [x,z]y) + b([z,y]x + [z,x]y) +$$

$$c(y[x,z] + z[x,y]) + d(y[z,x] + x[z,y])$$

é uma identidade não nula de A. Observe que

$$q_2(x,y,z) = q(x,y,z) + (x\ \ z)q(x,y,z) =$$

$$(a+b)([x,y]z + [z,y]x) + (c+d)(z[x,y] + x[z,y]).$$

Como a, b, c e d não são todos nulos, temos que $a+b$, $2a-b$, $2c-d$ e $c+d$ também não podem ser todos nulos. Temos que

$$q(x,y,y) = (2a-b)[x,y]y + (2c-d)y[x,y]$$

e

$$q_2(x,y,y) = (a+b)[x,y]y + (c+d)y[x,y]$$

são identidades de A.

$\square$

Observe que a Proposição 3.8 mostra a implicação direta da Proposição 3.7, pois se $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] \notin T(A)$, para todo $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, então $P_3(A)$ não é distributivo, isto é, existe $n \geq 3$ tal que $P_n(A)$ não é distributivo.

Nos resta mostrar que se existem α, $\beta \in K$, não ambos nulos, tais que $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] \in T(A)$, então $P_n(A)$ é distributivo para $n > 3$. Dividiremos essa demonstração nos seguintes casos, os quais serão tratados nas próximas subseções:

1) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha+\beta \neq 0, \alpha-\beta \neq 0$;
2) $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$;
3) $\alpha = \beta$;
4) $\alpha + \beta = 0$.

3.2.1 Primeiro Caso

Estamos supondo $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] \in T(A)$, onde $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha - \beta \neq 0$. Primeiro, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.9. *A identidade $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y]$, nas condições supostas, tem como consequências as identidades*

$$[x,y]zt \ , \ x[y,z]t \ , \ xy[z,t].$$

Demonstração. A identidade $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] = 0$ tem como consequência as identidades:

a) $[x,y]z + [x,z]y = b(y[x,z] + z[x,y])$, onde $b = -\dfrac{\beta}{\alpha}$. De fato, segue da identidade que

$$[x,y]y = by[x,y]$$

e, substituindo $y = y + z$, concluímos que

$$([x,y]z + [x,z]y) + [x,y]y + [x,z]z = b(z[x,y] + y[x,z]) + by[x,y] + bz[x,z].$$

E utilizando a identidade duas vezes, concluímos que

$$[x,y]z + [x,z]y = b(y[x,z] + z[x,y]).$$

b) $y[x,z] + z[x,y] = c([x,y]z + [x,z]y)$, onde $c = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, o que se mostra de maneira análoga à demonstração da identidade a).

c) $[x, y \circ z] = a([[x,y],z] + [[x,z],y])$, onde $a = \dfrac{(\beta - \alpha)}{(\alpha + \beta)}$ e $y \circ z = yz + zy$. Para mostrar tal identidade, partimos de b) para ter

$$0 = \alpha([x,y]z + [x,z]y) + \beta(y[x,z] + z[x,y]) \tag{3.2.2}$$

Somando $F(x,y) = \beta([x,y]z + [x,z]y] + \alpha(y[x,z] + z[x,y])$ a ambos os lados da igualdade (3.2.2), obtemos

$$F(x,y) = (\alpha + \beta)([x,y]z + [x,z]y + y[x,z] + z[x,y]) =$$

$$= (\alpha + \beta)[x,yz] + [x,zy] = (\alpha + \beta)[x, y \circ z].$$

Somando agora $-F(x,y)$ a ambos os lados de (3.2.2), obtemos

$$-F(x,y) = (\beta - \alpha)(y[x,z] + z[x,y] - [x,y]z - [x,z]y] =$$

$$= (\beta - \alpha)([y,[x,z]] + [z,[x,y]]).$$

Ou ainda

$$F(x,y) = (\beta - \alpha)([[x,y],z] + [[x,z],y])$$

o que mostra a identidade.

d) $[x,y][z,t] + [x,t][z,y] = 0$.

Substituindo x por xt em c), obtemos

$$[xt, y \circ z] = a([xt,y]z + [xt,z]y)$$

e por sua vez, através de cálculos simples, porém laboriosos (basta abrir os comutadores), vale a igualdade

$$[xt, y \circ z] = a([xt,y]z + [xt,z]y) = 2a([x,y][t,z] + [x,z][t,y])$$

$$+ax([[t,y],z] + [[t,z],y]) + a([[x,y],z] + [[x,z],y])t.$$

Aplicando agora a identidade c) duas vezes, obtemos

$$[xt, y \circ z] = 2a([x,y][t,z] + [x,z][t,y]) + x[t, y \circ z] + [x, y \circ z]t =$$

$$= 2a([x,y][t,z] + [x,z][t,y]) + [xt, y \circ z]$$

de onde concluímos a identidade d), uma vez que $a \neq 0$.

e) $[x,y][z,t] = x[y,z]t$. Para demonstrar esta igualdade, substituimos z por zt em c) e usamos que o comutador é uma derivação, para obter

$$[x, y \circ (zt)] = a([[x,y], zt] + [[x,zt],y])$$

$$= a([[x,y],z] + [[x,z],y])t + az([[x,y],t] + [[x,t],y]) + a([x,z][t,y] + [z,y][x,t]).$$

Assim, segue de d) e c), que

$$[x, y \circ (zt)] = [x, y \circ z]t + z[x, y \circ t] = [x, y \circ (zt)] + 2(z[x,y]t - [z,x][y,t])$$

e portanto concluímos que vale a identidade e).

f) $[x,y][z,t] = 0$

g) $x[y,z]t = 0$.

Segue imediatamente da identidade e) que o polinômio

$$f(x,y,z,t) = [x,y][z,t] - x[y,z]t = -xytz - yxzt + yxtz + xzyt =$$

pertence a $T(A)$. Considerando que o monômio $xyzt$ corresponde à permutação identidade, temos que no polinômio $f(x,y,z,t)$ o primeiro, o segundo e o quarto termos correspondem a permutações ímpares, enquanto o terceiro corresponde a uma permutação par. Assim, em $f(x,y,z,t)$, a soma dos coeficientes dos termos ímpares resulta em -1 e a dos coeficientes dos termos pares resulta em 1. Se então do Lema 3.3 que vale a identidade $s_4(x, y, z, t) = 0$. Ademais, segue das identidades d) e e), e do Lema 3.4, que

$$0 = S_4(x, y, z, t) = 6[x, y][z, t] = 6x[y, z]t$$

e assim mostramos as identidades f) e g).

h) $[x, t]zy = 0$

Para demonstrar h), começamos multiplicando a) por t pela direita e usando g) para obter

$$0 = b(y[x, z] + z[x, y])t = [x, y]zt + [x, z]yt \tag{3.2.3}$$

e daí, usando f), temos

$$[x, y]tz + [x, z]ty = 0. \tag{3.2.4}$$

De (3.2.3), permutando z com t e depois permutando y com z, obtemos

$$[x, y]tz = -[x, t]yz \quad \text{e} \quad [x, z]ty = -[x, t]zy.$$

Dessas igualdades e de (3.2.4), obtemos

$$-[x, t]yz - [x, t]zy = 0.$$

Aplicando agora f) obtemos a identidade h).

i) $xy[z, t] = 0$

A demonstração desta identidade é análoga a de h), mas partindo de b). Temos então o resultado. $\square$

Observação 3.10. *Segue deste lema que a álgebra A satisfaz as identidades*

$$xyzt = yxzt \ , \ xyzt = xzyt \ , \ xyzt = xytz.$$

Daí, concluímos que, para toda $\sigma \in S_n$ e todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$ tem-se

$$x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(i-1)} x_{\sigma(i)} x_{\sigma(i+1)} x_{\sigma(i+2)} \ldots x_{\sigma(n)} \equiv$$
$$x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(i-1)} x_{\sigma(i+1)} x_{\sigma(i)} x_{\sigma(i+2)} \ldots x_{\sigma(n)} (mod\ P_n \cap T(A)).$$

Logo,

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} \equiv x_1 x_2 \ldots x_n (mod\ P_n \cap T(A))$$

para toda $\sigma \in S_n$. Logo, $P_n(A)$ é gerado, como espaço vetorial, por

$$x_1 x_2 \ldots x_n + (P_n \cap T(A)),$$

donde $\dim P_n(A) \leq 1$.

Proposição 3.11. *O módulo $P_n(A)$, tal que $n \geq 4$, tem dimensão no máximo um como espaço vetorial sobre K.*

Demonstração. Segue da Observação 3.10 $\square$

Pela impossibilidade de existirem dois submódulos não nulos e distintos em $P_n(A)$, segue que L_n é distributivo.

3.2.2 Segundo Caso

Suporemos $y[x,y] \in T(A)$, isto é, $\alpha = 0$. Destacamos que há certa simetria neste caso. Todos os resultados mostrados possuem um análogo caso $\beta = 0$. Iniciemos o estudo deste caso com o lema:

Lema 3.12. *A identidade $y[x,y]$ tem como consequências as identidades*

$$xy[z,t]\ ,\ x[y,z]t.$$

Demonstração. Basta observar que para mostrarmos as identidades e), f), g), h) da demonstração do lema anterior, só usamos as identidades b) e c), que não dependem de $\alpha \neq 0$. $\square$

Mostraremos que no segundo caso, o módulo $P_n(A)$, para $n \geq 4$, tem no máximo dois submódulos próprios, de onde seria impossível ter um subreticulado isomorfo a

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ A_1 \arrow[dr, dash] & A_2 \arrow[d, dash] & A_3 \arrow[dl, dash] \\ & 0 & \end{tikzcd} .$$

Segue então do Corolário 1.91 que $P_n(A)$ deve ser distributivo.

Denotemos $S_{n-1} = \{\tau \in S_n; \tau(1) = 1\}$. Pelo Lema 3.12 e um raciocínio análogo à Observação 3.10, vemos que,

$$x_1x_2...x_n - x_1x_{\tau(2)}...x_{\tau(n)} \in P_n \cap T(A)$$

para qualquer permutação $\tau \in S_{n-1}$, e como $P_n \cap T(A)$ é um KS_n-módulo à esquerda, segue que

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(1)}x_{\sigma\tau(2)}...x_{\sigma\tau(n)} \in P_n \cap T(A) \tag{3.2.5}$$

isto é, duas permutações em $\sigma S_{n-1} = \{\tau \in S_n; \tau(1) = \sigma(1)\}$ pertencem à mesma classe lateral de $P_n \cap T(A)$. Em notação de polinômios, isso quer dizer que dois monômios com a mesma primeira variável são iguais módulo $P_n \cap T(A)$.

Seja X o submódulo de $P_n(A)$ gerado pelo elemento

$$\left(\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}\right) + P_n \cap T(A)$$

Em notação de anéis de grupos, usando a equação 3.2.5, isso é igual a

$$\left(\sum_{1\leq k\leq n} n(1 \quad k)\right) + P_n \cap T(A)$$

e Y o submódulo de $P_n(A)$ gerado pelo elemento

$$([x_1, x_2]x_3...x_n) + P_n \cap T(A)$$

Que por sua vez, é igual à $(1 - (1 \quad 2)) + P_n \cap T(A)$. Uma vez que Y é submódulo à esquerda, temos, para cada $1 \leq k \leq n$,

$$(2 \quad k)\,(1 - (1 \quad 2)) + P_n \cap T(A) = ((2 \quad k) - (1 \quad k \quad 2)) + P_n \cap T(A) \in Y$$

Mas uma vez que $1 \equiv (2 \quad k)(\text{mod} P_n \cap T(A))$ e $(1 \quad k \quad 2) \equiv (1 \quad k)(\text{mod} P_n \cap T(A))$, concluímos que

$$1 - (1 \quad k) \in Y$$

De onde

$$\left(\sum_{1\leq k\leq n} n(1 \quad k)\right) + P_n \cap T(A) + \sum_{1\leq k\leq n} (1 - (1 \quad k)) = (n!)1 \in X + Y$$

E portanto, $X + Y = P_n(A)$, visto que $(n!)1$ é inversível em KS_n.

