Resumo

Neste trabalho apresentamos uma introdução à Teoria de Semigrupos Analíticos e Potências Fracionárias de Operadores lineares não limitados. Em seguida, veremos como esta teoria pode ser aplicada para determinar a existência de solução para a seguinte classe de equações diferencias parabólicas

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde $A : D(A) \to X$, com $D(A) \subset X$, e f são dados e satisfazem certas condições.

Abstract

In this work, we present an introduction to the Theory of Analytical Semigroups and Fractional Powers of unbounded linear operators. Next, we apply this theory to show the existence of a solution for the following class of parabolic differential equations

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

where $A : D(A) \to X$, with $D(A) \subset X$, and f are given and satisfy certain conditions.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Semigrupo Analítico e Espaços de Potência Fracionária Aplicados ao Estudo das Equações Diferenciais

por

Cícero José da Silva [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Semigrupo Analítico e Espaços de Potência Fracionária Aplicados ao Estudo das Equações Diferenciais

por

Cícero José da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG

Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2021

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus pela vida e por ter me dado força e a oportunidade de trabalhar para concretizar o sonho de cursar um mestrado.

Agradeço aos meus pais José João Filho e Tereza Maria de Jesus por me apoiarem em todos os momentos dessa caminhada e pelo esforço para me ajudar a superar algumas dificuldades impostas pelo destino. Também, agradeço aos meus irmão Geraldo, Mauricéa e Claudiana por estarem ao meu lado, em especial, à Claudiana por seguir o mesmo trajeto que venho trilhando.

Quero também agradecer aos professores Drs Aldo Trajano Lourêdo, Severino Horácio da Silva, Flank David Morais Bezerra e Jefferson Abrantes dos Santos pela participação na Banca Examinadora e por suas valiosas sugestões.

Agradeço, profundamente, ao meu Orientador Prof. Dr Claudianor Oliveira Alves por todos os conselhos, ensinamentos, amizade, confiança e por toda paciência que teve para com a minha pessoa durante o nosso estudo. Também lhe agradeço por ter me mostrado a beleza da matemática e por me ensinar a reconhecer minhas limitações. Agradeço ainda ao mesmo pelo apoio financeiro no ano de 2019 e por ser uma pessoa simples e de bom coração a qual tenho como referência em minha vida.

Não posso deixar de agradecer ao Departamento de Matemática da UFCG por todo o apoio e por toda confiança depositada em minha pessoa. Sou eternamente grato por todos os esforços feitos por todos os professores desse departamento para que eu viesse a conclui este mestrado. Em especial, quero agradecer ao Prof. Dr Fábio Reis dos Santos (Coordenador do Mestrado em 2019), por conversar com os professores do departamento para arrecadar fundos para me ajudar financeiramente em 2019, ano que entrei no programa e houve o corte de bolsas. Também, agradeço aos professores Drs Daniel Cordeiro, Severino Horácio, Claudemir Fidelis, Marcelo Ferreira, Claudianor Alves e Henrique Lima, pelo conhecimentos transmitidos para mim através das disciplinas lecionadas e por todo o apoio financeiro no início do mestrado.

Ainda, agradeço aos meus professores da graduação. Destaco os professores Drs Victor Hugo, Francisco Sibério (Orientador da Graduação), Aldo Trajano, Gustavo Araujo e Vandenberg Vieira por todo incentivo para continuar estudando. Em especial, quero agradecer a Victor Hugo e Francisco Sibério por me ajudarem financeiramente e com o empréstimo de livros no ano de 2019.

Agradeço aos meus amigos pelo apoio e incentivo nos momentos de dificuldade. Em especial, aos colegas de curso Hélio Henrique, Weiller Felipe, Renan Isneri, Jandeilson Santos e Oliverio Diestra por todas as conversas sobre matemática e pelo companheirismo. Reforço meus agradecimentos a Renan Isneri pela amizade de longas datas, por toda ajuda pessoal e por todos os anos de convivência.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo auxilio financeiro.

Dedicatória

Ao meu estimado amigo Daniel Mamede da Silva (In memoriam), DEDICO.

Conteúdo

Introdução

O estudo das equações diferenciais se iniciou com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral que foram desenvolvidos por Newton e Leibnitz no final do século XVII para resolver problemas oriundos da Física e Geometria. A evolução desses métodos levaram à consolidação do estudo das equações diferenciais como um novo ramo da matemática o qual, por volta do século XVIII, se transformou numa disciplina independente.

Neste primeiro momento, os matemáticos estavam preocupados com a procura e análise das soluções e com isso surgiram os métodos elementares para a resolução de vários tipos de equações diferenciais tais como as de variáveis separáveis, as lineares, as de Bernoulli, dentre outras que são estudadas até os dias atuais nos cursos básicos de equações diferenciais.

Com o passar dos anos, o conceito de solução foi se aperfeiçoando até o ponto em que passou-se a expressar a solução na forma de uma integral contendo operações envolvendo funções elementares. Porém, sem se preocupar em escrever uma expressão em termos destas como era feito tradicionalmente. Quando os métodos existentes se tornaram ineficientes, surgiram as soluções expressas por meio de séries infinitas, mas, sem o devido cuidado com as convergências.

Durante o século XIX, com a formalização das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral, foi feito uma revisão e reformulação no estudo das equações diferenciais dando-lhe maior rigor e exatidão pois, neste momento, foi dada uma definição precisa a vários processos infinitos que antes eram usados sem rigor. Algo que não deixou de atingir as equações diferenciais foi a nova definição de integral. As integrais passaram a ser definidas como uma soma e deixaram de ser apenas uma primitiva como eram vistas no século passado. Ainda, ocorreu uma mudança com respeito a abordagem de uma equação diferencial. Antes, procurava-se uma solução explicita para uma dada equação diferencial. Porém, depois dessas mudanças, passou-se a dar importância à existência e unicidade de solução de cada problema cumprindo uma condição inicial sem se preocupara em determinar as soluções. Problemas desse tipo passaram a ser chamados de Problemas de Cauchy [1] e serão estudados no decorrer deste trabalho.

Quando os espaços vetoriais de dimensão finita não foram mais suficientes para resolver determinadas equações diferenciais, nasceu a Análise Funcional cujo objeto de estudo são os espaços vetoriais de dimensão infinita. O estudo desses espaços e de suas propriedades iniciou-se na primeira década do século XX. Uma classe muito importante de espaços de dimensão infinita é a dos espaços de Banach[2]. Os avanços no estudo dos espaços de dimensão infinita fez com que o estudo de equações diferenciais em tais espaços se solidifica-se. Um resultado muito importante para o avanço no estudo das equações diferenciais em espaços de Banach foi o

Teorema 0.1 *Seja X um espaço de Banach e $F : X \to X$ um operador Lipschitziano, isto é, existe uma constante L tal que*

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in X.$$

Então, para qualquer $u_0 \in X$ dado, existe uma única solução $u \in C^1([0, +\infty); X)$ do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Fu(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Este teorema é amplamente usado no estudo de equações diferencias ordinárias e é famoso na literatura por levar o nome dos matemáticos Cauchy, Lipschitz e Picard. Porém seu uso no estudo de equações diferenciais parciais é pequeno como é dito por Brézis [7].

Com o objetivo de contornar tais limitações, na primeira metade do século XX, surge a Teoria de Semigrupo para operadores lineares a qual se consolidou com a demonstração do famoso Teorema de Hille-Yosida[3] em 1948. A importância desse teorema para o estudo de equações diferenciais em espaços de Banach se dá pelo seguinte

[1] Um estudo elementar dos problemas de Cauchy pode ser encontrado em Sotomayor [33] ou Figueiredo [14].

[2] Para mais detalhes, veja Oliveira [28] ou Botelho [6].

[3] Este teorema pode ser encontrado em Kesavan [19], Pazy [29] ou Brézis [7].

motivo: seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \to X$, com $D(A) \subset X$, um operador linear não necessariamente limitado. Então, conseguimos determinar uma única solução para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

desde que $u_0 \in D(A)$ e A cumpra algumas condições técnicas [4]. Esse teorema leva vantagens em relação ao anterior por ser uma ferramenta muito potente para o estudo de equações diferenciais parciais como pode ser visto, por exemplo, em [7]. Assim, a Teoria de Semigrupos passa a ser muito usada para resolver problemas oriundos da Física, Química, Biologia, Engenharia e até mesmo da Economia.

Neste texto, iremos estudar um pouco da Teoria de Semigrupo. Mais especificamente, vamos nos concentrar no estudo dos Semigrupos Analíticos que, juntamente com a Teoria de Potências Fracionárias para operadores lineares não limitados, torna-se uma ótima ferramenta para o estudo de equações parabólicas do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde $A : D(A) \to X$, com $D(A) \subset X$, e f cumprem certas condições. A vantagem de trabalharmos com semigrupo analítico está no fato de que podemos pedir menos regularidade do dado inicial u_0. De forma mais precisa, enquanto que com a teoria clássica de semigrupo resolve-se problemas com $u_0 \in D(A)$, a teoria de semigrupo analítico nos permite resolver os mesmo problemas pedindo que $u_0 \in X^\alpha$, para algum $0 \leq \alpha < 1$, o qual é menos regular do que $D(A)$.

No que segue, vamos falar um pouco da estrutura do presente trabalho. Nosso trabalho é escrito utilizando-se a linguagem da Análise e, por este motivo, usamos do tecnicismo e do rigor presente nos estudos voltados para a matemática pura.

No **Capítulo 1**, vamos apresentar os principais resultados da teoria de semigrupo que iremos utilizar no decorrer deste trabalho. Iniciaremos este capítulo recordando algumas propriedades do espectro e resolvente de operadores lineares tendo como base a leitura de Kreyszing [21], Botelho [6], Brézis [7], Oliveira [28] e Kesavan [19]. Em seguida, fundamentado em Zheng [35], Henry [18] e Pazy [29], vamos introduzir a noção

[4]Para mais detalhes, veja [19], [29] ou [7].

de semigrupo analítico. Na mesma seção, iremos falar um pouco sobre os operadores setoriais os quais estão intimamente ligados com a noção de semigrupo analítico de acordo com [35] e [18]. Além disso, dado um operador linear cumprindo algumas condições, veremos como definir a potência fracionária desses operador e apresentaremos algumas de suas propriedades. Na seção seguinte, estudaremos um problema de Cauchy do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

onde $f : [0, +\infty) \to X$ é uma função fixada tomando valores em um espaço de Banach X. Este problema desempenha um papel muito importante no estudo do problema abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Problemas como os mencionados acima são estudados em [29] e [18]. Para mostrar que tal problema admite solução, faremos o uso de todos os conceitos estudados anteriormente. Este teorema será de suma importância neste texto pois será usado fortemente nas aplicações que iremos apresentar. Encerraremos este capítulo demonstrando um resultado de dependência contínua com respeito aos dados iniciais das soluções do problema abstrato.

O estudo do **Capítulo 2** é baseado em Fila [15, 16] e tem como principal objetivo mostrar ao leitor como é feito, na prática, o uso do Teorema Abstrato apresentado no Capítulo 1. Em termos mais precisos, estudaremos a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \in C^2(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

onde as funções f e g cumprem algumas condições técnicas. Em [15], se encontra uma versão do problema que iremos estudar. Por outro lado, em [16], encontramos técnicas para o desenvolvimento de algumas demonstrações de resultados apresentados em [15].

Depois de mostrar a existência de solução local para o problema, veremos que soluções clássicas globais deste problema satisfazendo uma determinada condição são limitadas globalmente com respeito a certas normas. Problemas dessa natureza surgem, por exemplo, no estudo analítico de fenômenos associado à ocorrência de bandas de cisalhamento em metais sendo deformados sob altas taxas de deformação, na modelagem do fenômeno de aquecimento ôhmico, na investigação do comportamento real de um fluxo turbulento e até mesmo na teoria da gravitação equilíbrio de estrelas politrópicas. Para mais detalhes, veja Bebernes-Lacey [4].

No **Capítulo 3**, temos como objetivo estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Neste capítulo, iremos nos basear no artigo de Alves-Tahir [2] e usaremos Método Dinâmico como ferramenta para encontrar uma solução para tal problema. O método dinâmico consiste em estudar o problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T) \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0, \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

associado ao problema (1). Neste processo, iremos fazer uma escolha adequada de um dado inicial u_0 para que possamos obter uma solução do problema parabólico. Em seguida, mostraremos que a mesma é globalmente definida, estacionária e não trivial. Seguindo estes passos, conseguiremos encontrar uma solução não trivial para o problema proposto. O estudo do método dinâmico tem sido utilizado em alguns trabalhos de Quittner para a obtenção de solução não trivial para certas classes de problemas elípticos. Por exemplo, em [30] Quittner usa o método dinâmico para mostrar a existência de solução não trivial para a seguinte classe de problemas elípticos não variacionais

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + \tilde{f}(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, Quittner [31] aplica o método dinâmico para estabelecer a existência de solução com sinal para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = u_+^p - u_-^q, \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 < q < 1 < p$, $N < \frac{N+2}{N-2}$ se $N > 2$, $u_+ = \max\{u, 0\}$ e $u_- = \max\{-u, 0\}$.

O Presente trabalho também consta de 4 Apêndices nos quais serão apresentados conceitos e resultados complementares cruciais para o entendimento deste trabalho. Nestes apêndices, veremos alguns resultados da análise incluindo uma desigualdade do tipo Gronwall, um teorema de Ponto Fixo e alguns resultados da Análise Funcional. Veremos também a definição de alguns espaços de funções como os Espaços de Lebesgue e os Espaços de Sobolev e algumas de suas principais propriedades. Por fim, vamos introduzir uma noção de integração em espaços de Banach e definir C_0-semigrupo e enunciar algumas de suas principais propriedades. Nesta parte do trabalho, não iremos nos preocupar com as demonstrações de todos os resultados apresentados, principalmente, os de caráter mais técnico. Porém, não iremos deixar de informar uma fonte para que o leitor interessado possa fazer um estudo mais aprofundado caso deseje.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar os principais resultados da teoria de semigrupo que iremos utilizar no decorrer deste trabalho. Iniciaremos este capítulo recordando algumas propriedades do espectro e resolvente de operadores lineares. As definições e propriedades apresentadas nesta parte inicial do texto estão presentes em Kreyszing [21], Botelho [6], Brézis [7], Oliveira [28] e Kesavan [19].

Em seguida, seguindo de perto Zheng [35], vamos apresentar os conceitos de semigrupo analítico e operador setorial. Uma outra abordagem para estes conceitos ligeiramente diferente da que vamos apresentar pode ser vista em Henry [18]. Veremos que estes conceitos estão intimamente ligados e serão usados com bastante frequência no decorrer deste trabalho. Tais conceitos são muito importantes para o estudo de certas equações diferenciais como podemos ver, por exemplo, em Pazy [29]. Também, iremos definir as potências fracionárias de operadores lineares e apresentaremos algumas de suas principais propriedades. O conceito de potência fracionária de um operador nos motiva definir os espaços de potências fracionárias. Combinando a teoria de semigrupo analítico com os espaços de potências fracionárias e suas propriedades, obtemos uma ferramenta muito útil para a obtenção de solução de algumas classes de problemas do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t, u(t)), \quad t > t_0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{P1}$$

onde A é um operador linear fixado satisfazendo certas condições e f é uma função fixada que cumpre uma determinada condição. Nas demais seções, discutiremos a existência de solução para um problema linear. Em seguida, vamos estudar o problema abstrato mencionado acima. Encerraremos o capítulo discutindo algumas das propriedades da solução do mesmo.

1.1 Espectro e resolvente de operadores lineares

Nesta seção, vamos definir espectro e resolvente de um operador linear e iremos apresentar algumas de suas propriedades que serão usadas posteriormente. Para mais detalhes, recomendamos a leitura de Kreyszing [21], Botelho [6], Brézis [7] e Oliveira [28].

Definição 1.1 *Sejam X um espaço de Banach, $I : X \to X$ o operador identidade e $A : D(A) \to X$, com $D(A) \subset X$, um operador linear. Chama-se resolvente de A, e denota-se por $\rho(A)$, o conjunto de todos os números complexos λ tais que o operador $\lambda I - A : D(A) \to X$ é injetor, a imagem de $\lambda I - A$ é densa em X, isto é,*

$$\overline{R(\lambda I - A)} = X$$

e o operador $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to X$ é limitado. Seu complementar $\mathbb{C} \backslash \rho(A)$ é chamado de espectro de A e é denotado por $\sigma(A)$.

Definição 1.2 *Diz se que um operador linear $A : D(A) \to X$, com $D(A) \subset X$, é fechado quando o conjunto*

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}^{1}$$

é fechado em $X \times X$.

Veremos à seguir que o resolvente dos operadores lineares fechados admite uma caracterização. Mas antes, provaremos o seguinte resultado.

Lema 1.1 *Sejam $A : D(A) \to X$, com $D(A) \subset X$, um operador linear, fechado e injetor tal que $A^{-1} : R(A) \to X$ é limitado, então $R(A)$ é fechado.*

Demonstração: Seja $y \in \overline{R(A)}$, então existe uma sequência $(y_n) \subset R(A)$ tal que

$$y_n \to y \quad \text{em} \quad X.$$

Note que, para cada $y_n \in R(A)$, existe um único $x_n \in D(A)$ tal que

$$y_n = Ax_n.$$

[1] O conjunto $G(A)$ é chamado de gráfico do operador A.

Sendo A^{-1} um operador linear limitado,

$$\|A^{-1}y - A^{-1}z\| \leq C\|y - z\|, \quad \forall y, z \in R(A),$$

para alguma constante $C > 0$. Em particular,

$$\|A^{-1}y_n - A^{-1}y_m\| \leq C\|y_n - y_m\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que (y_n) é uma sequência de Cauchy em X, concluímos que a sequência $(A^{-1}y_n)$ também é de Cauchy em X. Desse modo, como X é um espaço de Banach, existe $x \in X$ tal que

$$x_n = A^{-1}y_n \to x \quad \text{em} \quad X.$$

Sendo A um operador fechado com

$$(x_n, Ax_n) \to (x, y) \quad \text{em} \quad X \times X,$$

concluímos que $x \in D(A)$ e $y = Ax$. Logo, $y \in R(A)$ e assim $\overline{R(A)} \subset R(A)$. Portanto, $R(A)$ é fechado. ■

Lema 1.2 *Seja $A : D(A) \to X$ um operador linear fechado, então*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : D(A) \to X \text{ é bijetor}\}.$$

Demonstração: Se $\lambda \in \rho(A)$, então $\lambda I - A : D(A) \to X$ é injetor,

$$\overline{R(\lambda I - A)} = X \tag{1.1}$$

e o operador $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to X$ é limitado. Queremos mostrar que $\lambda I - A$ é sobrejetor. Para isso, vamos fazer o uso da seguinte afirmação.

Afirmação 1.2.1 *O operador $\lambda I - A : D(A) \to X$ é fechado.*

Com efeito, seja $(x, y) \in \overline{G(\lambda I - A)}$, então existe uma sequência $(x_n, (\lambda I - A)x_n) \subset G(\lambda I - A)$ tal que

$$(x_n, (\lambda I - A)x_n) \to (x, y) \quad \text{em} \quad X \times X,$$

isto é,

$$x_n \to x \quad \text{e} \quad (\lambda I - A)x_n \to y \quad \text{em} \quad X.$$

Sendo A um operador fechado e $(x_n) \subset D(A)$ com $x_n \to x$, segue que $x \in D(A)$ e

$$Ax_n \to Ax \quad \text{em} \quad X.$$

Assim,

$$\lim_n (\lambda I - A)x_n = \lim_n (\lambda x_n - Ax_n) = \lambda \lim_n x_n - \lim_n Ax_n = \lambda x - Ax = (\lambda I - A)x,$$

ou seja,

$$(\lambda I - A)x_n \to (\lambda I - A)x \quad \text{em} \quad X.$$

Logo, $x \in D(\lambda I - A) = D(A)$ e $y = (\lambda I - A)x$ mostrando que $(x, y) \in G(\lambda I - A)$. Desse modo,

$$\overline{G(\lambda I - A)} \subset G(\lambda I - A)$$

e portanto $\lambda I - A$ é fechado.

Agora, tendo em vista que $\lambda I - A$ está nas hipóteses do Lema 1.1, obtemos

$$\overline{R(\lambda I - A)} = R(\lambda I - A). \tag{1.2}$$

Assim, combinando (1.1) e (1.2), $R(\lambda I - A) = X$. Logo, $\lambda I - A$ é sobrejetivo. Uma vez que $\lambda I - A$ é injetivo, segue que $\lambda I - A$ é bijetivo. Dessa maneira,

$$\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : D(A) \to X \text{ é bijetor}\},$$

o que mostra a seguinte inclusão

$$\rho(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : D(A) \to X \text{ é bijetor}\}. \tag{1.3}$$

Reciprocamente, se $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : D(A) \to X \text{ é bijetor}\}$, então $\lambda I - A : D(A) \to X$ é, em particular, sobrejetivo. Desse modo, $R(\lambda I - A) = X$ e obviamente

$$\overline{R(\lambda I - A)} = X.$$

Sendo $\lambda I - A$ injetor, basta mostrar que o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado para concluirmos que $\lambda \in \rho(A)$. Para isso é suficiente verificar que o operador $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to X$ é fechado.

Afirmação 1.2.2 *O operador $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to X$ é fechado.*

De fato, se $(y,z) \in \overline{G((\lambda I - A)^{-1})}$, então existe uma sequência $(y_n, (\lambda I - A)^{-1}y_n) \subset G((\lambda I - A)^{-1})$ tal que

$$(y_n, (\lambda I - A)^{-1}y_n) \to (y,z) \quad \text{em} \quad X \times X.$$

Queremos mostrar que $y \in D((\lambda I - A)^{-1}) = R(\lambda I - A)$ e $z = (\lambda I - A)^{-1}y$. Uma vez que $y_n \to y$ em X e $R(\lambda I - A) = X$, tem-se

$$y \in R(\lambda I - A). \tag{1.4}$$

Além disso, sabemos que

$$(\lambda I - A)^{-1}y_n \to z \quad \text{em} \quad X.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$z_n = (\lambda I - A)^{-1}y_n$$

e observe

$$(\lambda I - A)^{-1}y_n \in D(\lambda I - A).$$

Então, $(z_n) \subset D(\lambda I - A)$ com

$$z_n \to z \quad \text{em} \quad X$$

e

$$(\lambda I - A)z_n = y_n \to y \quad \text{em} \quad X.$$

Segundo a Afirmação 1.2.1, $\lambda I - A$ é um operador fechado. Assim, $z \in D(A)$ e $y = (\lambda I - A)z$. Consequentemente,

$$z = (\lambda I - A)^{-1}y. \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5), concluímos que o operador $(\lambda I - A)^{-1} : X \to X$ é fechado. Logo, pelo Teorema do Gráfico Fechado (veja o Teorema A.5), $(\lambda I - A)^{-1}$ é contínuo e, portanto, limitado. Desse modo, $\lambda \in \rho(A)$ e assim

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : D(A) \to X \text{ é bijetor}\} \subset \rho(A). \tag{1.6}$$

Combinando (1.3) e (1.6), concluímos a demonstração. ∎

O próximo resultado juntamente com o seu corolário vão nos fornecer uma caracterização para o espectro e o resolvente de um operador linear limitado.

Lema 1.3 *Se $A : X \to X$ é um operador linear e limitado satisfazendo $\|A\| < 1$, então $1 \in \rho(A)$ e o operador $(I - A)^{-1}$ existe, é linear, limitado e*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o operador $A_n : X \to X$ definido por

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} A^k.$$

Sendo $\|A\| < 1$, concluímos que a série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|A\|^k$$

é convergente. Para dar continuidade ao nosso estudo, vamos mostrar que a sequência (A_n) é de Cauchy. Com efeito, sabe-se que

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Então, para $m, n \in \mathbb{N}$, com $n > m$,

$$\|A_n - A_m\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{m} A^k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} A^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|A^k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k.$$

Uma vez que

$$\sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \to 0 \quad \text{quando} \quad n, m \to +\infty,$$

tem-se o desejado. Agora, como $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach e a sequência (A_n) é de Cauchy, existe $A_\infty \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$A_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} A_n(I - A)x &= \sum_{k=0}^{n} A^k (I - A)x \\ &= (I + A + A^2 + \cdots + A^n)(I - A)x \\ &= (I + A + A^2 + \cdots + A^n)(x - Ax) \\ &= x - Ax + Ax - A^2 + \cdots + A^n x - A^{n+1}x \\ &= x - A^{n+1}x, \quad x \in X, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A_n(I - A) = (I - A^{n+1}). \tag{1.7}$$

Tendo em vista que

$$\sum_{k=0}^{n} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|A\|^k,$$

obtemos

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|A\|^k.$$

Então, pelo Critério de Comparação[2], a série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|A^k\|$$

é convergente. Consequentemente,

$$\|A^n\| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

e portanto $A^n \to 0$. Fazendo $n \to +\infty$ em (1.7),

$$A_\infty(I - A) = I.$$

De modo inteiramente análogo, obtemos $(I - A)A_\infty = I$. Desse modo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = A_\infty = (I - A)^{-1}.$$

Além disso, como $I - A : X \to X$ é limitado, o Teorema do Gráfico Fechado garante que o mesmo é fechado. Assim, o Lema 1.2 assegura que $1 \in \rho(A)$, pois $I - A$ é um operador bijetor. ■

Corolário 1.3.1 *Sejam X um espaço de Banach e $A : X \to X$ um operador linear limitado. Se $|\lambda| > \|A\|$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n.$$

Demonstração: Defina $B = \frac{1}{\lambda}A$. Observe que B é um operador limitado com $\|B\| < 1$. Então, aplicando o Lema 1.3, concluímos que $1 \in \rho(B)$ e o operador $(I - B)^{-1}$ existe e é linear limitado com

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n.$$

[2]Para mais detalhes, veja Lima [23, Cap. 4, Teorema 1.].

Note que o operador

$$I - B = I - \frac{1}{\lambda}A = \frac{1}{\lambda}(\lambda I - A)$$

é bijetor, pois $1 \in \rho(B)$. Assim,

$$\lambda I - A = \lambda(I - B)$$

é bijetor e portanto $\lambda \in \rho(A)$. Ademais, sendo

$$(I - B)^{-1} = \left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \lambda(\lambda I - A)^{-1},$$

temos

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - B)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} B^n = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}A\right)^n = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^n}A^n,$$

ou seja,

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{-(n+1)}A^n,$$

como queríamos demonstrar. ■

Um conceito muito importante do qual iremos fazer o uso dele é o de operador autoadjunto. Porém para definir tal conceito, precisamos fazer algumas considerações.

Proposição 1.1 *Seja $A : D(A) \to Y$, com $D(A) \subset X$, um operador linear limitado. Então, existe uma única extensão $\overline{A} : \overline{D(A)} \to Y$ de A a qual é um operador linear e limitado.*

Demonstração: Por ser A um operador limitado, existe $C > 0$ tal que

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D(A).$$

Considere $x \in \overline{D(A)}$. Então, existe uma sequência $(x_n) \subset D(A)$ tal que

$$x_n \to x \quad \text{em} \quad X.$$

Uma vez que (x_n) é uma sequência convergente, a mesma é de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{C}, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Assim,

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq C\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0,$$

mostrando que (Ax_n) é uma sequência de Cauchy em Y. Sendo Y um espaço de Banach, segue que (Ax_n) é convergente em Y. Desse modo, podemos definir o operador

$$\begin{aligned} \overline{A} : \overline{D(A)} &\rightarrow Y \\ x &\mapsto \overline{A}x = \lim_n Ax_n. \end{aligned}$$

Note que $\overline{A}$ está bem definido. De fato, seja $(\tilde{x}_n) \subset D(A)$ uma outra sequência com

$$\tilde{x}_n \to x \quad \text{em} \quad X.$$

Então,

$$\|Ax_n - A\tilde{x}_n\| = \|A(x_n - \tilde{x}_n)\| \leq C\|x_n - \tilde{x}_n\| \leq C(\|x_n - x\| + \|x - \tilde{x}_n\|),$$

e assim,

$$\lim_n \|Ax_n - A\tilde{x}_n\| = 0,$$

ou seja,

$$\left\| \lim_n Ax_n - \lim_n A\tilde{x}_n \right\| = 0.$$

Portanto,

$$\lim_n Ax_n = \lim_n A\tilde{x}_n.$$

Claramente $\overline{A}$ estende A. De fato, dado $x \in D(A)$, considere

$$x_n = x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\overline{A}x = \lim_n Ax_n = \lim_n Ax = Ax.$$

Não é difícil verificar que $\overline{A}$ é linear. Além disso, o mesmo é limitado. Com efeito, dado $x \in \overline{D(A)}$, existe uma sequência $(x_n) \subset D(A)$ tal que

$$x_n \to x \quad \text{em} \quad X.$$

Assim,

$$\|\overline{A}x\| = \left\| \lim_n Ax_n \right\| = \lim_n \|Ax_n\| \leq \lim_n C\|x_n\| = C\|\lim_n x_n\|,$$

ou seja,

$$\|\overline{A}x\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in \overline{D(A)}.$$

Resta-nos mostrar a unicidade de $\overline{A}$. Com efeito, suponha que existe outro prolongamento $\tilde{A} : \overline{D(A)} \to Y$ de A linear e contínuo. Então, dado $x \in \overline{D(A)}$, existe $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$. Por ser $\tilde{A}$ contínuo,

$$\tilde{A}x_n \to \tilde{A}x \quad \text{em} \quad Y.$$

Sendo, $\tilde{A}$ um prolongamento para A, temos

$$\tilde{A}\tilde{x} = A\tilde{x}, \quad \forall \tilde{x} \in D(A).$$

Assim,

$$\tilde{A}x = \lim_n \tilde{A}x_n = \lim_n Ax_n = \overline{A}x,$$

e portanto $\tilde{A} = \overline{A}$. ■

Definição 1.3 *Diz-se que um operador linear $A : D(A) \to Y$, com $D(A) \subset X$, é densamente definido quando $\overline{D(A)} = X$.*

Por exemplo, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e limitado de classe C^2. Então, o operador $A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, onde $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, dado por $Au = \Delta u$ é densamente definido. Desde que $C_0^\infty(\Omega) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e recordando que o Teorema B.11 implica que $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$, concluímos

$$\overline{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega).$$

Dando continuidade ao nosso estudo, seja $A : D(A) \to Y$, com $D(A) \subset X$, um operador linear densamente definido. Defina o conjunto

$$D(A^*) = \{f \in Y'; \exists C > 0; \quad |f(Ax)| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D(A)\},$$

onde Y' é o dual topológico de Y. Não é difícil mostrar que $D(A^*)$ é um subespaço de Y'. Dado $f \in D(A^*)$, defina o funcional

$$\begin{aligned} g : D(A) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = f(Ax). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Note que g é um funcional linear pois f e A são lineares. Além disso, como $f \in D(A^*)$, existe $C > 0$ tal que

$$|g(x)| = |f(Ax)| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D(A).$$

Logo, g é contínuo. Usando a Proposição 1.1 e o fato de que $\overline{D(A)} = X$, obtemos um prolongamento $A^*f :\to \mathbb{R}$ para g linear e limitado. Logo, podemos definir o operador

$$\begin{aligned} A^* : D(A^*) &\to X' \\ f &\mapsto A^*f, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A^*f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (A^*f)(x) \end{aligned} \tag{1.9}$$

é um operador linear. Combinando (1.8) e (1.9),

$$(A^*f)(x) = f(Ax), \quad \forall f \in D(A^*), \quad \forall x \in D(A).$$

Esta identidade motiva a seguinte definição.

Definição 1.4 *Seja $A : D(A) \to Y$, com $D(A) \subset X$, um operador linear densamente definido. Um operador $A^* : D(A^*) \to X'$, com $D(A^*) \subset Y'$ é dito adjunto de A quando*

$$(A^*f)(x) = f(Ax), \quad \forall f \in D(A^*), \quad \forall x \in D(A).$$

Veremos que os operadores adjuntos tem uma propriedade muito especial. Em termos mais precisos, mostraremos que o adjunto de um operador A é sempre fechado independentemente de A ser fechado ou não.

Lema 1.4 *Se $A : D(A) \to Y$, com $D(A) \subset X$, é um operador linear densamente definido, então A^* é sempre fechado.*

Demonstração: Seja $(f, g) \in \overline{G(A^*)}$, então existe uma sequência $(f_n, A^*f_n) \subset G(A^*)$ tal que

$$(f_n, A^*f_n) \to (f, g) \quad \text{em} \quad Y' \times X',$$

ou seja,

$$f_n \to f \quad \text{em} \quad Y' \quad \text{e} \quad A^*f_n \to g \quad \text{em} \quad X'.$$

Queremos mostrar que $f \in D(A^*)$ e $A^*f = g$. Com efeito, por definição,

$$(A^*f_n)(x) = f_n(Ax), \quad \forall x \in D(A), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, fazendo $n \to +\infty$,

$$g(x) = f(Ax), \quad \forall x \in D(A). \tag{1.10}$$

Note que $g : X \to \mathbb{R}$ é linear e contínuo, pois $g \in X'$. Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Em particular,

$$|f(Ax)| = |g(x)| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D(A),$$

mostrando que $f \in D(A^*)$. Mais uma vez, por definição,

$$(A^*f)(x) = f(Ax), \quad \forall x \in D(A). \tag{1.11}$$

Se $x \in \overline{D(A)}$ e $x \notin D(A)$, então existe uma sequência $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ em X . Usando (1.10) e (1.11),

$$g(x) = \lim_n g(x_n) = \lim_n f(Ax_n) = \lim_n (A^*f)(x_n) = (A^*f)(\lim_n x_n) = (A^*f)(x).$$

Sendo $\overline{D(A)} = X$, concluímos que

$$g(x) = (A^*f)(x), \quad \forall x \in X$$

e, portanto, $g = A^*f$. ■

Definição 1.5 *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \to H$, com $D(A) \subset H$, um operador linear densamente definido. Diz-se que A é um operador simétrico quando*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in D(A).$$

O operador A é dito autoadjunto quando $A^* = A$, isto é, quando A é simétrico e $D(A) = D(A^*)$.

Exemplo 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado de classe C^2. O operador $A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por $Au = \Delta u$ é autoadjunto* [3].

O próximo resultado garante que o espectro de um operador linear autoadjunto é um subconjunto do conjunto dos números reais e sua demonstração pode ser vista em Botelho [6] ou Kreyszing [21].

[3] Uma justificativa para este fato pode ser encontrada em Kesavan [19].

Lema 1.5 *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $A : D(A) \to H$, com $D(A) \subset H$, é um operador linear autoadjunto, então $\sigma(A)$ é real.*

Também temos uma caracterização para o resolvente de um operador linear autoadjunto como veremos à seguir.

Lema 1.6 *Sejam H é um espaço de Hilbert complexo, $A : D(A) \to H$, com $D(A) \subset H$, um operador linear, contínuo, auto-adjunto e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, $\lambda \in \rho(A)$ se, e somente se, existe $C > 0$ tal que*

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq C\|x\|, \quad \forall x \in D(A).$$

Demonstração: Para mais detalhes, recomendamos a leitura Kreyszing [21]. ■

Lema 1.7 *Sejam H um espaço de Hilbert complexo e $A : D(A) \to H$, com $D(A) \subset H$, um operador linear auto-adjunto. Se*

$$\langle Ax, x\rangle \geq C\|x\|^2, \quad \forall x \in D(A),$$

onde $C > 0$ é uma constante, então $\sigma(A) \subset [C, +\infty)$.

Demonstração: O Lema 1.5 implica que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Queremos mostrar que $\sigma(A) \subset [C, +\infty)$. Observe que, para $x \in D(A)$ com $x \neq 0$,

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \geq C.$$

Então, podemos considerar

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle.$$

Seja $\lambda = m - \delta$, com $\delta > 0$. Mostraremos que $\lambda \in \rho(A)$. Com efeito, para cada $x \in D(A)$, com $x \neq 0$, defina

$$v = \frac{x}{\|x\|}.$$

Então, $x = \|x\|v$ e

$$\langle Ax, x\rangle = \langle A(\|x\|v), \|x\|v\rangle = \|x\|^2\langle Av, v\rangle \geq \|x\|^2 \inf_{\|\tilde{v}\|=1} \langle A\tilde{v}, \tilde{v}\rangle = m\|x\|^2.$$

Assim,

$$-m\langle x, x\rangle \geq -\langle Ax, x\rangle.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -\delta\|x\|^2 &= (\lambda - m)\langle x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - m\langle x, x\rangle \\ &\geq \langle \lambda x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x - Ax, x\rangle \\ &= \langle(\lambda I - A)x, x\rangle. \end{aligned}$$

Então,

$$\delta\|x\|^2 \leq \langle(A - \lambda I)x, x\rangle \leq |\langle(A - \lambda I)x, x\rangle| \leq \|(A - \lambda I)x\|\|x\|,$$

ou seja,

$$\delta\|x\| \leq \|(A - \lambda I)x\|.$$

Aplicando o Lema 1.6, tem-se $\lambda = m - \delta \in \rho(A)$. Como $\delta > 0$ é arbitrário, podemos concluir que $(-\infty, m) \subset \rho(A)$. Em particular, $(-\infty, C) \subset \rho(A)$ e, portanto, $\sigma(A) \subset [C, +\infty)$. ■

1.2 Semigrupo analítico

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de semigrupo analítico, operador setorial e alguns resultados envolvendo os mesmos. Uma apresentação mais completa da teoria aqui apresentada pode ser encontrada em Pazy [29], Henry [18] ou Zheng [35].

Ao longo dessa seção X é um espaço de Banach munido com norma $\|\cdot\|$. Vamos também considerar o setor

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}; \phi_1 < \arg z < \phi_2,\ \phi_1 < 0 < \phi_2\}$$

do plano complexo. Uma representação geométrica do setor Γ é dada na Figura 1.1.

Definição 1.6 *Para cada $z \in \Gamma$, seja $T(z)$ um operador linear limitado sobre X. A família $\{T(z)\}_{z\in\Gamma}$ dos operadores lineares e limitados sobre X chama-se um semigrupo analítico em Γ quando*

(i) *$z \to T(z)$ é analítica*[4] *em Γ;*

(ii) *$T(0) = I$ e*

$$\lim_{z\to 0} T(z)x = x, \quad \forall x \in X;$$

(iii) *$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Gamma$.*

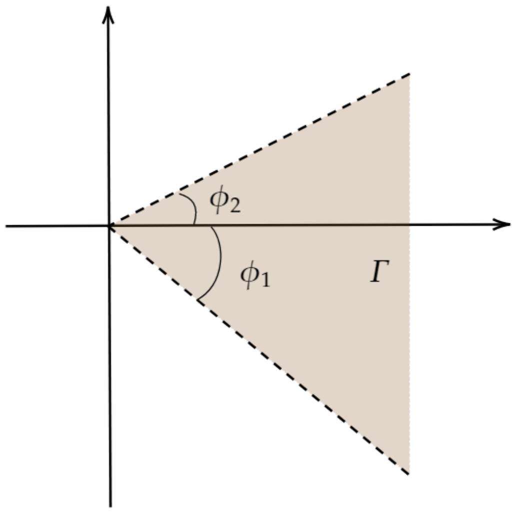

Figura 1.1: Representação geométrica do setor Γ.

Um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$[5] diz-se analítico quando existe um setor Γ contendo a semi reta não negativa tal que a extensão de $T(t)$ neste setor é analítica.

Definição 1.7 *O gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um operador linear $A : D(A) \to X$ onde*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Em alguns textos, principalmente quando se trabalha com aplicações, os operadores $T(t)$ são denotados por e^{-At}, onde A é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

O resultado à seguir estabelece condições necessárias e suficientes para que um operador seja o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Teorema 1.1 *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo uniformemente limitado[6]. Se $-A$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $0 \in \rho(-A)$, então as seguintes condições são equivalentes.*

[4] Caso o leitor sinta a necessidade de relembrar a definição de função analítica, recomendamos a leitura de Fernandes- Bernardes Jr. [11].

[5] A definição de C_0-semigrupo se encontra no Apêndice D.

[6] Veja a definição D.4 no Apêndice D.

(i) *O semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *tem um prolongamento analítico no setor*

$$\Gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \delta\}^{7}$$

e é uniformemente limitado em cada subsetor fechado $\overline{\Gamma}_{\delta'}$*, com* $\delta' < \delta$ *de* Γ*, isto é, existe uma constante* $M_* > 0$ *tal que*

$$\|T(z)\| \leq M_*, \quad \forall z \in \overline{\Gamma_{\delta'}}.$$

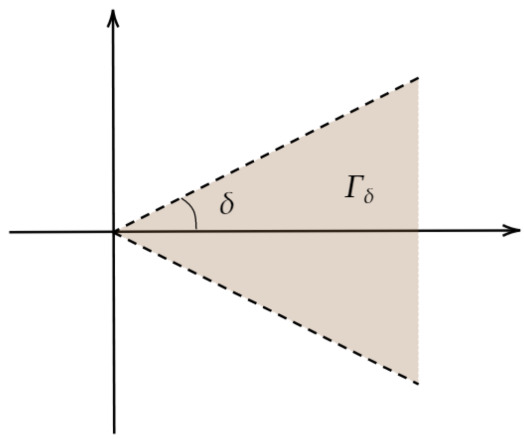

Figura 1.2: Representação geométrica do setor Γ_δ.

(ii) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que para cada* $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|((\sigma + i\tau)I + A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(iii) *Existem* $0 < \delta < \pi/2$ *e* $M > 0$ *tais que*

$$\rho(-A) \supset \Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\},$$

e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}.$$

(iv) $T(t)$ *é diferenciável para* $t > 0$ *e existe uma constante* C *tal que*

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t}, \quad \forall t > 0.$$

[7] Uma representação geométrica do setor Γ_δ pode ser vista na Figura 1.2.

Demonstração: Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em Zheng [35] ou Pazy [29]. ∎

Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo. Então, de acordo com o Teorema D.5, existem constantes $M \geq 1$ e $\beta \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Definindo $S(t) = e^{-\beta t}T(t)$, temos

$$\|S(t)\| = e^{-\beta t}\|T(t)\| \leq e^{-\beta t}Me^{\beta t} = M, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo uniformemente limitado.

Utilizando a relação $S(t) = e^{-\beta t}T(t)$, veremos que é possível demonstrar uma versão do Teorema 1.1 para C_0-semigrupos que não são necessariamente uniformemente limitados. Mas antes, vejamos o seguinte resultado.

Lema 1.8 *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo gerado por $-A$, então $S(t) = e^{-\beta t}T(t)$ é um C_0-semigrupo uniformemente limitado e o seu gerador infinitesimal é $-A - \beta I$.*

Demonstração: De acordo com o estudo acima, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo uniformemente limitado. Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{S(t)x - x}{t} &= \frac{e^{-\beta t}T(t)x - x}{t} \\
&= \frac{e^{-\beta t}T(t)x - e^{-\beta t}x + e^{-\beta t}x - x}{t} \\
&= e^{-\beta t}\frac{T(t)x - x}{t} + \frac{e^{-\beta t} - 1}{t}x.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)x - x}{t} &= \lim_{t\to 0^+} e^{-\beta t}\frac{T(t)x - x}{t} + \frac{e^{-\beta t} - 1}{t}x \\
&= \lim_{t\to 0^+} e^{-\beta t}\frac{T(t)x - x}{t} + \lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-\beta t} - 1}{t}x \\
&= -Ax - \beta x.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, $-A - \beta I$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. ∎

Teorema 1.2 *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Se $-A$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $0 \in \rho(-A)$, então as seguintes condições são equivalentes.*

(i) *O semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *tem um prolongamento analítico no setor*

$$\Gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \delta\}$$

e em cada subsetor fechado $\overline{\Gamma}_{\delta'}$, *com* $\delta' < \delta$, *de* Γ

$$\|T(z)\| \leq |e^{\beta z}| M_*, \quad z \in \overline{\Gamma}_{\delta'},$$

onde $\beta \geq 0$ *e* $M_* > 0$ *é a contante que limita uniformemente o semigrupo no item (i) do Teorema 1.1.*

(ii) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que para cada* $\sigma > \beta$, $\tau \neq 0$

$$\|((\sigma + i\tau)I + A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(iii) *Existem* $0 < \delta < \pi/2$ *e* $M > 0$ *tais que*

$$\rho(-A) \supset \Sigma_\beta = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{\lambda = \beta\},$$

e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \beta|}.$$

(iv) $T(t)$ *é diferenciável para* $t > 0$ *e*

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} e^{\beta t}, \quad \forall t > 0,$$

onde C *e* β *são constantes positivas.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Por hipótese, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tem um prolongamento analítico no setor

$$\Gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \delta\}.$$

Então, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ definido por $S(t) = e^{-\beta t}T(t)$ também o tem. Ademais, sabemos que existe uma constante $M_* > 0$ tal que

$$\|T(z)\| \leq |e^{\beta z}| M_*, \quad \forall z \in \Gamma_{\delta'}.$$

Então,

$$\|S(z)\| = \|e^{-\beta z} T(z)\| = |e^{-\beta z}| \|T(z)\| \leq M_* |e^{\beta z}| |e^{-\beta z}|, \tag{1.12}$$

ou seja,

$$\|S(z)\| \leq M_*, \quad \forall z \in \Gamma_{\delta'}.$$

Aplicando o Teorema 1.1 em $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, encontramos uma constante $C > 0$ tal que para cada $\sigma' > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|((\sigma' + i\tau)I - (-A - \beta I))^{-1}\| = \|((\sigma' + i\tau)I + (A + \beta I))^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|((\sigma + i\tau)I + A)^{-1}\| &= \|((\sigma + i\tau)I - \beta I + \beta I + A)^{-1}\| \\
&= \|((\sigma - \beta + i\tau)I + (A + \beta I))^{-1}\| \\
&\leq \frac{C}{|\tau|},
\end{aligned}$$

se $\sigma - \beta > 0$ e $\tau \neq 0$. Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que para cada $\sigma > \beta$, $\tau \neq 0$

$$\|((\sigma + i\tau)I + A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que existe uma constante $C > 0$ tal que para cada $\sigma > \beta$, $\tau \neq 0$

$$\|((\sigma + i\tau)I + A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

Se $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então, aplicando o Lema 1.8, concluímos que $-A - \beta I$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo uniformemente limitado $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|((\sigma - \beta + i\tau)I + (A + \beta I))^{-1}\| &= \|((\sigma + i\tau)I - \beta I + \beta I + A)^{-1}\| \\
&= \|((\sigma + i\tau)I + A)^{-1}\| \\
&\leq \frac{C}{|\tau|}.
\end{aligned}$$

Assim, de acordo com o Teorema 1.1, existem constantes $0 < \delta < \pi/2$ e $M > 0$ tais que

$$\rho(-A - \beta I) \supset \Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}, \tag{1.13}$$

e

$$\|(\lambda I + (A + \beta I))^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}. \tag{1.14}$$

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta \quad \text{ou} \quad \lambda - \beta = 0$$

Então, por (1.13), temos $\lambda - \beta \in \rho(-A - \beta I)$. Segundo o Corolário D.6.1, $-A - \beta I$ é um operador fechado. Assim, de acordo com o Lema 1.2,

$$(\lambda - \beta)I + A + \beta I = \lambda I + A$$

é bijetor. Dessa maneira, $\lambda \in \rho(-A)$ mostrando que

$$\Sigma_\beta = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{\lambda = \beta\} \subset \rho(-A).$$

Por fim, dado $\lambda \in \Sigma_\beta \backslash \{\beta\}$ segue, de (1.14), que

$$\begin{aligned} \|(\lambda I + A)^{-1}\| &= \|(\lambda I - \beta I + \beta I + A)^{-1}\| \\ &= \|((\lambda - \beta)I + (A + \beta I))^{-1}\| \\ &\leq \frac{M}{|\lambda - \beta|}. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Suponha que existem $0 < \delta < \pi/2$ e $M > 0$ tais que

$$\rho(-A) \supset \Sigma_\beta = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{\lambda = \beta\}, \tag{1.15}$$

e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \beta|}. \tag{1.16}$$

Como $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0-semigrupo, o Teorema D.5 garante a existência de constantes $M \geq 1$ e $\beta \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Definindo $S(t) = e^{-\beta t}T(t)$ tem-se, pelo Lema 1.8, que $-A - \beta I$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o qual é um C_0-semigrupo uniformemente limitado. Considere

$$\xi \in \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\},$$

então

$$|\arg(\xi + \beta - \beta)| = |\arg \xi| < \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Dessa maneira, por (1.15), $\xi + \beta \in \rho(-A)$. Consequentemente,

$$(\xi + \beta)I + A = \xi I + (A + \beta I)$$

é bijetor e assim, $\xi \in \rho(-A - \beta I)$. Logo,

$$\Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \subset \rho(-A - \beta I). \tag{1.17}$$

Além disso, usando (1.16),

$$\|(\xi I + (\beta I + A))^{-1}\| = \|((\xi + \beta)I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|(\xi + \beta) - \beta|} = \frac{M}{|\xi|},$$

ou seja

$$\|(\xi I + (\beta I + A))^{-1}\| \leq \frac{M}{|\xi|}, \quad \forall \xi \in \Sigma. \tag{1.18}$$

Usando (1.17) e (1.18) juntamente com o Teorema 1.1, segue que $S(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e existe uma constante C tal que

$$\|AS(t)\| \leq \frac{C}{t}, \quad \forall t > 0.$$

Uma vez que

$$T(t) = e^{\beta t} e^{-\beta t} T(t) = e^{\beta t} S(t),$$

tem-se a diferenciabilidade de $T(t)$ para $t > 0$. Ademais,

$$\|AT(t)\| = \|Ae^{\beta t} e^{-\beta t} T(t)\| = \|e^{\beta t} AS(t)\| = e^{\beta t} \|AS(t)\| \leq e^{\beta t} \frac{C}{t}, \quad \forall t > 0.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Suponha que $T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} e^{\beta t}, \quad \forall t > 0,$$

onde C e β são constantes positivas. Então, $S(t) = e^{-\beta t} T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e

$$\|AS(t)\| = \|Ae^{-\beta t} T(t)\| = e^{-\beta t} \|AT(t)\| \leq e^{-\beta t} \frac{C}{t} e^{\beta t} = \frac{C}{t}.$$

Desse modo, pelo Teorema 1.1, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tem um prolongamento analítico no setor

$$\Gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \delta\}$$

e é uniformemente limitado em cada subsetor fechado $\overline{\Gamma}_{\delta'}$ de Γ, com $\delta' < \delta$. Observe que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ também tem um prolongamento analítico no setor

$$\Gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \delta\}.$$

Além disso, como existe $M_* > 0$ tal que

$$\|S(z)\| \leq M_*, \quad \forall z \in \overline{\Gamma}_{\delta'},$$

temos,

$$\|T(z)\| = \|e^{\beta t}e^{-\beta t}T(z)\| = |e^{\beta t}|\|S(z)\| \leq |e^{\beta t}|M_*, \quad \forall z \in \overline{\Gamma}_{\delta'},$$

encerrando a demonstração. ∎

Vamos supor que existem constantes $0 < \delta < \pi/2$ e $M \geq 1$ tais que

$$\rho(-A) \supset \Sigma_\beta = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{\lambda = \beta\},$$

e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \beta|},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_\beta$ com $\lambda \neq \beta$. Considere o conjunto

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{2} - \delta \leq |\arg(\lambda + \beta)| \leq \pi,\ \lambda \neq -\beta\right\}.$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que

$$\frac{\pi}{2} - \delta \leq |\arg(\lambda + \beta)| \leq \pi,$$

então

$$\frac{\pi}{2} - \delta \leq \arg(\lambda + \beta) \leq \pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - \delta \leq -\arg(\lambda + \beta) \leq \pi.$$

Uma vez que $\arg(-\lambda - \beta) = \pi + \arg(\lambda + \beta)$, tem-se

$$\frac{\pi}{2} - \delta \leq \arg(-\lambda - \beta) - \pi \leq \pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - \delta \leq -\arg(-\lambda - \beta) + \pi \leq \pi.$$

Assim,

$$\frac{3\pi}{2} - \delta \leq \arg(-\lambda - \beta) \leq 2\pi \quad \text{ou} \quad \frac{-\pi}{2} - \delta \leq -\arg(-\lambda - \beta) \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{3\pi}{2} - \delta \leq \arg(-\lambda - \beta) \leq 2\pi \quad \text{ou} \quad 0 \leq \arg(-\lambda - \beta) \leq \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Nestas condições,

$$|\arg(-\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Logo, $-\lambda \in \Sigma_\beta$. Como $\Sigma_\beta \subset \rho(-A)$, concluímos que $-\lambda \in \rho(-A)$. Desse modo, $\lambda \in \rho(A)$ e portanto

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{2} - \delta \leq |\arg(\lambda + \beta)| \leq \pi,\ \lambda \neq -\beta\right\} \subset \rho(A).$$

Além disso, se

$$\lambda \in \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{2} - \delta \leq |\arg(\lambda + \beta)| \leq \pi,\ \lambda \neq -\beta\right\},$$

então $-\lambda \in \Sigma_\beta$ e $-\lambda \neq \beta$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)^{-1}\| &= \|-((-\lambda)I + A)^{-1}\| = \|((-\lambda)I + A)^{-1}\| \\ &\leq \frac{M}{|-\lambda - \beta|} = \frac{M}{|\lambda + \beta|}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

ou seja,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda + \beta|}.$$

Estes fatos motivam a seguinte definição.

