Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades e Polinômios Centrais com Involução para a Álgebra $M_{1,1}(E)$

por

Patrícia Naiara Araújo Uchôa

sob orientação de

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Campina Grande - PB
Fevereiro, 2022

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática

Patrícia Naiara Araújo Uchôa

Identidades e Polinômios Centrais com Involução para a Álgebra $M_{1,1}(E)$

Trabalho apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Campina Grande - PB, fevereiro de 2022
Curso de Mestrado em Matemática

U19i Uchôa, Patrícia Naiara Araújo.
Identidades e polinômios centrais com involução para a álgebra $M_{1,1}(E)$ / Patrícia Naiara Araújo Uchôa. – Campina Grande, 2022.
69 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.
"Orientação: Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior".
Referências.

1. Álgebra. 2. Álgebras com Involução. 3. Identidades Polinomiais. 4. Polinômios Centrais. I. Araújo, Gustavo da Silva. II. Título.

CDU 512(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

Identidades e Polinômios Centrais com Involução para a Álgebra $M_{1,1}(E)$

por

Patrícia Naiara Araújo Uchôa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Dimas José Gonçalves

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

Diogo Diniz P. S. Silva

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Antônio Pereira Brandão Jr

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2022

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao professor Brandão por ter aceitado orientar o trabalho. Professor, sua paciência e compreensão com todas as dificuldades que passei durante esse período de pandemia e problemas pessoais foram grandes incentivadores para mim.

Agradeço também à minha família, principalmente meus irmãos, Natália, Juliana e Cesar, que estiveram me acompanhando e incentivando durante toda essa jornada.

Agradeço também a Silmara, uma grande amiga que esteve ao meu lado durante todos os momentos dessa jornada.

Aos colegas José Lucas, Geisa e Caio, que foram extremamente acolhedores quando comecei o curso, e estavam sempre dispostos a ajudar.

Aos colegas Eduardo e José Marcos que me acompanharam em disciplinas durante a pandemia, e me fizeram sentir menos sozinha durante o tempo em que fiquei em Campina Grande. Aos professores da FECLI, Wanderlândia, Enio, Gladeston e Jeanne, que foram fundamentais nessa jornada.

Finalmente, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Obrigada!

Resumo

Neste trabalho estudamos a álgebra com involução $(M_{1,1}(E), *)$, onde $*$ é a involução induzida pela superinvolução transposição da superálgebra das matrizes de ordem 2 sobre um corpo, suas identidades polinomiais e seus polinômios centrais com involução. Nosso objetivo é determinar um conjunto finito de geradores do ideal das identidades polinomiais com involução e também um conjunto de polinômios que, junto com as identidades, geram o espaço dos polinômios centrais com involução para $M_{1,1}(E)$, sobre um corpo de característica zero.

Palavras chave: Álgebras com involução, identidades polinomiais, polinômios centrais.

Abstract

In this dissertation, we study the algebra with involution $(M_{1,1}(E), *)$, where $*$ is the involution induced by the transposition superinvolution of the superalgebra of matrices of order 2 over a field, their polynomial identities and their central polynomials with involution. Our goal is to determine a finite set of generators of the ideal of polynomial identities with involution and also a set of polynomials that, together with the identities, generate the space of the central polynomials with involution to $M_{1,1}(E)$, over a field with characteristic zero.

Key words: Algebras with involution, polynomial identities, central polynomials.

Sumário

Introdução

Um anel com identidades polinomiais (*PI-ring*) é um anel R que satisfaz uma identidade polinomial $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ para qualquer substituição das indeterminadas x_i por elementos de R. Os primeiros resultados nessa área aparecem no trabalho *Ober die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme* de Dehn, publicado em 1922 ([3]). A introdução moderna foi iniciada por Kaplansky em 1948 com seu trabalho *Rings with a polynomial identity*, baseado nos métodos introduzidos por Jacobson, em 1945, e Levitzki, em 1946.

Existem três principais raízes da teoria de identidades polinomiais: a base da geometria projetiva, a teoria de equações e a comutatividade de anéis.

Dehn se interessou na lacuna apresentada entre os teoremas de Desargue e de Pappus, que são dois dos principais teoremas da geometria projetiva (linear). Em [9], seu trabalho de 1922, Dehn prova que qualquer teorema que leva a uma relação polinomial $\sum \alpha_{i_k} x_1^i x_2 x_1^k = 0$ (em característica zero) em um anel com divisão D, implica comutatividade e isso significa que o teorema de Pappus é válido nessa geometria.

Os resultados de Dehn em 1922 levaram para o próximo trabalho em PI-teoria, *Ober die Grundlagen der projektiven Geometrie and allgemeine Zahlsysteme* de Wagner, publicado em 1936. Este trabalho é estruturado de forma parecida com trabalhos mais modernos de PI-teoria, inclusive, nele Wagner trabalha com matrizes genéricas, uma ferramenta importante no estudo da PI-teoria.