Para mostrar que, nesse caso, o módulo $P_n(A)$, para $n \geq 4$, tem no máximo dois submódulos próprios, é suficiente mostrar que todo submódulo não nulo de $P_n(A)$ contém X ou Y. Com efeito, caso valha esta condição, podemos concluir trivialmente que X e Y são minimais, e que se M é um submódulo que contém Y propriamente, então existe $m = x + y \in M$, com $0 \neq x \in X$ e $y \in Y$. Nessas condições, $x = m - y \in M$, de onde o submódulo gerado por x está contido em M. Pela minimalidade de X, segue que $X \subseteq M$ e $M = P_n(A)$.

Mostremos então que essa condição é válida. Seja f uma identidade de KS_n que não pertence a $P_n \cap T(A)$. Como já argumentado, módulo $P_n \cap T(A)$, a identidade f se reduz à forma

$$\sum_{i=1} \alpha_i x_i x_2 ... x_{i-1} x_1 x_{i+1} ... x_n$$

ou ainda

$$\sum_{i=1} \alpha_i x_i x_1 x_2 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_n$$

e multiplicando por escalares em KS_n convenientes, podemos supor $\alpha_1 = 1$. Caso $\sum \alpha_i \neq 0$, então pelo lema 3.3, temos que o submódulo de $P_n(A)$ gerado por $f + P_n \cap T(A)$ contém X. Se $\sum \alpha_i = 0$, podemos (multiplicando por escalares convenientes) supor que $\alpha_2 = -1$. Sendo $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(2) = 2\}$, temos

$$\sum_{\sigma \in H} \sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$

$$-(n-1)! x_2 x_1 x_3 \ldots x_n + (n-2)! \sum_{i \neq 2} x_i x_2 x_1 x_3 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n \ (mod\ T(A)).$$

Como, para cada $i \neq 2$, temos

$$x_2 x_1 x_3 \ldots x_n \equiv x_2 x_i x_1 x_3 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n \ (mod\ T(A))$$

e daí

$$\sum_{\sigma \in H} \sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$

$$\sum_{i \neq 2} [x_i, x_2] x_1 x_3 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n \ (mod\ T(A)). \tag{3.2.6}$$

e permutando x_1 com x_2, obtemos

$$[x_2, x_1] x_3 ... x_{n-1} - \sum_{i=2}^{n-1} [x_1, x_i] x_2 x_3 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_{n-1}$$

Somando e subtraindo

$$\sum_{i=2}^{n-1} x_2 x_i x_1 x_3 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_{n-1}$$

e observando que dois monômios são iguais módulo $P_n \cap T(A)$ se, e somente se, tem o mesmo primeiro termo, obtemos

$$= [x_2, x_1] x_3 ... x_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1} ([x_2, x_1] x_i) + [x_i, x_2] x_1) x_3 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_{n-1}$$

e somando e subtraindo $[x_1, x_2] x_3 ... x_{n-1}$

$$\equiv n [x_2, x_1] x_2 ... x_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} [x_i, x_2] x_1 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_{n-1}. \tag{3.2.7}$$

De 3.2.7 e de 3.2.6, obtemos a identidade

$$[x_2, x_1] x_3 ... x_{n-1}$$

de onde, nesse caso, o submódulo de $P_n(A)$ gerado pelo elemento $f + (P_n \cap T(A))$ contém Y.

Mostramos assim a distributividade do reticulado de submódulos de $P_n(A)$ no caso em que $\alpha = 0$.

3.2.3 Terceiro Caso

Estamos supondo $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] \in T(A)$, com $\alpha = \beta$. Neste caso, nossa identidade toma a forma $[x,y]y + y[x,y] = [x,y^2]$, a menos de uma multiplicação por escalar.

Lema 3.13. *Se* $[x,y^2] \in T(A)$ *e* $f(x,y,z) \in P_3(A)$, *então*

$$f(x,y,z) = \alpha h_3(x,y,z) + \beta S_3(x,y,z) + \gamma[[x,y],z] + \lambda[[x,z],y],$$

onde $h_3(x,y,z) = \sum_{\sigma \in S_3} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$ *e* $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in F$.

Demonstração. Considere os polinômios

$$f(x,y,z) = [x,y]z + [x,z]y + y[x,z] + z[x,y] = [x,y] \circ z + [x,z] \circ y$$

$$g(x,y,z) = [x,y]z + [x,z]y - (y[x,z] + z[x,y]) = [x,y,z] + [x,z,y]$$

Como $g(x,y,z)$ é identidade da álgebra de Grassmann, mas $f(x,y,z)$ não é, temos que $f(x,y,z) \notin KS_3g$ e daí $KS_3f \cap KS_3g = 0$. Logo, $J = KS_3f \oplus KS_3g$ e assim

$$P_3 = KS_3h_3 \oplus KS_3s_3 \oplus KS_3f \oplus KS_3g$$

Observemos que $\{g(x,y,z), g(y,x,z)\}$ é uma base de KS_3g e que

$$g(y,x,z) = -[x,y,z] + [y,z,x] =$$

$$-2[x,y,z] + [x,y,z] + [y,z,x] = -2[x,y,z] - [z,x,y]$$

sendo a última igualdade consequência da identidade de Jacobi (Lema 3.1). Segue então que $\{[x,y,z],[x,z,y]\}$ é uma base de KS_3g.

Sendo A uma álgebra tal que $[x,y^2] \in T(A)$, temos que $f(x,y,z) \in T(A)$ e daí $KS_3f \subseteq T(A)$. $\square$

Lema 3.14. *Suponha que* $[x,y^2] \in A$. *Então,o módulo* $P_4(A)$ *tem no máximo três submódulos irredutíveis distintos. Ademais, o módulo* $P_n(A)$ *(para* $n \geq 5$*) é no máximo unidimensional.*

Demonstração. Sejam X, Y, Z os submódulos de $P_4(A)$ gerados pelos elementos

$$\overline{h_4(x,y,z,t)}\ ,\ \overline{([[x,y],z] + [[x,z],y])t}\ ,\ \overline{([[x,y],z] + [[x,z],y])t}$$

respectivamente, onde $h_n(x_1,...,x_n) = \sum x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}$. Mostremos que todo submódulo não nulo de $P_4(A)$ contém X, Y ou Z.

Para tal, comecemos observando que a identidade $[x,y^2]$ tem como consequência a identidade $[x,yzt] = 0$, visto que

$$0 = [x,(y_1+y_2)^2] = [x, y_1^2 + y_1y_2 + y_2y_1 + y_2^2]$$

e daí

$$[x, y_1 y_2] = -[x, y_2 y_1]$$

Ademais, substituindo $y_1 = y$ e $y_2 = zt$, segue que

$$[x, yzt] = -[x, zty] = [x, tyz] = -[x, yzt].$$

De posse dessa identidade, vemos que uma identidade multilinear $g(x, y, z, t)$ é congruente a uma da forma $g_1(x, y, z)t$, com $g_1(x, y, z) \in P_3$. Ademais, do lema 3.13, podemos escrever $g(x, y, z, t)$ como

$$\alpha h_3(x, y, z)t + \beta s_3(x, y, z)t + \gamma[[x, y], z]t + \lambda[[x, z], y]t.$$

Seja G o submódulo de $P_4(A)$ gerado pelo elemento $g + P_4 \cap T(A)$. Estudemos os seguintes quatro casos:

a) Se $\alpha \neq 0$, então multiplicando g por transposições, consegue-se zerar os outros coeficientes e concluir que G contém X.

b) Se $\alpha = 0$ e $\gamma + \lambda \neq 0$, então (basta trocar y por z e somar as coisas) g módulo $P_4 \cap T(A)$ tem como consequência a identidade $[[x, y], z]t + [[x, z], y]t$, de onde G contém Y.

c) Se $\alpha = 0$, $\gamma + \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$, então substituindo z por x, observamos que g módulo $P_4 \cap T(A)$ tem como consequência a identidade $[[x, z], x]t$, cuja linearização é o gerador de Y.

d) Se $\alpha = \gamma = \lambda = 0$ e $\beta \neq 0$, então G contém Z.

Assim, a primeira parte do lema está provada. De resto, basta mostrar que $[x, yzt] = 0$ (ou seja, $xyzt = yztx$) tem como consequência as identidades

$$[x, y]ztu\ ,\ x[y, z]tu\ ,\ xy[z, t]u\ ,\ xyz[t, u]$$

e o lema segue da observação 3.10. Observe que, de $[x, yzt] = 0$,

$$xyz(tu) = yz(tu)x \qquad \text{e} \qquad ztux = xztu.$$

Multiplicando a segunda igualdade por y pela esquerda, temos a primeira das quatro identidades.

De $[x, yzt] = 0$ segue que $([y, z]tu)x = x([y, z]tu)$. Logo, a segunda identidade segue da primeira e de $[x, yzt] = 0$. A segunda e a terceira seguem analogamente. □

O lema acima é o suficiente pra mostrar o terceiro caso. Com efeito, se algum dos $P_4(A)$ tiver dois módulos irredutíveis isomorfos e diferentes, digamos M_1 e M_2, e $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ são elementos não nulos, podemos criar os módulos

$$KS_3(x_1 + x_2); \quad KS_3(x_1 - x_2)$$

os quais são irredutíveis e diferentes entre si e de M_1, M_2.

3.2.4 Quarto Caso

Estamos supondo $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] \in T(A)$, com $\alpha + \beta = 0$. Nesse caso, a menos de uma multiplicação por escalar, nossa identidade é da forma

$$[[x,y],y] = 0. \tag{3.2.8}$$

Módulo o T-ideal gerado por tal identidade vale, por uma simples multilinearização

$$[[x,y],z] + [[x,z],y] \equiv 0$$

de onde

$$[[x,y],z] \equiv -[[x,z],y] = [[z,x],y] \equiv -[[z,y],x].$$

Segue da identidade de Jacobi (Lema 3.1) $-[[z,y],x] = [[x,z],y] - [[x,y],z]$, e daí

$$-[[z,y],x] = [[x,z],y] - [[x,y],z] \equiv -2[[x,y],z]$$

de onde é uma consequência de (3.2.8) a identidade

$$[[x,y],z] = 0.$$

Logo, temos $[[x,y],z] \in T([[x,y],y])$. Como $[[x,y],y] \in T([[x,y],z])$, mostramos que $T(A)$ é exatamente o T-ideal da álgebra de Grassmann (Proposição 3.5).

Do item *3)* da Proposição 3.5 e do Lema 2.2, segue a distributividade de $P_n(A)$ neste caso.

Capítulo 4

Distributividade de reticulados de subvariedades em álgebras alternativas

Neste capítulo, estudaremos uma generalização do resultado anterior, mas supondo que a variedade é de álgebras alternativas, ao invés de associativas. Tal generalização foi apresentada no artigo [14], e se sustenta no caso associativo, utilizando-se das contas já feitas para reduzir o número de casos.

Teorema 4.1. *Seja V uma variedade de álgebras alternativas sobre um corpo K de característica zero. Para a distributividade do reticulado de subvariedades $L(V)$, é necessário e suficiente que para alguns $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, com $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$, as seguintes identidades sejam satisfeitas em V:*

$$\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] = 0, \tag{4.0.1}$$

$$\gamma S_3^1(x_1,x_2,x_3) + \delta S_3^2(x_1,x_2,x_3) = 0 \tag{4.0.2}$$

onde

$$S_3^1(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)},$$

$$S_3^2(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \sigma x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}).$$

No decorrer desse capítulo, K é um corpo de característica 0, V é uma variedade de álgebras alternativas sobre K, $F = F_V(X)$ é a álgebra livre da variedade V com conjunto de geradores livres $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Seja P_n o KS_n-submódulo de F gerado por todos os monômios não associativos multilineares nos n argumentos fixados $x_1, ..., x_n$, e consideremos para alguma álgebra $A \in V$ os KS_n-módulos

$$P_n(V) = \frac{P_n}{P_n \cap T(V)}, \quad P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)},$$

e L_n o reticulado de KS_n-submódulos de $P_n(V)$.