Definição 1.8 *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Diz-se que A é um operador setorial quando A for fechado, densamente definido e existem constantes $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in (0, \pi/2)$ e $M \geq 1$ tais que o setor complexo*

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

está contido em $\rho(A)$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Uma representação geométrica do setor $S_{a,\phi}$ no plano complexo pode ser vista na Figura 1.3.

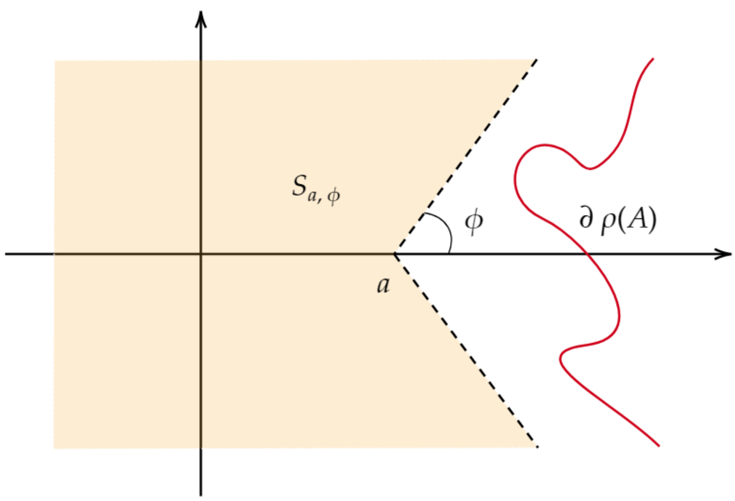

Figura 1.3: Representação do setor $S_{a,\phi}$.

Os resultados à seguir irão nos fornecer vários exemplos de operadores setoriais.

Proposição 1.2 *Seja X um espaço de Banach. Se $A : X \to X$ um operador linear limitado, então A é setorial.*

Demonstração: De acordo com o Corolário 1.3.1, se $\|A\| < |\lambda|$, então $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n. \tag{1.20}$$

Nestas condições, $\sigma(A) \subset \overline{B}(0, \|A\|)$, onde

$$\overline{B}(0, \|A\|) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Considerando $a \leq -3\|A\|$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$, temos

$$S_{a,\phi} \subset \rho(A)^{8},$$

pois

$$|\lambda| > 2\|A\|, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Agora, considere $\lambda \in S_{a,\phi}$ onde iremos admitir que $a = -3\|A\|$. Então, usando (1.20)

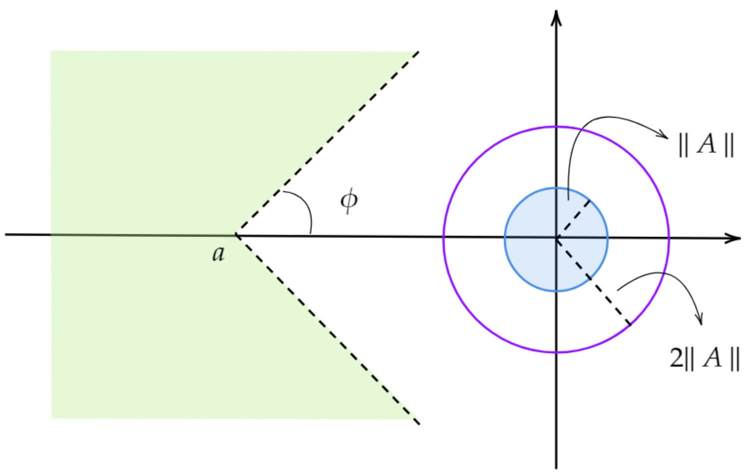

Figura 1.4: Representação do setor $S_{a,\phi}$ para $a \leq -3\|A\|$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$.

temos

$$(\lambda + 3\|A\|)(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda + 3\|A\|) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

[8] Uma representação geométrica desse fato pode ser vista na Figura 1.4.

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda+3\|A\|)(\lambda I-A)^{-1}\| &= \left\|(\lambda+3\|A\|)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \\
&= |\lambda+3\|A\||\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \\
&= \frac{|\lambda+3\|A\||}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n}}\right\| \\
&\leq \frac{|\lambda|+3\|A\|}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n}}\right\|. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Sendo $|\lambda| > 2\|A\|$, tem-se

$$\frac{|\lambda|+3\|A\|}{|\lambda|} \leq \frac{5|\lambda|}{2|\lambda|} = \frac{5}{2} \qquad (1.22)$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}\right\| &= \left\|\lim_{r\to+\infty}\sum_{n=0}^{r}\frac{A^n}{\lambda^n}\right\| = \lim_{r\to+\infty}\left\|\sum_{n=0}^{r}\frac{A^n}{\lambda^n}\right\| \\
&\leq \lim_{r\to+\infty}\sum_{n=0}^{r}\left\|\frac{A^n}{\lambda^n}\right\| = \lim_{r\to+\infty}\sum_{n=0}^{r}\frac{\|A^n\|}{|\lambda^n|} \\
&\leq \lim_{r\to+\infty}\sum_{n=0}^{r}\frac{\|A\|^n}{|\lambda^n|} = \lim_{r\to+\infty}\sum_{n=0}^{r}\left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^n \\
&\leq \lim_{r\to+\infty}\sum_{n=0}^{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \\
&= 2. \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

De (1.21), (1.22) e (1.23),

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\| \leq \frac{5}{|\lambda-a|},$$

onde $a = -3\|A\|$. Portanto, A é um operador setorial. ■

Teorema 1.3 *Sejam H um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e a norma $\|\cdot\|$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear auto-adjunto. Se existe uma constante C tal que*

$$\langle Ax, x\rangle \geq C\|x\|^2, \quad \forall x \in D(A),$$

então A é um operador setorial.

Demonstração: Sendo A um operador auto-adjunto, o Lema 1.4 nos diz que A é fechado. Além disso, como A é um operador auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert e

$$\langle Ax, x\rangle \geq C\|x\|^2, \quad \forall x \in D(A),$$

onde $C > 0$ é uma constante, $\sigma(A) \subset [C, \infty)$ de acordo com o Lema 1.7. Fixando $a = C/2$ e $\phi = \pi/4$, concluímos que $S_{a,\phi} \subset \rho(A)$. Veja a figura 1.5.

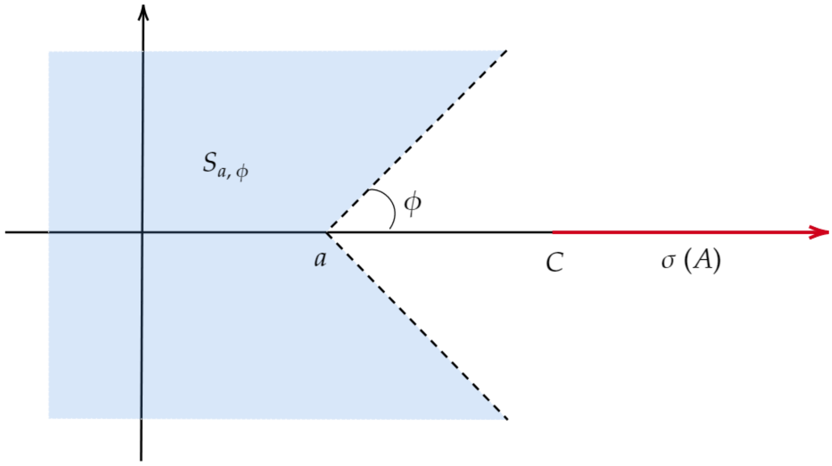

Figura 1.5: Representação do setor $S_{a,\phi}$ para $a = C/2$ e $\phi = \pi/4$.

Agora, sejam $x, y \in D(A)$, então

$$\begin{aligned}
\langle (A - aI)x, y\rangle &= \langle Ax, y\rangle - \langle ax, y\rangle \\
&= \langle x, Ay\rangle - \langle x, ay\rangle \\
&= \langle x, (A - aI)y\rangle, \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

e

$$\langle (A - aI)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \langle ax, x\rangle \geq C\|x\|^2 - a\|x\|^2 \geq 0. \qquad (1.25)$$

Fixado $\lambda \in S_{a,\phi}$, considere $\lambda' = \lambda - a$. Suponha $Re\lambda' < 0$, então

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)x\|^2 &= \|((\lambda' + a)I - A)x\|^2 = \|(\lambda' I - (A - aI))x\|^2 \\
&= \lambda'\overline{\lambda'}\|x\|^2 - \lambda'\langle x, (A - aI)x\rangle - \overline{\lambda'}\langle (A - aI)x, x\rangle + \|(A - aI)x\|^2 \\
&= |\lambda'|^2\|x\|^2 - \lambda'\overline{\langle (A - aI)x, x\rangle} - \overline{\lambda'}\langle (A - aI)x, x\rangle + \|(A - aI)x\|^2.
\end{aligned}$$

Recorde que

$$2Re(zw) = z\overline{w} + \overline{z}w, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\lambda'\overline{\langle (A - aI)x, x\rangle} + \overline{\lambda'}\langle (A - aI)x, x\rangle &= 2Re(\lambda'\overline{\langle (A - aI)x, x\rangle}) \\
&= 2Re(\lambda'\langle x, (A - aI)x\rangle) \\
&= 2\langle x, (A - aI)x\rangle Re\lambda'.
\end{aligned}$$

Uma vez que $Re\lambda' < 0$,

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = |\lambda'|^2\|x\|^2 - 2Re\lambda'\langle x, (A - aI)x\rangle + \|(A - aI)x\|^2 \geq |\lambda'|^2\|x\|^2,$$

ou seja,

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 \geq |\lambda'|^2\|x\|^2, \quad \forall x \in D(A). \tag{1.26}$$

Agora, suponha $0 \leq Re\lambda' \leq |Im\lambda'|$. Sendo

$$\langle \lambda Im\lambda' x, (Re\lambda' - (A - aI))x\rangle + \langle (Re\lambda' - (A - aI))x, Im\lambda' x\rangle = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)x\|^2 &= \|(\lambda' I - (A - aI))x\|^2 \\
&= \|((Re\lambda' + iIm\lambda')I - (A - aI))x\|^2 \\
&= \|(iIm\lambda' I + Re\lambda' I - (A - aI))x\|^2 \\
&= |Im\lambda'|^2\|x\|^2 + \|(Re\lambda' I - (A - aI))x\|^2 \\
&\geq |Im\lambda'|^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Desde que $0 \leq Re\lambda' \leq |Im\lambda'|$, tem-se

$$|\lambda'|^2 = (Re\lambda')^2 + (Im\lambda')^2 \leq |Im\lambda'|^2 + |Im\lambda'|^2 = 2|Im\lambda'|^2.$$

Logo,

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 \geq \frac{|\lambda'|^2}{2}\|x\|^2. \tag{1.27}$$

Por (1.26) e (1.27),

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 \geq \frac{|\lambda'|^2}{2}\|x\|^2, \quad \forall x \in D(A).$$

Desse modo, para cada $\lambda \in S_{a,\phi}$ e $x \in D(A)$, tem-se

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \frac{|\lambda - a|}{\sqrt{2}}\|x\|.$$

Logo, para cada $y \in D((\lambda I - A)^{-1}) = R(\lambda I - A)$, obtemos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda - a|}\|y\|,$$

e portanto,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi},$$

mostrando que A é um operador setorial. ■

Como aplicação do teorema anterior, vejamos o seguinte exemplo o qual será muito importante em estudos posteriores.

Exemplo 1.2 *Considere o operador $A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por $Au = -\Delta u$, onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave. Então, A é setorial.*

De fato, pela Desigualdade de Poincaré (veja o Teorema C.2), temos

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Então,

$$\langle Au, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u) u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{C} \int_\Omega |u|^2 dx = \frac{1}{C} \|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\langle Au, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq \tilde{C} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in D(A).$$

Como A é auto-adjunto, segue do Teorema 1.3 que A é um operador setorial.

Lema 1.9 *Se A é um operador setorial com $a = -\beta$ e $\phi = \pi/2 - \delta$, isto é, $S_{a,\phi} \subset \rho(A)$ e existe $M \geq 1$ tal que*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Então,

$$\rho(-A) \supset \Sigma_\beta = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{\lambda = \beta\}$$

e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \beta|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_\beta,$$

com $\lambda \neq \beta$.

Demonstração: Seja $\lambda \in \Sigma_\beta$, então

$$|\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta \quad \text{ou} \quad \lambda = \beta.$$

Definindo $w = \lambda - \beta$, temos

$$|\arg w| < \frac{\pi}{2} + \delta \quad \text{ou} \quad w = 0. \tag{1.28}$$

Suponha que

$$|\arg w| < \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Então,

$$\arg w < \frac{\pi}{2} + \delta \quad \text{ou} \quad \arg w > -\frac{\pi}{2} - \delta.$$

Tendo em vista que $\arg(-w) = \pi + \arg w$, temos

$$\arg(-w) < \frac{3\pi}{2} + \delta = -\frac{\pi}{2} + \delta = -\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \quad \text{ou} \quad \arg(-w) > \frac{\pi}{2} - \delta,$$

ou seja,

$$|\arg(-\lambda - (-\beta))| = |\arg(-\lambda + \beta)| = |\arg(-w)| > \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Por hipótese,

$$S_{-\beta, \frac{\pi}{2} - \delta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{2} - \delta \leq |\arg(-\lambda - (-\beta))| \leq \pi, \lambda \neq -\beta\right\}$$

está contido em $\rho(A)$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - (-\beta)|}, \quad \forall \lambda \in S_{-\beta, \frac{\pi}{2} - \delta}. \tag{1.29}$$

Nestas condições, $-\lambda \in S_{-\beta, \frac{\pi}{2} - \delta} \subset \rho(A)$, consequentemente, $\lambda \in \rho(-A)$, e portanto,

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \subset \rho(-A).$$

Para o caso em que $w = 0$, temos que $\arg(-w) = \pi$, ou seja,

$$|\arg(-\lambda - (-\beta))| = \pi.$$

Logo,

$$-\lambda \in S_{-\beta, \frac{\pi}{2} - \delta} \subset \rho(A)$$

e, portanto, $\lambda = \beta \in \rho(-A)$. Desse modo,

$$\rho(-A) \supset \Sigma_\beta = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - \beta)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{\lambda = \beta\}.$$

Além disso, por (1.29), para cada $\lambda \in \Sigma_\beta$ com $\lambda \neq \beta$,

$$\begin{aligned} \|(\lambda I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|-(-\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|(-\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \frac{M}{|-\lambda - (-\beta)|} \\ &= \frac{M}{|\lambda - \beta|}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ∎

Observação 1.1 *Combinando o Lema 1.9 com o Teorema 1.2, concluímos que se A é um operador setorial então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.*

1.3 Potências fracionárias de operadores

Nesta seção, vamos definir as potências fracionárias de operadores lineares e apresentar algumas das suas principais propriedades. Para mais detalhes a respeito do que vamos apresentar, veja Pazy [29] e Henry [18].

Lema 1.10 *Se A é um operador setorial e $0 \in \rho(A)$, então existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|T(t)\| \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

e

$$\|AT(t)\| \leq C_1 t^{-1} e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

onde $C, C_1 > 0$ são constantes.

Demonstração: Para mais detalhes, consulte [29] ou [18]. ∎

Definição 1.9 *Seja $A : D(A) \to X$, com $D(A) \subset X$, um operador setorial com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$ define-se a potência fracionária de A por*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T(t) dt,$$

onde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é o semigrupo analítico gerado por $-A$.

Para completar a teoria, convenciona-se $A^{-0} = I$ para o caso em que $\alpha = 0$. Além disso, como $0 \in \rho(A)$, podemos falar em A^{-1}. Quando $\alpha = 1$, o operador

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T(t) dt$$

coincide com A^{-1}. Para mais detalhes, veja Henry [18].

Lema 1.11 *O operador $A^{-\alpha}$ é linear limitado.*

Demonstração: Sejam $x, y \in X$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}(ax+by) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T(t)(ax+by) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (at^{\alpha-1} T(t)x + bt^{\alpha-1} T(t)y) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(a \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T(t)x dt + b \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T(t) y dt \right) \\
&= a \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T(t)x dt + b \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T(t) y dt \\
&= aA^{-\alpha}x + bA^{-\alpha}y.
\end{aligned}$$

Portanto, $A^{-\alpha}$ é linear. Ademais,

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}x\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}T(t)x dt \right\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \|t^{\alpha-1}T(t)x\| dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\|T(t)x\| dt \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\|T(t)\|\|x\| dt. \quad (1.30) \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.10,

$$\|T(t)\| \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t > 0.$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\|T(t)\|\|x\| dt \leq \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}Ce^{-\delta t}\|x\| dt = C\|x\| \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-\delta t} dt. \quad (1.31)$$

Agora, fazendo a mudança de variável $s = \delta t$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-\delta t} dt &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\alpha-1} e^{-s}\delta^{-1} ds = \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}\delta^{1-\alpha}e^{-s}\delta^{-1} ds \\ &= \delta^{-\alpha} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}e^{-s} ds = \delta^{-\alpha}\Gamma(\alpha). \quad (1.32) \end{aligned}$$

Combinando (1.30), (1.31) e (1.32), obtemos

$$\|A^{-\alpha}x\| \leq \tilde{C}\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 1.4 *Se* $\alpha, \beta \geq 0$*, então*

$$A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}A^{-\beta}.$$

Demonstração: Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [18] ou [29]. ■

Lema 1.12 *O operador* $A^{-\alpha}$ *é injetor.*

Demonstração: Seja $x \in \ker A^{-\alpha}$, então $A^{-\alpha}x = 0$. Considere $n \in \mathbb{N}$ com $n > \alpha$. Então, usando o Teorema 1.4,

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha-\alpha}x = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x = A^{-(n-\alpha)}0 = 0.$$

Como $0 \in \rho(A)$, A^{-1} é injetor, consequentemente, $A^{-n} = (A^{-1})^n$ é injetor. Daí, $x = 0$ mostrando que $\ker A^{-\alpha} = \{0\}$. Portanto, $A^{-\alpha}$ é injetor. ■

O conceito que vamos definir a seguir será muito importante para o estudo de algumas classes de problemas parabólicos como veremos posteriormente. O mesmo é motivado pelo Lema 1.12.

Definição 1.10 *O operador $A^\alpha : D(A^\alpha) \to X$, onde $D(A^\alpha) = Im(A^{-\alpha})$, chamado de potência fracionária de A é definido por*

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}.$$

Lema 1.13 *Se A é um operador setorial, então dado $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$T(t)x \in D(A^n), \quad \forall x \in X, \quad \forall t > 0.$$

Além disso, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|A^n T(t)\| \leq Ct^{-n}e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

onde C é uma constante que depende apenas de A e n.

Demonstração: Veja [29]. ∎

Teorema 1.5 *Seja A um operador setorial com $0 \in \rho(A)$. Então,*

(i) *Se $\alpha > 0$, então A^α é um operador fechado e densamente definido;*

(ii) *Se $\alpha \geq \beta > 0$, então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$;*

(iii) $A^\alpha A^\beta x = A^\beta A^\alpha x = A^{\alpha+\beta} x, \quad \forall x \in D(A^\gamma)$*, onde* $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [29]. ∎

Teorema 1.6 *Se A é um operador setorial e $0 \in \rho(A)$, então*

(i) *Dado $x \in X$, tem-se*

$$T(t)x \in D(A^\alpha), \quad \forall t > 0, \quad \forall \alpha \geq 0.$$

(ii) *Para cada $x \in D(A^\alpha)$, tem-se*

$$T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x.$$

(iii) *Para cada $t > 0$, o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado. Além disso, existem constantes $M_\alpha > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

(iv) *Se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^\alpha)$, então*

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Demonstração: (i) Seja $\alpha \geq 0$. Considere $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq \alpha$. Então, de acordo com o Teorema 1.5, temos

$$D(A^m) \subset D(A^\alpha).$$

Desde que

$$T(t)x \in D(A^m), \quad \forall x \in X, \quad \forall t > 0,$$

aplicando o Lema 1.13, obtemos

$$T(t)x \in D(A^\alpha), \quad \forall x \in X, \quad \forall t > 0.$$

(ii) Considere $x \in D(A^\alpha)$. Sendo A^α invertível, existe $y \in X$ tal que

$$x = A^{-\alpha} y.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(t)x &= T(t)A^{-\alpha}y = T(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}T(s)yds\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}T(t)T(s)yds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}T(s)T(t)yds \\ &= A^{-\alpha}T(t)y = A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A^\alpha T(t)x = T(t)A^\alpha x,$$

como queríamos demonstrar.

(iii) Note que $A^\alpha T(t)$ é um operador fechado. De fato, seja $(x, y) \in \overline{G(A^\alpha T(t))}$. Então, existe uma sequência $(x_n) \subset D(A^\alpha T(t))$ tal que

$$x_n \to x \quad \text{em} \quad X$$

e

$$A^\alpha T(t)x_n \to y \quad \text{em} \quad X. \tag{1.33}$$

Queremos mostrar que $x \in D(A^\alpha T(t))$ e $A^\alpha T(t)x = y$. Ora, pelo item (i) demonstrado acima, tem-se $D(A^\alpha T(t)) = X$. Assim, $x \in D(A^\alpha T(t))$. Agora, tendo em vista que, para cada $t > 0$, o operador $T(t) : X \to X$ é contínuo, tem-se

$$T(t)x_n \to T(t)x \quad \text{em} \quad D(A^\alpha). \tag{1.34}$$

Segundo o Teorema 1.5, A^α é um operador fechado. Então, de (1.33) e (1.34), tem-se $A^\alpha T(t)x = y$. Logo, $A^\alpha T(t)$ é limitado, de acordo com o Teorema do Gráfico Fechado (veja o Teorema A.5). Para a outra parte, considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} A^\alpha T(t)x &= A^{\alpha-n+n}T(t)x = A^{\alpha-n}A^nT(t)x \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}T(s)A^nT(t)xds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}A^nT(t+s)xds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|A^\alpha T(t)x\| \leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}\|A^nT(t+s)x\|ds.$$

Usando a estimativa dada no Lema 1.13,

$$\begin{aligned} \|A^\alpha T(t)x\| &\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}C(t+s)^{-n}e^{-\delta(t+s)}\|x\|ds \\ &= \frac{Ce^{-\delta t}\|x\|}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}e^{-\delta s}ds \\ &\leq \frac{Ce^{-\delta t}\|x\|}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}ds. \tag{1.35}$$

Note que

$$\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}ds = \int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^{-n}ds.$$

Fazendo a mudança de variável $r = \frac{s}{t}$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^{-n}ds &= \int_0^{+\infty}(rt)^{n-\alpha-1}t^{-n}(1+r)^{-n}tdr \\ &= t^{-\alpha}\int_0^{+\infty} r^{n-\alpha-1}(1+r)^{-n}dr. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^{n-\alpha-1}(1+r)^{-n}dr &= \int_0^{1} r^{n-\alpha-1}(1+r)^{-n}dr + \int_1^{+\infty} r^{n-\alpha-1}(1+r)^{-n}dr \\ &\leq \int_0^{1} r^{n-\alpha-1}dr + \int_1^{+\infty}(1+r)^{-n}dr \\ &= \frac{1}{n-\alpha} - \frac{2^{1-n}}{1-n}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Combinando (1.35), (1.36) e (1.37), obtemos

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},$$

encerrando a demonstração.

(iv) Seja $x \in D(A^\alpha)$. Então, pelo Teorema D.6,

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$$

e

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$

Uma vez que $T(\cdot)x : [0,t] \to D(A)$ é contínua e $A : D(A) \to X$ é linear e limitado, com relação à norma do gráfico, tem-se pelo Teorema D.3 que

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = \int_0^t AT(s)xds.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\| &= \left\|A\left(\int_0^t T(s)xds\right)\right\| = \left\|\int_0^t AT(s)xds\right\| \\ &= \left\|\int_0^t A^{1-\alpha}T(s)A^\alpha xds\right\| \leq \int_0^t \|A^{1-\alpha}T(s)\|\|A^\alpha x\|ds. \end{aligned}$$

Aplicando o item (iii),

$$\|T(t)x - x\| \leq \|A^\alpha x\| M_{1-\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1}ds = \|A^\alpha x\| M_{1-\alpha}\frac{t^\alpha}{\alpha} \tag{1.38}$$

e, portanto,

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

■

Dado um operador setorial $A : D(A) \to X$ com $Re\sigma(A) > 0$, podemos definir o operador A^α o qual está bem definido sobre o conjunto $D(A^\alpha)$. Neste conjunto, podemos introduzir uma topologia como veremos à seguir. A mesma será muito importante quando estivermos trabalhando com as aplicações.

Definição 1.11 *Seja $0 \leq \alpha \leq 1$. Define-se o espaço de potência fracionária como sendo o par $(X^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, onde $X^\alpha = D(A^\alpha)$ e*

$$\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|_X, \quad \forall x \in X^\alpha.$$

Quando $\alpha = 0$ convencionamos $X^0 = X$. Não é difícil mostrar que $\|\cdot\|_\alpha$ define uma norma. Em X^α também podemos definir a seguinte norma

$$\|x\|_* = \|x\|_X + \|A^\alpha x\|_X,$$

a qual é conhecida como norma do gráfico de A^α.

Lema 1.14 *A norma $\|\cdot\|_\alpha$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_*$, isto é, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que*

$$\|x\|_\alpha \leq C_1\|x\|_* \quad e \quad \|x\|_* \leq C_2\|x\|_\alpha,$$

qualquer que seja $x \in X^\alpha$.

Demonstração: Note que

$$\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|_X \leq \|x\|_X + \|A^\alpha x\|_X = \|x\|_*, \quad \forall x \in X^\alpha.$$

Por outro lado, sendo $A^{-\alpha}$ um operador limitado, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|A^{-\alpha}y\|_X \leq C\|y\|_X, \quad \forall y \in D(A^{-\alpha}).$$

Então, sendo $x = A^{-\alpha}y$, temos

$$\|x\|_X \leq C\|A^\alpha x\|_X,$$

para alguma constante $C > 0$. Consequentemente,

$$\|x\|_* = \|x\|_X + \|A^\alpha\|_X \leq C\|A^\alpha x\|_X + \|A^\alpha x\|_X = (C+1)\|A^\alpha x\|_X = (C+1)\|x\|_\alpha,$$

mostrando o resultado. ∎

Teorema 1.7 *O espaço X^α munido com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ é de Banach.*

Demonstração: Seja $(x_n) \subset X^\alpha$ uma sequência de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_\alpha < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Então,

$$\|A^\alpha x_n - A^\alpha x_m\|_X < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Assim, a sequência $(A^\alpha x_n)$ é de Cauchy em X. Uma vez que X é um espaço de Banach, existe $y \in X$ tal que

$$A^\alpha x_n \to y \quad \text{em} \quad X,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A^\alpha x_n - y\|_X < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$\|x_n - A^{-\alpha} y\|_\alpha = \|A^\alpha x_n - y\|_X < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

mostrando que $(x_n) \subset X^\alpha$ é convergente. Portanto, X^α é um espaço de Banach. ∎

Teorema 1.8 *Se $\alpha \geq \beta \geq 0$, então X^α está imerso continuamente em X^β.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 1.5, $X^\alpha \subset X^\beta$ pois $\alpha \geq \beta \geq 0$. Agora, observe que, dado $x \in X^\alpha$, tem-se

$$\|x\|_\beta = \|A^\beta x\| = \|A^{\beta-\alpha} A^\alpha x\| \leq C\|A^\alpha x\| = C\|x\|_\alpha,$$

pois $A^{\beta-\alpha}$ é um operador limitado. Portanto,

$$\|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha, \quad \forall x \in X^\alpha$$

mostrando que X^α está imerso continuamente em X^β. ∎

1.4 O problema de Cauchy linear

Nesta seção, vamos estudar a equação não homogênea

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{P2}$$

onde $f : [0, +\infty) \to X$ é uma função fixada tomando valores em um espaço de Banach X e A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ [9]. Este estudo é baseado em Pazy [29] e nosso objetivo é estudar a existência de solução para esta classe de problemas. Mas antes, vejamos o que entendemos por uma solução para (P2).

Definição 1.12 *Uma função u é chamada de solução clássica para o problema (P2) quando*

(i) $u \in C([0, +\infty), D(A)) \cap C^1((0, +\infty), X)$,

(ii) $u(t) \in D(A), \quad \forall t > 0$,

[9]Para mais detalhes, veja o Apêndice D.

e u verifica (P2).

Sendo u uma solução clássica da equação (P2) e $\varphi : [0,+\infty) \to X$ uma função definida por $\varphi(s) = T(t-s)u(s)$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s+h)-\varphi(s)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{T(t-(s+h))u(s+h) - T(t-s)u(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{T(t-(s+h))u(s+h) - T(t-(s+h))u(s)}{h} \\
&+ \lim_{h\to 0} \frac{T(t-(s+h))u(s) - T(t-s-h+h)u(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} T(t-(s+h)) \left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} \right) \\
&+ \lim_{h\to 0} T(t-(s+h)) \left(\frac{I - T(h)}{h} \right) u(s),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d\varphi}{dt}(s) = T(t-s)\left(\frac{du}{dt}(s) - Au(s) \right) = T(t-s)f(s). \tag{1.39}$$

Se $f \in L^1([0,+\infty);X)$, então $T(t-s)f(s)$ é integrável em $[0,t]$. Integrando (1.39) sobre $[0,t]$,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Esta identidade motiva a seguinte definição.

Definição 1.13 *Sejam* $u_0 \in X$ *e* $f \in L^1([0,+\infty);X)$*. Uma função* $u \in C([0,+\infty);X)$ *é chamada de solução generalizada para o problema* (P2) *quando*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,+\infty).$$

De acordo com o que vimos acima, se $f \in L^1([0,+\infty);X)$, então uma solução clássica de (P2) é também uma solução generalizada. Porém a reciproca nem sempre é verdadeira. Para mais detalhes, veja Kesavan [19] ou Pazy [29].

Os conceitos que apresentaremos à seguir serão fundamentais no estudo de existência de solução para a classe de problemas (P2).

Definição 1.14 *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo. Diz-se que uma função* $f : I \to X$ *é Hölder contínua quando existem constantes* $0 < \alpha \leq 1$ *e* $L > 0$ *tais que*

$$\|f(s) - f(t)\| \leq L|s-t|^{\alpha}, \quad \forall s,t \in I.$$

Diz-se que $f : I \to X$ *é localmente Hölder contínua quando, para cada* $t \in I$*, existe uma vizinhança* V *de* t *tal que* f *é Hölder contínua em* V*.*

Observação 1.2 *Se I é compacto e $f : I \to X$ é localmente Hölder contínua, então f é Hölder contínua*[10].

Teorema 1.9 *Seja A um operador setorial com $0 \in \rho(A)$. Se $u_0 \in X$ e $f \in L^1([0, +\infty); X)$ é uma função localmente Hölder contínua em $(0, +\infty)$, então o problema (P2) possui uma única solução clássica.*

Demonstração: Seja

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Nosso objetivo é usar Kesavan [19, Teorema 4.9.2]. Para isso, precisamos mostrar que a aplicação definida por

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0$$

é tal que

$$v(t) \in D(A), \quad \forall t \geq 0,$$

e $Av(\cdot)$ é contínua em $(0, +\infty)$. Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(t)ds + \int_0^t T(t-s)f(t)ds \\ &= \int_0^t T(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_0^t T(t-s)f(t)ds. \end{aligned}$$

Defina

$$v_1(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s) - f(t))ds \tag{1.40}$$

e

$$v_2(t) = \int_0^t T(t-s)f(t)ds. \tag{1.41}$$

Afirmação 1.9.1 *A aplicação v_1 definida em (1.40) cumpre a condição*

$$v_1(t) \in D(A), \quad \forall t \geq 0,$$

e $Av_1(\cdot)$ é contínua em $(0, +\infty)$.

[10]Para mais detalhes, veja Pazy [29].

Inicialmente, vamos trabalhar em um intervalo $[0,\tilde{t}] \subset [0,+\infty)$ fixado. Mostraremos que

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)v_1(t)=\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$

Com efeito, note que o operador

$$\frac{T(h)-I}{h}:X\to X$$

é linear e contínuo, para cada $h\geq 0$ fixado. Assim, aplicando o Teorema D.3,

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds=\int_0^t \left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t-s)(f(s)-f(t))ds. \tag{1.42}$$

Defina

$$R(t)=\frac{T(h)-I}{h}v_1(t)-\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$

Então, por (1.42),

$$\begin{aligned}
R(t) &= \frac{T(h)-I}{h}v_1(t)-\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds\\
&= \left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds-\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds\\
&= \int_0^t\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t-s)(f(s)-f(t))ds-\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds\\
&= \int_0^t\left(\frac{T(h)-I}{h}-A\right)T(t-s)(f(s)-f(t))ds.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\|R(t)\| \leq \int_0^t \left\|\left(\frac{T(h)-I}{h}-A\right)T(t-s)(f(s)-f(t))\right\|ds. \tag{1.43}$$

Desde que

$$\|u\|\geq 0,\quad \forall u\in X,$$

tem-se

$$\|Au\|\leq \|u\|+\|Au\|=\|u\|_{D(A)},\quad \forall u\in D(A).$$

Dessa maneira, o operador $A:D(A)\to X$ é contínuo com respeito a norma do gráfico. Ademais, sabemos que, para cada h fixado,

$$\left\|\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)u\right\|\leq C_h\|u\|,\quad \forall u\in X,$$

onde $C_h > 0$ é uma constante, e

$$\|Au\| \geq 0, \quad \forall u \in D(A).$$

Então,

$$\left\| \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) u \right\| \leq C_h \|u\| + C_h \|Au\| = C_h \|u\|_{D(A)}, \quad \forall u \in D(A).$$

Logo, o operador

$$\frac{T(h) - I}{h} : D(A) \to X$$

também é contínuo com respeito a norma do gráfico. Recorde que, para cada $u \in D(A)$ fixado,

$$\lim_{h \to 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) u = Au.$$

Assim, para cada $u \in D(A)$ fixado, existe uma constante $\tilde{C}_u > 0$ tal que

$$\left\| \left(\frac{T(h) - I}{h} - A \right) u \right\| \leq \tilde{C}_u \|u\|_{D(A)}, \quad \forall h \in [0, 1].$$

Sendo $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ um espaço de Banach, o Teorema de Banach-Steinhaus (veja o Teorema A.4) assegura a existência de uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\left\| \left(\frac{T(h) - I}{h} - A \right) u \right\| \leq \tilde{C} \|u\|_{D(A)}, \quad \forall u \in D(A), \quad \forall h \in [0, 1]. \tag{1.44}$$

Motivado por (1.43), defina a função $g_h : [0, t] \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$g_h(s) = \left\| \left(\frac{T(h) - I}{h} - A \right) T(t - s)(f(s) - f(t)) \right\|.$$

De acordo com o Lema 1.13, para cada s fixado, tem-se

$$T(t - s)(f(s) - f(t)) \in D(A).$$

Então,

$$AT(t - s)(f(s) - f(t)) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) T(t - s)(f(s) - f(t)),$$

ou seja,

$$\left\| \left(\frac{T(h) - I}{h} - A \right) T(t - s)(f(s) - f(t)) \right\| \to 0, \quad h \to 0^+.$$

Portanto,

$$g_h(s) \to 0, \quad h \to 0^+, \tag{1.45}$$

para cada s fixado. Além disso, usando (1.44),

$$\begin{aligned}|g_h(s)| &= \left\|\left(\frac{T(h)-I}{h}-A\right)T(t-s)(f(s)-f(t))\right\| \\ &\leq \tilde{C}\|T(t-s)(f(s)-f(t))\|_{D(A)},\end{aligned}$$

isto é,

$$|g_h(s)| \leq \tilde{C}\|T(t-s)(f(s)-f(t))\| + \tilde{C}\|AT(t-s)(f(s)-f(t))\|.$$

O Teorema D.5 garante a existência de constantes $M \geq 1$ e $\beta \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Temos também, pelo Teorema 1.2, que

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}|g_h(s)| &\leq \tilde{C}\|T(t-s)(f(s)-f(t))\| + \tilde{C}\|AT(t-s)(f(s)-f(t))\| \\ &\leq \tilde{C}\|T(t-s)\|\|f(s)-f(t)\| + \tilde{C}\|AT(t-s)\|\|f(s)-f(t)\| \\ &\leq \tilde{C}Me^{\beta(t-s)}\|f(s)-f(t)\| + \tilde{C}\frac{C}{t-s}\|f(s)-f(t)\|. \qquad (1.46)\end{aligned}$$

Por hipótese,

$$\|f(s)-f(t)\| \leq K|s-t|^{\alpha}, \quad \forall s,t \in [0,\tilde{t}],$$

onde $K = K(\tilde{t}) > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$ são constantes. Assim, segue de (1.46), que

$$\begin{aligned}|g_h(s)| &\leq \tilde{C}Me^{\beta(t-s)}K|s-t|^{\alpha} + \tilde{C}\frac{C}{t-s}K|s-t|^{\alpha} \\ &\leq \tilde{C}Me^{\beta\tilde{t}}K|s-t|^{\alpha} + \tilde{C}CK|t-s|^{-1}|s-t|^{\alpha} \\ &\leq C_*\tilde{t}^{\alpha} + C_*|t-s|^{\alpha-1}, \qquad (1.47)\end{aligned}$$

onde $C_* = \max\{\tilde{C}Me^{\beta\tilde{t}}K, \tilde{C}CK\}$. Agora, fazendo a mudança de variável $r = t-s$,

$$\int_0^{\tilde{t}}(t-s)^{\alpha-1}ds = \int_{t-\tilde{t}}^{t} r^{\alpha-1}dr = \frac{t^{\alpha}-(t-\tilde{t})^{\alpha}}{\alpha} < +\infty.$$

Dessa maneira,

$$\int_0^{\tilde{t}}|t-s|^{\alpha-1}ds < +\infty.$$

Logo,
$$C_*\tilde{t}^\alpha + C_*|t-s|^{\alpha-1} \in L^1([0,\tilde{t}]). \tag{1.48}$$
Combinando (1.45), (1.47), (1.48) e aplicando o Corolário B.12.1, temos
$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^t g_h(s)ds = 0,$$
ou seja,
$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^t \left\| \left(\frac{T(h)-I}{h} - A \right) T(t-s)(f(s)-f(t)) \right\| ds = 0,$$
e portanto
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h} v_1(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$
Nestas condições, concluímos que
$$v_1(t) \in D(A), \quad \forall t \in (0,\tilde{t})$$
e
$$Av_1(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$
Resta mostrar que $Av_1(\cdot)$ é contínua em $(0,\tilde{t})$. Com efeito, sejam $(t_n) \subset (0,\tilde{t})$ e $t \in (0,\tilde{t})$ com
$$t_n \to t, \quad n \to +\infty.$$
Suponha inicialmente que
$$t_n > t, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Note que,
$$\int_0^{t_n} AT(t_n-s)(f(s)-f(t))ds = \int_0^{\tilde{t}} \chi_{[0,t_n]}(s)AT(t_n-s)(f(s)-f(t))ds$$
e
$$\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds = \int_0^{\tilde{t}} \chi_{[0,t]}(s)AT(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$
Então,
$$\begin{aligned}
\|Av_1(t_n)-Av_1(t)\| &= \left\| \int_0^{t_n} AT(t_n-s)(f(s)-f(t))ds - \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{\tilde{t}} (\chi_{[0,t_n]}(s)AT(t_n-s) - \chi_{[0,t]}(s)AT(t-s))(f(s)-f(t))ds \right\| \\
&\le \int_0^{\tilde{t}} \|(\chi_{[0,t_n]}(s)AT(t_n-s) - \chi_{[0,t]}(s)AT(t-s))(f(s)-f(t))\| ds.
\end{aligned}$$

Defina $h_n : (0, \tilde{t}) \to \mathbb{R}$ por

$$h_n(s) = \|(\chi_{[0,t_n]}(s)AT(t_n - s) - \chi_{[0,t]}(s)AT(t - s))(f(s) - f(t))\|.$$

Observe que

$$AT(t_n - s)(f(s) - f(t_n)) \to AT(t - s)(f(s) - f(t)) \quad \text{quando} \quad t_n \to t. \tag{1.49}$$

De fato, fazendo

$$R_n = AT(t_n - s)(f(s) - f(t_n)) - AT(t - s)(f(s) - f(t)),$$

temos

$$\begin{aligned}
R_n &= AT(t_n - s)(f(s) - f(t_n)) - AT(t - s)(f(s) - f(t)) \\
&= AT(t_n - t + t - s)(f(s) - f(t_n)) - AT(t - s)(f(s) - f(t)) \\
&= AT(t - s + t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - AT(t - s)(f(s) - f(t)) \\
&= AT(t - s)T(t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - AT(t - s)(f(s) - f(t)) \\
&= AT(t - s)[T(t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - (f(s) - f(t))].
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|R_n\| &= \|AT(t - s)[T(t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - (f(s) - f(t))]\| \\
&\leq \|AT(t - s)\|\|T(t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - (f(s) - f(t))\| \\
&\leq C(t - s)^{-1}\|T(t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - T(t_n - t)(f(s) - f(t)) \\
&+ T(t_n - t)(f(s) - f(t)) - (f(s) - f(t))\| \\
&\leq C(t - s)^{-1}\|T(t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - T(t_n - t)(f(s) - f(t))\| \\
&+ C(t - s)^{-1}\|T(t_n - t)(f(s) - f(t)) - (f(s) - f(t))\|.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Agora, sendo

$$S_n = \|T(t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - T(t_n - t)(f(s) - f(t))\|,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
S_n &= \|T(t_n - t)(f(s) - f(t_n)) - T(t_n - t)(f(s) - f(t))\| \\
&= \|T(t_n - t)[(f(s) - f(t_n)) - (f(s) - f(t))]\| \\
&= \|T(t_n - t)(f(s) - f(t_n) - f(s) + f(t))\| \\
&= \|T(t_n - t)(f(t) - f(t_n))\|.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Pela definição de C_0-semigrupo[11],

$$\|T(t_n - t)(f(s) - f(t)) - (f(s) - f(t))\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t_n \to t. \tag{1.52}$$

Além disso, usando novamente a definição de C_0-semigrupo e a continuidade de f,

$$\|T(t_n - t)(f(t) - f(t_n))\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t_n \to t. \tag{1.53}$$

Assim, de (1.50), (1.51), (1.52) e (1.53),

$$\|R_n\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t_n \to t,$$

e portanto

$$AT(t_n - s)(f(s) - f(t_n)) \to AT(t - s)(f(s) - f(t)) \quad \text{quando} \quad t_n \to t.$$

Note também que

$$\chi_{[0,t_n]}(s) \to \chi_{[0,t]}(s) \quad \text{q.s. em} \quad (0, \tilde{t}). \tag{1.54}$$

De fato, sendo $s < t$ e $t_n \to t$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_n \geq s, \quad \forall n \geq n_0.$$

Desse modo,

$$\lim_n \chi_{[0,t_n]}(s) = \lim_n 1 = 1 \quad \text{e} \quad \chi_{[0,t]}(s) = 1$$

e, portanto,

$$\lim_n \chi_{[0,t_n]}(s) = \chi_{[0,t]}(s), \quad \forall s < t.$$

Agora, se $s > t$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_n \leq s, \quad \forall n \geq n_0.$$

Então,

$$\chi_{[0,t_n]}(s) = 0, \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \chi_{[0,t]}(s) = 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_n \chi_{[0,t_n]}(s) = \chi_{[0,t]}(s), \quad \forall s > t_n.$$

Dessa forma, concluímos que

$$\lim_n \chi_{[0,t_n]}(s) = \chi_{[0,t]}(s) \quad \text{q.s. em} \quad (0, \tilde{t}).$$

[11] Veja o Apêndice D.

