Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Semicontinuidade Superior de Atratores Globais Para Uma Classe de Equações de Evolução Não Local

por

Dennys José da Costa Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

S586e Silva, Dennys José da Costa.

Existência e semicontinuidade superior de atratores globais para uma classe de equações de evolução não local / Dennys José da Costa Silva. – Campina Grande, 2021.

100 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação: Prof. Dr. Severino Horácio da Silva".

Referências.

1. Atrator Global. 2. Equação Não Local. 3. Semicontinuidade Superior de Atratores. I. Silva, Severino Horácio da. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

Existência e Semicontinuidade Superior de Atratores Globais Para Uma Classe de Equações de Evolução Não Local

por

Dennys José da Costa Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Flank DM Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Novembro/2021

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus, o alicerce que me deu sustentação nas muitas noites sem dormir ao longo desta difícil caminhada.

Inicio meus agradecimentos com minha noiva Aline, com Alice e meus pais Sandra e Jair pelo apoio moral e financeiro, principalmente no início do Mestrado, o qual foi o momento mais difícil deste trajeto, principalmente devido aos extensos cortes no orçamento da ciência durante o ano de 2019. Ainda neste contexto, agradeço ao professor Fábio Reis, então coordenador do PPGMat, por sua preocupação com os alunos, bem como sua luta na busca de fomento para nossa permanência no Mestrado.

Em seguida, agradeço à Unidade Acadêmica de Matemática da UFCG, que me acolheu desde o primeiro dia que lá estive, e em especial ao meu orientador Severino Horácio pelos valiosos conselhos desde o início do Mestrado até o presente momento. Ele, além de um excelente matemático, é um ser humano incrível.

Agradeço ao meu amigo Cícero Alexandre, por toda ajuda que me deu nas disciplinas, na dissertação, bem como pelas proveitosas conversas após as aulas. Agradeço também a Renan, um ser humano incrível que apareceu na minha vida e que tem me ajudado até aqui, no início do Doutorado. Sem estes dois últimos, provavelmente eu não teria tido o mesmo êxito nesta trajetória.

Agradeço ainda aos professores da UAMat que tive contato durante o Mestrado, principalmente aos professores Angelo Roncalli, Romildo Lima, Henrique Fernandes, Claudianor Alves e Jefferson Abrantes.

Agradeço também aos professores do Centro de Informática e do Departamento de Matemática da UFPB, dentre os quais destaco os professores Moisés Dantas, Roberto Quirino, Bruno Ribeiro e Fernando Xavier. Estes são os responsáveis diretos pelo meu sucesso na Matemática até aqui.

Agradeço ainda aos professores Flank Bezerra e Aldo Trajano pela disponibilidade em avaliar este trabalho.

Finalmente, agradeço ao apoio financeiro da CAPES, crucial para minha permanência no Mestrado.

Dedicatória

À Jackeline C. Silva, minha irmã
(in memoriam).

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de um atrator global para o fluxo gerado pela equação de evolução não local

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -h(x)u(x,t) + g(K_J u(x,t)) + f(x, u(x,t)),$$

no espaço de fase $L^p(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^N$. Além disso, provamos a semicontinuidade superior dos atratores globais com relação aos parâmetros h, J e f presentes na equação.

Palavras-chave: Atrator global, equação não local, semicontinuidade superior de atratores.

Abstract

In this work we study the existence of a global attractor for the flow generated by nonlocal evolution equation

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -h(x)u(x,t) + g(K_J u(x,t)) + f(x,u(x,t)),$$

in the phase space $L^p(\Omega)$, where Ω is a bounded domain and smooth in $\mathbb{R}^N$. Furthermore, we prove and upper semicontinuity of global attractors with respect to the parameters h, J and f present in the equation.
Keywords: Global attractor, nonlocal equation, upper semicontinuity of attractors.

Sumário

Introdução

Problemas de difusão não locais aparecem em diversas áreas diferentes, como neurociência, engenharia dos materiais, medicina, biologia e economia. Muitos autores têm estudado com profundidade a existência, regularidade de soluções e a dinâmica assintótica de diferentes problemas não locais (veja, por exemplo, [1], [10], [12] e [21]).

Neste trabalho, estudamos a dinâmica assintótica da equação de evolução não local

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -h(x)u(x,t) + g(K_J u(x,t)) + f(x, u(x,t)), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é uma domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; com $u = u(x,t)$ uma função de valores reais, $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções continuamente diferenciáveis e K_J um operador integral com um núcleo J simétrico, isto é, $J(x,y) = J(y,x)$ para todo x, $y \in \mathbb{R}^N$. Associado à equação (1), vamos considerar o problema de Neumann assumindo que não há fluxo através da fronteira $\partial\Omega$ (para mais detalhes, veja [2]).

Neste modelo, $u(x,t)$ denota a densidade de magnetização e $f(x, u(x,t))$ descreve a diminuição da densidade de magnetização u no ponto x no tempo $t \geq 0$. Estamos considerando o caso em que $u(x,t)$ decai com velocidade $\frac{1}{h(x)}$, embora tenha uma taxa de produção proporcional a uma função não linear que depende dos pontos em uma vizinhança de x através da função de conectividade J.

Nesta dissertação, estudamos o modelo (1), no qual os autores consideram uma variação dos modelos presentes em [3] e [21]. Mais precisamente, no modelo (1) os autores consideram o termo $-h(x)u(x,t)$ ao invés de $-u(x,t)$ e adicionam o termo de reação não linear $f(x, u(x, t))$. Neste sentido, os termos $h(x)$ e $f(x, u(x))$ são as principais diferenças em relação aos trabalhos citados, onde os modelos que são considerados não tem o termo de reação f ou tem uma taxa de decaimento h constante.

Em [3] e [20], os autores estudam a seguinte equação:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + tanh(\beta(J \star u)(x,t) + m), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

onde $\beta > 1$, $J \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ é uma função não negativa com integral igual a 1 e suporte no intervalo $[-1, 1]$, e m é uma constante positiva.

A equação (2) é conhecida na literatura como Modelo de Ising, que constitui uma importante ferramenta para o estudo de materiais com propriedades magnéticas. Esta equação pode ser obtida como caso particular de (1), com $g = tanh$, o operador K sendo o produto convolução e $h \equiv 1$

Em [21], os autores consideram o seguinte problema:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + g(\beta J \star u(x,t) + \beta h), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

onde h, β são constantes não negativas, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suficientemente suave e $J \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ é uma função não negativa com suporte no intervalo $[-1, 1]$ e integral igual a 1. O símbolo $\star$ denota o produto convolução.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, seguindo [8], [9], [11], [13], [14], [16], [23] e [25], exibimos importantes definições e resultados que serão utilizados no decorrer do texto. Para tornar o texto mais didático, repetimos algumas demonstrações detalhadas em [7] e [19], as quais seguem ideias de algumas referências citadas acima. No capítulo 2, seguindo [5], estudamos o problema de Cauchy associado à equação (1). Mais especificamente, mostramos que o problema de Cauchy está bem posto no espaço de fase $L^p(\Omega)$, que a solução gera um fluxo $C([0, s); L^p(\Omega)) \cap C^1([0, s); L^1(\Omega))$ e que a equação (1) tem um atrator global em $L^p(\Omega)$. No Capítulo 3, estudamos a semicontinuidade superior dos atratores globais com relação ao núcleo J e às funções h e f, estendendo o resultado obtido em [5]. Finalmente, no Apêndice, exibimos alguns resultados clássicos que de alguma forma foram utilizados neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados importantes que serão usados no decorrer do texto.

1.1 Teoremas de Existência e Unicidade em Espaços de Banach

Nesta seção, seguindo [11], [14], [16] e [25], exibimos alguns resultados sobre existência e unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach. Alguns resultados são detalhados em [7] e [19], mas repetimos aqui para tornar o texto mais didático.

Seja X um espaço de Banach arbitrário. Consideremos a seguinte equação diferencial em X.

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \tag{1.1}$$

com

$$\begin{aligned} f : I \times X &\to X \\ (t, u) &\mapsto f(t, u) \end{aligned}$$

onde f é uma função contínua, e I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Uma função continuamente diferenciável $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to X$ é dita uma solução (clássica) de (1.1) no intervalo I se:

(i) O gráfico de φ em I, ou seja, o conjunto $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido no domínio de f;

(ii) $\frac{d}{dt}\varphi(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.

O problema de Cauchy para (1.1) com condições iniciais (t_0, u_0) é dado por

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = f(t,u), \\ &u(t_0) = u_0, \quad (t_0, u_0) \in I \times X. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Lema 1.1 *O problema (1.2) é equivalente à equação integral*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \;\; t_0, t \in I. \tag{1.3}$$

Demonstração: De fato, integrando ambos os lados de (1.2) de t_0 a t, obtemos

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

Reciprocamente, derivando (1.3) com relação a t, obtemos

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t)).$$

Ademais, note que $u(t_0) = u_0$. ■

Observação 1.1 *Se no problema de Cauchy (1.2) tivermos*

$$f(t, u) = Au + g(t, u),$$

com $A : X \to X$ um operador linear contínuo, então a solução de (1.2) é dada por

$$\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}g(s, u(s))ds,$$

onde e^{At} é o operador linear contínuo dado por $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$.

De fato, observe que

$$\frac{du}{dt} = Au + g(t,u). \tag{1.4}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade (1.4) por e^{-At}, obtemos

$$e^{-At}\frac{du}{dt} - e^{At}Au = e^{-At}g(t,u).$$

Agora, note que,

$$e^{-At}\frac{du}{dt} - e^{At}Au = \frac{d}{dt}\left[e^{-At}u\right].$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}u\right] = e^{-At}g(t,u). \tag{1.5}$$

Integrando (1.5) de t_0 a t, obtemos

$$e^{-At}u(t) - e^{-At_0}u(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-As}g(s,u(s))ds.$$

Agora, multiplicando ambos os membros da igualdade acima por e^{At}, obtemos

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}g(s,u(s))ds.$$

Veremos a seguir que sob determinadas condições impostas à função f, podemos garantir existência e unicidade local e/ou global de solução para equações diferenciais ordinárias. Quando $X = \mathbb{R}^N$, por exemplo, o clássico Teorema de Picard garante existência e unicidade para (1.2).

Definição 1.1 *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que uma aplicação $f : X \to X$ é localmente Lipschitz contínua (ou simplesmente localmente Lipschitz) se, para cada $u_0 \in X$, existe uma constante $C > 0$ e uma vizinhança de u_0, $V = \{u \in X : \|u - u_0\| < b\}$, tal que se u e v pertencem a V, então $\|f(u) - f(v)\| \leq C\|u - v\|$. Dizemos ainda que f é Lipschitz contínua em conjuntos limitados se a vizinhança V na definição anterior pode ser tomada como qualquer vizinhança limitada em X.*

Observação 1.2 *As duas definições na Definição 1.1 são equivalentes se o espaço normado X for localmente compacto (veja [18], p. 262).*

Teorema 1.2 (Teorema de Picard) *Seja $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{u; \|u - u_0\| \leq b\}$. Suponha $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ contínua e lipschitziana na segunda variável. Se $|f| \leq M$ em Ω com $M > 0$, então existe uma única solução de (1.2) em I_α, onde $\alpha = min\{a, b/M\}$.*

Demonstração: Veja [25]. ∎

O próximo resultado generaliza o Teorema de Picard.

Teorema 1.3 (Existência Local) *Sejam X um espaço de Banach e $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}\times X$. Suponha que em uma vizinhança do ponto (t_0, u_0) a função f é contínua em t e é Lipschitziana na segunda variável, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq C\|u - v\|. \tag{1.6}$$

Então existe uma vizinhança de t_0 tal que o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = f(t,u), \\ &u(t_0) = u_0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

tem uma única solução.

Demonstração: Seguimos a mesma prova dada em [19], a qual utiliza a ideia de Daleciï e Kreïn em [11].

Como f é contínua em t, fixado $\eta > 0$ e $u \in X$ tal que $\|u - u_0\| < \eta$, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(t,u) - f(t_0,u)\| \leq \epsilon, \tag{1.8}$$

sempre que $|t - t_0| \leq \delta$. Sendo f Lipschitz na segunda variável, segue que

$$\|f(t,u) - f(t,u_0)\| \leq C\|u - u_0\| \leq C\eta. \tag{1.9}$$

Usando a norma da soma, obtemos

$$\|(t,u) - (t_0,u_0)\| = \|(t - t_0, u - u_0)\| = |t - t_0| + \|u - u_0\| \leq \delta + \eta. \tag{1.10}$$

Agora, de (1.8) e (1.9), temos que

$$\begin{aligned} \|f(t,u) - f(t_0,u_0)\| &= \|f(t,u) - f(t,u_0) + f(t,u_0) - f(t_0,u_0)\| \\ &\leq \|f(t,u) - f(t,u_0)\| + \|f(t,u_0) - f(t_0,u_0)\| \\ &\leq C\eta + \epsilon. \end{aligned}$$

Daí, fazendo $\rho = C\eta + \epsilon$, temos que

$$\|(t,u) - (t_0,u_0)\| \leq \delta + \eta,$$

o que implica que

$$\|f(t,u) - f(t_0,u_0)\| \leq \rho,$$

ou seja, existe uma vizinhança V de (t_0, u_0) tal que f é contínua em V. Segue daí que f é limitada nesta vizinhança (ver [17], Teorema 2, p.225). Logo, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|f(t,u)\| \leq C_1 < \infty, \tag{1.11}$$

para todo $(t, u) \in V$. Agora, considere $\alpha = min\{\delta, \frac{\eta}{C_1}\}$ e denote por $C_\alpha(X)$ o espaço das funções contínuas u que são definidas para $|t - t_0| \leq \alpha$ assumindo valores em X, isto é,

$$\begin{aligned} u : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] &\to X \\ t &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

equipado com a norma

$$|\|u\|| = \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|u(t)\|, \tag{1.12}$$

o qual sabemos da Análise Funcional que é um espaço de Banach (veja, por exemplo, [15]).

Seja agora

$$\mathbf{B}_\eta = \{u \in C_\alpha(X) : |\|u - u_0\|| \leq \eta\},$$

e considere T um operador sobre $\mathbf{B}_\eta$ definido por

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, u(s))ds.$$

Observe que $T(\mathbf{B}_\eta) \subset \mathbf{B}_\eta$, pois dado $u \in \mathbf{B}_\eta$, temos que

$$\|(Tu)(t) - u_0\| \leq \alpha C_1. \tag{1.13}$$

De (1.12) e (1.13) temos

$$\begin{aligned} |\|Tu - u_0\|| &= \sup_{|t-t_0|} \|(Tu)(t) - u_0\| \\ &\leq \alpha C_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\|Tu - u_0\|| \leq \frac{\eta}{C_1} C_1 = \eta.$$

Portanto,

$$T : \mathbf{B}_\eta \subset X \to \mathbf{B}_\eta.$$

Agora suponha, sem perda de generalidade, que $t \geq t_0$.

Para u_1 e u_2 em $\mathbf{B}_\eta$, da hipótese de f ser Lipschitz, temos

$$\begin{aligned}\| (Tu_1)(t) - (Tu_2)(t) \| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,u_2(s)) - f(s,u_1(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} C\|u_2(s) - u_1(s)\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} C|\|u_2 - u_1\|| ds.\end{aligned}$$

Daí,

$$\|Tu_2(t) - Tu_1(t)\| \leq C(t-t_0)|\|u_2 - u_1\||. \tag{1.14}$$

Usando (1.14), obtemos

$$\begin{aligned}\| \left(T^2u_2\right)(t) - \left(T^2u_1\right)(t) \| &= \|T\left(Tu_2\right)(t) - T\left(Tu_1\right)(t)\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,Tu_2(s)) - f(s,Tu_1(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} C\| \left(Tu_2\right)(s) - \left(Tu_1\right)(s) \| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} CC\left(s-t_0\right)|\| \, u_2 - u_1\|| ds \\ &= C^2|\|u_2 - u_1\|| \int_{t_0}^{t} \left(s-t_0\right) ds \\ &\leq C^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} |\|u_2 - u_1\||.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\| \left(T^2u_2\right)(t) - \left(T^2u_1\right)(t) \| \leq C^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} |\|u_2 - u_1\||.$$

Prosseguindo com o mesmo argumento, para a n-ésima composição, obtemos

$$\| \left(T^nu_2\right)(t) - \left(T^nu_1\right)(t) \| \leq \frac{1}{n!} C^n (t-t_0)^n |\|u_2 - u_1\||.$$

Portanto,

$$|\| \left(T^nu_2\right) - \left(T^nu_1\right) \|| \leq \frac{(C\alpha)^n}{n!} |\|u_2 - u_1\||.$$

Uma vez que, para n suficientemente grande, $0 < \frac{(C\alpha)^n}{n!} < 1$, pois $n!$ cresce mais rápido que $(C\alpha)^n$, segue do Lema da Contração (Veja [25]), que o operador possui um único ponto fixo, isto é, existe um único $u \in \mathbf{B}_\eta$ tal que $(Tu)(t) = u(t)$. Portanto,

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s)) ds \quad \text{e} \quad u(t_0) = u_0.$$

Segue então do Lema 1.1 que $u(t)$ satisfaz (1.2), donde segue o resultado. ■

Observação 1.3 *O Teorema 1.3 apenas garante a existência de soluções em uma certa vizinhança de t_0, mas, tendo construído uma solução no intervalo $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, podemos tentar estendê-la. É óbvio que podemos prosseguir com tal argumento indefinidamente se, por exemplo, as condições (1.6) e (1.11) são satisfeitas para todo t e u em X com as mesmas constantes C e C_1. Em particular, se as condições (1.6) e (1.11) estão satisfeitas para todo $t \in [\alpha, \infty)$, $\|u-u_0\| \leq \eta$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e a solução u de (1.1) é tal que $\|u(t)-u_0\| \leq \eta_0 < \eta$, então podemos estender a solução indefinidamente quando $t \to \infty$.*

No teorema a seguir, mostramos que, sob condições impostas à função f, o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = f(t,u), \ \ t \geq t_0; \\ &u(t_0) = u_0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

admite existência global de solução, onde $f : J \times X \to X$, com $J = [t_0, +\infty)$, X um espaço de Banach e $u_0 \in X$.

No que segue, assumimos que $f(t,u)$ satisfaz condições suficientes para garantir existência local de solução para o problema de Cauchy (1.15). Por exemplo, $f(t,u)$ pode ser localmente Lipschitziana na variável u.

Teorema 1.4 *Suponha que:*

(i) $\Phi \in C[J \times [0,\infty), [0,\infty)]$, $\Phi(t,r)$ *seja não decrescente em* $r \geq 0$ *para todo* $t \in J$ *e a solução maximal* $r(t;t_0,r_0)$ *do problema de valor inicial escalar*

$$\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} = \Phi(t,r), \quad r \geq t_0; \\ &r(t_0) = r_0, \end{aligned} \tag{1.16}$$

existe para todo $t \in J$.

(ii) $f \in C[J \times X, X]$ *e para todo* $(t,u) \in J \times X$

$$\|f(t,u)\| \leq \Phi(t, \|u\|).$$

Então o intervalo máximo de existência de qualquer solução $u(t;t_0,u_0)$ *do problema de valor inicial (1.15) é dado por* J. *Além disso, se* $r(t;t_0,r_0)$ *for limitada em* J, *então o limite* $\lim_{t\to\infty} u(t;t_0,u_0)$ *existe e é um elemento em* X.

Demonstração: Seguimos a demonstração dada em [7], a qual foi baseada em [16].

Considere uma solução $u(t) = u(t; t_0, u_0)$ de (1.15) com $\|u_0\| \leq r_0$, que existe no intervalo $[t_0, \beta)$, para todo $t_0 < \beta < \infty$, de sorte que o valor de β não possa ser estendido.

Agora, defina $m(t) = \|u(t)\|$, para $t_0 \leq t < \beta$. Então,

$$m(t+h) - m(t) = \|u(t+h)\| - \|u(t)\| \leq \|u(t+h) - u(t)\|,$$

donde,

$$\frac{m(t+h) - m(t)}{h} \leq \frac{\|u(t+h) - u(t)\|}{h}, \ (h > 0). \tag{1.17}$$

Fazendo $h \to 0^+$ em (1.17) e usando (ii), temos

$$D^+m(t) \leq \|u'(t)\| = \|f(t, u(t))\| \leq \Phi(t, \|u(t)\|) = \Phi(t, m(t)), \ t_0 \leq t < \beta,$$

onde $D^+m(t)$ é a derivada à direita de $m(t)$, e $m(t_0) = \|u(t_0)\| = \|u_0\| \leq r_0$. Daí,

$$m(t) - m(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} \Phi(s, m(s))ds,$$

donde,

$$\begin{aligned} m(t) &\leq m(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s, m(s))ds \\ &\leq r_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s, \|u(s)\|)ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1, temos que $r_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s, \|u(s)\|)ds$ é uma solução do problema de valor inicial escalar (1.16), com $\Phi(t, r) = \Phi(t, \|u(t)\|)$. Portanto,

$$\|u(t)\| \leq r(t), \ t_0 \leq t < \beta. \tag{1.18}$$

Agora, devemos estabelecer que $\lim_{t \to \beta^-} u(t)$ existe e é um elemento em X. De fato, sendo $\Phi(t, r)$ não-descrescente em $r \geq 0$, então para quaisquer t_1, t_2 tais que $t_0 \leq t_1 < t_2 < \beta$, temos

$$\begin{aligned} \|u(t_2) - u(t_1)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s))ds \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \Phi(s, \|u(s)\|)ds \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \Phi(s, r(s))ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} r'(s)ds. \\ &= r(t_2) - r(t_1). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Deste modo,

$$\|u(t_2) - u(t_1)\| \leq r(t_2) - r(t_1).$$

Como $\lim_{t\to\beta^-} r(t)$ existe e é finito, então tomando os limites t_1,$t_2 \to \beta^-$, temos que

$$\|u(t_2) - u(t_1)\| \to 0.$$

Daí, pelo critério de Cauchy para funções (ver [18]), segue que $\lim_{t\to\beta^-} u(t)$ existe.

Defina agora $u(\beta) = \lim_{t\to\beta^-} u(t)$, e considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u' &= f(t,u), \\ u(\beta) &= u_\beta. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Uma vez que assumimos existência local de solução através de qualquer ponto de $J\times X$, obtemos que a solução $u(t)$ de (1.20) existe em uma vizinhança de β, ou seja, o intervalo de existência de solução pode ser estendido além de β, o que é absurdo, pois assumimos que o valor de β não pode ser estendido. Segue então que qualquer solução de (1.15) existe sobre $[t_0,\infty)$, donde (1.18) e (1.19) valem com $\beta = \infty$.