4.1 Distributividade de L_3 e L_4

No caso associativo, nos foi útil discutir a distributividade do reticulado de submódulos L_3 separadamente. Aqui, discutiremos individualmente tanto L_3 quanto L_4.

Proposição 4.2. *Para a distributividade do reticulado L_3, é necessário e suficiente que as identidades (4.0.1) e (4.0.2) sejam satisfeitas na variedade V.*

Demonstração. Suponha que L_3 seja distributivo. Considere a tabela de Young

$$D_1 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}, \quad D_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

e da Proposição 2.5 segue que $KS_3 e_{D_1}(xy)z = KS_3 e_{D_1} x(yz)$, e como S_3 age trivialmente em e_{D_1}, segue que existem $\gamma, \delta \in K$ tais que

$$\gamma e_{D_1}(xy)z + \delta e_{D_1} x(yz) = 0,$$

de onde a identidade (4.0.2) é necessária. Quanto à necessidade de (4.0.1), consideremos

$$\theta_1(x,y,z) = [x,y]z + [x,z]y \quad \text{e} \quad \theta_2(x,y,z) = (yx)z - (yz)x + (zx)y - (zy)x,$$

e o mesmo cálculo feito na Proposição 3.8 (simplesmente se fixa todos os parênteses na posição de $(xy)z$) mostra que é satisfeita uma identidade da forma

$$\alpha[x,y]y + \beta((yx)y - (yy)x)$$

que na presença das identidades alternativas mostra tal necessidade.

Ademais, suponha que são satisfeitas as identidades (4.0.1) e (4.0.2). E consideremos as seguintes tabelas de Young

$$\Delta_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} \quad \Delta_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \Delta_3 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}.$$

Devemos mostrar que, para $i = 1, 2, 3$, vale a igualdade $KS_3 e_{\Delta_i} v_1 = KS_3 e_{\Delta_i} v_2$ para quaisquer monômios $v_1, v_2 \in F_3$ tais que $e_{\Delta_i} v_1, e_{\Delta_i} v_2 \neq 0$.

Para Δ_1, tal propriedade segue trivialmente da Proposição 2.8, enquanto para Δ_3, segue da equação (4.0.2). Nos resta mostrar que tal igualdade é válida para Δ_2. Denotando e_{Δ_2} por e_D, segue da Proposição 3.8 (fixando todos os parênteses na posições $(xy)z$ para a primeira igualdade e na posição $x(yz)$ para a segunda) que $KS_3 e_D (xy)z = KS_3 e_D \sigma((xy)z)$ e $KS_3 e_D x(yz) = KS_3 e_D \sigma(x(yz))$, para qualquer $\sigma \in S_3$. É então suficiente mostrar que

$$KS_3 e_D (xy)z = KS_3 e_D x(yz).$$

Comecemos linearizando

$$\alpha([x, y])y + \beta y([x, y]) = 0,$$

onde obtemos, para $x = x_1, y = x_2, z = x_3$

$$\alpha(Id - (12) + (23) - (132))(xy)z + \beta((12) - (123) + (132) - (13))x(yz) = 0.$$

Adotando as notações da Proposição 3.8, e chamando $v_1 = (xy)z, v_2 = x(yz)$, vemos que $\{e(T_1)v_i, (123)e(T_1)v_i, e(T_2)v_i, (123)e(T_2)v_i\}$ é um conjunto gerador para $KS_3 e_D v_i$, para $i = 1, 2$. Verifica-se que

$$(Id - (12) + (23) - (132))(xy)z = e(T_1)v_1 - 2(123)e(T_1)v_1 - 2(123)e(T_2)v_1,$$

$$((12) - (123) + (132) - (13))x(yz) =$$

$$2e(T_1)v_2 + 3(123)e(T_1)v_2 + e(T_2)v_2 + 3(123)e(T_2)v_2.$$

Assim, supondo $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, segue que $KS_3 e_D v_1 \cap KS_3 e_D v_2$ é não trivial. Como ambos os módulos são irredutíveis, segue que eles são iguais. Caso $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, associamos a equação (4.0.1) de maneiras diferentes antes de linearizar, e podemos solucionar o problema de maneira análoga. $\square$

Para L_4, vamos proceder conforme a Proposição 2.7. Consideremos as seguintes tabelas de Young

$$D_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad D_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}, \quad D_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad D_4 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline\end{array}.$$

Usaremos as notações $e_i = e_{D_i}$, $i = 1, ..., 4$, $w_1 = ((xy)z)t$, $w_2 = (xy)(zt)$, $w_3 = x((yz)t)$, $w_4 = (x(yz))t, w_5 = (x(yz))t$, e $S^i = S^i(x, y, z, t) = e_4 w_i$, para $i = 1, ..., 5$.

Para um monômio $v = v(x, y, z, y) \in P_4$, vamos descrever $e_i v$.

1) Temos que

$$R_{D_1} = \{Id, (1\ 3), (1\ 4), (3\ 4), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\}$$

$$C_{D_1} = \{Id, (1\ 2)\}$$

de onde

$$e_1 = Id + (1\ 3) + (1\ 4) + (3\ 4) + (1\ 3\ 4) + (1\ 4\ 3)$$
$$-(1\ 2) - (1\ 2\ 3) - (1\ 2\ 4) - (3\ 4)(1\ 2) - (1234) - (1243)$$

Analisemos então $e_1 v$ para $x = z = t$. Observe que os termos positivos de e_1 não alteram a posição de y, e que os termos negativos todos movem y para onde antes estava x. Concluímos, com essa substituição, que $e_1 v$ é, a menos de sinal, um dos polinômios:

$$g_1 = 6[x, y]x^2, \quad g_2 = 6x[x, y]x, \quad g_3 = 6x[x^2, y],$$
$$g_4 = 6[x^2, y]x, \quad g_5 = 6[x^3, y], \quad g_6 = 6x^2[x, y].$$

Sendo satisfeita a equação (4.0.1), os polinômios g_i são dois a dois linearmente dependentes.

2) De maneira análoga, $e_2 v$, para $x = z$, $y = t$, coincide a menos de sinal com um dos seguintes polinômios

$$h_1 = 4[x, y]^2 \quad h_2 = 4(x[x, y]y - y[x, y]x), \quad h_3 = 4(x[x, y^2] - y[x^2, y]),$$

os quais também são linearmente dependentes supondo a equação (4.0.1).

3) $e_3 v$, para $x = t$, coincide com um dos seguintes polinômios $f_{ij}|_{x=t}$, onde $i = 1, ..., 4$ e $j = 1, ..., 5$;

$$f_{1j} = e_3 w_j(x, y, z, t), \quad f_{2j} = e_3 w_j(t, y, z, x),$$
$$f_{3j} = e_3 w_j(x, t, z, y), \quad f_{4j} = e_3 w_j(x, y, t, z).$$

A forma de tais polinômios, onde j nos dá a posição dos parênteses, é

$$f_{1j}|_{x=t} = 2S_3(x, y, z)x, \quad f_{2j}|_{x=t} = 2xS_3(x, y, z),$$
$$f_{3j}|_{x=t} = 2(x^2zy - x^2yz + yx^2z - zx^2y + zxyx - yxzx),$$
$$f_{4j}|_{x=t} = 2(yzx^2 - zyx^2 + zx^2y - yx^2z + xyxz - xzxy),$$

onde $S_3(x, y, z) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \sigma xyz$ considera x, y, z como x_1, x_2, x_3 para agir nos índices. Podemos usar informações para elaborar uma caracterização de distributividade específica para L_4, a qual será usada futuramente.

Proposição 4.3. *Seja V uma variedade de álgebras alternativas em que é satisfeita a identidade $\alpha[x,y]y + \beta y[x,y] = 0$, para $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Considerando*

$$D_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, D_4 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline\end{array},$$

Para que $L_4(V)$ seja distributivo, é necessário e suficiente que $KS_4e_{D_i}f_1 = KS_4e_{D_i}f_2$ para polinômios $f_1, f_2 \in P_4(V)$ tais que $e_{D_i}f_1, e_{D_i}f_2 \neq 0$, $i = 3, 4$. Ou ainda, se

a) $S^i = S^i(x,y,z,t) = e_{D_4}w_i$, $i = 1, ..., 5$, são dois a dois LD, para $w_1 = ((xy)z)t$, $w_2 = (xy)(zt)$, $w_3 = x((yz)t)$, $w_4 = (x(yz))t, w_5 = (x(yz))t$, e

b) $KS_4f_{ij} = KS_4f_{i'j'}$, para todos $i, i' = 1, ..., 4$ e $j, j' = 1, ..., 5$ tais que $f_{ij} \neq 0$ e $f_{i'j'} \neq 0$,

Então o reticulado $L_4(V)$ é distributivo.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 2.7 e da discussão anterior. □

4.2 Resultado Principal

Observe primeiramente que se alguma das identidades (4.0.1) ou (4.0.2) não é satisfeita, então L_3 não é distributivo, o que mostra a necessidade no Teorema 4.1. Começaremos a demonstração da suficiência de forma análoga ao caso associativo, dividindo em casos. Primeiro, veremos que alguns casos seguem da discussão onde V é uma variedade de álgebras associativas.

Observação 4.4. *Seja $\lambda + \gamma = 0$. Então, toda álgebra alternativa satisfazendo*

$$\gamma s_3^1(x_1, x_2, x_3) + \delta s_3^2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

é associativa. Com efeito, tal identidade pode ser vista como

$$\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

de onde, usando a antissimetria do associador, concluímos que

$$0 = 6(x_1, x_2, x_3),$$

o que mostra o resultado. De posse dessa observação e dos resultados do capítulo anterior, iremos supor que $\gamma + \delta \neq 0$.

Suponhamos que as identidades (4.0.1) e (4.0.2) são satisfeitas, mostremos que L_n é distributivo, para todo $n \geq 4$. Temos os casos:

A) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha - \beta \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$;

B) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha - \beta \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$;

C) $\alpha = 0$, $\gamma \neq 0$ (ou analogamente $\beta = 0, \delta \neq 0$);

D) $\alpha = 0, \gamma = 0$ (ou analogamente $\beta = 0, \delta = 0$);

E) $\alpha = \beta, \gamma \neq \delta$;

F) $\alpha = \beta, \gamma = \delta$;

G) $\alpha = -\beta, \delta \neq 0$ (e analogamente $\alpha = -\beta, \gamma \neq 0$).

4.2.1 Alguns Lemas Técnicos

Mostraremos nessa subseção alguns lemas e identidades que nos permitirão provar muitos casos de uma só vez. No decorrer das demonstrações que seguem, é importante recordar das propriedades apresentadas no Lema 1.36 e na Observação 1.40. Recordamos ainda a notação $x \circ y = xy + yx$.