Combinando (1.49) e (1.54), obtemos

$$h_n(s) \to 0 \quad \text{q.s. em} \quad (0, \tilde{t}). \tag{1.55}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
|h_n(s)| &= \|(\chi_{[0,t_n]}(s)AT(t_n - s) - \chi_{[0,t]}(s)AT(t-s))(f(s) - f(t))\| \\
&= \|\chi_{[0,t_n]}(s)AT(t_n - s)(f(s) - f(t)) - \chi_{[0,t]}(s)AT(t-s)(f(s) - f(t))\| \\
&\leq \|\chi_{[0,t_n]}(s)AT(t_n - s)(f(s) - f(t))\| + \|\chi_{[0,t]}(s)AT(t-s)(f(s) - f(t))\| \\
&= \chi_{[0,t_n]}(s)\|AT(t_n - s)(f(s) - f(t))\| + \chi_{[0,t]}(s)\|AT(t-s)(f(s) - f(t))\| \\
&\leq \chi_{[0,t_n]}(s)C_1(t_n - s)^{-1}\|f(s) - f(t)\| + \chi_{[0,t]}(s)C_2(t-s)^{-1}\|f(s) - f(t)\|.
\end{aligned}$$

Tendo em vista que

$$\|f(s) - f(t)\| \leq K|s-t|^{\alpha}, \quad \forall s, t \in [0, \tilde{t}],$$

obtemos

$$\begin{aligned}
|h_n(s)| &\leq \chi_{[0,t_n]}(s)C_1(t_n - s)^{-1}K|s-t|^{\alpha} + \chi_{[0,t]}(s)C_2(t-s)^{-1}K|s-t|^{\alpha} \\
&\leq \left|\chi_{[0,t_n]}(s)C_1(t_n - s)^{-1}K|s-t|^{\alpha} + \chi_{[0,t]}(s)C_2(t-s)^{-1}K|s-t|^{\alpha}\right| \\
&\leq C_1K\chi_{[0,t_n]}(s)|t_n - s|^{-1}|s-t|^{\alpha} + C_2K\chi_{[0,t]}(s)|t-s|^{-1}|s-t|^{\alpha} \\
&\leq \tilde{C}\left(\frac{\chi_{[0,t_n]}(s)}{|t_n - s|^{1-\alpha}} + \frac{\chi_{[0,t]}(s)}{|t-s|^{1-\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \max\{C_1K, C_2K\}$, ou seja

$$|h_n(s)| \leq \tilde{C}\left(\frac{\chi_{[0,t_n]}(s)}{|t_n - s|^{1-\alpha}} + \frac{\chi_{[0,t]}(s)}{|t-s|^{1-\alpha}}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{q.s. em} \quad (0, \tilde{t}). \tag{1.56}$$

Defina a função $\tilde{h}_n$ da seguinte forma

$$\tilde{h}_n(s) = \frac{\chi_{[0,t_n]}(s)}{|t_n - s|^{1-\alpha}} + \frac{\chi_{[0,t]}(s)}{|t-s|^{1-\alpha}}.$$

Claramente

$$\tilde{h}_n(s) \to 2\frac{\chi_{[0,t]}(s)}{|t-s|^{1-\alpha}} = \tilde{h}(s) \quad \text{q.s. em} \quad (0, \tilde{t}). \tag{1.57}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tilde{t}} \tilde{h}_n(s)ds &= \int_0^{\tilde{t}} \left(\frac{\chi_{[0,t_n]}(s)}{|t_n - s|^{1-\alpha}} + \frac{\chi_{[0,t]}(s)}{|t-s|^{1-\alpha}}\right) ds \\
&= \int_0^{\tilde{t}} \frac{\chi_{[0,t_n]}(s)}{|t_n - s|^{1-\alpha}}ds + \int_0^{\tilde{t}} \frac{\chi_{[0,t]}(s)}{|t-s|^{1-\alpha}}ds \\
&= \int_0^{t_n} |t_n - s|^{\alpha-1}ds + \int_0^{t} |t-s|^{\alpha-1}ds.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Considerando a mudança de variável $\lambda = t_n - s$, vem

$$\int_0^{t_n} |t_n - s|^{\alpha-1} ds = \int_0^{t_n} |\lambda|^{\alpha-1} d\lambda = \frac{t_n^\alpha}{\alpha}. \tag{1.59}$$

Analogamente,

$$\int_0^{t} |t - s|^{\alpha-1} ds = \frac{t^\alpha}{\alpha}. \tag{1.60}$$

Logo, de (1.58), (1.59) e (1.60),

$$\int_0^{\tilde{t}} \tilde{h}_n(s) ds = \frac{t_n^\alpha}{\alpha} + \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

Temos também

$$\int_0^{\tilde{t}} \tilde{h}(s) ds = 2\frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

Assim,

$$\lim_n \int_0^{\tilde{t}} \tilde{h}_n(s) ds = \lim_n \left(\frac{t_n^\alpha}{\alpha} + \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) = 2\frac{t^\alpha}{\alpha} = \int_0^{\tilde{t}} \tilde{h}(s) ds. \tag{1.61}$$

Combinando (1.55), (1.56), (1.57), (1.61) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado (veja o Teorema B.13), vem

$$\lim_n \int_0^{\tilde{t}} h_n(s) ds = 0.$$

Dessa maneira,

$$\|Av_1(t_n) - Av_1(t)\| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

mostrando então a continuidade à direita de $Av_1(\cdot)$ no ponto t. Com um argumento semelhante temos a continuidade à esquerda de $Av_1(\cdot)$ em t mostrando assim que $Av_1(\cdot)$ é contínua em t. Pela arbitrariedade de t, concluímos que $Av_1(\cdot)$ é contínua em $(0, \tilde{t})$. Agora, pela arbitrariedade de $\tilde{t}$, temos

$$v_1(t) \in D(A), \quad \forall t \in (0, +\infty)$$

e $Av_1(\cdot)$ é contínua em $(0, +\infty)$ provando a afirmação.

Afirmação 1.9.2 *A aplicação v_2 definida em (1.41) cumpre a condição*

$$v_2(t) \in D(A), \quad \forall t \geq 0,$$

e $Av_2(\cdot)$ é contínua em $(0, +\infty)$.

Com efeito, fazendo a mudança de variável $\tau = t - s$, temos

$$v_2(t) = \int_0^t T(t-s)f(t)ds = \int_0^t T(\tau)f(\tau+s)d\tau.$$

Então, pelo Teorema D.6, temos $v_2(t) \in D(A)$ e

$$Av_2(t) = T(t)f(\tau+s) - f(\tau+s).$$

Uma vez que $T(\cdot)$ e $f(\cdot)$ são contínuas em $(0, +\infty)$, segue que $Av_2(\cdot)$ é contínua em $(0, +\infty)$ como queríamos demonstrar.

Nestas condições, das Afirmações (1.9.1) e (1.9.2), tem-se

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \in D(A), \quad \forall t \in (0, +\infty)$$

e

$$Av(t) = A(v_1(t) + v_2(t)) = Av_1(t) + Av_2(t)$$

é contínua em $(0, +\infty)$. Portanto, a solução generalizada do problema (P2) é uma solução clássica segundo Kesavan [19, Teorema 4.9.2]. ∎

1.5 O problema de Cauchy semilinear

Nesta seção, nosso objetivo é estudar a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t, u(t)), \quad t > t_0, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{P3}$$

onde f é uma função fixada verificando a seguinte condição.

CONDIÇÃO (F)**:** *Seja U um subconjunto aberto de $[0, +\infty) \times X^\alpha$. Diz-se que a função $f : U \to X$ satisfaz a condição (F) quando para cada $(t_0, u_0) \in U$ existem uma vizinhança $V \subset U$ de (t_0, u_0) e constantes $L \geq 0$, $0 < \vartheta \leq 1$ tais que*

$$\|f(s, u) - f(t, v)\| \leq L(|s-t|^\vartheta + \|u - v\|_\alpha), \tag{1.62}$$

quaisquer que sejam $(s, u), (t, v) \in V$.

Definição 1.15 *Uma função $f : U \to X$ é dita localmente Lipschitziana na variável u quando, para cada $(t_0, u_0) \in U$, existe uma vizinhança V de (t_0, u_0) em U tal que*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|_\alpha, \quad \forall (t, u), (t, v) \in V.$$

Observe que a condição (F) nos diz que a função f é localmente Hölder contínua na variável t e localmente Lipschtziana na variável u.

Teorema 1.10 *Seja A um operador setorial com $0 \in \rho(A)$. Suponha que $f : U \to X$ satisfaz a condição (F). Então, para cada dado inicial $(t_0, u_0) \in U$, o problema (P3) possui uma única solução local*

$$u \in C([t_0, t_1); X) \cap C^1((t_0, t_1); X),$$

onde $t_1 = t_1(t_0, u_0) > t_0$.

Demonstração: Usando as hipóteses e o Teorema 1.6 temos, para cada $t > 0$, que o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado e existem constantes $M_\alpha > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0.$$

Uma vez que $-\delta t < 0$ e a exponencial é uma função crescente, temos

$$e^{-\delta t} \leq e^0 = 1, \quad \forall t > 0.$$

Assim,

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha}, \quad \forall t > 0.$$

Para o desenvolvimento da demonstração, fixe $(t_0, u_0) \in U$ e escolha $t' > t_0$ e $\delta > 0$ tais que a estimativa (1.62) se verifica em

$$V = \{(t, u); t_0 \leq t \leq t', \ \|u - u_0\|_\alpha \leq \delta\}.$$

Observe que a função $\varphi : [t_0, t'] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \|f(t, u_0)\|$$

é contínua em $[t_0, t']$. De fato, sejam $(t_n) \subset [t_0, t']$ e $t \in [t_0, t']$ com $t_n \to t$. Então,

$$\begin{aligned} |\varphi(t_n) - \varphi(t)| &= |\|f(t_n, u_0)\| - \|f(t, u_0)\|| \leq \|f(t_n, u_0) - f(t, u_0)\| \\ &\leq L(|t_n - t|^\vartheta + \|u_0 - u_0\|_\alpha) = L|t_n - t|^\vartheta, \end{aligned} \tag{1.63}$$

ou seja,

$$|\varphi(t_n) - \varphi(t)| \leq L|t_n - t|^\vartheta \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Sendo $[t_0, t']$ um compacto, existe B tal que

$$B = \max_{t_0 \leq t \leq t'} \|f(t, u_0)\|. \tag{1.64}$$

Desde que A é um operador setorial, $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t)\}$. Então, uma vez que $A^{\alpha}u_0 \in X$, vem

$$T(t-t_0)A^{\alpha}u_0 \to A^{\alpha}u_0 \quad \text{quando} \quad t \to t_0,$$

ou seja

$$\|T(t-t_0)A^{\alpha}u_0 - A^{\alpha}u_0\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to t_0.$$

Logo, podemos escolher t_1 tal que

$$\|T(t-t_0)A^{\alpha}u_0 - A^{\alpha}u_0\| < \frac{\delta}{2}, \quad \forall t \in [t_0, t_1) \tag{1.65}$$

e

$$0 < t_1 - t_0 < \min\left\{ t' - t_0, \left[\frac{\delta}{2}(1-\alpha)M_{\alpha}^{-1}(B+\delta L)^{-1}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\}, \tag{1.66}$$

onde δ, B, L e M_{α} são as constantes dadas acima. Considere $Y = C([t_0, t_1]; X)$ munido com a norma

$$\|y\|_Y = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|y(t)\|.$$

Afirmação 1.10.1 *O conjunto Y definido acima é um espaço de Banach.*

Com efeito, seja $(y_n) \subset Y$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y_n - y_m\|_Y < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0,$$

ou seja,

$$\|y_n(s) - y_m(s)\| \leq \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|y_n(t) - y_m(t)\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0, \quad \forall s \in [t_0, t_1]. \tag{1.67}$$

Desse modo, para cada $s \in [t_0, t_1]$ fixado, a sequência $(y_n(s)) \subset X$ é de Cauchy e, uma vez que X é completo, existe $y(s) \in X$ tal que

$$y_n(s) \to y(s) \quad \text{em} \quad X.$$

Defina agora a função

$$\begin{aligned} y : [t_0, t_1] &\to X \\ t &\mapsto y(t) = \lim_n y_n(t). \end{aligned}$$

Note que $y \in Y$. De fato, fixe $s \in [t_0, t_1]$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|y_n(s) - y(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Por outro lado, como $y_{n_0} \in Y$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| < \delta \Rightarrow \|y_{n_0}(t) - y_{n_0}(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|y(t) - y(s)\| &\leq \|y(t) - y_{n_0}(t)\| + \|y_{n_0}(t) - y_{n_0}(s)\| + \|y_{n_0}(s) - y(s)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \text{se} \quad |t - s| < \delta. \end{aligned}$$

Portanto, $y \in Y$. Resta-nos verificar que

$$y_n \to y \quad \text{em} \quad Y.$$

Por (1.67),

$$\|y_n(s) - y_m(s)\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0, \quad \forall s \in [t_0, t_1]. \tag{1.68}$$

Fazendo $m \to \infty$ em (1.68),

$$\|y_n(s) - y(s)\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall s \in [t_0, t_1],$$

ou seja,

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|y_n(s) - y(s)\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Portando,

$$\|y_n - y\|_Y \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

como queríamos demonstrar.

Agora, defina a aplicação $G : Y \to Y$ por

$$\begin{aligned} G(y) : [t_0, t_1] &\to X \\ t &\mapsto G(y)(t) = T(t - t_0)A^{\alpha}u_0 + \int_{t_0}^{t} A^{\alpha}T(t - \tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Afirmação 1.10.2 $G(Y) \subset Y$.

Com efeito, se $z \in G(Y)$, então

$$z(t) = T(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau.$$

De acordo com o Teorema D.5, a aplicação definida por

$$\phi(t) = T(t-t_0)A^\alpha u_0$$

é contínua em $[t_0, +\infty)$. Em particular, ϕ é contínua em $[t_0, t_1]$. Resta mostrar que a função dada por

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau$$

é contínua em $[t_0, t_1]$. Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \chi_{[t_0,t]}(\tau) A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Sejam $(t_n) \subset [t_0, t_1]$ e $t \in [t_0, t_1]$ com $t_n \to t$. Defina

$$R_n = \psi(t_n) - \psi(t),$$

então

$$\begin{aligned} \|R_n\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} \chi_{[t_0,t_n]}(\tau) A^\alpha T(t_n-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) - \chi_{[t_0,t]}(\tau) A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|\chi_{[t_0,t_n]}(\tau) A^\alpha T(t_n-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) - \chi_{[t_0,t]}(\tau) A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau))\| d\tau. \end{aligned}$$

Vamos agora considerar a função $g_n : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_n(\tau) = \|\chi_{[t_0,t_n]}(\tau) A^\alpha T(t_n-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) - \chi_{[t_0,t]}(\tau) A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau))\|.$$

Note que

$$A^\alpha T(t_n-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) \to A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) \quad \text{q.s. em} \quad [t_0, t_1]. \tag{1.71}$$

De fato, fazendo

$$S_n = A^\alpha T(t_n-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) - A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)), \tag{1.72}$$

temos

$$\begin{aligned} S_n &= A^\alpha T(t_n-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - A^\alpha T(t-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) \\ &= A^\alpha T(t_n-t+t-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - A^\alpha T(t-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) \\ &= A^\alpha T(t-\tau)T(t_n-t)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - A^\alpha T(t-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) \\ &= A^\alpha T(t-\tau)[T(t_n-t)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))]. \end{aligned}$$

Além disso, o Teorema 1.6 nos diz que

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha}, \quad \forall t>0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|S_n\| &= \|A^\alpha T(t-\tau)[T(t_n-t)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))]\| \\ &\leq \|A^\alpha T(t-\tau)\|\|T(t_n-t)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\| \\ &\leq M_\alpha(t-\tau)^{-1}\|T(t_n-t)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\|. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Por definição de C_0-semigrupo,

$$\|T(t_n-t)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t_n \to t, \tag{1.74}$$

para cada τ fixado. Logo, por (1.72), (1.73) e (1.74) tem-se o desejado. Sabendo que

$$\chi_{[t_0,t_n]}(s) \to \chi_{[t_0,t]}(s) \quad \text{q.s. em} \quad [t_0,t_1].$$

tem-se, por (1.71),

$$g_n(\tau) \to 0 \quad \text{q.s. em} \quad [t_0,t_1]. \tag{1.75}$$

Por outro lado, temos também

$$\begin{aligned} |g_n(\tau)| &= \|\chi_{[t_0,t_n]}(\tau)A^\alpha T(t_n-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau)) - \chi_{[t_0,t]}(\tau)A^\alpha T(t-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\| \\ &\leq \|\chi_{[t_0,t_n]}(\tau)A^\alpha T(t_n-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\| + \|\chi_{[t_0,t]}(\tau)A^\alpha T(t-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\| \\ &\leq \chi_{[t_0,t_n]}(\tau)\|A^\alpha T(t_n-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\| + \chi_{[t_0,t]}(\tau)\|A^\alpha T(t-\tau)f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\| \\ &\leq M_\alpha(\chi_{[t_0,t_n]}(\tau)(t_n-\tau)^{-\alpha}\|f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\| + \chi_{[t_0,t]}(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}\|f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\|). \end{aligned}$$

Note ainda que a função $\zeta : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\zeta(\tau) = \|f(\tau,A^{-\alpha}y(\tau))\|$$

é contínua. De fato, sejam $(\tau_n) \subset [t_0, t_1]$ e $\tau \in [t_0, t_1]$ com $\tau_n \to \tau$, então

$$\begin{aligned} |\zeta(\tau_n) - \zeta(\tau)| &= |\|f(\tau_n, A^{-\alpha}y(\tau_n))\| - \|f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\|| \\ &\leq \|f(\tau_n, A^{-\alpha}y(\tau_n)) - f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\| \\ &\leq L(|\tau_n - \tau|^{\vartheta} + \|A^{-\alpha}y(\tau_n) - A^{-\alpha}y(\tau)\|_{\alpha}) \\ &= L(|\tau_n - \tau|^{\vartheta} + \|y(\tau_n) - y(\tau)\|_X), \end{aligned} \tag{1.76}$$

ou seja,

$$|\zeta(\tau_n) - \zeta(\tau)| \leq L(|\tau_n - \tau|^{\vartheta} + \|y(\tau_n) - y(\tau)\|_X) \to 0, \quad \tau_n \to \tau,$$

mostrando a continuidade da função ζ. Uma vez que $[t_0, t']$ é compacto, existe $\tilde{B}$ tal que

$$\tilde{B} = \max_{t_0 \leq \tau \leq t'} \|f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\|.$$

Logo,

$$|g_n(\tau)| \leq M_{\alpha}\tilde{B}\left(\frac{\chi_{[t_0,t_n]}(\tau)}{(t_n - \tau)^{\alpha}} + \frac{\chi_{[t_0,t]}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}}\right).$$

Defina $h_n : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ por

$$h_n(\tau) = \frac{\chi_{[t_0,t_n]}(\tau)}{(t_n - \tau)^{\alpha}} + \frac{\chi_{[t_0,t]}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}}.$$

Claramente

$$|g_n(\tau)| \leq M_{\alpha}\tilde{B}h_n(\tau) \quad \text{q.s. em} \quad [t_0, t_1], \tag{1.77}$$

e

$$h_n(\tau) \to 2\frac{\chi_{[t_0,t]}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}} = h(\tau) \quad \text{q.s. em} \quad [t_0, t_1]. \tag{1.78}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} h_n(\tau)d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\chi_{[t_0,t_n]}(\tau)}{(t_n - \tau)^{\alpha}} + \frac{\chi_{[t_0,t]}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}}\right) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\chi_{[t_0,t_n]}(\tau)}{(t_n - \tau)^{\alpha}}d\tau + \int_{t_0}^{\tilde{t}} \frac{\chi_{[t_0,t]}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}}d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_n} (t_n - \tau)^{-\alpha}d\tau + \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^{-\alpha}d\tau. \end{aligned} \tag{1.79}$$

Considerando a mudança de variável $\lambda = t_n - \tau$, vem

$$\int_{t_0}^{t_n} (t_n - \tau)^{-\alpha}d\tau = \int_{t_0}^{t_n} \lambda^{-\alpha}d\lambda = \frac{t_n^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{1 - \alpha}. \tag{1.80}$$

Analogamente,

$$\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau = \frac{t^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{1.81}$$

Logo, de (1.79), (1.80) e (1.81),

$$\int_{t_0}^{t_1} h_n(\tau) d\tau = \frac{t_n^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Temos também

$$\int_{t_0}^{t_1} h(\tau) d\tau = 2\frac{t^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_n \int_{t_0}^{t_1} h_n(\tau) d\tau &= \lim_n \left(\frac{t_n^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\ &= 2\frac{t^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} h(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{1.82}$$

De acordo com (1.75), (1.77), (1.78), (1.82) a sequência de funções (g_n) está nas hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado (veja o Teorema B.13). Logo,

$$\lim_n \int_{t_0}^{t_1} g_n(\tau) d\tau = 0.$$

Por conseguinte,

$$\|\psi(t_n) - \psi(t)\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t_n \to t.$$

Dessa maneira, ψ é contínua em $[t_0, t_1]$. Sendo

$$z = \phi(t) + \psi(t),$$

obtemos $z \in Y$. Logo, $G(Y) \subset Y$.

Considere agora o conjunto

$$S = \{ y \in Y; y(t_0) = A^\alpha u_0,\ \|y(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta \}.$$

Claramente $S \neq \emptyset$, pois por (1.65) a função

$$y(t) = T(t-t_0) A^\alpha u_0 \in S.$$

Vamos mostrar que S é limitado. Seja $y \in S$, então

$$y(t_0) = A^\alpha u_0 \quad \text{e} \quad \|y(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Em particular,

$$\|y(t) - A^\alpha u_0\| \le \delta, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Desse modo,

$$\|y(t)\| \le \|y(t) - A^\alpha u_0\| + \|A^\alpha u_0\| \le \delta + \|A^\alpha u_0\|, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

mostrando que o conjunto $\{\|y(t)\|; t \in [t_0, t_1]\}$ é limitado. Assim, por definição de supremo,

$$\sup_{t_0 \le t \le t_1} \|y(t)\| \le \delta + \|A^\alpha u_0\|,$$

ou ainda,

$$\|y\|_Y \le \delta + \|A^\alpha u_0\|, \quad \forall y \in S.$$

Nestas condições, concluímos que S é um conjunto limitado.

Afirmação 1.10.3 *O conjunto S é um espaço métrico completo com a métrica*

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_Y, \quad y_1, y_2 \in S.$$

Uma vez que $S \subset Y$ e Y é um espaço de Banach, é suficiente mostrar que S é fechado em Y. Com efeito, seja $y \in \overline{S}$, então existe uma sequência $(y_n) \subset S$ tal que

$$y_n \to y \quad \text{em} \quad Y.$$

Desde que

$$\|y_n(\tau) - y(\tau)\|_X \le \sup_{t_0 \le t \le t_1} \|y_n(t) - y(t)\|_X = \|y_n - y\|_Y, \quad \forall \tau \in [t_0, t_1],$$

concluímos

$$y_n(t_0) \to y(t_0) \quad \text{em} \quad X.$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n(t_0) = A^\alpha u_0 \quad \text{e} \quad \|y_n(t) - A^\alpha u_0\| \le \delta, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{1.83}$$

Fazendo $n \to +\infty$ em (1.83),

$$y(t_0) = A^\alpha u_0 \quad \text{e} \quad \|y(t) - A^\alpha u_0\| \le \delta, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

ou seja, $y \in S$. Portanto, S é um conjunto fechado.

Afirmação 1.10.4 $G(S) \subset S$.

Com efeito, seja $y \in S$, então

$$\begin{aligned} G(y)(t) - A^\alpha u_0 &= T(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau - A^\alpha u_0 \\ &= T(t-t_0)A^\alpha u_0 - A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - A^\alpha u_0\| &\leq \|T(t-t_0)A^\alpha u_0 - A^\alpha u_0\| + \left\| \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \|T(t-t_0)A^\alpha u_0 - A^\alpha u_0\| + \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|T(t-t_0)A^\alpha u_0 - A^\alpha u_0\| \\ &+ \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) - A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, u_0)\| d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, u_0)\| d\tau \\ &\leq \|T(t-t_0)A^\alpha u_0 - A^\alpha u_0\| \\ &+ \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-\tau)\| \|f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) - f(\tau, u_0)\| d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-\tau)\| \|f(\tau, u_0)\| d\tau. \end{aligned} \tag{1.84}$$

De acordo com (1.65),

$$\|T(t-t_0)A^\alpha u_0 - A^\alpha u_0\| < \frac{\delta}{2}, \quad \forall t \in [t_0, t_1). \tag{1.85}$$

Defina

$$I = \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-\tau)\| \|f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) - f(\tau, u_0)\| d\tau.$$

Segue, do Teorema 1.6 e da Condição (F), que

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{t_0}^t M_\alpha (t-\tau)^{-\alpha} L \|A^{-\alpha} y(\tau) - u_0\|_\alpha d\tau \\ &= M_\alpha L \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-\alpha} \|y(\tau) - A^\alpha u_0\| d\tau \end{aligned}$$

Uma vez que $y \in S$, temos

$$\|y(\tau) - A^\alpha u_0\| \leq \delta, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I &\leq M_\alpha L\delta \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&= M_\alpha L\delta (1-\alpha)^{-1}(t-t_0)^{1-\alpha} \\
&\leq M_\alpha L\delta (1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha} \qquad (1.86)
\end{aligned}
$$

Agora, defina

$$J = \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-\tau)\| \|f(\tau, u_0)\| d\tau.$$

Usando (1.64) e aplicando o Teorema 1.6,

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-\tau)\| \|f(\tau, u_0)\| d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M_\alpha (t-\tau)^{-\alpha} B d\tau \\
&= M_\alpha B \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&= M_\alpha B (1-\alpha)^{-1}(t-t_0)^{1-\alpha} \\
&\leq M_\alpha B (1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}. \qquad (1.87)
\end{aligned}
$$

Combinando (1.84), (1.85), (1.86), (1.87) e usando (1.66), temos

$$
\begin{aligned}
\|G(y)(t) - A^\alpha u_0\| &\leq \frac{\delta}{2} + M_\alpha L\delta(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha} + M_\alpha B(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha} \\
&= \frac{\delta}{2} + (L\delta + B) M_\alpha (1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{\delta}{2} + (L\delta + B) M_\alpha (1-\alpha)^{-1} \left(\left[\frac{\delta}{2}(1-\alpha) M_\alpha^{-1} (B+\delta L)^{-1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\
&= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}, \qquad (1.88)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\|G(y)(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Além disso,

$$G(y)(t_0) = T(0)A^\alpha u_0 + 0 = IA^\alpha u_0 = A^\alpha u_0.$$

Assim, concluímos que $G(y) \in S$ e portanto $G(S) \subset S$.

Afirmação 1.10.5 *$G : S \to S$ é uma contração.*

Com efeito, sejam $y_1, y_2 \in S$, então

$$\begin{aligned} G(y_1)(t) - G(y_2)(t) &= \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y_1(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y_2(\tau)) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau)[f(\tau, A^{-\alpha} y_1(\tau)) - f(\tau, A^{-\alpha} y_2(\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|G(y_1)(t) - G(y_2)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-\tau)[f(\tau, A^{-\alpha} y_1(\tau)) - f(\tau, A^{-\alpha} y_2(\tau))]\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-\tau)\| \|f(\tau, A^{-\alpha} y_1(\tau)) - f(\tau, A^{-\alpha} y_2(\tau))\| d\tau \\ &\leq M_\alpha L \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} \|A^{-\alpha} y_1(\tau) - A^{-\alpha} y_2(\tau)\|_\alpha d\tau \\ &= M_\alpha L \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} \|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| d\tau \\ &\leq M_\alpha L \|y_1 - y_2\|_Y \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\ &= M_\alpha L (1-\alpha)^{-1} (t_1 - t_0)^{1-\alpha} \|y_1 - y_2\|_Y. \end{aligned}$$

Escolhendo t_1 de modo que

$$M_\alpha L (1-\alpha)^{-1} (t_1 - t_0)^{1-\alpha} \leq \frac{1}{2},$$

temos

$$\|G(y_1)(t) - G(y_2)(t)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_Y, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Desse modo,

$$\|G(y_1) - G(y_2)\|_Y \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_Y, \quad \forall y_1, y_2 \in S,$$

mostrando que G é uma contração.

Aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach (veja o Teorema A.3) em G, concluímos que G possui um único ponto fixo em S, isto é, existe um único $y \in S$ tal que

$$y(t) = T(t - t_0) A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) d\tau, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{1.89}$$

Considere a aplicação $\tilde{f} : [t_0, t_1] \to X$ definida por

$$\tilde{f}(t) = f(t, A^{-\alpha} y(t)).$$

Nosso objetivo agora é mostrar que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = \tilde{f}(t), \quad t > t_0, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{P4}$$

possui uma única solução clássica. Para isso, faremos o uso do Teorema 1.10. Sendo A um operador setorial com $0 \in \rho(A)$, basta mostrar que $\tilde{f}$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Antes disso, note que a função $\hat{f} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{f}(t) = \|f(t, A^{-\alpha} y(t))\|,$$

é contínua em $[t_0, t_1]$, pois f satisfaz a condição (F) e y é uma função contínua de $[t_0, t_1]$ em X. Assim, como $[t_0, t_1]$ é compacto, existe uma constante $N > 0$ tal que

$$\|f(t, A^{-\alpha} y(t))\| \leq N, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{1.90}$$

Afirmação 1.10.6 *$\tilde{f}$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$.*

Com efeito, sejam $s, t \in (t_0, t_1]$, então

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(s) - \tilde{f}(t)\| &= \|f(s, A^{-\alpha} y(s)) - f(t, A^{-\alpha} y(t))\| \\ &\leq L(|s-t|^{\vartheta} + \|A^{-\alpha} y(s) - A^{-\alpha} y(t)\|_{\alpha}) \\ &= L(|s-t|^{\vartheta} + \|y(s) - y(t)\|). \end{aligned} \tag{1.91}$$

Considere $0 < h < 1$ de modo que $s = t + h$, então

$$\begin{aligned} \|y(t+h) - y(t)\| &\leq \|T(t+h-t_0)A^{\alpha} u_0 - T(t-t_0)A^{\alpha} u_0\| \\ &+ \int_{t_0}^{t} \|A^{\alpha} T(t+h-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau)) - A^{\alpha} T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau))\| d\tau \\ &+ \int_{t}^{t+h} \|A^{\alpha} T(t+h-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau))\| d\tau, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \|y(t+h) - y(t)\| &\leq \|(T(h) - I)T(t-t_0)A^{\alpha} u_0\| \\ &+ \int_{t_0}^{t} \|(T(h) - I)A^{\alpha} T(t-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau))\| d\tau \\ &+ \int_{t}^{t+h} \|A^{\alpha} T(t+h-\tau) f(\tau, A^{-\alpha} y(\tau))\| d\tau. \end{aligned} \tag{1.92}$$

Considerando $0 < \beta < 1 - \alpha$ e aplicando o Teorema 1.6, temos

$$\begin{aligned}
\|(T(h)-I)T(t-t_0)A^\alpha u_0\| &= \|T(h)T(t-t_0)A^\alpha u_0 - T(t-t_0)A^\alpha u_0\| \\
&= \|T(h)A^\alpha T(t-t_0)u_0 - A^\alpha T(t-t_0)u_0\| \\
&\leq C_\beta h^\beta \|A^\beta A^\alpha T(t-t_0)u_0\| \\
&= C_\beta h^\beta \|A^{\beta+\alpha} T(t-t_0)u_0\| \\
&\leq C_\beta M_{\beta+\alpha}(t-t_0)^{-(\beta+\alpha)}\|u_0\| h^\beta. \qquad (1.93)
\end{aligned}$$

Defina

$$M_1 = M_1(t) = C_\beta M_{\beta+\alpha}(t-t_0)^{-(\beta+\alpha)}\|u_0\|.$$

Note que se $t \to t_0$, então

$$M_1(t) \to +\infty.$$

Desse modo, devemos considerar t_0' com $t_0 < t_0' \leq t \leq t_1$ para que $M_1 < +\infty$. Logo,

$$\|(T(h)-I)T(t-t_0)A^\alpha u_0\| \leq M_1 h^\beta, \quad \forall t \in [t_0', t_1].$$

Como $t_0' > t_0$ é arbitrário,

$$\|(T(h)-I)T(t-t_0)A^\alpha u_0\| \leq M_1 h^\beta, \quad \forall t \in (t_0, t_1]. \qquad (1.94)$$

Procedendo como em (1.93) e usando (1.90), segue que

$$\|(T(h)-I)A^\alpha T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\| \leq C_\beta h^\beta M_{\beta+\alpha}(t-\tau)^{-(\beta+\alpha)}N.$$

Defina

$$\tilde{I} = \int_{t_0}^t \|(T(h)-I)A^\alpha T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\| d\tau$$

e observe que $\beta + \alpha < 1$. Então,

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &\leq \int_{t_0}^t C_\beta h^\beta M_{\beta+\alpha}(t-\tau)^{-(\beta+\alpha)} N d\tau \\
&= C_\beta h^\beta M_{\beta+\alpha} N \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-(\beta+\alpha)} d\tau \\
&= C_\beta M_{\beta+\alpha} N (1-(\beta+\alpha))^{-1}(t-t_0)^{1-(\beta+\alpha)} h^\beta \\
&\leq C_\beta M_{\beta+\alpha} N (1-(\beta+\alpha))^{-1}(t_1-t_0)^{1-(\beta+\alpha)} h^\beta
\end{aligned}$$

Dessa forma, definindo

$$M_2 = C_\beta M_{\beta+\alpha} N (1-(\beta+\alpha))^{-1}(t_1-t_0)^{1-(\beta+\alpha)},$$

obtemos

$$\int_{t_0}^{t} \|(T(h)-I)A^{\alpha}T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\|d\tau \leq M_2 h^{\beta}. \tag{1.95}$$

Por fim, considerando

$$\tilde{J} = \int_{t}^{t+h} \|A^{\alpha}T(t+h-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\|d\tau,$$

usando a estimativa em (1.90) e aplicando o Teorema 1.6, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{J} &\leq \int_{t}^{t+h} \|A^{\alpha}T(t+h-\tau)\|\|f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\|d\tau \\
&\leq \int_{t}^{t+h} M_{\alpha}(t+h-\tau)^{-\alpha}N d\tau \\
&= M_{\alpha}N\int_{t}^{t+h} (t+h-\tau)^{-\alpha}d\tau \\
&= M_{\alpha}N(1-\alpha)^{-1}h^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Desde que $0 < h < 1$ e $\beta < 1-\alpha$, temos $h^{1-\alpha} \leq h^{\beta}$. Defina

$$M_3 = M_{\alpha}N(1-\alpha)^{-1}.$$

Nestas condições,

$$\int_{t}^{t+h} \|A^{\alpha}T(t+h-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\|d\tau \leq M_3 h^{\beta}. \tag{1.96}$$

Combinando (1.92), (1.94), (1.95) e (1.96),

$$\|y(t+h)-y(t)\| \leq (M_1+M_2+M_3)h^{\beta},$$

ou seja,

$$\|y(s)-y(t)\| \leq K|s-t|^{\beta}, \tag{1.97}$$

onde $K = M_1+M_2+M_3$ e $0 < \beta < 1$. Assim, de (1.91) e (1.97),

$$\|\tilde{f}(s)-\tilde{f}(t)\| \leq L(|s-t|^{\vartheta}+K|s-t|^{\beta}).$$

Considerando $\gamma = \min\{\vartheta, \beta\}$, obtemos

$$\|\tilde{f}(s)-\tilde{f}(t)\| \leq \tilde{L}|s-t|^{\gamma},$$

para alguma constante $\tilde{L} > 0$. Logo, $\tilde{f}$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$.

De acordo com o Teorema 1.10, o problema (P4) tem uma única solução clássica, isto é, existe $u \in C((t_0,t_1];D(A)) \cap C^1((t_0,t_1);X)$ tal que

$$u(t) \in D(A), \quad \forall t \in (t_0,t_1]$$

e u verifica o problema (P4). Além disso, u é dada por

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau. \tag{1.98}$$

Segundo o Teorema 1.8, a imersão $D(A) \hookrightarrow D(A^\alpha)$ é continua. Assim, como $u(t) \in D(A)$, temos $u(t) \in D(A^\alpha)$. Então,

$$\begin{aligned} A^\alpha u(t) &= A^\alpha\left(T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau\right) \\ &= A^\alpha T(t-t_0)u_0 + A^\alpha\left(\int_{t_0}^{t} T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau\right). \end{aligned} \tag{1.99}$$

Ademais, $T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) \in D(A^\alpha)$, pois $T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) \in D(A)$ e $D(A) \hookrightarrow D(A^\alpha)$. Observe que a função $\varsigma : [t_0, t] \to X^\alpha$ dada por

$$\varsigma(\tau) = T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))$$

é contínua e que o operador $A^\alpha : X^\alpha \to X$ é linear e contínuo. Assim, a integral

$$\int_{t_0}^{t} T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau$$

está bem definida e, aplicando o Teorema D.3,

$$A^\alpha\left(\int_{t_0}^{t} T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau\right) = \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau.$$

Nestas condições,

$$\begin{aligned} A^\alpha u(t) &= A^\alpha T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau \\ &= T(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau)f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau \\ &= y(t). \end{aligned} \tag{1.100}$$

Por conseguinte, $u(t) = A^{-\alpha}y(t)$ e, portanto,

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau$$

é a solução clássica de (P3). A unicidade desta solução segue de (1.89) e (1.98). ■

No que segue, T_{max} será o número real tal que $[0, T_{max})$ é o intervalo maximal de definição da solução $u(t)$ de (P3) dada pelo Teorema 1.10.

Teorema 1.11 *Seja A é um operador setorial com $0 \in \rho(A)$. Se $f : [t_0, +\infty) \times X^\alpha \to X$ satisfaz a Condição (F) e existe uma função $k : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f(t,u)\| \leq k(t)(1 + \|u\|_\alpha), \quad \forall t \geq t_0, \quad u \in X^\alpha. \tag{1.101}$$

Então, para cada $u_0 \in X^\alpha$, o problema (P3) possui uma única solução global.

Demonstração: Seja

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau$$

a solução de (P3) dada pelo Teorema 1.10. Suponha, por contradição, que $T_{max} < +\infty$. Note que

$$\begin{aligned} A^\alpha u(t) &= A^\alpha \left(T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau \right) \\ &= T(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Então, fazendo o uso do Lema 1.10 juntamente com o Teorema 1.6 e (1.101), obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\alpha &\leq \|T(t-t_0)A^\alpha u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-\tau)f(\tau,u(\tau))\|d\tau \\ &\leq C\|A^\alpha u_0\| + M_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}\|f(\tau,u(\tau))\|d\tau \\ &\leq C\|A^\alpha u_0\| + M_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}k(\tau)(1+\|u(\tau)\|_\alpha)d\tau \\ &\leq C\|A^\alpha u_0\| + M_\alpha k(T_{max}) \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}d\tau \\ &+ M_\alpha k(T_{max}) \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau. \end{aligned} \tag{1.102}$$

Considerando a mudança de variável $r = t - \tau$,

$$\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}d\tau = \int_{0}^{t-t_0} r^{-\alpha}dr \leq \int_{0}^{T_{max}} r^{-\alpha}dr = \frac{1}{1-\alpha}T_{max}^{1-\alpha} \tag{1.103}$$

Combinando (1.102) e (1.103), temos

$$\|u(t)\|_\alpha \leq c_1 + c_2 \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau,$$

onde

$$c_1 = C\|A^\alpha u_0\| + M_\alpha k(T_{max})\frac{1}{1-\alpha}T_{max}^{1-\alpha} \quad \text{e} \quad c_2 = M_\alpha k(T_{max}).$$

Aplicando o Teorema A.2, concluímos que existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_\alpha \leq \tilde{C}, \quad \forall \tau \in [t_0, T_{max}).$$

Um absurdo pois, de acordo com Pazy [29, Teorema 1.4, pg. 185], se $T_{max} < +\infty$, então

$$\lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_\alpha = +\infty.$$

Logo, $T_{max} = +\infty$. ■

1.6 Dependência contínua da solução com relação aos dados iniciais

Nesta seção, vamos apresentar um resultado muito importante para o desenvolvimento de estudos que serão apresentados posteriormente.

Teorema 1.12 *Sejam que A um operador setorial e $f : U \to X$, onde $U \subset [0, +\infty) \times X^\alpha$ é um aberto, uma função satisfazendo a condição (F). Considere $u_0 \in X^\alpha$ e suponha que existe uma sequência $(u_n) \subset X^\alpha$ tal que*

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad X^\alpha,$$

com $(t_0, u_n) \in U$. Seja $\phi_n(t)$ a solução maximal de

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_n}{dt} + A\phi_n = f(t, \phi_n(t)), & t > t_0, \\ \phi_n(t_0) = u_n, \end{cases}$$

definida em $(t_0, +\infty)$. Então,

$$\|\phi_n(t) - \phi_0(t)\|_\alpha \to 0$$

uniformemente em cada subintervalo compacto de $[t_0, t_0 + T_0)$, onde T_0 é o número real tal que $[t_0, t_0 + T_0)$ é o intervalo maximal de definição da solução $\phi_0(t)$ da equação

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_0}{dt} + A\phi_0 = f(t, \phi_0(t)), & t > t_0, \\ \phi_0(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Demonstração: Escolha $t_1 \in [t_0, t_0 + T_0)$ arbitrário e considere o conjunto

$$K = \{\phi_0(t); t \in [t_0, t_1]\}.$$

Observe que K é compacto pois é a imagem do compacto $[t_0, t_1]$ pela função contínua ϕ_0. Note que, para cada elemento $\phi_0(t)$ de K, existem constantes $L_t > 0$ e $\delta_t > 0$ tais que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_X \leq L_t \|x_1 - x_2\|_\alpha,$$

sempre que

$$x_1, x_2 \in B(\phi_0(t), \delta_t),$$

onde

$$B(\phi_0(t), \delta_t) = \{x \in X^\alpha; \|x - \phi_0(t)\|_\alpha < \delta_t\}.$$

Sendo $\{B(\phi_0(t), \delta_t)\}_{t \in [t_0, t_1]}$ uma cobertura aberta para K segue da compacidade de K que

$$K \subset B(\phi_0(s_1), \delta_1) \cup B(\phi_0(s_2), \delta_2) \cup \cdots \cup B(\phi_0(s_j), \delta_j).$$

Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j\}$, obtemos uma vizinhança V_δ de K onde

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_X \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad \text{para} \quad x_1, x_2 \in V_\delta \quad \text{e} \quad t \in [t_0, t_1],$$

para alguma constante $L > 0$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \|\phi_n(t) - \phi_0(t)\|_\alpha &\leq \|e^{-At}(u_n - u_0)\|_\alpha \\ &+ \int_0^t \|e^{-A(t-s)}(f(t, \phi_n(s)) - f(t, \phi_0(s)))\|_\alpha ds \\ &\leq \|A^\alpha e^{-At}(u_n - u_0)\|_X \\ &+ \int_0^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}(f(t, \phi_n(s)) - f(t, \phi_0(s)))\|_X ds. \end{aligned} \tag{1.104}$$

Aplicando os Teoremas 1.6 e D.5, obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{-At}(u_n - u_0)\|_\alpha &= \|e^{-At} A^\alpha (u_n - u_0)\|_X \\ &\leq M e^{\beta t} \|A^\alpha (u_n - u_0)\|_X \\ &\leq M e^{\beta t_1} \|u_n - u_0\|_\alpha, \end{aligned} \tag{1.105}$$

onde $M \geq 1$ e $\beta \geq 0$ são constantes. Defina

$$R = \|A^\alpha e^{-A(t-s)}(f(t, \phi_n(s)) - f(t, \phi_0(s)))\|_X.$$

Se

$$\phi_n(t) \in V_\delta, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

então aplicando o Teorema 1.6

$$\begin{aligned} R &\leq \|A^{\alpha}e^{-A(t-s)}\|\|f(t,\phi_n(s))-f(t,\phi_0(s))\|_X \\ &\leq M_{\alpha}(t-s)^{-\alpha}\|f(t,\phi_n(s))-f(t,\phi_0(s))\|_X \\ &\leq M_{\alpha}L(t-s)^{-\alpha}\|\phi_n(s)-\phi_0(s)\|_{\alpha}, \end{aligned} \tag{1.106}$$

onde $M_{\alpha} > 0$ é uma constante. De (1.104), (1.105) e (1.106),

$$\|\phi_n(t)-\phi_0(t)\|_{\alpha} \leq Me^{\beta t_1}\|u_n-u_0\|_{\alpha} + M_{\alpha}L\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|\phi_n(s)-\phi_0(s)\|_{\alpha}ds.$$

Aplicando o Teorema A.2, obtemos

$$\|\phi_n(t)-\phi_0(t)\|_{\alpha} \leq cMe^{\beta t_1}\|u_n-u_0\|_{\alpha}, \quad \forall t \in [t_0,t_1],$$

para alguma constante $c > 0$. Por hipótese,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad X^{\alpha}.$$

Então,

$$\|\phi_n(t)-\phi_0(t)\|_{\alpha} \to 0$$

uniformemente em $[t_0,t_1]$.

Afirmação 1.12.1 *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\phi_n(t) \in V_{\delta}, \quad n \geq n_0, \quad \forall t \in [t_0,t_1].$$

Com efeito, fixe $0 < \delta_0 < \delta$ tal que

$$dist(x,K) < \delta_0 \Rightarrow x \notin \partial V_{\delta}.$$

Por hipótese,

$$u_n \to u_0, \quad \text{em} \quad X^{\alpha}.$$

Assim, uma vez que $u_0 \in K$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_n \in intV_{\delta}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Agora suponha, por contradição, que existe $s_n \in [0,t_1]$ tal que

$$\phi_n(s_n) \notin V_{\delta}.$$

Então, pelo Teorema da Alfândega[12], existe $t_n \in [0, s_n]$ satisfazendo

$$\phi_n(s) \in V_\delta, \quad \forall s \in [0, t_n]$$

e $\phi_n(t_n) \in \partial V_\delta$, onde

$$t_n = \inf\{r; \phi_n(r) \in \partial V_\delta\}.$$

De modo semelhante ao que foi feito acima, temos

$$\|\phi_n(t_n) - \phi_0(t_n)\|_\alpha \leq cMe^{\beta t_n}\|u_n - u_0\|_\alpha \leq cMe^{\beta t_1}\|u_n - u_0\|_\alpha. \tag{1.107}$$

Mais uma vez, recordando que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad X^\alpha,$$

concluímos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_0\|_\alpha < \frac{\delta_0}{cMe^{\beta t_1}}, \quad \forall n \geq n_0. \tag{1.108}$$

Combinando (1.107) e (1.108), ficamos com

$$dist(\phi_n(t_n), K) \leq \|\phi_n(t_n) - \phi_0(t_n)\|_\alpha < \delta_0.$$

Nestas condições, $\phi_n(t_n) \notin \partial V_\delta$ de acordo com a escolha feita para δ_0. Um absurdo. Logo, a afirmação é verdadeira. ■

[12]Para mais detalhes, veja Lima [24]

Capítulo 2

Limitação de soluções globais para uma classe de equações parabólicas não locais

No presente capítulo, vamos estudar a existência e o comportamento das soluções da seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \in C^2(\overline{\Omega}). \end{cases} \tag{P5}$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$ e as funções f e g satisfazem as seguintes condições.

CONDIÇÃO (f)**:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função positiva de classe C^1 com

$$\int_{-\infty}^{t} f(s)ds < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds.$$

CONDIÇÃO (f_1)**:** Se $N = 2$, suponha que existem $C > 0$ e $q \in (1, 2)$ tais que

$$|f'(t)| \leq Ce^{|t|^q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

CONDIÇÃO (f_2)**:** Se $N > 2$, suponha que existem $C > 0$ e $1 < q < \frac{N}{N-2}$ tais que

$$|f'(t)| \leq C(|t|^{q-1} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

CONDIÇÃO (g)**:** A função $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ é localmente Lipschitz.