Ademais, como $\Phi(t,r) \geq 0$, temos que $r(t)$ é não-decrescente em J, e supondo que $r(t)$ é limitada sobre J, concluímos que $\lim_{t\to\infty} r(t)$ existe e é finito. Segue deste fato e de (1.18) e (1.19), com $\beta = \infty$, que $\lim_{t\to\infty} u(t)$ existe e é um elemento em X. ∎

Observação 1.4 *Substituindo $J = [t_0,\infty)$ por $I = (-\infty, t_0]$ no Teorema 1.4, este pode ser estabelecido para o problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(t,u), t \leq t_0, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

onde $f : I \times X \to X$. Então, substituindo J por I na hipóteses (i) e (ii) do Teorema 1.4, a mesma conclusão do Teorema 1.4 vale para as soluções de (1.21) com $\lim_{t\to-\infty} u(t; t_0, u_0)$*. Os intervalos J e I podem ser substituídos por quaisquer intervalos $[t_0, t_0+\alpha)$ e $(t_0-\alpha, t_0]$, respectivamente.*

1.2 Semigrupos e Conjuntos Invariantes

Nesta seção, seguindo [9] e [13], exibimos definições e resultados sobre semigrupos contínuos. No que segue, salvo menção em contrário, X denota um espaço métrico e

d a sua métrica. Além disso, utilizamos as seguintes notações: $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$, $\mathbb{R}_t^- = t + \mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}_t^+ = t + \mathbb{R}^+$.

Definição 1.5 *Seja X um espaço métrico. Um Semigrupo é uma família de operadores (não necessariamente lineares) $S(t) : X \to X$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $S(0) = I$ *(Operador Identidade sobre X);*

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall\ t,s \geq 0$;

(iii) $S(t)u_0$ *é contínuo em t e u_0.*

Observação 1.5 *Se X é um espaço de Banach, dizemos que a família de operadores $S(t) : X \to X$ é um C^r-Semigrupo, $r \geq 0$, quando, além de satisfazer (i), (ii) e (iii) na definição acima, $S(t)u_0$ tem derivada de Fréchet contínua em u_0 até a ordem r, para $(t, u_0) \in \mathbb{R}^+ \times X$.*

Consideramos sistemas dinâmicos cuja evolução é descrita por um semigrupo sobre X. Posteriormente, mostraremos que sob hipóteses adequadas sobre a função f, a solução do problema de Cauchy (1.2) gera um C^0-semigrupo.

Dado o semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ e um subconjunto B de X, definimos:

Para cada $t \in \mathbb{R}$, a imagem de B sob $S(t)$ como

$$S(t)B := \{S(t)u_0 : u_0 \in B\};$$

A órbita positiva de B como sendo o conjunto

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} S(t)B;$$

A órbita parcial entre dois números reais $t, t' \geq 0$, com $t < t'$

$$\gamma^+_{[t,t']}(B) := \bigcup_{t \leq s \leq t'} S(s)B;$$

A órbita de $S(t)B$,

$$\gamma_t^+(B) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}^+} S(s+t)B = \bigcup_{s \in \mathbb{R}_t^+} S(s)B.$$

Definição 1.6 *Um subconjunto Y de um espaço métrico X é dito um conjunto relativamente compacto se seu fecho é compacto.*

Definição 1.7 *Um semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é dito eventualmente limitado se para cada conjunto limitado $B \subset X$ existe $t_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma_{t_B}^+(B)$ é limitado. Dizemos que o semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.*

O conjunto onde a órbita de B se acumula é chamado de conjunto ω-limite e seu papel no estudo do comportamento assintótico de um semigrupo é crucial. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 1.8 *O conjunto ω-limite de um subconjunto B de X é definido por*

$$\omega(B) := \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Definição 1.9 *Uma solução global de $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ por $u_0 \in X$ é uma função contínua $u : \mathbb{R} \to X$ tal que $u(0) = u_0$ e $S(t)(u(s)) = u(t+s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ com $t \geq 0$. Uma solução global constante será chamada de solução estacionária e seu valor um ponto de equilíbrio. Como $S(t)$ não é necessariamente injetiva, se existe uma solução global ela não precisa ser única. Quando existe uma solução global $u : \mathbb{R} \to X$ por $u_0 \in X$, definimos a órbita global de u_0 relativa à solução global u por $\{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Neste caso, para $t \in \mathbb{R}$ escrevemos $(\gamma_u)_t^-(u_0) := \{u(s) : s \leq t\}$ e definimos o conjunto α-limite de u_0 relativo a solução global u por*

$$\alpha(u_0) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^-} \overline{(\gamma_u)_t^-(u_0)}.$$

A seguir, temos uma importante caracterização do ω-limite (veja [9], p. 10), a qual será utilizada nos resultados que se seguem.

Proposição 1.10 *Se $B \subset X$, $\omega(B)$ é fechado em X. Além disso, dado $\varphi \in X$, $\varphi \in \omega(B)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{\varphi_n\}$ em B e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $S(t_n)\varphi_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração: Primeiramente, $\omega(B)$ é um conjunto fechado em X, pois é interseção arbitrária de conjuntos fechados.

Agora, para mostrar a caracterização, tome $\varphi \in \omega(B)$. Assim,

$$\varphi \in \overline{\gamma_t^+(B)}, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^+,$$

isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{\varphi_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que

$$\varphi_k^n \to \varphi, \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Como $\varphi_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, existem $\{\varphi_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tais que

$$\varphi_k^n = S(n + q_k^n)\varphi_k^n.$$

Ora, sabemos que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k(n,\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\varphi_k^n, \varphi) < \epsilon,$$

sempre que $k \geq k(n,\epsilon)$, isto é,

$$d(S(n + q_k^n)\varphi_k^n, \varphi) < \epsilon,$$

sempre que $k \geq k(n,\epsilon)$. Defina então $t_n := n + q^n_{k\left(n,\frac{1}{n}\right)}$ e $\varphi_n := \varphi^n_{k\left(n,\frac{1}{n}\right)}$. Daí

$$d(S(t_n)\varphi_n, \varphi) < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto,

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} S(t_n)\varphi_n,$$

com $t_n \to \infty$ e $\varphi_n \in B$. Reciprocamente, sejam $\varphi \in X$ e sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \to \infty$ e $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, tais que

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} S(t_n)\varphi_n.$$

Daí, fixado $\tau \in \mathbb{R}^+$ temos $\{S(t_n)\varphi_n\}_{t_n \geq \tau} \subset \gamma_\tau^+(B)$, e $\varphi \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Portanto,

$$\varphi \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(B)} = \omega(B).$$

Isto completa a prova. ■

Observação 1.6 *De maneira análoga à Proposição 1.10 se mostra que $\alpha(B)$ é um conjunto fechado em X e $\psi \in \alpha(B)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{\psi_n\}$ em B e uma sequência $t_n \to \infty$, tal que $S(t_n)\psi_n \to \psi$ quando $n \to \infty$.*

A noção de invariância, dada a seguir, desempenha um papel fundamental no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos.

Definição 1.11 *Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é positivamente invariante sob ação do semigrupo $S(t)$ se*

$$S(t)A \subset A, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^+.$$

Analogamente, $A \subset X$ é negativamente invariante se

$$S(t)A \supset A, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^+.$$

Definição 1.12 *Um conjunto $A \subset X$ é um conjunto invariante sob ação do semigrupo $S(t)$ se A é positivamente e negativamente invariante sob $S(t)$, isto é,*

$$S(t)A = A, \forall \ t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.22}$$

Definição 1.13 *Um ponto fixo, estacionário ou de equilíbrio do semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é um ponto $u_0 \in X$ tal que*

$$S(t)u_0 = u_0, \forall \ t \in \mathbb{R}^+.$$

Quando os operadores $S(t)$ são injetivos, a relação (1.22) implica que $S(-t)$ é bem definido para todo $t > 0$ e

$$S(t)A = A, \forall \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

A seguir, mostraremos que a solução do Problema de Cauchy (1.2) gera um C^0-Semigrupo sobre X. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.14 *Seja X um espaço de Banach e $F : X \to X$ uma aplicação Lipschitz em conjuntos limitados. Caso exista, a solução global do problema de Cauchy,*

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = F(u); \\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{1.24}$$

define um C^0-Semigrupo $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$.

Demonstração: De fato, pelo Lema 1.1 a solução $u(t) = u(t, u_0)$ de (1.24) é dada por

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds.$$

Defina $S(t)u_0 = u(t) = u(t, u_0)$, $t \geq 0$. Note que

$$S(0)u_0 = u(0, u_0) = u_0,$$

donde vemos que $S(0) = I$ (Operador Identidade sobre X). Além disso, para todo $t, \tau \geq 0$ e $u_0 \in X$, temos

$$
\begin{aligned}
S(t+\tau)u_0 = u(t+\tau, u_0) &= u(t, u(\tau, u_0)) \\
&= S(t)u(\tau, u_0) = S(t)S(\tau)u_0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $S(t+\tau) = S(t)S(\tau)$. Finalmente, precisamos mostrar que o semigrupo dado por $S(t)u_0 = u(t, u_0)$ é contínuo em t e em u_0. Note que a continuidade em t segue da definição de $S(t)u_0$. Por outro lado, dados u_0, $v_0 \in X$, considere V um conjunto limitado de X que contém u_0, v_0 e cuja constante de Lipschitz de F em V é $K_V > 0$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\|S(t)u_0 - S(t)v_0\| &= \|u_0 + \int_0^t F(S(s)u_0)ds - v_0 - \int_0^t F(S(s)v_0)ds\| \\
&\leq \|u_0 - v_0\| + \int_0^t \|F(S(s)u_0) - F(S(s)v_0)\|ds.
\end{aligned}
$$

Como F é Lipschitz em conjuntos limitados e $K_V > 0$ é a constante de Lipschitz em V, temos

$$
\|F(u) - F(v)\| \leq K_V\|u - v\|, \ \forall \ u, v \in V \subset X.
$$

Logo,

$$
\|S(t)u_0 - S(t)v_0\| \leq \|u_0 - v_0\| + K_V \int_0^t \|S(s)u_0 - S(s)v_0\|ds.
$$

Usando a Desigualdade de Grönwall (ver Apêndice C), da última desigualdade, obtemos

$$
\|S(t)u_0 - S(t)v_0\| \leq \|u_0 - v_0\|e^{K_V t}.
$$

Deste modo, segue a continuidade de $S(t)u_0$ em V. Como isto vale para cada conjunto limitado de X (ver [18] p. 33), segue a continuidade de $S(t)$ em X. ■

1.3 Conjunto Atraente e Atrator Global

O conceito de atrator global constitui uma ferramenta crucial para o estudo de sistemas dinâmicos autônomos. Nesta seção, seguindo [8], [9] e [23] definimos as noções de semidistância de Hausdorff, atração, absorção, conjunto atraente e atrator global. Também apresentamos um elegante resultado que garante a existência de um atrator global para um semigrupo $\{S(t); t \in \mathbb{R}^+\}$.

Definição 1.15 *Seja X um espaço métrico. Definimos a semidistância de Hausdorff entre dois subconjuntos A e B de X por:*

$$dist_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y). \tag{1.25}$$

Em particular, adotamos a convenção $dist_H(A, \emptyset) = \infty$ se $A \neq \emptyset$, e $dist_H(\emptyset, B) = 0$.

Denotamos por $dist(A, B)$ a distância usual entre dois conjuntos, isto é,

$$dist(A, B) = \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Proposição 1.16 *Dados os subconjuntos A, B e C de X, temos*

$$dist_H(A, C) \leq dist_H(A, B) + dist_H(B, C).$$

Demonstração: Note que, se $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, então

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c). \tag{1.26}$$

Tomando o ínfimo para $c \in C$ em (1.26), obtemos

$$dist(a, C) \leq d(a, b) + dist(b, C).$$

Como $dist(b, C) \leq \sup_{b \in B} dist(b, C) = dist_H(B, C)$, segue que

$$dist(a, C) \leq d(a, b) + dist_H(B, C). \tag{1.27}$$

Como o lado esquerdo de (1.27) não depende de b, então tomando o ínfimo para $b \in B$ no lado direito, temos

$$dist(a, C) \leq dist(a, B) + dist_H(B, C). \tag{1.28}$$

Finalmente, tomando o supremo para $a \in A$ em (1.28) obtemos

$$dist_H(A, C) \leq dist_H(A, B) + dist_H(B, C),$$

donde segue o resultado. ■

Proposição 1.17 *Dados os subconjuntos A, B de X, temos*

$$dist_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$$

Demonstração: Suponha inicialmente que $dist_H(A,B)=0$. Assim,

$$\sup_{a\in A} dist(a,B)=0 \Rightarrow dist(a,B)=0, \forall\ a\in A.$$

Logo,

$$a\in \overline{B}, \forall\ a\in A.$$

Reciprocamente, suponha que $A\subset \overline{B}$. Então, dado $a\in A$, temos que $a\in\overline{B}$. Daí,

$$dist(a,B)=0, \forall\ a\in A \Rightarrow \sup_{a\in A} dist(a,B)=0 \Rightarrow dist_H(A,B)=0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição 1.18 *Sejam A e B subconjuntos de X. Dizemos que A atrai B sob ação do semigrupo $S(t)$ se*

$$dist_H(S(t)B,A)\to 0 \quad quando \quad t\to\infty.$$

Se existir um $t_0\in\mathbb{R}^+$ tal que $S(t)B\subset A$ para todo $t\geq t_0$, diremos que A absorve B.

Observação 1.7 *Se A absorve B, então A atrai B. Porém, a recíproca não é verdadeira.*

Definição 1.19 *Diremos que um semigrupo $\{S(t):t\in\mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo) se existir um subconjunto limitado $B\subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X.*

Definição 1.20 *Um conjunto $A\subset X$ é atraente sob ação do semigrupo $S(t)$ se atrai os subconjuntos limitados de X, isto é, se*

$$dist_H(S(t)B,A)\to 0 \quad quando \quad t\to\infty,$$

para todo subconjunto limitado $B\subset X$.

Com a noção de invariância dada na seção anterior e a noção de conjunto atraente dada nesta seção, ficamos em condições de definir atratores globais para semigrupos. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 1.21 *Um conjunto $\mathcal{A}\subset X$ é um atrator global para o semigrupo $\{S(t):t\in\mathbb{R}^+\}$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\mathcal{A}$ é compacto;

(ii) $\mathcal{A}$ *é invariante;*

(iii) $\mathcal{A}$ *é atraente.*

Proposição 1.22 *O atrator global é único.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ dois atratores globais. Deste modo, como $\mathcal{A}_2$ é limitado, então ele é atraído por $\mathcal{A}_1$, isto é

$$dist_H(S(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Como $\mathcal{A}_2$ é invariante, temos que $S(t)\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2$, donde segue que

$$dist_H(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = dist_H(S(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Deste modo, $dist_H(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0$. Portanto, $\mathcal{A}_2 \subset \overline{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$. De maneira análoga vemos que $dist_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0$, donde segue que $\mathcal{A}_1 \subset \overline{\mathcal{A}_2} = \mathcal{A}_2$. Portanto, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, e o resultado segue. ∎

Proposição 1.23 *O atrator global* $\mathcal{A}$ *é o conjunto compacto e invariante máximo, e o conjunto mínimo que atrai conjuntos limitados de* X*.*

Demonstração: Seja K um conjunto compacto e invariante. Como K é compacto, então K é limitado, logo é atraído por $\mathcal{A}$. Consequentemente,

$$dist_H(K, \mathcal{A}) = dist_H(S(t)K, \mathcal{A}) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Deste modo, $dist_H(K, \mathcal{A}) = 0$, donde $K \subset \mathcal{A}$. Analogamente, se B atrai todos os conjuntos limitados de X, então B atrai $\mathcal{A}$. Usando novamente a invariância de $\mathcal{A}$, temos

$$dist_H(\mathcal{A}, B) = dist_H(S(t)\mathcal{A}, B) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Isto mostra que $\mathcal{A} \subset B$. ∎

Definição 1.24 *Dizemos que um conjunto* $\mathcal{B} \subset X$ *é absorvente se para qualquer conjunto limitado* $B \subset X$*, existe um tempo* t_B *tal que*

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \text{ para todo } t \geq t_B,$$

isto é, se as órbitas de todos os conjuntos limitados eventualmente entram e não saem de $\mathcal{B}$*.*

Lema 1.2 *Seja K um subconjunto compacto de X e $\{x_n\} \in X$ uma sequência com*

$$dist(x_n, K) \to 0 \quad quando \quad n \to \infty.$$

Então $\{x_n\}$ possui subsequência convergente, cujo limite pertence a K.

Demonstração: Note que, dado $m \in \mathbb{N}$, existem $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_{n_m} \in K$ tais que $d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \frac{1}{m}$. Como K é compacto, podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que

$$y_{n_m} \to y_0 \text{ quando } m \to \infty,$$

com $y_0 \in K$. Assim, obtemos

$$d(x_{n_m}, y_0) \leq d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \to 0 \text{ quando } m \to \infty,$$

isto é, $\{x_n\}$ possui subsequência convergente, com limite pertencendo a K. ∎

Proposição 1.25 *Suponha que existe um conjunto compacto atraente $K \subset X$. Então para cada subconjunto limitado $B \subset X$, o conjunto*

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$$

é compacto, invariante e atrai B. Além disso, $\omega(B) \subset \omega(K)$.

Demonstração: Seja $w_n \in \omega(B)$. Então pela Proposição 1.10 existe uma sequência $\{t_k^{(n)}\}$ com $t_k^{(n)} \to \infty$ e $\{b_k^{(n)}\}$ com $b_k^{(n)} \in B$ tal que

$$w_n = \lim_{k \to \infty} S(t_k^{(n)}) b_k^{(n)}.$$

Segue-se em particular que existe uma sequência $\{t_j\}$ com $t_j \to \infty$ e $b_j \in B$ tal que

$$d(w_j, S(t_j)b_j) < 1/j. \tag{1.29}$$

Como K atrai B, segue do Lema 1.2 que existe uma subsequência de $\{S(t_j)b_j\}$ que é convergente e, pela Proposição 1.10, o limite pertence a $\omega(B)$. Segue então que existe uma subsequência de $\{w_j\}$ que converge para um elemento em $\omega(B)$. Portanto, $\omega(B)$ é (sequencialmente) compacto.

Agora suponha que $x \in \omega(B)$. Então existe uma sequência $\{t_n\}$ com $t_n \to \infty$ e $b_n \in B$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)b_n$. Então, como $S(t)$ é contínuo,

$$S(t)x = S(t)\left(\lim_{n\to\infty} S(t_n)b_n\right) = \lim_{n\to\infty} S(t+t_n)b_n,$$

e então $S(t)x \in \omega(B)$, isto é, $S(t)\omega(B) \subset \omega(B)$. Por outro lado, se $y \in \omega(B)$ então $y = \lim_{n\to\infty} S(t_n)b_n$. Para cada t fixado com $t_n \geq t$, podemos escrever:

$$S(t_n)b_n = S(t)[S(t_n - t)b_n]. \tag{1.30}$$

Como K atrai B, então

$$dist(S(t_n - t)b_n, K) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

E sendo K compacto, temos pelo Lema 1.2 que $S(t_n - t)b_n$ possui subsequência convergente. Além disso, pela Proposição 1.10, temos que esta subsequência converge para $\beta \in \omega(B)$. Tomando o limite em (1.30) quando $n \to \infty$, segue que $y = S(t)\beta$, com $\beta \in \omega(B)$, donde $\omega(B) \subset S(t)\omega(B)$. Segue, portanto, que $S(t)\omega(B) = \omega(B)$.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B. Com efeito, se isto não ocorresse, então existiria $\delta > 0$, $t_n \to \infty$ e $b_n \in B$ tal que

$$dist(S(t_n)b_n, \omega(B)) > \delta.$$

Mas, como K é um compacto que atrai B, temos pelo Lema 1.2 que $\{S(t_n)b_n\}$ possui subsequência convergente, cujo limite pertence a $\omega(B)$, o que é uma contradição.

Finalmente, mostremos que $\omega(B) \subset \omega(K)$. De fato, note que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe δ_n tal que

$$d(x,k) < \delta_n \Rightarrow d(S(n)x, S(n)k) < 1/n, \quad \forall\, k \in K.$$

Se $\beta \in \omega(B)$, então $\beta = \lim_{j\to\infty} S(t_j)b_j$, com $b_j \in B$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a sequência $S(t_j - n)b_j$. Como K é atraente, então existe j_n tal que

$$dist(S(t_{j_n} - n)b_{j_n}, K) < \delta_n.$$

E sendo K compacto, existe $k_n \in K$ tal que

$$d(S(t_{j_n} - n)b_{j_n}, k_n) < \delta_n,$$

donde segue que

$$d(S(t_{j_n})b_{j_n}, S(n)k_n) < 1/n.$$

Como $S(t_{j_n})b_{j_n} \to \beta$, então segue que,

$$S(n)k_n \to \beta \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

donde $\beta \in \omega(K)$, como queríamos demonstrar. ■

O teorema a seguir segue como uma consequência imediata da Proposição 1.25 e nos dá uma condição necessária e suficiente para a existência de um atrator global para o Semigrupo $\{S(t); t \in \mathbb{R}^+\}$.