O próximo trabalho com resultados da PI-teoria e raízes na geometria é o trabalho de Hall, publicado em 1943, *Projective planes*. Esse trabalho de Hall fala sobretudo de geometria, mas apresenta alguns resultados introdutórios da PI-teoria moderna. Acreditamos que o longo espaço de tempo entre os três trabalhos citados é devido a falta de uma teoria abstrata de anéis na época.

Outra fonte importante da PI-teoria foi a generalização da lei comutativa: Em 1947, F.W. Levi afirmou que a lei comutativa $x_1x_2 - x_2x_1$ tem uma generalização natural nas identidades $S_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, onde $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação sigma, conhecidas como identidades standard. Um anel R teria posto de comutatividade (Roc) $\leq n$ se satisfazia $S_n[X]$, e Levi provou que $\mathrm{Roc}[M_n(K)] \leq n^2 - 1$. Independentemente, Kolchin trouxe para Kaplansky que o menor r_n tal que $S_{r_n}[X] = 0$ em $M_n(K)$ deve ser tal que $2n \leq r_n \leq n^2 + 1$. Isso imediatamente levantou a conjectura que $r_n = 2n$, o que foi provado em 1950 em [2], no que hoje conhecemos como o teorema de Amitsur-Levitzki.

Por fim, uma terceira fonte para a PI-teoria pode ser encontrada no trabalho *Equations over a division algebra* de Richardson, publicado em 1928, cujos problemas foram depois abordados por Littewood em seu trabalho *Identical relations in algebra* de 1931. Seus pontos de vista levaram para a noção generalizada de identidades polinomiais, que surpreendentemente, se tornaram uma importante ferramenta ao tratar de relações racionais.

Polinômios centrais são utilizados na demonstração de certos resultados, por exemplo, em [18], Rowen mostra que todo PI anel semiprimo qualquer ideal não nulo intersecta o centro de forma não trivial. Por sua vez, esse resultado é utilizado na prova do Teorema de Posner (ver seção 1.11 de [12]). O problema de sua existência para álgebra de matrizes foi levantando por Kaplansky em [15], sendo resolvido de forma independente por Formanek em 1972 e Razmyslov em 1973. Entretanto, geradores para os polinômios centrais são conhecidos em poucos casos. Para a álgebra $M_2(K)$, os conjuntos geradores dos polinômios centrais foram determinados, quando K é um corpo de característica zero, por Okhitin em 1988, e quando K é um corpo infinito com característica $p \neq 2$ por Colombo e Koshlukov em 2004.

Atualmente, pesquisadores buscam estender resultados conhecidos para álgebras com alguma estrutura suplementar, como involuções. Por exemplo, em [22], Sviridova apresenta resultados análogos aos de Kemer para álgebras associativas com involução. Assim, a busca por identidades $*$-polinomiais satisfeitas por uma álgebra e a busca de uma base para o espaço dos polinômios $*$-centrais são tarefas importantes da teoria de anéis. Para a álgebra $M_n(K)$ são conhecidas uma forma concreta dos geradores do T_*-ideal para os casos quando $n = 1$ (trivial) e $n = 2$ (para char $K = 0$ isto foi feito por Levchenko em 1982 em [16], e para o caso de um corpo infinito com característica positiva, ver [8]). Já para as álgebras de matrizes triangulares superiores $UT_n(F)$, em [14], Ioppolo e Matino descrevem conjuntos finitos de geradores das $*$-identidades polinomiais de $UT_2(F)$ e $UT_3(F)$, onde F é um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Neste trabalho, focamos na álgebra

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| a, d \in E_0 \; b, c \in E_1 \right\}.$$

A involução com a qual trabalhamos é induzida por uma superinvolução de $M_2(K)$ apresentada em [13]. Ademais, em [17], Racine descreve as superinvoluções para álgebras de matrizes, e tais superinvoluções podem ser utilizadas, de modo análogo ao que é feito para $M_{1,1}(E)$, para obter involuções em $M_{p,q}(E)$.

Aqui, nossos objetivos são determinar, em característica zero, bases para o T_*-ideal de $M_{1,1}(E)$ e para o subespaço dos polinômios $*$-centrais satisfeitos por tal álgebra.

O presente trabalho é organizado em três capítulos: no primeiro capítulo trazemos conceitos básicos importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. No segundo capítulo, provamos a existência de um conjunto finito de geradores para o T_*-ideal de $M_{1,1}(E)$, em característica zero. Por fim, tendo em mente o que foi desenvolvido nos capítulos anteriores, obtemos uma base para o subespaço dos polinômios $*$-centrais de $M_{1,1}(E)$, também em característica zero.