CONDIÇÃO (H)**:** Existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ com

$$a \geq 2, \quad b > 0, \quad ab > 2,$$

tais que

(a) Existe $\rho > 0$ tal que, para todo $t > \rho$, temos $tf(t) \geq aF(t)$.

(b) $tg(t) \geq bG(t)$ para $t > 0$, onde $G' = g$.

(c) $g(t) = o(G(t))$ quando $t \to +\infty$.

A obtenção de solução generalizada para esta classe de problemas será feita através do uso da teoria apresentada no capítulo anterior. Mais especificamente, iremos verificar que o nosso problema se enquadra nas hipóteses do Teorema 1.10. Na segunda parte desse capítulo, veremos que as soluções clássicas globais admitem certas limitações. Este estudo é motivado pelo caso em que

$$f(t) = e^t, \quad g(t) = \delta t^{-p}, \quad \forall \delta, p > 0.$$

Pois, de acordo com [15], quando $N = 1$ todas as soluções são globais e limitadas.

Uma motivação física para o estudo de problemas desta natureza é apresentada por Bebernes-Lacey [4]. Porém, o nosso interesse em estudar esta classe de problemas veio através da leitura de Fila [15]. Este texto, por sua vez nos remete a leitura de Fila [16] o qual nos fornece técnicas para o desenvolvimento de algumas demonstrações. Um estudo semelhante ao que vamos apresentar aqui é feito em [4] para outra classe de problemas não locais.

2.1 Existência de solução

Nesta seção, temos como objetivo usar a teoria apresentada no capítulo anterior para encontrar uma solução local para o problema (P5), onde as funções f e g cumprem as condições mencionadas acima. Antes de iniciamos a busca por solução para (P5), vejamos algumas consequências das condições acima mencionadas.

2.1.1 Algumas consequências das Condições (f_1), (f_2) e (H)

Propriedade 2.1 *A Condição (f_1) implica que*

$$|f'(t)| \leq C_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$|f(t)| \leq \tilde{C}_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $C_\beta, \tilde{C}_\beta > 0$ são constantes.

Com efeito, por hipótese,

$$|f'(t)| \leq Ce^{|t|^q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

onde $C > 0$ e $q \in (1,2)$. Não é difícil verificar que

$$\frac{e^{|t|^q}}{e^{\beta|t|^2}} \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty,$$

para $\beta > 0$ dado arbitrariamente. Então, dados $\varepsilon = 1$ e $\beta > 0$, existe uma constante $M = M(1,\beta) > 0$ satisfazendo

$$e^{|t|^q} \leq e^{\beta|t|^2}, \quad \text{quando} \quad |t| > M.$$

Para o caso em que $|t| \leq M$, considere a função $\psi : [-M, M] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t) = \frac{e^{|t|^q}}{e^{\beta|t|^2}}.$$

Uma vez que ψ é continua e está definida em um compacto, existe uma constante $c_\beta > 0$ tal que

$$|\psi(t)| \leq c_\beta, \quad \forall t \in [-M, M],$$

ou seja,

$$e^{|t|^q} \leq c_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in [-M, M].$$

Nestas condições, considerando $\tilde{c_\beta} = \max\{1, c_\beta\}$,

$$e^{|t|^q} \leq \tilde{c}_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Combinando (2.1) e (2.2), obtemos

$$|f'(t)| \leq C_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $C_\beta = C\tilde{c}_\beta > 0$ é uma constante.

Agora, note que

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^t f'(s)ds \right|. \tag{2.3}$$

Supondo que $t > 0$ e usando (2.1), temos

$$\left| \int_0^t f'(s)ds \right| \leq \int_0^t |f'(s)|ds \leq C \int_0^t e^{s^q} ds \leq Ce^{t^q} \int_0^t ds = Cte^{t^q} = C|t|e^{|t|^q}. \tag{2.4}$$

Se $t < 0$, então

$$\left| \int_0^t f'(s)ds \right| = \left| - \int_t^0 f'(s)ds \right| \leq \int_t^0 |f'(s)|ds \leq C \int_t^0 e^{(-s)^q} ds. \tag{2.5}$$

Fazendo a mudança de variável $r = -s$,

$$\int_t^0 e^{(-s)^q} ds = \int_0^{-t} e^{r^q} dr \leq e^{(-t)^q} \int_0^{-t} dr = (-t)e^{(-t)^q} = |t|e^{|t|^q}. \tag{2.6}$$

Logo, de (2.4), (2.5) e (2.6),

$$\left| \int_0^t f'(s)ds \right| \leq C|t|e^{|t|^q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Não é difícil verificar que

$$\frac{Cte^{|t|^q}}{e^{\beta|t|^2}} \to 0, \quad |t| \to +\infty,$$

onde $\beta > 0$ é arbitrário. Então, dados $\varepsilon = 1$ e $\beta > 0$ existe $M = M(1, \beta) > 0$ tal que

$$C|t|e^{|t|^q} \leq e^{\beta|t|^2}, \quad \text{se} \quad |t| > M.$$

Quando $|t| \leq M$, considere a função $\phi : [-M, M] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(t) = \frac{Cte^{|t|^q}}{e^{\beta|t|^2}}.$$

Sendo ϕ contínua e $[-M, M]$ compacto, existe uma constante $B_\beta > 0$ tal que

$$|\phi(t)| \leq B_\beta, \quad \forall t \in [-M, M],$$

ou seja,

$$C|t|e^{|t|^q} \leq B_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in [-M, M].$$

Considerando $c_\beta = \max\{1, B_\beta\}$,

$$C|t|e^{|t|^q} \leq c_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8),

$$\left| \int_0^t f'(s)ds \right| \leq c_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Por outro lado, observe que

$$1 \leq e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$|f(0)| \leq |f(0)|e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Combinando (2.3), (2.9) e (2.10), temos

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq |f(0)|e^{\beta|t|^2} + c_\beta e^{\beta|t|^2} \\ &= (|f(0)| + c_\beta)e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante $C_\beta = |f(0)| + c_\beta > 0$ tal que

$$|f'(t)| \leq C_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Propriedade 2.2 *A Condição* (f_2) *implica que existe uma constante* $C_1 > 0$ *tal que*

$$|f(t)| \leq C_1(|t|^q + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato, desde que

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds,$$

temos

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^t f'(s)ds \right|. \tag{2.11}$$

Se $t > 0$, então

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t f'(s)ds \right| &\leq \int_0^t |f'(s)|ds \leq C \int_0^t (|s|^{q-1} + 1)ds \\ &= C \int_0^t (s^{q-1} + 1)ds = C\left(\frac{t^q}{q} + t\right) \\ &= C\left(\frac{|t|^q}{q} + |t|\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado, quando $t < 0$, temos

$$\int_0^t f'(s)ds = -\int_t^0 f'(s)ds$$

e assim,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t f'(s)ds\right| &= \left|-\int_t^0 f'(s)ds\right| \leq \int_t^0 |f'(s)|ds \\ &\leq C\int_t^0 (|s|^{q-1}+1)ds = C\int_t^0 ((-s)^{q-1}+1)ds. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Fazendo a mudança de variável $r=-s$, ficamos com

$$\int_t^0 ((-s)^{q-1}+1)ds = \int_0^{-t}(r^{q-1}+1)dr = \left(\frac{(-t)^q}{q}+(-t)\right) = \left(\frac{|t|^q}{q}+|t|\right). \tag{2.14}$$

Logo, de (2.13) e (2.14),

$$\left|\int_0^t f'(s)ds\right| \leq C\left(\frac{|t|^q}{q}+|t|\right). \tag{2.15}$$

Combinando (2.11), (2.12) e (2.15),

$$|f(t)| \leq |f(0)| + C\left(\frac{|t|^q}{q}+|t|\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Observe que se $|t| \leq 1$, então

$$\frac{|t|^q}{q}+|t| \leq \frac{|t|^q}{q}+1.$$

Por conseguinte,

$$|f(0)| + C\left(\frac{|t|^q}{q}+|t|\right) \leq |f(0)| + C\frac{|t|^q}{q} + C$$

e, portanto,

$$|f(t)| \leq \tilde{C}(|t|^q+1),$$

onde $\tilde{C} = \max\{\frac{C}{q}, C+|f(0)|\}$. Por outro lado, se $|t|>1$, então $1/|t|<1$. Dessa maneira,

$$\frac{|t|^q}{q}+|t| = |t|^q\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{|t|^{q-1}}\right) \leq |t|^q\left(\frac{1}{q}+1\right).$$

Consequentemente,

$$|f(t)| \leq |f(0)| + C|t|^q\left(\frac{1}{q}+1\right)$$

e, portanto,

$$|f(t)| \leq \hat{C}(|t|^q+1),$$

onde

$$\hat{C} = \max\left\{C\left(\frac{1}{q}+1\right), |f(0)|\right\}.$$

Considerando $C_1 = \max\{\hat{C}, \tilde{C}\}$, obtemos

$$|f(t)| \leq C_1(|t|^q + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 2.3 *A Propriedade 2.2 garante à existência de uma constante $C_2 > 0$ tal que*

$$|F(t)| \leq C_2(|t|^{q+1} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato, note que

$$|F(t)| \leq |F(t) - F(0)| + |F(0)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio[1], existe $\lambda_t \in [0, t]$ (ou $\lambda_t \in [t, 0]$) tal que

$$F(t) - F(0) = f(\lambda_t)t.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq |f(\lambda_t)t| + |F(0)| \\ &\leq C_1(|\lambda_t|^q + 1)|t| + |F(0)| \\ &\leq C_1(|t|^q + 1)|t| + |F(0)|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|F(t)| \leq C_1(|t|^{q+1} + |t|) + |F(0)|.$$

Supondo $|t| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq C_1(|t|^{q+1} + 1) + |F(0)| \\ &= C_1|t|^{q+1} + (C_1 + |F(0)|) \\ &\leq \tilde{C}_1(|t|^{q+1} + 1), \end{aligned}$$

onde $\tilde{C}_1 = C_1 + |F(0)|$. Caso $|t| > 1$, temos $1 > \frac{1}{|t|}$ e assim

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq |t|^{q+1}\left(1 + \frac{1}{|t|^q}\right) + |F(0)| \\ &\leq \hat{C}_1(|t|^{q+1} + 1), \end{aligned}$$

onde $\hat{C}_1 = \max\{2, |F(0)|\}$. Considerando $C_2 = \max\{\hat{C}_1, \tilde{C}_1\}$, obtemos

$$|F(t)| \leq C_2(|t|^{q+1} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

[1]Para mais detalhes, veja Lima [23, Teorema 7., Capítulo 8].

Propriedade 2.4 *De acordo com a Propriedade 2.1,*

$$|F(t)| \leq C_{\beta_1}(e^{\beta_1 t^2} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \beta_1 > 0,$$

para alguma constante $C_{\beta_1} > 0$.

Com efeito, sabemos que

$$|f(t)| \leq M_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$|F(t)| \leq |F(t) - F(0)| + |F(0)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda_t \in [0, t]$ (ou $\lambda_t \in [t, 0]$) tal que

$$F(t) - F(0) = f(\lambda_t)t.$$

Supondo que $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq |f(\lambda_t)t| + |F(0)| = |f(\lambda_t)||t| + |F(0)| \\ &\leq M_\beta |t| e^{\beta\lambda_t^2} + |F(0)| \leq M_\beta |t| e^{\beta t^2} + |F(0)|. \end{aligned}$$

Tendo em vista que

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{|t|}{e^{\xi t^2}} = 0,$$

onde $0 < \xi < 1$, mostra-se

$$|t| \leq C_\xi e^{\xi t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para alguma constante $C_\xi > 0$. Assim,

$$|F(t)| \leq M_\beta |t| e^{\beta t^2} + |F(0)| \leq M_\beta C_\xi e^{\xi t^2} e^{\beta t^2} + |F(0)| = M_\beta C_\xi e^{(\xi+\beta)t^2} + |F(0)|.$$

Definindo $\beta_1 = \beta + \xi$ e $M_{\beta_1} = M_\beta C_\xi$, obtêm-se

$$|F(t)| \leq M_{\beta_1} e^{\beta_1 t^2} + |F(0)|, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$|F(t)| \leq C_{\beta_1}(e^{\beta_1 t^2} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $C_{\beta_1} = \max\{M_{\beta_1}, |F(0)|\}$.

Propriedade 2.5 *Existe uma constante* $\delta > 0$ *tal que*

$$G(t) \geq \delta t^b, \quad \forall t > 0.$$

Com efeito, de acordo com a Condição (H), temos

$$tg(t) \geq bG(t), \quad \forall t > 0.$$

Então,

$$\frac{g(t)}{G(t)} \geq \frac{b}{t}, \quad \forall t > 0.$$

Considerando $0 < \varepsilon < t$, temos

$$\int_{\varepsilon}^{t} \frac{b}{s} ds \leq \int_{\varepsilon}^{t} \frac{g(s)}{G(s)} ds,$$

ou seja,

$$b(\ln|t| - \ln|\varepsilon|) \leq \ln|G(t)| - \ln|G(\varepsilon)|.$$

Dessa maneira,

$$\ln\left(\frac{t^b}{\varepsilon^b}\right) = b\ln\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \leq \ln\left(\frac{G(t)}{G(\varepsilon)}\right).$$

Desde que a exponencial é uma função crescente,

$$\frac{t^b}{\varepsilon^b} \leq \frac{G(t)}{G(\varepsilon)}, \quad \forall t > \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário,

$$G(t) \geq \delta t^b, \quad \forall t > 0,$$

onde $\delta > 0$.

Propriedade 2.6 *A função F é crescente.*

De fato, considere $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ com $t_1 < t_2$. Então,

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{-\infty}^{t_2} f(s)ds - \int_{-\infty}^{t_1} f(s)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(s)ds > 0,$$

pois $f > 0$. Logo, $t_1 < t_2$ implica $F(t_1) < F(t_2)$.

Propriedade 2.7 *Dado $c \in \mathbb{R}$, existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$tf(t) \geq aF(t) - K, \quad \forall t \geq c.$$

De fato, pela Condição (H), existe $\rho > 0$ tal que

$$tf(t) \geq aF(t), \quad \forall t > \rho. \tag{2.17}$$

Agora, considere a função $\phi : [c, \rho] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(t) = tf(t) - aF(t).$$

Observe que ϕ é uma função contínua definida em um compacto. Então, existe $t_0 \in [c, \rho]$ tal que

$$\phi(t_0) = \min_{t \in [c,\rho]} \phi(t).$$

Escolhendo $\alpha > 0$ tal que

$$\phi(t) \geq \phi(t_0) > -\alpha, \quad \forall t \in [c, \rho],$$

temos

$$tf(t) - aF(t) > -\alpha, \quad \forall t \in [c, \rho].$$

Assim,

$$tf(t) > aF(t) - \alpha, \quad \forall t \in [c, \rho]. \tag{2.18}$$

Combinando (2.17) e (2.18), concluímos que

$$tf(t) \geq aF(t) - K, \quad \forall t \geq c,$$

onde $K > 0$.

Propriedade 2.8 *Dado $c \in \mathbb{R}$, existem constantes $\gamma, \sigma > 0$ tais que*

$$F(t) \geq \gamma |t|^a - \sigma, \quad \forall t \geq c.$$

Com efeito, de acordo com a Condição (H), existe uma constante $\rho > 0$ tal que

$$tf(t) \geq aF(t), \quad \forall t > \rho.$$

ou seja,

$$\frac{f(t)}{F(t)} \geq \frac{a}{t}, \quad \forall t > \rho.$$

Integrando sobre o intervalo (ρ, t), temos

$$\int_\rho^t \frac{a}{s} ds \leq \int_\rho^t \frac{f(s)}{F(s)} ds,$$

ou seja,

$$a(\ln|t| - \ln|\rho|) \leq \ln|F(t)| - \ln|F(\rho)|.$$

Assim,
$$\ln\left(\frac{|t|^a}{\rho^a}\right) = a\ln\left(\frac{|t|}{\rho}\right) \leq \ln\left(\frac{F(t)}{F(\rho)}\right).$$
Como a função exponencial é crescente,
$$\frac{|t|^a}{\rho^a} \leq \frac{F(t)}{F(\rho)}, \quad \forall t > \rho.$$
Desse modo,
$$F(t) \geq \gamma|t|^a, \quad \forall t > \rho, \tag{2.19}$$
onde $\gamma = F(\rho)/\rho^a > 0$. Agora, considere $c \in \mathbb{R}$. Se $c \geq \rho$, o resultado segue. Caso contrário, defina a função $\phi : [c, \rho] \to \mathbb{R}$ por
$$\phi(t) = F(t) - \gamma|t|^a.$$
Uma vez que ϕ é contínua e $[c, \rho]$ é compacto, existe $t_0 \in [c, \rho]$ tal que
$$\phi(t_0) = \min_{t\in[c,\rho]} \phi(t).$$
Escolhendo $\sigma > 0$ de modo que
$$\phi(t) \geq \phi(t_0) > -\sigma, \quad \forall t \in [c, \rho],$$
obtemos
$$F(t) \geq \gamma|t|^a - \sigma, \quad \forall t \in [c, \rho]. \tag{2.20}$$
Assim, combinando (2.19) e (2.20), obtemos
$$F(t) \geq \gamma|t|^a - \sigma, \quad \forall t \geq c.$$

2.1.2 Existência de solução local

Neste momento, estamos interessados em obter uma solução para o problema (P5). Isso será feito através do uso do Teorema 1.10. Mas antes, faremos algumas considerações. Inicialmente, observe que (P5) pode ser convertido no problema de valor inicial para a equação de evolução abstrata de primeira ordem
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{P6}$$
onde $X = L^2(\Omega)$ e $A : D(A) \to X$ é dado por $Au = -\Delta u$, onde $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

De acordo com o que foi estudado no capítulo anterior, concluímos que A é um operador setorial. Além disso, veremos que $0 \in \rho(A)$. Isso será conteúdo do seguinte lema.

Lema 2.1 $0 \in \rho(A)$.

Demonstração: Para isso, devemos mostrar que $A^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ existe, é linear e limitado. Observe que mostrar a existência de A^{-1} é equivalente a mostrar que dado uma função $h \in L^2(\Omega)$ existe uma única função $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ que satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = h, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ora, uma solução fraca para (2.21) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega hv dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Definindo $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J(v) = \int_\Omega hv dx$$

não é difícil verificar que J é um funcional linear contínuo. Então, o Teorema de Riesz-Fréchet (veja o Teorema A.6) nos assegura a existência de um único $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(v) = \langle v, u_0 \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Recordando que

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

obtemos

$$\int_\Omega hv dx = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca de (2.21).

Teorema 2.1 [2] *Seja Ω um conjunto aberto de classe C^2 com $\partial\Omega$ limitada. Se $h \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazem*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega hv dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

[2] Para mais detalhes sobre este resultado, veja Brézis [7].

Então, $u \in H^2(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|h\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $C > 0$ *é uma constante que depende apenas de* Ω*.*

De acordo o resultado acima, $u_0 \in H^2(\Omega)$. Então, dado $h \in L^2(\Omega)$, existe um único $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = h, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, o operador A admite inverso com

$$A^{-1}h = u \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u = h, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmação 2.1.1 A^{-1} *é linear.*

De fato, sejam $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$, então existem únicos $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h_1, & \text{em} \quad \Omega, \\ u_1 = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = h_2, & \text{em} \quad \Omega, \\ u_2 = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Considerando $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{cases} -\Delta(\lambda u_1) = \lambda h_1, & \text{em} \quad \Omega, \\ \lambda u_1 = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta(\xi u_2) = \xi h_2, & \text{em} \quad \Omega, \\ \xi u_2 = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Dessa maneira,

$$\begin{cases} -\Delta(\lambda u_1 + \xi u_2) = \lambda h_1 + \xi h_2, & \text{em} \quad \Omega, \\ \lambda u_1 + \xi u_2 = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto,

$$A^{-1}(\lambda h_1 + \xi h_2) = \lambda u_1 + \xi u_2 = \lambda A^{-1}h_1 + \xi A^{-1}h_2,$$

como queríamos demonstrar.

Afirmação 2.1.2 *A^{-1} é limitado.*

De fato, sabemos que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Então, de acordo com o Teorema C.4, a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua, ou seja, deve existir uma constante $C_1 > 0$ satisfazendo

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.23}$$

Por outro lado, segue do Corolário C.5.1 que a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ é compacta. Então, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.24}$$

Combinando (2.22), (2.23) e (2.24), obtemos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C}\|h\|_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|A^{-1}h\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C}\|h\|_{L^2(\Omega)},$$

mostrando que A^{-1} é limitado. ■

Para dar continuidade ao estudo, vamos fixar um espaço X^α para que possamos aplicar o Teorema 1.10. Escolhendo $\alpha = \frac{1}{2}$ concluímos, de acordo com Figueiredo-Felmer [13], que

$$X^{\frac{1}{2}} = D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega). \tag{2.25}$$

Deixamos claro que, daqui em diante, $\|\cdot\|$ denotará a norma usual de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lema 2.2 *As normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ em $H_0^1(\Omega)$ são iguais, onde*

$$\|u\|_{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração: Considere uma base normalizada de $L^2(\Omega)$ formada por autofunções (ϕ_n) de

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi, & \text{em} \quad \Omega, \\ \phi = 0, \quad \text{em} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde os autovalores associados são (λ_n). Assim, se $u \in L^2(\Omega)$, podemos escrever

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \phi_n.$$

Além disso, segue de [13] que o operador $A^{\frac{1}{2}}$ admite a seguinte caracterização

$$A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} a_n \phi_n, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\|A^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} a_n \phi_n, \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} a_n \phi_n \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \lim_{j \to +\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{j} \lambda_n^{\frac{1}{2}} a_n \phi_n, \sum_{n=1}^{j} \lambda_n^{\frac{1}{2}} a_n \phi_n \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \lim_{j \to +\infty} \sum_{n=1}^{j} \lambda_n a_n^2 \langle \phi_n, \phi_n \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n^2. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Por outro lado, seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, podemos escrever

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \phi_n.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \phi_n, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \phi_n \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \lim_{j \to +\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{j} a_n \phi_n, \sum_{n=1}^{j} a_n \phi_n \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \lim_{j \to +\infty} \sum_{n=1}^{j} a_n^2 \langle \phi_n, \phi_n \rangle_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Sendo

$$\int_\Omega \nabla \phi_n \nabla v dx = \lambda_n \int_\Omega \phi_n v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

temos

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_n \langle \phi_n, \phi_n \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda_n,$$

ou seja,

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \lambda_n. \tag{2.27}$$

Nestas condições, de (2.26) e (2.27),

$$\|u\|_{\frac{1}{2}} = \|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

Observe que, a menos da Condição (F), já checamos todas as exigências do Teorema 1.10. Neste momento, estaremos concentrados em verificar que a aplicação $\varphi : H_0^1(\Omega) \to X$ definida por

$$\varphi(u) = g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(u), \tag{2.28}$$

satisfaz a Condição (F).

Lema 2.3 *A aplicação φ definida em (2.28) é localmente Lipschitz.*

Demonstração: Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned}
|\varphi(u) - \varphi(v)| &\leq \left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(u) - g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(v) \right| \\
&+ \left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(v) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right) f(v) \right| \\
&\leq g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) |f(u) - f(v)| \\
&+ \left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right) \right| |f(v)|.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
|\varphi(u) - \varphi(v)|^2 &\leq 4g\left(\int_\Omega F(u)dx\right)^2 |f(u) - f(v)|^2 \\
&+ 4\left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right) \right|^2 |f(v)|^2.
\end{aligned}$$

Integrando sobre Ω, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varphi(u) - \varphi(v)|^2 dx &\leq 4\int_\Omega g\left(\int_\Omega F(u)dx\right)^2 |f(u) - f(v)|^2 dx \\
&+ 4\int_\Omega \left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right) \right|^2 |f(v)|^2 dx \\
&= 4g\left(\int_\Omega F(u)dx\right)^2 \int_\Omega |f(u) - f(v)|^2 dx \\
&+ 4\left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right) \right|^2 \int_\Omega |f(v)|^2 dx. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
F(u)-F(v) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}F(v+s(u-v))ds \\
&= \int_0^1 (u-v)f(v+s(u-v))ds \\
&= (u-v)\int_0^1 f(v+s(u-v))ds.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
|F(u)-F(v)| \leq |u-v|\int_0^1 |f(v+s(u-v))|ds. \tag{2.30}
$$

Se $N=2$, segue da Propriedade 2.1 que

$$
|f(t)| \leq C_\beta e^{\beta|t|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.31}
$$

onde $C_\beta > 0$ é uma constante. Além disso, como

$$
\begin{aligned}
|v+s(u-v)| &= |(1-s)v+su| \leq |(1-s)v|+|su| \\
&= (1-s)|v|+s|u| \leq |v|+|u|.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

concluímos que

$$
|v+s(u-v)|^2 \leq (|v|+|u|)^2. \tag{2.33}
$$

De (2.30), (2.31) e (2.33),

$$
\begin{aligned}
|F(u)-F(v)| &\leq |u-v|\int_0^1 |f(v+s(u-v))|ds \\
&\leq |u-v|\int_0^1 C_\beta e^{\beta|v+s(u-v)|^2}ds \\
&\leq |u-v|\int_0^1 C_\beta e^{\beta(|u|+|v|)^2}ds \\
&= |u-v|C_\beta e^{\beta(|u|+|v|)^2}.
\end{aligned}
$$

Assim, aplicando a Desigualdade de Hölder (veja o Teorema B.1),

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |F(u)-F(v)|dx &\leq C_\beta \int_\Omega |u-v|e^{\beta(|u|+|v|)^2}dx \\
&\leq C_\beta \|u-v\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega e^{2\beta(|u|+|v|)^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

Sejam $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ um elemento arbitrário e

$$
V = \{u \in H_0^1(\Omega); \|u-u_0\| \leq \delta\}
$$

uma vizinhança de u_0. Supondo que $u, v \in V$, tem-se

$$\begin{aligned} \||u| + |v|\| &\leq \|u\| + \|v\| \\ &\leq \|u - u_0\| + \|u_0\| + \|v - u_0\| + \|u_0\| \\ &< 2(\delta + \|u_0\|). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_\Omega e^{2\beta(|u|+|v|)^2} dx &= \int_\Omega e^{2\beta\left(\frac{|u|+|v|}{\||u|+|v|\|}\right)^2 (\||u|+|v|\|)^2} dx \leq \int_\Omega e^{2\beta 4(\delta+\|u_0\|)^2 \left(\frac{|u|+|v|}{\||u|+|v|\|}\right)^2} dx \\ &\leq \sup_{\|w\|\leq 1} \int_\Omega e^{2\beta 4(\delta+\|u_0\|)^2 |w|^2} dx = \sup_{\|w\|\leq 1} \int_\Omega e^{8\beta(\delta+\|u_0\|)^2|w|^2} dx. \quad (2.35) \end{aligned}$$

Considerando $\beta > 0$ de modo que $4\beta(\delta + \|u_0\|)^2 < \pi$, temos

$$\beta \in \left(0, \frac{\pi}{4(\delta + \|u_0\|)^2}\right).$$

Aplicando a Desigualdade de Trudinger-Moser (veja o Teorema C.3), concluímos que

$$\sup_{\|w\|\leq 1} \int_\Omega e^{8\beta(\delta+\|u_0\|)^2|w|^2} \leq \sup_{\|w\|\leq 1} \int_\Omega e^{2\pi|w|^2} < c|\Omega|, \quad (2.36)$$

para alguma constante $c > 0$. Então, combinando (2.35) e (2.36),

$$\int_\Omega e^{2\beta(|u|+|v|)^2} dx \leq C_2, \quad \forall u, v \in V,$$

ou seja,

$$\left(\int_\Omega e^{2\beta(|u|+|v|)^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3, \quad \forall u, v \in V. \quad (2.37)$$

onde $C_3 = C_2^{\frac{1}{2}}$. Assim, combinando (2.34) e (2.37), obtemos

$$\int_\Omega |F(u) - F(v)| dx \leq C_\beta C_3 \|u - v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in V. \quad (2.38)$$

De acordo com o Teorema C.4, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.39)$$

Assim, de (2.38) e (2.39),

$$\int_\Omega |F(u) - F(v)| dx \leq C_* \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.40)$$

para alguma constante $C_* > 0$. Escolhendo $\delta > 0$ de modo que

$$\delta \leq \frac{1}{4C_*}\int_\Omega F(u_0)dx,$$

temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |F(u)-F(v)|dx &\leq C_*(\|u-u_0\|+\|u_0-v\|)\\ &\leq C_*\frac{1}{2C_*}\int_\Omega F(u_0)dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega |F(u)-F(v)|dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega F(u_0)dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u_0)dx &= \int_\Omega |F(u_0)|dx = \int_\Omega |F(u_0)-F(u)+F(u)|dx\\ &\leq \int_\Omega |F(u_0)-F(u)|dx + \int_\Omega |F(u)|dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega F(u_0)dx + \int_\Omega F(u)dx. \qquad (2.41)\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega F(u_0)dx \leq \int_\Omega F(u)dx, \quad \forall u \in V.$$

Definindo

$$r = \frac{1}{2}\int_\Omega F(u_0)dx > 0,$$

concluímos que

$$r \leq \int_\Omega F(u)dx, \quad \forall u \in V. \qquad (2.42)$$

Por outro lado, dado $u \in V$, temos

$$\|u\| \leq \delta + \|u_0\|.$$

Além disso, segue da Propriedade 2.4 que

$$\int_\Omega F(u)dx \leq \int_\Omega C_2(e^{\beta_1|u|}+1)dx \leq C_2\int_\Omega e^{\beta_1|u|}dx + C_2|\Omega|.$$

Aplicando a Desigualdade de Trudinger-Moser, concluímos que existe uma constante $\tilde{C}_2 > 0$ tal que

$$\int_\Omega F(u)dx \leq \tilde{C}_2C_2 + C_2|\Omega|.$$

Fazendo

$$R = \tilde{C}_2 C_2 + C_2|\Omega|,$$

obtemos

$$\int_\Omega F(u)dx \leq R, \quad \forall u \in V. \tag{2.43}$$

Portanto, de (2.42) e (2.43),

$$r \leq \int_\Omega F(u)dx \leq R, \quad \forall u \in V, \tag{2.44}$$

onde $r, R > 0$ são constantes. Uma vez que g é uma função localmente Lipschitz e $[r, R]$ é um compacto segue, dos argumentos usados na demonstração do Teorema 1.12, que existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|g(s) - g(t)| \leq L|s - t|, \quad \forall s, t \in [r, R].$$

Em particular, de acordo com (2.44),

$$\left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right)\right| \leq L\left|\int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega F(v)dx\right|, \quad \forall u, v \in V,$$

onde $L > 0$ é uma constante. Assim, usando (2.40),

$$\begin{aligned}
\left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right)\right| &\leq L\left|\int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega F(v)dx\right| \\
&\leq L\int_\Omega |F(u) - F(v)|dx \\
&\leq LC_*\|u - v\|, \quad \forall u, v \in V
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right)\right|^2 \leq L_1\|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in V, \tag{2.45}$$

para alguma constate $L_1 > 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(v)|^2 dx &\leq \int_\Omega C_\beta^2 e^{2\beta|v|^2} dx \\
&\leq C_\beta^2 \int_\Omega e^{2\beta\left(\frac{|v|}{\|v\|}\right)^2\|v\|^2} dx.
\end{aligned}$$

Supondo que $v \in V$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|v\| &\leq \|v - u_0\| + \|u_0\| \\
&< \delta + \|u_0\|.
\end{aligned}$$

Então,
$$\int_\Omega |f(v)|^2 dx \leq C_\beta^2 \int_\Omega e^{2\beta(\delta+\|u_0\|)^2\left(\frac{|v|}{\|v\|}\right)^2}.$$
Escolhendo β de modo que $\beta(\delta + \|u_0\|)^2 < \pi$ e usando a Desigualdade de Trudinger-Moser, concluímos que
$$\int_\Omega |f(v)|^2 dx \leq C_4. \tag{2.46}$$
Sendo g uma função contínua e $[r, R]$ um conjunto compacto, existe uma constante $B > 0$ tal que
$$g(t) \leq B, \quad \forall t \in [r, R].$$
Em particular,
$$g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) \leq B, \quad \forall u \in V$$
o que implica
$$g\left(\int_\Omega F(u)dx\right)^2 \leq B^2, \quad \forall u \in V. \tag{2.47}$$
Usando o mesmo raciocínio empregado em F, temos
$$f(u) - f(v) = (u - v)\int_0^1 f'(v + s(u - v))ds.$$
Então, aplicando a Propriedade 2.1,
$$\begin{aligned}
|f(u) - f(v)| &\leq |u - v| \int_0^1 |f'(v + s(u - v))|ds \\
&\leq |u - v| \int_0^1 C_\beta e^{\beta(v+s(u-v))^2} ds \\
&\leq |u - v| \int_0^1 C_\beta e^{\beta(|u|+|v|)^2} ds \\
&= |u - v| C_\beta e^{\beta(|u|+|v|)^2}.
\end{aligned}$$
Dessa maneira,
$$|f(u) - f(v)|^2 \leq |u - v|^2 C_\beta^2 e^{2\beta(|u|+|v|)^2}. \tag{2.48}$$
Segundo o Teorema C.4, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ é contínua. Assim, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que
$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \tilde{C}\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.49}$$

Integrando a expressão dada em (2.48), aplicando a Desigualdade de Hölder e a estimativa dada em (2.49),

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u)-f(v)|^2dx &\le \int_\Omega |u-v|^2 C_\beta^2 e^{2\beta(|u|+|v|)^2}dx\\ &\le \left(\int_\Omega |u-v|^4dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega C_\beta^4 e^{4\beta(|u|+|v|)^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= C_\beta^2\|u-v\|_{L^4(\Omega)}^2\left(\int_\Omega e^{4\beta(|u|+|v|)^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le C_1\|u-v\|^2\left(\int_\Omega e^{4\beta(|u|+|v|)^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Por conseguinte, com o uso de (2.37),

$$\int_\Omega |f(u)-f(v)|^2dx \le C_5\|u-v\|^2, \quad \forall u,v\in V. \tag{2.50}$$

Substituindo (2.45), (2.46), (2.47) e (2.50) em (2.29),

$$\int_\Omega |\varphi(u)-\varphi(v)|^2dx \le (B^2C_5+L_1C_4)\|u-v\|^2,$$

ou seja,

$$\|\varphi(u)-\varphi(v)\|_{L^2(\Omega)} \le L_0\|u-v\|, \quad \forall u,v\in V,$$

como queríamos demonstrar.

Se $N\ge 3$, então a Propriedade 2.2 afirma que

$$|f(t)| \le C(|t|^q+1), \quad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{2.51}$$

para alguma constante $C>0$. De (2.32),

$$|v+s(u-v)| \le |u|+|v|.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}|v+s(u-v)|^q &\le (|v|+|u|)^q\\ &\le (2\max\{|v|,|u|\})^q\\ &= 2^q\max\{|v|,|u|\}^q\\ &\le 2^q(|v|^q+|u|^q). \end{aligned}\tag{2.52}$$

Substituindo (2.51) e (2.52) em (2.30), obtemos

$$\begin{aligned} |F(u) - F(v)| &\leq |u - v| \int_0^1 |f(v + s(u - v))| ds \\ &\leq C|u - v| \int_0^1 (|v + s(u - v)|^q + 1) ds \\ &\leq C|u - v| \int_0^1 (2^q(|v|^2 + |u|^q) + 1) ds \\ &= C|u - v|(2^q(|v|^q + |u|^q) + 1). \end{aligned}$$

Assim, integrando a expressão acima com respeito a Ω e aplicando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |F(u) - F(v)| dx &\leq C \int_\Omega |u - v|(2^q(|v|^q + |u|^q) + 1) dx \\ &\leq C\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega (2^q(|v|^q + |u|^q) + 1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Não é difícil verificar que

$$(2^q(|v|^q + |u|^q) + 1)^2 \leq c(|v|^{2q} + |u|^{2q} + 1).$$

onde $c > 0$ é uma constante. Assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (2^q(|v|^q + |u|^q) + 1)^2 dx &\leq c \int_\Omega (|v|^{2q} + |u|^{2q} + 1) dx \\ &= c(\|v\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q} + \|u\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q} + |\Omega|) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega (2^q(|v|^q + |u|^q) + 1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(c(\|v\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q} + \|u\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q} + |\Omega|) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1(\|v\|_{L^{2q}(\Omega)}^{q} + \|u\|_{L^{2q}(\Omega)}^{q} + |\Omega|^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{2.54}$$

De acordo com o Teorema C.4, a imersão

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$$

é contínua. Por outro lado, por hipótese, $q \in (1, \frac{N}{N-2})$. Então,

$$2q \leq \frac{2N}{N-2}.$$

Assim, a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2q}(\Omega)$ é contínua, ou seja, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{2q}(\Omega)} \leq \tilde{C}\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Em particular

$$\|u\|_{L^{2q}(\Omega)} \leq C_1\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.55}$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Do mesmo modo, como a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.56}$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Combinando (2.53), (2.54), (2.56) e (2.55),

$$\begin{aligned} \int_\Omega |F(u) - F(v)|dx &\leq c_1C\|u-v\|_{L^2(\Omega)}(\|v\|^q_{L^{2q}(\Omega)} + \|u\|^q_{L^{2q}(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq c_3\|u-v\|(c_4\|v\|^q + c_4\|u\|^q + |\Omega|^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Desse modo, se $u, v \in V$, então

$$\int_\Omega |F(u) - F(v)|dx \leq C_3\|u - v\|,$$

para alguma constante $C_3 > 0$. Assim, aplicando o mesmo argumento usado anteriormente, encontramos uma constante $L > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right)\right| &\leq L\left|\int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega F(v)dx\right| \\ &\leq L\int_\Omega |F(u) - F(v)|dx \\ &\leq LC_3\|u-v\|, \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

e, portanto, existe uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\left| g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(v)dx\right)\right|^2 \leq C_4\|u-v\|^2, \quad \forall u, v \in V. \tag{2.57}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(v)|^2 dx &\leq \int_\Omega (|v|^q + 1)^2 dx \\ &\leq 4\int_\Omega (|v|^{2q} + 1)dx \\ &= 4(\|v\|^{2q}_{L^{2q}(\Omega)} + |\Omega|) \\ &\leq 4(C_1\|v\|^{2q} + |\Omega|) \\ &\leq C_5, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Usando os mesmos argumentos usados para provar (2.47), verifica-se que

$$g\left(\int_\Omega F(u)dx\right)^2 \leq B^2, \tag{2.59}$$

para alguma constante $B > 0$. Além disso, de modo semelhante ao que foi feito para F, mostra-se através da Condição (f_2) que

$$\int_\Omega |f(u) - f(v)|^2 dx \leq C_6 \|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in V. \tag{2.60}$$

Combinando (2.57), (2.58), (2.59) e (2.60),

$$\int_\Omega |\varphi(u) - \varphi(v)|^2 dx \leq C_7 \|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in V.$$

Portanto, existe uma constante $L_0 > 0$ tal que

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_0 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V,$$

encerrando a demonstração. ∎

De acordo com as considerações acima, concluímos através do Teorema 1.10 que o problema (P5) admite uma única solução clássica, isto é, a solução $u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$ de (P5) dada por

$$u(t) = e^{-At} u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} \varphi(u(s)) ds,$$

a qual é contínua, satisfaz

$$u \in C((0, T), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, T), L^2(\Omega)), \tag{2.61}$$

com

$$u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \forall t \in (0, T)$$

e u verifica (P5).

A Condição (H) não é necessária para a existência de solução clássica global para o problema (P5). De fato, considere no problema (P5) as funções $g = 1$ e $f(u) = (1+\lambda_1)u$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja ϕ a autofunção associada ao autovalor λ_1. Note que a função

$$u(x, t) = e^t \phi(x)$$

é solução da equação

$$\frac{du}{dt} - \Delta u = (1 + \lambda_1) u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

com

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

pois

$$\frac{du}{dt} - \Delta u = \frac{d}{dt}[e^t\phi(x)] - \Delta[e^t\phi(x)] = (1+\lambda_1)e^t\phi(x) = (1+\lambda_1)u$$

e

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Porém observe que, neste exemplo, a solução admite blow up no infinito. Assim, a Condição (H) desempenha um papel muito importante neste trabalho porque, quando as funções f e g cumprem todas as condições apresentadas no inicio do capítulo incluindo a Condição (H), as soluções globais do problema (P5) admitem algumas limitações como veremos no estudo à seguir.

2.2 Limitação da solução global

2.2.1 Propriedades da solução

Recorde que, associado à equação (P5), temos o funcional energia $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - G\left(\int_\Omega F(u)dx\right). \tag{2.62}$$

Teorema 2.2 *Sejam $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ e u a solução de* (P5) *dada por*

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}\phi(u(s))ds.$$

Então, $J(u(\cdot)) \in C^1((0,T))$ e

$$\frac{d}{dt}J(u(t)) = -\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx, \quad \forall t \in (0,T), \tag{2.63}$$

onde $[0,T)$ é o intervalo de definição de u.

Veremos este resultado como uma consequência dos seguintes lemas. A demonstração dos mesmos será baseada nos argumentos apresentados por Quittner-Souplet [32, Lema 17.5.].

Lema 2.4 *A função* $J_1 : [0,T] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$J_1(t) = \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$$

é diferenciável em $(0,T)$ *com*

$$\frac{d}{dt} J_1(t) = -2 \int_\Omega u_t(t) \Delta u(t) dx.$$

Além disso, $J_1 \in C^1((0,T))$.

Demonstração: Vamos mostrar que J_1 é diferenciável em $(0,T)$. Com efeito, sejam $t, s \in (0,T)$, então

$$\begin{aligned} \frac{J_1(s) - J_1(t)}{s-t} &= \frac{1}{s-t} \int_\Omega \nabla(u(s) - u(t)) \nabla(u(s) - u(t)) dx \\ &= -\frac{1}{s-t} \int_\Omega (u(s) - u(t)) \Delta(u(s) - u(t)) dx \\ &= -\int_\Omega \frac{u(s) - u(t)}{s-t} \Delta(u(s) - u(t)) dx. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Afirmamos que

$$\lim_{s \to t} \frac{J_1(s) - J_1(t)}{s-t} = -2 \int_\Omega u_t(t) \Delta u(t) dx.$$

De fato, definindo

$$I = \frac{J_1(s) - J_1(t)}{s-t} + 2 \int_\Omega u_t(t) \Delta u(t) dx,$$

temos

$$\begin{aligned} |I| &= \left| -\int_\Omega \left(\frac{u(s) - u(t)}{s-t} \right) \Delta(u(s) - u(t)) dx + 2 \int_\Omega u_t(t) \Delta u(t) dx \right| \\ &\leq \int_\Omega \left| \left(-\frac{u(s) - u(t)}{s-t} \right) \Delta(u(s) - u(t)) + 2 u_t(t) \Delta u(t) \right| dx \\ &\leq \int_\Omega \left| \left(-\frac{u(s) - u(t)}{s-t} \right) [\Delta(u(s) - u(t)) + 2 \Delta u(t)] \right| dx \\ &+ \int_\Omega \left| \left(-\frac{u(s) - u(t)}{s-t} + u_t(t) \right) 2 \Delta u(t) \right| dx \\ &= \int_\Omega \left| \left(\frac{u(s) - u(t)}{s-t} \right) (\Delta u(s) - \Delta u(t)) \right| dx \\ &+ \int_\Omega \left| \left(\frac{u(s) - u(t)}{s-t} - u_t(t) \right) 2 \Delta u(t) \right| dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \left| \frac{J_1(s) - J_1(t)}{s-t} + 2 \int_\Omega u_t(t) \Delta u(t) dx \right| &\leq \int_\Omega \left| \frac{u(s) - u(t)}{s-t} (\Delta u(s) - \Delta u(t)) \right| dx \\ &+ \int_\Omega \left| \left(\frac{u(s) - u(t)}{s-t} - u_t(t) \right) 2 \Delta u(t) \right| dx \end{aligned}$$

De acordo com (2.61),

$$u \in C((0,T), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega)). \tag{2.65}$$

Então, aplicando Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{J_1(s) - J_1(t)}{s-t} + 2\int_\Omega u_t(t)\Delta u(t)dx \right| &\leq \left\| \frac{u(s)-u(t)}{s-t} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u(s) - \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \left\| \frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \|2\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left\| \frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \|2\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ B\|\Delta u(s) - \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left\| \frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \|2\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ B\|u(s) - u(t)\|_{H^2(\Omega)}. \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

Ainda por (2.65),

$$\|u(s) - u(t)\|_{H^2(\Omega)} \to 0, \quad s \to t \tag{2.67}$$

e

$$\left\| \frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad s \to t. \tag{2.68}$$

Combinando (2.66), (2.67) e (2.68), concluímos que

$$\left| \frac{J_1(s) - J_1(t)}{s-t} + 2\int_\Omega u_t(t)\Delta u(t)dx \right| \to 0, \quad s \to t.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}J_1(t) = -2\int_\Omega u_t(t)\Delta u(t)dx.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt}J_1(s) - \frac{d}{dt}J_1(t) \right| &= \left| -2\int_\Omega u_t(s)\Delta u(s)dx + 2\int_\Omega u_t(t)\Delta u(t)dx \right| \\
&\leq 2\int_\Omega |u_t(t)\Delta u(t) - u_t(s)\Delta u(s)|dx \\
&\leq 2\int_\Omega |u_t(t)(\Delta u(t) - \Delta u(s))|dx \\
&+ 2\int_\Omega |(u_t(t) - u_t(s))\Delta u(s)|dx.
\end{aligned}$$

Usando (2.65) juntamente com a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}J_1(s)-\frac{d}{dt}J_1(t)\right| &\leq 2\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u(t)-\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ 2\|u_t(t)-u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq 2\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u(t)-u(s)\|_{H^2(\Omega)}\\ &+ 2\|u_t(t)-u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}\|u(s)\|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Além disso, existe $B>0$ tal que

$$\|u(s)\|_{H^2(\Omega)}\leq B, \quad \forall t\in[0,T].$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}J_1(s)-\frac{d}{dt}J_1(t)\right| &\leq C\|u(t)-u(s)\|_{H^2(\Omega)}\\ &+ 2B\|u_t(t)-u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}\tag{2.69}$$

onde $C=2\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}$. Mais uma vez, recorrendo a (2.65), vem

$$\|u(t)-u(s)\|_{H^2(\Omega)}\to 0 \quad \text{quando} \quad s\to t, \tag{2.70}$$

e

$$\|u_t(t)-u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}\to 0 \quad \text{quando} \quad s\to t. \tag{2.71}$$

Logo, de (2.69), (2.70) e (2.71),

$$\left|\frac{d}{dt}J_1(s)-\frac{d}{dt}J_1(t)\right|\to 0 \quad \text{quando} \quad s\to t$$

e, portanto,

$$J_1\in C^1((0,T)).$$

■

Lema 2.5 *A função $J_2:(0,T)\to(0,T)$ definida por*

$$J_2(t)=\int_\Omega F(u(t))dx$$

é diferenciável com

$$\frac{d}{dt}J_2(t)=\int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx.$$

Além disso, $J_2\in C^1((0,T))$.

Demonstração: Para facilitar o entendimento, dividiremos esta demonstração em algumas etapas.