Teorema 1.26 *Existe um atrator global $\mathcal{A}$ se e somente se existe um conjunto compacto atraente.*

Demonstração: Se $\mathcal{A}$ é um atrator global, então por definição $\mathcal{A}$ é um conjunto compacto atraente. Reciprocamente, se K é um conjunto compacto atraente, então pela Proposição 1.25, temos que $\omega(K)$ é compacto, invariante e $\omega(B) \subset \omega(K)$ pra todo conjunto limitado B. Ademais, como $\omega(B)$ atrai B, então $\omega(K)$ atrai B. Logo, existe um atrator global $\mathcal{A}$. ■

Observação 1.8 *Conforme [8], a existência de conjunto compacto atraente é usualmente difícil de verificar, e o resultado é frequentemente usado de uma forma enfraquecida, no seguinte sentido: existe um atrator global $\mathcal{A}$ se existir um conjunto compacto absorvente $\mathcal{B}$.*

Definição 1.27 *Um semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é dito assintoticamente compacto se, para qualquer conjunto $B \subset X$, não vazio, fechado e limitado para o qual $S(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.*

Proposição 1.28 *Seja $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo em X. Suponha que $\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto sempre que $\{S(t_n)x_n\}$ é limitada em X, $\{x_n\}$ é limitada em X e $t_n \to \infty$. Então $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é assintoticamente compacto. Reciprocamente, se $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e assintoticamente compacto, então $\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto sempre que $\{x_n\}$ é uma sequência limitada em X e $t_n \to \infty$.*

Demonstração: Seja $B \subset X$ um subconjunto fechado, limitado e não-vazio, para o qual $S(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Pela Proposição 1.25, $\omega(B)$ é compacto, invariante e atrai B. Além disso, $\omega(B) \neq \emptyset$. De fato, tome uma sequência $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \to \infty$. Como B é positivamente invariante, segue que $\{S(t_n)x_n\} \subset B$. Ademais, por hipótese, $\overline{\{S(t_n)x_n\}}$ é compacto. Logo, a menos de subsequência,

$$S(t_n)x_n \to a \in \omega(B) \ \text{ quando } n \to \infty.$$

Note que $a \in \omega(B)$ segue da caracterização dada na Proposição 1.10. Portanto, $\omega(B)$ é um subconjunto compacto de B que atrai B, provando que $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, se $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e $\{x_n\}$ é uma sequência limitada em X, então existe um tempo $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $B = \overline{\gamma_{t_0}^+\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)}$ é um conjunto limitado. Como B é positivamente invariante e $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é assintoticamente compacto, então existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B. Em particular, $\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge para J quando n tende a infinito e portanto é relativamente compacto. ■

A existência de um conjunto atrator global implica que o semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é assintoticamente compacto. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.29 *Seja $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo e $\mathcal{A}$ um atrator global, então o semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto.*

Demonstração: Suponha que o semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Então $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado dissipativo, pois $\mathcal{A}$ atrai todos os limitados de X. Considere agora os conjuntos $\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ limitados em X, com $t_n \to \infty$. Afirmamos que $\overline{\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto em X. De fato, seja $a \in \overline{\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Então $a = \lim_{k\to\infty} S(t_{n_k})x_{n_k}$, onde $\{S(t_{n_k})x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$, com $t_{n_k} \to \infty$ quando $k \to \infty$. Como $\mathcal{A}$ atrai $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ sob $S(t)$, temos que

$$dist(S(t_{n_k})x_{n_k}, \mathcal{A}) \to 0 \ \text{ quando } \ k \to \infty.$$

Daí, pela Proposição 1.2, $\{S(t_{n_k})x_{n_k}\}$ possui subsequência convergente, cujo limite pertence a $\mathcal{A}$. Pela unicidade do limite, temos que $a \in \mathcal{A}$. Portanto, $\overline{\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \mathcal{A}$. Como $\overline{\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é um fechado contido em um compacto, devemos ter que $\overline{\{S(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto. Logo, pela Proposição 1.28, concluímos que $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é assintoticamente compacto. ■

Observação 1.9 *É possível mostrar também que se um semigrupo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto, então $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. (Veja, por exemplo, [9]).*

1.4 Semicontinuidade Superior de Atratores

Uma questão natural a ser examinada é a continuidade de atratores globais com relação a perturbações no semigrupo. Esta é uma questão fundamental, uma vez que toda modelagem matemática de fenômenos é baseada em aproximações. Desta maneira, é imprescindível saber a robustez do modelo sob perturbações. No último capítulo, estudamos a dependência dos atratores globais para uma equação de evolução não local com relação a seus parâmetros. Nesta seção, seguindo [9] e [13], apresentamos alguns resultados sobre a semicontinuidade superior de atratores globais em espaços métricos.

Definição 1.30 *Sejam X e Λ espaços métricos e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que a família A_λ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$ se*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} dist_H(A_\lambda, A_{\lambda_0}) = 0.$$

E dizemos que a família A_λ é semicontínua inferiormente em $\lambda = \lambda_0$ se

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} dist_H(A_{\lambda_0}, A_\lambda) = 0.$$

A_λ é contínua em $\lambda = \lambda_0$ se for semicontínua superiormente e inferiormente em $\lambda = \lambda_0$.

Abaixo damos uma importante caracterização para semicontinuidade superior de uma família de subconjuntos de um espaço métrico X, que pode ser útil em algumas aplicações.

Proposição 1.31 *Sejam Λ um espaço métrico e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos compactos de X. Então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se, e somente se, dadas as sequências $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, com $\lambda_n \to \lambda_0$, e $\{x_{\lambda_n}\} \subset X$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, existe uma subsequência convergente de $\{x_{\lambda_n}\}$, com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.*

Demonstração: Suponha inicialmente que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0. Considere então as sequências $\{x_{\lambda_n}\} \subset X$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, e $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, com $\lambda_n \to \lambda_0$. Daí,

$$dist(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \leq dist_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Pelo Lema 1.2, segue que $\{x_{\lambda_n}\}$ possui subsequência convergente, com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.

Reciprocamente, suponha que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ não é semicontínua superiormente em λ_0. Então, existe $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ com $\lambda_n \to \lambda_0$ tal que $dist_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = \sup_{x\in\mathcal{A}_{\lambda_n}} dist(x, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, temos que $dist(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$, contradizendo o fato de que $\{x_{\lambda_n}\}$ possui subsequência que converge para um ponto de $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, donde segue o resultado. ∎

Observação 1.10 *A título de curiosidade, pode-se obter um resultado análogo para a semicontinuidade inferior, isto é, prova-se que a família $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ de subconjuntos compactos de X é semicontínua inferiormente em λ_0 se, e somente se, para cada $x \in \{\mathcal{A}_{\lambda_0}\}$ e a sequência $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, com $\lambda_n \to \lambda_0$, existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$ e uma sequência $\{x_{\lambda_k}\} \subset X$ com $x_{\lambda_k} \in \mathcal{A}_{\lambda_k}$ que converge para x quando $k \to \infty$.*

Abaixo apresentamos mais alguns resultados sobre semicontinuidade superior, os quais foram retirados de [13]. A notação foi adaptada, de modo a manter o texto uniforme.

Suponha Λ e X espaços métricos e que, para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$S_\lambda(t) : X \to X$$

é um semigrupo com $S_\lambda(t)u$ contínua em t, λ, u. Se para cada $\lambda \in \Lambda$, $\{S_\lambda(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ é assintoticamente compacto, então para qualquer conjunto fechado e limitado $B \subset X$ para o qual $S_\lambda(t)B \subset B$, $t \in \mathbb{R}^+$, existe um conjunto compacto $K_\lambda(B) \subset B$ tal que $K_\lambda(B)$ atrai B sob ação de $S_\lambda(t)$.

Definição 1.32 *Dizemos que a família de semigrupos*

$$\{S_\lambda(t), t \in \mathbb{R}^+\}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

é ***coletivamente assintoticamente compacta****, se*

$$\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda(B)}$$

é um conjunto compacto.

Teorema 1.33 *Suponha que $S_\lambda(t) : X \to X$, $t \in \mathbb{R}^+$, é um semigrupo para cada $\lambda \in \Lambda$ e suponha que existe um conjunto limitado $B \subset X$ independente de λ tal que B atrai conjuntos compactos de X sob $S_\lambda(t)$. Se a família $\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de semigrupos é coletivamente assintoticamente compacta, a família de conjuntos compactos invariantes maximais $\mathcal{A}_\lambda$ de S_λ é semicontínua superiormente em λ_0.*

Demonstração: Veja [13], Teorema 2.5.2. ■

Teorema 1.34 *Suponha que $S_\lambda(t) : X \to X$, $t \in \mathbb{R}^+$, é um semigrupo para cada $\lambda \in \Lambda$ e existe um conjunto limitado dissipativo B em X para cada $\lambda \in \Lambda$ e, para cada limitado U, o conjunto*

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} S_\lambda(t) U$$

é limitado. Se a família $\{S_\lambda(t) : \lambda \in \Lambda\}$ de semigrupos é coletivamete assintoticamente compacta, então a família $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de atratores globais é semicontínua superiormente em λ.

Demonstração: Seja H um subconjunto compacto arbitrário de X. Então $\mathcal{A}_\lambda$ atrai H sob S_λ para cada $\lambda \in \Lambda$. Além disso, o conjunto

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} S_\lambda(t) A_\lambda$$

é limitado por hipótese, uma vez que cada $\mathcal{A}_\lambda$ é limitado. Agora, pela invariância dos atratores globais, temos que

$$S_\lambda(t)\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_\lambda, \quad \forall \;\; t \in \mathbb{R}^+.$$

Daí,

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} A_\lambda$$

é um conjunto limitado que atrai H sob $S_\lambda(t)$. A conclusão de que a família $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de atratores globais é semicontínua superiormente segue do Teorema 1.33. ■

Capítulo 2

Existência de Atratores Globais para uma Classe de Equações de Evolução Não Local

Neste capítulo, seguindo [5], estudamos a existência de um atrator global para o fluxo associado ao seguinte problema de evolução não local com condição de Neumann:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + h(x)u(x,t) - g(K_J u(x,t)) = f(x, u(x,t)), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável, essencialmente limitada em Ω e com derivadas parciais essencialmente limitadas em Ω. Além disso,

$$h(x) \geq h_1 > 0 \;\text{ e }\; \partial_{x_i} h(x) \geq h_2 > 0 \tag{2.2}$$

para cada $i \in \{1, ..., N\}$, $x \in \mathbb{R}^N$, e h_1, h_2 constantes. A função $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável e satisfaz a condição dissipativa

$$|\xi(\cdot, s)| \leq k_f |s| + c_f, \tag{2.3}$$

onde $\xi = f$, $\partial_1 f$ ou $\partial_2 f$ e k_f, c_f são constantes estritamente positivas.

A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável e satisfaz a condição dissipativa

$$|\eta(s)| \leq k_g |s| + c_g, \tag{2.4}$$

onde $\eta = g$ ou g', com k_g, c_g constantes estritamente positivas. Além disso, essas constantes satisfazem a hipótese:

$$k_f + k_g < h_1. \tag{2.5}$$

A desigualdade (2.5) é uma hipótese técnica que será usada fortemente para provar a existência de um conjunto absorvente compacto em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$. Além disso, K_J é um operador integral definido por:

$$K_J v(x) := \int_\Omega J(x,y)v(y)dy, \tag{2.6}$$

com núcleo J simétrico, isto é, $J(x,y) = J(y,x)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$.

2.1 Boa Posição em $L^p(\Omega)$

Nesta seção, procedendo como em [5], mostramos que o problema de Cauchy associado à equação (2.1), com condição inicial em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, está bem posto. Para isto, começamos reescrevendo (2.1) como o Problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \partial_t u = F(u), \ t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $F : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ é a aplicação definida por

$$F(u) = -h(\cdot)u + g(K_J u) + f(\cdot, u). \tag{2.8}$$

Definição 2.1 *Uma solução de (2.7) em $[0, s)$ é uma função contínua $u : [0, s) \to L^p(\Omega)$ tal que $u(0) = u_0$, a derivada com relação à t existe, $\partial_t u(t, \cdot)$ pertence a $L^p(\Omega)$ e a equação diferencial em (2.7) é satisfeita para todo $t \in [0, s)$.*

Antes de verificar a boa posição do problema de Cauchy (2.7), faremos algumas estimativas para o operador definido por (2.6), o qual é bem definido como um operador linear limitado em vários espaços de funções dependendo da regularidade assumida para o núcleo J. Aqui, assumimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)dy = 1. \tag{2.9}$$

Além disso, ao longo deste trabalho usaremos a seguinte notação, para $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|J\|_p := \sup_{x \in \Omega} \|J(x, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \tag{2.10}$$

Lema 2.1 *Seja K_J a aplicação definida por (2.6). Se $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $K_J u \in L^\infty(\Omega)$, e temos*

$$|K_J u(x)| \leq \|J\|_{p'} \|u\|_{L^p(\Omega)}, \forall \in \Omega, \tag{2.11}$$

onde $1 \leq p' \leq \infty$ é o expoente conjugado de p. Também temos que

$$\|K_J u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J\|_1 \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Além disso, se $u \in L^1(\Omega)$ então $K_J u \in L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$, e

$$\|K_J u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J\|_p \|u\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Demonstração: Vamos começar mostrando (2.11). Suponha inicialmente que $1 \leq p < \infty$ e seja p' o expoente conjugado de p. Então, pela Desigualdade de Hölder (ver Teorema A.22), temos

$$\begin{aligned}
|K_J u(x)| &\leq \int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy \\
&\leq \left(\int_\Omega |J(x,y)|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|J(x,\cdot)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|J\|_{p'} \|u\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Se $p = \infty$ então,

$$\begin{aligned}
|K_J u(x)| &\leq \int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |J(x,y)|dy \\
&= \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|J(x,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \|J\|_1 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Isto prova (2.11). Agora, para provar (2.12), considere inicialmente $1 < p < \infty$. Note que

$$|J(x,y)u(y)| = |J(x,y)|^{\frac{1}{p'}} |J(x,y)|^{\frac{1}{p}} |u(y)|. \tag{2.14}$$

Integrando (2.14) sobre Ω e usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy &\leq \left(\int_\Omega |J(x,y)|dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |J(x,y)||u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|J(x,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |J(x,y)||u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.15) \\
&\leq \|J\|_1^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |J(x,y)||u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Elevando a p ambos os lados da desigualdade (2.15), temos

$$\left(\int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy\right)^p \leq \|J\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|^p dy. \tag{2.16}$$

Integrando (2.16) em relação a x e usando o Teorema de Fubini (ver Teorema A.17), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy\right)^p dx &\leq \|J\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_\Omega \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|^p dxdy\\ &= \|J\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_\Omega |u(y)|^p \int_\Omega |J(x,y)|dxdy\\ &\leq \|J\|_1^{\frac{p}{p'}+1} \int_\Omega |u(y)|^p dy\\ &= \|J\|_1^{\frac{p}{p'}+1} \|u\|^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $\frac{p}{p'} + 1 = p$, devemos ter

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy\right)^p dx \leq \|J\|_1^p \|u\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Finalmente, elevando (2.17) a $\frac{1}{p}$, segue que

$$\|K_J u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J\|_1 \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Considere agora $p = 1$. Observe que

$$|K_J u(x)| \leq \int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy. \tag{2.18}$$

Então integrando (2.18) com relação a x e usando o Teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |K_J u(x)|dx &\leq \int_\Omega \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|dydx\\ &= \int_\Omega |u(y)| \int_\Omega |J(x,y)|dxdy\\ &\leq \|J\|_1 \|u\|_{L^1(\Omega)}\\ &\leq \|u\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|K_J u\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Agora, se $p = \infty$, temos

$$\begin{aligned}
|K_J u(x)| &\leq \int_\Omega |J(x,y)u(y)|dy \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |J(x,y)|dy \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|J\|_1 \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde,

$$\|K_J u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

o que prova (2.12). Finalmente, provaremos (2.13). Com efeito, argumentando de maneira similar à prova de (2.12), segue pela Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
|K_J u(x)| &\leq \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|^{\frac{1}{p}}|u(y)|^{\frac{1}{p'}}dy \\
&\leq \left(\int_\Omega |J(x,y)|^p |u(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u(y)|dy\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (2.19) \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |J(x,y)|^p |u(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Elevando (2.19) ao expoente p, integrando ambos os lados e usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |K_J u(x)|^p dx &\leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p}{p'}} \int_\Omega \int_\Omega |J(x,y)|^p |u(y)|dydx \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p}{p'}} \int_\Omega |u(y)| \int_\Omega |J(x,y)|^p dxdy \\
&\leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p}{p'}} \|u\|_{L^1(\Omega)} \|J\|_p^p \\
&= \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p}{p'}+1} \|J\|_p^p.
\end{aligned}$$

Como $\frac{p}{p'} + 1 = p$, temos

$$\int_\Omega |K_J u(x)|^p dx \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^p \|J\|_p^p. \tag{2.20}$$

Elevando ambos os lados de (2.20) à $\frac{1}{p}$, segue que

$$\|K_J u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J\|_p \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Agora, se $p = 1$, temos

$$|K_J u(x)| \leq \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|dy. \tag{2.21}$$

Integrando ambos os lados de (2.21) em relação a x e usando o Teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |K_J u(x)| &\leq \int_\Omega \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|dxdy \\ &= \int_\Omega |u(y)| \int_\Omega |J(x,y)|dxdy \\ &\leq \|J\|_1 \int_\Omega |u(y)|dy \\ &\leq \|J\|_1 \|u\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\|K_J u\|_{L^1(\Omega)} \leq \|J\|_1 \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Finalmente, se $p = \infty$, temos,

$$\begin{aligned}|K_J u(x)| &\leq \int_\Omega |J(x,y)||u(y)|dy \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |J(x,y)|dy \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|J\|_1 \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|K_J u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

provando (2.13). Isto completa a demonstração do Lema. ■

Proposição 2.2 *O operador não local (2.6) é um operador linear limitado de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração: De fato, dados u, $v \in L^p(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}K_J(u + \lambda v)(x) &= \int_\Omega J(x,y)(u + \lambda v)(x)dx \\ &= \int_\Omega J(x,y)\left[u(x) + \lambda v(x)\right]dx \\ &= \int_\Omega J(x,y)u(x)dx + \lambda \int_\Omega J(x,y)v(x)dx \\ &= K_J(u)(x) + \lambda K_J(v)(x),\end{aligned}$$

mostrando que K_J é linear de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, pelo Lema 2.1, K_J é um operador limitado. ■

Proposição 2.3 *Dado $u \in L^p(\Omega)$, aplicação F definida por (2.8) está bem definida de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração: Recorde que $F : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ é a aplicação definida por

$$F(u) = -h(\cdot)u + g(K_J u) + f(\cdot, u).$$

Seja inicialmente, $1 \leq p < \infty$. Observe que, usando as condições dissipativas (2.3), (2.4) e o Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} |F(u(x))|^p &= |-h(x)u(x) + g(K_J u(x)) + f(x, u(x))|^p \\ &\leq \left| \|h\|_{L^\infty(\Omega)} u(x) + k_g |K_J u(x)| + c_g + k_f |u(x)| + c_f \right|^p . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Integrando ambos os lados de (2.22) sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega |F(u(x))|^p \, dx \leq \int_\Omega \left| \|h\|_{L^\infty(\Omega)} u(x) + k_g |K_J u(x)| + c_g + k_f |u(x)| + c_f \right|^p dx. \tag{2.23}$$

Finalmente, como $u \in L^p(\Omega)$, o lado direito de (2.23) é integrável. Concluimos então que

$$\int_\Omega |F(u(x))|^p \, dx < \infty.$$

Assim, $F(u) \in L^p(\Omega)$. O caso $p = \infty$ é imediato. ■

No resultado abaixo, mostramos que sob hipóteses adequadas sobre g e f, a aplicação F definida por (2.8) é Lipschitz contínua em conjuntos limitados.

Proposição 2.4 *Suponha que g é Lipschitz em conjuntos limitados e $f(\cdot, s)$ é globalmente Lipschitz na segunda variável. Então, para $1 \leq p \leq \infty$, a aplicação F definida por (2.8) é Lipschitz em conjuntos limitados.*

Demonstração: Fixe $u_0 \in L^p(\Omega)$. Seja V a vizinhança de u_0 em $L^p(\Omega)$ dada por

$$V = \{u \in L^p(\Omega); \|u - u_0\|_{L^p(\Omega)} < b\}.$$

Segue de (2.11) do Lema 2.1 que

$$|K_J u_0(x)| \leq \|J\|_{p'} \|u_0\|_{L^p(\Omega)},$$

e para qualquer $u \in V$ e $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}|K_J u(x) - K_J u_0(x)| &= |K_J(u-u_0)(x)|\\ &\leq \|J\|_{p'}\|u-u_0\|_{L^p(\Omega)}\\ &< \|J\|_{p'}b.\end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $x \in \Omega$ e $u \in V$, temos que

$$\begin{aligned}|K_J u(x)| &= |K_J u(x) - K_J u_0(x) + K_J u_0(x)|\\ &\leq |K_J u(x) - K_J u_0(x)| + |K_J u_0(x)|\\ &< \|J\|_{p'}\|u_0\|_{L^p(\Omega)} + \|J\|_{p'}b\\ &= \|J\|_{p'}(\|u_0\|_{L^p(\Omega)} + b).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Daí,

$$|K_J u(x)| < \|J\|_{p'}(\|u_0\|_{L^p(\Omega)} + b),\ \forall\ x \in \Omega.$$

Agora, seja $K_{V'} > 0$ a constante de Lipschitz de g no conjunto

$$V' = \{x \in \mathbb{R}; |x| < \|J\|_{p'}(\|u_0\|_{L^p(\Omega)} + b)\}.$$

Como g Lipschitz em conjuntos limitados, então para $u,\ v \in V$ e $x \in \Omega$, temos

$$|g(K_J u(x)) - g(K_J v(x))| \leq K_{V'}|K_J u(x) - K_J v(x)|. \tag{2.25}$$

Daí, para $1 \leq p < \infty$, elevando (2.25) a p e integrando em relação a x, temos

$$\int_\Omega |g(K_J u(x)) - g(K_J v(x))|^p dx \leq K_{V'}^p \int_\Omega |K_J u(x) - K_J v(x)|^p dx. \tag{2.26}$$

Agora, elevando ambos os lados de (2.26) à $\frac{1}{p}$, obtemos

$$\left(\int_\Omega |g(K_J u(x)) - g(K_J v(x))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_{V'}\left(\int_\Omega |K_J u(x) - K_J v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando (2.12) do Lema 2.1 e o fato de K_J ser linear, segue que

$$\begin{aligned}\|g(K_J u) - g(K_J v)\|_{L^p(\Omega)} &\leq K_{V'}\left(\int_\Omega |K_J u(x) - K_J v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= K_{V'}\left(\int_\Omega |K_J(u-v)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= K_{V'}\|K_J(u-v)\|_{L^p(\Omega)}\\ &\leq K_{V'}\|u-v\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Se $p = \infty$, de (2.25) e (2.12) do Lema 2.1, temos que

$$\begin{aligned}|g(K_Ju(x)) - g(K_Jv(x))| &\leq K_{V'}|K_Ju(x) - K_Jv(x)| \\ &= K_{V'}|K_J(u-v)(x)| \\ &\leq K_{V'}\|u - v\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

Em particular,

$$\|g(K_Ju) - g(K_Jv)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_{V'}\|u - v\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.28}$$

Portanto, a aplicação

$$u \in L^p(\Omega) \mapsto g(K_Ju) \in L^p(\Omega)$$

é Lipschitz em V, $1 \leq p \leq \infty$. Também temos que para cada u, $v \in V$ e $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\|f(\cdot,u) - f(\cdot,v)\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x,u(x)) - f(x,v(x))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega L_f^p|u(x) - v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq L_f\left(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq L_f\|u - v\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.29}$$

onde L_f é a constante de Lipschitz de f.

Além disso,

$$\begin{aligned}\|h(\cdot)(u-v)\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |h(x)(u-v)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|h\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|h\|_{L^\infty}\|u - v\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Agora, de (2.27)-(2.30), obtemos

$$\begin{aligned}&\|F(u) - F(v)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad = \|-h(\cdot) + g(K_Ju) + f(\cdot,u) + h(\cdot)v - g(K_Jv) - f(\cdot,v)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad = \|h(\cdot)(v-u) + g(K_Ju) - g(K_Jv) + f(\cdot,u) - f(\cdot,v)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad \leq \|h(\cdot)(u-v)\|_{L^p(\Omega)} + \|g(K_Ju) - g(K_Jv)\|_{L^p(\Omega)} + \|f(\cdot,u) - f(\cdot,v)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad \leq \big(\|h\|_{L^\infty(\Omega)} + K_{V'} + L_f\big)\|u - v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad = K_V\|u - v\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

onde $K_V = K_V(\|h\|_{L^\infty(\Omega)}, V', L_f) > 0$ é uma constante. Isto mostra que a aplicação F é Lipschitz em conjuntos limitados. ■

Do resultado acima e do Teorema 1.3, segue que o problema (2.7) tem uma solução local para quaisquer dados iniciais em $L^p(\Omega)$. Para existência global precisamos do Teorema 1.4.