Capítulo 1

Conceitos Prévios

Neste capítulo, apresentamos os conceitos básicos necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Utilizamos como referência para este capítulo [5], [6], [11] e [19]. Lembramos que é necessário um conhecimento prévio de conceitos da Álgebra Linear no decorrer do texto e, para isso, indicamos [4] e [21] como referências.

Em todo este capítulo, K denotará um corpo.

1.1 Álgebras

Definição 1.1. Uma K**-álgebra** é um par $(A, \cdot)$, onde A é um K-espaço vetorial e $\cdot$ é uma operação em A que é bilinear, ou seja, $\cdot : A \times A \to A$ satisfaz:

(i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(ii) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

(iii) $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b)$,

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Observação 1.2. *(i) $\cdot$ é chamada de produto ou multiplicação;*

(ii) Para simplificar a notação, denotaremos a K-álgebra $(A, \cdot)$ apenas por A, e o produto $a \cdot b$ por apenas ab; também por simplicidade, usaremos a expressão álgebra em vez de K-álgebra;

(iii) Definimos $a_1a_2a_3$ por $(a_1a_2)a_3$, e assim, indutivamente,

$$a_1a_2 \cdots a_n = (a_1a_2 \cdots a_{n-1})a_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$;

(iv) Dizemos que um subconjunto β é uma base da álgebra A se β é uma base de A como espaço vetorial. Similarmente, a dimensão de A é a dimensão do espaço vetorial A;

(v) Sendo B_1 e B_2 subespaços vetoriais da álgebra A, definimos B_1B_2 como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{xy \mid x \in B_1,\ y \in B_2\}$.

Definição 1.3. Dizemos que uma álgebra A é:

a) **Associativa**, se

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in A.$$

b) **Comutativa**, se

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in A.$$

c) **Unitária** (ou **com unidade**), se existe elemento $1 \in A$ tal que

$$1a = a1 = a, \quad \forall a \in A.$$

Vejamos alguns exemplos de álgebras a seguir:

Exemplo 1.4. *Consideremos K um corpo qualquer e E uma K-álgebra associativa e unitária que possui um subconjunto enumerável $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ tal que:*

(i) $e_i^2 = 0$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $e_i e_j = -e_j e_i$*, para quaisquer* $i, j \in \mathbb{N}$*;*

(iii) O conjunto $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} | i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\}$ *é uma base de* E*.*

Esta álgebra E é chamada de ***álgebra de Grassmann*** *(ou álgebra exterior) de dimensão infinita. Destacamos em E os subespaços vetoriais E_0, gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m} | m$ é par$\}$, e E_1, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1} \cdots e_{i_k} | k$ é ímpar$\}$. Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. De $e_i e_j = -e_j e_i$ segue que*

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_m})(e_{j_1} \cdots e_{j_k}) = (-1)^{mk} (e_{j_1} \cdots e_{j_k})(e_{i_1} \cdots e_{i_m}),$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, e assim, podemos concluir que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$. Tal álgebra existe, e sua construção pode ser encontrada no Exemplo 6.7 de [7].

Observa-se que $E = E_0 \oplus E_1$ define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação (ver Seção 1.5), então, para quaisquer i, $j \in \{0, 1\}$, tem-se $E_i E_j \subseteq E_{i+j}$, onde $i + j$ denota a adição módulo 2.

Exemplo 1.5. *Seja K um corpo. Temos que o conjunto $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K, munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa e unitária. Em $M_n(K)$ definimos as matrizes unitárias E_{ij}, a matriz que tem 1 na entrada (i, j) e zero nas demais.*

Sendo A uma álgebra qualquer, temos $M_n(A)$, o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em A, $n \in \mathbb{N}$, munido do produto usual de matrizes, também é uma álgebra. Caso A seja unitária, podemos, de modo análogo, definir as matrizes unitárias E_{ij} para $M_n(A)$. Ademais,

(i) A associativa $\Leftrightarrow$ $M_n(A)$ associativa;

(ii) A unitária $\Leftrightarrow$ $M_n(A)$ unitária.

Exemplo 1.6. ***Produto tensorial de álgebras.*** *Sejam A e B duas álgebras. O produto tensorial dos espaços vetoriais A e B, que denotamos por $A \otimes B$, é o espaço vetorial consistindo dos elementos $\sum u_i \otimes v_j$, onde $u_i \in A$ e $v_j \in B$. Temos que, para quaisquer $a, b \in A$, $c, d \in B$ e $\lambda \in K$ os elementos $a \otimes c$ (tensores), satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) $(a+b)\otimes c = a\otimes c + b\otimes c$;

(ii) $a\otimes (c+d) = a\otimes c + a\otimes d$;

(iii) $a\otimes (\lambda c) = (\lambda a)\otimes c = \lambda(a\otimes c)$.