Lema 4.5. *Em uma álgebra qualquer, sempre é satisfeita a identidade*

$$(tx, y, z) + (t, x, yz) - t(x, y, z) - (t, x, y)z - (t, xy, z) = 0.$$

Demonstração. Basta explicitar tais associadores e observar que ocorrem vários cancelamentos. □

Lema 4.6. *Considere V uma variedade de álgebras alternativas em que o associador $g(x, y, z, t) = (tx, y, z)$ é antissimétrico. Então, $(x, y, z) \in N(F)$.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
((xy)z, t, s) &= g(z, t, s, xy) = -g(z, xy, s, t) = -(tz, xy, s) = \\
&= (xy, tz, s) = g(y, tz, s, x) = -g(s, tz, y, x) = -(xs, tz, y) = \\
&= (tz, xs, y) = g(z, xs, y, t) = -g(z, xs, t, y) = -(yz, xs, t) = \\
&= (xs, yz, t) = g(s, yz, t, x) = g(yz, t, s, x) = (x(yz), t, s).
\end{aligned}$$

De onde $((x, y, z), t, s) = 0$. O fato de que $(t, (x, y, z), s) = (t, s, (x, y, z)) = 0$ segue da anti-simetria do associador numa álgebra alternativa. □

Lema 4.7. *Para $\alpha+\beta \neq 0$, as identidades alternativas e a identidade (4.0.1) implicam*

$$2a[x, y][t, y] + 3a[(x, y, t), y] + 3(x, y^2, t) = 0, \tag{4.2.1}$$

onde $a = \dfrac{(\beta - \alpha)}{(\beta + \alpha)}$. Se também vale $\alpha - \beta \neq 0$, então é também satisfeita a identidade

$$[x, t][y, t] + t[x, y]t = [(x, y, t), t]. \tag{4.2.2}$$

Demonstração. Da equação (4.0.1), temos

$$0 = 2(\alpha[x,y]y + \beta y[x,y]) + (\beta - \beta)[x,y]y + (\alpha - \alpha)y[x,y]$$

$$= (\alpha+\beta)([x,y]y + y[x,y] + (\alpha-\beta)([x,y]y + y[x,y])$$

de onde

$$[x, y^2] = a[[x,y],y], \tag{4.2.3}$$

e substituindo x por xt em (4.2.3), segue da Observação 1.40

$$[xt, y^2] = a[[xt,y],y] =$$

$$= a([x[t,y],y] + [[x,y]t,y] + 3[(x,t,y),y])$$

$$= a(2[x,y][t,y] + x[[t,y],y] + [[x,y],y]t + k(x,y,z,t))$$

onde $k(x,y,z,t) = 3(x,[t,y],y) + 3([x,y],t,y) + 3[(x,t,y),y]$. Mas, usando as relações do Lema 1.36, mostra-se que $(x,[t,y],y) = ([x,y],t,y) = -[(x,t,y),y]$, de onde $k(x,y,z,t) = 3[(x,y,t),y]$, e assim

$$[xt, y^2] = 2a[x,y][t,y] + ax[[t,y],y] + a[[x,y]y]t + 3a[(x,y,t),y]$$

$$= 2a[x,y][t,y] + x[t,y^2] + [x,y^2]t + 3a[(x,y,t),y]$$

$$= 2a[x,y][t,y] + [xt,y^2] + 3(x,y^2,t) + 3a[(x,y,t),y],$$

de onde vale (4.2.1).

Supondo $a \neq 0$ e aplicando (4.2.1) para $[x,y][t,y]$ e para $[t,y][x,y]$, vemos que

$$[x,y][t,y] + [t,y][x,y] = 0, \tag{4.2.4}$$

e linearizando (4.2.3), e substituindo $z = t^2$, obtemos

$$[x, y \circ t^2] = a([[x,y],t^2] + [[x,t^2],y]).$$

Mas uma vez que $[[x,y],t^2] = [[x,y],t]t + t[[x,y],t]$ e

$$[[x,t^2],y] = [[x,t]t,y] + [t[x,t],y]$$

$$= [x,t][t,y] + [[x,t],y]t + 3([x,t],t,y) + [t,y][x,t] + t[[x,t],y] + 3(t,[x,t],y)$$

$$= [x,t][t,y] + [[x,t],y]t + [t,y][x,t] + t[[x,t],y] = [[x,t],y]t + t[[x,t],y]$$

segue que

$$[x, y \circ t^2] = a([[x,y],t] + [[x,t],y])t + at([[x,y],t] + [[x,t],y])$$

$$= [x, y \circ t]t + t[x, y \circ t],$$

mas $[x, y \circ t]t + t[x, y \circ t] = ([x, yt] + [x, ty])t + t([x, yt] + [x, ty])$, e por outro lado, utilizando a Observação 1.40 e o Lema 1.36,

$$[x, y \circ t^2] = (yt)[x, t] + [x, yt]t + 3t(t, y, x) + t[x, ty] + [x, t](ty) - 3(t, y, x)t$$

de onde

$$
\begin{aligned}
[x, y \circ t]t + t[x, y \circ t] &= ([x, yt] + [x, ty])t + t([x, yt] + [x, ty]) \\
&= [x, y \circ t^2] + [x, ty]t + t[x, yt] - (yt)[x, t] - [x, t](ty) + 3[t, (x, y, t)] \\
&= [x, y \circ t^2] + (xt)(yt) - (ty)(xt) + (tx)(yt) - (ty)(tx) - (yt)(xt) + \\
&\quad + (yt)(tx) - (xt)(ty) + (tx)(ty) + 2[t, (x, y, t)]
\end{aligned}
$$

Onde a última igualdade segue de $[x, ty]t = (xt)(yt) - (ty)(xt) + t(x, y, t) + 2(x, y, t)t$ e $t[x, yt] = (tx)(yt) - (ty)(tx) - 2t(x, y, t) - (x, y, t)t$ (basta abrir os comutadores e trocar ordens dos parênteses). Recordando que essa sequência de igualdades começou com $[x, y \circ t^2]$, e somando e subtraindo $(tx)(yt)$ e $(ty)(xt)$ do lado direito da igualdade final, usamos a identidade (4.2.4) e a identidade de Moufang do meio para escrever

$$[x, y \circ t^2] = [x, y \circ t^2] + 2t[x, t]t + 2[x, t][y, t] + 2[t, (x, y, t)],$$

de onde segue a identidade (4.2.2). □

Lema 4.8. *As identidades* $((xy)z, t, s) = (x(yz), t, s) = (xy, zt, s) = 0$ *implicam*

$$(xy, z, t)s = -(xy)(z, t, s), \quad s(x, y, zt) = -(s, x, y)(zt).$$

Demonstração. A primeira identidade se obtém de

$$((xy)z, t, s) - (xy, zt, s) + (xy, z, ts) = 0.$$

A segunda identidade é provada analogamente. □

Lema 4.9. *As identidades alternativas, em conjunto com as identidades (4.0.1) e (4.0.2), implicam*

$$\alpha[x, y]z + \beta((zx)y - (zy)x) = \delta_1(x, y, z), \tag{4.2.5}$$

$$\alpha[x, y]z + \beta z[x, y] = \delta_2(x, y, z), \tag{4.2.6}$$

onde $\delta_1 = 2\delta(\alpha + \beta)/(\gamma + \delta)$ *e* $\delta_2 = 2(\alpha\delta - \beta\gamma)/(\gamma + \delta)$.

Demonstração. Podemos linearizar a equação (4.0.1) para obter as identidades

$$\alpha((xy)z+(xz)y-(yx)z-(zx)y)+\beta((yx)z+(zx)y-(yz)x-(zy)x) = 0 \quad (4.2.7)$$

$$\alpha(x(yz)+x(zy)-y(xz)-z(xy))+\beta(y(xz)+z(xy)-y(zx)-z(yx)) = 0 \quad (4.2.8)$$

e escrevendo (4.0.2) em x, y, z, e multiplicando por $(\alpha+\beta)$, e somando às duas equações acima, multiplicadas por $(-\gamma)$ e $(-\delta)$, respectivamente, obtemos

$$(1-2(1\ 2))[\alpha\gamma((yz)x-(zy)x)+\alpha\delta(y(zx)-z(yx))+$$

$$+\beta\gamma((xy)z-(xz)y)+\beta\gamma(x(yz)-x(zy))] = 0,$$

de onde a expressão dentro dos colchetes é igual a zero (basta multiplicar à esquerda por $(1+2(1\ 2))$). Tal equação, multiplicada à esquerda por $-(1\ 3)$, resulta em nas identidades (4.2.5) e (4.2.6) (que são duas formas de escrever a mesma coisa). $\square$

Lema 4.10. *Seja V uma variedade de álgebras alternativas em que são satisfeitas as identidades (4.0.1) e (4.0.2), onde $\alpha+\beta \neq 0$ e $\gamma+\delta \neq 0$. Então, as seguintes identidades são satisfeitas em V:*

$$0 = y[x,z]y = \alpha[x,z]y^2 = \beta y^2[x,z]$$

$$= [x,y][y,z] = (x,y,z)y = y(x,y,z)$$

Demonstração. Seja $h(x,y,z) = \alpha[x,y]z+\beta z[x,y]$. Pelo lema anterior, temos $h(x,y,z) = \delta_2(x,y,z) = 2(\alpha\delta-\beta\gamma)/(\gamma+\delta)(x,y,z)$ (observe que isso nos mostra que h é uma função antissimétrica). Consequentemente, conforme as propriedades do Lema 1.36,

$$h(x,y,z)z = h(zx,y,z), \quad zh(x,y,z) = h(xz,y,z)$$

$$h(x,y,z^2) = zh(x,y,z)+h(x,y,z)z.$$

Mas ainda

$$h(x,y,z^2) = \alpha[x,y]z^2+\beta z^2[x,y] =$$

$$= \alpha[x,y]z^2+\beta z^2[x,y]-\beta z[x,y]z+\beta z[x,y]z$$

$$= (\alpha[x,y]z+\beta z[x,y])z+\beta z[z,[x,y]]$$

$$= h(x,y,z)z+\beta z[z,[x,y]],$$

e analogamente

$$h(x,y,z^2) = zh(x,y,z)+\alpha[[x,y],z]z,$$

de onde

$$2h(x,y,z^2) = h(x,y,z)z + zh(x,y,z) + \alpha[x,y]z^2 + \beta z^2[x,y] - (\alpha+\beta)z[x,y]z$$
$$= 2h(x,y,z^2) - (\alpha+\beta)z[x,y]z,$$

e portanto, concluímos

$$z[x,y]z = 0. \tag{4.2.9}$$

Observe que das equações $h(x,y,z^2) = zh(x,y,z) + \alpha[[x,y],z]z = h(x,y,z)z + \beta z[z,[x,y]]$ ainda vemos que

$$[h(x,y,z),z] = \alpha[x,y]z^2 - \beta z^2[x,y].$$

Ademais, de

$$0 = h([x,y],z,z) = \alpha[[x,y],z]z + \beta z[[x,y],z] =$$
$$= \alpha[x,y]z^2 - \beta z^2[x,y] + (\beta-\alpha)z[x,y]z = \alpha[x,y]z^2 - \beta z^2[x,y],$$

concluímos que

$$0 = [h(x,y,z),z] = h([z,x],y,z) \tag{4.2.10}$$

onde a última igualdade se justifica pelo Lema 1.36. Das equações (4.2.2) e (4.2.9), segue imediatamente que

$$[x,z][y,z] = [(x,y,z),z] \tag{4.2.11}$$

E portanto,

$$\delta_2[x,t][y,t] = [\delta_2(x,y,t),t] = [h(x,y,t),t] = 0. \tag{4.2.12}$$

Da equação acima e de (4.2.10), concluímos utilizando a equação (4.2.4) (para a última igualdade)

$$0 = h(x,t,[y,t]) = \alpha[x,t][y,t] + \beta[y,t][x,t] = (\alpha-\beta)[x,t][y,t], \tag{4.2.13}$$

e portanto

$$0 = [x,z][y,z] = [(x,y,z),z],$$

O que, a partir de (4.2.1), nos mostra que

$$0 = (x^2,y,z) = h(x^2,y,z) \tag{4.2.14}$$

assim, vemos que $0 = h(x,y,z^2) = \alpha[x,y]z^2 + \beta z^2[x,y]$, e como já tínhamos concluído que $0 = \alpha[x,y]z^2 - \beta z^2[x,y]$, segue que