Teorema 2.5 *Sob as hipóteses da Proposição 2.4, o problema (2.7) tem uma única solução global para cada condição inicial em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$, a qual depende continuamente do dado inicial (t_0, u_0) e é dada por*

$$u(x,t) = e^{-th(x)}u_0(x) + \int_0^t e^{-(t-s)h(x)}\left[g(K_J u(x,s)) + f(x, u(x,s))\right] ds. \tag{2.31}$$

Demonstração: Da Proposição 2.4, segue que o lado direito de (2.7) é Lipschitz em conjuntos limitados de $L^p(\Omega)$ e, portanto, pelo Teorema 1.3 o problema de Cauchy (2.7) está bem posto em $L^p(\Omega)$, com uma única solução local $u(x,t)$, dada por (2.31).

Mostremos que o problema de Cauchy (2.7) admite solução global. De fato, se $1 \leq p < \infty$, então por (2.3) e (2.4), temos

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, u)\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x, u(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |k_f|u(x,t)| + c_f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|k_f|u(\cdot,t)| + c_f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq k_f\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} + c_f|\Omega|^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde na última desigualdade de (2.32) foi usada a desigualdade de Minkowski (ver Proposição A.24) e denotamos a medida de Lebesgue de Ω por $|\Omega|$.

Além disso, por (2.12) do Lema 2.1 e a desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned} \|g(K_J u)\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |g(K_J u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |k_g|K_J u(x)| + c_g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|k_g K_J u + c_g\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq k_g\|K_J u\|_{L^p(\Omega)} + c_g|\Omega|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|f(\cdot,u)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_f|\Omega|^{\frac{1}{p}} + k_f\|u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.33}$$

e

$$\|g(K_Ju)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_g|\Omega|^{\frac{1}{p}} + k_g\|u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.34}$$

Se $p = \infty$, podemos argumentar de maneira similar ou fazer $p \to \infty$, obtendo

$$\|f(\cdot,u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_f + k_f\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{2.35}$$

e

$$\|g(K_Ju)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_g + k_g\|u\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.36}$$

Defina então $\phi : [t_0,+\infty) \times [0,+\infty] \to [0,+\infty)$ como no Teorema 1.4 por

$$\phi(t,r) = (c_f + c_g)\,|\Omega|^{\frac{1}{p}} + \big(\|h\|_{L^\infty(\Omega)} + k_f + k_g\big)\,r.$$

Se $1 \leq p < \infty$, temos que

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{L^p(\Omega)} &= \|-h(\cdot)u + g(K_Ju) + f(\cdot,u)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|h(\cdot)u\|_{L^p(\Omega)} + \|g(K_Ju)\|_{L^p(\Omega)} + \|f(\cdot,u)\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Agora, usando (2.3), (2.4) e o Lema 2.1 em (2.37), obtemos

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|h(\cdot)u\|_{L^p(\Omega)} + \|g(K_Ju)\|_{L^p(\Omega)} + \|f(\cdot,u)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|h\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)} + c_f|\Omega|^{\frac{1}{p}} + k_g\|u\|_{L^p(\Omega)} + c_g|\Omega|^{\frac{1}{p}} \\ &+ k_f\|u\|_{L^p(\Omega)} + c_f|\Omega|^{\frac{1}{p}} \\ &= (c_f + c_g)\,|\Omega|^{\frac{1}{p}} + \big(\|h\|_{L^\infty(\Omega)} + k_f + k_g\big)\,\|u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{L^p(\Omega)} &\leq (c_f + c_g)|\Omega|^{\frac{1}{p}} + (\|h\|_{L^\infty(\Omega)} + k_f + k_g)\|u\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \phi(t, \|u\|_{L^p(\Omega)}),\ \forall\ u \in L^p(\Omega). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Agora observe que podemos escrever $\phi(t,r) = ar + b$, onde a e b são constantes positivas, donde vemos que ϕ não decresce em $r \geq 0$ para cada $t \in [t_0,+\infty)$. Além disso, sabemos que o problema de Cauchy escalar

$$\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} = \phi(t,r),\ t \geq 0, \\ &r(t_0) = r_0, \end{aligned}$$

possui única solução (ver [25], p. 10, Exemplo 3), a qual pelo método de variação das constantes é dada por

$$r(t) = e^{a(t-t_0)} \left[r_0 + b \int_{t_0}^{t} e^{-a(s-t_0)} ds \right].$$

Note que $r(t)$ existe no intervalo $[t_0, +\infty)$. Portanto, segue do Teorema 1.4 que o maior intervalo de existência de qualquer solução $u(t, t_0, u_0)$ de (2.7) é $[t_0, +\infty)$.

Para deduzir a fórmula (2.31), observe que se $u(x,t)$ é solução de (2.7), então

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -h(x)u(x,t) + g(K_J u(x,t)) + f(x, u(x,t)).$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{th(x)}$, resulta

$$e^{th(x)} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + e^{th(x)} h(x) u(x,t) = e^{th(x)} \left[g(K_J u(x,t)) + f(x, u(x,t)) \right].$$

Observando que o lado esquerdo da igualdade acima é $\frac{d}{dt}[e^{th(x)} u(x,t)]$, obtemos

$$\frac{d}{dt}[e^{th(x)} u(x,t)] = e^{th(x)} [g(K_J u(x,t)) + f(x, u(x,t))]. \tag{2.40}$$

Integrando (2.40) de 0 a t, temos

$$e^{th(x)} u(x,t) - e^0 u(x,0) = \int_0^t e^{sh(x)} [g(K_J u(x,s)) + f(x, u(x,s))] ds.$$

Daí,

$$e^{th(x)} u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t e^{sh(x)} \left[g(K_J u(x,s)) + f(x, u(x,s)) \right] ds. \tag{2.41}$$

Por fim, multiplicando ambos os membros de (2.41) por $e^{-th(x)}$, resulta

$$u(x,t) = e^{-th(x)} u_0(x) + \int_0^t e^{-(t-s)h(x)} [g(K_J u(x,s)) + f(x, u(x,s))] ds.$$

Para provar a dependência contínua com relação aos dados iniciais, sejam $u(x,t)$, $v(x,t)$ soluções com condições iniciais u_0 e v_0, respectivamente. Considere $V \subset L^p(\Omega)$ um conjunto limitado que contém u e v. Usando a fórmula de variação das constantes obtida acima, temos

$$\begin{aligned} e^{th(x)} &\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|u_0 - v_0\|_{L^p(\Omega)} \\ &+ \int_0^t e^{sh(x)} \|g(K_J u(\cdot,s)) - g(K_J v(\cdot,s)) + f(\cdot, u(\cdot,s)) - f(\cdot, v(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de g ser Lipschitz em conjuntos limitados e f ser globalmente Lipschitz, temos pelo Lema 2.1 que

$$\begin{aligned}
&e^{th(x)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\\
&\quad\leq \|u_0-v_0\|_{L^p(\Omega)}\\
&\quad+\int_0^t e^{sh(x)}\|g(K_J u(\cdot,s))-g(K_J v(\cdot,s))+f(\cdot,u(\cdot,s))-f(\cdot,v(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)}ds\\
&\quad\leq \|u_0-v_0\|_{L^p(\Omega)}\\
&\quad+(K_V\|J\|_1+L_f)\int_0^t e^{sh(x)}\|u(\cdot,s)-v(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds,
\end{aligned}$$

onde K_V é a constante de Lipschitz de g em V e L_f é a constante de Lipschitz de f, respectivamente.

Agora, pela Desigualdade de Grönwall, temos

$$\begin{aligned}
e^{th(x)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|u_0-v_0\|_{L^p(\Omega)}e^{\left(K_V\|J\|_1+L_f\right)\int_0^t ds}\\
&= \|u_0-v_0\|_{L^p(\Omega)}e^{\left(K_V\|J\|_1+L_f\right)t}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|u_0-v_0\|_{L^p(\Omega)}e^{\left(K_V\|J\|_1+L_f-h(x)\right)t}\\
&\leq \|u_0-v_0\|_{L^p(\Omega)}e^{\left(K_V\|J\|_1+L_f+h_1\right)t}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue a continuidade em $V\subset L^p(\Omega)$. Como V é arbitrário, segue a continuidade em $L^p(\Omega)$. Isto completa a prova do Teorema. ■

Teorema 2.6 *Para cada $u_0\in L^p(\Omega)$, $1\leq p\leq\infty$, seja $u(x,t)$ a única solução de (2.7) com condição inicial u_0. Então, a aplicação*

$$(x,t)\to u(x,t)$$

definida por (2.31), dá origem a uma C^0-Semigrupo não linear em $L^p(\Omega)$, $\{S(t);t\geq 0\}$, o qual é dado por

$$S(t)u_0(x):=u(x,t),$$

para todo $x\in\Omega$ e $t\geq 0$.

Demonstração: Este resultado segue da Proposição 1.14. ■

2.2 Suavidade da Solução

Nesta seção, seguindo [5], mostramos que sob determinadas condições, a aplicação definida por (2.8) é Fréchet continuamente diferenciável.

Proposição 2.7 *Suponha, além das hipóteses anteriores, que* $|\partial_2 f(x,s)| \leq k_f |s|^{p-1} + c_f$*. Então a aplicação* F *definida por (2.8) é continuamente Fréchet diferenciável com derivada* $DF : L^p(\Omega) \to \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^1(\Omega))$ *dada por*

$$DF(u)v(x) = -h(x)v(x) + g'(K_J u(x))(K_J v(x)) + \partial_2 f(x, u(x))v(x), \tag{2.42}$$

para todo u, $v \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ *e* $x \in \Omega$.

Demonstração: Dados u, $v \in L^p(\Omega)$, recordamos que $F(u) = -h(\cdot)u + g(K_J u) + f(\cdot, u)$. Deste modo, para $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&F(u+tv) - F(u) \\
&\quad = -h(\cdot)(u+tv) + g(K_J(u+tv)) + f(\cdot, u+tv) + hu - g(K_J u) - f(\cdot, u) \\
&\quad = -h(\cdot)u - th(\cdot)v + g(K_J u + tK_J v) + f(\cdot, u+tv) + h(\cdot)u - g(K_J u) - f(\cdot, u) \\
&\quad = th(\cdot)v + g(K_J u + tK_J v) - g(K_J u) + f(\cdot, u+tv) - f(\cdot, u).
\end{aligned}$$

Assim, pela definição de Derivada de Gâteaux, temos

$$\begin{aligned}
DF(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-th(\cdot)v + g(K_J u + tK_J v) - g(K_J u) + f(\cdot, u+tv) - f(\cdot, u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-th(\cdot)v}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{g(K_J u + tK_J v) - g(K_J u)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{f(\cdot, u+tv) - f(\cdot, u)}{t} \\
&= -h(\cdot)v + \lim_{t\to 0} \frac{g(K_J u + tK_J v) - g(K_J u)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{f(\cdot, u+tv) - f(\cdot, u)}{t}.
\end{aligned}$$

Como f e g são continuamente diferenciáveis, segue que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{g(K_J u + tK_J v) - g(K_J u)}{t} &= g'(K_J u)(K_J v), \\
\lim_{t\to 0} \frac{f(\cdot, u+tv) - f(\cdot, u)}{t} &= \partial_2 f(\cdot, u)v.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$DF(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = -h(\cdot)v + g'(K_J u)(K_J v) + \partial_2 f(\cdot, u)v.$$

Mostrando que,

$$DF(u)v(x) = -h(x)v(x) + g'(K_J u(x))(K_J v(x)) + \partial_2 f(x, u(x))v(x).$$

Para aplicar a Proposição B.5, consideremos $Y = L^p(\Omega)$ e $Z = L^1(\Omega)$. Desde que $F : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, teremos que $F : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$. Assim, a primeira hipótese da Proposição B.5 é satisfeita.

Vamos mostrar agora que o operador $DF(u)$ é um operador linear limitado de $L^p(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$. $DF(u)$ é claramente linear. De fato, dados v e w em $L^p(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos pela linearidade de K_J que

$$\begin{aligned}
&DF(u)(v + \lambda w) \\
&\quad = -h(\cdot)(v + \lambda w) + g'(K_J u)(K_J(v + \lambda w)) + \partial_2 f(\cdot, u)(v + \lambda w) \\
&\quad = -h(\cdot)v - \lambda h(\cdot)w + g'(K_J u)(K_J v) + \lambda g'(K_J u)(K_J w) + \partial_2 f(\cdot, u)v + \lambda \partial_2 f(\cdot, u)w \\
&\quad = -h(\cdot)v + g'(K_J u)(K_J v) + \partial_2 f(\cdot, u)v + \lambda\left(-h(\cdot)w + g'(K_J u)(K_J w) + \partial_2 f(\cdot, u)w\right) \\
&\quad = DF(u)v + \lambda DF(u)w.
\end{aligned}$$

Logo $DF(u)$ é linear.

Para mostrar que $DF(u)$ é limitado, suponha inicialmente que $1 \leq p < \infty$. Então para $u \in L^p(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned}
\|DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} &= \| - hv + g'(K_J u)(K_J v) + \partial f(\cdot, u)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \|hv\|_{L^1(\Omega)} + \|g'(K_J u)(K_J v)\|_{L^1(\Omega)} + \|\partial f(\cdot, u)v\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Com efeito, pela desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
\|hv\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |h(x)v(x)|dx \leq \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega v(x)dx \\
&\leq \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Agora pela desigualdade de Hölder, o Lema 2.1 e a hipótese (2.4), temos

$$\begin{aligned}
\|g'(K_Ju)(K_Jv)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |g'(K_Ju(x))||K_Jv(x)|dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |g'(K_Ju(x))|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |K_Jv(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |g'(K_Ju(x))|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \|K_Jv\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \left(\int_\Omega |k_g|K_Ju(x)| + c_g|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \left(\int_\Omega |k_g\|Ku\|_{L^\infty(\Omega)} + c_g|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \left(k_g\|Ku\|_{L^\infty(\Omega)} + c_g\right) \|v\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Novamente pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|\partial_2 f(\cdot,u)v\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\partial_2 f(x,u(x))v(x)|dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\partial_2 f(x,u(x))|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |k_f|u(x)|^{p-1} + c_f|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(k_f\|u\|_{L^p(\Omega)} + c_f|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\right) \|v\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde p' é o expoente conjugado de p.

Consequentemente, usando (2.43) junto com (2.44)-(2.46) segue que

$$\|DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} = \| - hv + g'(K_Ju)(K_Jv) + \partial f(\cdot,u)\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|v\|_{L^p(\Omega)},$$

onde $C = C(\|h\|_{L^\infty(\Omega)}, |\Omega|, f, g, p) > 0$, mostrando que $DF(u)$ é uma operador linear limitado de $L^p(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$.

Seja agora u_n, u, $v \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$ e $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Pela desigualdade de Minkowski e reorganizando os termos, segue que

$$\begin{aligned}
&\|DF(u_n)v - DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad = \| - hv + g'(K_Ju_n)(K_Jv) + \partial_2 f(\cdot,u_n)v + hv - g'(K_Ju)(K_Jv) - \partial_2 f(\cdot,u)v\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad \leq \|g'(K_Ju_n)(K_Jv) - g'(K_Ju)(K_Jv)\|_{L^1(\Omega)} + \|\partial_2 f(\cdot,u_n)v - \partial f(\cdot,u)v\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad = \|(g'(K_Ju_n) - g'(K_Ju))(K_Jv)\|_{L^1(\Omega)} + \|(\partial_2 f(\cdot,u_n) - \partial_2 f(\cdot,u))v\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Por um lado, pelo Lema 2.1, temos:

$$\begin{aligned}
&\|(g'(K_J u_n) - g'(K_J u))(K_J v)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad = \int_\Omega |g'(K_J u_n(x)) - g'(K_J u(x))||K_J v(x)|dx \\
&\quad \leq \|J\|_{p'}\|v\|_{L^p(\Omega)} \int_\Omega |g'(K_J u_n(x)) - g'(K_J u(x))|dx \\
&\quad = \|J\|_{p'}\|v\|_{L^p(\Omega)}\|(g'(K_J u_n) - g'(K_J u))\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\|(\partial_2 f(\cdot, u_n) - \partial_2 f(\cdot, u))v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\partial_2 f(\cdot, u_n) - \partial_2 f(\cdot, u)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.49}$$

Assim, de (2.47), (2.48) e (2.49), temos

$$\begin{aligned}
&\|DF(u_n)v - DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad \leq \|J\|_{p'}\|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial_2 f(\cdot, u_n) - \partial_2 f(\cdot, u)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Agora, tomando o supremo sobre todos os $v \in L^p(\Omega)$ tais que $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|DF(u_n) - DF(u)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega),\ L^1(\Omega))} \\
&\quad \leq \|J\|_{p'}\|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)} + \|\partial_2 f(\cdot, u_n) - \partial_2(\cdot, u)\|_{L^{p'}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Para provar a continuidade da derivada, começamos mostrando as seguintes afirmações:

Afirmação 1: $K_J u_n(x) \to K_J u(x)$ para todo $x \in \Omega$ quando $n \to \infty$.

Com efeito, pelo Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned}
|K_J u_n(x) - K_J u(x)| &= |K_J(u_n - u)(x)| \\
&\leq \|J\|_{p'}\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $\|J\|_{p'}$ é limitada e $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$, concluímos que $K_J u_n(x) \to K_J u(x)$, para todo $x \in \Omega$, o que prova a Afirmação 1.

Afirmação 2: Existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω.

De fato, isto segue imediatamente do Teorema A.31.

Assim, da Afirmação 1 temos que existe um subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que g' é Lipschitz em B e

$$\begin{aligned}\|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |g'(K_J u_n(x)) - g'(K_J u(x))| dx \\ &\leq C_B \int_\Omega |K_J(u_n - u)(x)| dx \\ &\leq C_B |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|K_J(u_n - u)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C_B |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

onde $C > 0$ depende da constante de Lipschitz C_B de g' em B. Consequentemente,

$$\|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \text{n} \to \infty. \tag{2.51}$$

Por outro lado, pela Afirmação 2, temos que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω. Daí, em virtude da continuidade de $\partial_2 f$, temos

$$|\partial_2 f(\cdot, u_{n_k}(x)) - \partial_2 f(\cdot, u(x))|^{p'} \to 0 \quad \text{q.t.p.} \quad em\ \Omega.$$

Além disso, usando a hipótese assumida para $\partial_2 f$, temos

$$\begin{aligned}|\partial_2 f(\cdot, u_{n_k}(x)) - \partial_2 f(\cdot, u(x)|^{p'} &\leq \left(|k_f|u_{n_k}(x)|^{p-1} + c_f + k_f|u(x)|^{p-1} + c_f\right)^{p'} \\ &= \left(|k_f\left(|u_{n_k}(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1}\right) + 2c_f\right)^{p'}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Agora, observe que o lado direito da desigualdade (2.52) é integrável, pois é um caso semelhante à (2.46). Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema A.18), temos que

$$\begin{aligned}&\|\partial_2 f(\cdot, u_{n_k}) - \partial_2 f(\cdot, u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= \left(\int_\Omega |\partial_2 f(\cdot, u_{n_k}(x)) - \partial_2 f(\cdot, u(x))|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Afirmação 3: A sequência definida por $y_n = \|\partial_2 f(\cdot, u_n) - \partial_2 f(\cdot, u)\|_{L^{p'}(\Omega)}$ é convergente.

De fato, como $\|u_{n_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ quando $k \to \infty$, temos pelo Teorema A.31 que existe uma subsequência $(u_{n_{k_j}})$ de (u_{n_k}) tal que $u_{n_{k_j}}(x) \to u(x)$ *q.t.p.* em Ω. Assim, repetindo o mesmo argumento feito anteriormente, temos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\|\partial_2 f(\cdot, u_{n_{k_j}}) - \partial_2 f(\cdot, u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Como toda subsequência (y_{n_k}) de (y_n) possui subsequência convergindo para 0, concluímos pela Proposição C.4 (ver Apêndice C), que a sequência (y_n) converge para 0, e a Afirmação 3 está provada. Finalmente, de (2.50), (2.51) e (2.53), e como $\|J\|_{p'}$ é limitada, temos que

$$\|DF(u_n) - DF(u)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega),\ L^1(\Omega))} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo, DF é contínuo.

Com isso, pela Proposição B.5 temos que F é continuamente Fréchet diferenciável.

Consideremos agora o caso $p = \infty$. Sabemos que $DF(u)$ é um operador linear. Vamos mostrar agora que o operador $DF(u)$ é uma operador linear limitado de $L^\infty(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \|DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} &= \|hv + g'(K_J u)(K_J v) + \partial f(\cdot, u)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|hv\|_{L^1(\Omega)} + \|g'(K_J u)(K_J v)\|_{L^1(\Omega)} + \|\partial f(\cdot, u)v\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|hv\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |h(x)v(x)|dx \leq \|h\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega dx \\ &= |\Omega|\|h\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Por outro lado, pela desigulddade de Hölder e o Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} \|g'(K_J u)(K_J v)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |g'(K_J u(x))||K_J v(x)|dx \\ &\leq \|K_J v\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g'(K_J u(x))|\, dx \\ &\leq \|K_J v\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |g'(K_J u(x))|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |k_g|K_J u(x)| + c_g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq (k_g\|u\|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}} c_g)|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Novamente pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|\partial_2 f(\cdot,u)v\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\partial_2 f(x,u(x))v(x)|dx \\
&\leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\partial_2 f(x,u(x))|dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\partial_2 f(x,u(x))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |k_f u|u(x)|^{p-1} + c_f|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(k_f \|u\|_{L^p(\Omega)} + c_f |\Omega|^{\frac{1}{p}}\right) |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Consequentemente, usando (2.55)-(2.57) em (2.54), segue que

$$\|DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} = \|hv + g'(K_J u)(K_J v) + \partial f(\cdot,u)\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{2.58}$$

onde $C = C(\|h\|_{L^\infty(\Omega)}, |\Omega|, f, g, p) > 0$, mostrando que $DF(u)$ é uma operador linear limitado de $L^\infty(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$.