Ademais, é um fato conhecido que, se β_1 e β_2 são bases de A e B, respectivamente, então o conjunto $\beta_1\otimes\beta_2 = \{u\otimes v \mid u\in\beta_1,\ v\in\beta_2\}$ é uma base de $A\otimes B$. Além disso, se V é um espaço vetorial e $f : A\times B \to V$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única transformação linear $\varphi : A\otimes B\to V$ que satisfaz $\varphi(a\otimes b) = f(a,b)$; essa propriedade é chamada de propriedade universal.

Para definirmos uma estrutura de álgebra em $A\otimes B$, fixadas bases β_1 e β_2 de A e B, respectivamente, definimos $(u_1\otimes v_1)(u_2\otimes v_2) = u_1u_2\otimes v_1v_2$. Temos que $A\otimes B$, munido desse produto, é uma álgebra; caso A e B sejam associativas, $A\otimes B$ também será. Ademais, se as álgebras A e B forem unitárias, então $1_A\otimes 1_B$ será a unidade de $A\otimes B$.

Para mais detalhes sobre o produto tensorial de álgebras, ver o Capítulo 4 de [7].

Observação 1.7. *Sejam A uma álgebra, $a,b,c\in A$ e $\lambda_1,\lambda_2\in K$. Valem:*

a) $0a = a0 = 0$;

b) $(\lambda_1 a)(\lambda_2 b) = (\lambda_1\lambda_2)ab$;

c) $(-a)b = a(-b) = -ab$ *e* $(-a)(-b) = ab$;

d) $a(b-c) = ab - bc$ *e* $(a-b)c = ac - bc$;

e) Se A possui unidade, então $(-1)a = a(-1) = -a$ e $(-1)(-a) = a$;

f) Se $A \neq 0$ e A possui unidade, então $1\neq 0$.

Definição 1.8. Sendo A associativa e $a,b\in A$, definimos o comutador $[a,b]$ e o produto de Jordan $a\circ b$ como sendo

$$[a,b] = ab - ba \quad \text{e} \quad a\circ b = ab + ba.$$

Definimos indutivamente o comutador de comprimento n como sendo

$$[a_1,\cdots,a_{n-1},a_n] = [[a_1,\cdots,a_{n-1}],a_n],$$

para $a_i\in A$.

Observação 1.9. *Sendo A uma álgebra associativa, é fácil ver que, para quaisquer $a,b,c\in A$, vale*

$$[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b. \tag{1.1.1}$$

Ademais, usando indução e (1.1.1), segue que

$$[a_1a_2\cdots a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1\cdots a_{i-1}[a_i,c]a_{i+1}\cdots a_n. \tag{1.1.2}$$

Uma outra igualdade muito importante válida em álgebras associativas é a identidade de Jacobi:

$$[a_1,a_2,a_3] + [a_2,a_3,a_1] + [a_3,a_1,a_2] = 0. \tag{1.1.3}$$

Definição 1.10. Seja A uma álgebra. Dizemos que:

a) Um subespaço vetorial B de A é uma **subálgebra** de A se B é multiplicativamente fechado, isto é, se $b_1b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$.

b) Um subespaço vetorial I de A é um **ideal** (bilateral) de A, se $ax, xa \in I$ para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$.

Observa-se que toda subálgebra é por si uma álgebra. Seguem abaixo alguns exemplos de subálgebras:

Exemplo 1.11. *O subespaço E_0 definido no Exemplo 1.4 é uma subálgebra de E.*

Exemplo 1.12. *O subespaço*

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0 \text{ e } b, c \in E_1 \right\}$$

é uma subálgebra de $M_2(E)$.

Exemplo 1.13. *Sendo A uma álgebra, o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \ \forall x \in A\}$$

*é chamado **centro** de A, e é um subespaço vetorial de A. No caso de A ser associativa, tem-se que $Z(A)$ é uma subálgebra de A.*

Observação 1.14. *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto não vazio de A. Definimos a subálgebra (resp. ideal) gerada por S como sendo a interseção de todas as subálgebras (resp. ideais) de A que contêm S.*

Caso A seja uma álgebra associativa, temos que a subálgebra gerada por S coincide com o subespaço de A gerado pelo conjunto $\{s_1s_2 \cdots s_k \mid k \in \mathbb{N}, \ s_i \in S\}$. Já o ideal gerado por S coincide com o subespaço gerado por $\{s, as, sb, asb \mid s \in S, \ a, b \in A\}$.

Vamos agora definir álgebra quociente. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Consideremos o espaço vetorial quociente A/I. Para cada $a \in A$, vamos denotar o elemento $a + I$ de A/I por $\overline{a}$. Temos que as operações de soma e produto por escalar em A/I são definidas por

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \quad \text{e} \quad \lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$$

para $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Consideremos agora o produto

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A/I \times A/I & \longrightarrow & A/I \\ & (\overline{a}, \overline{b}) & \longmapsto & \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab} \end{array} .$$

Este produto está bem definido e é bilinear, logo A/I munido dele é uma álgebra, chamada *álgebra quociente de A por I*.