$$0 = \alpha[x,y]z^2 = \beta z^2[x,y]. \tag{4.2.15}$$

Assim, se $\alpha \neq \beta$, segue de (4.2.13) que $0 = [x,t][y,t]$ $(\gamma \neq \delta)$, e se $\alpha = \beta$ mas $\gamma \neq \delta$, obtemos de (4.2.12) e da definição de δ_2 também que $0 = [x,t][y,t]$. Assim, se $\alpha \neq \beta$ ou $\alpha \neq \beta$, concluímos da discussão acima, de (4.2.11), de (4.2.14) e do fato de que $(x^2, y, z) = x \circ (x, y, z)$ que

$$0 = [x,t][y,t] = [(x,y,t),t] = (x,y,t)t = t(x,y,t). \tag{4.2.16}$$

Mostremos também a validade de (4.2.16) para $\alpha = \beta$ e $\gamma = \delta$. Nesse caso a equação (4.0.1) pode ser vista como

$$(xy)y - y(yx) = 0,$$

o que, linearizado e somado à equação (4.2.6), resulta em

$$0 = 2((xy)z - z(yx)) + (xz)y - (yx)z + z(xy) - y(zx).$$

Mas uma vez que $(xz)y - (yx)z = [xz, y] - (y, x, z)$ e $z(xy) - y(zx) = [zx, y] - (z, x, y)$, temos

$$0 = 2((xy)z - z(yx)) + [xz, y] + [zx, y]$$

$$= 2((xy)z - z(yx)) + x[z,y] + [x,y]z + 3(x,z,y) + z[x,y] + [z,y]x + 3(z,x,y)$$

de onde, aplicando a identidade (4.2.6) duas vezes, obtemos

$$(xy)z = z(yx). \tag{4.2.17}$$

Das equações (4.2.14), (4.2.15) e (4.2.17), segue que

$$(x(xy))z = x^2yz = x^2zy = ((xx)z)y = (z(xx))y = ((zx)x)y$$

e então, usando (4.2.17), a identidade de Moufang à direita e (4.2.17) mais duas vezes, obtemos

$$((zx)x)y = y(xzx) = ((yx)z)x = (z(xy))x = x((xy)z)$$

de onde $(x(xy))z = x((xy)z)$, isto é, $0 = (x, xy, z) = (x, y, z)x$. Uma vez que $0 = (x^2, y, z) = x \circ (x, y, z)$, segue também que $x(x, y, z) = 0$, de onde $[(x, y, z), z] = 0$, e por (4.2.11), temos $0 = [x, z][y, z]$, o que mostra que as equações (4.2.16) também valem para quando $\alpha = \beta$ e $\gamma = \delta$. $\square$

Lema 4.11. *Seja V uma variedade de álgebras alternativas em que são satisfeitas as identidades (4.0.1) e (4.0.2), onde $\alpha + \beta \neq 0$ e $\gamma + \delta \neq 0$. Então, as seguintes identidades são satisfeitas em V:*

$$0 = \alpha[x,z](yz) = \alpha[x,z](zy) = \beta(yz)[x,z] = \beta(zy)[x,z]$$

$$= \alpha\beta(xz^2y - yz^2x) = \alpha\beta[x^2, y^2] = \alpha\beta[x^2, yz].$$

Demonstração. De (4.2.15), obtemos que $\alpha[x,y]xz = -\alpha[x,y]zx$, e portanto, segue do Lema (4.10) que

$$-2\alpha[x,y]xz = \alpha[x,y][z,x] = 0.$$

Analogamente, obtemos

$$0 = \alpha[x,y](xz) = \alpha[x,y](zx) = \beta(xz)[x,y] = \beta(zx)[x,y].$$

Ademais, de $0 = \alpha[x,y](zx) = \beta(xz)[x,y]$, segue que

$$0 = \alpha\beta((xy)(zx) - (yx)(zx) + (xz)(xy) - (xz)(yx)),$$

mas observe que $(xy)(zx) = x(yz)x$ e $(xz)(yz) = x(zy)x$ pela identidade de Moufang do meio. Logo, e tendo em vista que $x[y,z]x = 0$ pelo Lema 4.10,

$$0 = \alpha\beta((xz)(xy) - (yx)(zx)). \tag{4.2.18}$$

Por outro lado, de $0 = \alpha[x,y](xz) = \beta(zx)[x,y]$, obtemos

$$0 = \alpha\beta((xy)(xz) - (yx)(xz) + (zx)(xy) - (zx)(yx))$$

mas $(yx)(xz) = yx^2z + (y,x,xz) = yx^2z$, visto que $(y,x,xz) = (x,xz,y) = (x,z,y)x = 0$ pelo Lema 4.10. Analogamente, $(zx)(xy) = zx^2y$. Assim, por (4.2.18), concluímos

$$0 = \alpha\beta(xz^2y - yz^2x).$$

Para mostrar $0 = \alpha\beta[x^2,y^2]$, observe que se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, a identidade vale trivialmente. Ademais, se $\alpha = \beta$, então a identidade (4.0.1) toma a forma $[x,y^2] = 0$, de onde também vale a afirmação. Ademais, se $\alpha - \beta \neq 0$, segue do Teorema 1.35 que $K\langle x,y\rangle$ é associativa, de onde podemos escrever

$$[x^2,y^2] = xy[x,y] + x[x,y]y + y[x,y]x + [x,y]yx$$

e procede do Lema 3.9 que $0 = \alpha\beta[x^2,y^2]$. □

Lema 4.12. *Seja V uma variedade de álgebras alternativas em que são satisfeitas as identidades (4.0.1) e (4.0.2), onde $\alpha+\beta \neq 0$ e $\gamma+\delta \neq 0$. Então, todas os monômios de comprimento ≥ 5 em V são associativos.*

Demonstração. Uma vez que valem as equações (4.2.16) (e recordando que $(x,xy,z) = (x,y,z)x$ e $(x,yx,z) = x(x,y,z)$), vamos mostrar que a aplicação $g(x,y,z,t) = (tx,y,z)$ é antissimétrica. Com efeito, linearizando $(x,xy,z) =$

$(x, yx, z) = 0$, segue que $(tx, y, z) = -(ty, x, z)$ e que $(tx, y, z) = -(yx, t, z)$, e dessas duas identidades, obtemos

$$(tx, y, z) = -(ty, x, z) = (xy, t, z) = -(xt, y, z),$$

de onde segue a antissimetria da função $g(x, y, z, t)$. Logo, valem as hipóteses do Lema 4.6, de onde segue que

$$((xy)z, t, s) = (x(yz), t, s) = -(xt, yz, s)$$

onde a última igualdade é consequência de de $(x(yz), t, s) = g(yz, t, s, x) = -g(t, yz, s, x) = -(xt, yz, s)$. Por outro lado, ainda pela antissimetria da função g,

$$(xtx, y, z) = -(tx^2, y, z) = (yt, x^2, z) = 0,$$

e, da linearização das identidades acima, obtemos

$$((xy)z, t, s) = -((zy)x, t, s) = (x(zy), t, s) = -(x(yz), t, s),$$

de onde

$$((xy)z, t, s) = (x(yz), t, s) = -(xt, yz, s)) = 0. \tag{4.2.19}$$

Ainda, de [16], Capítulo 1, Lema 2, numa álgebra alternativa arbitrária, vale

$$[(x, y, z), t] = (xy, z, t) + (yz, x, t) + (zx, y, t),$$

e assim, pela antissimetria da função $g(x, y, z, t) = (tx, y, z)$,

$$[(x, y, z), t] = 3(xy, z, t). \tag{4.2.20}$$

Portanto,

i) de (4.2.19), vale

$$((x, y, z)t)s = (x, y, z)(ts) + ((x, y, z), t, s) = (x, y, z)(ts); \tag{4.2.21}$$

ii) de (4.2.16), especificamente de $(x, y, t)t = 0$, concluímos que $(x, y, t)z + (x, y, z)t = 0$, e particularmente

$$(x, y, z)t^2 = -(x, y, t^2)z = 0;$$

ou ainda (observe que podemos ser descuidados com o uso de parênteses por *i)*)

$$(x, y, z)ts = -(x, y, z)st; \tag{4.2.22}$$

iii) das identidades (4.2.20) e (4.2.19),

$$[(x, y, z), ts] = 3(xy, z, ts) = 0; \tag{4.2.23}$$

iv) do fato de que $\alpha[x,y]z+\beta z[x,y] = h(x,y,z) = \delta_2(x,y,z)$ e de (4.2.19),

$$0 = h(t,s,(x,y,z)) = \alpha[t,s](x,y,z) + \beta(x,y,z)[t,s],$$

e assim, por (4.2.23),

$$0 = (\alpha+\beta)(x,y,z)[t,s]$$

de onde podemos concluir, uma vez que $\alpha+\beta \neq 0$, que

$$(x,y,z)ts = (x,y,z)st$$

logo, com tal identidade e (4.2.22), vemos que

$$(x,y,z)ts = ts(x,y,z) = 0 \tag{4.2.24}$$

Afirmação: Todas as palavras de comprimento ≥ 5 em V são associativas.

Para mostrarmos tal afirmação, separemos os possíveis associadores de comprimento 5 em 3 casos:

I) Todas as cinco variáveis se encontram dentro de um associador. A menos de sinal, são possíveis

$$((xy)z,t,s); \quad (x(yz),t,s); \quad (xy,zt,s)$$

tais associadores são todos iguais a zero devido às identidades 4.2.19.

II) Uma variável fora do associador. Nesse caso, são possíveis

$$x(yt,z,s); \quad (xy,z,t)s$$

Ambas são 0, pois tendo em vista o Lema 4.8, tais associadores são reduzidos às identidades de (4.2.24).

III) Duas variáveis estão fora do associador. São possíveis

$$((x,y,z)t)s; \quad (x,y,z)(ts); \quad x(y(z,t,s));$$

$$(xy)(z,t,s); \quad (x(y,z,t))s; \quad x((y,z,t)s)$$

Temos que $(x,y,z)(ts) = 0$ por (4.2.24), e por (4.2.21), segue também que $((x,y,z)t)s = 0$. Analogamente, temos $x(y(z,t,s)) = (xy)(z,t,s) = 0$. Pelo 4.8 e pelas identidades (4.2.19) e (4.2.24), segue a associatividade das palavras de comprimento ≥ 5 em V. Ademais, tendo em vista (4.2.20),

$$(x(y,z,t))s = ((y,z,t)x + 3(xy,z,t))s = ((y,z,t)x)s + 3(xy,z,t)s = 0$$

e analogamente, $x((y,z,t)s) = 0$. $\square$

Lema 4.13. *Suponha que em uma variedade V de álgebras alternativas, vale*

$$z^2[x,y] = [z^2, xy] = [x,z](yz) = [x,z](zy) = (yz)[x,z] = (zy)[x,z] = 0,$$

e suponha que todos os monômios de comprimento $n \geq 5$ são associativos. Se $v = v(x_1, ..., x_n)$ é um monômio pertencente a $P_n(V)$, então

$$v(z, z, x_3, x_4, ..., x_n) = z^2 x_3 x_4 ... x_n.$$

Demonstração. Podemos usar as condições $0 = [x,z](yz) = [x,z](zy) = (yz)[x,z] = (zy)[x,z]$ para trocar as posições das as variáveis z no monômio v, de onde chegamos a

$$v(z, z, x_3, ..., x_n) = x_{i_1} ... x_{i_k} z^2 x_{i_{k+1}} ... x_{i_{n-2}},$$

onde $(i_1, ..., i_{n-2})$ é alguma permutação no conjunto $\{3, 4, ..., n\}$. Caso $k \geq 2$, podemos então usar a identidade $[z^2, xy] = 0$ para obter

$$v(z, z, x_3, ..., x_n) = z^2 x_{i_1} ... x_{i_{n-2}}.$$

Já no caso em que $k = 1$, podemos usar $0 = [z^2, (x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}}) x_{i_{k+3}}]$ para reduzir o problema ao caso anterior. Assim, vale

$$v(z, z, x_3, ..., x_n) = z^2 x_{i_1} ... x_{i_{n-2}}.$$

Ademais, usando a identidade $z^2[x,y] = 0$, obtemos

$$z^2 (x_{i_1} ... x_{i_j} x_n)(x_{i_{j+2}} ... x_{i_{n-2}}) =$$

$$z^2 (x_{i_{j+2}} ... x_{i_{n-2}} x_{i_1} ... x_{i_j}) x_n.$$

Repetindo esse processo tantas vezes quanto for necessário, obtemos $v(z, z, x_4, ..., x_n) = z^2 x_3 x_4 ... x_n$. □

4.2.2 Casos *A)*, *B)*, *E)*, *F)*

Resolveremos simultaneamente os casos *A)*, *B)*, *E)*, *F)*, apresentados na página 74. Tais casos têm em comum o fato de que monômios de comprimento suficientemente grande são associativos. O próximo lema nos dará uma identidade que será útil para provar o caso *E)*.