Suponha agora que u_n, u, $v \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Agora recorde que

$$\begin{aligned}
&\|DF(u_n)v - DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad \leq \|(g'(K_J u_n) - g'(K_J u))(K_J v)\|_{L^1(\Omega)} + \|(\partial_2 f(\cdot,u_n) - \partial_2 f(\cdot,u))v\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Por um lado, pelo Lema 2.1 temos que

$$\begin{aligned}
\|(g'(K_J u_n) - g'(K_J u))(K_J v)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |g'(K_J u_n(x)) - g'(K_J u(x))||K_J v(x)|dx \\
&\leq \|K_J v\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g'(K_J u_n(x)) - g'(K_J u(x))|dx \\
&= \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|(\partial_2 f(\cdot,u_n) - \partial_2 f(x,u))v\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |(\partial_2 f(x,u_n(x)) - \partial_2 f(x,u(x))||v(x)|dx \\
&\leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_2 f(\cdot,u_n) - \partial_2 f(\cdot,u)\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Portanto, usando (2.60) e (2.61) em (2.59), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|DF(u_n)v - DF(u)v\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_2 f(\cdot,u_n) - \partial_2 f(\cdot,u)\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

E tomando o supremo em (2.62) sobre todos os $v \in L^\infty(\Omega)$ tais que $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} &\|DF(u_n) - DF(u)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega),\ L^1(\Omega))} \\ &\qquad \leq \|J\|_{p'} \|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)} + \|\partial_2 f(\cdot, u_n) - \partial_2(\cdot, u)\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Agora, para provar a continuidade da derivada, começamos mostrando o seguinte fato:

Afirmação 4: $Ku_n(x) \to Ku(x)$ para todo $x \in \Omega$ quando $n \to \infty$.

De fato, pelo Lema 2.1

$$\begin{aligned} |Ku_n(x) - Ku(x)| &\leq \|J\|_1 \|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $\|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$, concluímos que $Ku_n(x) \to Ku(x)$, para todo $x \in \Omega$. Assim, da Afirmação 4 temos que existe um subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que g' é Lipschitz em B e

$$\begin{aligned} \|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |g'(K_J u_n(x)) - g'(K_J u(x))| dx \\ &\leq C_B \int_\Omega |K_J(u_n - u)(x)| dx \\ &\leq C_B \|K_J(u_n - u)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega dx \\ &\leq |\Omega| C_B \|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= C\|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $C = (|\Omega|, C_B) > 0$. Consequentemente,

$$\|g'(K_J u_n) - g'(K_J u)\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{2.64}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\partial_2 f(\cdot, u_n) - \partial_2 f(\cdot, u)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\partial_2 f(x, u_n(x)) - \partial_2 f(x, u(x))| dx \\ &\leq \int_\Omega |k_f(|u_n(x)|^{p-1} + |u(x)^{p-1}|) + 2c_f| dx. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Observe que o lado direito de (2.65) é claramente integrável, uma vez que u_n, $u \in L^\infty(\Omega)$. Então, argumentando de modo similar ao caso $1 \leq p < \infty$, obtemos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\|\partial_2 f(\cdot, u_n) - \partial_2 f(\cdot, u)\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{2.66}$$

Logo, usando (2.64) e (2.66) em (2.63), concluímos que

$$\|DF(u_n) - DF(u)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega),\ L^1(\Omega))} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Segue que DF é contínuo.

Logo, pela Proposição B.5 temos que F é continuamente Fréchet diferenciável. ■

Observação 2.1 *Pela Proposição 2.7, o fluxo gerado por (2.7) é* $C([0, s); L^p(\Omega)) \cap C^1([0, s); L^1(\Omega))$*, para* $s > 0$.

2.3 Existência do Atrator Global

Nesta seção, procedendo como em [5], provamos a existência de um atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo não linear $\{S(t); t \geq 0\}$ gerado por (2.7) em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Mais precisamente, provamos que o semigrupo tem um conjunto atraente compacto em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$ e usamos um resultado presente em [23], para obter o atrator global.

Lema 2.2 *Suponha que as hipóteses (2.2), (2.3) e (2.4) sejam válidas e as constantes* h_1*,* k_f *e* k_g *satisfaçam (2.5). Então a bola de* $L^p(\Omega)$*, centrada na origem e cujo raio* r_δ *definido por*

$$r_\delta = \frac{1}{h_1 - k_f - k_g}(c_f + c_g)(1 + \delta)max\{1, |\Omega|\}, \tag{2.67}$$

a qual denotamos por $\mathcal{B}(0; r_\delta)$*, onde* c_f *e* c_g *são as constantes em (2.3) e (2.4), respectivamente, e* δ *é qualquer constante positiva, absorve os subconjuntos limitados de* $L^p(\Omega)$ *com relação ao semigrupo não linear* $S(\cdot)$ *gerado por (2.7).*

Demonstração: Seja $u(x, t)$ a solução de (2.7) com condição inicial $u_0 \in L^p(\Omega)$. Então, para $1 \leq p < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^p dx &= \int_\Omega \frac{d}{dt}|u(x,t)|^p dx \\ &= \int_\Omega p|u(x,t)|^{p-1} sgn(u(x,t))\partial_t u(x,t)dx. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Agora, recorde que se $u(x, t)$ é solução de (2.7), então

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -h(x)u(x,t) + g(K_J u(x,t)) + f(x, u(x,t)). \tag{2.69}$$

Substituindo (2.69) em (2.68), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^p dx = &-p\int_\Omega h(x)|u(x,t)|^p dx\\ &+p\int_\Omega |u(x,t)|^{p-1} sgn(u(x,t))g(K_J u(x,t))dx\\ &+p\int_\Omega |u(x,t)|^{p-1} sgn(u(x,t))f(x,u(x,t))dx.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Note que por (2.2), temos

$$ph_1\int_\Omega |u(x,t)|^p dx \le p\int_\Omega h(x)|u(x,t)|^p dx, \tag{2.71}$$

Agora usando a desigualdade de Hölder, (2.12) do Lema 2.1 e (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}&p\int_\Omega |u(x,t)|^{p-1} sgn(u(x,t))g(K_J u(x,t))dx\\ &\le \left(\int_\Omega |u(x,t)|^{p'(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |g(K_J u(x,t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(\int_\Omega |u(x,t)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |kg|K_J|u(x,t)|+c_g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \|u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\left(k_g\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}+c_g|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right),\end{aligned}\tag{2.72}$$

onde p' é o expoente conjugado de p e $p'(p-1)=p$. Novamente pela desigualdade de Hölder, (2.12) do Lema 2.1 e (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}&p\int_\Omega |u(x,t)|^{p-1} sgn(u(x,t))f(x,u(x,t))dx\\ &\le \left(\int_\Omega |u(x,t)|^{p'(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |f(x,u(x,t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(\int_\Omega |u(x,t)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |k_f|u(x,t)|+c_f| dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \|u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\left(k_f\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}+c_f|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right),\end{aligned}\tag{2.73}$$

Consequentemente, de (2.71) a (2.73), concluímos que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\\ &\le -ph_1\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}+p(k_f+k_g)\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\\ &+p(c_f+c_g)|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\\ &=p\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\left[-h_1+k_f+k_g+\frac{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}}(c_f+c_g)\right]\\ &\le p\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\left[-h_1+k_f+k_g+\frac{max\{1,|\Omega|\}}{\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}}(c_f+c_g)\right].\end{aligned}\tag{2.74}$$

Seja $\epsilon = h_1 - (k_f + k_g) > 0$, onde este último fato vem de (2.5). Daí, enquanto

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \geq \frac{1}{\epsilon}(c_f + c_g)(1+\delta)max\{1, |\Omega|\} = r_\delta, \tag{2.75}$$

teremos por (2.74) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq p\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\left(-\epsilon + \frac{\epsilon}{1+\delta}\right) \\
&= p\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\left(\frac{-(1+\delta)\epsilon + \epsilon}{1+\delta}\right) \\
&= p\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\left(\frac{-\epsilon\delta}{1+\delta}\right) \\
&= \frac{-\delta\epsilon p}{1+\delta}\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{-\delta\epsilon p}{1+\delta}\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Reorganizando os termos e integrando ambos os lados de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t \frac{\frac{d}{ds}\|u(\cdot,s)\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u(\cdot,s)\|^p_{L^p(\Omega)}} \leq \frac{-\delta\epsilon p}{1+\delta}\int_0^t ds.$$

Deste modo,

$$\ln\left(\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\right) - \ln\left(\|u(\cdot,0)\|^p_{L^p(\Omega)}\right) \leq \frac{-\delta\epsilon p}{1+\delta}t,$$

e usando propriedades de logaritmo

$$\ln\left(\frac{\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u(\cdot,0)\|^p_{L^p(\Omega)}}\right) \leq \frac{-\delta\epsilon p}{1+\delta}t,$$

o que implica que

$$\frac{\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u(\cdot,0)\|^p_{L^p(\Omega)}} \leq e^{\frac{-\delta\epsilon p}{1+\delta}t}.$$

Então,

$$\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq e^{\frac{-\delta p}{1+\delta}(h_1-k_f-k_g)t}\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{2.76}$$

Elevando ambos os lados de (2.76) a $\frac{1}{p}$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq e^{\frac{-\delta}{1+\delta}(h_1-k_f-k_g)t}\|u_0\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.77}$$

Agora, desde que $u_0 \in B$, onde $B \subset L^p(\Omega)$ é limitado, temos

$$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Logo, a bola $\mathcal{B}(0; r_\delta)$ de $L^p(\Omega)$ é um conjunto absorvente para o fluxo $S(\cdot)$, como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.2 *O Lema 2.2 mostra que o semigrupo não linear $S(t)$ é limitado. De fato, basta tomarmos $M = max\{r_\delta, \|u_0\|\}$ e teremos que $\bigcup_{t\geq 0} S(t)B$ é limitado por uma bola $B(0, M)$, para qualquer conjunto limitado $B \subset L^p(\Omega)$.*

Teorema 2.8 *Além das condições do Lema 2.2, suponha que para cada $i \in \{1, ..., N\}$ e para cada $1 \leq r \leq \infty$, tenhamos*

$$\|\partial_{x_i} J\|_r := \sup_{x\in\Omega} \|\partial_{x_i} J(x, \cdot)\|_{L^r(\Omega)} < \infty$$

e $h_1 > k_f r_\delta + c_f$, onde r_δ é dado por (2.67), então existe um atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo não linear $\{S(t); t \geq 0\}$ gerado por (2.7) em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Provaremos que o semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ gerado por (2.7) tem um conjunto absorvente compacto em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Com efeito, se $u(x, t)$ é a solução de (2.7) com condição inicial u_0, então para $1 \leq p < \infty$, temos pela regra da cadeia (ver [17], p. 127), que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x, t)|^p dx \\
&\quad = p\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x, t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x, t))\partial_t \partial_{x_i} u(x, t)dx \\
&\quad = p\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x, t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x, t))\partial_{x_i} \partial_t u(x, t)dx \\
&\quad = -p\int_\Omega \partial_{x_i} h(x)|\partial_{x_i} u(x, t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x, t))dx - p\int_\Omega h(x)|\partial_{x_i} u(x, t)|^{\frac{1}{p}} \qquad (2.78) \\
&\quad + p\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x, t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x, t))g'(K_J u(x, t))(K_{\partial_{x_i} J} u)(x, t)dx \\
&\quad + p\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x, t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x, t))\partial_1 f(x, u(x, t))dx \\
&\quad + p\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x, t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x, t))\partial_2 f(x, u(x, t))\partial_{x_i} u(x, t)dx,
\end{aligned}$$

onde

$$K_{\partial_{x_i} J} u(x, t) = \int_\Omega \partial_{x_i} J(x, y)u(y)dy.$$

Vamos agora encontrar estimativas para cada parcela de (2.78). Com efeito, pela desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
&-p\int_\Omega \partial_{x_i}h(x)|\partial_{x_i}u(x,t)|^{p-1}sgn(\partial_{x_i}u(x,t))dx\\
&\leq p\|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\left(\int_\Omega |\partial_{x_i}u(x,t)|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |u(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= p\|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\left(\int_\Omega |\partial_{x_i}u(x,t)|^{p}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |u(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= p\|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\left(\int_\Omega |\partial_{x_i}u(x,t)|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |u(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= p\|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

Note que para t suficientemente grande, $\|u\|_{L^p(\Omega)}\leq r_\delta$. Disso e de (2.79), obtemos

$$
\begin{aligned}
&-p\int_\Omega \partial_{x_i}h(x)|\partial_{x_i}u(x,t)|^{p-1}sgn(\partial_{x_i}u(x,t))dx\\
&\leq pr_\delta\|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

Usando a desigualdade de Hölder e a estimativa (2.11) do Lema (2.1), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\partial_{x_i}u(x,t)|^{p-1}sgn(\partial_{x_i}u(x,t))g'(K_Ju(x,t))(K_{\partial_{x_i}J}u)(x,t)dx\\
&\leq \left(\int_\Omega |\partial_{x_i}u(x,t)|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |g'(K_Ju(x,t))|^p|(\partial_{x_i}u(x,t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_i}J\|_{p'}\left(\int_\Omega |\partial_{x_i}u(x,t)|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |g'(K_Ju(x,t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_i}J\|_{p'}\left(\int_\Omega |\partial_{x_i}u(x,t)|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |g'(K_Ju(x,t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_i}J\|_{p'}\left(\int_\Omega |g'(K_Ju(x,t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

onde p' é o expoente conjugado de p. Pela condição dissipativa (2.4), para t suficientemente grande, temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\partial_{x_i}u(x,t)|^{p-1}sgn(\partial_{x_i}u(x,t))g'(K_Ju(x,t))(K_{\partial_{x_i}J}u)(x,t)dx\\
&\leq \|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_i}J\|_{p'}\left(\int_\Omega |g'(K_Ju(x,t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_i}J\|_{p'}\left(\int_\Omega k_g\,|K_Ju(x,t)|+c_g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \|\partial_{x_i}J\|_{p'}k_g\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\left(k_g\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}+c_g|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\leq r_\delta\|\partial_{x_i}J\|_{p'}\left(k_g r_\delta+c_g|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right)\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

Argumentando de maneira similar, mas agora usando a condição dissipativa (2.3) também temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x,t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x,t))\partial_1 f(x,u(x,t))dx \\
&\quad \leq \left(\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x,t)|^{p'(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\partial_1 f(x,u(x,t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq \left(\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x,t)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |k_f|u(x,t)| + c_f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq \left(k_f r_\delta + c_f |\Omega|^{\frac{1}{p}}\right) \|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}.
\end{aligned} \tag{2.82}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x,t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x,t))\partial_2 f(x,u(x,t))\partial_{x_i} u(x,t)dx \\
&\quad = \int_\Omega |\partial_{x_i} u(x,t)|^{p} sgn(\partial_{x_i} u(x,t))\partial_2 f(x,u(x,t))dx \\
&\quad \leq \int_\Omega |\partial_{x_i} u(x,t)|^{p} |k_f|u(x,s)| + c_f| dx.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\partial_{x_i} u(x,t)|^{p-1} sgn(\partial_{x_i} u(x,t))\partial_2 f(x,u(x,t))\partial_{x_i} u(x,t)dx \\
&\quad \leq (k_f r_\delta + c_f)\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^{p}.
\end{aligned} \tag{2.83}
$$

Consequentemente, de (2.80) a (2.83), concluímos que

$$
\frac{d}{dt}\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq p\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^p \left[-h_1 + k_f r_\delta + c_f + \frac{M}{|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^p}\right],
$$

onde $M := \frac{1}{p}\left[r_\delta \|\partial_{x_i} J\|_{p'}\left(k_g r_\delta + c_g|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right) + \left(k_f r_\delta + c_f|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right) + p r_\delta \|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right]$.

Seja $\epsilon = h_1 - (k_f r_\delta + c_f) > 0$. Então, enquanto

$$
\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \geq \frac{1}{\epsilon} M(1+\mu),
$$

onde μ é qualquer constante positiva, teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq p\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^p \left(-\epsilon + \frac{M\epsilon}{M(1+\mu)}\right) \\
&= p\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^p \left(-\epsilon + \frac{\epsilon}{1+\mu}\right) \\
&= \frac{-\mu\epsilon p}{1+\mu}\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}^p.
\end{aligned}
$$

Reorganizando os termos e integrando ambos os lados de 0 a t , obtemos

$$\int_0^t \frac{\frac{d}{ds}\|\partial_{x_i}u(\cdot,s)\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|\partial_{x_i}u(\cdot,s)\|^p_{L^p(\Omega)}} \le \frac{-\mu\epsilon p}{1+\mu}\int_0^t ds.$$

Daí,

$$\ln\left(\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\right) - \ln\left(\|\partial_{x_i}u(\cdot,0)\|^p_{L^p(\Omega)}\right) \le \frac{-\mu\epsilon p}{1+\mu}t,$$

e usando propriedades do logaritmo

$$\ln\left(\frac{\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|\partial_{x_i}u(\cdot,0)\|^p_{L^p(\Omega)}}\right) \le \frac{-\mu\epsilon p}{1+\mu}t,$$

e isto implica que

$$\frac{\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|\partial_{x_i}u(\cdot,0)\|^p_{L^p(\Omega)}} \le e^{\frac{-\mu\epsilon p}{1+\mu}t},$$

donde,

$$\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \le e^{\frac{-\mu\epsilon p}{1+\mu}t}\|\partial_{x_i}u_0\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{2.84}$$

Elevando ambos os lados de (2.84) a $\frac{1}{p}$, obtemos

$$\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le e^{\frac{-\mu\epsilon}{1+\mu}t}\|\partial_{x_i}u_0\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.85}$$

Agora, desde que $u_0 \in D$, onde $D \subset W^{1,p}(\Omega)$ é limitado, temos

$$\lim_{t\to\infty}\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{2.86}$$

Daí e do Lema 2.2, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} + \lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^N\|\partial_{x_i}u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Com isso, concluímos que para qualquer $\mu > 0$ existe uma bola em $W^{1,p}(\Omega)$ de centro na origem que absorve subconjuntos limitados de $W^{1,p}(\Omega)$ com relação ao semigrupo $S(\cdot)$ gerado por (2.7). Para algum $\mu > 0$, denotemos esta bola por $\mathcal{B}_\mu$. Então, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema A.35), $\overline{\mathcal{B}_\mu}^{L^p(\Omega)}$ é compacto em $L^p(\Omega)$.

Afirmação 1: O conjunto $\overline{\mathcal{B}_\mu}^{L^p(\Omega)}$ absorve subconjuntos limitados de $L^p(\Omega)$.

De fato, dado $u_0 \in B$, com $B \subset L^p(\Omega)$ limitado, existe, pelo Teorema A.32, uma sequência (u_n) em $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u_0 \;\; em \;\; L^p(\Omega).$$

Como $S(t)$ é contínuo para todo $t \geq 0$, temos que

$$S(t)u_n \to S(t)u_0 \text{ em } L^p(\Omega), \ \forall \ t \geq 0 \text{ e } n \to \infty. \tag{2.87}$$

Considere $C = \{u_n; \ n \in \mathbb{N}\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ o conjunto formado por todos os termos da sequência (u_n). Temos que C é limitado, pois a sequência é convergente. Além disso, como $\mathcal{B}_\mu$ é absorvente em $W^{1,p}(\Omega)$, então existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$S(t)C \subset \overline{\mathcal{B}_\mu}^{L^p(\Omega)}, \ \forall \ t \geq t_0.$$

Fixe $t \geq t_0$. O conjunto $S(t)C$ é uma sequência contida em um conjunto compacto. Desta forma, existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que

$$S(t)u_{n_k} \to v, \ v \in \overline{\mathcal{B}_\mu}^{L^p(\Omega)}, \ \text{ quando } \ k \to \infty. \tag{2.88}$$

Pela unicidade do limite, segue de (2.87) e (2.88), que

$$S(t)u_n \to S(t)u_0 = v \in \overline{\mathcal{B}_\mu}^{L^p(\Omega)}.$$

Logo, $S(t)u_0 \in \overline{\mathcal{B}_\mu}^{L^p(\Omega)}$. Isto mostra que $\overline{\mathcal{B}_\mu}^{L^p(\Omega)}$ é um conjunto compacto absorvente em $L^p(\Omega)$, provando a afirmação.

Finalmente, pela Observação 1.8 do Teorema 1.26, segue que existe um atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo não linear $\{S(t); t \geq 0\}$ gerado por (2.7). ■

Corolário 2.9 *O semigrupo não linear $\{S(t); t \geq 0\}$ gerado por (2.7) é limitado dissipativo e assintoticamente compacto.*

Demonstração: De fato, segue do Teorema 2.8 que o semigrupo não linear $\{S(t); t \geq 0\}$ gerado por (2.7) tem um atrator global $\mathcal{A}$. Logo, pela Proposição 1.29, $S(t)$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto. ■

Capítulo 3

Semicontinuidade Superior dos Atratores Globais

Neste capítulo, motivados pelo estudo de [5], estudamos a semicontinuidade superior dos atratores globais com relação às variações do núcleo J, a qual é provada em [5]. Em seguida, estudamos a semicontinuidade superior dos atratores globais com relação às variações do parâmetro $\Lambda = (h, J, f)$, estendendo o Teorema 4.3 de [5].

3.1 Continuidade do fluxo com relação ao Núcleo J

Começamos examinando a continuidade da solução de (2.7) com relação à função J presente em (1). Denotamos por A_J o atrator global cuja existência foi provada no Teorema 2.8 e por $S_J(\cdot)$ os semigrupos que dependem de J. Denotamos por $\mathcal{J}$ a classe das funções J sob as condições dos capítulos anteriores, a qual torna-se um espaço métrico quando munido da métrica dada por (2.10).

Proposição 3.1 *Sob as condições do Teorema 2.8, fixado $J_0 \in \mathcal{J}$, para o dado inicial do problema de Cauchy (2.7) em um conjunto limitado de $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, temos que u_J converge para u_{J_0} em $L^p(\Omega)$ quando J converge para J_0 em $\mathcal{J}$, com $t \in [0, b]$, $b < \infty$.*

Demonstração: Note que, para $t \geq 0$ e $u_0 \in B \subset L^p(\Omega)$, com B limitado, temos pela fórmula de variação das constantes (2.31) que,

$$\begin{aligned} u_J(x,t) &- u_{J_0}(x,t) \\ &= e^{-th(x)}u_0(x) + \int_0^t e^{-(t-s)h(x)}[g(K_J u_J(x,s)) + f(x, u_J(x,s))]ds \\ &- e^{-th(x)}u_0(x) - \int_0^t e^{-(t-s)h(x)}[g(K_{J_0} u_{J_0}(x,s)) + f(x, u_{J_0}(x,s))]ds. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} &u_J(x,t) - u_{J_0}(x,t) \\ &= \int_0^t e^{-h(x)(t-s)}\left[g(K_J u_J(x,s)) - g(K_{J_0} u_{J_0}(x,s))\right] ds \\ &+ \int_0^t e^{-h(x)(t-s)}\left[f(x, u_J(x,s)) - f(x, u_{J_0}(x,s)\right] ds \\ &= \int_0^t e^{-h(x)(t-s)}\left[g(K_J u_J(x,s)) - g(K_{J_0} u_J(x,s)) + g(K_{J_0} u_J(x,s)) - g(K_{J_0} u_{J_0}(x,s))\right] ds \\ &+ \int_0^t e^{-h(x)(t-s)}\left[f(x, u_J(x,s)) - f(x, u_{J_0}(x,s)\right] ds. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Minkowski e propriedades da integral, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_J(\cdot,t) &- u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \int_0^t e^{h_1(t-s)}\|g(K_J u_J(\cdot,s)) - g(K_{J_0} u_J(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ \int_0^t e^{h_1(t-s)}\|g(K_{J_0} u_J(\cdot,s)) - g(K_{J_0} u_{J_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ \int_0^t e^{h_1(t-s)}\|f(\cdot, u_J(\cdot,s)) - f(\cdot, u_{J_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Agora, procedendo como na Proposição 2.4, obtemos um conjunto limitado D o qual contém $K_J u_J(x,s)$, $K_{J_0} u_J(x,s)$ e $K_{J_0} u_{J_0}(x,s)$. Então, usando o fato de g ser Lipschitz em conjuntos limitados e f ser Lipschitz na segunda variável, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_J(\cdot,t) &- u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq L_g \int_0^t e^{h_1(t-s)}\|K_J u_J(\cdot,s) - K_{J_0} u_J(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ L_g \int_0^t e^{h_1(t-s)}\|K_{J_0} u_J(\cdot,s) - K_{J_0} u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ L_f \int_0^t e^{h_1(t-s)}\|u_J(\cdot,s) - u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds, \end{aligned}$$

onde L_g é a constante de Lipschitz de g em D e L_f é a constante de Lipschitz de f, respectivamente.