Observação 1.15. *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Vale que:*

a) Se A é associativa, então A/I também é.

b) Se A é comutativa, então A/I também é.

c) Se A possui unidade 1, então o elemento $\overline{1}$ é unidade em A/I.

d) Sendo B um subespaço de A, com $I \subseteq B$, tem-se que B é subálgebra (resp. ideal) de A se, e somente se, B/I é subálgebra (resp. ideal) de A/I.

Definição 1.16. Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é um **homomorfismo** de álgebras se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$.

Um homomorfismo de álgebras bijetivo é chamado de **isomorfismo**; um **endomorfismo** de uma álgebra A é um homomorfismo de A em A (caso este seja bijetivo, ele é chamado de **automorfismo**). Dizemos que duas álgebra A e B são *isomorfas* (e denotamos por $A \simeq B$) quando existe algum isomorfismo de A em B.

Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, o conjunto $\ker \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$, o núcleo de φ, é um ideal de A, e o conjunto $\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$, imagem de φ, é uma subálgebra de B. Tem-se que a aplicação

$$\begin{array}{cccc} \overline{\varphi}: & \dfrac{A}{\ker\varphi} & \longrightarrow & \mathrm{Im}\varphi \\ & \overline{a} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a) \end{array}$$

é bem definida e é um isomorfismo de álgebras.

1.2 PI-Álgebras

Definição 1.17. Seja $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto cujos elementos chamaremos de variáveis. A álgebra $K\langle X\rangle$ com base consistindo de todas as palavras sobre X

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n},\ x_{i_j} \in X,\ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

e multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_n},\ x_{i_k}, x_{j_l} \in X,$$

é chamada de **álgebra associativa livre unitária**, livremente gerada pelo conjunto X. Chamamos os elementos de $K\langle X\rangle$ de polinômios nas variáveis associativas e não-comutativas de X.

O número de variáveis que formam uma palavra é chamado de *tamanho da palavra*, sendo a palavra vazia aquela de tamanho 0 (vamos denotar esta palavra por 1). Observa-se que a palavra vazia é a unidade da álgebra $K\langle X\rangle$. Um elemento de $K\langle X\rangle$ (ou seja, um polinômio) tem a forma

$$f = \sum \alpha_m m$$

onde $\alpha_m \in K$, cada m é uma palavra sobre X, o somatório corre sobre as palavras e o conjunto $\{m \mid \alpha_m \neq 0\}$ é finito. Cada termo da forma αm é chamado de *monômio*.

O lema a seguir traz a propriedade universal das álgebras associativas livres.

Lema 1.18. *Sejam R uma álgebra associativa e unitária e $\varphi_0 : X \to R$ uma aplicação qualquer. Existe um único homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow R$ que satisfaz $\varphi(1) = 1_R$ e estende φ_0, isto é, $\varphi|_X = \varphi_0$.*

Demonstração. Consideremos a transformação linear $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow R$ tal que

$$\varphi(1) = 1_R \qquad \text{e} \qquad \varphi(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = \varphi_0(x_{i_1}) \cdots \varphi_0(x_{i_n}).$$

Temos que φ é um homomorfismo de álgebras e que estende φ_0.

Suponha que existe $\psi : K\langle X\rangle \to R$ um homomorfismo de álgebras que também satisfaz $\psi(1) = 1_R$ e que também estende φ_0. Para qualquer gerador $x_{j_1}\cdots x_{j_m}$ de $K\langle X\rangle$, segue que

$$\begin{aligned}\psi(x_{j_1}\cdots x_{j_m}) &= \psi(x_{j_1})\cdots\psi(x_{j_m}) = \varphi_0(x_{j_1})\cdots\varphi_0(x_{j_m}) = \\ &= \varphi(x_{j_1})\cdots\varphi(x_{j_m}) = \varphi(x_{j_1}\cdots x_{j_m}).\end{aligned}$$

Portanto $\psi = \varphi$. ■

Seja R um álgebra associativa e unitária. Fixados $r_i \in R$, para cada $i \in \mathbb{N}$, sabemos que existe um único homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow R$ de álgebras tal que $\varphi(1) = 1_R$ e $\varphi(x_i) = r_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Sendo $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$, denotamos $\varphi(f(x_1,\cdots,x_n))$ por $f(r_1,\cdots,r_n)$. Observe que obtemos $f(r_1,\ldots,r_n)$ substituindo em x_i por r_i em f.

Definição 1.19. (i) Sejam $f = f(x_1,\cdots,x_m) \in K\langle X\rangle$ e R uma álgebra. Dizemos que $f = 0$ é uma identidade polinomial para R se

$$f(r_1,\cdots,r_m) = 0, \text{ para quaisquer } r_1,\cdots,r_m \in R.$$

Normalmente dizemos apenas que f é uma identidade polinomial para R.