Lema 4.14. *No caso E) (isto é, $\alpha = \beta$, $\gamma \neq \delta$), a identidade $(xy, z, t) = 0$ é satisfeita na variedade V.*

Demonstração. Como $\alpha = \beta$, a identidade (4.0.1) toma a forma

$$[x, y^2] = 0$$

Que multilinearizada, se torna $[x, y \circ z] = 0$, e, em particular,

$$[t, x(yz) + (yz)x] = 0,$$

e multiplicando à esquerda pelo elemento $\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \sigma$, obtemos

$$[t, S_3^1(x, y, z) + S_3^2(x, y, z)] = 0. \tag{4.2.25}$$

É uma consequência de (4.0.2) a identidade

$$[t, \gamma S_3^1(x, y, z) + \delta S_3^2(x, y, z)] = 0,$$

e visto que supomos $\gamma \neq \delta$, em conjunto com (4.2.25), nos permite concluir

$$[t, S_3^1(x, y, z)] = [t, S_3^2(x, y, z)] = 0,$$

de onde

$$0 = [t, S_3^1(x, y, z) - S_3^2(x, y, z)] = [t, 6(x, y, z)]. \tag{4.2.26}$$

Consideremos a função de Kleinfield, conforme a Definição 1.38

$$f(t, x, y, z) = (tx, y, z) - (x, y, z)t - x(t, y, z) = ([t, x], y, z) + ([y, z], t, x).$$

De (4.2.16), temos

$$0 = (x, y, t)t = (x, ty, t)$$
$$0 = t(x, y, t) = (x, yt, t)$$

equações essas que, linearizadas (a segunda parte), nos mostram que (tx, y, z) é antissimétrico. Logo, temos que

$$f(t, x, y, z) = 4(tx, y, z).$$

Ainda de (4.2.16), linearizando agora $(t, y, z)t = 0$, obtemos $(x, y, z)t + (t, y, z)x = 0$, que somada a 4.2.26, nos da

$$t(x, y, z) + (t, y, z)x = 0$$

de onde $f(t, x, y, z) = (tx, y, z)$. Assim, concluímos que $(tx, y, z) = 0$. $\square$

Para mostrar a distributividade dos reticulados $L(V)$, precisaremos mostrar em particular a distributividade de L_4. Recorde que o método e as notações para se demonstrar tal distributividade foram apresentados na Proposição 4.3.

Lema 4.15. *Nos casos A), B), E) e F), o reticulado $L(V)$ é distributivo.*

Demonstração. Dos Lemas 4.10, 4.12, 4.11, 4.13, segue que nos casos indicados, os monômios $v = v(x_1, ..., x_n) \in P_n(V)$ de comprimento $n \geq 5$ são associativos, e $v(x, x, x_3, ...x_n) = x^2 x_3 ... x_n$. Seja então $\{n_1, ..., n_k\}$ uma partição de n. O único caso em que $n_1 = 1$ é a partição $\{1, ..., 1\}$. Nesse caso, sendo D uma tabela de Young arbitrária pra partição $\{1, ..., 1\}$, temos, para $v \in P_n(V)$ um monômio, que $e_D v = \sum_{\sigma in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}$. Nos demais casos, segue do fato de que $v(x, x, x_3, ...x_n) = x^2 x_3 ... x_n$ que $e_D v_1 = e_D v_2$, para quaisquer v_1, v_2 monômios em P_n. Assim, segue da Proposição 2.5 que os reticulados L_n são distributivos para $n \geq 5$.

Das identidades

$$0 = (x, y, z)y = y(x, y, z)$$

apresentadas no Lema 4.10, temos que $f_{1j}|_{x=t} = 0$ e $f_{2j}|_{x=t} = 0$, e das identidades

$$0 = \beta y^2 [x, z] = \alpha [x, z] y^2 = \alpha\beta(xz^2 y - yz^2 x)$$

dos Lemas 4.10 e 4.11 (uma vez que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ nesses casos), segue que $f_{3j}|_{x=t} = 0$ e $f_{4j}|_{x=t} = 0$. Assim, segue a condição b) da Proposição 4.3. Mostremos a condição a). Para tal, consideremos o elemento

$$e_4 = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \sigma \in KS_4.$$

No caso A), sejam $\alpha_1 = \dfrac{\alpha}{\delta_2}$ e $\beta_1 = \dfrac{\beta}{\delta_2}$. Então, por (4.2.6), temos

$$(x, y, z) = \alpha_1 [x, y] z + \beta_1 z [x, y]. \tag{4.2.27}$$

Que multiplicando à direita por t, nos da

$$(x, y, z)t = \alpha_1([x, y]z)t + \beta_1(z[x, y])t.$$

A qual, fazendo e_4 agir à esquerda, e observando que $e_4(x, y, z)t = S^1 + S^4$, $e_4([x, y]z)t = 2S^1$, $e_4(z[x, y])t = 2S^4$, nos dá

$$(2\alpha_1 - 1)S^1 + (2\beta_1 + 1)S^4 = 0 \tag{4.2.28}$$

as três equações abaixo se obtém em um processo análogo, onde na primeira se multiplica (4.2.27) à esquerda por t, na segunda substituímos x por xy, y por z e z por t, e na terceira substituímos y por yz e z por t

$$(2\alpha_1 - 1)S^3 + (2\beta_1 + 1)S^5 = 0, \tag{4.2.29}$$

$$S^2 = (1 - \alpha_1)S^1 + \alpha_1 S^4 + \beta_1 S^3 - \beta_1 S^5, \tag{4.2.30}$$

$$\alpha_1 S^1 - (1 + \beta_1)S^3 + (1 - \alpha_1)S^4 + \beta_1 S^5 = 0. \tag{4.2.31}$$

Observe que $(2\alpha_1 - 1) = 0$ só ocorre quando $\gamma = 0$, e $(2\beta_1 + 1) = 0$ só ocorre quando $\delta = 0$. Assim, ambos não podem acontecer simultaneamente. Concluímos que $(1 - \alpha_1) = 0$ e $(1 + \beta_1) = 0$ também não podem ocorrer simultaneamente. É fácil mostrar que, em todos esses casos e no caso em que nenhuma dessas situações acontece, as equações (4.2.28), (4.2.29), (4.2.30), (4.2.31) mostram que os polinômios S^i são dois a dois linearmente dependentes.

Nem ambos os casos B) e F), a equação (4.2.6) se torna

$$\alpha[x, y]z + \beta z[x, y] = 0$$

e com o mesmo método utilizado para concluir as equações chega-se às equações (4.2.28), (4.2.29), (4.2.30), chegamos a

$$2\alpha S^1 + 2\beta S^4 = 0$$

$$2\alpha S^3 + 2\beta S^5 = 0$$

$$-\alpha S^1 + \alpha S^4 + \beta S^3 - \beta S^5 = 0$$

e substituindo z por zt em (4.2.6), conclui-se ainda que

$$2(\alpha + \beta)S^2 = 0,$$

o que mostra a dependência linear dos polinômios S^i para este caso.

Já no caso E), temos pelo Lema 4.14 que $0 = (xy, z, t) = (x, y, zt) = (x, yz, t)$, de onde

$$((xy)z)t = (xy)(zt) = x(y(zt)), \quad (x(yz))t = x((yz)t).$$

e portanto

$$S^1 = S^2 = S^5, \quad S^3 = S^4$$

Ademais, multiplicando (4.2.6) por t à direita, e por e_4 à esquerda, obtemos

$$2\alpha(S^1 + S^4) = \delta_2(S^1 - S^4),$$

o que mostra que os polinômios S^i são dois a dois LI, para $i = 1, ..., 5$. $\square$

4.2.3 Casos *C)* e *D)*

Agora discutiremos os casos C) e D), nos quais monômios de comprimento suficientemente grande só dependem do seu primeiro termo.

Lema 4.16. *No caso C) (isto é, $\alpha = 0, \gamma \neq 0$), vale $\sigma v = v$ para qualquer $\sigma \in S_{n-1}$, onde $v = x_n x_1 x_2 ... x_{n-1} \in P_n(V)$, $n \geq 5$.*

Demonstração. Considere $\delta_3 = \dfrac{-(\gamma + \delta)}{2\gamma}$. Então, uma vez que $\alpha = 0$, segue de (4.2.6) que

$$(x, y, z) = \delta_3 z[x, y], \tag{4.2.32}$$

e já que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, considerando a Observação 4.4, temos $\gamma + \delta \neq 0$, e assim, estamos nas hipóteses do Lema 4.12. Segue desse lema e da equação (4.2.32) que

$$0 = xyz[t, s] = xy[z, t]s = x[y, z]ts,$$

o que mostra o lema. $\square$

Lema 4.17. *No caso D) (isto é, $\alpha = 0, \gamma = 0$), as palavras $v \in P_n(V)$ são associativas para $n \geq 4$, e se $v = x_n x_1 x_2 ... x_{n-1}$, então $\sigma v = v$, para qualquer permutação $\sigma \in S_{n-1}$.*

Demonstração. De (4.2.6), temos que

$$z[x, y] = 0, \tag{4.2.33}$$

e portanto,

$$(x, y, [z, t]) = 0. \tag{4.2.34}$$

Da primeira igualdade de (4.2.14) e das propriedades do Lema 1.36, obtemos

$$0 = (x, xy, z) + (x, yx, z),$$

e em posse de (4.2.34), concluímos ainda que

$$0 = (x, xy, z) = (x, y, z)x. \tag{4.2.35}$$

Linearizando a primeira parte da equação (4.2.35) e somando a (4.2.34), vemos que

$$(xy, z, t) = 0. \tag{4.2.36}$$

Ademais, linearizando a identidade $0 = (y, z, x)x$, obtemos

$$0 = (y, z, t)x + (y, z, x)t = ((yz)t)x - (y(zt))x + ((yz)x)t - y(zx)t$$

de onde, considerando (4.2.36), segue que

$$0 = (yz)(tx) - y(zt)x + (yz)(xt) - y(zx)t.$$

Mas, da equação (4.2.33) temos que $(yz)(tx) = (yz)(xt)$, $y(zt)x = y(x(zt))$, $y(zx)t = y(t(zx))$ de onde

$$0 = 2(yz)(xt) - y(x(zt)) - y(t(zx))$$

e tendo em vista (4.2.36), concluímos

$$0 = 2(yz)(xt) - (yx)(zt) - (yt)(zx).$$

Assim, valem as equações

$$(yx)(zt) = 2(yz)(xt) - (yt)(zx),$$

$$(yz)(xt) = 2(yx)(zt) - (yt)(xz),$$

e subtraindo-as e usando (4.2.33)

$$3(yx)(zt) - 3(yz)(xt) = -(yt)[x, z] = 0,$$

isto é,

$$(yx)(zt) = (yz)(xt). \tag{4.2.37}$$

Das equações (4.2.33), (4.2.36) e (4.2.37), segue que

$$x(y(zt)) = x(y(tz)) = (xy)(tz) = (xt)(yz) = x(t(yz)) = x((yz)t),$$

ou seja, $x(y, z, t) = 0$. Desse fato, de (4.2.36) e de $(x^2, y, z) = x \circ (x, y, z)$, concluímos também que $(x, y, z)t = 0$. De tais identidades e de (4.2.36), concluímos a associatividade das palavras de comprimento maior ou igual a 4. Segue ainda de (4.2.33) que podemos comutar a segunda letra em diante um monômio associativo, conforme nos seja útil, o que mostra a segunda parte do lema. □

Proposição 4.18. *A identidade* $[x, y]x^k = 0, k \geq 0$ *não segue de (4.2.6) para os casos em que* $\alpha = 0$.