Reorgnizando os termos e usando a linearidade do operador K_{J_0}, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u_J(\cdot,t) - u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\quad \leq L_g \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|(K_J - K_{J_0})u_J(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\quad + L_g \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|K_{J_0}(u_J(\cdot,s) - u_{J_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\quad + L_f \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|u_J(\cdot,s) - u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned}
&\|u_J(\cdot,t) - u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\quad \leq L_g \|J - J_0\|_1 \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|u_J(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\quad + L_g \|K_{J_0}\|_1 \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|u_J(\cdot,s) - u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\quad + L_f \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|u_J(\cdot,s) - u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\quad \leq L_g \|J - J_0\|_1 \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|u_J(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\quad + (L_g + L_f) \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|u_J(\cdot,s) - u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Da Observação 2.2, temos que $u_J(\cdot,s)$ é limitado em $L^p(\Omega)$, pois pertence a uma bola de centro na origem e raio M, que independe de J, onde $M = max\{r_\delta, \|u_0\|\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\|u_J(\cdot,t) - u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\quad \leq L_g M \|J - J_0\|_1 \int_0^t e^{h_1(t-s)} ds \\
&\quad + (L_g + L_f) \int_0^t e^{h_1(t-s)} \|u_J(\cdot,s) - u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Multiplicando ambos os membros de (3.1) por $e^{-h_1 t}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& e^{-h_1 t}\|u_J(\cdot,t)-u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\qquad \leq L_g M\|J-J_0\|_1 \int_0^t e^{-h_1 s}ds \\
&\qquad + (L_g+L_f)\int_0^t e^{-h_1 s}\|u_J(\cdot,s)-u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
&\qquad = \frac{L_g}{h_1}M\|J-J_0\|_1\left(1-e^{-h_1 t}\right) \\
&\qquad + (L_g+L_f)\int_0^t e^{-h_1 s}\|u_J(\cdot,s)-u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
&\qquad \leq \frac{L_g}{h_1}M\|J-J_0\|_1 + (L_g+L_f)\int_0^t e^{-h_1 s}\|u_J(\cdot,s)-u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& e^{-h_1 t}\|u_J(\cdot,t)-u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\qquad \leq \frac{L_g}{h_1}M\|J-J_0\|_1 + (L_g+L_f)\int_0^t e^{-h_1 s}\|u_J(\cdot,s)-u_{J_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora, usando a Desigualdade de Grönwall, obtemos

$$e^{-h_1 t}\|u_J(\cdot,t)-u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1\|J-J_0\|_1 e^{(L_g+L_f)t},$$

onde $C_1 = \frac{L_g}{h_1}M$.

Multiplicando ambos os membros de (3.2) por $e^{h_1 t}$, temos

$$\|u_J(\cdot,t)-u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1\|J-J_0\|_1 e^{(L_g+L_f+h_1)t}.$$

Como $t \in [0,b]$, temos

$$e^{-h_1 t}\|u_J(\cdot,t)-u_{J_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1\|J-J_0\|_1 e^{(L_g+L_f+h_1)b},$$

donde segue o resultado. ■

Observação 3.1 *Fixado $J_0 \in \mathcal{J}$, para J suficientemente próximo de J_0 em $\mathcal{J}$, a família de atratores globais $\{A_J\}$ é uniformemente limitada em J. De fato, pela Proposição 3.1, A_J está contido em uma bola cujo raio depende continuamente de J, então concluímos que existe uma bola de $L^p(\Omega)$ que contém todos os atratores A_J com J suficientemente próximo de J_0.*

3.1.1 Semicontinuidade Superior dos Atratores com relação à J

A seguir, exibimos um resultado sobre semicontinuidade superior de atratores globais com relação ao parâmetro J. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *Sob as hipóteses da Proposição 3.1, a família de atratores globais* $\{A_J; J \in \mathcal{J}\}$ *é semicontínua superiormente em* $J = J_0$.

Demonstração: Com efeito, usando a invariância dos atratores e a Proposição 1.28, temos que

$$dist_H(A_J, A_{J_0}) \leq dist_H(S_J(t)A_J, S_{J_0}(t)A_J) + dist_H(S_{J_0}(t)A_J, A_{J_0}).$$

Dado $\epsilon > 0$, temos pela Proposição 3.1 que

$$dist_H(S_J(t)A_J, S_{J_0}(t)A_J) = \sup_{a_J \in A_J} \inf_{b_J \in A_J} \|S_J(t)a_J - S_{J_0}(t)b_J\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo J suficientemente próximo de J_0 em $\mathcal{J}$. Por outro lado, pela Observação 3.1, existe um subconjunto limitado B_0 de $L^p(\Omega)$ tal que $A_J \subset B_0$ para todo J suficientemente próximo de J_0 em $\mathcal{J}$. Daí,

$$dist_H(S_{J_0}(t)A_J, A_{J_0}) \leq dist_H(S_{J_0}(t)A_J, S_{J_0}(t)B_0) + dist_H(S_{J_0}(t)B_0, A_{J_0}).$$

Pela Proposição 1.17, temos que $dist_H(S_{J_0}(t)A_J, S_{J_0}(t)B_0) = 0$, pois $S_{J_0}(t)A_J \subset S_{J_0}(t)B_0$, donde

$$dist_H(S_{J_0}(t)A_J, A_{J_0}) \leq dist_H(S_{J_0}(t)B_0, A_{J_0}).$$

Finalmente, pela definição de atrator global,

$$dist_H(S_{J_0}(t)A_J, A_{J_0}) \leq dist_H(S_{J_0}(t)B_0, A_{J_0}) < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo t suficientemente grande. Consequentemente, para J suficientemente próximo de J_0 em $\mathcal{J}$, e para todo t suficientemente grande, temos

$$dist_H(A_J, A_{J_0}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

E isto prova o resultado. ■

3.2 Continuidade do fluxo com relação aos parâmetros h e f

Uma questão natural a se examinar é a dependência desses atratores globais em relação aos demais parâmetros presentes em (1). Neste sentido, denotemos por $\mathcal{H}$ a classe de todas as funções h sob as condições dos capítulos anteriores e $\mathcal{F}$ a classe de todas as funções f sob as condições anteriores e que são essencialmente limitadas, respectivamente. Dessa forma, mostraremos a continuidade da solução de (2.7) com relação às variações de h e f. Em seguida, mostramos a continuidade da solução de (2.7) com relação às variações de $\Lambda = (J, h, f)$, onde $\Lambda \in \mathcal{N}$, em que $\mathcal{N}$ denota a classe de todos $\Lambda = (J, h, f)$, com J, h e f satisfazendo todas as hipóteses anteriores.

Proposição 3.3 *Sob as condições do Teorema 2.8, fixado $h_0 \in \mathcal{H}$, para o dado inicial do problema de Cauchy (2.7) em um conjunto limitado de $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, temos que u_h converge para u_{h_0} em $L^p(\Omega)$ quando h converge para h_0 em $\mathcal{H}$, com $t \in [0, b]$, $b < \infty$.*

Demonstração: Note que se $u_h(x,t)$ e $u_{h_0}(x,t)$ são soluções de (2.7) com condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$, onde $u_0 \in B$, com $B \subset L^p(\Omega)$ limitado e com os parâmetros h e h_0, respectivamente, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u_{h_0}(x,t)}{\partial t} &= -h(x)u_h(x,t) + g(K_J u_h(x,t)) + f(x, u_h(x,t)) \\ &\quad + h_0(x)u_{h_0}(x,t) - g(K_J u_{h_0}(x,t)) - f(x, u_{h_0}(x,t)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Integrando ambos os membros de (3.3) de 0 a t e reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} u_h(x,t) - u_{h_0}(x,t) &= \int_0^t [h_0(x)u_{h_0}(x,s) - h(x)u_h(x,s)]ds \\ &+ \int_0^t [g(K_J u_h(x,s)) - g(K_J u_{h_0}(x,s))]ds \\ &+ \int_0^t [f(x, u_h(x,s)) - f(x, u_{h_0}(x,s))]ds. \end{aligned}$$

Agora note que,

$$\begin{aligned} u_h(x,t) - &u_{h_0}(x,t) \\ &= \int_0^t [h_0(x)u_{h_0}(x,s) - h_0(x)u_h(x,s) + h_0(x)u_h(x,s) - h(x)u_h(x,s)]ds \\ &+ \int_0^t [g(K_J u_h(x,s)) - g(K_J u_{h_0}(x,s))]ds \\ &+ \int_0^t [f(x, u_h(x,s)) - f(x, u_{h_0}(x,s))]ds. \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Minkowski e propriedades da integral, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|u_h(\cdot,t)-u_{h_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq & \int_0^t \|h_0(\cdot)(u_{h_0}(\cdot,s)-u_h(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)}ds \\
& + \int_0^t \|(h_0-h)u_h(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
& + \int_0^t \|g(K_Ju_h(\cdot,s))-g(K_Ju_{h_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)}ds \\
& + \int_0^t \|f(\cdot,u_h(\cdot,s))-f(\cdot,u_{h_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)}ds.
\end{aligned}
$$

Agora, argumentando como na Proposição 2.4, podemos construir um conjunto limitado D que contém $K_Ju_h(x,s)$ e $K_Ju_{h_0}(x,s)$. Então usando o fato de g ser Lipschitz em conjuntos limitados, f ser Lipschitz na segunda variável e o Lema 2.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|u_h(\cdot,t)-u_{h_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq & \|h_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t \|u_{h_0}(\cdot,s)-u_h(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
& + \|h-h_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t \|u_h(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
& + L_g\int_0^t \|u_h(\cdot,s)-u_{h_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
& + L_f\int_0^t \|u_h(\cdot,s)-u_{h_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds,
\end{aligned}
$$

onde L_g é a constante de Lipschitz de g em D e L_f é a constante de Lipschitz de f.
Assim,

$$
\begin{aligned}
\|u_h(\cdot,t)-u_{h_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq & \|h-h_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t \|u_h(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
& + (\|h_0\|_{L^\infty(\Omega)}+L_g+L_f)\int_0^t \|u_h(\cdot,s)-u_{h_0}(\cdot,s)\|ds.
\end{aligned}
$$

Pela condição (2.2), temos que $h(x) > h_1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$ e $h \in \mathcal{H}$, onde h_1 é uma constante fixada. Então a bola $B(0,M)$ da Observação 2.2, contém $u_h(\cdot,s)$ para todo $h \in \mathcal{H}$. Portanto, $u_h(\cdot,s)$ é limitado em $L^p(\Omega)$.
Assim,

$$
\begin{aligned}
\|u_h(\cdot,t)-u_{h_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq & M\|h-h_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t ds \\
& + (\|h_0\|_{L^\infty(\Omega)}+L_g+L_f)\int_0^t \|u_h(\cdot,s)-u_{h_0}(\cdot,s)\|ds.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Para simplificar a notação, façamos $C = C(\|h_0\|_{L^\infty(\Omega)}, L_g, L_f) > 0$ em (3.4). Daí,

$$
\begin{aligned}
\|u_h(\cdot,t)-u_{h_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq & M\|h-h_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t ds \\
& + C\int_0^t \|u_h(\cdot,s)-u_{h_0}(\cdot,s)\|ds.
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Grönwall generalizada (Ver Apêndice C), obtemos

$$\begin{aligned}\|u_h(\cdot,t) - u_{h_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq M\|h - h_0\|_{L^\infty(\Omega)} t e^{C\int_0^t ds} \\ &= M\|h - h_0\|_{L^\infty(\Omega)} t e^{Ct}.\end{aligned}$$

Finalmente, como $t \in [0,b]$, temos

$$\|u_h(\cdot,t) - u_{h_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq M\|h - h_0\|_{L^\infty(\Omega)} b e^{Cb},$$

e o resultado segue. ■

Proposição 3.4 *Sob as condições do Teorema 2.8, fixado $f_0 \in \mathcal{F}$, para o dado inicial do problema de Cauchy (2.7) em um conjunto limitado de $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, temos que u_f converge para u_{f_0} em $L^p(\Omega)$ quando f converge para f_0 em $\mathcal{F}$, com $t \in [0,b]$, $b < \infty$.*

Demonstração: Note que, para $u_0 \in B$, com $B \subset L^p(\Omega)$ limitado, temos pela fórmula de variação das constantes (2.31) que,

$$\begin{aligned}&u_f(x,t) - u_{f_0}(x,t) \\ &\quad = e^{-th(x)}u_0(x) + \int_0^t e^{-(t-s)h(x)}\left[g(K_J u_f(x,s)) + f(x, u_f(x,s))\right] ds \\ &\quad - e^{-th(x)}u_0(x) + \int_0^t e^{-(t-s)h(x)}\left[g(K_J u_{f_0}(x,s)) + f(x, u_{f_0}(x,s))\right] ds.\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}&u_f(x,t) - u_{f_0}(x,t) \\ &= \int_0^t e^{-h(x)(t-s)}\left[g(K_J u_f(x,s)) - g(K_J u_{f_0}(x,s))\right] ds \\ &+ \int_0^t e^{-h(x)(t-s)}\left[f(x, u_f(x,s)) - f(x, u_{f_0}(x,s)\right] ds \\ &= \int_0^t e^{-h(x)(t-s)}\left[g(K_J u_f(x,s)) - g(K_J u_{f_0}(x,s))\right] ds \\ &+ \int_0^t e^{-h(x)(t-s)}\left[f(x, u_f(x,s)) - f_0(x, u_f(x,s)) + f_0(x, u_f(x,s)) - f_0(x, u_{f_0}(x,s))\right] ds.\end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade de Minkowski e usando propriedades da integral, temos

$$\begin{aligned}\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le& \int_0^t e^{h_1(t-s)}\|g(K_J u_f(\cdot,s))-g(K_J u_{f_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &+\int_0^t e^{h_1(t-s)}\|f(\cdot,u_f(\cdot,s))-f_0(\cdot,u_f(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &+\int_0^t e^{h_1(t-s)}\|f_0(\cdot,u_f(\cdot,s))-f_0(\cdot,u_{f_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Agora, argumentando como na Proposição 2.4 obtemos um conjunto limitado D que contém $K_J u_f(x,s)$ e $K_J u_{f_0}(x,s)$. Então usando o fato de g ser Lipschitz em conjuntos limitados, f_0 ser Lipschitz e o Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le& L_g\int_0^t e^{h_1(t-s)}\|u_f(\cdot,s)-u_{f_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &+\int_0^t e^{h_1(t-s)}\|(f-f_0)(\cdot,u_f(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &+L_{f_0}\int_0^t e^{h_1(t-s)}\|u_f(\cdot,s)-u_{f_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds,\end{aligned}$$

onde L_g é a constante de Lipschitz de g em D e L_{f_0} é a constante de Lipschitz de f_0. Por outro lado, como f e f_0 são funções essencialmente limitadas em $\Omega\times\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} =& (L_g+L_{f_0})\int_0^t e^{h_1(t-s)}\|u_f(\cdot,s)-u_{f_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &+\int_0^t e^{h_1(t-s)}\left(\int_\Omega |(f-f_0)(x,u_f(x,s))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}ds\\ \le& (L_g+L_{f_0})\int_0^t e^{h_1(t-s)}\|u_f(\cdot,s)-u_{f_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &+|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|f-f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_0^t e^{h_1(t-s)}ds.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le& |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|f-f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_0^t e^{h_1(t-s)}ds\\ &+(L_g+L_{f_0})\int_0^t e^{h_1(t-s)}\|u_f(\cdot,s)-u_{f_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade (3.5) por $e^{-h_1 t}$ e reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
e^{-h_1 t}\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|f-f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\int_0^t e^{-h_1 s}ds \\
&+(L_g+L_{f_0})\int_0^t e^{-h_1 s}\|u_f(\cdot,s)-u_{f_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
&\leq \frac{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{h_1}\|f-f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} \\
&+C_0\int_0^t e^{-h_1 s}\|u_f(\cdot,s)-u_{f_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds,
\end{aligned}$$

onde $C_0 = L_g + L_{f_0}$. Assim,

$$\begin{aligned}
e^{-h_1 t}\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \frac{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{h_1}\|f-f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} \\
&+C_0\int_0^t e^{-h_1 s}\|u_f(\cdot,s)-u_{f_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade de Grönwall, temos

$$e^{-h_1 t}\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{h_1}\|f-f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}e^{C_0 t}. \tag{3.6}$$

Multiplicando ambos os membros de (3.6) por $e^{h_1 t}$ e fazendo $C_1 = \frac{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{h_1}$, obtemos

$$\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1\|f-f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}e^{(C_0+h_1)t}.$$

Finalmente, como $t \in [0,b]$, temos

$$\|u_f(\cdot,t)-u_{f_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1\|f-f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}e^{(C_0+h_1)b},$$

donde segue o resultado. ■

No que segue, consideramos o parâmetro $\Lambda = (J,h,f)$ no espaço métrico $\mathcal{N}$ das funções admissíveis, munido da métrica d dada por

$$d(\Lambda,\tilde{\Lambda}) = \|J-\tilde{J}\|_1 + \|h-\tilde{h}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f-\tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} \tag{3.7}$$

A partir de agora, denotamos por $S_\Lambda(t)$ o fluxo gerado por (2.7), para fazer explícito a sua dependência com relação ao parâmetro $\Lambda = (J,h,f)$. Da mesma forma, denotamos por A_Λ o atrator global cuja existência foi provada no Teorema 2.8.

Proposição 3.5 *Sob as condições do Teorema 2.8, fixado* $\Lambda_0 = (J_0, h_0, f_0) \in \mathcal{N}$ *para o dado inicial do problema de Cauchy (2.7) em um conjunto limitado de* $L^p(\Omega)$*, com* $1 \leq p < \infty$*, temos que* u_Λ *converge para* u_{Λ_0} *em* $L^p(\Omega)$ *quando* Λ *converge para* Λ_0 *em* $\mathcal{N}$ *com a métrica* d *dada por (3.7), com* $t \in [0, b]$*,* $b < \infty$*.*

Demonstração: Note que se $u_\Lambda(x,t)$ e $u_{\Lambda_0}(x,t)$ são soluções de (2.7) com condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$, onde $u_0 \in B$, com $B \subset L^p(\Omega)$ limitado e com os parâmetros Λ e Λ_0, respectivamente, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\Lambda(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u_{\Lambda_0}(x,t)}{\partial t} &= -h(x)u_\Lambda(x,t) + g(K_J u_\Lambda(x,t)) + f(x, u_\Lambda(x,t)) \\ &\quad + h_0(x)u_{\Lambda_0}(x,t) - g(K_{J_0} u_{\Lambda_0}(x,t)) - f_0(x, u_{\Lambda_0}(x,t)).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Integrando ambos os membros de (3.8) de 0 a t e reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}u_\Lambda(x,t) - u_{\Lambda_0}(x,t) &= \int_0^t [h_0(x)u_{\Lambda_0}(x,s) - h(x)u_\Lambda(x,s)]ds \\ &+ \int_0^t [g(K_J u_\Lambda(x,s)) - g(K_{J_0} u_{\Lambda_0}(x,s))]ds \\ &+ \int_0^t [f(x, u_\Lambda(x,s)) - f_0(x, u_{\Lambda_0}(x,s))]ds.\end{aligned}$$

Agora note que,

$$\begin{aligned}&u_\Lambda(x,t) - u_{\Lambda_0}(x,t) \\ &\quad= \int_0^t [h_0(x)u_{\Lambda_0}(x,s) - h_0(x)u_\Lambda(x,s) + h_0(x)u_\Lambda(x,s) - h(x)u_\Lambda(x,s)]ds \\ &\quad+ \int_0^t [g(K_J u_\Lambda(x,s)) - g(K_{J_0} u_\Lambda(x,s)) + g(K_{J_0} u_\Lambda(x,s)) - g(K_{J_0} u_{\Lambda_0}(x,s))]ds \\ &\quad+ \int_0^t [f(x, u_\Lambda(x,s)) - f_0(x, u_\Lambda(x,s)) + f_0(x, u_\Lambda(x,s)) - f_0(x, u_{\Lambda_0}(x,s))]ds.\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Minkowski e propriedades da integral, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_\Lambda(\cdot,t) - u_{\Lambda_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \int_0^t \|h_0(\cdot)(u_\Lambda(\cdot,s) - u_{\Lambda_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ \int_0^t \|(h_0 - h)u_\Lambda(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ \int_0^t \|g(K_J u_\Lambda(\cdot,s)) - g(K_{J_0} u_\Lambda(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ \int_0^t \|g(K_{J_0} u_\Lambda(\cdot,s)) - g(K_{J_0} u_{\Lambda_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ \int_0^t \|f(\cdot, u_\Lambda(\cdot,s)) - f_0(\cdot, u_\Lambda(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &+ \int_0^t \|f_0(\cdot, u_\Lambda(\cdot,s)) - f_0(\cdot, u_{\Lambda_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Faremos agora estimativas para cada parcela de (3.9). Além disso, em algumas estimativas que se seguem, usaremos o fato de que $u_\Lambda(\cdot, s)$ pode ser uniformemente limitado em $L^p(\Omega)$ por uma bola $B(0, M)$ de centro na origem e raio M, onde M é uma constante positiva que independe de h, J e f. Note que isto pode ser feito, pois a estimativa da Observação 2.2 independe de J e h. Além disso, para a variação de $f \in \mathcal{F}$, note que, fixada g, o conjunto $A = \{a_f \in \mathbb{R} : a_f = k_f + k_g\}$, onde k_f e k_g são as constantes em (2.5), é limitado superiormente, pois $h_1 > k_f + k_g$, para toda função $f \in \mathcal{F}$. Tomando então $a = \sup A$ e supondo, sem perda generalidade, que $a \neq h_1$, temos que $h_1 - a > 0$, já que h_1 é uma cota superior para A. Então podemos fazer

$$r_{\delta a} = \frac{1}{h_1 - a}(c_f + c_g)(1 + \delta)max\{1, |\Omega|\},$$

no Lema 2.2. Daí, usando argumentos semelhantes aos utilizados no Lema 2.2, é possível mostrar que a bola $\mathcal{B}(0; r_{\delta a})$ é um conjunto absorvente para o fluxo $S_\Lambda(\cdot)$, a qual independe de J, h e f. Tomando então, como na Observação 2.2, $M = max\{r_{\delta a}, \|u_0\|\}$, teremos que o semigrupo é limitado.