(ii) Se a álgebra R satisfaz uma identidade polinomial não trivial f (isto é, f é um elemento não nulo de $K\langle X\rangle$), chamamos R de **PI-álgebra**.

Exemplo 1.20. *Uma álgebra R é comutativa se, e somente se, satisfaz a identidade polinomial*

$$f(x_1,x_2) = [x_1,x_2].$$

Não é difícil ver que o conjunto $T(R)$ de todas as identidades polinomiais da álgebra R é um ideal de $K\langle X\rangle$. Além disso, Se $f(x_1,\cdots,x_m)$ é uma identidade polinomial de R, então para quaisquer $w_1,\cdots,w_m \in K\langle X\rangle$, o polinômio $f(w_1,\cdots,w_m)$ é também uma identidade polinomial de R. Como todo endomorfismo de $K\langle X\rangle$ é definido pela imagem de X, segue que $T(R)$ é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$.

Definição 1.21. Dizemos que um ideal J da álgebra $K\langle X\rangle$ é um **T-ideal** se $\varphi(J) \subseteq J$ para todo endomorfismo φ de $K\langle X\rangle$.

Assim, dizer que um ideal J de $K\langle X\rangle$ é um T-ideal significa dizer que $f(w_1,\cdots,w_m) \in J$ para quaisquer $f(x_1,\cdots,x_m) \in J$ e $w_1,\cdots,w_m \in K\langle X\rangle$. Temos então que o conjunto $T(R)$ de todas as identidades polinomiais da álgebra R é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, chamado de **T-ideal** de R.

Definição 1.22. Um polinômio $g(x_1,\cdots,x_m) = 0$ é chamado de **consequência** dos polinômios $f_i(x_1,\cdots,x_{m_i}) = 0$, $i \in J$, se qualquer álgebra satisfazendo as identidades $f_i(x_1,\cdots,x_{m_i}) = 0$ também satisfaz a identidade $g(x_1,\cdots,x_m) = 0$.

Denotamos por

$$(f_i(x_1,\cdots,x_{m_i}) \mid i \in I)^T$$

o menor T-ideal U contendo todos os polinômios $f_i(x_1, \cdots, x_{m_i})$, $i \in I$ (isto é, U é a interseção de todos os T-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm todos esses polinômios). Esse T-ideal coincide com o conjunto de todas as consequências das identidades $f_i = 0$, $i \in I$, e seus elementos são da forma

$$\sum u_{i_w} f_i(w_1, \cdots, w_{m_i}) v_{i_w}$$

com $w_1, \cdots, w_{m_i}, u_{i_w}, v_{i_w} \in K\langle X\rangle$. O ideal $(f_i(x_1, \cdots, x_{m_i}) \mid i \in I)^T$ é chamado de T-ideal gerado pelos polinômios $f_i(x_1, \cdots, x_{m_i})$, $i \in I$.

O conjunto $\{f_i(x_1, \cdots, x_{m_i}) \mid i \in I\}$ é chamado uma base do T-ideal U, mesmo se não for um conjunto gerador minimal. Dois conjuntos de polinômios são ditos equivalentes se geram o mesmo T-ideal.

Sendo $x_i \in X$, definimos o grau de um monômio de $K\langle X\rangle$ em x_i como sendo o número de vezes que x_i aparece no monômio. Sendo $f \in K\langle X\rangle$, definimos *o grau de f em x_i*, denotado por $deg_{x_i} f$, como sendo o máximo dos graus dos monômios de f em x_i.

Definição 1.23. O polinômio

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum \alpha_i x_{i_1} \cdots x_{i_{d_i}} \in K\langle X\rangle, \ \alpha_i \in K,$$

é chamado

(i) **homogêneo de grau d em x_i** se todo monômio de f com coeficiente não nulo tem o mesmo grau d em x_i;

(ii) **multi-homogêneo** de multigrau $(d_1, \cdots, d_m)$ se cada variável x_i aparece o mesmo número d_i de vezes em todos os monômios (ou seja, se f é homogêneo de grau d_i em cada variável x_i);

(iii) **multilinear** de grau m se é linear (isto é, homogênea de grau 1) em cada variável $x_1, \cdots, x_m$.

Observe que se $f(x_1, \cdots, x_m)$ é multilinear, então é escrito na forma

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)}, \ \beta_\sigma \in K,$$

onde S_m é o grupo simétrico.

Proposição 1.24. *Seja*

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i \in K\langle X\rangle$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1.

(i) Se o corpo K for infinito, então os conjuntos de polinômios $\{f_i = 0 \mid i = 0, 1, \cdots, d\}$ e $\{f\}$ são equivalentes, ou seja, geram o mesmo T-ideal.

(ii) Se o corpo K for infinito, então todo T-ideal de $K\langle X\rangle$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.