Demonstração. Considere a álgebra A de dimensão 2 e base e_1, e_2, cuja multiplicação segue de $e_ie_1 = e_i$, $e_ie_2 = 0$, para $i = 1, 2$. A álgebra A é associativa, pois para quaisquer $i, j \in \{1, 2\}$,

$$(e_ie_j)e_1 = e_ie_j = e_i(e_je_1)$$

$$(e_ie_j)e_2 = 0 = e_i0 = e_i(e_je_2)$$

e satisfaz a identidade $z[x, y] = 0$. Uma vez que $[e_1, e_2]e_1^k = -e_2 \neq 0$, A não satisfaz a identidade $[x, y]x^k = 0$. □

Lema 4.19. *Nos casos C) e D), o reticulado $L(V)$ é distributivo.*

Demonstração. Considere $n \geq 5$ no caso C) e $n \geq 4$ no caso D). Então, pelos Lemas 4.12 e 4.16 para o caso C) e 4.17 para o caso D), segue que para $v \in P_n(V)$, existe algum $i \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$v = x_i x_1 x_2 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_n$$

e portanto $\dim P_n(V) \leq n$. Ademais, segue da Proposição 4.18 que $[x, y]x^{n-2} = 0$ é não nulo em $P_n(V)$. Suas consequências multilineares formam o módulo $G_n = KS_n e_D(x_1 x_2 \dots x_n)$, onde

$$D = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & \dots & n \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

sendo assim um KS_n-submódulo irredutível em $P_n(V)$. Pela fórmula do gancho (teorema 1.74), temos que $\dim G_n = n - 1$, de onde $P_n(V)$ ou é irredutível, ou $P_n(V) = G_n \oplus H_n$, com $\dim H_n = 1$. Assim, L_n é distributivo. Basta então mostrarmos a distributividade de L_4 para o caso C).

Em C) supomos $\alpha = 0$, e assim, vale $\beta \neq \alpha$, de onde são satisfeitas as identidades de (4.2.16). Sendo P'_n o K-subespaço gerado pelos monômios de grau n nas variáveis $x_1, ..., x_n$ que não são multilineares, segue de (4.2.16) que as palavras $v \in P'_4$ são associativas. Agindo na equação (4.2.32) pelo elemento $\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \sigma$, obtemos

$$6(x, y, z) = 2\delta_3 S_3^2(x, y, z)$$

de onde $f_{1j}|_{x=t} = 0 = f_{2j}|_{x=t}$. Segue ainda das equações $0 = \beta y^2[x, z] = \beta(yz)[x, z]$ dos lemas 4.10 e 4.11 que $f_{3j}|_{x=t} = 0$. Ademais, de (4.2.6), obtemos e da associatividade das palavras em P'_4, segue que $0 = y[z, x^2] = x[y, x]z = x^2[y, z]$, de onde $f_{4j}|_{x=t} = 0$.

Ademais, multiplicando (4.2.32) por t à direita, ou à esquerda, ou substituindo z por zt, ou ainda y por yz e z por t, obtemos respectivamente, ao agir pro e_4

$$S^1 = (1 + 2\delta_3)S^4$$

$$S^3 = (1 + 2\delta_3)S^5$$

$$S^5 = (1 - 2\delta_3)S^2$$

$$S^4 = (1 - \delta_3)S^3 + S^5$$

de onde, analogamente ao lema anterior, se mostra que os S^i, $i = 1, ..., 5$ são dois a dois linearmente dependentes, o que mostra o lema. $\square$

4.2.4 Caso *G)*

Por último, mostraremos que no caso *G)*, as condições do Lema 2.4 também são satisfeitas.

Lema 4.20. *No caso G), um polinômio arbitrário $f \in P_n(V)$ pode ser escrito na forma*

$$\sum \alpha_B f_B, \tag{4.2.38}$$

onde

$$f_B = [x_{i_1}, x_{i_2}]...[x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]x_{j_1}...x_{j_{n-2k}},$$

e $i_1 < ... < i_{2k}$,$j_1 < ... < j_{n-2k}$, $2k \leq n$ e $\alpha_B \in K$. A soma em (4.2.38) é tomada em todos os subconjuntos $B = \{i_1, ..., i_{2k}\} \subseteq \{1, ..., n\}$. Os parênteses de f_b são normalizados à direita, isto é, os produtos são lidos da esquerda pra direita.

Demonstração. Uma vez que em G) supomos $\alpha = -\beta$, a equação (4.2.6) toma a forma

$$[[x, y], z] = 2(x, y, z). \tag{4.2.39}$$

Tomemos mais uma vez a função

$$f(t, x, y, z) = (tx, y, z) - (x, y, z)t - x(t, y, z)$$

$$= ([t, x], y, z) + ([y, z], t, x) = (y, z, [t, x]) + (t, x, [y, z]),$$

obtemos de (4.2.39)

$$2f(t, x, y, z) = [[y, z], [t, x]] = [[t, x], [y, z]] = 0,$$

de onde, uma vez que K tem característica 0,

$$(tx, y, z) = (x, y, z)t + x(t, y, z). \tag{4.2.40}$$

Ainda, usando o Lema 4.5 e (4.2.39), obtemos a identidade

$$[(x, y, z), t] = 0. \tag{4.2.41}$$

Recordando que o centro comutador $K(A)$ em uma álgebra alternativa está no centro associador $N(A)$, a identidade (4.2.41) nos dá

$$((x, y, z), t, s) = 0. \tag{4.2.42}$$

Ademais, de (4.2.40) obtemos

$$([t, x], y, z) = (x, y, z)t + x(t, y, z) - (t, y, z)x - t(x, y, z),$$

e por (4.2.41), segue que

$$([x,t],y,z)=0. \tag{4.2.43}$$

Observando que no presente caso a equação (4.2.5) toma a forma $[x,y]z = (zx)y-(zy)x$, podemos somar (4.2.5) e $[x,y]z+(yz)x-(xz)y$ para obter

$$S_3^1(x,y,z)=2[x,y]z+(yz)x-(xz)y. \tag{4.2.44}$$

Usando (4.0.2) e o fato de que $S_3^1 - S_3^2 = 6(x,y,z)$, temos

$$(\gamma+\delta)S_3^1 = 6\delta(x,y,z),$$

e assim, por (4.2.44),

$$2[x,y]z+(yz)x-(xz)y=\delta_4(x,y,z), \tag{4.2.45}$$

onde $\delta_4 = 6\dfrac{\delta}{\gamma+\delta}$.

Em posse das equações (4.2.42) e (4.2.43), podemos associar e comutar palavras em uma mesma entrada de um associador. Assim, vemos que

$$((yz)x,t,s)-((xz)y,t,s)=0$$

e portanto, segue de (4.2.45) que

$$(z[x,y],t,s)=([x,y]z,t,s)=(z_1[x,y]z_2,t,s)=0. \tag{4.2.46}$$

Aplicando a equação (4.2.40) em $(x[t,s],y,z)=0$, obtemos

$$0=([t,s],y,z)x+[t,s](x,y,z)$$

de onde

$$[t,s](x,y,z)=0=(x,y,z)[t,s] \tag{4.2.47}$$

Ademais,

$$[(x,y,z)t,s]=[(x,y,z),s]t+(x,y,z)[t,s]+3((x,y,z),t,s),$$

o que, por (4.2.40), (4.2.42), (4.2.47),

$$[(x,y,z)t,s]=[t(x,y,z),s]=[t_1(x,y,z)t_2,s]=0. \tag{4.2.48}$$

Tomemos $v_1, v_2 \in P_n(V)$ monômios. Uma vez que v_1 e v_2 são iguais a menos de uma reordenação de elementos e de parênteses, segue que $v_1 = v_2 + u$, onde u é uma soma de polinômios da forma $w_1[w_2,w_3]w_4$ e da forma $z_1(z_2,z_3,z_4)z_5$, com w_i, z_i monômios, sendo possível tomar w_1, w_4, z_1, z_5 iguais a 1. Por (4.2.43), (4.2.42), (4.2.46), (4.2.48) e do fato de que em uma álgebra alternativa o centro comutador está contido no centro associador, segue que

$$(v_1 - v_2, x, y) = 0. \tag{4.2.49}$$

Observe ainda que

$$[x, y]z + [y, z]x + [z, x]y = S_3^1(x, y, z)$$

E assim, de (4.2.44) e (4.2.45) (veja que a Observação 4.4 implica que δ_4 é inversível)

$$(x, y, z) = \frac{1}{\delta_4}([x, y]z + [y, z]x + [z, x]y). \tag{4.2.50}$$

Usando a Observação 1.40, as identidades alternativas, a equação (4.2.39), o fato de que $(xy, y, z) = y(x, y, z)$, (4.2.41) e que podemos ignorar parênteses por (4.2.43),

$$[x, y]yz = [xy, y]z - 3(x, y, y)z = z[xy, y] + 2(xy, y, z) =$$

$$= z[x, y]y + 3z(x, y, y) + 2y(x, y, z) = [x, y]zy - 2(x, y, z)y + 2y(x, y, z),$$

de onde

$$[x, y][z, t] + [x, t][z, y] = 0 = [x, y][z, y]. \tag{4.2.51}$$

Tomemos então monômios $v_i \in F_{n_i}$, $i = 1, \ldots, 5$, $\sum n_i = n$, e estudemos o polinômio $v_1(v_2, v_3, v_4)v_5$, onde v_1 e v_5 podem ser tomados iguais a 1. Em posse de (4.2.40), podemos supor que o associador presente em $v_1(v_2, v_3, v_4)v_5$ só tenha uma letra em cada entrada. Já com (4.2.41), podemos supor que tal $v_1 = 1$. Com (4.2.42), (4.2.41) e (4.2.48), supomos ainda que as variáveis em v_5 estão em ordem crescente por índices e com os parênteses normalizados à direita. Assim, podemos reduzir $v_1(v_2, v_3, v_4)v_5$ à somas da forma $\sum \beta_C \varphi_c$, onde

$$C = \{i_1, i_2, i_3\} \subseteq i_1 < i_2 < i_3,$$

$$\varphi_C = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})x_{j_1} \ldots x_{j_{n-3}}, j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-3}.$$

Assim, como um monômio v, o mesmo difere de $(((x_1x_2)x_3)\ldots)x_n$ por uma soma de $w_1[w_2, w_3]w_4$ e da forma $z_1(z_2, z_3, z_4)z_5$, podemos por meio da discussão acima, de (4.2.39),(4.2.40),(4.2.41),(4.2.48),(4.2.50),(4.2.49),(4.2.51) chegar à representação do enunciado do lema. □