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \|h_0(\cdot)(u_\Lambda(\cdot, s) - u_{\Lambda_0}(\cdot, s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\qquad \leq \|h_0\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^t \|u_\Lambda(\cdot, s) - u_{\Lambda_0}(\cdot, s)\|_{L^p(\Omega} ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Também temos,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \|(h_0 - h)u_\Lambda(\cdot, s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\qquad \leq \|h_0 - h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^t \|u_\Lambda(\cdot, s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\qquad \leq M\|h_0 - h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^t ds. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como nos resultados anteriores, podemos obter um conjunto limitado D que contém $K_J u_\Lambda(x, s)$ e $K_J u_{\Lambda_0}(x, s)$. Então usando o fato de g ser Lipschitz em conjuntos limitados e o Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|g(K_J u_\Lambda(\cdot,s)) - g(K_{J_0} u_\Lambda(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds& \\ &\leq L_g \int_0^t \|K_J u_\Lambda(\cdot,s) - K_{J_0} u_\Lambda(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &= L_g \int_0^t \|(K_J - K_{J_0}) u_\Lambda(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\leq L_g \|J - J_0\|_1 \int_0^t \|u_\Lambda(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\leq M L_g \|J - J_0\|_1 \int_0^t ds.\end{aligned} \tag{3.12}$$

E também,

$$\begin{aligned}\int_0^t \|g(K_{J_0} u_\Lambda(\cdot,s)) - g(K_{J_0} u_{\Lambda_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds& \\ &\leq L_g \int_0^t \|K_{J_0}(u_\Lambda(\cdot,s) - u_{\Lambda_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\leq L_g \|K_{J_0}\|_1 \int_0^t \|u_\Lambda(\cdot,s) - u_{\Lambda_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\leq L_g \int_0^t \|u_\Lambda(\cdot,s) - u_{\Lambda_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds,\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde L_g é a constante de Lipschitz de g em D.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^t \|f(\cdot,u_\Lambda(\cdot,s)) - f_0(\cdot,u_\Lambda(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds& \\ &\leq \int_0^t \|(f - f_0)(\cdot,u_\Lambda(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &= \int_0^t \left(\int_\Omega |(f - f_0)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} ds \\ &\leq \|f - f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} \int_0^t \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{p}} ds \\ &= |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f - f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} \int_0^t ds.\end{aligned} \tag{3.14}$$

E finalmente, usando o fato de f_0 ser Lipschitz na segunda variável, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|f_0(\cdot,u_\Lambda(\cdot,s)) - f_0(\cdot,u_{\Lambda_0}(\cdot,s))\|_{L^p(\Omega)} ds& \\ &= L_{f_0} \int_0^t \|u_\Lambda(\cdot,s)) - u_{\Lambda_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds,\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde L_{f_0} é a constante de Lipschitz de f_0.

De (3.9)-(3.15) e reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u_\Lambda(\cdot,t) - u_{\Lambda_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\quad\leq \left(\|h_0\|_{L^\infty(\Omega)} + L_g + L_{f_0}\right)\int_0^t \|u_\Lambda(\cdot,s) - u_{\Lambda_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\quad+ \left(M\|h_0 - h\|_{L^\infty(\Omega)} + ML_g\|J - J_0\|_1 + |\Omega|^{\frac{1}{p}}\|f - f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\right)\int_0^t ds.
\end{aligned}$$

Tomando $C = max\{M, ML_g, |\Omega|^{\frac{1}{p}}\}$ e reorganizando novamente os termos, temos

$$\begin{aligned}
&\|u_\Lambda(\cdot,t) - u_{\Lambda_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\quad\leq C\left(\|h_0 - h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|J - J_0\|_1 + \|f - f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\right)\int_0^t ds \\
&\quad+ \left(\|h_0\|_{L^\infty(\Omega)} + L_g + L_{f_0}\right)\int_0^t \|u_\Lambda(\cdot,s) - u_{\Lambda_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Então, usando que $d(\Lambda,\Lambda_0) = \|J - J_0\|_1 + \|h - h_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f - f_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}$, temos

$$\|u_\Lambda(\cdot,t) - u_{\Lambda_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq Cd(\Lambda,\Lambda_0)\int_0^t ds + C_0\int_0^t \|u_\Lambda(\cdot,s) - u_{\Lambda_0}(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)} ds.$$

Por simplicidade de notação, denotamos $C_0 = \|h_0\|_{L^\infty(\Omega)} + L_g + L_{f_0}$.

Agora, pela Desigualdade de Grönwall generalizada, temos

$$\begin{aligned}
\|u_\Lambda(\cdot,t) - u_{\Lambda_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq Cd(\Lambda,\Lambda_0)te^{C_0\int_0^t ds} \\
&= Cd(\Lambda,\Lambda_0)te^{C_0 t}.
\end{aligned}$$

Agora, uma vez que $t \in [0,b]$, obtemos

$$\|u_\Lambda(\cdot,t) - u_{\Lambda_0}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq Cd(\Lambda,\Lambda_0)be^{C_0 b},$$

e o resultado segue. ■

Observação 3.2 *Fixado $\Lambda_0 \in \mathcal{N}$, para Λ suficientemente próximo de Λ_0 em $\mathcal{N}$, a família de atratores globais $\{A_\Lambda\}$ é uniformemente limitada em Λ. De fato, pela Proposição 3.5, A_Λ está contido em uma bola cujo raio depende continuamente de Λ, então concluímos que existe uma bola de $L^p(\Omega)$ que contém os atratores A_Λ.*

3.2.1 Semicontinuidade Superior dos Atratores com relação aos parâmetros J, h e f

A seguir, exibimos um resultado sobre a semicontinuidade superior dos atratores globais com relação à Λ, estendendo o Teorema 3.2. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.6 *Sob as hipóteses da Proposição 3.5, a família de atratores globais* $\{A_\Lambda; \Lambda \in \mathcal{N}\}$ *é semicontínua superiormente em* $\Lambda = \Lambda_0$.

Demonstração: De fato, usando a invariância dos atratores e a Proposição 1.16, temos que

$$dist_H(A_\Lambda, A_{\Lambda_0}) \leq dist_H(S_\Lambda(t)A_\Lambda, S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda) + dist_H(S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda, A_{\Lambda_0}).$$

Então, dado $\epsilon > 0$, temos pela Proposição 3.5 que

$$dist_H(S_\Lambda(t)A_\Lambda, S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda) = \sup_{a_\Lambda \in A_\Lambda} \inf_{b_\Lambda \in A_\Lambda} \|S_\Lambda(t)a_\Lambda - S_{\Lambda_0}(t)b_\Lambda\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo Λ suficientemente próximo de Λ_0 em $\mathcal{N}$.

Por outro lado, pela Observação 3.2, existe um subconjunto limitado B_0 de $L^p(\Omega)$ tal que $A_\Lambda \subset B_0$ para todo Λ suficientemente próximo de Λ_0 em $\mathcal{N}$. Daí,

$$dist_H(S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda, A_{\Lambda_0}) \leq dist_H(S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda, S_{\Lambda_0}(t)B_0) + dist_H(S_{\Lambda_0}(t)B_0, A_{\Lambda_0}).$$

Pela Proposição 1.17, temos que $dist_H(S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda, S_{\Lambda_0}(t)B_0) = 0$, pois $S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda \subset S_{\Lambda_0}(t)B_0$, donde

$$dist_H(S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda, A_{\Lambda_0}) \leq dist_H(S_{\Lambda_0}(t)B_0, A_{\Lambda_0}).$$

Finalmente, pela definição de atrator global,

$$dist_H(S_{\Lambda_0}(t)A_\Lambda, A_{\Lambda_0}) \leq dist_H(S_{\Lambda_0}(t)B_0, A_{\Lambda_0}) < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo t suficientemente grande. Consequentemente, para Λ suficientemente próximo de Λ_0 em $\mathcal{N}$, e para todo t suficientemente grande, temos

$$dist_H(A_\Lambda, A_{\Lambda_0}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

como queríamos demonstrar. ■

Apêndice A

Espaços L^p e $W^{1,p}$

Neste apêndice, seguindo [4] e [6] apresentamos algumas noções de Teoria da Medida. Aqui, X denota um conjunto qualquer.

A.1 Noções de Medida e Integração

Definição A.1 *Uma família $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X é dita uma σ-**álgebra** se:*

(i) $\emptyset$, $X \in \mathcal{M}$;

(ii) Se $A \in \mathcal{M}$, então o complementar $A^C \in \mathcal{M}$;

(iii) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos de $\mathcal{M}$, então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Um par ordenado $(X, \mathcal{M})$ consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra é chamado de **espaço mensurável**.

Definição A.2 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{M}$-**mensurável** (ou simplesmente **mensurável**) se para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto*

$$\{x \in \mathcal{M}; f(x) > \alpha\} \tag{A.1}$$

pertence a $\mathcal{M}$.

O conjunto (A.1) da definição acima pode ser modificado trocando a desigualdade $>$ por $<$, $\geq$ ou $\leq$. (veja [4], Lema 2.4 p.8).

Exemplo A.1 *Se $E \in \mathcal{M}$, então a **função característica** χ_E, definida por*

$$\chi_E(x) = 1, \quad x \in E,$$
$$= 0, \quad x \notin E,$$

é mensurável.

De fato, note que

- $\{x \in X; \chi_E(x) > \alpha\} = \emptyset$ se $\alpha > 1$;
- $\{x \in X; \chi_E(x) > \alpha\} = E$ se $0 \leq \alpha \leq 1$;
- $\{x \in X; \chi_E(x) > \alpha\} = X$ se $\alpha < 0$.

Como $\emptyset, E, X \in \mathcal{M}$, segue que χ_E é mensurável.

Se f e g são funções a valores reais mensuráveis e c é um número real, então as funções cf, $f \pm g$, f^2, fg e $|f|$ são mensuráveis. (veja [4], Lema 2.6 p.9).

Definição A.3 *Considere $f : X \to \mathbb{R}$ qualquer. Denotamos por $f^+, f^- : X \to \mathbb{R}$ as funções não negativas definidas por*

$$f^+(x) = sup\{f(x), 0\}, \ f^-(x) = sup\{-f(x), 0\}.$$

*onde f^+ é chamada de **parte positiva** de f e f^- de **parte negativa** de f.*

Observe que

$$f = f^+ - f^- \ \text{ e } \ |f| = f^+ + f^-. \tag{A.2}$$

Então das identidades (A.2), segue que

$$f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right), \quad f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right). \tag{A.3}$$

Conclui-se daí que f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

Definição A.4 *A reta estendida é o conjunto*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Definição A.5 *Uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é **$\mathcal{M}$-mensurável** se o conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}, \forall \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

*A coleção de todas as funções a valores reais $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ **$\mathcal{M}$-mensuráveis** de X é denotada por $M(X, \mathcal{M})$.*

Observe que se $f \in M(X, \mathcal{M})$, então

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\},$$
$$\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) \geq -n\}\right]^C$$

pertencem a $\mathcal{M}$.

Proposição A.6 *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Então f é mensurável se, e somente se, os conjuntos*

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}, \; B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

pertencem à $\mathcal{M}$ e a função $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x), \; \textit{se } x \notin A \cup B, \\ &= 0 \; \textit{se } x \in A \cup B, \end{aligned}$$

é mensurável.

Demonstração: (Veja [4], p. 11, Lema 2.8). ■

Como consequência do último resultado, segue que se $f \in M(X, \mathcal{M})$, então as funções

$$cf, \; f^2, \; |f|, \; f^+, \; f^-$$

também pertencem a $M(X, \mathcal{M})$.

Definição A.7 *Uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ é uma **medida** se:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(A) \geq 0, \forall \; A \in \mathcal{M}$;

(iii) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Uma medida μ é dita finita se $\mu(X) < \infty$, e é dita σ-finita se existe uma sequência de conjuntos $(A_n) \in \mathcal{M}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ e \ \mu(A_n) < \infty, \forall \ n.$$

Definição A.8 *Um **espaço de medida** é uma tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$ consistindo de um conjunto X uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ sobre X, e uma medida μ definida sobre X.*

Observação A.1 *Dizemos que uma propriedade é válida em quase todo ponto (q.t.p.) de X ou μ-quase sempre (μ-q.s.) em X se existe um subconjunto $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$. Por exemplo, duas funções f e g mensuráveis são iguais q.t.p. no caso de $f(x) = g(x)$, $\forall \ x \in X \backslash N$, onde $N \in \mathcal{M}$ é tal que $\mu(N) = 0$, onde $N = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$.*

Dizemos que uma sequência (f_n) de funções de X converge *q.t.p.* para uma função f se existe um conjunto $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ para $x \notin N$. Escrevemos:

$$f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \ \ q.t.p. \ em \ X.$$

No que segue, denotamos por $M^+(X, \mathcal{M})$ o subcojunto de $M(X, \mathcal{M})$ formado pelas funções mensuráveis não negativas.

Definição A.9 *Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é chamada de função **simples** se φ assume apenas uma quantidade finita de valores.*

Uma função simples φ admite a seguinte representação

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x), \tag{A.4}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica de um conjunto E_j em X.

Definição A.10 *Se φ é uma função simples em $M^+(X, \mathcal{M})$ com a representação (A.4), definimos a integral de φ com relação à μ como sendo o seguinte número real estendido*

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Se $f \in M^+(X, \mathcal{M})$, definimos a integral de f com relação à medida μ como sendo o número real estendido dado por

$$\int_X f d\mu = sup \int_X \varphi d\mu,$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto de todas as funções simples $\varphi \in M^+(X,\mathcal{M})$ *satisfazendo* $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)\ \forall\ x \in X$. *Se* $f \in M^+(X,\mathcal{M})$ *e* $E \in \mathcal{M}$, *então* $f_{\chi_E} \in M^+(X,\mathcal{M})$ *e definimos a integral de* f *sobre* E *com respeito à medida* μ *como sendo o número real estendido*

$$\int_E f d\mu = \int_X f_{\chi_E} d\mu.$$

Proposição A.11 *Sejam* $f, g \in M^+(X,\mathcal{M})$, $c \geq 0$ *e* $E, F \in \mathcal{M}$. *Então valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se* $f \leq g$, *então* $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$;

(ii) *Se* $E \subseteq F$, *então* $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$;

(iii) $\int_X f d\mu = 0$ *se, e somente se,* $f = 0$ *q.t.p.;*

(iv) $\int_X c f d\mu = c \int_X f d\mu$;

(v) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

Demonstração: Veja [4]. ■

Definição A.12 *A coleção* $L = L(X,\mathcal{M},\mu)$ *das funções integráveis consiste de todas as funções a valores reais* $\mathcal{M}$*-mensuráveis* $f : X \to \mathbb{R}$ *tais que as funções* f^+ *e* f^- *tem integrais finitas com respeito a* μ. *Mais precisamente,*

$$\int f^+ d\mu < +\infty \ e \ \int f^- d\mu < +\infty.$$

Neste caso, definimos a integral de f *com respeito à medida* μ *por*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Se $E \in \mathcal{M}$, *definimos*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Observação A.2 *Se* $f \in L$ *e* $\lambda : X \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

Então λ *é uma medida com sinal. (Veja* [4], *p.* 42, *Lema* 5.2*).*

Teorema A.13 *Uma função mensurável* $f \in L$ *se, e somente se,* $|f|$ *pertence à* L. *Neste caso,*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq |f| d\mu.$$

Demonstração: Por definição $f \in L$ se, e somente se, f^+ e f^- pertencem a M^+ e têm integrais finitas. Como,

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \text{ e } |f|^- = 0.$$

Segue então da Proposição A.11, que

$$\int |f|^+ d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty. \tag{A.5}$$

Além disso,

$$\int |f|^- d\mu = 0 < \infty. \tag{A.6}$$

De (A.5) e (A.6) segue que $|f| \in L$. Reciprocamente, se $|f| \in L$, temos

$$\int |f^+| d\mu < +\infty \; e \; \int |f^-| d\mu < +\infty.$$

Segue então de (A.2) e da Proposição A.11, que

$$\int f^+ d\mu \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f|^+ d\mu < +\infty \tag{A.7}$$

e

$$\int f^- d\mu \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f|^+ d\mu < +\infty \tag{A.8}$$

De (A.7) e (A.8), segue que $f \in L$.

Ademais,

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu \right| &= \left| \int f^+ d\mu + \int (f^+ + f^-) d\mu \right| \\ &\leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| \\ &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Corolário A.14 *Se f é mensurável, g é integrável e $|f| \leq |g|$, então f é integral e*

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu.$$

Demonstração: De fato, de A.2, sabemos que $|f| = f^+ + f^-$. Daí,

$$f^+ \leq |f| \text{ e } f^- \leq |f|,$$

donde,

$$f^+ \leq |f| \leq |g| \text{ e } f^- \leq |f| \leq |g| \tag{A.9}$$

Pela Proposição A.11, temos que

$$\int f^+ d\mu \leq \int |g| d\mu < +\infty \tag{A.10}$$

e

$$\int f^- d\mu \leq \int |g| d\mu < +\infty. \tag{A.11}$$

Então, de (A.10) e (A.11), concluímos que f é integrável. Ademais, novamente pela Proposição A.11, segue que

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Teorema A.15 *O produto por escalar αf e a soma $f + g$ de funções integráveis é integrável e valem as seguintes identidades:*

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu, \quad \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demonstração: (Veja [4], p. 43. Teorema 5.3). ∎

Teorema A.16 (Tonelli) *Seja $F(x,y) : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável satisfazendo*

(i) $\int_{X_2} |F(x,y)| d\mu_2 < \infty$ *q.t.p.;*

(ii) $\int_{X_1} d\mu_1 \int_{X_2} |F(x,y)| d\mu_2 < \infty.$

Então $F \in L^1(X_1 \times X_2)$.

Teorema A.17 (Fubini) *Assuma que $F \in L^1(X_1 \times X_2)$. Então para quase todo $x \in X_1$, $F(x,y) \in L^1_y(X_2)$ e $\int_{X_2} F(x,y) d\mu_2 \in L^1_x(X_1)$. Analogamente para quase todo $y \in X_2$, $F(x,y) \in L^1_x(X_1)$ e $\int_{X_1} F(x,y) d\mu_1 \in L^1_y(X_2)$.*

A.2 Espaços L^p

Com as noções de integração vistas na seção anterior, estamos em condições de definir os espaços de funções integráveis. Denotamos por $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, $L^1(X)$ ou simplesmente L^1, o espaço das funções integráveis $f : X \to \mathbb{R}$, equipado com a norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_X |f| d\mu.$$

Teorema A.18 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração: (Veja [4], p. 44, Teorema 5.6). ■

Definição A.19 *Seja $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Definimos o conjunto*

$$L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{R}; f \text{ mensuravel e } |f|^p \in L^1(X)\}.$$

Equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável é limitada *q.t.p.* ou essencialmente limitada em X se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq C, \ \forall \ x \ \in X \backslash N,$$

onde $N = \{x \in X; |f(x)| > C\} \in \mathcal{M}$ é tal que $\mu(N) = 0$.

Definição A.20 *Definimos o conjunto*

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R}; f \text{ mensuravel e limitada q.t.p.}\}.$$

Equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. sobre } X\}.$$

Observação A.3 *Se $f \in L^\infty$, então*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ q.t.p.}$$

De fato, por definição de ínfimo, existe uma sequência (C_n) tal que $C_n \to \|f\|_{L^\infty}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $|f(x)| \leq C_n$ *q.t.p.* em X. Consequentemente, $|f(x)| \leq C_n$, $\forall\ x \in X \backslash N_n$, onde $N_n \in \mathcal{M}$ com $\mu(N_n) = 0$. Tomando $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, temos que $N \in \mathcal{M}$ e $\mu(N) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n = 0$. Então,

$$|f(x)| \leq C_n, \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in X \backslash N. \tag{A.12}$$

Logo, tomando o limite em (A.12), segue que

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}, \forall\ x \in X \backslash N.$$

Notação: Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por p' o expoente conjugado de p, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Teorema A.21 (Desigualdade de Young) *Sejam A e B números reais não negativos e $1 < p < \infty$, com p' seu expoente conjugado, isto é,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então,

$$A \cdot B \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^{p'}}{p'}.$$

Demonstração: Seja λ um número real satisfazendo $0 < \lambda < 1$, e considere a função $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \lambda t - t^\lambda.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lambda - \lambda t^{\lambda - 1} \\ &= \lambda \left(1 - \frac{1}{t^{1-\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Agora observe que $\varphi'(t) = 0$; $\varphi(t) < 0$, para $0 < t < 1$ e $\varphi'(t) > 0$, para $t > 1$. Logo $t = 1$ é um ponto de mínimo global, isto é, $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ para $t \geq 0$. Assim,

$$\lambda t - t^\lambda \geq \lambda - 1,$$

implicando em

$$t^\lambda \leq \lambda t + 1 - \lambda.$$

Agora para a, $b \geq 0$ e $t = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, temos

$$\frac{a^\lambda}{b^\lambda} \leq \lambda \frac{a}{b} + (1 - \lambda).$$

Daí,

$$a^\lambda \cdot b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda) b.$$

Façamos agora

$$\lambda = \frac{1}{p}, \ a = A^p \ e \ b = B^{p'}$$

Como $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$, temos

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(B^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{1}{p} A^p + \frac{1}{p'} B^{p'},$$

o que implica em

$$A \cdot B \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^{p'}}{p'}.$$

■

Teorema A.22 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então, $fg \in L^1$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração: Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $\|f\|_{L^p}, \|g\|_{L^{p'}} > 0$. Temos que o produto $f \cdot g$ é mensurável e da Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \ \ e \ \ B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}}}$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} &= \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}}} \\ &\leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p}} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|^{p'}_{L^{p'}}}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Como $f \cdot g$ é integrável, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{|f \cdot g|}{\|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}} d\mu &\leq \frac{1}{p\|f\|^p_{L^p}} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{p'\|g\|^{p'}_{L^{p'}}} \int |g|^{p'} d\mu \\ &= \frac{1}{p\|f\|^p_{L^p}} \|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{p'\|g\|^{p'}_{L^{p'}}} \|g\|^{p'}_{L^{p'}} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $fg \in L^1$ e temos

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

Para o caso em que $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^{p'}} = 0$, temos $fg = 0 \in L^1$ e $\|fg\|_{L^1} = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}} = 0$ e o resultado segue. ∎

Corolário A.23 *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e p' seu expoente conjugado. Se $p' < p$ e $\mu(X) < \infty$, então $L^p(X) \subset L^{p'}(X)$.*

Demonstração: Se $p = \infty$, o resultado é imediato. Seja então $f \in L^p(X)$, com $1 \leq p < \infty$. Com efeito, pela desigualdade de Hölder, devemos ter que

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)|^{p'} dx &\leq \left(\int_X \left(|f(x)|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} dx\right)^{\frac{1}{\frac{p}{p'}}} \left(\int_X dx\right)^{\frac{1}{\frac{p}{p-p'}}} \\
&= \mu(X)^{\frac{p-p'}{p}} \left(\int_X |f(x)|^p\right)^{\frac{p'}{p}} \\
&= \mu(X)^{\frac{p-p'}{p}} \|f\|^{p'}_{L^p(X)},
\end{aligned}$$

onde $\frac{p}{p'}$ e $\frac{p}{p-p'}$ são expoentes conjugados. Agora elevando ambos os lados a $\frac{1}{p'}$, obtemos

$$\left(\int_\Omega |f(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \mu(X)^{\frac{p-p'}{pp'}} \|f\|_{L^p(X)},$$

donde $f \in L^{p'}(X)$, e portanto, $L^p(X) \subset L^{p'}(X)$. ∎

No entanto, se $p' < p$, então $f \in L^{p'}(X)$ não implica que $f \in L^p(X)$. Como **Contraexemplo**, tomemos $X = (0,1)$, $p' = 3/2$, $p = 3$ e $f(x) = x^{-1/3}$. Observe que $f \in L^{p'}(X)$, mas $f \notin L^p(X)$, pois

$$\int_0^1 |x^{\frac{-1}{3}}|^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Logo $f \in L^{p'}(X)$. Mas,

$$\int_0^1 |x^{\frac{-1}{3}}|^3 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

não converge, donde $f \notin L^p(X)$.