(iii) *Se K tem característica zero, então $f = 0$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares. Consequentemente, todo T-ideal de $K\langle X\rangle$ é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração. (i) Primeiramente, como $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d$, é imediato que f é consequência dos polinômios $f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_d$.

Seja $U = (f)^T$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Tomemos $d+1$ elementos diferentes $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_d$ de K. Como U é um T-ideal,

$$f(\lambda_j x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_j^i f_i(x_1, \cdots, x_m) \in U,\ j = 0, 1, \cdots, d.$$

Segue então que

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_0 x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ f(\lambda_1 x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ f(\lambda_d x_1, x_2, \cdots, x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(x_1, \cdots, x_m) \\ f_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ f_d(x_1, \cdots, x_m) \end{pmatrix}$$

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^d \end{pmatrix}$$

é uma matriz de Vandermonde, e os λ_i's são dois a dois distintos, segue que ela é inversível. Logo, cada $f_i(x_1, \cdots, x_m)$ pertence a U, isto é, as identidades polinomiais $f_i = 0$ são consequências de $f = 0$.

(ii) Basta usar a ideia do item (i) para cada polinômio f_i, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ d$, e cada uma das variáveis.

(iii) Usamos o processo de linearização. Por (i), podemos assumir que f é homogênea em cada uma de suas variáveis. Seja $\deg_{x_1} f = d$. Escrevemos $f(y_1 + y_2, x_2, \cdots, x_m) \in U = (f)^T$ da forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_2, x_2, \cdots, x_m),$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Daí, $f_i \in U$, para $i = 0, 1, \cdots, d$. Além disso, essas identidades são equivalentes a $f = 0$, pois

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \cdots, x_m) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \cdots, x_m),$$

e o coeficiente binomial é não nulo, pois $\operatorname{char} K = 0$.

Como $\deg_{y_j} f_i < d$, para $i = 1, \cdots, d-1$ e $j = 1, 2$, usando um argumento indutivo e repetindo o processo para cada variável, obtemos um conjunto de identidades multilineares equivalentes a $f = 0$.

■

1.3 Álgebras com Involução

Nesta seção, apresentaremos o conceito de involução, junto com algumas definições e propriedades que serão necessárias no decorrer do desenvolvimento dos próximos capítulos.

Sejam K um corpo infinito de característica diferente de 2, e a menos de menção contrária, A uma álgebra associativa e unitária.

Definição 1.25. Dizemos que uma aplicação $* : A \to A$ dada por $a \mapsto a^*$ é uma **involução** de A, se satisfaz, para quaisquer $a, b \in A$:

(i) $(a^*)^* = a$;

(ii) $(a + b)^* = a^* + b^*$;

(iii) $(ab)^* = b^* a^*$.

Escrevemos $*$ para denotar uma dada involução de uma álgebra, e as K-álgebras com involução formam uma classe. Essas álgebras serão chamadas de $*$-álgebras sobre o corpo K. Uma álgebra A com involução $*$ é denotada por $(A, *)$.

Observação 1.26. *Note que:*

(i) Sendo $*$ uma involução em A, onde A é uma álgebra associativa com unidade, segue que

$$a \cdot 1^* = (1 \cdot a^*)^* = a = (a^* \cdot 1)^* = 1^* \cdot a$$

para todo $a \in A$. Logo, $1^* = 1$.

*(ii) Uma involução $*$ em A é uma transformação linear se, e somente se, $*$ restrita ao corpo K (isto é, ao conjunto $\{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$) é a aplicação identidade. Ademais, se $*$ for uma transformação linear, ela é dita **involução do primeiro tipo**; caso contrário, é dita do **segundo tipo**.*

Seja $Z(A)$ o centro da álgebra A. Definimos o conjunto

$$Z(A, *) = \{a \in Z(A);\ a^* = a\}.$$

Os elementos de $Z(A, *)$ são chamados de $*$-*centrais*.

Agora, vejamos alguns exemplos de álgebras com involução.

Exemplo 1.27. *A aplicação $t : M_n(K) \to M_n(K)$, definida por A^t = a transposta de A, é uma involução do primeiro tipo em $M_n(K)$.*

Exemplo 1.28. *Considerando a $\mathbb{C}$-álgebra $M_2(\mathbb{C})$, segue que $* : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, definida por*

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_3} \\ \overline{z_2} & \overline{z_4} \end{pmatrix}$$

é uma involução do segundo tipo.

Exemplo 1.29. *A aplicação $s : M_{2n}(K) \to M_{2n}(K)$, definida por*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix},$$

*com $A, B, C, D \in M_n(K)$ é uma involução do primeiro tipo em $M_{2n}(K)$, chamada **involução simplética**.*

Exemplo 1.30. *Consideremos a álgebra*

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0 \text{ e } b, c \in E_1 \right\}.$$

Temos que a aplicação $* : M_{1,1}(E) \to M_{1,1}(E)$ *dada por*

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)^* = \left(\begin{array}{cc} d & b \\ -c & a \end{array} \right)$$

é uma involução do primeiro tipo de $M_{1,1}(E)$.