Lema 4.21. *No caso G), a identidade $[x, y][z, t]s = 0$ é satisfeita em V.*

Demonstração. Seja $e_5 = \sum_{\sigma\in S_5}(-1)^\sigma\sigma \in KS_5$. Mostremos que $e_5 f = 0$, para qualquer $f \in P_5$. Pelo Lema 4.20, toda palavra $v \in P_5$ pode ser escrita como uma combinação linear de palavras normalizadas à direita, e portanto é suficiente provar que $e_5 v_0 = 0$, onde $v_0 = (((x_1x_2)x_3)x_4)x_5$. De (4.2.44) e (4.2.45), obtemos

$$S_3^1(x,y,z) = \delta_4(x,y,z). \tag{4.2.52}$$

Ainda, de (4.2.47) e (4.2.42)

$$((x,y,z)t)s = ((x,y,z)s)t. \tag{4.2.53}$$

Podemos escrever o polinômio e_5v_0 da forma

$$\sum_{\{i_1,i_2,i_3\}\subset\{1,2,3,4,5\}} (1-(i_4i_5))[(S_3^1(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})x_{i_4})x_{i_5}],$$

de onde segue de (4.2.52) e (4.2.53) que $e_5v_0 = 0$, e assim, $e_5 f = 0$, para um $f \in F_5$. Ademais, de (4.2.47) e (4.2.50), obtemos

$$0 = [t,s](x,y,z) = \frac{1}{\delta_4}([t,s][x,y]z + [t,s][y,z]x + [t,s][z,x]y)$$

Fazendo $z = t$, segue da identidade acima e de (4.2.51) que

$$[t,s][x,y]t = 0. \tag{4.2.54}$$

De (4.2.54) e de (4.2.51), obtemos que $[x,y][z,t]s$ é antissimétrico. Assim

$$0 = e_5[x,y][z,t]s = 5![x,y][z,t]s,$$

o que mostra o resultado. $\square$

Lema 4.22. *No caso G), o reticulado L_4 é distributivo.*

Demonstração. Seguiremos conforme a Proposição 4.3. Considere primeiramente

$$D = \begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline 3\\ \hline 4\\ \hline\end{array}\,.$$

Temos que $e_D = \sum_{\sigma\in S_4}(-1)^\sigma\sigma$, e segue do Lema 4.20 e da identidade (4.2.43) que os $e_D f$ são linearmente dependentes para qualquer escolha de polinômio f. Ademais, para a tabela de Young

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{1-1}\end{array}\,,$$

consideremos os polinômios $f_{ij}|_{x=t}$ da Proposição 4.3. Segue da identidade (4.2.43) que o polinômio $xS_3(x,y,z)$ independe da posição dos parênteses. Em posse das identidades (4.2.41) e (4.2.52), vemos que S_3^1 é central, e portanto $f_{1j}|_{x=t} = f_{2j}|_{x=t}$. Ademais, da identidade (4.2.51), vemos ainda que $f_{32}|_{x=t} = -f_{22}|_{x=t}$ e que $f_{42}|_{x=t} = -f_{12}|_{x=t}$. Por fim, os polinômios $f_{3j}|_{x=t}$ e $f_{4j}|_{x=t}$, para $j = 1, \ldots, 5$, diferem de $f_{32}|_{x=t}$ e $f_{42}|_{x=t}$ respectivamente por somas de elementos da forma $x(x,y,z)$ e $(x,y,z)x$ (ver identidades do Lema 1.36), que por sua vez também são linearmente dependentes a $f_{1j}|_{x=t}$ e $f_{2j}|_{x=t}$, o que mostra o resultado. □

Lema 4.23. *No caso G), o reticulado $L(V)$ é distributivo.*

Demonstração. Consideremos a o diagrama de Young da partição $\{l_1, l_2, ...\}$ de $n \geq 5$, cujas l_i colunas têm comprimento $k_1, k_2, \ldots, k_{l_1}$, respectivamente, e T sua tabela de Young preenchida de 1 à k_1 na primeira coluna, de $k_1 + 1$ até $k_1 + k_2$ na segunda coluna, e assim por diante. Consideremos os seguintes casos

1. $k_2 \geq 2$. Neste caso, podemos tomar $(i \quad i+1) \in C(T)$ disjunta de $(1 \quad 2)$, $\mathfrak{T}$ transversal à esquerda de $H = \langle (1 \quad 2), (i \quad i+1) \rangle$ de forma que $C(T) = \mathfrak{T}C(T)$, e assim,

$$e_T = \sum_{\tau \in R(T), \sigma \in \mathfrak{T}} (-1)^\sigma \tau\sigma(1 - (1 \quad 2) - (i \quad i+1) + (1 \quad 2)(i \quad i+1)).$$

   Portanto,

$$e_T(((x_1)x_2)\ldots)x_n = \sum_{\tau \in R(T), \sigma \in \mathfrak{T}} (-1)^\sigma \tau\sigma[x_1, x_2]x_3 \ldots [x_i, x_{i+1}] \ldots x_n \tag{4.2.55}$$

   que em posse da identidade (4.2.43) podemos associar comutadores e variáveis, e de (4.2.39), podemos de comutá-los a menos de um associador. De (4.2.42),(4.2.41), tais associadores também associam e comutam com variáveis, e assim, de (4.2.47), tais fatores extras são 0. Concluímos então que (4.2.55) pode ser reduzida à

$$\sum_{\tau \in R(T), \sigma \in \mathfrak{T}} (-1)^\sigma \tau\sigma[x_1, x_2][x_i, x_{i+1}]x_3 \ldots \hat{x_i}\hat{x_{i+1}} \ldots x_n$$

   que pelo Lema 4.21 é igual a 0.

   Ainda,

$$e_T[x_1, x_2]x_3 \ldots x_n = e_T[x_i, x_{i+1}]x_1 \ldots \hat{x_i}\hat{x_{i+1}} \ldots x_n = 0$$

$$e_T[x_1, x_i]x_2 \dots \hat{x}_i \dots x_n = -e_T[x_2, x_{i+1}]x_1 \dots \widehat{x_{i+1}} \dots x_n,$$

e se ao menos um de j, l é diferente de $1, 2, i, i+1$, então existe uma transposição $\phi = (j' \quad l') \in C(T)$ disjunta de $(j \quad l)$. Sendo $\mathfrak{T} \subseteq C(T)$ um transversal à esquerda do subgrupo $\langle (j' \quad l') \rangle$ e escrevendo $C(T) = \mathfrak{T} \cup \mathfrak{T}\phi$, temos

$$e_D[x_j, x_l]x_2x_4 \dots x_n = \sum_{\tau \in R(T), \sigma \in \mathfrak{T}} (-1)^\sigma \tau\sigma([x_j, x_l][x_{j'}, x_{l'}]x_1 \dots x_n) = 0$$

Concluímos então que os $e_D f$ são linearmente dependentes para qualquer escolha de polinômio $f \in P_n(V)$.

2. $k_1 \geq 4$. Aqui, temos $C(T) = S_{k_1} \oplus N$. Tome $\mathfrak{T}$ um transversal do subgrupo $\langle (1 \quad 2), (3 \quad 4) \rangle \subseteq C(T)$ para escrever

$$e_T(((x_1)x_2)\dots)x_n = \sum_{\tau \in R(T), \sigma \in \mathfrak{T}} (-1)^\sigma \tau\sigma[x_1, x_2][x_3, x_4]x_5 \dots x_n = 0.$$

Ainda, analogamente ao caso anterior, dados $i, j \in \{1, \dots n\}$, é possível tomar $k, l \in S_{k_1}$ tal que $(k \quad l)$ e $(i \quad j)$ sejam disjuntas, de onde

$$e_T[x_i, x_j]x_1x_2 \dots x_n =$$

$$= \sum_{\tau \in R(T), \sigma \in A_{k_1} \oplus N} (-1)^\sigma \tau\sigma[x_i, x_j][x_k, x_l]x_1 \dots x_n = 0.$$

3. $k_2 = 1$, $k_1 = 3$;

Aqui, um raciocínio análogo aos casos anteriores nos mostra que se ao menos um dos índices i, j for maior do que 3, então

$$e_T[x_i, x_j]x_1x_2 \dots \hat{x}_i\hat{x}_j = 0$$

Ademais, se $\sigma \in S_3 = C(T)$, então

$$e_T x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)} \dots x_n = e_T\sigma^{-1}(-1)^\sigma x_{\sigma^{-1}(1)}x_{\sigma^{-1}(2)}x_{\sigma^{-1}(3)} \dots x_n$$
$$= (-1)^\sigma e_T x_1x_2 \dots x_n$$

de onde

$$e_T[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]x_{\sigma(3)}x_4 \dots x_n = 2(-1)^\sigma(((x_1x_2)x_3)\dots)x_n,$$

o que mostra que os $e_D f$ são linearmente dependentes para todo polinômio $f \in P_n(V)$.

4. $k_2 = 1$, $k_1 = 2$. Também de forma análoga aos casos anteriores, temos para i, j diferentes de 1 e 2

$$e_T[x_i, x_j]x_1x_2 \ldots \hat{x_i} \ldots \hat{x_j} \ldots x_n = 0$$

e que

$$e_T[x_1, x_2]x_3 \ldots x_n = 2e_T(((x_1x_2)x_3) \ldots)x_n.$$

Ademais, temos que

$$e_T[x_1, x_j]x_2 \ldots \hat{x_j} \ldots x_n = \sum_{\tau \in R(T)} \tau(1 - (1 \quad 2))[x_1, x_j]x_2 \ldots \hat{x_j} \ldots x_n$$

$$= 0 + \sum_{\tau \in R(T)} \tau[x_j, x_2]x_1 \ldots \hat{x_j} \ldots x_n = \sum_{\tau \in R(T)} \tau[x_1, x_2]x_3 \ldots x_n$$

$$= \sum_{\tau \in R(T)} \tau(1 - (1 \quad 2))(((x_1, x_2)x_3) \ldots)x_n = e_T((x_1x_2)x_3) \ldots x_n,$$

o que mostra o resultado também para esse caso.

□

Referências Bibliográficas

[1] A. Z. Anan'in, A. R. Kemer, *Varieties of associative algebras whose lattice of subvarieties is distributive*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, (1976), Vol. 17, No. 4, pp. 723.

[2] V. A. Artamonov, *Lattices of varieaties of linear algebras*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 2 (208), 135-167; Tradução em inglês em Russian Math. Surveys **33** (1978).

[3] J. C. Baez, *The Octonions*, Bulletion of the American Mathematical Society, **39** (2001), no. 2, 145-205.

[4] Š. Bilová, *Lattice Theory - Its Birth and Life*, Prometheus, (2001). — pp. 250-257.

[5] H. Boerner, *Representations of groups*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdan, 1967, 1970.

[6] J. H. Conway, D. A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*, A K Peters, Ltd., (2003).

[7] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie and allgemeine Zahlsysteme*, (Alemão) Math. Ann. **85**, 184-194 (1922).

[8] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[9] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math.Surveys Monographs 122, AMS, Providence, RI, 2005.

[10] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Math. Monographs **15**, Math. Assoc. Amer., New York, 1968.

[11] I. Kaplansky, *Rings with polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 496-500.

[12] M. Lucena Dias, *Introdução à teoria de reticulados e reticulados de subgrupos*, 2013, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Matemática) - Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG.

[13] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, John Wiley and Sons, New York-London, 1962.

[14] V. D. Martirosyan, *On the distributivity of lattices of subvarieties of varieties of alternative algebras*, 1983 Math. USSR Sb. **(46)** 119.

[15] J. I. Rocha, *O Teorema do Gancho e Aplicações*, 2011, Dissertação de Mestrado (Matemática) - Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG.

[16] I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, A. M. Slin'ko, K. A. Zhevlakov *Rings that are nearly associative*, Academic Press, 1982.

[17] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme*, (Alemão) Math. Ann. **113** (1936), 528-567.