Afirmação 2.5.1 *J_2 é diferenciável em $(0,T)$.*

De fato, sejam $t, s \in (0,T)$ com $t \neq s$, então

$$\begin{aligned} \frac{J_2(s)-J_2(t)}{s-t} &= \frac{1}{s-t}\int_\Omega F(u(s)) - F(u(t))dx \\ &= \int_\Omega \frac{u(t)-u(s)}{t-s}\int_0^1 f(u(t)+\lambda(u(s)-u(t)))d\lambda dx. \end{aligned} \tag{2.72}$$

No que segue, iremos justificar o seguinte limite

$$\lim_{s\to t}\frac{J_2(s)-J_2(t)}{s-t} = \int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx.$$

Para isso, defina

$$\varphi(s) = \frac{J_2(s)-J_2(t)}{s-t}, \quad L = \int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx.$$

Então, usando (2.72) e fazendo algumas manipulações,

$$\begin{aligned} \varphi(s) - L &= \int_\Omega \frac{u(s)-u(t)}{s-t}\int_0^1 f(u(s)+\lambda(u(t)-u(s)))d\lambda dx \\ &- \int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx \\ &= \int_\Omega \frac{u(s)-u(t)}{s-t}\int_0^1 [f(u(t)+\lambda(u(s)-u(t))) - f(u(t))]d\lambda dx \\ &+ \int_\Omega \frac{u(s)-u(t)}{s-t}\int_0^1 f(u(t))d\lambda dx - \int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx \\ &= \int_\Omega\int_0^1 \frac{u(s)-u(t)}{s-t}[f(u(t)+\lambda(u(s)-u(t))) - f(u(t))]d\lambda dx \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t)\right) f(u(t))dx. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} |\varphi(s) - L| &\leq \int_\Omega\int_0^1 \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}[f(u(t)+\lambda(u(s)-u(t))) - f(u(t))]\right| d\lambda dx \\ &+ \int_\Omega \left|\left(\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t)\right) f(u(t))\right| dx. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Usando a Desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega \left|\left(\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t)\right) f(u(t))\right| dx \leq \left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \|f(u(t))\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.74}$$

Agora defina

$$I(\lambda) = \left(\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right)[f(u(s)+\lambda(u(t)-u(s))) - f(u(t))].$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio em f, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(u(t)+\lambda(u(s)-u(t))) - f(u(t)) = f'(u(t)+\theta\lambda(u(s)-u(t)))\lambda(u(s)-u(t)).$$

Então,

$$\begin{aligned}
|I(\lambda)| &= \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| |f'(u(t)+\theta\lambda(u(s)-u(t)))\lambda(u(s)-u(t))| \\
&= \lambda\left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| |f'(u(t)+\theta\lambda(u(s)-u(t)))||u(s)-u(t)|.
\end{aligned}$$

Sendo $N=2$ a Propriedade 2.1 nos diz que

$$|f'(t)| \leq C_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $\beta > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
|I(\lambda)| &= \lambda\left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| |f'(u(t)+\theta\lambda(u(s)-u(t)))||u(s)-u(t)| \\
&\leq \lambda C_\beta \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| e^{\beta(u(t)+\theta\lambda(u(s)-u(t)))^2}|u(s)-u(t)| \\
&\leq \lambda C_\beta \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| e^{\beta(|u(t)|+|u(s)|)^2}|u(s)-u(t)|,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |J(\lambda)|d\lambda &\leq \int_0^1 \lambda C_\beta \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| e^{\beta(|u(t)|+|u(s)|)^2}|u(s)-u(t)|d\lambda \\
&= C_\beta \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| e^{\beta(|u(t)|+|u(s)|)^2}|u(s)-u(t)|.
\end{aligned}$$

Além disso, uma vez que

$$\lim_{s\to t}\frac{u(s)-u(t)}{s-t} = u'(t),$$

existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq B, \quad \forall s \in (0,T). \tag{2.75}$$

Assim, fazendo o uso de (2.75) e da Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_0^1 |J(\lambda)|d\lambda dx &\leq C_\beta \int_\Omega \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| e^{\beta(|u(t)|+|u(s)|)^2}|u(s)-u(t)|dx \\
&\leq C_\beta \left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega e^{2\beta(|u(t)|+|u(s)|)^2}|u(s)-u(t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_\beta B\|u(s)-u(t)\|_{L^4(\Omega)} \left(\int_\Omega e^{4\beta(|u(t)|+|u(s)|)^2}dx\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Trudinger-Moser como foi feito no Lema 2.3, mostra-se que

$$\left(\int_\Omega e^{4\beta(|u(t)|+|u(s)|)^2}dx\right)^{\frac{1}{4}} \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$. Assim, uma vez que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ é contínua,

$$\int_\Omega \int_0^1 |J(\lambda)|d\lambda dx \leq \tilde{C}\|u(s)-u(t)\|,$$

para alguma contante $\tilde{C} > 0$, ou seja,

$$\int_\Omega \int_0^1 \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}[f(u(t)+\lambda(u(s)-u(t)))-f(u(t))]\right| d\lambda dx \leq \tilde{C}\|u(s)-u(t)\|. \tag{2.76}$$

Combinando (2.73), (2.74) e (2.76),

$$\left|\frac{J_2(s)-J_2(t)}{s-t} - \int_\Omega u_t(t)f(u(t))\right| \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to t,$$

como queríamos demonstrar.

Se $N \geq 3$, a Condição (f_2) afirma que existem constantes $C > 0$ e $1 < q < \frac{N}{N-2}$ tais que

$$|f'(t)| \leq C(|t|^{q-1}+1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$|f'(u(t)+\theta\lambda(u(s)-u(t)))| \leq C_1[(|u(t)|^{q-1}+|u(s)|^{q-1})+1].$$

e assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^1 |J(\lambda)|d\lambda dx &\leq C_1 \int_\Omega \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| [(|u(t)|^{q-1}+|u(s)|^{q-1})+1]|u(s)-u(t)|dx \\ &= C_1 \int_\Omega \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| |u(t)|^{q-1}|u(s)-u(t)|dx \\ &+ C_1 \int_\Omega \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| |u(s)|^{q-1}|u(s)-u(t)|dx \\ &+ C_1 \int_\Omega \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| |u(s)-u(t)|dx. \end{aligned} \tag{2.77}$$

A Desigualdade de Hölder e a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ combinados com (2.75) nos dão

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| |u(s)-u(t)|dx &\leq \left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right\|_{L^2(\Omega)} \|u(s)-u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \tilde{C}_1\|u(s)-u(t)\|, \end{aligned} \tag{2.78}$$

onde $\tilde{C}_1 > 0$ é uma constante. Agora, defina

$$I_1 = \int_\Omega \left| \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \right| |u(t)|^{p-1} |u(s) - u(t)| dx.$$

Considere p' tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então, teremos $p - 1 = p/p'$. Nestas condições,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left\| \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega |u(t)|^{2\frac{p}{p'}} |u(s) - u(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq B \left(\int_\Omega |u(t)|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{2p'}} \left(\int_\Omega |u(s) - u(t)|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{2p}} \\ &= B \|u(s) - u(t)\|_{L^{2p}(\Omega)} \|u(t)\|_{L^{2p}(\Omega)}^{\frac{2p}{2p'}} \end{aligned}$$

Analogamente, escrevendo

$$I_2 = \int_\Omega \left| \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \right| |u(s)|^{p-1} |u(s) - u(t)| dx,$$

obtemos

$$I_2 \leq B \|u(s) - u(t)\|_{L^{2p}(\Omega)} \|u(s)\|_{L^{2p}(\Omega)}^{\frac{2p}{2p'}}.$$

Sendo $u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$ uma função contínua definida em um compacto, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|u(s)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.79}$$

Usando (2.79) e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, concluímos

$$I_1 \leq \tilde{C}_2 \|u(s) - u(t)\| \|u(t)\|_{L^{2p}(\Omega)}^{\frac{2p}{2p'}} \tag{2.80}$$

e

$$I_2 \leq \tilde{C}_3 \|u(s) - u(t)\| M^{\frac{2p}{2p'}} \tag{2.81}$$

Assim, de (2.77), (2.78), (2.80) e (2.81), vem

$$\int_\Omega \int_0^1 \lambda \left| \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \right| |f'(u(t) + \theta\lambda(u(s) - u(t)))| |u(s) - u(t)| d\lambda dx \leq C_* \|u(s) - u(t)\|,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \int_0^1 \lambda \left| \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \right| |f'(u(t) + \theta\lambda(u(s) - u(t)))| |u(s) - u(t)| d\lambda dx \to 0, \tag{2.82}$$

quando $s \to t$. Combinando (2.74) e (2.82), obtemos

$$\left|\frac{J_2(s)-J_2(t)}{s-t} - \int_\Omega u_t(t)f(u(t))\right| \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to t.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}J_2(t) = \int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx.$$

Afirmação 2.5.2

$$\frac{d}{dt}J_2(t) = \int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx$$

é contínua em $(0,T)$.

Com efeito, sejam $t, s \in (0,T)$ com $t \neq s$, então

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}J_2(s) - \frac{d}{dt}J_2(t)\right| &\leq \int_\Omega |u_t(s)f(u(s)) - u_t(t)f(u(t))|dx \\ &\leq \int_\Omega |u_t(s)||f(u(s)) - f(u(t))|dx + \int_\Omega |u_t(s) - u_t(t)||f(u(t))|dx.\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |u_t(s)||f(u(s)) - f(u(t))|dx \leq \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}\|f(u(s)) - f(u(t))\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.83}$$

e

$$\int_\Omega |u_t(s) - u_t(t)||f(u(t))|dx \leq C_*\|u_t(s) - u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.84}$$

onde $C_* = \|f(u(t))\|_{L^2(\Omega)}$. Seguindo as ideias dos cálculos feitos anteriormente, mostra-se que

$$\|f(u(s)) - f(u(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u(s) - u(t)\|, \tag{2.85}$$

Para alguma constante $C > 0$. Então, combinando (2.83), (2.84) e (2.85), temos

$$\left|\frac{d}{dt}J_2(s) - \frac{d}{dt}J_2(t)\right| \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to t.$$

Portanto, J_2 é contínua em $(0,T)$. ∎

Lema 2.6 *A aplicação* $J_3 : (0,T) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$J_3(t) = G\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right),$$

é diferenciável em $(0,T)$ *com derivada*

$$\frac{d}{dt}J_3(t) = g\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right)\int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx$$

contínua em $(0,T)$.

Demonstração: Basta notar que G é tal que $G' = g$. Assim, usando o Lema 2.5 e aplicando a Regra da Cadeia[3] obtemos o desejado. ■

Demonstração do Teorema 2.2: Que $J(u(t)) \in C^1((0,T))$, segue dos Lemas 2.4 e 2.6. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(u(t)) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - G\left(\int_\Omega F(u)dx\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{d}{dt}G\left(\int_\Omega F(u)dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-2\int_\Omega u_t(t)\Delta u(t)dx\right) - g\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right)\int_\Omega u_t(t)f(u(t))dx \\
&= \int_\Omega \left[-\Delta u(t) - g\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right)f(u(t))\right]u_t(t)dx \\
&= \int_\Omega -u_t(t)u_t(t)dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}J(u(t)) = -\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx, \quad \forall t \in (0,T).$$

■

De acordo com o Teorema 2.2, temos

$$\int_0^t \int_\Omega |u_t(s)|^2 dxds + J(u(t)) = J(u_0), \quad \forall t \in (0,T). \tag{2.86}$$

O Teorema que iremos apresentar à seguir será muito importante no decorrer desse estudo pois afirma que as soluções globais do problema (P5) são limitadas em $L^2(\Omega)$. Mas antes, vejamos o seguinte.

Observação 2.1 *No decorrer desse estudo, usaremos a notação $u = u(x,t)$. Deixamos claro que não estamos nos referindo a u como uma função nas variáveis x e t mas sim como uma função $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ que, para cada $t \in [0,T]$, associa uma função*

$$\begin{aligned}
u(t) : \Omega &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto u(t)(x) := u(x,t)
\end{aligned}$$

de $H_0^1(\Omega)$.

Observação 2.2 *Seja u é uma solução global de (P5). Uma vez que f e g são positivas, temos*

$$u_t - \Delta u \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

[3] Para mais detalhes, veja Lima [23, Teorema 3., Capítulo 8].

Em particular, fixando $T > 0$,

$$u_t - \Delta u \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T).$$

Definindo $w(t) = -u(t)$, temos

$$w_t - \Delta w = -(u_t - \Delta u) \leq 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T).$$

e $w_0 = -u_0$. Usando Teoria de Regularidade para a equação parabólica[4] *e as regularidades de u_0, f e g, concluímos que w cumpre as hipóteses do Princípio do Máximo*[5]. *Assim,*

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} v(x,t) = \max_{P} v(x,t),$$

onde $P = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$. Note que

$$\max_{P} v(x,t) = v(x_0, t_0) = \begin{cases} 0, & (x_0, t_0) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ v_0(x_0), & (x_0, t_0) \in \overline{\Omega} \times \{0\}. \end{cases}$$

Sendo $v(x_0, t_0) = 0$, temos $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times [0, T]$. Uma vez que $x_0 \in \partial\Omega$ e

$$v(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

tem-se

$$v_0(x_0) = 0.$$

Logo, $v(x_0, t_0) = v_0(x_0)$. Nestas condições,

$$\max_{P} v(x,t) = \max_{\overline{\Omega}} v_0(x).$$

Assim,

$$\max_{\overline{\Omega}} v_0(x) = \max_{P} v(x,t) \geq v(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0, T),$$

ou seja,

$$-\min_{\overline{\Omega}} u_0(x) \geq v(x,t) = -u(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0, T).$$

Portanto,

$$\min u_0 = \min_{\overline{\Omega}} u_0(x) \leq u(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0, T).$$

Tendo em vista que T é arbitrário,

$$\min u_0 \leq u(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0, \infty).$$

Teorema 2.3 *Seja u uma solução global de (P5). Suponha que as Condições (f), (g) e (H) são satisfeitas. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

[4] Para mais detalhes, veja Evans [10].

[5] Este resultado pode ser encontrado em [10] ou Brézis [7].

Demonstração: Suponha que u é uma solução global para (P5), então

$$u_t - \Delta u = g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

Multiplicando esta identidade por u e integrando sobre Ω,

$$\int_\Omega u u_t dx = \int_\Omega u \Delta u dx + \int_\Omega u g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(u)dx.$$

Assim, de acordo com os Lemas 2.7 e C.2, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx &= \int_\Omega u u_t dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + g\left(\int_\Omega F(u)dx\right)\int_\Omega u f(u)dx \\ &= -2J(u) - 2G\left(\int_\Omega F(u)dx\right) + g\left(\int_\Omega F(u)dx\right)\int_\Omega u f(u)dx.\end{aligned}$$

Por simplicidade, defina

$$v = \int_\Omega F(u)dx.$$

Então,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx = -2J(u) - 2G(v) + g(v)\int_\Omega u f(u)dx. \tag{2.87}$$

Combinando a Condição (H) com a Propriedade 2.7, onde $c = \min u_0$, temos

$$\begin{aligned}g(v)\int_\Omega u f(u)dx &\geq g(v)\int_\Omega (aF(u) - K)dx \\ &= avg(v) - K|\Omega|g(v) \\ &\geq abG(v) - K|\Omega|g(v).\end{aligned} \tag{2.88}$$

Assim, de (2.87) e (2.88),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx &\geq -2J(u) - 2G(v) + abG(v) - K|\Omega|g(v) \\ &\geq -2J(u_0) + (ab-2)G(v) - K|\Omega|g(v).\end{aligned} \tag{2.89}$$

Afirmação 2.3.1

$$v = \int_\Omega F(u)dx \to +\infty \quad \textit{quando} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty.$$

Com efeito, a Propriedade 2.8 afirma

$$F(u) \geq \gamma |u|^a - \sigma, \quad u \geq \min u_0 \tag{2.90}$$

onde $\gamma > 0$. Uma vez que $a \geq 2$, temos

$$\gamma|u|^a - \sigma \geq \gamma|u|^2 - (\sigma + \gamma), \quad u \geq \min u_0.$$

Logo,

$$F(u) \geq \gamma|u|^2 - (\sigma + \gamma), \quad u \geq \min u_0.$$

Integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega F(u)dx \geq \int_\Omega (\gamma|u|^2 - (\sigma + \gamma))dx = \gamma \int_\Omega |u|^2 dx - c,$$

onde $c > 0$. Por conseguinte,

$$v = \int_\Omega F(u)dx \to +\infty,$$

quando $\|u\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$. Tendo em vista que $a \geq 2$ segue, do Teorema B.5, que a imersão $L^a(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua. Assim, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u\|_{L^a(\Omega)}.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega |u|^a dx \geq C_1 \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{a}{2}},$$

para alguma constante $C_1 > 0$. De (2.90),

$$\int_\Omega F(u)dx \geq \gamma \int_\Omega |u|^a dx - \sigma|\Omega|.$$

Dessa maneira,

$$\int_\Omega F(u)dx \geq \gamma C_1 \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{a}{2}} - \sigma|\Omega|. \tag{2.91}$$

De acordo com a Condição (H), $g(v) = o(G(v))$. Considere uma constante $M > 0$ suficientemente grande de modo que $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq M$ implica

$$\gamma C_1 \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{a}{2}} - \sigma|\Omega| \geq \frac{\gamma C_1}{2} \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{a}{2}}. \tag{2.92}$$

e

$$\frac{g(v)}{G(v)} \leq \frac{ab-2}{2K|\Omega|},$$

ou seja,

$$-K|\Omega|g(v) \geq -\frac{ab-2}{2}G(v). \tag{2.93}$$

Combinando (2.91) e (2.92), temos

$$C_2 \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{ab}{2}} \leq \left(\int_\Omega F(u) dx \right)^b, \tag{2.94}$$

onde

$$C_2 = \left(\frac{\gamma C_1}{2} \right)^b.$$

Além disso, de acordo com a Propriedade 2.5,

$$G(v) \geq \delta v^b, \quad v > 0, \tag{2.95}$$

onde $\delta > 0$. Desse modo, através de (2.89), (2.93), (2.95) e (2.94), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx &\geq -2J(u_0) + (ab-2)G(v) - K|\Omega| g(v) \\
&\geq -2J(u_0) + (ab-2)G\left(\int_\Omega F(u)dx \right) - \frac{ab-2}{2} G\left(\int_\Omega F(u)dx \right) \\
&= -2J(u_0) + \frac{(ab-2)}{2} G\left(\int_\Omega F(u)dx \right) \\
&\geq -2J(u_0) + \frac{(ab-2)}{2} \delta \left(\int_\Omega F(u)dx \right)^b \\
&= -2J(u_0) + \frac{(ab-2)}{2} \delta C_2 \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{ab}{2}}.
\end{aligned}$$

Defina

$$y(t) = \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(\cdot,t)|^2 dx.$$

Se existir $t > 0$ tal que

$$y(t) > M,$$

onde M é a constante escolhida acima, temos

$$y'(t) \geq c_1 y^k(t) - c_2, \tag{2.96}$$

para

$$c_1 = (ab-2)\delta C_2 > 0, \quad c_2 = 4J(u_0) \quad \text{e} \quad k = \frac{ab}{2} > 1.$$

Suponha que $c_2 > 0$. Vamos mostrar que

$$y(t) \leq \max\left\{ \left(\frac{2c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{k}}, M \right\}, \quad \forall t \geq 0.$$

Com efeito, se esta estimativa não ocorre, existe $t_0 > 0$ tal que

$$y(t_0) > \max\left\{\left(\frac{2c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}}, M\right\}.$$

Em particular, $y(t_0) > M$ e assim

$$y'(t_0) \geq c_1 y^k(t_0) - c_2.$$

Afirmação 2.3.2

$$y'(t) > 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

De fato, se isto não ocorre, existe t_1 de modo que $y'(t_1) \leq 0$. Seja

$$t_* = \min\{t \geq t_0; y'(t) \leq 0\}.$$

Se $y(t_*) \geq M$, então de acordo com (2.96) tem-se

$$c_1 y^k(t_*) - c_2 \leq 0.$$

Por conseguinte

$$y(t_*) \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}}. \tag{2.97}$$

Porém, sendo

$$y(t_0) > \left(\frac{2c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

e

$$y'(t) > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_*),$$

conclui-se

$$y(t) > \left(\frac{2c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad \forall t \in [t_0, t_*).$$

Logo,

$$y(t_*) \geq \left(\frac{2c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}} > \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}},$$

o que é impossível de acordo com (2.97). Suponha agora que $y(t_*) < M$. Uma vez que $y(t_0) > M$ e

$$y'(t) > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_*),$$

devemos ter

$$y(t) > M, \quad \forall t \in [t_0, t_*).$$

Consequentemente $y(t_*) \geq M$. Um absurdo. Logo, a afirmação é verdadeira. Recorde que $y(t_0) > M$. Então, usando a Afirmação 2.3.2, tem-se

$$y(t) > M, \quad \forall t \geq t_0.$$

Dessa maneira

$$y'(t) \geq c_1 y^k(t) - c_2, \quad \forall t \geq t_0,$$

ou ainda,

$$y'(t) y^{-k}(t) \geq c_1 - c_2 y^{-k}(t), \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.98}$$

Novamente, usando a Afirmação 2.3.2, obtemos

$$y(t) > \left(\frac{2c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad \forall t \geq t_0,$$

pois

$$y(t_0) > \left(\frac{2c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Logo,

$$-\frac{c_1}{2} \leq -c_2 y^{-k}(t), \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.99}$$

Substituindo (2.99) em (2.98),

$$y'(t) y^{-k}(t) \geq c_1 - \frac{c_1}{2} = c_3, \quad \forall t \geq t_0.$$

Integrando sobre $[t_0, t]$,

$$-\frac{1}{k-1} y^{1-k}(t) + \frac{1}{k-1} y^{1-k}(t_0) \geq c_3(t - t_0).$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{k-1} y^{1-k}(t) \leq \frac{1}{k-1} y^{1-k}(t_0) - c_3(t - t_0) = c_4 - c_3(t - t_0).$$

Nestas condições,

$$y(t) \geq \left(\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{1}{c_4 - c_3(t - t_0)}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Desse modo, y teria blow up no tempo

$$t_* = \frac{c_4 + c_3 t_0}{c_3}.$$

Um absurdo, pois u é globalmente definida. Dessa forma,

$$y(t) \leq \max\left\{\left(\frac{2c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{k}}, M\right\}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.100}$$

Se $c_2 \leq 0$, então

$$y(t) \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Com efeito, caso contrário, existe $t_0 > 0$ tal que $y(t_0) > M$. Assim,

$$y'(t_0) \geq c_1 y^k(t_0) - c_2.$$

Afirmação 2.3.3

$$y'(t) > 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

De fato, se isto não acontece, existe $t_1 > t_0$ tal que $y'(t_1) \leq 0$. Seja

$$t_* = \min\{t \geq t_0; y'(t) \leq 0\}.$$

Se $y(t_*) \geq M$, então

$$y'(t_*) \geq c_1 y^k(t_*) - c_2 \geq c_1 y^k(t_*),$$

ou seja,

$$y(t_*) \leq 0.$$

Um absurdo, pois $y(t_*) \geq M > 0$. Suponha agora que $y(t_*) < M$. Sendo $y(t_0) > M$ e

$$y'(t) > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_*),$$

obtemos

$$y(t) > M, \quad \forall t \in [t_0, t_*).$$

Assim, $y(t_*) \geq M$. Um absurdo. Logo, a afirmação é verdadeira. Uma vez que $y(t_0) > M$ e

$$y'(t) > 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

segue que

$$y(t) > M, \quad \forall t \geq t_0.$$

Desse modo,

$$y'(t) \geq c_1 y^k(t) - c_2 \geq c_1 y^k(t), \quad \forall t \geq t_0,$$

e assim,

$$y'(t)y^{-k}(t) \geq c_1, \qquad \forall t \geq t_0.$$

Argumentando como acima concluímos que

$$y(t) \leq M, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.101}$$

Por (2.100) e (2.101), existe $C > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

encerrando a demonstração. ■

Encerraremos esta seção apresentando uma técnica muito utilizada para o estudo de blow up a qual é conhecida na literatura como Método da Concavidade. Esta técnica é usada em vários trabalhos como, por exemplo, em Fila [16] e Alves-Tahir [2]. Antes de iniciarmos a apresentação de tal técnica, vejamos um lema auxiliar.

Lema 2.7 *A função $\phi : (0, T) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(t)|^2 dx = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

é diferenciável em $(0, T)$ com

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \int_\Omega u_t(t)u(t)dx.$$

Demonstração: Sejam $s, t \in (0, T)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(s) - \phi(t)}{s - t} &= \frac{1}{2}\frac{\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}}{s - t} \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|u(s)|^2 - |u(t)|^2}{s - t} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{u(s) - u(t)}{s - t}(u(s) + u(t))dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\phi(s) - \phi(t)}{s - t} = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{u(s) - u(t)}{s - t}(u(s) + u(t))dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, encontramos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\phi(s)-\phi(t)}{s-t} - \int_\Omega u_t(t)u(t)dx\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{(u(s)-u(t))}{s-t}(u(s)+u(t))dx - 2\int_\Omega u_t(t)u(t)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{(u(s)-u(t))}{s-t}(u(s)+u(t)) - 2u_t(t)u(t)\right| dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{(u(s)-u(t))}{s-t}(u(s)+u(t)) - u_t(t)(u(s)+u(t))\right| dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(t)(u(s)+u(t)) - 2u_t(t)u(t)|\, dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \|u(s)+u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u(s)+u(t)-2u(t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Tendo em vista que

$$u \in C((0,T), H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega)),$$

temos

$$\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to t$$

e

$$\|u(s)+u(t)-2u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|u(s)-u(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to t.$$

Além disso, como $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ é contínua, existe $B > 0$ tal que

$$\|u(t)\| \leq B, \quad \forall t \in [0,T].$$

Assim, da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{B}, \quad \forall t \in [0,T],$$

para algum $\tilde{B} > 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\phi(s)-\phi(t)}{s-t} - \int_\Omega u_t(t)u(t)dx\right| &\leq \frac{1}{2}\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)} (\|u(s)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}) \\
&+ \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u(s)-u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \tilde{B}\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u(s)-u(t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\left|\frac{\phi(s)-\phi(t)}{s-t} - \int_\Omega u_t(t)u(t)dx\right| \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to t,$$

como queríamos demonstrar. ■

No resultado à seguir, veremos que o item (a) da Condição (H) não é suficiente para que possamos provar tal resultado devido a presença de um termo não local na equação. Para contornar esse problema, vamos supor neste momento que

$$tf(t) \geq aF(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{2.102}$$

onde $a \geq 2$ é a constante dada na Condição (H).

No que segue, T_{max} é o número real tal que $[0, T_{max})$ é o intervalo maximal de definição da solução $u(t)$ do problema (P5).

Teorema 2.4 *Seja $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ com $J(u_0) \leq 0$. Então, $T_{max} < +\infty$.*

Demonstração: Defina a função $H : (0,T) \to \mathbb{R}$ por

$$H(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds.$$

Então,

$$H'(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e, aplicando o Lema 2.7,

$$H''(t) = \int_\Omega u_t(t)u(t)dx.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t(t)u(t)dx &= \int_\Omega \left[\Delta u(t) + g\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right) f(u(t))\right] u(t)dx \\
&= \int_\Omega \Delta u(t)u(t)dx + g\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right)\int_\Omega f(u(t))u(t)dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + g\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right)\int_\Omega f(u(t))u(t)dx.
\end{aligned}$$

De acordo com (2.102),

$$f(u(t))u(t) \geq aF(u(t)).$$

Além disso, segundo a Condição (H) ,

$$g\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right)\int_\Omega F(u(t))dx \geq bG\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t(t)u(t)dx &\geq -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + ag\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right)\int_\Omega F(u(t))dx \\ &\geq -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + abG\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$H''(t) \geq -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + abG\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right). \tag{2.103}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{d}{dt}J(u(t)) = -\int_\Omega |u_t(t)|^2dx.$$

Assim,

$$\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = -\frac{d}{dt}J(u(t)).$$

Integrando sobre o intervalo $[0,t]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds &= -J(u(t)) + J(u(0)) \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + G\left(\int_\Omega F(u(t))dx\right) + J(u_0) \quad (2.104)\end{aligned}$$

Substituindo (2.104) em (2.103),

$$\begin{aligned}H''(t) &\geq -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + ab\left(\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx - J(u_0)\right) \\ &= \left(-1+\frac{ab}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + ab\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds - abJ(u_0) \\ &= \frac{ab-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + ab\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds - abJ(u_0).\end{aligned}$$

Sendo $J(u_0) \leq 0$, temos $-abJ(u_0) \geq 0$. Então,

$$H''(t) \geq ab\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds, \quad \forall t \in [0,T). \tag{2.105}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &= 2\int_\Omega u_t(t)u(t)dx = 2H''(t) \\ &\geq 2\frac{ab-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx \\ &= (ab-2)\|u(t)\|^2.\end{aligned}$$

Como a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{(ab-2)}{C}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_1\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,T). \tag{2.106}$$

Afirmação 2.4.1 *Existe $C_2 > 0$ tal que*

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_2 e^{C_1 t}, \quad \forall t \in [0,T).$$

Com efeito, de (2.106), temos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - C_1\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Então,

$$e^{-C_1 t}\left(\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - C_1\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \geq 0,$$

ou seja,

$$e^{-C_1 t}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - C_1 e^{C_1 t}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Nestas condições,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-C_1 t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \geq 0.$$

Integrando sobre $[t_0, t]$, obtemos

$$e^{-C_1 t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - e^{-C_1 t_0}\|u(t_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0,$$

ou melhor,

$$e^{-C_1 t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq e^{-C_1 t_0}\|u(t_0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Definindo $C_2 = e^{-C_1 t_0}\|u(t_0)\|^2_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_2 e^{C_1 t}, \quad \forall t \in [0,T).$$

Suponha, por contradição, que $T_{max} = +\infty$. Então, de acordo com a Afirmação 2.4.1, concluímos que

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \to \infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{2.107}$$

Multiplicando (2.105) por H,

$$
\begin{aligned}
H(t)H''(t) &\geq abH(t)\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \\
&\geq \frac{ab}{2}\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.
\end{aligned}
$$

Observe ainda que, pela Desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
H'(t) - H'(0) &= \int_0^t H''(s)ds \\
&= \int_0^t \int_\Omega u_t(s)u(s)dxds \\
&\leq \int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\leq \left(\int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}ds\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
(H'(t) - H'(0))^2 \leq \int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.
$$

Logo,

$$
\frac{ab}{2}(H'(t) - H'(0))^2 \leq H(t)H''(t).
$$

Tendo em vista que (2.107) ocorre, concluímos que existem constantes $0 < \gamma_1 < ab - 2$ e $T_1 > 0$ tais que

$$
H(t)H''(t) \geq \frac{2+\gamma_1}{2}(H'(t))^2, \quad \forall t \geq T_1. \tag{2.108}
$$

Afirmação 2.4.2 *A função $l(t) = H^{-\frac{\gamma_1}{2}}(t)$ é côncava para $t \geq T_1$.*

Com efeito, sendo $\phi(t) = -H^{-\frac{\gamma_1}{2}}(t)$, temos

$$
\phi'(t) = \frac{d}{dt}(-H^{-\frac{\gamma_1}{2}}(t)) = \frac{\gamma_1}{2}H^{-\frac{\gamma_1}{2}-1}(t)H'(t).
$$

Assim, por (2.108),

$$
\begin{aligned}
\phi''(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma_1}{2}H^{-\frac{\gamma_1}{2}-1}(t)H'(t)\right) \\
&= \frac{\gamma_1}{2}\left[\left(-\frac{\gamma_1}{2} - 1\right)H^{-\frac{\gamma_1}{2}-2}(t)(H'(t))^2 + H^{-\frac{\gamma_1}{2}-1}(t)H''(t)\right] \\
&= \frac{\gamma_1}{2}H^{-\frac{\gamma_1}{2}-2}(t)\left[\left(\frac{-\gamma_1 - 2}{2}\right)(H'(t))^2 + H(t)H''(t)\right] \\
&\geq \frac{\gamma_1}{2}H^{-\frac{\gamma_1}{2}-2}(t)\left[-\left(\frac{\gamma_1 + 2}{2}\right)(H'(t))^2 + \frac{2+\gamma_1}{2}(H'(t))^2\right] \\
&= 0, \quad \forall t \geq T_1.
\end{aligned}
$$

Dessa maneira, ϕ é uma função convexa em $[T_1, +\infty)$ e, portanto, l é uma função côncava em $[T_1, +\infty)$ [6]. Além disso,

$$\lim_{t\to+\infty} l(t) = 0.$$

Como l é uma função côncava em $[T_1, +\infty)$,

$$t_1, t_2 \in [T_1, +\infty), \quad 0 \le t \le 1 \Rightarrow l(tt_1 + (1-t)t_2) \ge tl(t_1) + (1-t)l(t_2).$$

Em particular, se $t = 1/2$, tem-se

$$l\left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2\right) \ge \frac{1}{2}l(t_1) + \frac{1}{2}l(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in [T_1, +\infty).$$

Logo,

$$\lim_{t_2\to+\infty} l\left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2\right) \ge \lim_{t_2\to+\infty} \left(\frac{1}{2}l(t_1) + \frac{1}{2}l(t_2)\right) = \frac{1}{2}l(t_1),$$

o que resulta em

$$l(t_1) \le 0, \quad \forall t_1 \in [T_1, +\infty).$$

Absurdo. Portanto, $T_{max} < +\infty$. ∎

Corolário 2.4.1 *Suponha que as hipóteses do Teorema 2.3 são satisfeitas. Substitua o item (a) da Condição (H) por (2.102). Então, para cada $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$, com $\phi > 0$, existe um número $\lambda_* > 0$ tal que para $\lambda > \lambda_*$ a solução de (P5) com $u_0 = \lambda\phi$ tem blow up em tempo finito.*

Demonstração: Sendo $\lambda > 0$, temos $u_0 = \lambda\phi \ge 0$. Assim, pelo Princípio do Máximo, $u \ge 0$. De acordo com a Propriedade 2.8,

$$F(\lambda\phi) \ge \gamma|\lambda\phi|^a - \sigma,$$

onde as constantes γ e σ não dependem de λ. Então,

$$\int_\Omega F(\lambda\phi)dx \ge \int_\Omega (\gamma|\lambda\phi|^a - \sigma) = \gamma \int_\Omega |\lambda\phi|^a dx - \sigma|\Omega|.$$

Observe que

$$\gamma \int_\Omega |\lambda\phi|^a dx \to +\infty \quad \text{quando} \quad \lambda \to +\infty.$$

Desse modo, podemos escolher λ_1 suficientemente grande de modo que

$$\sigma|\Omega| \le \frac{\gamma}{2} \int_\Omega |\lambda\phi|^a dx, \quad \forall \lambda \ge \lambda_1.$$

[6] Veja Lima [23, Cap. 9, Corolário 2.].

Nestas condições,

$$\gamma \int_\Omega |\lambda\phi|^a dx - \sigma|\Omega| \geq \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\lambda\phi|^a dx, \quad \forall\lambda \geq \lambda_1.$$

Então, usando a Propriedade 2.5,

$$\begin{aligned} G\left(\int_\Omega F(\lambda\phi)dx\right) &\geq \delta\left(\int_\Omega F(\lambda\phi)dx\right)^b \\ &\geq \delta\left(\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\lambda\phi|^a dx\right)^b, \quad \forall\lambda \geq \lambda_1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(\lambda\phi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\lambda\phi)|^2 dx - G\left(\int_\Omega F(\lambda\phi)dx\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\lambda^2\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx - \delta\left(\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\lambda\phi|^a dx\right)^b, \end{aligned}$$

para $\lambda \geq \lambda_1$. Desse modo,

$$\begin{aligned} J(\lambda\phi) &\leq \frac{1}{2}\lambda^2\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx - \delta\lambda^{ab}\left(\frac{\gamma}{2}\int_\Omega \phi^a dx\right)^b \\ &= \lambda^{ab}\left[\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\lambda^{ab}}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx - \delta\left(\frac{\gamma}{2}\int_\Omega \phi^a dx\right)^b\right], \quad \forall\lambda \geq \lambda_1. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Este raciocínio nos leva a concluir,

$$J(\lambda\phi) \to -\infty \quad \text{quando} \quad \lambda \to +\infty.$$

Considere $\lambda_* > \lambda_1$ de modo que $J(\lambda_*\phi) \leq 0$. Então, aplicando o Teorema 2.4, concluímos o resultado. ∎

2.2.2 O teorema principal

Nesta seção, vamos nos preparar para apresentar o resultado mais importante desse capítulo. Para isso, vamos necessitar de alguns lemas.

Lema 2.8 *Se as condições do Teorema 2.3 são satisfeitas, então*

$$\liminf_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\| < +\infty.$$

Demonstração: Seja

$$v = \int_\Omega F(u)dx,$$

então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2dx + g(v)\int_\Omega uf(u)dx. \tag{2.110}$$

De (2.62),

$$\begin{aligned} -\int_\Omega |\nabla u|^2dx &= -2J(u) - 2G(v) \\ &= -2(J(u)+G(v)) - \varepsilon(J(u)+G(v)) + \varepsilon(J(u)+G(v)) \\ &= -(2+\varepsilon)(J(u)+G(v)) + \varepsilon(J(u)+G(v)) \\ &= -(2+\varepsilon)(J(u)+G(v)) + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx, \end{aligned} \tag{2.111}$$

onde $0 < \varepsilon < ab - 2$. Além disso,

$$-(2+\varepsilon)J(u_0) \leq -(2+\varepsilon)J(u), \tag{2.112}$$

pois $J(u_0) \geq J(u)$. Combinando (2.110), (2.111) e (2.112), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2dx &= -(2+\varepsilon)(J(u)+G(v)) + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx + g(v)\int_\Omega uf(u)dx \\ &\geq -(2+\varepsilon)J(u_0) + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx + g(v)\int_\Omega uf(u)dx - (2+\varepsilon)G(v). \end{aligned}$$

Então, de acordo com (2.89),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2dx &\geq -(2+\varepsilon)J(u_0) + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx + abG(v) - Kg(v) - (2+\varepsilon)G(v) \\ &= -(2+\varepsilon)J(u_0) + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx + (ab-2-\varepsilon)G(v) - Kg(v) \\ &= -(2+\varepsilon)J(u_0) + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx + G(v)\left((ab-2-\varepsilon) - K\frac{g(v)}{G(v)}\right). \end{aligned}$$

Suponha, por contradição, que

$$\|u(\cdot,t)\| \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty,$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2dx \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{2.113}$$

Então, usando novamente (2.62),

$$G\left(\int_\Omega F(u(\cdot,t))dx\right) + J(u_0) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2dx.$$

Assim, de acordo com (2.113),

$$G\left(\int_\Omega F(u(\cdot,t))dx\right) \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{2.114}$$

Sendo G uma função crescente,

$$v = \int_\Omega F(u(\cdot,t))dx \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Por outro lado, a Condição (H) nos diz que

$$\frac{Kg(v)}{G(v)} \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{2.115}$$

Então, de (2.113), (2.114) e (2.115), tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(\cdot,t)|^2 dx \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Desse modo, aplicando o Lema A.1, concluímos que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Um absurdo pois, de acordo com o Teorema 2.3, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C, \quad \forall t \ge 0.$$

■

Para dar continuidade ao nosso estudo, vamos considerar o conjunto

$$\omega(u_0) = \{v \in H_0^1(\Omega); \text{existe } (t_n),\ t_n \to +\infty,\ \text{tal que } u(t_n) \to v \text{ em } H_0^1(\Omega)\}$$

o qual é conhecido na literatura como o conjunto ω-limite de u_0. Vejamos também o seguinte conceito, o qual será muito importante daqui em diante.

Definição 2.1 *Diz-se que w é um ponto de equilíbrio para o problema*

$$\frac{du}{dt} - \Delta u = g\left(\int_\Omega F(u)dx\right) f(u), \quad t > 0, \tag{2.116}$$

quando $u(t) = w$ é tal que $w \in D(-\Delta)$ e

$$-\Delta w = g\left(\int_\Omega F(w)dx\right) f(w).$$

Lema 2.9 *Seja u uma solução global de (P5). Suponha que f e g satisfazem as Condições (f), (f_1), (f_2) e (g). Se*

$$\liminf_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\| < +\infty \quad e \quad \limsup_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\| = +\infty,$$

então para cada B suficientemente grande existe $w \in \omega(u_0)$ com $\|w\| = B$. Além disso, w é um ponto de equilíbrio.

Demonstração: A demonstração desse lema será feita em duas etapas. Durante o processo, vamos seguir de perto os argumentos usados por Fila [16].

Afirmação 2.9.1 *Para cada B suficientemente grande existe $w \in \omega(u_0)$ com $\|w\|_{H^1(\Omega)} = B$.*

Com efeito, suponha que

$$\liminf_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\| = k.$$

De acordo com as hipóteses, existem sequências (t_n) e (s_n) com $t_n, s_n \to +\infty$ tais que

(i) $\|u(t_n)\| = B, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

(ii) $\|u(t)\| \leq B, \quad \forall t \in [t_{2n}, t_{2n+1}];$

(iii) $s_n \in (t_{2n}, t_{2n+1})$ com

$$\|u(s_n)\| = k + 1.$$

Veja a Figura (2.1). Recorde que, para $t > s \geq 0$, temos

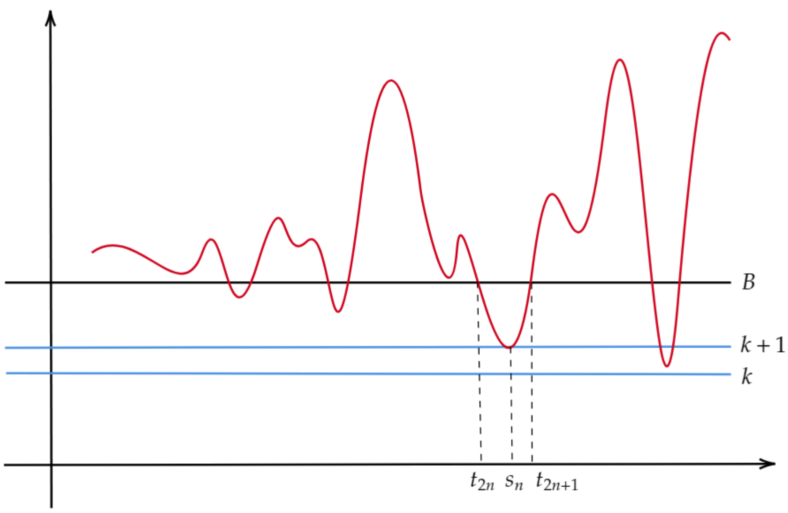

Figura 2.1: Definição das sequências (t_n) e (s_n).

$$u(t) = e^{-A(t-s)}u(s) + \int_s^t e^{-A(t-\tau)}\varphi(u(\tau))d\tau. \tag{2.117}$$

Então, considerando $t = t_{2n+1}$ e $s = s_n$ em (2.117), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t_{2n+1})\| &= \|u(t_{2n+1})\|_{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|e^{-A(t_{2n+1}-s_n)}u(s_n)\|_{\frac{1}{2}} + \int_{s_n}^{t_{2n+1}} \|e^{-A(t_{2n+1}-\tau)}\varphi(u(\tau))\|_{\frac{1}{2}}d\tau \\
&= \|e^{-A(t_{2n+1}-s_n)}A^{\frac{1}{2}}u(s_n)\|_{L^2(\Omega)} + \int_{s_n}^{t_{2n+1}} \|A^{\frac{1}{2}}e^{-A(t_{2n+1}-\tau)}\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}d\tau.
\end{aligned}$$

De acordo com o Lema 1.10, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|e^{-A(t_{2n+1}-s_n)}A^{\frac{1}{2}}u(s_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|A^{\frac{1}{2}}u(s_n)\|_{L^2(\Omega)} = C\|u(s_n)\|_{\frac{1}{2}} = C\|u(s_n)\|.$$

Usando o Teorema 1.6,

$$\|A^{\frac{1}{2}}e^{-A(t_{2n+1}-\tau)}\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)} \leq M_{\frac{1}{2}}(t_{2n+1}-\tau)^{-\frac{1}{2}}\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $M_{\frac{1}{2}} > 0$ é uma constante. Assim,

$$\begin{aligned}
\|u(t_{2n+1})\| &\leq C\|u(s_n)\| + \int_{s_n}^{t_{2n+1}} M_{\frac{1}{2}}(t_{2n+1}-\tau)^{-\frac{1}{2}}\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}d\tau \\
&\leq C_*\|u(s_n)\| + C_*\int_{s_n}^{t_{2n+1}} (t_{2n+1}-\tau)^{-\frac{1}{2}}\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}d\tau,
\end{aligned}$$

onde $C_* = \max\left\{C, M_{\frac{1}{2}}\right\}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| g\left(\int_\Omega F(u(\tau))dx\right) f(u(\tau))\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= g\left(\int_\Omega F(u(\tau))dx\right) \|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Para $N = 2$ segue, das Propriedades 2.1 e 2.3, que

$$|f(t)| \leq \tilde{C}_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.119}$$

e

$$|F(t)| \leq C_{\beta_1}(e^{\beta_1 t^2} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.120}$$

respectivamente, onde $\tilde{C}_\beta, C_{\beta_1} > 0$ são constantes. Da estimativa dada em (2.119), obtemos

$$\begin{aligned}
\|f(u(\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f(u(\tau))|^2dx \leq \tilde{C}_\beta^{\,2}\int_\Omega e^{2\beta|u(\tau)|^2}dx \\
&= \tilde{C}_\beta^{\,2}\int_\Omega e^{2\beta\left(\frac{|u(\tau)|}{\|u(\tau)\|}\right)^2\|u(\tau)\|^2}dx \leq \tilde{C}_\beta^{\,2}\sup_{\|w\|\leq 1}\int_\Omega e^{2\beta B^2|w|^2}dx.
\end{aligned}$$

Escolhendo β de modo que $\beta B^2 < \pi$ tem-se, pela Desigualdade de Trundiger-Moser, que

$$\sup_{\|w\|\leq 1} \int_\Omega e^{2\beta R^2 |w|^2} dx < C_2,$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Logo, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3. \tag{2.121}$$

Aplicando em (2.120) um raciocínio inteiramente análogo ao que foi usado em (2.119), obtemos

$$\int_\Omega |F(u(\tau))| dx \leq C_4,$$

para alguma constante $C_4 > 0$. Além disso, como $u(t) \geq \min u_0$ para $t > 0$, temos

$$F(u(t)) \geq F(\min u_0), \quad \forall t > 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega F(u(t)) dx \geq F(\min u_0)|\Omega|, \quad \forall t > 0.$$

Tendo em vista que g é contínua no compacto $[F(\min u_0)|\Omega|, C_4]$, concluímos

$$g\left(\int_\Omega F(u(\tau)) dx\right) \leq C_5, \tag{2.122}$$

onde $C_5 > 0$ é uma constante. Assim, de (2.118), (2.121) e (2.122),

$$\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)} \leq C_6, \tag{2.123}$$

para alguma constante $C_6 > 0$.