Proposição A.24 (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, então $f + g \in L^p$ e*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração: Se $p = 1$, temos

$$\begin{aligned}\int |f+g|d\mu &\leq \int (|f|+|g|)\, d\mu \\ &= \int |f|d\mu + \int |g|d\mu \\ &= \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Logo, o resultado está provado. Se $p > 1$, temos

$$\begin{aligned}|f+g|^p &\leq (|f|+|g|)^p \\ &\leq [2sup\{|f|,|g|\}]^p \\ &\leq 2^p\{|f|^p + |g|^p\}.\end{aligned}$$

Como f, $g \in L^p$, segue do Corolário A.14 e do Teorema A.15, que $f+g \in L^p$. Além disso,

$$\begin{aligned}|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| &\leq (|f|+|g|)\,|f+g|^{p-1} \\ &= |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.\end{aligned} \tag{A.14}$$

Agora, observe que $|f+g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$, pois

$$\int \left(|f+g|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\mu = \int |f+g|^p d\mu < \infty.$$

Deste modo, por (A.14) e a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^p}^p &= \int |f+g|^p d\mu \\ &\leq \int |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}d\mu \\ &= \|\left(|f||f+g|^{p-1}\right)\|_{L^1} + \|\left(|g||f+g|^{p-1}\right)\|_{L^1} \\ &\leq \|f\|_{L^p}\||f+g|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} + \|g\|_{L^p}\||f+g|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \\ &= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\,\||f+g|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}.\end{aligned}$$

Observe então que

$$\||f+g|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} = \left(\int |f+g|d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_{L^p}^{p-1},$$

donde,

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\,\|f+g\|_{L^p}^{p-1}.$$

Finalmente, temos que

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p},$$

como queríamos demonstrar. ∎

Abaixo definimos as importantes noções de convergência nos espaços L^p.

Definição A.25 *A sequência de funções (f_n)* ***converge uniformemente*** *para a função f se para todo $\epsilon > 0$ existe um número natural $N(\epsilon)$ tal que se $n \geq N(\epsilon)$ e $x \in X$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Definição A.26 *A sequência de funções (f_n)* ***converge pontualmente*** *para a função f se para todo $\epsilon > 0$ e $x \in X$ existe um número natural $N(\epsilon, x)$, tal que se $n \geq N(\epsilon, x)$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Definição A.27 *A sequência de funções (f_n)* ***converge em quase todo ponto (q.t.p.)*** *para a função f se existir um conjunto $N \in \mathcal{M}$ com $\mu(N) = 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ e $x \in X \backslash N$ existe um número natural $N(\epsilon, x)$, tal que se $n \geq N(\epsilon, x)$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Definição A.28 *A sequência de funções (f_n) em L^p* ***converge em*** *L^p para uma função $f \in L^p$, se para todo $\epsilon > 0$ existe um número natural $N(\epsilon, x)$, tal que se $n \geq N(\epsilon)$, então $\|f_n - f\|_{L^p} < \epsilon$.*

Definição A.29 *A sequência de funções (f_n) em L^p é dita* ***sequência de Cauchy*** *em L^p se para todo $\epsilon > 0$ existe um número natural $N(\epsilon)$ tal que se $m, n \geq N(\epsilon)$, então $\|f_m - f_n\|_{L^p} < \epsilon$.*

Teorema A.30 (Riesz-Fischer) *L^p é um espaço de Banach para todo p, $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração: (Veja [6], p.93, Teorema 4.8) ∎

Teorema A.31 *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(X)$ e seja $f \in L^p(X)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(X)} \to 0$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(X)$ tais que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* X,

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* X, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: (Veja [6], p.94, Teorema 4.9) ∎

Dada uma função $f \in L^p$, não necessariamente suave, é possível aproximá-la por funções que são suaves. Por exemplo, temos o seguinte resultado:

Teorema A.32 *Seja $X \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então C_c^∞ é denso em $L^p(X)$ para cada $1 \leq p < \infty$, onde C_c^∞ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em X.*

Demonstração: (Veja [6], p.109, Corolário 4.23). ■

A.3 Espaço $W^{1,p}$

No que segue, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição A.33 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists\ g_i \in L^p(\Omega); \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall\ \varphi \in C_c^\infty,\ \forall\ i = 1, ..., N \right\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, e escrevemos

$$\nabla u = grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$ está equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

e, para $p = \infty$, com a norma

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} := max \left\{ \|u\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty}, ..., \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty} \right\}.$$

Proposição A.34 *$W^{1,p}$ é um espaço de Banach, com a norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} := max \left\{ \|u\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty}, ..., \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty} \right\}$$

para $p = \infty$.

Demonstração: (Veja [6], p. 264, Proposição 9.1) ■

Teorema A.35 (Rellich-Kondrachov) *Suponha que* Ω *é limitado e de classe* C^1. *Então temos as seguintes injeções compactas:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \forall\ q \in [1, p^*), \ \textit{onde}\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \ \textit{se}\ p < n;\\
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \forall\ q \in [1, +\infty), \ \textit{se}\ p = n;\\
&W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \ \textit{se}\ p > n.
\end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *com injeção compacta para todo* p *(e todo* n*).*

Demonstração: (Ver [6], p.285, Teorema 9.16).

Apêndice B

Derivada de Fréchet e de Gâteaux

Neste apêndice, seguindo [22], apresentamos algumas noções sobre Diferenciabilidade de funções definidas em espaços de Banach.

Definição B.1 *Sejam X um espaço vetorial e Y um espaço vetorial topológico. Considere um operador $F : X \to Y$. Dados x e η em X, suponha que*

$$DF(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x + t\eta) - F(x)}{t}$$

existe. Então $DF(x)(\eta) \in Y$ é chamada de derivada de Gâteaux de F em x na direção η.

Dizemos que F é Gâteaux diferenciável em x quando F é Gâteaux diferenciável em x para qualquer direção $\eta \in X$. Neste caso, o operador

$$DF(x) : X \to Y$$

que associa a cada $\eta \in X$ o vetor $DF(x)(\eta) \in Y$ é chamado de derivada de Gâteaux de F em x. O operador $DF : X \to [X, Y]$ que associa a cada $x \in X$ o operador $DF(x) \in [X, Y]$ é chamado de derivada de Gâteaux de F, onde $[X, Y]$ denota o espaço dos operadores $T : X \to Y$.

Exemplo B.1 *Se $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_N = (0, ..., 0, 1)$, então $x \in \mathbb{R}^N$ é tal que $x = (x_1, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$. Consequentemente,*

$$DF(x)(e_i) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_1, ..., x_i + t, ...) - F(x_1, ..., x_N)}{t} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i},$$

isto é, a i-ésima derivada parcial de F em x é a derivada de Gâteaux de F em x na direção e_i.

Observação B.1 *A existência das derivadas parciais não implica na existência da derivada de Gâteaux. (Veja* [22]*, p.* 52*, Exemplo* 2.2*).*

Observação B.2 *A derivada de Gâteaux em um ponto não é necessariamente um operador linear. (Veja* [22]*, p.* 53*, Exemplo* 2.3*).*

No que segue, $\mathcal{L}(X,Y)$ denotará o espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos $T : X \to Y$, o qual está equipado com a norma:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|, \ x \in X.$$

Em particular, denotamos o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ por X^*.

Proposição B.2 *Sejam X um espaço vetorial e Y um espaço linear normado. Considere um operador $F : X \to Y$. Dados x, $y \in X$, suponha que F é Gâteaux diferenciável em qualquer ponto de $\{x + t(y-x); 0 \leq t \leq 1\}$ na direção $y - x$. Então para cada $\delta \in Y^*$, valem*

(i) $\delta\left(F(y) - F(x)\right) = \delta\left(DF(x + \theta(y-x))(y-x)\right)$ *, para algum* $0 < \theta < 1$*;*

(ii) $\|F(y) - F(x)\| \leq sup_{0<\theta<1}\|DF(x + \theta(y-x))(y-x)\|$.

Demonstração: (Veja [22], p. 54, Proposição 2.3). ■

Definição B.3 *Considere $F : X \to Y$ onde X e Y são espaços lineares normados. Dado $x \in X$, se existe um operador linear $F'(x) \in \mathcal{L}[X,Y]$ tal que*

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \frac{\|F(x+\Delta x) - F(x) - F'(x)(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0, \ \Delta x \in X, \tag{B.1}$$

então $F'(x)$ é chamada de derivada de Fréchet de F em x.

O operador

$$F'(x) : X \to \mathcal{L}[X,Y]$$

que associa cada $x \in X$ à $F'(x)$ é chamado de derivada de Fréchet de F.

Observação B.3 *Ao contrário da derivada de Gâteaux $DF(x)$, a derivada de Fréchet $F'(x)$ é por definição um operador linear contínuo.*

Observação B.4 *Por (B.1), temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|F(x+\Delta x) - F(x) - F'(x)(\Delta x)\| \leq \epsilon \|\Delta x\| \tag{B.2}$$

para todo $\Delta x \in X$ tal que $\|\Delta x\| \leq \delta$.

Proposição B.4 *Se $F : X \to Y$ é Fréchet diferenciável em x, então F é contínua em x.*

Demonstração: De fato, pela Observação B.4 e usando desigualdade triangular, segue que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|F(x+\Delta x) - F(x)\| - \|F'(x)(\Delta x)\| &\leq \|F(x+\Delta x) - F(x) - F'(x)(\Delta x)\| \\
&\leq \epsilon \|\Delta x\|,
\end{aligned}$$

sempre que $\|\Delta x\| \leq \delta$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|F(x+\Delta x) - F(x)\| &\leq \epsilon \|\Delta x\| + \|F'(x)(\Delta x)\| \\
&\leq \epsilon \|\Delta x\| + \|F'(x)\| \|(\Delta x)\| \\
&= (\epsilon + \|F'(x)\|) \|(\Delta x)\|,
\end{aligned}$$

sempre que $\|\Delta x\| \leq \delta$. Portanto, a continuidade segue. ■

Observação B.5 *Se F é Fréchet diferenciável, então F é Gâteaux diferenciável. (Veja [22], p. 56).*

Proposição B.5 *Sejam X e Y espaços lineares normados, $F : X \to Y$ uma aplicação e suponha que a derivada de Gâteaux de F, $DF : X \to \mathcal{L}[X,Y]$ existe e é contínua num ponto $x \in X$. Então a derivada de Fréchet F' de F existe e é contínua em $x \in X$.*

Demonstração: Seguiremos a mesma demonstração feita em [7], a qual segue a ideia de [22]. Com efeito, pela parte (i) da Proposição B.2, temos que para todo $\delta \in Y^*$

$$\delta\left[F(x+\eta) - F(x) - DF(x)(\eta)\right] = \delta\left[DF(x+\theta\eta)(\eta) - DF(x)(\eta)\right].$$

E por um Corolário do Teorema de Hanh-Banach (ver [15], p. 223),

$$\begin{aligned}
\|F(x+\eta) - F(x) - DF(x)(\eta)\| &= \delta\left[DF(x+\theta\eta)(\eta) - DF(x)(\eta)\right] \\
&\leq |\delta\left[DF(x+\theta\eta)(\eta) - DF(x)(\eta)\right]| \\
&\leq \|\delta\| \|DF(x+\theta\eta)(\eta) - DF(x)(\eta)\| \\
&\leq \|DF(x+\theta\eta) - DF(x)\| \|\eta\|.
\end{aligned}$$

Onde na última desigualdde foi usado o fato de que $\|\delta\| \leq 1$. Além disso, como DF é contínuo em $x \in X$, dado $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $\|DF(x+\theta\eta) - DF(x)\|\|\eta\| \leq \epsilon\|\eta\|$, sempre que $\|\eta\| \leq r$, donde

$$\|F(x+\eta) - F(x) - DF(x)(\eta)\| \leq \epsilon\|\eta\|, \tag{B.3}$$

sempre que $\|\eta\| \leq r$. Dividindo ambos os membros da desigualdade (B.3) por $\|\eta\|$ e fazendo $\|\eta\| \to 0$, obtemos

$$\lim_{\|\eta\|\to 0} \frac{\|F(x+\eta) - F(x) - DF(x)(\eta)\|}{\|\eta\|} \leq \epsilon, \ \forall\, \epsilon > 0,$$

donde,

$$\lim_{\|\eta\|\to 0} \frac{\|F(x+\eta) - F(x) - DF(x)(\eta)\|}{\|\eta\|} = 0.$$

Portanto, $DF(x) = F'(x)$. Por fim, sendo a derivada de Gâteaux DF contínua em x, segue que a derivada de Fréchet F' é contínua em x. ■

Proposição B.6 (Regra da Cadeia) *Seja X um espaço vetorial e Y,Z espaços lineares normados. Suponha que*

(i) $h : X \to Y$ é Gâteaux diferenciável em X, e

(ii) $g : Y \to Z$ é Fréchet diferenciável em Y.

Então $F = g \circ h : X \to Z$ é Gâteaux diferenciável em X e $DF(x) = g'(h(x))Dh(x)$. Se X também é um espaço linear normado e h é Fréchet diferenciável em X, então F é Fréchet diferenciável em X e $F'(x) = g'(h(x))h'(x)$.

Demonstração: (Veja [22], p. 60, Proposição 2.9). ■

Apêndice C

Alguns Resultados Adicionais

Neste capítulo, exibimos alguns resultados importantes que são usados neste texto.

Proposição C.1 (Desigualdade de Grönwall) *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta(t) \geq 0$, e $\varphi(t)$ são funções reais contínuas que satisfazem*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds, \ \textit{para } a \leq t \leq b. \tag{C.1}$$

Então,

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \ a \leq t \leq b.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Demonstração: Considere $\alpha > 0$. Seja a função,

$$R(t) = \alpha + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds. \tag{C.2}$$

Observe que,

$$R(a) = \alpha \ e \ R(t) \geq \alpha > 0. \tag{C.3}$$

Derivando R, temos

$$R'(t) = \beta(t)\varphi(t).$$

Por (C.2) e (C.3), temos que

$$R'(t) \leq \beta(t)R(t).$$

Como $R(t) > 0$, podemos escrever

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \leq \beta(t). \tag{C.4}$$

Integrando (C.4) de a a t, obtemos

$$\int_a^t \frac{R'(t)}{R(t)} \leq \int_a^t \beta(s)ds$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}
\ln(R(t)) - \ln(R(a)) &\leq \int_a^t \beta(s)ds \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{R(t)}{R(a)}\right) &\leq \int_a^t \beta(s)ds \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{R(t)}{\alpha}\right) &\leq \int_a^t \beta(s)ds.
\end{aligned}$$

Tomando a exponencial, temos

$$\frac{R(t)}{\alpha} \leq e^{\int_a^t \beta(s)ds} \Rightarrow R(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

Para $\alpha = 0$, observe que

$$\varphi(t) \leq \alpha' e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \ \forall \ \alpha' > 0.$$

Fazendo $\alpha' \to \alpha = 0$, obtemos

$$0 \leq \lim_{\alpha' \to 0} \varphi(t) \leq \lim_{\alpha' \to 0} \alpha' e^{\int_a^t \beta(s)ds} = 0.$$

Portanto, $\varphi(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Logo, $u \equiv 0$, e isto completa a prova. ■

Proposição C.2 (Desigualdade de Grönwall Generalizada) *Se φ, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções reais contínuas, $\beta(t) \geq 0$ é integrável em $[a, b]$ e*

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds, \ \textit{para} \ \ a \leq t \leq b. \tag{C.5}$$

Então

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds, \ \textit{para} \ \ a \leq t \leq b.$$

Demonstração: Seja a função $R(t) = exp\left(-\int_a^t \beta(s)ds\right)\int_a^t \beta(s)ds$. Então,

$$\begin{aligned}
R'(t) &= -\beta(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds + \beta(t)\varphi(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} \\
&= \beta(t)\left(\varphi(t) - \int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds\right)e^{-\int_a^t \beta(s)ds}
\end{aligned}$$

Como $\beta(t) \geq 0$, por hipótese, temos

$$R'(t) \leq \beta(t)\alpha(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} \tag{C.6}$$

Integrando de a a t ambos os lados de (C.6) e usando o fato que $R(a) = 0$, obtemos

$$R(t) \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{-\int_a^s \beta(u)du}ds. \tag{C.7}$$

Pela definição de $R(t)$, temos

$$e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{-\int_a^t \beta(s)ds}ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds &\leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_a^t \beta(u)du-\int_a^s \beta(u)du}ds\\ &\leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds.\end{aligned} \tag{C.8}$$

Finalmente, substituindo (C.8) em (C.5), obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds\\ &\leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds.\end{aligned}$$

■

Corolário C.3 *Suponha que além das hipóteses da Proposição C.2, α seja crescente. Então*

$$\varphi(t) \leq \alpha(t)e^{\int_s^t \beta(s)ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

Proposição C.4 *Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Se existe um número $a \in \mathbb{R}$ tal que toda subsequência de (x_n) possui subsequência convergindo para a, então (x_n) converge para a.*

Demonstração: Suponha que (x_n) não converge para a. Então existe $\epsilon > 0$ e $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tais que $x_{n'} \notin (a-\epsilon, a+\epsilon)$ $\forall$ $n' \in \mathbb{N}'$. Por hipótese podemos extrair uma subsequência de $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}'}$ convergindo para a, digamos $(x_{n''})_{n'' \in \mathbb{N}''}$, em que $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito, o que é absurdo, pois $x_{n''} \notin (a-\epsilon, a+\epsilon)$ $\forall$ $n'' \in \mathbb{N}''$, já que $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$. Logo, (x_n) converge para a. ■

Referências Bibliográficas

[1] Andreu-Vaillo, F., Mazón, J. M., Rossi, J. D., Toledo, J. *The Neumann problem for nonlocal nonlinear diffusion equations*, Journal of Evolution Equations, Vol. 8, No.1, (2008), 189-215.

[2] Andreu-Vaillo, F., Mazón, J. M., Rossi, J. D., Toledo, J. *Nonlocal diffusion problems*, American Mathematical Society/Real Sociedad Matemática Española, 2010.

[3] Barros, S.R.M., Pereira, A. L., Possani, C., Simoni, A., Spatially periodic equilibria for a non local evolution equation, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 9, No.4, (2003), 937-948.

[4] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Jonh Wiley & Sons*, New York, 1995.

[5] Bezerra, F. D., Sastre-Gomez, S., da Silva, S. H., Upper semicontinuity for a class of nonlocal evolution equations with Neumann condition, Applicabe Analysis. Vol. 100, No. 9, (2021), 1889-1904.

[6] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer*, New York, 2010.

[7] de Almeida, B. H., *Algumas Propriedades de Equações Diferenciais em Espaços de Banach e Aplicações a Campos Neurais, Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2015).

[8] Carvalho, A.N, Langa, J. M. e Robinson, J., *Attractors For infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Springer, New York, 2012.

[9] Carvalho, A. N., *Sistemas dinâmicos não-lineares, Notas de Aula*, ICMC-USP, São Carlos, 2012.

[10] Chasseigne, E., Chaves, M., Rossi J, D., *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations.*, Journal de Mathématiques Purés et Appliquées, Vol. 2006, No.86, pp 271-291.

[11] Daleckiï, J. L. e Kreïn, M.G., *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space (Translations of Mathematical Monographs v.43)*, American Mathematical Society, Providence, Rhodes Island, 1970.

[12] De Masi A., Gobron T., Presutti E., Travelling Fronts |In Non-Local Evolution Equations, Arch Ration Mech Anal, No. 132, pp. 143-205. (1995)

[13] Hale, J. K., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, American Mathematical Society*, Rhode Island, 1988.

[14] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations* , 2ª ed., Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, 1980.

[15] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Aplications*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1978.

[16] Ladas, E., Laksmikantham, V., *Differential Equations in Abstract Spaces*, Academic Press, New York, 1972. (Mathematics in Science and Engineering, v.85).

[17] Lima, E. L., *Curso de Análise vol. 2*, 11ª ed., IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2010.

[18] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, 5ª ed., IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2017.

[19] Silva, M. B., *Comportamento Assintótico para Equação de Campos Neurais, Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2014).

[20] Pereira, A. L., *Global Attractor and Nonhomogeneous Equilibria for a Non Local Evolution Equation in an Unbounded Domain*, J. Diff. Equations, 226 (2006), 352-372.

[21] Pereira, A. L., da Silva, S.H., Continuity of global attractors for a class of non local evolution equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 26, No.3, (2010), 1073-1100.

[22] Rall, L. B., *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Academic Press, New York - Londom, 1971.

[23] Robinson, J. C., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge 2001.

[24] da Silva, S. H., Pereira, A.L., *Global attractors for neural fields in a weighted space.*, Matemática Contemporânea, **36** (2009) 139-153.

[25] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.