Se $N \geq 3$. Então, de acordo com as Propriedades 2.2 e 2.3, temos

$$|f(t)| \leq C_1(|t|^q + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.124}$$

e

$$|F(t)| \leq C_2(|t|^{q+1} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.125}$$

onde $C_1, C_2 > 0$ são constantes. De (2.124),

$$\begin{aligned} \|f(u(\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f(u(\tau))|^2 dx \leq C_1 \int_\Omega (|u(\tau)|^q + 1)^2 dx \\ &\leq C_1 \int_\Omega 4(|u(\tau)|^{2q} + 1) dx = 4C_1 \int_\Omega |u(\tau)|^{2q} dx + 4C_1|\Omega| \\ &= 4C_1 \|u(\tau)\|^{2q}_{L^{2q}(\Omega)} dx + 4C_1|\Omega|. \end{aligned}$$

Desde que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2q}(\Omega)$ é contínua, existe uma constante $C_7 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{2q}(\Omega)} \leq C_7\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa maneira,

$$\|f(u(\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 4C_1C_7^{2q}\|u(\tau)\|^{2q}dx + 4C_1|\Omega|.$$

Sendo $\|u(\tau)\| \leq B$ para $\tau \in [t_{2n}, t_{2n+1}]$,

$$\|f(u(\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_8, \tag{2.126}$$

para alguma constante $C_8 > 0$. O mesmo raciocínio pode ser aplicado em (2.125). Assim, existe uma constante $C_9 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |F(u(\tau))|dx \leq C_9.$$

Além disso,

$$g\left(\int_\Omega F(u(\tau))dx\right) \leq C_{10}, \tag{2.127}$$

onde $C_{10} > 0$ é uma constante. Combinando (2.118), (2.126) e (2.127),

$$\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{11}, \tag{2.128}$$

para alguma constante $C_{11} > 0$. Considere $B > C_*(k+1)$. Então, sendo

$$\|u(t_{2n+1})\| = B \quad \text{e} \quad \|u(s_n)\| = k+1,$$

podemos concluir que existe $\delta > 0$ satisfazendo $t_{2n+1} - t_{2n} \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, considerando $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ arbitrário, segue de (2.117) que

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_\beta &\leq \|e^{-A(t-s)}u(s)\|_\beta + \int_s^t \|e^{-A(t-\tau)}\varphi(u(\tau))\|_\beta d\tau \\
&\leq \|A^\beta e^{-A(t-s)}u(s)\|_{L^2(\Omega)} + M_\beta \int_s^t \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t-\tau)^\beta} d\tau \\
&= \|A^{\beta-\frac{1}{2}}e^{-A(t-s)}A^{\frac{1}{2}}u(s)\|_{L^2(\Omega)} + M_\beta \int_s^t \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t-\tau)^\beta} d\tau \\
&\leq \frac{M_\beta}{(t-s)^{\beta-\frac{1}{2}}}\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\|_{L^2(\Omega)} + M_\beta \int_s^t \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t-\tau)^\beta} d\tau \\
&= \frac{M_\beta}{(t-s)^{\beta-\frac{1}{2}}}\|u(s)\|_{\frac{1}{2}} + M_\beta \int_s^t \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t-\tau)^\beta} d\tau \\
&= \frac{M_\beta}{(t-s)^{\beta-\frac{1}{2}}}\|u(s)\| + M_\beta \int_s^t \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t-\tau)^\beta} d\tau.
\end{aligned}$$

Escolhendo $t = t_{2n+1}$ e $s = t_{2n+1} - \delta$, temos

$$\begin{aligned}
\|u(t_{2n+1})\|_\beta &\leq \frac{M_\beta}{(t_{2n+1} - (t_{2n+1} - \delta))^\beta}\|u(t_{2n+1} - \delta)\|_{L^2(\Omega)} + M_\beta \int_{t_{2n+1}-\delta}^{t_{2n+1}} \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n+1} - \tau)^\beta} d\tau \\
&\leq M_\beta \delta^{-\beta}\|u(t_{2n+1} - \delta)\| + M_\beta \int_{t_{2n+1}-\delta}^{t_{2n+1}} \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n+1} - \tau)^\beta} d\tau \\
&\leq M_\beta \delta^{-\beta} B + M_\beta \int_{t_{2n+1}-\delta}^{t_{2n+1}} \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n+1} - \tau)^\beta} d\tau. \qquad (2.129)
\end{aligned}$$

Seja $C_{12} = \max\{C_6, C_{11}\}$ onde são as constantes dadas em (2.123) e (2.128), respectivamente. Então,

$$\int_{t_{2n+1}-\delta}^{t_{2n+1}} \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n+1} - \tau)^\beta} d\tau \leq \int_{t_{2n+1}-\delta}^{t_{2n+1}} \frac{C_{12}}{(t_{2n+1} - \tau)^\beta} d\tau.$$

Fazendo a mudança de variável $r = t_{2n+1} - \tau$,

$$\int_{t_{2n+1}-\delta}^{t_{2n+1}} (t_{2n+1} - \tau)^{-\beta} d\tau = \int_0^\delta r^{-\beta} dr = \frac{1}{1-\beta}\delta^{1-\beta}.$$

Assim,

$$\int_{t_{2n+1}-\delta}^{t_{2n+1}} \frac{\|\varphi(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n+1} - \tau)^\beta} d\tau \leq C_{12}\frac{1}{1-\beta}\delta^{1-\beta}. \qquad (2.130)$$

Combinando (2.129) e (2.130), obtemos

$$\|u(t_{2n+1})\|_\beta \leq M_\beta \delta^{-\beta} B + M_\beta C_{12}\frac{1}{1-\beta}\delta^{1-\beta},$$

ou seja, a sequência (u_n) definida por $u_n = u(t_{2n+1})$ é limitada em X^β. Uma vez que a imersão $X^\beta \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ é compacta (para mais detalhes, consulte Bebernes-Lacey [4] ou Henry [18]), existe uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) que converge em $H_0^1(\Omega)$. Ou melhor, existem $(t_j) \subset (t_n)$ e $w \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u(t_j) = u_{n_j} \to w \quad \text{quando} \quad t_j \to +\infty.$$

Portanto, $w \in \omega(u_0)$ com $\|w\| = B$.

Afirmação 2.9.2 *w é um ponto de equilíbrio.*

Com efeito, considere a sequência (t_j) com $t_j \to +\infty$ encontrada na afirmação anterior. Então

$$u(t_j, u_0) \to w \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \qquad (2.131)$$

Defina

$$U_j(s) = u(t_j + s, u_0), \quad s \in (0, \tau).$$

Desde que

$$u(t_j + s, u_0) - u(t_j, u_0) = \int_{t_j}^{t_j+s} \frac{d}{dt} u(t, u_0) dt,$$

tem-se

$$\begin{aligned} |u(t_j + s, u_0) - u(t_j, u_0)| &= \left| \int_{t_j}^{t_j+s} \frac{d}{dt} u(t, u_0) dt \right| \leq \int_{t_j}^{t_j+s} \left| \frac{d}{dt} u(t, u_0) \right| dt \\ &\leq \int_{t_j}^{t_j+\tau} \left| \frac{d}{dt} u(t, u_0) \right| dt. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} |u(t_j + s, u_0) - u(t_j, u_0)|^2 &\leq \left(\int_{t_j}^{t_j+\tau} \left| \frac{d}{dt} u(t, u_0) \right| dt \right)^2 \\ &\leq \left[\left(\int_{t_j}^{t_j+\tau} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_j}^{t_j+\tau} \left| \frac{d}{dt} u(t, u_0) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= \tau \int_{t_j}^{t_j+\tau} |u_t(t, u_0)|^2 \, dt \\ &\leq \tau \int_{t_j}^{+\infty} |u_t(t, u_0)|^2 \, dt \end{aligned} \tag{2.132}$$

Logo,

$$\int_\Omega |u(t_j + s, u_0) - u(t_j, u_0)|^2 dx \leq \tau \int_\Omega \int_{t_j}^{+\infty} |u_t(t, u_0)|^2 \, dt dx. \tag{2.133}$$

Recorde que

$$\int_0^t \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx dt = J(u_0) - J(u(t))$$

e

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - G\left(\int_\Omega F(u(t)) dx \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_j} \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx dt &= J(u_0) - J(u(t_j)) \\ &= J(u_0) - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(t_j)|^2 dx + G\left(\int_\Omega F(u(t_j)) dx \right) \\ &\leq J(u_0) + G\left(\int_\Omega F(u(t_j)) dx \right). \end{aligned} \tag{2.134}$$

De modo inteiramente análogo ao que foi feito na afirmação anterior, podemos verificar que

$$\int_\Omega F(u(t_j))dx \leq C,$$

pois

$$\|u(t_j)\| = B, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ainda, com base em argumentos vistos na afirmação anterior, tem-se

$$\int_\Omega F(u(t))dx \geq F(\min u_0)|\Omega|, \quad \forall t > 0.$$

Dessa forma, pela continuidade de G em $[F(\min u_0)|\Omega|, C]$, concluímos

$$G\left(\int_\Omega F(u(t_j))dx\right) \leq C_2,$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Fazendo $j \to +\infty$ em (2.134), obtemos

$$\int_0^{+\infty}\int_\Omega |u_t(t)|^2 dxdt \leq C_2.$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega \int_{t_j}^{+\infty} |u_t(t,u_0)|^2 \, dtdx \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to +\infty.$$

Logo,

$$\|u(t_j+s,u_0) - u(t_j,u_0)\|_{L^2(\Omega\times(0,\tau))} \to 0. \tag{2.135}$$

Afirmação 2.9.3

$$u(t_j,u_0) \to w \quad em \quad L^2(\Omega\times(0,\tau)).$$

Com efeito, desde que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua, existe $C_3 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, de acordo com (2.131),

$$u(t_j,u_0) \to w \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Desse modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_j(t_j,u_0) - w\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}}, \quad \forall j \geq j_0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u_j(t_j,u_0)-w\|^2_{L^2(\Omega\times(0,\tau))} &= \int_0^\tau\int_\Omega |u_j(t_j,u_0)-w|^2 dxds \\ &= \int_0^\tau \|u_j(t_j,u_0)-w\|^2_{L^2(\Omega)}ds \\ &\leq \int_0^\tau \frac{\varepsilon^2}{\tau}ds = \varepsilon^2, \quad \forall j\geq j_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$u(t_j,u_0)\to w \quad \text{em} \quad L^2(\Omega\times(0,\tau)).$$

Usando o conteúdo da Afirmação 2.9.3 juntamente com (2.135), concluímos

$$U_j(x,s)\to w \quad \text{em} \quad L^2(\Omega\times(0,\tau)).$$

Afirmação 2.9.4 *A solução u do problema (P5) satisfaz*

$$\int_\Omega u(T)v(T)dx - \int_{Q_T}[uv_t+u\Delta v+\varphi(u)v]\,dx\,dt = \int_\Omega u(0)v(0)dx, \tag{2.136}$$

para toda função $v\in C^2(\overline{\Omega}\times(0,T))$ com

$$v(x,t)=0 \quad \textit{em} \quad \partial\Omega\times(0,T),$$

onde $Q_T=\Omega\times(0,T)$ e

$$\varphi(u)=g\left(\int_\Omega F(u)dx\right)f(u).$$

Com efeito, sabemos que

$$u_t+\Delta u=\varphi(u) \quad \text{q.s. em} \quad [0,+\infty)\times\Omega. \tag{2.137}$$

Seja $v\in C^2(\overline{\Omega}\times(0,T))$ tal que

$$v=0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T).$$

Então, multiplicando (2.137) por v, temos

$$vu_t+v\Delta u=v\varphi(u),$$

onde t está fixado. Integrando ambos os membros da igualdade anterior com respeito a Ω, ficamos com

$$\int_\Omega vu_tdx+\int_\Omega v\Delta udx=\int_\Omega v\varphi(u)dx.$$

Assim, aplicando a Proposição C.2, obtemos

$$\int_\Omega vu_t dx + \int_\Omega u\Delta v dx = \int_\Omega v\varphi(u)dx.$$

Agora, integrando sobre $(0,T)$,

$$\int_0^T \left(\int_\Omega vu_t dx\right)dt + \int_0^T \left(\int_\Omega u\Delta v dx\right)dt = \int_0^T \left(\int_\Omega v\varphi(u)dx\right)dt. \tag{2.138}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(\int_\Omega \frac{d}{dt}(uv)dx\right)dt &= \int_0^T \left(\int_\Omega (u_t v + uv_t)dx\right)dt \\ &= \int_0^T \left(\int_\Omega u_t v dx\right)dt + \int_0^T \left(\int_\Omega uv_t dx\right)dt. \end{aligned}\tag{2.139}$$

Aplicando o Teorema de Fubini (veja o Teorema B.10) e o Teorema Fundamental do Cálculo (veja o Teorema D.4),

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(\int_\Omega \frac{d}{dt}(uv)dx\right)dt &= \int_\Omega \left(\int_0^T \frac{d}{dt}(uv)dt\right)dx \\ &= \int_\Omega [u(T)v(T) - u(0)v(0)]dx \\ &= \int_\Omega u(T)v(T)dx - \int_\Omega u(0)v(0)dx. \end{aligned}\tag{2.140}$$

Desse modo, de acordo com (2.139) e (2.140),

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(\int_\Omega u_t v dx\right)dt &= \int_0^T \left(\int_\Omega \frac{d}{dt}(uv)dx\right)dt - \int_0^T \left(\int_\Omega uv_t dx\right)dt \\ &= \int_\Omega u(T)v(T)dx - \int_\Omega u(0)v(0)dx - \int_0^T \left(\int_\Omega uv_t dx\right)dt. \end{aligned}\tag{2.141}$$

Combinando (2.138) e (2.141),

$$\int_\Omega u(T)v(T)dx - \int_{Q_T} [uv_t + u\Delta v + \varphi(u)v]\, dx\, dt = \int_\Omega u(0)v(0)dx,$$

demonstrando a afirmação.

Uma vez que a imersão $L^2(\Omega\times(0,\tau)) \hookrightarrow L^1(\Omega\times(0,\tau))$ é contínua, tem-se

$$U_j \to w \quad \text{em} \quad L^1(\Omega\times(0,\tau)).$$

Sejam $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\xi = 0$ em $\partial\Omega$ e $\rho \in C_0^2(0,\tau)$, $\rho \geq 0$ e

$$\int_0^\tau \rho(s)ds = 1.$$

Definindo
$$v(x,t) = \rho(t-t_j)\xi(x)$$
e usando a identidade (2.136) com $T = t_j + \tau$, vem
$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_j}^{t_j+\tau}\int_\Omega [u\rho'(t-t_j)\xi + u\rho(t-t_j)\Delta\xi + \varphi(u)\rho(t-t_j)\xi]\;dx\;dt \\
&= \int_{t_j}^{t_j+\tau}\int_\Omega [uv_t + v\Delta v + \varphi(u)v]\;dx\;dt \qquad (2.142)
\end{aligned}$$
pois, desde que $\rho \in C_0^2(0,\tau)$,
$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(t_j+\tau)v(t_j+\tau)dx &= \int_\Omega u(t_j+\tau)\rho(\tau)\xi(x)dx \\
&= \rho(\tau)\int_\Omega u(t_j+\tau)\xi(x)dx = 0 \qquad (2.143)
\end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(0)v(x,t_j)dx &= \int_\Omega u(0)\rho(0)\xi(x)dx \\
&= \rho(0)\int_\Omega u(0)\xi(x)dx = 0 \qquad (2.144)
\end{aligned}$$
Fazendo a mudança de variável $s = t - t_j$, temos
$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\tau\int_\Omega [\rho'(s)U_j\xi + \rho U_j\Delta\xi + \varphi(U_j)\rho\xi]\;dx\;ds \\
&= \int_0^\tau\int_\Omega [\rho'(s)u(t_j+s)\xi + \rho u(t_j+s)\Delta\xi + \varphi(u(t_j+s))\rho\xi]\;dx\;ds. \qquad (2.145)
\end{aligned}$$
Uma vez que
$$\int_0^\tau\int_\Omega \rho'(s)U_j\xi\;dx\;ds \to \int_0^\tau\int_\Omega \rho'(s)w\xi\;dx\;ds$$
e
$$\int_0^\tau\int_\Omega [\rho U_j\Delta\xi + \varphi(U_j)\rho\xi]\;dx\;ds \to \int_0^\tau\int_\Omega \rho w\Delta\xi + \varphi(w)\rho\xi\;dx\;ds,$$
tem-se
$$\int_0^\tau\int_\Omega \rho'(s)w\xi\;dx\;ds + \int_0^\tau\int_\Omega [\rho w\Delta\xi + \varphi(w)\rho\xi]\;dx\;ds = 0.$$
Ademais,
$$\int_0^\tau\int_\Omega \rho'(s)w\xi\;dx\;ds = \int_\Omega w\xi dx\int_0^\tau \rho'(s)ds = (\rho(\tau)-\rho(0))\int_\Omega w\xi dx = 0, \quad \rho \in C_0^2(0,\tau).$$
Logo,
$$\int_0^\tau\int_\Omega [\rho w\Delta\xi + \varphi(w)\rho\xi]dxds = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^{\tau} \rho(s)ds \int_{\Omega} [w\Delta\xi + \varphi(w)\xi]dx = 0.$$

Sendo

$$\int_0^{\tau} \rho(s)ds = 1,$$

conclui-se

$$\int_{\Omega} [w\Delta\xi + \varphi(w)\xi]dx = 0.$$

Assim, aplicando a Proposição C.2, ficamos com

$$-\int_{\Omega} \nabla w \nabla \xi dx + \int_{\Omega} \varphi(w)\xi dx = 0, \quad \forall \xi \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

Observe que $C_0^{\infty}(\overline{\Omega}) \subset C_0^2(\overline{\Omega}) \subset H_0^1(\Omega)$. Como $\overline{C_0^{\infty}(\overline{\Omega})} = H_0^1(\Omega)$, temos

$$\overline{C_0^2(\overline{\Omega})} = H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma, dado $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência $(\xi_n) \subset C_0^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\xi_n \to v \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Tendo em vista que

$$-\int_{\Omega} \nabla w \nabla \xi_n dx + \int_{\Omega} \varphi(w)\xi_n dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

concluímos

$$-\int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx + \int_{\Omega} \varphi(w) v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, $w \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema

$$-\Delta u = g\left(\int_{\Omega} F(u)dx\right) f(u).$$

Por Teoria de Regularidade para o problema de Dirichlet [7], $w \in H^2(\Omega)$. Dessa maneira, $w \in D(-\Delta)$ e, portanto, w é um ponto de equilíbrio. ■

O próximo resultado será fundamental para a obtenção das limitações da solução global u de (P5).

Lema 2.10 *Suponha que as hipóteses do Teorema 2.3 são satisfeitas. Se $\omega(u_0) \neq \emptyset$ e $w \in \omega(u_0)$, então existe uma constante $L = L(u_0) > 0$ tal que $\|w\| \leq L$.*

[7] Veja o Teorema 2.1.

Demonstração: A identidade dada em (2.86) implica que

$$J(w) \leq J(u_0). \tag{2.146}$$

Sendo w um ponto de equilíbrio, temos

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = g(W) \int_\Omega w f(w) dx, \tag{2.147}$$

onde

$$W = \int_\Omega F(w) dx.$$

Escolhendo $0 < \varepsilon < ab - 2$ e usando (2.147), obtemos

$$\begin{aligned}
(2+\varepsilon)J(w) &= (2+\varepsilon)\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - G(W)\right) \\
&= \frac{2+\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - (2+\varepsilon)G(W) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_\Omega |\nabla w|^2 dx - (2+\varepsilon)G(W) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + g(W)\int_\Omega w f(w) dx - (2+\varepsilon)G(W).
\end{aligned}$$

Então, por (2.88),

$$\begin{aligned}
(2+\varepsilon)J(w) &\geq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + abG(W) - Kg(W) - (2+\varepsilon)G(W) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + (ab - 2 - \varepsilon)G(W) - Kg(W),
\end{aligned} \tag{2.148}$$

onde K depende de f e $\min u_0$. Sabemos que

$$u \geq \min u_0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty).$$

Uma vez que F é crescente,

$$F(u) \geq F(\min u_0), \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty).$$

Então,

$$\int_\Omega F(u) dx \geq \int_\Omega F(\min u_0) dx = F(\min u_0)|\Omega|.$$

Afirmação 2.10.1 *A função dada por*

$$\phi(s) = (ab - 2 - \varepsilon)G(s) - Kg(s), \quad \forall s \geq F(\min u_0)|\Omega|$$

é limitada inferiormente.

De fato, de acordo com a Condição (H), existe $s_0 \geq F(\min u_0)|\Omega|$ tal que

$$\frac{Kg(s)}{G(s)} \leq \frac{ab-2-\varepsilon}{2}, \quad \text{se} \quad s > s_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi(s) &= (ab-2-\varepsilon)G(s) - Kg(s) \\ &= G(s)\left((ab-2-\varepsilon) - \frac{Kg(s)}{G(s)}\right) \\ &\geq G(s)\left((ab-2-\varepsilon) - \frac{ab-2-\varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{(ab-2-\varepsilon)}{2}G(s), \quad \forall s \geq s_0. \end{aligned}$$

Desde que G é crescente,

$$\phi(s) \geq \frac{(ab-2-\varepsilon)}{2}G(s_0), \quad \forall s > s_0.$$

Por outro lado, sendo ϕ uma função contínua em $[\min u_0, s_0]$, existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\phi(s) \geq -B, \quad \forall s \in [\min u_0, s_0].$$

Nestas condições, concluímos que existe uma constante $\tilde{B} > 0$ tal que

$$\phi(s) \geq -\tilde{B}, \quad \forall s \geq \min u_0.$$

De (2.146), (2.148) e da Afirmação 2.10.1, tem-se

$$\begin{aligned} (2+\varepsilon)J(u_0) &\geq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + (ab-2-\varepsilon)G(W) - Kg(W) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \tilde{B}. \end{aligned}$$

Desse modo, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \leq M$$

e, portanto,

$$\|w\| \leq L,$$

para alguma constante $L > 0$. ■

Para encerrar esta seção, vamos demonstrar o teorema principal desse estudo. Este resultado é importante pelo fato de deixar explicito algumas situações onde a solução global é limitada. A sua demonstração não é sofisticada devido todas as considerações anteriores.

Teorema 2.5 *Se f e g satisfazem as Condições* (f), (f_1), (f_2), (g) *e* (H). *Então,*

(i) $\sup_{t>0}\|u(\cdot,t)\| < +\infty$,

(ii) $\sup_{t>\tau}\|u(t,u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty$, *para qualquer* $\tau > 0$.

para cada solução clássica global u.

Demonstração: (i) Suponha que u é uma solução global com

$$\limsup_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\| = +\infty.$$

Recorde, do Lema 2.8, que

$$\liminf_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\| < +\infty.$$

Então, de acordo com o Lema 2.9, para cada B suficientemente grande existe $w \in \omega(u_0)$ tal que $\|w\| = B$. Um absurdo pois, segundo o Lema 2.10, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|w\| \le L, \quad \forall w \in \omega(u_0).$$

Portanto,

$$\sup_{t>0}\|u(\cdot,t)\| < +\infty.$$

(ii) De acordo com Fila [16] e Bebernes-Lacey [4], a imersão $X^\beta \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ é compacta quando $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|u\|_\beta, \quad \forall u \in X^\beta. \tag{2.149}$$

Procedendo como anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t,u_0)\|_\beta &\le \|e^{-At}u_0\|_\beta + \int_0^t \|e^{-A(t-s)}f(u(s,u_0))\|_\beta ds \\
&\le Mt^{-(\beta-\frac{1}{2})}\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_{L^2(\Omega)} + M\int_0^t (t-s)^{-\beta}e^{-\beta(t-s)}\|f(u(s,u_0))\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\le M\tau^{-(\beta-\frac{1}{2})}\|u_0\| + M\int_0^t (t-s)^{-\beta}e^{-\beta(t-s)}\|f(u(s,u_0))\|_{L^2(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

Usando as Condições (f_1) e (f_2) de acordo com a dimensão e o item (i), mostrar-se

$$\|f(u(s,u_0))\|_{L^2(\Omega)} \le C_2,$$

onde $C_2 > 0$ é uma constante. Assim,

$$\|u(t,u_0)\|_\beta \le M\tau^{-(\beta-\frac{1}{2})}\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_{L^2(\Omega)} + MC_2\int_0^t (t-s)^{-\beta}e^{-\beta(t-s)}ds,$$

onde $\tau > 0$. Considerando a mudança de variável $r = t - s$, temos

$$\int_0^t (t-s)^{-\beta} e^{-\beta(t-s)} ds = \int_0^t r^{-\beta} e^{-\beta r} dr.$$

Afirmação 2.5.1 *Existe uma constante $C_3 > 0$ tal que*

$$\int_0^{+\infty} r^{-\beta} e^{-\beta r} dr \leq C_3.$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^{-\beta} e^{-\beta r} dr &= \int_0^1 r^{-\beta} e^{-\beta r} dr + \int_1^{+\infty} r^{-\beta} e^{-\beta r} dr \\
&\leq \int_0^1 r^{-\beta} dr + \int_1^{+\infty} e^{-\beta r} dr \\
&= \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{\beta} e^{-\beta}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\|u(t,u_0)\|_\beta &\leq M\tau^{-(\beta-\frac{1}{2})}\|u_0\| + MC_2 \int_0^{+\infty} r^{-\beta} e^{-\beta r} dr \\
&\leq M\tau^{-(\beta-\frac{1}{2})}\|u_0\| + MC_2 \left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{\beta} e^{-\beta} \right).
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Combinando (2.149) e (2.150) tem-se o desejado. ■

Capítulo 3

Existência de solução para uma classe de problemas semilineares

Neste capítulo, vamos usar o Método Dinâmico para estabelecer a existência de solução não trivial para uma classe de problema do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P7}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as seguintes condições.

CONDIÇÃO (f_1)**:** (i) DIMENSÃO $N = 2$. As funções f e f' tem um crescimento subcrítico exponencial no infinito, isto é,

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{f(t)}{e^{\beta |t|^2}} = \lim_{|t| \to +\infty} \frac{f'(t)}{e^{\beta |t|^2}} = 0, \quad \forall \beta > 0.$$

(ii) DIMENSÃO $N \geq 3$. Existem $C_1 > 0$ e $p \in (1, N/(N-2))$ tais que

$$|f'(t)| \leq C_1(1 + |t|^{p-1}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

CONDIÇÃO (f_2)**:**

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

CONDIÇÃO (f_3)**:** Existe $\gamma > 0$ tal que

$$f(s)s \geq (2 + \gamma)F(s) > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

onde
$$F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau.$$
Esta condição é conhecida como Condição de Ambrosetti-Rabinowitz. A título de exemplo, se $N = 2$, a função f definida por

$$f(t) = |t|^{p-2}te^{|t|^r}, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $1 < 2r < 2$ e $p \in (2, +\infty)$, satisfaz as condições acima. Para o caso em que $N \geq 3$,
$$f(t) = |t|^{p-1}t + |t|^{q-1}t, \quad t \in \mathbb{R},$$
onde $p, q \in (1, N/(N-2))$, cumpre as condições anteriores.

O estudo aqui apresentado é motivado pelo estudo do trabalho de Alves-Tahir [2] que utiliza o método dinâmico para estabelecer a existência de solução não trivial para a seguinte classe de problemas não locais

$$\begin{cases} -a\left(x, \int_\Omega g(u)dx\right)\Delta u = f(u) + f_0(x), \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

para alguma função $f_0 \in L^2(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ é um domínio suave limitado, $a : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 satisfazendo algumas condições técnicas. O método dinâmico consiste em estudar o problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T) \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0, \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

associado ao problema (P7). Inicialmente, é feito uma escolha adequada de um dado inicial para que possamos obter uma solução do problema parabólico. Em seguida, mostra-se que a solução obtida no passo anterior é globalmente definida, estacionária e não trivial. Com todas essas considerações, conseguiremos encontrar uma solução não trivial para o problema proposto.

3.1 Existência Local

Nesta seção vamos aplicar Teoria de Semigrupo para mostrar a existência local solução do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T) \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \\ u|_{t=0} = u_0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{P8}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as Condições (f_1), (f_2) e (f_3).

Antes de iniciar nosso estudo, vejamos algumas consequências das Condições (f_1), (f_2) e (f_3).

3.1.1 Propriedades da função f

Propriedade 3.1 *O item* (ii) *da Condição* (f_1) *nos diz que existe* $C_2 > 0$ *tal que*

$$|f(t)| \leq C_2(1 + |t|^p), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A prova dessa propriedade segue usando os mesmo argumentos usados para demonstrar a Propriedade 2.2.

Propriedade 3.2 *A Condição* (f_3) *implica que existem constantes* $c_1, c_2 > 0$ *tais que*

$$F(t) \geq c_1|t|^{2+\gamma} - c_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

De fato, seja $\delta > 0$ fixo. Se $t > \delta$, então de acordo com a Condição (f_3)

$$\frac{f(t)}{F(t)} \geq \frac{2+\gamma}{t} > 0.$$

Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo (δ, t), obtemos

$$(2+\gamma)\int_\delta^t \frac{1}{s} ds = \int_\delta^t \frac{2+\gamma}{s} ds \leq \int_\delta^t \frac{f(s)}{F(s)} ds,$$

ou seja,

$$(2+\gamma)(\ln|t| - \ln|\delta|) \leq \ln F(t) - \ln F(\delta).$$

Desse modo,

$$\ln\left|\frac{t}{\delta}\right|^{(2+\gamma)} = (2+\gamma)\ln\frac{|t|}{|\delta|} \leq \ln\frac{F(t)}{F(\delta)}.$$

Uma vez que a função exponencial é crescente,

$$e^{\ln\left|\frac{t}{\delta}\right|^{(2+\gamma)}} \leq e^{\ln\frac{F(t)}{F(\delta)}},$$

ou seja,

$$\left|\frac{t}{\delta}\right|^{(2+\gamma)} \leq \frac{F(t)}{F(\delta)}.$$

Por conseguinte,

$$F(t) \geq \frac{1}{|\delta|^{(2+\gamma)}}|t|^{(2+\gamma)}F(\delta), \quad \forall t > \delta.$$

Definindo

$$M = \frac{1}{|\delta|^{(2+\gamma)}}F(\delta) > 0,$$

ficamos com

$$F(t) \geq M|t|^{(2+\gamma)}, \quad \forall t > \delta. \tag{3.2}$$

Do mesmo modo, se $t < -\delta$, então

$$F(t) \geq N|t|^{(2+\gamma)}, \quad \forall t < -\delta, \tag{3.3}$$

onde

$$N = \frac{1}{|\delta|^{(2+\gamma)}}F(-\delta) > 0.$$

Considerando $c_1 = \min\{M, N\}$ segue, de (3.2) e (3.3), que

$$F(t) \geq c_1|t|^{(2+\gamma)}, \quad \forall |t| > \delta. \tag{3.4}$$

Resta-nos ver o que acontece com F no intervalo $[-\delta, \delta]$. Para isso, defina a função $\phi : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(t) = F(t) - c_1|t|^{(2+\gamma)}.$$

Sendo ϕ uma função contínua definida em um intervalo $[-\delta, \delta]$ compacto, existe $t_0 \in [-\delta, \delta]$ tal que

$$\phi(t_0) = \min_{s\in[-\delta,\delta]} \phi(s) \leq \phi(t), \quad \forall t \in [-\delta, \delta].$$

Considere uma constante $c_2 > 0$ tal que $\phi(t_0) \geq -c_2$. Então,

$$\phi(t) \geq -c_2, \quad \forall t \in [-\delta, \delta],$$

ou seja,

$$F(t) \geq c_1|t|^{(2+\gamma)} - c_2, \quad \forall t \in [-\delta, \delta] \tag{3.5}$$

De acordo com (3.4),

$$F(t) \geq c_1|t|^{(2+\gamma)} - c_2, \quad \forall |t| > \delta, \tag{3.6}$$

pois $c_2 > 0$. Assim, combinando (3.5) e (3.6), obtemos

$$F(t) \geq c_1|t|^{2+\gamma} - c_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Propriedade 3.3 *Segue da Condição (f_3) e de (3.1) que existem $c_3, c_4 > 0$ satisfazendo*

$$|t|^{2+\gamma} \leq c_3 f(t)t + c_4, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato, se $t = 0$ o resultado segue trivialmente. Caso contrário,

$$f(t)t \geq (2+\gamma)F(t) \geq (2+\gamma)(c_1|t|^{2+\gamma} - c_2),$$

ou seja,

$$c_1(2+\gamma)|t|^{2+\gamma} \leq f(t)t + c_2(2+\gamma).$$

Assim,

$$|t|^{2+\gamma} \leq \frac{1}{c_1(2+\gamma)} f(t)t + \frac{c_2}{c_1},$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 3.4 *De acordo com as Condições (f_1) e (f_2), dados $\varepsilon > 0$ e $\beta > 0$, existe uma constante $c_1, > 0$ tal que*

$$|f(t)|^2 \leq c_1\varepsilon|t|^2 + c_1|t|^{2p}e^{2\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, segundo a Condição (f_2), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}|t|, \quad \text{quando} \quad |t| < \delta.$$

Por outro lado, a Condição (f_1) afirma

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{f(t)}{e^{\beta|t|^2}} = 0, \quad \forall \beta > 0.$$

Assim, dados $\varepsilon = 1$ e $\beta > 0$ existe uma constante $M_\beta > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq M_\beta e^{\beta|t|^2} \leq |t|^{2p}e^{\beta|t|^2}, \quad \forall |t| > M_\beta.$$

Resta-nos entender o que acontece nos intervalos $[-M_\beta, -\delta]$ e $[\delta, M_\beta]$. Iremos trabalhar com $[\delta, M_\beta]$. Uma vez que a função f é contínua em $[\delta, M_\beta]$, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq M, \quad \forall t \in [\delta, M_\beta].$$

Por outro lado, observe que a função $\varphi : [\delta, M_\beta] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \varepsilon|t|^2 + |t|^{2p}e^{2\beta t^2}$$

é contínua e está definida sobre um compacto. Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\varepsilon|t|^2 + |t|^{2p}e^{2\beta t^2} \geq C, \quad \forall t \in [\delta, M_\beta].$$

Escolhendo uma constante $C_1 > 0$ de modo que

$$C_1(\varepsilon|t|^2 + |t|^{2p}e^{2\beta t^2}) \geq C_1 C \geq M^2, \quad \forall t \in [\delta, M_\beta],$$

concluímos

$$|f(t)|^2 \leq C_1(\varepsilon|t|^2 + |t|^{2p}e^{2\beta t^2}), \quad \forall t \in [\delta, M_\beta].$$

Do mesmo modo, mostra-se

$$|f(t)|^2 \leq C_2(\varepsilon|t|^2 + |t|^{2p}e^{2\beta t^2}), \quad \forall t \in [-M_\beta, -\delta],$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Combinando todas as estimativas aqui obtidas, ficamos com

$$|f(t)|^2 \leq c_1\varepsilon|t|^2 + c_1|t|^{2p}e^{2\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $c_1 > 0$ é uma constante.

Propriedade 3.5 *Segue das Condições* (f_1) *e* (f_2) *que, para cada* $\varepsilon > 0$ *dado, existe uma constante* $c_2 > 0$ *tal que*

$$|f(t)|^2 \leq c_2\varepsilon|t|^2 + c_2|t|^{2p}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A demonstração desse fato segue as mesmas ideias usadas para demonstrar a Propriedade 3.4.

3.1.2 Existência de Solução

Inicialmente, observe que o problema (P8) pode ser visto como sendo um problema de valor inicial para a equação de evolução abstrata de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(u), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{P9}$$

onde $X = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$ e $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

No que segue, vamos considerar a potência fracionária $\alpha = \frac{1}{2}$. Assim, pelo que foi visto no capítulo anterior, $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$ e $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}} = \|\cdot\|$, onde

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sendo A um operador setorial, resta-nos verificar que f satisfaz a Condição (F) para que possamos aplicar o Teorema 1.10.

Lema 3.1 *O operador* $\Phi : H_0^1(\Omega) \to X$ *definido por*

$$\Phi(u) = f(u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

é localmente Lipschitz.

Demonstração: As ideias utilizadas para demonstrar esse lema são as mesmas usadas na demonstração do Lema 2.3. Por este motivo, omitiremos a sua demonstração. ∎

Em outros termos, o Lema 3.1 afirma que a função f satisfaz a Condição (F) pois, para cada $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ dado, existe uma vizinhança V de u_0 tal que

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_0 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V, \tag{3.7}$$

onde $L_0 > 0$ é uma constante que depende de V. Aplicando o Teorema 1.10, concluímos que o problema (P9) possui uma única solução clássica local

$$u \in C([0,T); X) \cap C^1((0,T); X),$$

onde $T = T(0, u_0) > 0$. Como consequência disso, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.0.1 (do Teorema 1.10) *A solução* $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ *de* (P8) *dada por*

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s)) ds$$

é contínua. Além disso, u *é a única solução clássica de* (P8)*, isto é,*

$$u \in C((0,T), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega)), \tag{3.8}$$

com

$$u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \forall t \in (0,T)$$

e u *verifica* (P8).

Daqui em diante, $T(u_0)$ denotará o número real tal que $[0, T(u_0))$ é o intervalo maximal de definição da solução $u(t)$ do problema (P8) com dado inicial u_0. Por conveniência, também vamos assumir que

$$J(u_0) := [0, T(u_0)) \quad \text{e} \quad \mathring{J}(u_0) := (0, T(u_0)).$$

Corolário 3.0.2 (do Teorema 1.12) *Sejam $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ com*

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

e $T(u_n) = \infty$. Então, para qualquer intervalo compacto da forma $[0, T]$ contido em $J(u_0)$, a convergência

$$u(\cdot, u_n) \to u(\cdot, u_0) \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

é uniforme em $[0, T]$.

3.2 Algumas Propriedades da Trajetória

Nesta seção, nosso objetivo é demonstrar algumas das principais propriedades da solução $u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$ obtida na seção anterior. Inicialmente, vamos fixar algumas notações para que não ocorra confusão no futuro. No que segue, $u(t, u_0)$ denotará a solução

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s))ds$$

do problema (P8) no tempo t com dado inicial $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Também, iremos considerar os conjuntos

$$O(u_0) = \{u(t, u_0) \in H_0^1(\Omega); t \in J(u_0)\}$$

e

$$\omega(u_0) = \{u \in H_0^1(\Omega); \exists t_n \to +\infty \quad \text{com} \quad u(t_n, u_0) \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)\}.$$

Por fim, D_A será o atrator de $u = 0$, isto é,

$$D_A = \{u_0 \in H_0^1(\Omega); u(t, u_0) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty\}.$$

Quanto ao conjunto D_A, veremos que o mesmo está bem definido pois será mostrado que $u = 0$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável para o problema (P8).

3.2.1 Propriedades da Trajetória

Seja $E : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia definido por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx, \tag{3.9}$$

onde

$$F(s) = \int_0^s f(r)dr.$$

Teorema 3.1 *O funcional E definido em (3.9) é de classe C^1, isto é, $E \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com*

$$E'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Para facilitar o entendimento dessa demonstração vejamos alguns lemas.

Lema 3.2 *O funcional $E_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$E_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

é de classe C^1, isto é, $E_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso,

$$E_1'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{E_1(u+tv) - E_1(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla v + t^2|\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(t\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + t^2\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + t\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial E_1}{\partial v}(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, vamos mostrar que

$$\frac{\partial E_1}{\partial(\cdot)}(u) \in H^{-1}(\Omega)^1.$$

[1]O espaço $H^{-1}(\Omega)$ é o dual de $H_0^1(\Omega)$. Para mais detalhes, veja Brézis [7].

Com efeito, sejam $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$. Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_1}{\partial(\lambda v_1 + \xi v_2)}(u) &= \int_\Omega \nabla u \nabla(\lambda v_1 + \xi v_2) dx \\
&= \int_\Omega \nabla u (\lambda \nabla v_1 + \xi \nabla v_2) dx \\
&= \lambda \int_\Omega \nabla u \nabla v_1 dx + \xi \int_\Omega \nabla u \nabla v_2 dx \\
&= \lambda \frac{\partial E_1}{\partial v_1}(u) + \xi \frac{\partial E_1}{\partial v_2}(u).
\end{aligned}$$

Assim, $\dfrac{\partial E_1}{\partial(\cdot)}(u)$ é linear. Por outro lado, para $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial E_1}{\partial v}(u)\right| &= \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v dx\right| \leq \int_\Omega |\nabla u \nabla v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\| \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

de onde segue a continuidade de $\dfrac{\partial E_1}{\partial(\cdot)}(u)$. Por fim, vejamos que se

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

então

$$\frac{\partial E_1}{\partial(\cdot)}(u_n) \to \frac{\partial E_1}{\partial(\cdot)}(u) \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Com efeito, como

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial E_1}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial E_1}{\partial v}(u)\right| &= \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |(\nabla u_n - \nabla u) \nabla v| dx \\
&\leq \|u_n - u\| \|v\|,
\end{aligned}$$

tem-se

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \left|\frac{\partial E_1}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial E_1}{\partial v}(u)\right| \leq \|u_n - u\|.$$

Desse modo,

$$\frac{\partial E_1}{\partial(\cdot)}(u_n) \to \frac{\partial E_1}{\partial(\cdot)}(u) \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Nestas condições, de acordo com Willem [34, Proposição 1.3.], concluímos que $E_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$E_1'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

■

Lema 3.3 *O funcional E_2 dado por*

$$E_2(u) = \int_\Omega F(u)dx,$$

é de classe C^1, ou seja, $E_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$E_2'(u)v = \int_\Omega f(u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{E_2(u+tv) - E_2(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_\Omega F(u+tv)dx - \int_\Omega F(u)dx\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, encontramos $\theta \in (0,1)$ tal que

$$F(u+tv) - F(u) = f(u+\theta tv)tv,$$

ou seja

$$\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u+\theta tv)v.$$

Defina $h_t : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$h_t(x) = f(u(x) + \theta(x)tv(x))v(x).$$

Uma vez que f é contínua, tem-se

$$\lim_{t\to 0} h_t(x) = \lim_{t\to 0} f(u+\theta tv)v = f(u)v. \tag{3.12}$$

Suponha que $N = 2$. Então, de acordo com a Condição (f_1), para cada $\beta > 0$ existe uma constante $M_\beta > 0$ satisfazendo

$$|f(t)| \leq M_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim, aplicando a Desigualdade de Young (veja o Lema B.1),

$$\begin{aligned} |h_t(x)| &= |f(u+\theta tv)v| \leq M_\beta e^{\beta(u+\theta tv)^2}|v| \\ &\leq M_\beta e^{\beta(|u|+|v|)^2}|v| \leq M_\beta \frac{e^{2\beta(|u|+|v|)^2}}{2} + M_\beta \frac{|v|^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Uma vez que $u, v \in H_0^1(\Omega)$ segue, da Desigualdade de Trudinger-Moser (veja Teorema C.3), que

$$M_\beta \frac{e^{2\beta(|u|+|v|)^2}}{2} \in L^1(\Omega). \tag{3.14}$$

Por outro lado, uma vez que as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ são contínuas, tem-se

$$M_\beta \frac{|v|^2}{2} \in L^1(\Omega). \tag{3.15}$$

Desse modo, combinando (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) e aplicando o Corolário B.12.1,

$$\int_\Omega h_t(x)dx \to \int_\Omega f(u)vdx \quad \text{quando} \quad t \to 0.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{t\to 0} \frac{E_2(u+tv) - E_2(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} dx = \int_\Omega f(u)vdx,$$

ou seja,

$$\frac{\partial E_2}{\partial v}(u) = \int_\Omega f(u)vdx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Se $N \geq 3$, a Propriedade 3.1 afirma

$$|f(t)| \leq C_2(1 + |t|^p), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |h_t(x)| &= |f(u+\theta tv)v| \leq C_2(1 + |u+\theta tv|^p)|v| \\ &\leq C_2(1 + (|u| + |v|)^p)|v| \leq C_2(1 + 2^p(|u|^p + |v|^p))|v| \\ &= C_2|v| + 2^p C_2 |u|^p |v| + 2^p C_2 |v|^{p+1}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Segundo o Teorema C.4, a imersão

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2}, \quad \text{se} \quad N \geq 3,$$

é contínua. Além disso, o Teorema B.5 nos diz que a imersão

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega), \quad \text{se} \quad q > 1,$$

também é contínua. Dessa maneira,

$$C_2|v| + 2^p C_2 |u|^p |v| + 2^p C_2 |v|^{p+1} \in L^1(\Omega). \tag{3.17}$$

Combinando (3.12), (3.16), (3.17) e aplicando o Corolário B.12.1, obtemos

$$\int_\Omega h_t(x)dx \to \int_\Omega f(u)vdx \quad \text{quando} \quad t \to 0$$

e, portanto,

$$\frac{\partial E_2}{\partial v}(u) = \int_\Omega f(u)v dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Vejamos agora que

$$\frac{\partial E_2}{\partial(\cdot)}(u) \in H^{-1}(\Omega).$$

Com efeito, sejam $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$. Então, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_2}{\partial(\lambda v_1 + \xi v_2)}(u) &= \int_\Omega f(u)(\lambda v_1 + \xi v_2)dx \\
&= \int_\Omega (\lambda f(u)v_1 + \xi f(u)v_2)dx \\
&= \lambda \int_\Omega f(u)v_1 dx + \xi \int_\Omega f(u)v_2 dx \\
&= \lambda \frac{\partial E_2}{\partial v_1}(u) + \xi \frac{\partial E_2}{\partial v_2}(u),
\end{aligned}$$

mostrando a linearidade de $\dfrac{\partial E_2}{\partial(\cdot)}(u)$. Seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Então, usando a Desigualdade de Poincaré (veja Teorema C.2),

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial E_2}{\partial v}(u)\right| &= \left|\int_\Omega f(u)v dx\right| \leq \int_\Omega |f(u)v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(u)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\|f(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Desse modo, $\dfrac{\partial E_2}{\partial(\cdot)}(u)$ é contínua. Finalmente, mostraremos que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

implica

$$\frac{\partial E_2}{\partial(\cdot)}(u_n) \to \frac{\partial E_2}{\partial(\cdot)}(u) \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial E_2}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial E_2}{\partial v}(u)\right| &= \left|\int_\Omega f(u_n)v dx - \int_\Omega f(u)v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |(f(u_n) - f(u))v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(u_n) - f(u)| dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v| dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|, \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Afirmação 3.3.1 *Se $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, então*

$$\|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad quando \quad n \to +\infty.$$

De fato, suponha que $N = 2$. Neste caso, temos

$$|f(t)| \leq M_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para todo $\beta > 0$. De acordo com a Proposição C.1, existem uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $h \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{q.s. em} \quad \Omega, \tag{3.20}$$

e

$$|u_{n_k}(x)| \leq h(x), \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{q.s. em} \quad \Omega.$$

Considere a sequência de funções $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ onde

$$\varphi_k(x) = |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))|^2.$$

Observe que

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x)| &= |f(u_{n_k}) - f(u)|^2 \leq 4(|f(u_{n_k})|^2 + |f(u)|^2) \\ &\leq 4(M_\beta^2 e^{2\beta|u_{n_k}|^2} + M_\beta^2 e^{2\beta|u|^2}) \leq 4(M_\beta^2 e^{2\beta|h|^2} + M_\beta^2 e^{2\beta|u|^2}). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Uma vez que $u, h \in H_0^1(\Omega)$ segue, da Desigualdade de Trudinger-Moser, que

$$4(M_\beta^2 e^{2\beta|h|^2} + M_\beta^2 e^{2\beta|u|^2}) \in L^1(\Omega). \tag{3.22}$$

De (3.20) e da continuidade da função f, concluímos

$$|f(u_{n_k}) - f(u)|^2 \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty \quad \text{q.s. em} \quad \Omega,$$

isto é,

$$\varphi_k(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty \quad \text{q.s. em} \quad \Omega. \tag{3.23}$$

Assim, de acordo com (3.21), (3.22), (3.23) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja o Teorema B.12),

$$\int_\Omega \varphi_k(x)dx \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |f(u_{n_k}) - f(u)|^2 dx \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Portanto,

$$\|f(u_{n_k}) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Para encerrar, suponha que existe uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) tal que

$$\|f(u_{n_j}) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \geq \varepsilon_0, \quad j \in \mathbb{N},$$

para algum $\varepsilon_0 > 0$. Desde que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ tem-se

$$u_{n_j} \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Assim, pelo que acabamos de mostrar, existe uma subsequência $(u_{n_{j_k}}) \subset (u_{n_j})$ tal que

$$\|f(u_{n_{j_k}}) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Absurdo. Portando,

$$\|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Agora vamos considerar o caso em que $N \geq 3$. Começamos recordando que

$$|f(t)| \leq C_2(1 + |t|^p), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $p \in (1, N/(N-2))$. Por hipótese,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Uma vez que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, onde $2p < \frac{2N}{N-2}$, é contínua

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^{2p}(\Omega).$$

Então, de acordo com o Teorema B.6, existem uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e uma função $h \in L^{2p}(\Omega)$ com

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

e

$$|u_{n_k}(x)| \leq h(x), \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Defina $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_k(x) = |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))|^2.$$

Note que

$$\begin{aligned}
|\varphi_k(x)| &= |f(u_{n_k}) - f(u)|^2 \\
&\leq 4(|f(u_{n_k})|^2 + |f(u)|^2) \\
&\leq 4(C_2^2(1 + |u_{n_k}|^p)^2 + C_2^2(1 + |u|^p)^2) \\
&\leq 4(4C_2^2(1 + |u_{n_k}|^{2p}) + 4C_2^2(1 + |u|^{2p})) \\
&= 16C_2^2(2 + |u_{n_k}|^{2p} + |u|^{2p}) \\
&\leq 16C_2^2(2 + |h|^{2p} + |u|^{2p})
\end{aligned}$$

Sendo a imersão $L^{2p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ contínua, tem-se

$$16C_2^2(2 + |h|^{2p} + |u|^{2p}) \in L^1(\Omega).$$

Além disso, usando a continuidade de f,

$$|f(u_{n_k}) - f(u)|^2 \to 0, \quad k \to +\infty \quad \text{q.s. em} \quad \Omega,$$

ou seja,

$$\varphi_k(x) \to 0, \quad k \to +\infty \quad \text{q.s. em} \quad \Omega.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, ficamos com

$$\int_\Omega \varphi_k(x)dx \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Dessa maneira,

$$\|f(u_{n_k}) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty$$

e, portanto,

$$\|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

De (3.19) e da Afirmação 3.3.1,

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \left| \frac{\partial E_2}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial E_2}{\partial v}(u) \right| \to 0,$$

de onde segue que

$$\frac{\partial E_2}{\partial(\cdot)}(u_n) \to \frac{\partial E_2}{\partial(\cdot)}(u) \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Nestas condições, de acordo com Willem [34, Proposição 1.3.], concluímos que $E_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$E_2'(u)v = \int_\Omega f(u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

■

O próximo resultado irá desempenhar um papel muito importante no decorrer deste trabalho.

Teorema 3.2 *Sejam $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e u a solução dada por*

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s))ds.$$

Então, para cada $T \in \mathring{J}(u_0)$, temos

$$E(u(t)) \in C([0,T]) \cap C^1((0,T))$$

e

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx, \quad \forall t \in (0,T). \tag{3.24}$$

Demonstração: A demonstração deste Teorema segue as mesmas ideias usadas na prova do Teorema 2.2. Por este motivo, iremos omitir tal demonstração. ■

Neste momento, iremos nos preparar para verificar uma propriedade do funcional E que será usada em alguns resultados futuros. Iniciaremos esse estudo apresentando os seguintes conceitos.

Definição 3.1 *Sejam X um espaço de Banach e $E : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X;\mathbb{R})$. Diz-se que $(u_n) \subset X$ é uma sequência (PS) no nível $d \in \mathbb{R}$, ou simplesmente $(PS)_d$, quando*

$$E(u_n) \to d \quad e \quad E'(u_n) \to 0.$$

Definição 3.2 *Sejam X um espaço de Banach e $E : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X;\mathbb{R})$. Diz-se que E verifica a condição de Palais-Smale, ou simplesmente a condição (PS), se toda sequência $(PS)_d$ onde $d \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge forte em X, isto é,*

$$E(u_n) \to d \quad e \quad E'(u_n) \to 0$$

implica que existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in X$ tais que

$$u_{n_j} \to u \quad em \quad X.$$

Teorema 3.3 *O funcional E definido em (3.9) satisfaz a condição (PS).*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para E, isto é,

$$E(u_n) \to d \quad \text{e} \quad E'(u_n) \to 0.$$

Recorde que

$$E(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(u_n) dx$$

e

$$E'(u_n)u_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega f(u_n)u_n dx.$$

Além disso, a Condição (f_3) nos diz que

$$f(t)t - (2+\gamma)F(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} E(u_n) - \frac{1}{2+\gamma}E'(u_n)u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\gamma}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2+\gamma}\int_\Omega f(u_n)u_n dx - \int_\Omega F(u_n)dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\gamma}\right)\|u_n\|^2 + \frac{1}{2+\gamma}\int_\Omega f(u_n)u_n - (2+\gamma)F(u_n)dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\gamma}\right)\|u_n\|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$E(u_n) - \frac{1}{2+\gamma}E'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\gamma}\right)\|u_n\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Por outro lado, sendo (u_n) uma sequência $(PS)_d$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$E(u_n) \leq d+1, \quad \forall n \geq n_0,$$

e

$$\|E'(u_n)\| < 2+\gamma, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$-\frac{1}{2+\gamma}E'(u_n)u_n \leq \left|\frac{1}{2+\gamma}E'(u_n)u_n\right| \leq \frac{1}{2+\gamma}\|E'(u_n)\|\|u_n\| \leq \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_0$$

e, portanto,

$$E(u_n) - \frac{1}{2+\gamma}E'(u_n)u_n \leq d+1+\|u_n\|, \quad \forall n \geq n_0. \tag{3.26}$$

Combinando (3.25) e (3.26), obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\gamma}\right)\|u_n\|^2 \leq d+1+\|u_n\|,$$

ou seja,

$$\|u_n\|^2 \leq A + B\|u_n\|,$$

onde

$$A = (d+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\gamma}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad B = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\gamma}\right)^{-1}.$$

Desse modo, a sequência (u_n) é limitada. De fato, se fosse (u_n) uma sequência ilimitada, existiria uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$\|u_{n_j}\| > j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por conseguinte,

$$\|u_{n_j}\| \leq \frac{A}{\|u_{n_j}\|} + B \leq \frac{A}{j} + B \leq A + B, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Um absurdo. Logo, (u_n) é limitada. Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, o Teorema A.10 nos assegura a existência de uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) e $u \in H_0^1(\Omega)$ com

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Assim, aplicando o Teorema de Rellich-Kondrachov (veja o Teorema C.5) e o Teorema A.8,

$$u_{n_j} \to u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty) \quad \text{se} \quad N = 2 \quad \text{e} \quad \forall q \in [1, 2^*) \quad \text{se} \quad N \geq 3.$$

Dessa maneira, de acordo com o Teorema B.6, existem uma subsequência $(u_{n_{j_k}})$ de (u_{n_j}) e $h \in L^q(\Omega)$ satisfazendo

$$u_{n_{j_k}}(x) \to u(x) \quad \text{q.s. em} \quad \Omega, \tag{3.27}$$

e

$$|u_{n_{j_k}}(x)| \leq h(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{q.s. em} \quad \Omega. \tag{3.28}$$

Afirmação 3.3.1

$$\int_\Omega f(u_{n_{j_k}})u dx \to \int_\Omega f(u)u dx.$$

Com efeito, recorde que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Então, aplicando o Teorema A.7, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u_{n_j}\| \leq C, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Em particular,

$$\|u_{n_{j_k}}\| \leq C, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se $N = 2$, então

$$|f(t)| \leq M_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para todo $\beta > 0$. Assim,

$$|f(u_{n_{j_k}})|^2 \leq M_\beta e^{2\beta |u_{n_{j_k}}|^2} = M_\beta e^{2\beta \left(\frac{|u_{n_{j_k}}|}{\|u_{n_{j_k}}\|}\right)^2 \|u_{n_{j_k}}\|^2} \leq M_\beta e^{2\beta \left(\frac{|u_{n_{j_k}}|}{\|u_{n_{j_k}}\|}\right)^2 C^2}.$$

Integrando sobre Ω, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u_{n_{j_k}})|^2 dx &\leq M_\beta \int_\Omega e^{2\beta \left(\frac{|u_{n_{j_k}}|}{\|u_{n_{j_k}}\|}\right)^2 C^2} dx \\
&\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \int_\Omega e^{2\beta C^2 (|w|)^2} dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Trudinger-Moser,

$$\int_\Omega |f(u_{n_{j_k}})|^2 dx \leq c_1, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $c_1 > 0$. Logo, existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\|f(u_{n_{j_k}})\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Caso $N \geq 3$, temos

$$|f(t)| \leq C_2(1 + |t|^p), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $C_2 > 0$ é uma constante. Desse modo,

$$|f(u_{n_{j_k}})|^2 \leq C_2^2(1 + |u_{n_{j_k}}|^p)^2 \leq 4C_2^2(1 + |u_{n_{j_k}}|^{2p}).$$

Integrando sobre Ω, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u_{n_{j_k}})|^2 dx &\leq 4C_2^2 \int_\Omega (1 + |u_{n_{j_k}}|^{2p}) dx \\
&= 4C_2^2 |\Omega| + 4C_2^2 \|u_{n_{j_k}}\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Como a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ é contínua, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{2p}(\Omega)} \leq C_3 \|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular,

$$\|u_{n_{j_k}}\|_{L^{2p}(\Omega)} \leq C_3 \|u_{n_{j_k}}\| \leq C_3 C, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\|u_{n_{j_k}}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $C_4 > 0$. Aplicando o Teorema B.8, ficamos com

$$f(u_{n_{j_k}}) \rightharpoonup f(u) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Sendo $J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(v) = \int_\Omega v u dx, \quad u \in L^2(\Omega)$$

um funcional linear limitado, temos

$$\int_\Omega f(u_{n_{j_k}}) u dx \to \int_\Omega f(u) u dx.$$

Afirmação 3.3.2

$$\int_\Omega f(u_{n_{j_k}}) u_{n_{j_k}} dx \to \int_\Omega f(u) u dx \quad \textit{quando} \quad k \to +\infty.$$

Com efeito, sabemos que

$$u_{n_{j_k}} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Usando novamente o Teorema de Rellich-Kondrachov com o Teorema A.8, concluímos

$$u_{n_j} \to u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Pelos argumentos usados na prova da afirmação anterior,

$$f(u_{n_{j_k}}) \rightharpoonup f(u) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Assim, aplicando o Teorema B.7,

$$\int_\Omega f(u_{n_{j_k}}) u_{n_{j_k}} dx \to \int_\Omega f(u) u dx \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Portanto, a afirmação é verdadeira. Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_d$, temos

$$E'(u_{n_{j_k}}) u_{n_{j_k}} = o_n(1)^2,$$

pois

$$0 \leq |E'(u_{n_{j_k}}) u_{n_{j_k}}| \leq \|E'(u_{n_{j_k}})\| \|u_{n_{j_k}}\| \leq M \|E'(u_{n_{j_k}})\| \to 0, \quad k \to +\infty,$$

[2] $o_n(1)$ denota uma quantidade que tem limite zero quando n tende ao infinito.

e

$$0 \leq |E'(u_{n_{j_k}})u| \leq \|E'(u_{n_{j_k}})\| \|u\| \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|u_{n_{j_k}} - u\|^2 &= \int_\Omega |\nabla(u_{n_{j_k}} - u)|^2 dx \\ &= \int_\Omega \nabla(u_{n_{j_k}} - u)\nabla(u_{n_{j_k}} - u)dx \\ &= \int_\Omega (\nabla u_{n_{j_k}} - \nabla u)\nabla(u_{n_{j_k}} - u)dx \\ &= \int_\Omega \nabla u_{n_{j_k}} \nabla(u_{n_{j_k}} - u)dx - \int_\Omega \nabla u \nabla(u_{n_{j_k}} - u)dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Note também que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_{n_{j_k}} \nabla(u_{n_{j_k}} - u)dx &= \int_\Omega \nabla u_{n_{j_k}} \nabla u_{n_{j_k}} dx - \int_\Omega \nabla u_{n_{j_k}} \nabla u dx \\ &= \int_\Omega f(u_{n_{j_k}})u_{n_{j_k}} dx + E'(u_{n_{j_k}})u_{n_{j_k}} - \int_\Omega f(u_{n_{j_k}})u dx \\ &- E'(u_{n_{j_k}})u \\ &= \int_\Omega f(u_{n_{j_k}})u_{n_{j_k}} dx - \int_\Omega f(u_{n_{j_k}})u dx + o_n(1). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Considerando o funcional linear contínuo $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

segue, da convergência

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

que

$$J(u_{n_{j_k}} - u) = \int_\Omega \nabla u \nabla(u_{n_{j_k}} - u)dx \to 0, \quad k \to +\infty. \tag{3.32}$$

Assim, de (3.30), (3.31) e (3.32),

$$\|u_{n_{j_k}} - u\|^2 = \int_\Omega f(u_{n_{j_k}})u_{n_{j_k}} dx - \int_\Omega f(u_{n_{j_k}})u dx + o_n(1).$$

De acordo com as Afirmações (3.3.1) e (3.3.2),

$$\|u_{n_{j_k}} - u\|^2 = o_n(1),$$

ou seja

$$u_{n_{j_k}} \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

o que encerra a demonstração. ∎

Para darmos continuidade ao nosso estudo, vamos definir $V_{u_0}(t) = E(u(t))$, onde $u(t) = u(t, u_0)$.

Teorema 3.4 *Se $u_0 \in \partial D_A$, então $V_{u_0} : J(u_0) \to \mathbb{R}$ é uma função limitada.*

Demonstração: Inicialmente, recorde que $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u(t)\| \leq \frac{C}{2}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.33}$$

Em particular, se $t = 0$, tem-se

$$\|u_0\| \leq \frac{C}{2}. \tag{3.34}$$

Afirmação 3.4.1 *Existe uma constante $M > 0$ tal que $|E(u)| < M$, quando $\|u\| \leq C$.*

Com efeito, recorde que

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx,$$

onde

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Então, sendo $\|u\| \leq C$, temos

$$|E(u)| \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_\Omega |F(u)|dx \leq \frac{1}{2}C^2 + \int_\Omega |F(u)|dx. \tag{3.35}$$

Suponha que $N = 2$. De acordo com a Condição (f_1),

$$|f(t)| \leq M_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim, supondo que $t > 0$, obtemos

$$|F(t)| \leq \int_0^t |f(s)|ds \leq M_\beta \int_0^t e^{\beta s^2} ds.$$

Como $0 \leq s \leq t$ concluímos que $s^2 \leq t^2$. Uma vez que a exponencial uma função crescente, ficamos com $e^{\beta s^2} \leq e^{\beta t^2}$. Nestas condições,

$$\int_0^t e^{\beta s^2} ds \leq \int_0^t e^{\beta t^2} ds = t e^{\beta t^2}.$$

Tendo em vista

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{t}{e^{\xi t^2}} = 0,$$

onde $0 < \xi < 1$, não é difícil mostrar que

$$|t| \le C_\xi e^{\xi t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para alguma constante $C_\xi > 0$. Logo,

$$|F(t)| \le M_\beta t e^{\beta t^2} \le M_\beta C_\xi e^{\xi t^2} e^{\beta t^2} = M_\beta C_\xi e^{(\xi+\beta)t^2}.$$

Definindo $\beta_1 = \beta + \xi$ e $C_1 = M_\beta C_\xi$, temos

$$|F(t)| \le C_1 e^{\beta_1 t^2}, \quad \forall t \ge 0.$$

Se $t < 0$, então

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds = -\int_t^0 f(s)ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |F(t)| &\le \int_t^0 |f(s)|ds \le M_\beta \int_t^0 e^{\beta s^2} ds \le M_\beta \int_t^0 e^{\beta t^2} ds \\ &= M_\beta(-t)e^{\beta t^2} \le M_\beta C_\xi e^{\xi t^2} e^{\beta t^2}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Portanto, dado $\tilde{\beta}_1 > 0$,

$$|F(t)| \le \tilde{C}_1 e^{\tilde{\beta}_1 t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para alguma constante $\tilde{C}_1 > 0$. A estimativa anterior combinada com $\|u\| \le C$ e com a Desigualdade de Trundiger-Moser resulta em

$$\int_\Omega |F(u)|dx \le C_2, \tag{3.37}$$

onde $C_2 > 0$ é uma constante. Desse modo, usando (3.35) e (3.37), obtemos

$$|E(u)| \le C_3, \tag{3.38}$$

onde $C_3 > 0$ é uma constante. Para o caso em que $N \ge 3$, também podemos concluir que

$$|E(u)| \le C_4, \tag{3.39}$$

para alguma constante $C_4 > 0$. Considerando $M = \max\{C_3, C_4\} + 1$ concluímos, através de (3.38) e (3.39), que

$$|E(u)| < M,$$

quando $\|u\| \leq C$.

Por hipótese $u_0 \in \partial D_A$. Então, podemos escolher uma sequência $(u_n) \subset D_A$ com

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Afirmação 3.4.2 *Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\|u(t, u_n) - u_0\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1, \quad \forall t \in [0, \delta].$$

Com efeito, note que

$$\|u(t, u_n) - u_0\| \leq \|u(t, u_n) - u(t, u_0)\| + \|u(t, u_0) - u_0\|. \tag{3.40}$$

Uma vez que u é uma função contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u(t, u_0) - u_0\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{se} \quad t \in [0, \delta]. \tag{3.41}$$

Por outro lado, o Corolário 3.0.2 nos diz que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\|u(t, u_n) - u(t, u_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_1, \quad \forall t \in [0, \delta]. \tag{3.42}$$

Assim, combinando (3.40), (3.41) e (3.42), concluímos que

$$\|u(t, u_n) - u_0\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1, \quad \forall t \in [0, \delta].$$

Portanto, a afirmação é verdadeira. Em consequência de (3.34), existe $n_0 \in \mathbb{N}$, com $n_0 \geq n_1$, tal que

$$u_n \in B_{C_*}(0) \quad \forall n \geq n_0.$$

Além disso, pela definição de D_A,

$$u(t, u_n) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty, \quad \forall n \geq n_0.$$

Queremos mostrar que

$$|V_{u_n}(t)| \leq M, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \geq n_0. \tag{3.43}$$

Com efeito, suponha, por contradição, que isto não é verdade. Então, existem uma subsequência de (u_n), que também será denotada por (u_n), e $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ tais que

$$|V_{u_n}(t_n)| > M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmação 3.4.3 $t_n > T$.

De fato, suponha, por contradição, que $(t_n) \subset [0, T]$. Então, aplicando o Teorema de Bolzano-Weierstrass[3] em (t_n), concluímos que existem uma subsequência (t_{n_j}) de (t_n) e $t_0 \in [0, T]$ com $t_{n_j} \to t_0$. Vamos mostrar que

$$u(t_{n_j}, u_{n_j}) \to u(t_0, u_0) \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{quando} \quad j \to +\infty.$$

Com efeito, temos

$$\|u(t_{n_j}, u_{n_j}) - u(t_0, u_0)\| \leq \|u(t_{n_j}, u_{n_j}) - u(t_{n_j}, u_0)\| + \|u(t_{n_j}, u_0) - u(t_0, u_0)\|, \tag{3.44}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Sendo u uma função contínua, para $0 < \varepsilon \leq C$ dado, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ cumprindo

$$\|u(t_{n_j}, u_0) - u(t_0, u_0)\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall j \geq j_1. \tag{3.45}$$

Por outro lado, o Corolário 3.0.2 nos diz que existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u(t, u_{n_j}) - u(t, u_0)\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall j \geq j_2, \quad \forall t \in [0, \delta]. \tag{3.46}$$

Assim, de (3.44), (3.45) e (3.46), obtemos

$$\|u(t_{n_j}, u_{n_j}) - u(t_0, u_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j \geq j_0,$$

onde $j_0 = \max\{j_1, j_2\}$. Usando (3.33) e a estimativa anterior,

$$\begin{aligned} \|u(t_{n_j}, u_{n_j})\| &\leq \|u(t_{n_j}, u_{n_j}) - u(t_0, u_0)\| + \|u(t_0, u_0)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{2} \leq C, \quad \forall j \geq j_0. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Assim, de acordo com a Afirmação 3.43,

$$|V_{u_{n_j}}(t_{n_j})| = |E(u(t_{n_j}, u_{n_j}))| < M, \quad \forall j \geq j_0.$$

Um absurdo. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$V_{u_n}(t_n) > M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

a menos de subsequência. Desde que

$$u(t, u_n) \to u_0 \quad \text{quando} \quad t \to 0 \quad \text{e} \quad n \to +\infty,$$

[3]Para mais detalhes, veja Lima [23].

existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|u(t, u_n)\| \leq C, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall 0 < t \leq \delta.$$

Aplicando a Afirmação 3.4.1,

$$|V_{u_n}(t)| = |E(u(t, u_n))| \leq M, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall 0 < t \leq \delta.$$

Desse modo, o número

$$s_n = \min\{t > 0; V_{u_n}(s) > M, \quad \forall s \in (t, t_n]\}$$

está bem definido para todo $n \geq n_0$. Veja a Figura 3.1. Seja $s > s_n$, então

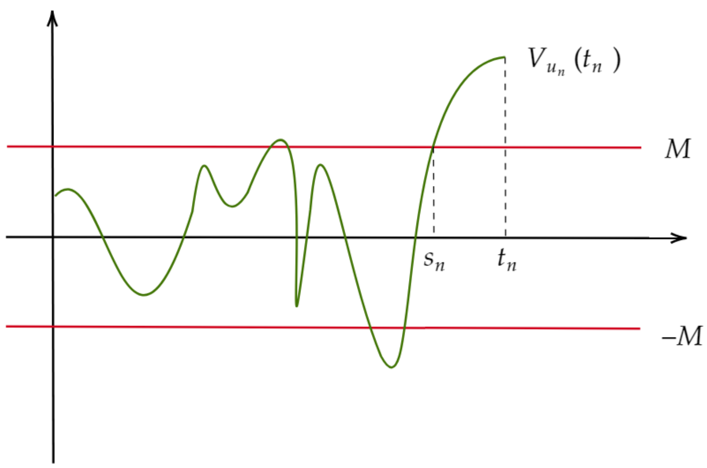

Figura 3.1: Boa definição de s_n.

$$V_{u_n}(s) > M.$$

Sendo V_{u_n} uma função contínua,

$$M \leq \lim_{s \to s_n +} V_{u_n}(s') = V_{u_n}(s_n).$$

Se fosse $V_{u_n}(s_n) > M$ existiria $\varepsilon > 0$ tal que $V_{u_n}(s_n - \varepsilon) > M$ contrariando a minimalidade de s_n. Logo,

$$V_{u_n}(s_n) = M.$$

Por outro lado, de acordo com o Teorema 3.2,

$$\frac{d}{dt}E(u(t, u_n)) = -\int_\Omega |u_t(t, u_n)|^2 dx.$$

Assim,

$$V'_{u_n}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [s_n, t_n],$$

mostrando que V_{u_n} é uma função monótona não-crescente. Em consequência disso,

$$V_{u_n}(t_n) \leq V_{u_n}(s_n) = M,$$

o que contradiz nossa suposição sobre t_n. Agora, suponha que $V_{u_n}(t_n) < -M$ a menos de subsequência. Para cada u_n fixado,

$$u(t, u_n) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Então, existe $K > 0$ tal que

$$\|u(t, u_n)\| \leq C, \quad \forall t \geq K.$$

Logo, o número

$$d_n = \max\{t > 0; V_{u_n}(s) < -M, \quad \forall s \in [t_n, t)\} \tag{3.48}$$

o qual está bem definido. Veja a Figura 3.2. Usando a continuidade de V_{u_n}, obtemos

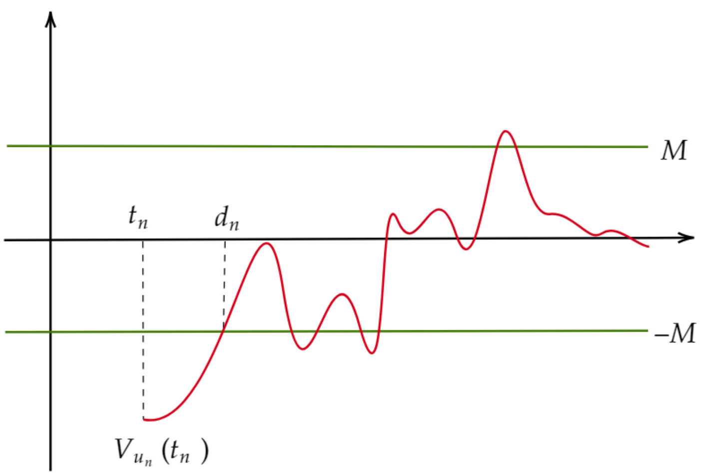

Figura 3.2: Boa definição de d_n.

$V_{u_n}(d_n) = -M$. Além disso,

$$V'_{u_n}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [t_n, d_n].$$

Assim, sendo V_{u_n} uma função monótona não-crescente,

$$-M = V_{u_n}(d_n) \leq V_{u_n}(t_n).$$

Um absurdo. Desse modo,

$$|V_{u_n}(t)| \leq M, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \geq n_0.$$

Aplicando o Corolário 3.0.2 em (3.43), tem-se

$$|V_{u_0}(t)| \leq M,$$

para qualquer $t \in J(u_0)$. ∎

Teorema 3.5 *Se $u_0 \in \partial D_A$, então $T(u_0) = +\infty$.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que $T(u_0) < +\infty$. Recorde que f é localmente Lipschitz. Considerando $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$ e $t_0 = 0$ em Henry [18, Teorema 3.5.2.], tem-se

$$\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(T(u_0))t^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in (0, T(u_0)). \tag{3.49}$$

Por outro lado, o Lema 2.7 afirma

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\int_\Omega u_t(t)u(t)dx.$$

Então,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\int_0^t \int_\Omega u_t(s)u(s)dxds + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Combinando (3.49) com a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2\int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}ds + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2\int_0^t C(T(u_0))s^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}ds + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2C(T(u_0))\int_0^t s^{-\frac{1}{2}}(\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + 1)ds + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Além disso, sendo

$$\begin{aligned}
\int_0^t s^{-\frac{1}{2}}(\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + 1)ds &= \int_0^t s^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \int_0^t s^{-\frac{1}{2}}ds \\
&= \int_0^t s^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + 2t^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ficamos com

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2C(T(u_0))\int_0^t s^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + 2C(T(u_0))2T(u_0)^{\frac{1}{2}} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Assim, aplicando o Teorema A.1,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (2C(T(u_0))2T(u_0)^{\frac{1}{2}} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)})C_1(T(u_0)), \quad \forall t \in (0, T(u_0)). \tag{3.50}$$

Recordando que vale a igualdade

$$u_t - \Delta u = f(u),$$

concluímos que

$$u_t u - u\Delta u = uf(u).$$

Por conseguinte,

$$\int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega u\Delta u dx = \int_\Omega uf(u)dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega u_t(t)u(t)dx + \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx = \int_\Omega u(t)f(u(t))dx.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(t)f(u(t)) - 2F(u(t))dx &= \int_\Omega u_t(t)u(t)dx + \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - 2\int_\Omega F(u(t))dx \\ &= \int_\Omega u_t u dx + 2E(u(t)) \\ &\leq \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + 2E(u(t)). \end{aligned} \tag{3.51}$$

De acordo com o Teorema 3.4, a função $E(u(\cdot))$ é limitada em $(0, T(u_0))$. Logo, existe $M > 0$ tal que

$$|E(u(t))| \leq M, \quad \forall t \in (0, T(u_0)). \tag{3.52}$$

Combinando (3.49), (3.50), (3.51) e (3.52),

$$\int_\Omega u(t)f(u(t)) - 2F(u(t))dx \leq C_2(T(u_0)), \quad \forall t \in (0, T(u_0)),$$

para alguma constante $C_2(T(u_0)) > 0$. Por fim, de acordo com a Condição (f_3),

$$u(t)f(u(t)) \geq (2+\gamma)F(u(t)),$$

ou seja,

$$u(t)f(u(t)) - 2F(u(t)) \geq \gamma F(u(t)).$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega F(u(t))dx \leq \frac{1}{\gamma}\int_\Omega u(t)f(u(t)) - 2F(u(t))dx \leq C_2(T(u_0)), \quad \forall t \in (0, T(u_0)). \tag{3.53}$$

Tendo em vista que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - \int_\Omega F(u(t))dx + \int_\Omega F(u(t))dx \\ &= E(u(t)) + \int_\Omega F(u(t))dx \\ &\leq M + C_2(T(u_0)), \quad \forall t \in (0, T(u_0)),\end{aligned}$$

obtemos

$$\|u(t)\| \leq [2(M + C_2(T(u_0)))]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in (0, T(u_0)).$$

Um absurdo pois, de acordo com Pazy [29, Teorema 1.4, pg. 185], se $T(u_0) < +\infty$, então

$$\lim_{t \to T(u_0)} \|u(t)\| = +\infty.$$

Portanto, $T(u_0) = +\infty$. ■

O próximo resultado será muito importante para a obtenção de uma solução estacionária como veremos no Teorema 3.10.

Teorema 3.6 *Existe uma sequência $(t_n) \subset (0, +\infty)$ tal que*

$$t_n \to +\infty \quad e \quad \|u_t(t_n, u_0)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad quando \quad n \to +\infty.$$

Demonstração: Esta demonstração será feita por contradição, mas antes, recorde que

$$\frac{d}{dt}V_{u_0}(t) = -\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx = -\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Então, integrando sobre $[0, t]$,

$$V_{u_0}(t) - V_{u_0}(0) = -\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds.$$

Sendo V_{u_0} uma função limitada, existe $M > 0$ tal que

$$|V_{u_0}(t)| \leq M, \quad \forall t > 0.$$

Então,

$$\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq M + |V_{u_0}(0)|, \quad \forall t > 0.$$

Nestas condições,

$$\int_0^{+\infty} \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq \lim_{t \to +\infty} (M + |V_{u_0}(0)|) = M + |V_{u_0}(0)|,$$

ou seja,

$$\|u_t(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \in L^1(0, +\infty). \tag{3.54}$$

Agora, suponha, por contradição, que existem $C > 0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} > C, \quad \forall t \geq t_0.$$

Então,

$$\int_{t_0}^{t} \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \geq \int_{t_0}^{t} C ds = C(t - t_0).$$

Dessa maneira,

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds = \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \geq \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} C ds = \lim_{t \to +\infty} C(t - t_0) = +\infty,$$

ou seja,

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds = +\infty$$

o que é impossível por causa de (3.54). ∎

3.2.2 Propriedade da orbita $O(u_0)$

Neste momento, nosso objetivo é mostrar que o conjunto $O(u_0)$ é limitado em $H^1_0(\Omega)$. Mas antes, vejamos o seguinte resultado.

Lema 3.4 *Seja $u_0 \in \partial D_A$. Então existem constantes $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que*

$$\|u(t)\| \geq K \Rightarrow V'_{u_0}(t) < -\delta.$$

Demonstração: Suponha, por contradição, que o Lema não é verdadeiro. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, deve existir $t_n > 0$ tal que

$$\|u(t_n, u_0)\| \geq n, \quad \text{e} \quad V'_{u_0}(t_n) > -\frac{1}{n}.$$

Afirmação 3.6.1 *A sequência (t_n) é tal que $t_n \to +\infty$.*

De fato, caso contrário, existe $T > 0$ tal que

$$0 < t_n < T, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como u é contínua em $[0, T]$, existe uma constante $B > 0$ satisfazendo

$$\|u(t, u_0)\| \leq B, \quad \forall t \in [0, T].$$

Em particular,

$$\|u(t_n, u_0)\| \leq B, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Escolhendo $n \in \mathbb{N}$ com $n > B$, ficamos com

$$n \leq \|u(t_n, u_0)\| \leq B,$$

o que é impossível. Logo, a afirmação é verdadeira. Agora, observe que

$$E'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(u) v dx = -\int_\Omega u_t v dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|E'(u_n)\| &= \sup_{\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} |E'(u_n)v| \leq \sup_{\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega |u_{n,t} v| dx \\ &\leq \sup_{\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \left[\left(\int_\Omega |u_{n,t}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \left(\int_\Omega |u_{n,t}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Desse modo,

$$\|E'(u_n)\|^2 \leq \int_\Omega |u_{n,t}|^2 dx,$$

onde $u_n = u(t_n, u_0)$. Por outro lado,

$$-\frac{1}{n} < V'_{u_0}(t_n) = -\int_\Omega |u_{n,t}|^2 dx \leq -\|E'(u_n)\|^2,$$

ou seja,

$$\|E'(u_n)\|^2 < \frac{1}{n}. \tag{3.56}$$

Além disso, segue do Teorema 3.4 que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|E(u(t, u_0))| \leq M, \quad \forall t \in J(u_0).$$

Em particular,

$$|E(u_n)| = |E(u(t_n, u_0))| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desse modo, existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que

$$E(u_{n_j}) \to d \quad \text{quando} \quad j \to +\infty.$$

De acordo com (3.56), tem-se $E'(u_{n_j}) \to 0$. Então, (u_{n_j}) é uma sequência $(PS)_d$ para E com

$$\|u_{n_j}\| = \|u(t_{n_j}, u_0)\| \geq n_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Um absurdo pois, segundo o Teorema 3.3, E é um funcional (PS). ■

Teorema 3.7 *Seja $u_0 \in \partial D_A$. Então, a orbita $O(u_0)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Essa demonstração, a menos de algumas modificações usa as mesmas ideias usadas na primeira parte da demonstração do Lema 2.9. Porém, devido algumas considerações adicionais que faremos aqui feitas, vamos apresentar esta demonstração com todos os detalhes. Suponha, por contradição, que

$$\limsup_{t \to +\infty} \|u(t)\| = +\infty. \tag{3.57}$$

Seja

$$M' = \liminf_{t \to +\infty} \|u(t)\|.$$

Afirmação 3.7.1 *$M' < +\infty$.*

Com efeito, suponha por contradição que $M' = +\infty$. Então, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|u(t)\| \geq K, \quad \forall t \geq t_0,$$

onde $K > 0$ é a constante do Lema 3.4. Assim, aplicando o Lema 3.4,

$$V'_{u_0}(t) < -\delta, \quad \forall t \geq t_0,$$

para algum $\delta > 0$. Recorde que $V_{u_0} \in C[0, T] \cap C^1(0, T)$. Então, de acordo com o Teorema do Valor Médio[4],

$$V_{u_0}(t) - V_{u_0}(t_0) = V'_{u_0}(c)(t - t_0),$$

para algum $c \in (t_0, t)$. Assim,

$$V_{u_0}(t) - V_{u_0}(t_0) < -\delta(t - t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Por outro lado, segue do Teorema 3.4 que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|V_{u_0}(t)| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

[4]Para mais detalhes, veja Lima [23].

Então,

$$\delta t < V_{u_0}(t_0) - V_{u_0}(t) + \delta t_0 \leq |V_{u_0}(t_0)| + |V_{u_0}(t)| + \delta t_0 \leq 2M + \delta t_0,$$

ou seja,

$$t < \frac{2M}{\delta} + t_0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Um absurdo. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Fixe $R > K$, onde $K > 0$ é a constante dada acima. Então, existem sequências (t_n) e (T_n) tais que

$$\|u(t_n)\| = R, \quad \|u(T_n)\| = n, \quad t_{2n} < T_n < t_{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

com

$$\|u(t)\| \leq R, \quad \forall t \in [t_{2n-1}, t_{2n}]$$

e

$$R < \|u(t)\| < n, \quad \forall t \in (t_{2n}, T_n).$$

Veja a Figura 3.3. Sendo

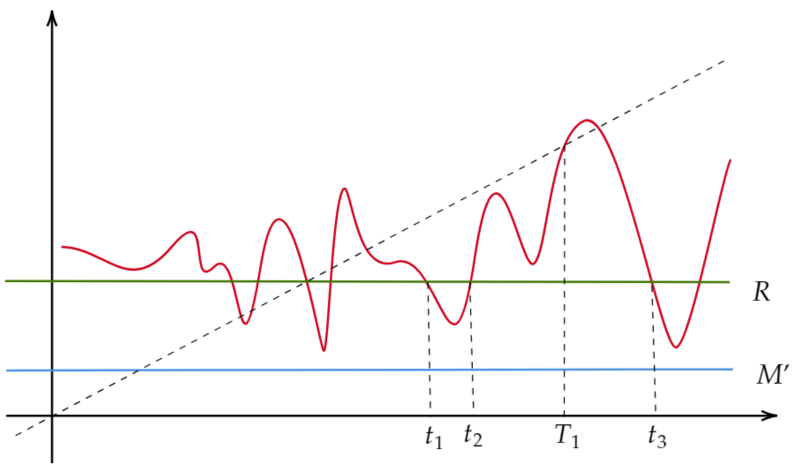

Figura 3.3: Definição das sequências (t_n) e (T_n).

$$\|u(t)\| \geq R, \quad \forall t \in [t_{2n}, T_n]$$

e $R > K$, ficamos com

$$V'_{u_0}(t) < -\delta, \quad \forall t \in [t_{2n}, T_n].$$

Assim, integrando sobre $[t_{2n}, T_n]$,

$$V_{u_0}(T_n) - V_{u_0}(t_{2n}) < -\int_{t_{2n}}^{T_n} \delta dt = -\delta(T_n - t_{n+1}),$$

ou seja,

$$V_{u_0}(t_{2n}) - V_{u_0}(T_n) > \delta(T_n - t_{2n}).$$

Portanto,

$$0 < T_n - t_{2n} < \frac{2M_*}{\delta} = C_*,$$

onde

$$M_* = \sup_{t \in J(u_0)} |V_{u_0}(t)|.$$

Recorde que, para $t > s \geq 0$, temos

$$u(t) = e^{-A(t-s)}u(s) + \int_s^t e^{-A(t-\tau)} f(u(\tau)) d\tau.$$

Então, seguindo as mesmas ideias usadas na demonstração do Lema 2.9, mostra-se que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|u(t)\| \leq M\|u(s)\| + M \int_s^t \frac{\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau. \tag{3.58}$$

e

$$\|u(t)\|_\beta \leq \frac{M}{(t-s)^{\beta-\frac{1}{2}}}\|u(s)\| + M \int_s^t \frac{\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t-\tau)^{\beta}} d\tau. \tag{3.59}$$

Segue, das hipóteses acima, que existe uma sequência $s_n \in (t_{2n-1}, t_{2n})$ tal que $\|u(s_n)\| \leq M' + 1$. Escolhendo $t = t_{2n}$ e $s = s_n$ em (3.58), temos

$$\begin{aligned} \|u(t_{2n})\| &\leq M\|u(s_n)\| + M \int_{s_n}^{t_{2n}} \frac{\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n}-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\ &= M(M'+1) + M \int_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} \frac{\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n}-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau. \end{aligned}$$

Sendo $N = 2$, temos

$$|f(t)| \leq M e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $\beta > 0$ é arbitrário. Então,

$$\begin{aligned} \|f(u(\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f(u(\tau))|^2 dx \leq M^2 \int_\Omega e^{2\beta|u(\tau)|^2} dx \\ &= M^2 \int_\Omega e^{2\beta\left(\frac{|u(\tau)|}{\|u(\tau)\|}\right)^2 \|u(\tau)\|^2} dx \leq M^2 \sup_{\|w\|\leq 1} \int_\Omega e^{2\beta R^2 |w|^2} dx. \end{aligned}$$

Escolhendo β de modo que $\beta R^2 < \pi$ tem-se, pela Desigualdade de Trundiger-Moser, que

$$\sup_{\|w\|\leq 1} \int_\Omega e^{2\beta R^2 |w|^2} dx < C.$$

Logo,

$$\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1. \tag{3.60}$$

Caso $N \geq 3$, sabemos que

$$|f(t)| \leq C_2(1 + |t|^p), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Nestas condições,

$$\begin{aligned}
\|f(u(\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f(u(\tau))|^2 dx \leq C_2 \int_\Omega (1 + |u(\tau)|^p)^2 dx \\
&\leq C_2 \int_\Omega 4(1 + |u(\tau)|^{2p}) dx = 4C_2|\Omega| + 4C_2 \int_\Omega |u(\tau)|^{2p} dx \\
&= 4C_2|\Omega| + 4C_2\|u(\tau)\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Uma vez que a imersão $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ é contínua, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\|u(\tau)\|_{L^{2p}(\Omega)} \leq C_3\|u(\tau)\|, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

Assim, como $\|u(t)\| \leq R$ para $t \in [t_{2n-1}, t_{2n}]$, temos

$$\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4, \tag{3.61}$$

onde $C_4 > 0$ é uma constante. Portanto, de (3.60) e (3.61),

$$\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C}, \quad \forall t_{2n-1} \leq \tau \leq t_{2n},$$

para alguma constante $\tilde{C}$. Com essas informações, obtemos

$$\int_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} \frac{\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n} - \tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \leq \int_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} \frac{\tilde{C}}{(t_{2n} - \tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau.$$

Fazendo a mudança de variável $r = t_{2n} - \tau$,

$$\int_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} (t_{2n} - \tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau = \int_0^{t_{2n} - t_{2n-1}} r^{-\frac{1}{2}} dr = 2(t_{2n} - t_{2n-1})^{\frac{1}{2}}.$$

Escolhendo $R > \max\{M', K\} + 1$, concluímos que existe $d > 0$ tal que $t_{2n} - t_{2n-1} \geq d$.

Afirmação 3.7.2 *Dado $0 < c < d$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$T_n - t_{2n} > c, \quad \forall n \geq n_0.$$

Com efeito, considere $0 < c < d$. Então,

$$\|u(t)\| \leq R, \quad \forall t \in [t_{2n} - c, t_{2n}].$$

Agora, se fosse $T_n \leq t_{2n} + c$, isto é, $T_n - c \leq t_{2n}$, teríamos $T_n - c \in [t_{2n} - c, t_{2n}]$. Assim,

$$n = \|u(T_n)\| = \|u(T_n - c, u(c, u_0))\| \leq R,$$

o que é uma contradição quando $n \to +\infty$. Veja a Figura 3.4. Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$

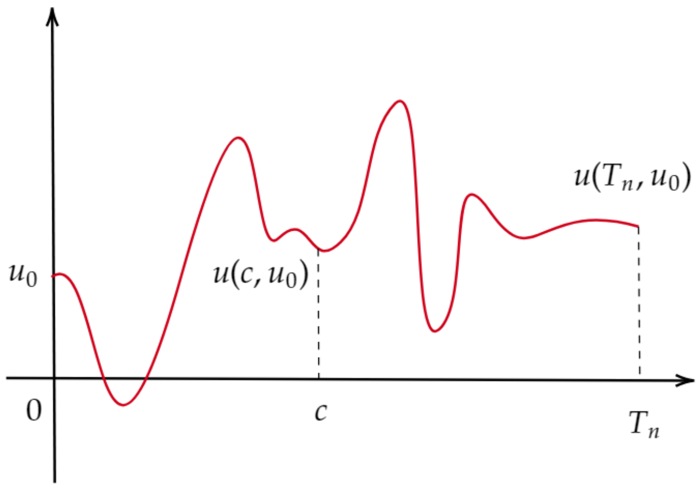

Figura 3.4: $u(T_n - c, u(c, u_0)) = u(T_n, u_0)$.

tal que

$$T_n - t_{2n} > c, \quad \forall n \geq n_0.$$

Fixado c nas condições da afirmação acima, considere $\theta \in (0, c)$. Então, usando (3.59), obtemos

$$\|u(t_{2n} - \theta)\|_\beta \leq M\theta^{-(\beta - \frac{1}{2})}\|u(t_{2n-1})\| + M\int_{t_{2n}-\theta}^{t_{2n}} \frac{\|f(u(\tau))\|_{L^2(\Omega)}}{(t_{2n} - \tau)^\beta} d\tau. \tag{3.62}$$

Uma vez que o lado direito de (3.62) é limitado e a imersão de $D(A^\beta)$ em $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ é compacta, podemos extrair uma subsequência convergente de (u_n) em $H_0^1(\Omega)$, onde $u_n = u(t_{2n} - \theta)$. Sejam $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_{n_j} = u(t_{2n_j} - \theta) \to u_1 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Então, $u_1 \in \omega(u_0)$. Sendo $u(\cdot, u_1) : [0, \infty) \to H_0^1(\Omega)$ contínua e $[0, 2C_*]$ um compacto, segue que

$$\|u(t, u_1)\| \leq B, \quad \forall t \in [0, 2C_*].$$

Por outro lado, o Teorema 1.12, nos diz que $u(\cdot, u(t_{2n} - \theta))$ converge para $u(\cdot, u_1)$ uniformemente em $[0, 2C_*]$. Sendo a sequência $(T_n - t_{2n})$ limitada em $[0, C_*]$, temos

$$|T_n - t_{2n} + \theta| \leq |T_n - t_{2n}| + \theta \leq C_* + T_n - t_{2n} \leq C_* + |T_n - t_{2n}| \leq 2C_*.$$

Assim,

$$\|u(T_n - t_{2n} + \theta, u(t_{2n} - \theta))\| \leq B, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é impossível pois

$$\|u(T_n - t_{2n} + \theta, u(t_{2n} - \theta))\| = \|u(T_n)\| = n \to +\infty \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

■

3.3 Blow-up da solução

Nesta seção, veremos uma condição que garantem a existência global de solução. Além disso, quais são as condições em que o blow-up ocorre.

3.3.1 Estabilidade

Definição 3.3 *Sejam A um operador linear setorial em um espaço de Banach X e uma função $f : U \to X$ onde U é uma vizinhança de u_0 em X^α $(\alpha < 1)$. Diz-se que w é um ponto de equilíbrio do problema*

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u), \quad t > 0, \tag{3.63}$$

quando $u(t) = w$ é tal que $w \in D(A)$ e

$$Aw = f(w), \quad \forall t > 0.$$

Diz-se que uma solução de equilíbrio $\tilde{u} = w$ de (3.63) em $[0, \infty)$ é estável em X^α quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que qualquer solução u com

$$\|u_0 - w\|_\alpha < \delta$$

existe em $[0, \infty)$ e satisfaz

$$\|u(t) - w\|_\alpha < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Além disso, diz-se que $\tilde{u}$ é assintoticamente estável quando $\tilde{u}$ é estável e existe $r > 0$ tal que

$$\|u_0 - w\|_\alpha < r$$

implica

$$\|u(t, u_0) - w\|_\alpha \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Teorema 3.8 *A solução $u = 0$ de (P8) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

Demonstração: Nesta demonstração, vamos utilizar os mesmos argumentos usados por Henry [18, Teorema 5.1.1.]. Note que $A = -\Delta$ é um operador setorial. Além disso, $\sigma(A) \subset [C, \infty)$. Então, $0 \in \rho(A)$. Assim, aplicando o Lema 1.10,

$$\|e^{-At}\| \leq C_1 e^{-\delta_1 t},$$

onde $C_1 > 0$ e $\delta_1 > 0$ são constantes. Além disso, de acordo com o Teorema 1.6,

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{-At}\| \leq C_2 t^{-\frac{1}{2}} e^{-\delta_2 t},$$

onde $C_2 > 0$ e $\delta_2 > 0$ são constantes. Seja $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então,

$$\|e^{-At}\| \leq C_1 e^{-\delta' t}$$

e

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{-At}\| \leq C_2 t^{-\frac{1}{2}} e^{-\delta' t}.$$

Considere $\tilde{\delta} = \delta'/2$.

Afirmação 3.8.1 *A integral*

$$\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{2}} e^{-(\delta' - \tilde{\delta})s} ds$$

é finita.

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{2}} e^{-(\delta' - \tilde{\delta})s} ds &= \int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{2}-1} e^{-(\delta' - \tilde{\delta})s} ds \\
&= (\delta' - \tilde{\delta})^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} [(\delta' - \tilde{\delta})s]^{\frac{1}{2}-1} e^{-(\delta' - \tilde{\delta})s} ds.
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $r = (\delta' - \tilde{\delta})s$, ficamos com

$$\int_0^t [(\delta' - \tilde{\delta})s]^{\frac{1}{2}-1} e^{-(\delta' - \tilde{\delta})s} ds = \frac{1}{\delta' - \tilde{\delta}} \int_0^{(\delta' - \tilde{\delta})t} r^{\frac{1}{2}-1} e^{-r} dr.$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} [(\delta' - \tilde{\delta})s]^{\frac{1}{2}-1} e^{-(\delta' - \tilde{\delta})s} ds = \frac{1}{\delta' - \tilde{\delta}} \int_0^{+\infty} r^{\frac{1}{2}-1} e^{-r} dr = \frac{1}{\delta' - \tilde{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{2}} e^{-(\delta'-\tilde{\delta})s} ds = (\delta'-\tilde{\delta})^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Portanto, a afirmação é verdadeira. Escolha $\sigma > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$C_2\sigma \int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{2}} e^{-(\delta'-\tilde{\delta})s} ds < \frac{1}{2}.$$

Afirmação 3.8.2 *Existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sigma\|u\|, \quad \textit{quando} \quad \|u\| \leq \delta.$$

Com efeito, se $N = 2$ segue, da Propriedade 3.4, que existe uma constante $C_3 > 0$ satisfazendo

$$|f(u)|^2 \leq \varepsilon C_3 |u|^2 + C_3 |u|^{2p} e^{2\beta|u|^2},$$

para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $\beta > 0$ dados. Então,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(u)|^2 dx &= \varepsilon C_3 \int_\Omega |u|^2 dx + C_3 \int_\Omega |u|^{2p} e^{2\beta|u|^2} dx \\ &\leq \varepsilon C_3 \int_\Omega |u|^2 dx + C_3 \left(\int_\Omega |u|^{4p} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega e^{4\beta|u|^2} dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Trudinger-Moser,

$$\left(\int_\Omega e^{4\beta|u|^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_4,$$

para alguma constante $C_4 > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(u)|^2 dx &\leq \varepsilon C_3 \int_\Omega |u|^2 dx + C_3 \left(\int_\Omega |u|^{4p} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega e^{4\beta|u|^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon C_3 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_3 C_4 \|u\|^{2p}_{L^{4p}(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon C_5 \|u\|^2 + C_5 \|u\|^{2p} \\ &= \|u\|^2 (\varepsilon C_5 + C_5 \|u\|^{2p-2}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq (\varepsilon C_5 + C_5 \|u\|^{2p-2})^{\frac{1}{2}} \|u\|.$$

Escolha $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ de modo que $\|u\| < \delta$ implique

$$(\varepsilon C_5 + C_5 \|u\|^{2p-2})^{\frac{1}{2}} < \sigma.$$

Nestas condições,

$$\|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sigma\|u\|, \quad \text{quando} \quad \|u\| \leq \delta.$$

Para o caso em que $N \geq 3$, concluímos o mesmo resultado através da Propriedade 3.5. Suponha que

$$\|u_0\| \leq \frac{\delta}{2C_1}.$$

Afirmação 3.8.3

$$\|u(t)\| \leq \delta, \quad \forall t \in [0, T(u_0)).$$

Em particular, $T(u_0) = +\infty$.

Com efeito, suponha, por contradição, que a afirmação é falsa. Então, existe $t_1 \in [0, T(u_0))$ tal que $\|u(t_1)\| > \delta$. Seja

$$t_* = \min\{t \in [0, T(u_0)); \|u(t)\| = \delta\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|u(t_*)\| &\leq \|e^{-At_*}u_0\|_{\frac{1}{2}} + \int_0^{t_*} \|e^{-A(t_*-s)}f(u(s))\|_{\frac{1}{2}}ds \\
&= \|A^{\frac{1}{2}}e^{-At_*}u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^{t_*} \|A^{\frac{1}{2}}e^{-A(t_*-s)}f(u(s))\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\leq C_1e^{-\delta' t_*}\|u_0\|_{\frac{1}{2}} + \int_0^{t_*} C_2(t-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta'(t_*-s)}\|f(u(s))\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\leq C_1\|u_0\| + C_2\sigma \int_0^{t_*} (t_*-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta'(t_*-s)}\|u(s)\|ds \\
&= \frac{\delta}{2} + C_2\sigma \int_0^{t_*} (t_*-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta'(t_*-s)}\|u(s)\|ds \\
&\leq \frac{\delta}{2} + C_2\sigma\delta \int_0^{t_*} (t_*-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta'(t_*-s)}ds \\
&< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Um absurdo, pois $\|u(t_*)\| = \delta$. Logo,

$$\|u(t)\| \leq \delta, \quad \forall t \in [0, T(u_0)).$$

Além disso, se fosse $T(u_0) < +\infty$ então, de acordo com Pazy [29, Teorema 1.4, pg. 185],

$$\lim_{t \to T(u_0)} \|u(t)\| = +\infty,$$

o que não ocorre. Portanto, $T(u_0) = +\infty$.

Por outro lado, seja

$$z(t) = \sup\{\|u(s)\|e^{\tilde{\delta}s}; 0 \leq s \leq t\}.$$

Então, para $r \in [0,t]$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|u(r)\|e^{\tilde{\delta}r} &\leq C_1\|u_0\| + C_2\sigma e^{\tilde{\delta}r}\int_0^r (r-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta'(r-s)}\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&= C_1\|u_0\| + C_2\sigma\int_0^r (t-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta'(r-s)}e^{\tilde{\delta}r}e^{-\tilde{\delta}s}e^{\tilde{\delta}s}\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}ds \\
&\leq C_1\|u_0\| + C_2\sigma\int_0^r (r-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta'(r-s)}e^{\tilde{\delta}(r-s)}z(t)ds \\
&= C_1\|u_0\| + C_2\sigma z(t)\int_0^r (r-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-(\delta'-\tilde{\delta})(r-s)}ds \\
&\leq C_1\|u_0\| + \frac{1}{2}z(t). \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Nestas condições,

$$z(t) \leq C_1\|u_0\| + \frac{1}{2}z(t),$$

ou seja,

$$z(t) \leq 2C_1\|u_0\| \leq \delta.$$

Logo,

$$\|u(s)\| = \|u(s)\|e^{\tilde{\delta}s}e^{-\tilde{\delta}s} \leq z(t)e^{-\tilde{\delta}s} \leq \delta e^{-\tilde{\delta}s}.$$

Fazendo $s \to +\infty$, obtemos

$$\|u(s)\| \to 0$$

e, portanto, o teorema está demonstrado. ■

A proposição á seguir desempenha um papel muito importante nesse estudo pois é ela quem garante a não trivialidade da solução que queremos encontrar.

Proposição 3.1 *Se $u_0 \in \partial D_A$, então $0 \notin \omega(u_0)$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $0 \in \omega(u_0)$. Então, existe uma sequência (t_n) com $t_n \to +\infty$ tal que

$$u(t_n, u_0) \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \qquad (3.66)$$

Como $u = 0$ é assintoticamente estável, existe $r > 0$ tal que $\|u_1\| < r$ implica

$$\|u(t, u_1)\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

De (3.66), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u(t_n, u_0)\| < r, \quad \forall n \geq n_0.$$

Em particular, $\|u(t_{n_0}, u_0)\| < r$. Então, sendo $u_1 = u(t_{n_0}, u_0)$, temos

$$\|u(t, u_1)\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Por conseguinte,

$$u(t, u_1) \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

quando $t \to +\infty$. Uma vez que $u(t, u_0) = u(t - t_{n_0}, u_1)$, concluímos

$$u(t, u_0) \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

quando $t \to +\infty$. Desse modo, $u_0 \in intD_A$. Um absurdo. Portanto, $0 \notin \omega(u_0)$. ∎

Proposição 3.2 *Existe $\delta > 0$ tal que $\|u_0\| < \delta$ implica $T(u_0) = +\infty$. Além disso, $0 \in intD_A$.*

Demonstração: Sabemos que $u = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Em particular, $u = 0$ é estável. Consequentemente, $T(u_0) = +\infty$. Além disso, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u_0\| < \delta \Rightarrow \|u(t, u_0)\| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty,$$

ou seja,

$$\|u_0\| < \delta \Rightarrow u(t, u_0) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Assim,

$$\{u_0 \in H_0^1(\Omega); \|u_0\| < \delta\} \subset D_A$$

e, portanto, $0 \in intD_A$. ∎

3.3.2 Existência de blow-up

O próximo resultado afirma sobre quais condições o fenômeno blow-up ocorre.

Teorema 3.9 *Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é tal que $E(u_0) \leq 0$, então $T(u_0) < +\infty$.*

Demonstração: Para cada $t > 0$, considere a função definida por

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds.$$

Derivando H, ficamos com

$$H'(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Assim, de acordo com o Lema 2.7,

$$H''(t) = \int_\Omega u_t(t)u(t)dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t(t)u(t)dx &= \int_\Omega [\Delta u(t) + f(u(t))]u(t)dx \\
&= \int_\Omega \Delta u(t)u(t)dx + \int_\Omega f(u(t))u(t)dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \int_\Omega f(u(t))u(t)dx.
\end{aligned}$$

Além disso, segue da Condição (f_3) que

$$f(u(t))u(t) \geq (2+\gamma)F(u(t)).$$

Desse modo,

$$\int_\Omega u_t(t)u(t)dx \geq -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + (2+\gamma)\int_\Omega F(u(t))dx,$$

ou seja,

$$H''(t) \geq -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + (2+\gamma)\int_\Omega F(u(t))dx. \tag{3.67}$$

Por outro lado, sabemos que $V_{u_0}(t) = E(u(t))$ e

$$V'_{u_0}(t) = -\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx.$$

Então,

$$\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = -\frac{d}{dt}E(u(t)).$$

Integrando esta igualdade sobre o intervalo $[0, t]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds &= -E(u(t)) + E(u(0)) \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \int_\Omega F(u(t))dx + E(u_0) \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (3.68) em (3.67),

$$
\begin{aligned}
H''(t) &\geq -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + (2+\gamma)\left(\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - E(u_0)\right) \\
&= \left(-1 + \frac{2+\gamma}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + (2+\gamma)\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds - (2+\gamma)E(u_0) \\
&= \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + (2+\gamma)\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds - (2+\gamma)E(u_0). \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

Observe que $E(u_0) < 0$, então $-(2+\gamma)E(u_0) > 0$. O restante dessa demonstração usa os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 2.4. Por este motivo, iremos omitir estes detalhes. ∎

Lema 3.5 *Seja $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ fixado. Então,*

$$E(tv) \to -\infty \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty.$$

Demonstração: De acordo com a Propriedade, 3.2

$$F(t) \geq c_1|t|^{2+\gamma} - c_2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $c_1, c_2 > 0$ são constantes. Então,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega F(tv)dx &\geq \int_\Omega (c_1|tv|^{2+\gamma} - c_2)dx \\
&= c_1 t^{2+\gamma}\int_\Omega |v|^{2+\gamma}dx - c_2\int_\Omega dx \\
&= c_1 t^{2+\gamma}\|v\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}(\Omega)} - c_2|\Omega|.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
E(tv) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla tv|^2 dx - \int_\Omega F(tv)dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - c_1 t^{2+\gamma}\|v\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}(\Omega)} - c_2|\Omega| \\
&= t^{2+\gamma}\left(\frac{\|v\|^2}{t^\gamma} - c_1\|v\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}(\Omega)} - \frac{c_2|\Omega|}{t^{2+\gamma}}\right), \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

o que nos leva a concluir que

$$E(tv) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Proposição 3.3 $\partial D_A \neq \emptyset$.

Demonstração: Seja $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ fixado. Como $0 \in intD_A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{u \in H_0^1(\Omega); \|u\| < \varepsilon\} \subset D_A.$$

Assim, considerando s suficientemente pequeno de modo que $\|sv\| < \varepsilon$, temos

$$sv \in intD_A. \tag{3.71}$$

Por outro lado, segundo o Lema 3.5, podemos escolher t de modo que $E(tv) < 0$. Então, aplicando o Teorema 3.9, concluímos que $T(u_0) < +\infty$. Dessa maneira,

$$tv \notin D_A \tag{3.72}$$

Combinando (3.71) e (3.72), ficamos com

$$[sv, tv] \cap D_A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad [sv, tv] \cap H_0^1(\Omega)\backslash D_A \neq \emptyset.$$

Note que $[sv, tv]$ é um conjunto conexo. Então, de acordo com o Teorema da Alfândega[5], existe $s_0 \in [s, t]$ tal que $s_0 v \in \partial D_A$. Portanto, $\partial D_A \neq \emptyset$. ∎

3.4 Existência de solução não trivial estacionária

Teorema 3.10 *Se $u_0 \in \partial D_A$, temos $\omega(u_0) \neq \emptyset$. Assim, o problema elíptico*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{P10}$$

tem uma solução não trivial.

Demonstração: De acordo com o Teorema 3.5, temos $T(u_0) = +\infty$, ou seja, u é globalmente definida. Por outro lado, o Teorema 3.6 afirma que existe uma sequência $(t_n) \subset (0, +\infty)$ tal que

$$t_n \to +\infty \quad \text{e} \quad \|u_t(t_n, u_0)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{3.73}$$

Além disso, aplicando o Teorema 3.7, concluímos que a sequência (u_n) definida por $u_n = u(t_n, u_0)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então, segundo o Teorema A.10, existem uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $u_s \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_s \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \tag{3.74}$$

[5]Para mais detalhes, veja Lima [24]

Afirmação 3.10.1 $u_s \in \omega(u_0)$.

Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} E'(u_{n_k})v &= \int_\Omega \nabla u_{n_k} \nabla v dx - \int_\Omega f(u_{n_k}) v dx \\ &= -\int_\Omega \Delta u_{n_k} v dx - \int_\Omega f(u_n) v dx \\ &= -\int_\Omega (\Delta u_{n_k} + f(u_{n_k})) v dx \\ &= -\int_\Omega u_t(t_{n_k}) v dx. \end{aligned}$$

Então, aplicando a Desigualdade de Hölder e usando a continuidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$|E'(u_{n_k})v| \leq \int_\Omega |u_t(t_{n_k})v| dx \leq \|u_t(t_{n_k})\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u_t(t_{n_k})\|_{L^2(\Omega)} \|v\|.$$

Logo,

$$\|E'(u_{n_k})\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |E'(u_{n_k})v| \leq C \|u_t(t_{n_k})\|_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|E'(u_{n_k})\| \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Portanto,

$$E'(u_{n_k}) \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Por outro lado, sendo

$$|E(u(t_{n_k}, u_0))| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

a sequência (u_{n_k}) admite uma subsequência, que denotaremos pela mesma notação, tal que

$$E(u_{n_k}) \to d \quad \text{quando} \quad k \to +\infty,$$

onde $d \in \mathbb{R}$. Assim, uma vez que (u_{n_k}) é uma sequência $(PS)_d$ e E é um funcional (PS) segue, do Teorema 3.3, que existe uma subsequência $(u_{n_{k_j}})$ de (u_{n_k}) tal que

$$u_{n_{k_j}} \to u_s \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \tag{3.75}$$

Portanto, a afirmação é verdadeira. Agora, note que

$$\int_\Omega u_t(t_{n_{k_j}}) v dx + \int_\Omega \nabla u_{n_{k_j}} \nabla v dx = \int_\Omega f(u_{n_{k_j}}) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.76}$$

Segue de (3.73) que

$$\int_{\Omega} u_t(t_{n_{k_j}}) v dx \to 0, \quad j \to +\infty.$$

De fato,

$$\left| \int_{\Omega} u_t(t_{n_{k_j}}) v dx \right| \leq \int_{\Omega} |u_t(t_{n_{k_j}}) v| dx \leq \|u_t(t_{n_{k_j}})\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad j \to +\infty.$$

De modo inteiramente análogo, usando (3.75), mostra-se que

$$\int_{\Omega} \nabla u_{n_{k_j}} \nabla v dx \to \int_{\Omega} \nabla u_s \nabla v dx, \quad j \to \infty$$

e

$$\int_{\Omega} f(u_{n_{k_j}}) v dx \to \int_{\Omega} f(u_s) v dx, \quad j \to +\infty.$$

Fazendo $j \to +\infty$ em (3.76), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_s \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u_s) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, u_s é uma solução fraca para o problema (P10). Uma vez que $u_s \in \omega(u_0)$, a Proposição 3.1 nos garante que $u_s \neq 0$.

■

Apêndice A

Alguns resultados da Análise

A.1 Resultados da Análise Real

Lema A.1 *Seja* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável verificando*

$$f'(t) \to +\infty \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty.$$

Então,

$$f(t) \to +\infty \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty.$$

Demonstração: Uma vez que

$$f'(t) \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty,$$

existe $t_0 > 0$ tal que

$$f'(t) \geq 1, \quad , \forall t \geq t_0.$$

Assim,

$$\int_{t_0}^{t} ds \leq \int_{t_0}^{t} f'(s) ds = f(t) - f(t_0),$$

ou seja,

$$t - t_0 + f(t_0) \leq f(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Logo,

$$f(t) \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

■

A.2 Desigualdades do tipo Gronwall

Nesta seção, vamos apresentar uma desigualdade do tipo Gronwall com singularidade. Esta desigualdade se encontra no trabalho de Kong-Ding [20] e será uma ferramenta indispensável no estudo deste trabalho.

Lema A.2 *Sejam $b > a > 0$ e $\rho > 0$, então*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{A.1}$$

onde c_0 é uma constante positiva e

$$c_{k+1} = \frac{\Gamma(k\rho + a)}{\Gamma(k\rho + b)} c_k.$$

Uma vez que a série em (A.1) é finita para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos considerar a função $F_{\rho,a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_{\rho,a,b}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k.$$

Teorema A.1 *Sejam $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\delta = \alpha + \gamma - 1 > 0$, $\upsilon = \beta + \gamma - 1 > 0$ e seja b uma função não negativa, contínua e não decrescente em $[0, T)$ com*

$$b(t) \leq M, \quad \forall t \in [0, T),$$

onde $M > 0$ é uma constante. Se $u(t)$ é uma função não negativa e $t^{\gamma-1}u(t)$ é localmente integrável em $[0, T)$ com

$$u(t) \leq at^{\alpha-1} + b(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} u(s) ds, \quad 0 \leq t < T.$$

Então,

$$u(t) \leq at^{\alpha-1} F_{\upsilon,\delta,\delta+\beta} \left(\Gamma(\beta) b(t) t^{\beta}\right), \qquad 0 \leq t < T.$$

O resultado à seguir, apesar de ser um caso particular do teorema anterior, é uma ferramenta muito importante para o desenvolvimento do nosso estudo.

Teorema A.2 *Seja $u : [0, T) \to \mathbb{R}$ uma função integrável não negativa tal que*

$$u(t) \leq a + b \int_0^t (t-s)^{-\alpha'} u(s) ds, \quad 0 \leq t < T,$$

onde $0 < \alpha' < 1$ e $a, b > 0$ são constantes. Então, existe uma constante $C(T) > 0$ tal que

$$u(t) \leq aC(T), \quad 0 \leq t < T.$$

Demonstração: Considere $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 1 - \alpha'$ no Teorema A.1. ∎

A.3 Um teorema de ponto fixo

A presente seção irá nos brindar com o famoso Teorema do Ponto Fixo de Banach o qual é muito útil na teoria de equações diferenciais. Uma apresentação mais detalhada deste teorema pode ser vista no livro do Chaim [8] ou em Botelho [6].

Definição A.1 *Seja M um espaço métrico munido com a métrica d. Diz-se que uma aplicação $G : M \to M$ é uma contração quando*

$$d(G(x), G(y)) \leq cd(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

onde c é uma constate real tal que $0 \leq c < 1$.

Teorema A.3 *Sejam (M, d) um espaço métrico completo*[1] *e $G : M \to M$ uma contração. Então, G possui um único ponto fixo em M, isto é, existe $x_0 \in M$ tal que*

$$G(x_0) = x_0.$$

A.4 Resultados da Análise Funcional

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados da análise funcional que serão usados neste trabalho. Uma apresentação detalhada destes resultados pode ser encontrada nos seguintes textos Kreyszing [21], Botelho [6], Oliveira [28] e Brézis [7].

Definição A.2 *Um espaço vetorial normado X é chamado espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy*[2] *for convergente em X.*

O leitor interessado em estudar alguns exemplos de espaços de Banach pode encontra-los em [21], [6] ou [28].

Definição A.3 *Sejam X e Y espaços de Banach. Diz-se que um operador linear $T : X \to Y$ é limitado quando existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Prova-se que um operador linear limitado é contínuo e reciprocamente. O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de X em Y é denotado por $\mathcal{L}(X, Y)$. Quando $X = Y$, escrevemos $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X, Y)$.

[1] Para mais detalhes, veja Lima [24] ou Hygino [9].

[2] Para mais detalhes, veja Lima [24].

Teorema A.4 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(X,Y)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in X$ existe uma constante $C_x > 0$ tal que*

$$\sup_{i\in I}\|T_i x\| < C_x.$$

Então, $\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$.

Demonstração: Para mais detalhes, veja [6]. ∎

Teorema A.5 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Então, T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ [3] é fechado em $X \times Y$.*

Demonstração: Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [28] ou [6]. ∎

Definição A.4 *Um espaço com produto interno que é Banach na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert.*

Exemplos de espaços de Hilbert podem ser encontrados em [6], [7] ou [28].

Teorema A.6 (Riesz-Fréchet) *Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y_0\rangle, \quad \forall x \in H.$$

Demonstração: Para mais detalhes, veja [6]. ∎

Definição A.5 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Diz-se que T é compacto quando para toda sequência limitada $(x_n) \subset X$, a sequência $(T(x_n))$ possui uma subsequência convergente em Y.*

Definição A.6 *Sejam X e Y com $X \subset Y$ espaços normados munido com as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente.*

(i) *Diz-se que X está imerso continuamente em Y quando a aplicação identidade $I : X \to Y$ é um operador contínuo.*

(ii) *Diz-se que X está imerso compactamente em Y quando a aplicação identidade $I : X \to Y$ é um operador compacto.*

[3] $G(T) = \{(x, Tx); x \in D(T)\}$.

Em geral, para dizer que o espaço X está imerso no espaço Y faz-se o uso da seguinte notação

$$X \hookrightarrow Y.$$

Neste caso, temos que deixar claro se a imersão é contínua ou compacta pois a simbologia empregada por sí só não esclarece tal fato.

Definição A.7 *Seja X um espaço de Banach. Diz-se que uma sequência $(x_n) \subset X$ converge fracamente para $x \in X$ quando*

$$f(x_n) \to f(x), \quad \forall f \in X',$$

onde X' é o dual topológico de X.

Para indicar que uma sequência $(x_n) \subset X$ converge fracamente para um elemento $x \in X$ usa-se a notação

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{em} \quad X.$$

Teorema A.7 *Seja X um espaço normado. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então a sequência $(\|x_n\|)$ é limitada.*

Demonstração: Para mais detalhes, veja [7] ou [6]. ■

Teorema A.8 *Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se T é compacto, então*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad X \quad \Rightarrow \quad T(u_n) \to T(u) \quad em \quad Y.$$

Demonstração: Para uma demonstração, veja [6]. ■

Definição A.8 *Um espaço normado X é dito reflexivo quando o megulho canônico $J_X : X \to X''$[4] definido por*

$$J_X(x)(f) = f(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X'$$

for sobrejetor, isto é, $J_X(X) = X''$.

Teorema A.9 *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração: Para mais detalhes, veja [7] ou [6]. ■

Teorema A.10 *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada admite uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração: Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6]. ■

[4] Detalhes sobre o espaço X'' e a aplicação J podem ser encontrados em [7] ou [6].

Apêndice B

Algumas propriedades dos Espaços de Lesbegue

Neste apêndice, vamos recordar a definição dos Espaços de Lebesgue e algumas de suas principais propriedades. A teorias aqui apresentada pode ser encontrada nos seguintes textos Adams [1], Bartle [3], Folland [17] e Brézis [7].

B.1 Definição e propriedades básicas

Definição B.1 *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < +\infty$. O Espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis tais que*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Em verdade, os elementos de $L^p(\Omega)$ são classes de equivalências de funções como pode ser visto em [3] ou [6]. Em $L^p(\Omega)$, define-se uma norma da seguinte maneira

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{B.1}$$

Para provar que (B.1) define uma norma é necessário que se faça um estudo das seguintes desigualdades como pode ser visto em [1] ou [3].

Lema B.1 (Desigualdade de Young) *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se a, b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Uma vez que a função logarítmica é côncava, tem-se

$$\log\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log a + \log b = \log ab.$$

Tendo em vista que ela é também crescente,

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema B.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $p, q > 1$ tais que*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |uv|dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |v|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração: Para mais detalhes, veja [17] ou [6]. ■

Teorema B.2 (Desigualdade de Minkowski) *Seja $1 \leq p < +\infty$. Se $u, v \in L^p(\Omega)$, então $u+v \in L^p(\Omega)$ e*

$$\left(\int_\Omega |u+v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração: Veja [1] ou [3]. ■

Teorema B.3 *Se $1 \leq p < +\infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma definida em (B.1).*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6]. ■

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Definição B.2 *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$. O Espaço de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que*

$$|u(x)| \leq C, \quad q.s. \text{ em } \quad \Omega.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ admite uma norma a qual é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \quad \text{q.s. em} \quad \Omega\}. \tag{B.2}$$

Observe que se $u \in L^\infty(\Omega)$, então

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{q.s. em} \quad \Omega.$$

Teorema B.4 *O espaço $L^\infty(\Omega)$ munido com a norma definida em (B.2) é de Banach.*

Demonstração: Para mais detalhes, veja [3] ou [6]. ■

O próximo resultado desempenha um papel muito importante neste trabalho como pode ser constatado pelo leitor durante a leitura deste trabalho.

Teorema B.5 *Se Ω é limitado e $1 \leq q < p \leq +\infty$, então a imersão*

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é contínua.

Demonstração: Seja $u \in L^p(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |u|^q dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{q}{p-q}} = |\Omega|^{\frac{q}{p-q}} \|u\|^q_{L^p(\Omega)} < +\infty$$

mostrando que $u \in L^q(\Omega)$. Ademais,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p-q}} \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

mostrando que a inclusão $i : (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}) \to (L^q(\Omega), \|\cdot\|_{L^q(\Omega)})$ definida por $i(u) = u$ é contínua. ■

Teorema B.6 *Se (u_n) converge para u em $L^p(\Omega)$, então existem uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) e $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

(a) $u_{n_j}(x) \to u(x)$, *q.s. em* Ω;

(b) $|u_{n_j}(x)| \leq h(x)$, $\forall j \in \mathbb{N}$, *q.s. em* Ω.

Demonstração: Para mais detalhes, veja [7]. ■

Teorema B.7 *Se $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ converge forte para $u \in L^p(\Omega)$ e $(v_n) \subset L^q(\Omega)$ converge fraco para $v \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$\int_\Omega u_n v_n dx \to \int_\Omega uv dx \quad \textit{quando} \quad n \to +\infty.$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u_n v_n dx - \int_\Omega uv dx\right| &\leq \left|\int_\Omega (u_n v_n - uv) dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |u_n v_n - uv_n| dx + \left|\int_\Omega (uv_n - uv) dx\right|. \end{aligned} \tag{B.3}$$

De acordo com o Teorema A.7, existe $C > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pois $(v_n) \subset L^q(\Omega)$ converge fraco para $v \in L^q(\Omega)$. Utilizando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n v_n - uv_n| dx &\leq \left(\int_\Omega |u_n - u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v_n| dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Por outro lado, como $J : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(v) = \int_\Omega vu dx, \quad u \in L^p(\Omega)$$

é um funcional linear limitado e $(v_n) \subset L^q(\Omega)$ converge fraco para $v \in L^q(\Omega)$,

$$\int_\Omega v_n u dx \to \int_\Omega vu dx \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{B.5}$$

Combinando (B.3), (B.4) e (B.5),

$$\int_\Omega u_n v_n dx \to \int_\Omega uv dx \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema B.8 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado e f uma função contínua. Se (u_n) é uma sequência satisfazendo*

$$u_n \to u \quad q.s. \ em \quad \Omega$$

e $f(u_n)$ é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ para $p > 1$, então

$$f(u_n) \rightharpoonup f(u) \quad em \quad L^p(\Omega).$$

Demonstração: Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em Muñoz Rivera [27]. ■

Teorema B.9 (de Tonelli) *Sejam* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *e* $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável satisfazendo*

$$\int_{\Omega_2} |F(\cdot, y)dy < +\infty, \quad q.s. \ em \quad \Omega_1$$

e

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |F(x, y)dy\, dx < +\infty.$$

Então, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Demonstração: Veja [7] ou [3]. ■

Teorema B.10 *Suponha que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Então, para quase todo* $x \in \Omega_1$, $F(x, y) \in L^1(\Omega_2)$ *e*

$$\int_{\Omega_2} F(x, y)dy \in L^1(\Omega_1).$$

Do mesmo modo, para quase todo $y \in \Omega_2$, $F(x, y) \in L^1(\Omega_1)$ *e*

$$\int_{\Omega_1} F(x, y)dy \in L^1(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x, y)dy\, dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(x, y)dx\, dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y)dx\, dy.$$

Demonstração: Para mais detalhes, veja [7] ou [3]. ■

Teorema B.11 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto. Então* $C_0^\infty(\Omega)$[1] *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para qualquer* $1 \leq p < +\infty$.

Demonstração: Para uma demonstração, veja [7]. ■

B.2 O Teorema da Convergência Dominada

Os resultados apresentados nesta seção são muito úteis quando queremos mostrar certas convergências nos Espaços de Lebesgue. Um estudo detalhado acerca destes resultados pode ser encontrado em [17] ou [3].

Teorema B.12 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

$$f_n(x) \to f(x), \quad q.s. \ em \quad \Omega$$

[1] $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $C^\infty(\Omega)$ que tem suporte compacto em Ω. Para mais detalhes, veja [7] ou [25].

e existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ *satisfazendo*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad q.s. \ em \quad \Omega.$$

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_n \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Demonstração: Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [17] ou [3]. ■

Corolário B.12.1 *Seja* $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável para cada* $t \in [a, b]$. *Se para algum* $t_0 \in [a, b]$

$$f(x, t_0) = \lim_{t \to t_0} f(x, t),$$

para cada $x \in \Omega$, *e existe uma função* g *integrável em* Ω *tal que*

$$|f(x, t)| \leq g(x).$$

Então,

$$\int_\Omega f(x, t_0)dx = \lim_{t \to t_0} \int_\Omega f(x, t)dx.$$

Demonstração: Veja [3]. ■

Teorema B.13 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções mensuráveis com*

$$f_n(x) \to f(x), \quad q.s. \ em \quad \Omega.$$

Suponha que

(i) $|f_n(x)| \leq g_n(x), \quad q.s. \ em \quad \Omega;$

(ii) $g_n(x) \to g(x), \quad q.s. \ em \quad \Omega;$

(iii)

$$\lim_n \int_\Omega g_n(x)dx = \int_\Omega g(x)dx < +\infty.$$

Então, f *é integrável e*

$$\lim_n \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Demonstração: Para mais detalhes, veja [17]. ■

Apêndice C

Algumas noções sobre Espaços de Sobolev

O estudo que iremos apresentar neste apêndice será baseado em Adams [1], Kesavan [19], Medeiros [25] e Brézis [7].

C.1 Definição e propriedades básicas

Definição C.1 *Sejam $1 \leq p < +\infty$, m um inteiro não negativo e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo o seguinte subconjunto de $L^p(\Omega)$,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ é uma N-upla de inteiros não negativos com

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

e $D^\alpha u$ denota a derivada de u no sentido das distribuições.

Em $W^{m,p}(\Omega)$, define-se a norma de u por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $m = 0$, usamos a notação

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Teorema C.1 *O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ é de Banach.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [1]. ■

O caso $p = 2$ irá desempenhar um papel muito importante neste estudo devido uma propriedade que veremos à seguir. Neste caso, denotamos o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Assim,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição C.2 *O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ na topologia usual, isto é,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}.$$

Podemos observar que $W_0^{m,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{m,p}(\Omega)$. Logo, o mesmo é um espaço de Banach.

O próximo resultado que vamos apresentar é muito importante devido sua grande utilidade em estudos envolvendo espaços de Sobolev.

Teorema C.2 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado em relação a alguma direção do $\mathbb{R}^N$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular,

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega),$$

define uma norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ que é equivalente a norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Demonstração: Para mais detalhes, veja [19]. ■

Proposição C.1 *Se (u_n) converge para u em $H^1(\Omega)$, então existem $h \in H^1(\Omega)$ e uma subsequência (u_k) de (u_n) tais que*

$$u_k(x) \to u(x) \quad e \quad |u_k(x)| \leq h(x) \quad q.t.p. \ em \quad \Omega.$$

Caso a convergência ocorra em $H_0^1(\Omega)$, tem-se $h \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5]. ■

Proposição C.2 (Identidades de Green) *Se* $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *então*

$$\int_\Omega u\Delta v dx = \int_\Omega v\Delta u dx \tag{C.1}$$

e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega v\Delta u dx. \tag{C.2}$$

Demonstração: Para mais detalhes veja o livro do Djairo Guedes [12]. ■

C.2 A desigualdade de Trudinger-Moser

O resultado à seguir será muito importante em nosso trabalho durante as aplicações. Uma apresentação completa deste resultado pode ser encontrada em Moser [26].

Teorema C.3 (Desigualdade de Trudinger-Moser) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado e* $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, *com* $N \geq 2$. *Então, para todo* $\alpha > 0$, *tem-se*

$$e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} \in L^1(\Omega).$$

Além disso, existe uma constante $C = C(N) > 0$ *tal que*

$$\sup_{\|u\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C|\Omega|, \quad \forall \alpha \leq \alpha_N,$$

onde $|\Omega|$ *é a medida de Lebesgue de* Ω *em* $\mathbb{R}^N$,

$$\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$$

e ω_{N-1} *é a área da esfera unitária* $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

C.3 Teoremas de imersão

O presente apêndice contém alguns resultados de imersão em espaços de Sobolev que foram usado neste trabalho.

Teorema C.4 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado,* $N \geq 2$, Ω *de classe* C^m *e* $1 \leq p < +\infty$, *então*

(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq \dfrac{Np}{N-mp}$, *se* $mp < N$.

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty$, *se* $mp = N$.

(iii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, *se* $mp > N$.

Demonstração: Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [1], [19] ou [25]. ∎

Teorema C.5 (Rellich-Kondrachov) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado,* $N \geq 2$, Ω *de classe* C^1 *e* $1 \leq p \leq +\infty$, *então as seguintes imersões são compactas*

(i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq \dfrac{Np}{N-p}$, *se* $p < N$.

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty$, *se* $p = N$.

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, *se* $p > N$.

Demonstração: Para mais detalhes, veja [7], [25] ou [1]. ∎

Corolário C.5.1 *Sejam* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$, Ω *de classe* C^{m+1}, $m \geq 0$ *e* $1 \leq p \leq +\infty$. *Então, as seguinte imersões são compactas*

(i) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q \leq \dfrac{Np}{N-p}$, *se* $p < N$.

(ii) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty$, *se* $p = N$.

(iii) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, *se* $p > N$.

Demonstração: Veja [25]. ∎

Apêndice D

Algumas propriedades de C_0-semigrupo

Neste apêndice, vamos apresentar algumas propriedades básicas de C_0-semigrupo. Mas antes, iremos introduzir uma noção de integração em espaços de Banach.

D.1 A integral de Bochner

Nesta seção, veremos algumas propriedades básicas da integral de uma função $f : [a,b] \to X$, onde $[a,b]$ é um intervalo fechado da reta e X é um espaço de Banach. O estudo aqui apresentado é baseado no livro do Lang [22].

No que segue $B([a,b],X)$ denotará o espaço das funções $f : [a,b] \to X$ que são limitada, isto é,

$$B([a,b],X) = \{f : [a,b] \to X;\ f \text{ é limitada}\}$$

munido com a norma

$$\|f\| = \sup_{a \le t \le b} \|f(t)\|.$$

Definição D.1 *Seja X um espaço de Banach. Diz-se que uma função $f : [a,b] \to X$ é uma função escada quando existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a,b]$[1] e $w_1, \dots, w_n \in X$ tais que*

$$f(t) = w_j, \quad \forall t \in (t_{j-1}, t_j).$$

Neste caso, diz-se que f é uma função escada com respeito a partição P.

[1] Para mais detalhes sobre partições de intervalos, veja [23].

Observação D.1 *Se $f, g : [a, b] \to X$ são funções escada, então existe uma partição P tal que f e g são funções escadas com respeito a P.*

Definição D.2 *A integral de uma função escada com respeito a partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é definida por*

$$I_P(f) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) w_j,$$

onde

$$f(t) = w_j, \quad \forall t \in (t_{j-1}, t_j).$$

Lema D.1 *A integral de uma função escada não depende da escolha da partição.*

Demonstração: Seja $f : [a, b] \to X$ uma função escada com respeito a partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Então,

$$f(t) = w_j, \quad \forall t \in (t_{j-1}, t_j).$$

Considere a partição $Q = P \cup \{c\}$ onde $t_{j_0-1} < c < t_{j_0}$ para algum $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Então,

$$f(t) = w_{j_0}, \quad \forall t \in (t_{j_0-1}, c)$$

e

$$f(t) = w_{j_0}, \quad \forall t \in (c, t_{j_0}).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} I_Q(f) &= (t_1 - t_0)w_1 + \cdots + (c - t_{j_0-1})w_{j_0} + (t_{j_0} - c)w_{j_0} + \cdots + (t_n - t_{n-1})w_n \\ &= (t_1 - t_0)w_1 + \cdots + (t_{j_0} - t_{j_0-1})w_{j_0} + \cdots + (t_n - t_{n-1})w_n \\ &= I_P(f). \end{aligned}$$

Sendo Q um refinamento de P, concluímos, por indução, que $I_Q(f) = I_P(f)$. Por fim, se P e Q são partições quaisquer de $[a, b]$,

$$I_Q(f) = I_{P \cup P}(f) = I_P(f),$$

como queríamos demonstrar. ∎

Uma vez que a integral de uma função escada não depende da escolha da partição, ao invés de escrever $I_Q(f)$ para denotar a integral de uma função escada f, vamos escrever apenas $I(f)$.

No que segue, $S([a, b], X)$ denotará o conjunto das funções escada de $[a, b]$ em X. Note que $S([a, b], X)$ é um subespaço de $B([a, b], X)$.

Lema D.2 *A aplicação $I : S([a,b],X) \to X$ é linear e limitada.*

Demonstração: Mostraremos apenas a limitação. Ora, sejam $f : [a,b] \to X$ uma função escada e $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Então,

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) w_j.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|I(f)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) w_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \|w_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \max_{1 \leq j \leq n} \|w_j\| \\ &= (b-a)\|f\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|I(f)\| \leq (b-a)\|f\|, \quad \forall f \in S([a,b],X).$$

Portanto, I é limitado. ■

Lema D.3 *Toda função contínua pode ser aproximada uniformemente por funções escada. Além disso,*

$$C([a,b],X) \subset \overline{S([a,b],X)}.$$

Demonstração: Para mais detalhes, veja [22]. ■

Combinando o Lema D.2 com a Proposição 1.1, obtemos uma extensão de I até $\overline{S([a,b],X)}$. Essa extensão será denotada por

$$\int_a^b f(t)dt$$

e a chamaremos de integral de Bochner da função f. Como consequência do Lema D.3, concluímos que as funções contínuas são integráveis no sentido de Bochner.

Agora vamos mostrar algumas propriedades da integral de Bochner.

Teorema D.1 *Se $a \leq c \leq b$, então*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Demonstração: Seja $f \in \overline{S([a,b],X)}$. Então, existe uma sequência $(f_n) \subset S([a,b],X)$ tal que

$$f_n \to f \quad \text{em} \quad B([a,b],X).$$

Seja

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{j_0} \leq \ldots \leq t_r = b$$

uma partição de $[a, b]$ com $t_{j_0} = c$. Então,

$$f_n(t) = w_j^n, \quad \forall t \in (t_{j-1}, t_j),$$

onde $w_1^n, \ldots, w_r^n \in X$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(t)dt &= \sum_{j=0}^{r}(t_j - t_{j-1})w_j \\
&= \sum_{j=0}^{j_0}(t_j - t_{j-1})w_j + \sum_{j=j_0+1}^{r}(t_j - t_{j-1})w_j \\
&= \int_a^c f_n(t)dt + \int_c^b f_n(t)dt.
\end{aligned}$$

Usando a continuidade da integral,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &= \int_a^b \lim_n f_n(t)dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)dt \\
&= \lim_n \left(\int_a^c f_n(t)dt + \int_a^c f_n(t)dt \right) = \lim_n \int_a^c f_n(t)dt + \lim_n \int_c^b f_n(t)dt
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt &= \int_a^c \lim_n f_n(t)dt + \int_c^b \lim_n f_n(t)dt \\
&= \lim_n \int_a^c f_n(t)dt + \lim_n \int_c^b f_n(t)dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt,$$

encerrando a demonstração. ■

Observação D.2 *Convencionamos*

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$$

Teorema D.2 *Se $f \in \overline{S([a, b], X)}$, então*

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Demonstração: Seja $f \in \overline{S([a,b],X)}$. Então, existe uma sequência $(f_n) \subset S([a,b],X)$ tal que

$$f_n \to f \quad \text{em} \quad B([a,b],X).$$

Seja

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{j_0} \leq \ldots \leq t_r = b$$

uma partição de $[a,b]$ com $t_{j_0} = c$. Então,

$$f_n(t) = w_j^n, \quad \forall t \in (t_{j-1}, t_j),$$

onde $w_1^n, \ldots, w_r^n \in X$. Por conseguinte

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f_n(t)dt \right\| &= \left\| \sum_{j=0}^{r} (t_j - t_{j-1}) w_j^n \right\| \leq \sum_{j=0}^{r} (t_j - t_{j-1}) \|w_j^n\| \\ &= \int_a^b \|f_n(t)\| dt. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Usando a continuidade da integral,

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t)dt \right\| &= \left\| \int_a^b \lim_n f_n(t)dt \right\| = \lim_n \left\| \int_a^b f_n(t)dt \right\| \\ &\leq \lim_n \int_a^b \|f_n(t)\| dt = \int_a^b \left\| \lim_n f_n(t) \right\| dt \\ &= \int_a^b \|f(t)\| \, dt, \end{aligned} \tag{D.2}$$

ou seja,

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt.$$

∎

Teorema D.3 *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $f \in \overline{S([a,b],X)}$ e $F : X \to Y$ é uma aplicação linear limitada, então*

$$F\left(\int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b F(f(t))dt.$$

Demonstração: Seja $f \in \overline{S([a,b],X)}$. Então, existe uma sequência $(f_n) \subset S([a,b],X)$ tal que

$$f_n \to f \quad \text{em} \quad B([a,b],X).$$

Seja

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{j_0} \leq \ldots \leq t_r = b$$

uma partição de $[a,b]$ com $t_{j_0} = c$. Então,

$$f_n(t) = w_j^n, \quad \forall t \in (t_{j-1}, t_j),$$

onde $w_1^n, \dots, w_r^n \in X$. Recorde que

$$\int_a^b f_n(t)dt = \sum_{j=0}^{r} (t_j - t_{j-1}) w_j^n.$$

Uma vez que F é um operador linear, temos

$$F\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = F\left(\sum_{j=0}^{r} (t_j - t_{j-1}) w_j^n\right) = \sum_{j=0}^{r} (t_j - t_{j-1}) F(w_j^n). \tag{D.3}$$

Observe que $F \circ f_n$ é uma função escada de $[a,b]$ em Y, temos

$$\int_a^b (F \circ f_n)(t)dt = \sum_{j=0}^{r} (t_j - t_{j-1}) F(w_j^n). \tag{D.4}$$

Combinando (D.3) e (D.4),

$$\int_a^b (F \circ f_n)(t)dt = F\left(\int_a^b f_n(t)dt\right).$$

Da continuidade de F e da integral, obtemos

$$\int_a^b (F \circ f)(t)dt = F\left(\int_a^b f(t)dt\right).$$

■

Teorema D.4 (Fundamental do Cálculo) *Sejam $f : [a,b] \to X$ uma função contínua e $f : [a,b] \to X$ uma função diferenciável em (a,b) com $F' = f$. Então,*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Defina

$$\varphi(t) = \int_a^t f(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Vamos mostrar que $\varphi'(t) = f(t)$. Com efeito,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f(s)ds - \int_a^t f(s)ds\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds.$$

Note que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds - f(t)\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(f(s)-f(t))ds\right\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|f(s)-f(t)\|ds.\end{aligned}$$

Uma vez que f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(s)-f(t)\| < \varepsilon, \quad \text{quando} \quad |s-t| < \delta.$$

Escolhendo h suficientemente pequeno de modo que

$$|s-t| < \delta, \quad \forall s \in [t, t+h],$$

temos

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|f(s)-f(t)\|ds \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varepsilon ds = \varepsilon.$$

Logo, $\varphi'(t) = f(t)$. Sendo as derivadas de φ e F iguais, devemos ter

$$\varphi(t) + C = F(t), \quad \forall t \in [a,b],$$

onde C é uma constante. Ademais, tendo em vista que $\varphi(a) = 0$, concluímos que $C = F(a)$ e, portanto,

$$F(t) = F(a) + \int_a^t f(s)ds, \quad \forall t \in [a,b].$$

■

D.2 C_0-semigrupo

Os conceitos e resultados que iremos discutir nesta seção são apresentados com mais detalhes nos livros do Kesavan [19] e do Pazy [29].

Definição D.3 *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é dita um C_0-semigrupo quando*

(i) $T(0) = I$, *onde I é o operador identidade em X;*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0;$

(iii) *Para cada $x \in X$,*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x.$$

O resultado à seguir é uma ferramenta muito utilizada no estudo deste trabalho.

Teorema D.5 *Seja* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0*-semigrupo em* X*. Então,*

(i) *Existem* $M \geq 1$ *e* $\beta \geq 0$ *tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) *Para qualquer* $x \in X$*, aplicação* $t \to T(t)x$ *é contínua para* $t \geq 0$*.*

Demonstração: Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [29]. ■

Definição D.4 *Um* C_0*-semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *em* X *é dito uniformemente limitado quando*

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0,$$

para alguma constante $M > 0$*.*

Vamos agora introduzir um dos conceitos mais importantes da teoria de semigrupo.

Definição D.5 *O gerador infinitesimal de um semigrupo é um operador linear* $A : D(A) \to X$ *onde*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Recorde que, para cada $x \in X$, a função $t \to T(t)x$ é contínua para $t \geq 0$. Em particular, a função $\varphi : [0,t] \to X$ definida por $\varphi(s) = T(s)x$ é contínua em $[0,t]$. Logo, faz sentido falar na integral de Bochner para esta função. Consequentemente, podemos considerar o seguinte resultado.

Teorema D.6 *Seja* A *o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *em* X*. Então, para qualquer* $x \in X$*,*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$$

e

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$

Demonstração: Para mais detalhes, veja [19]. ■

Corolário D.6.1 *Se* A *é o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *em* X*, então* A *é fechado e densamente definido.*

Bibliografia

[1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F., *Sobolev Spaces*, 2. ed., London: Academic Press, 2003.

[2] Alves, C. O.; Tahir, B., *Existence of solution for class of nonlocal problem via dynamical methods*, preprint, 2020.

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, New York: Johw Wiley & Sons, 1995.

[4] Bebernes, J. W.; Lacey, A. A., *Global existence and finite-time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems*, Advances in Differential Equation, vol. 2, n. 6, pp. 927-953, (November, 1997).

[5] Bezerra do Ó, J. M.; Medeiros, E.; Severo, U., *On a quasilinear nonhomogeneous elliptic equation with critical growth in* $\mathbb{R}^N$, Journal of Differential Equation, 246, pp. 1363-1386, 2009.

[6] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, 1. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] Brézis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2011.

[8] Chaim, S. H., *Aplicações da Topologia à Análise*, 3º Colóquio Brasileiro de Matemática, Fortaleza-Ceará: 1961.

[9] Domingues, H. H., *Espaços Métrico e Introdução à Topologia*, São Paulo: Atual, 1982.

[10] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, vol. 19, American Mathematical Society, 2010.

[11] Fernandes, C. S.; Bernardes Jr., N. C., *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*, 4. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[12] Figueiredo, D. G., *Equações Elípticas não Lineares*, Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[13] Figueiredo, D. G.; Felmer, P. L., *On Superquadratic Elliptic Systems*, American Mathematic Society, vol. 343, n. 1, pp. 99-116, (May, 1994).

[14] Figueiredo, D. G.; Neves, A F., *Equações diferenciais aplicadas*, 3 .ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[15] Fila, M., *Boundedness of Global Solutions of Nonlocal Parabolic Equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 30, n. 2, pp. 877-885, 1997.

[16] Fila, M., *Boundedness of Global Solutions of Nolinear Diffusion Equations*, Journal Differential Equations, 98, pp. 226-240, 1992.

[17] Folland, G. B., *Real Analysis*: Modern Techniques and Their Applications, 2. ed., New York: Johw Wiley & Sons, 1999.

[18] Henry, D., *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1981.

[19] Kesavan, S., *Topics in Functional Analysis and Applications*, Johw Wiley & Sons, 1989.

[20] Kong, Q.-X.; Ding, X.-L., *A New Fractional Integral Inequality with Singularity and Its Application*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID 937908, 12 pages, (April, 2012).

[21] Kreyszing, E., *Introductory functional analysis with applications*, Canada: Johw Wiley & Sons, 1978.

[22] Lang, S., *Real Analysis*, 2. ed., London: Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

[23] Lima, E. L., *Análise Real volume 1*: Funções de Uma Variável, 12.ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[24] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, 5. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[25] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M., *Espaços de Sobolev*: Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2010.

[26] Moser, J., *A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger*, Indiana University Mathematics Journal, vol. 20, n. 11, pp. 1077-1092, (May, 1971).

[27] Muñoz Rivera, J. E., *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*, 1. ed., Rio de Janeiro: LNCC, 2004.

[28] Oliveira, C. R., *Introdução à Análise Funcional*, 2. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[29] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, vol. 44, New York: Springer-Verlag, 1983.

[30] Quittner, P., *Boundedness of Trajectories of Parabolic Equations and Stationary Solutions via Dynamical Methods*, Differential and Integral Equations, vol. 7, n. 6, pp. 1547-1556, (November, 1994).

[31] Quittner, P., *P. Quittner, Signed Solutions for a Semilinear Slliptic Sroblem*, Differential and Integral Equations, vol. 11, n. 4, , pp. 551?559, (July, 1998).

[32] Quittner, P.; Souplet, P., *Superlinear Parabolic Problems*: Blow-up, Global Existence and Steady States, 2. ed., Birkhäuser, 2019.

[33] Sotomayor Tello, J. M., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[34] Willem, M., *Minimax Theorems*, 1. ed., Birkhäuser Basel, 1996.

[35] Zheng, S., *Nonlinear evolution equations*, Chapman & Hall/CRC, 2004.