De fato, para quaisquer $\left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right) \in M_{1,1}(E)$,

$$\left[\left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right)^* \right]^* = \left(\begin{array}{cc} d_1 & b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{array} \right)^* = \left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right);$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right) \right]^* &= \left(\begin{array}{cc} d_1 & b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} d_2 & b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right)^* + \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right)^*; \\
\left[\left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right) \right]^* &= \left(\begin{array}{cc} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{array} \right)^* \\
&= \left(\begin{array}{cc} c_1b_2 + d_1d_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ -(c_1a_2 + d_1c_2) & a_1a_2 + b_1c_2 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cc} d_2d_1 - b_2c_1 & d_2b_1 + b_2a_1 \\ -c_2d_1 - a_2c_1 & -c_2b_1 + a_2a_1 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cc} d_2 & b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} d_1 & b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right)^* \left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right)^*.
\end{aligned}$$

De agora em diante, o termo *involução* significará sempre *involução do primeiro tipo.*

Seja $(A, *)$ uma álgebra com involução. Dizemos que um elemento $a \in A$ é **simétrico** quando $a^* = a$; dizemos que a é **antissimétrico** quando $a^* = -a$. Denotaremos por A^+ o conjunto dos elementos simétricos, isto é, $A^+ = \{a \in A \,|\, a^* = a\}$. Já o conjunto dos elementos antissimétricos de A será denotado por $A^- = \{a \in A \,|\, a^* = -a\}$. É fácil ver que A^+ e A^- são subespaços de A, e que $A^+ \cap A^- = \{0\}$.

Ademais,

$$\begin{aligned}
(a + a^*)^* &= a^* + (a^*)^* = a^* + a = a + a^* \\
(a - a^*)^* &= a^* - (a^*)^* = a^* - a = -(a - a^*).
\end{aligned}$$

Logo, $a + a^* \in A^+$ e $a - a^* \in A^-$. Como $\text{char}K \neq 2$, segue que

$$a = \frac{a + a^*}{2} + \frac{a - a^*}{2}.$$

Portanto, $A = A^+ \oplus A^-$.

Exemplo 1.31. *Considere a álgebra $M_{1,1}(E)$ com a involução definida no Exemplo 1.30. Temos que*

$$M_{1,1}(E)^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in E_0,\ b \in E_1 \right\}$$
$$M_{1,1}(E)^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| a \in E_0,\ b \in E_1 \right\}$$

De fato, consideremos os conjuntos $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in E_0,\ b \in E_1 \right\}$ e $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| a \in E_0,\ b \in E_1 \right\}$. Note que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ e}$$
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Logo, $A_1 \subseteq M_{1,1}(E)^+$ e $A_2 \subseteq M_{1,1}(E)^-$.

Por outro lado, se $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{1,1}(E)^+$, então

$$\gamma^* = \gamma \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Daí, $a = d$ e $c = 0$, e assim, $\gamma \in A_1$.

Se supormos $\gamma \in M_{1,1}(E)^-$, segue que

$$\gamma^* = -\gamma \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Logo, $d = -a$ e $b = 0$. Assim, $\gamma \in A_2$.

Portanto, $M_{1,1}(E)^+ = A_1$ e $M_{1,1}(E)^- = A_2$.

Proposição 1.32. *Sejam $(A, *)$ uma álgebra com involução, $a \in A^+$ e $b_1, b_2, \cdots, b_n \in A^-$ quaisquer. Segue que*

(i) $[a, b_1, \cdots, b_n] \in A^+$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $[b_1, b_2] \in A^-$*;*

(iii) $b_1 \circ b_2 \in A^+$.

Demonstração. *(i)* Façamos indução sobre n. Note que

$$\begin{aligned}[a, b_1]^* &= (ab_1 - b_1a)^* \\ &= b_1^*a^* - a^*b_1^* \\ &= -b_1a + ab_1 \\ &= [a, b_1].\end{aligned}$$

Logo, $[a, b_1] \in A^+$. Supondo agora que $[a, b_1, \cdots, b_n] \in A$ para algum $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned}[a, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1}]^* &= [[a, b_1, \cdots, b_n], b_{n+1}]^* \\ &= b_{n+1}^*[a, b_1, \cdots, b_n]^* - [a, b_1, \cdots, b_n]^*b_{n+1}^* \\ &= -b_{n+1}[a, b_1, \cdots, b_n] + [a, b_1, \cdots, b_n]b_{n+1} \\ &= [a, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1}].\end{aligned}$$

Portanto, $[a, b_1, \cdots, b_n] \in A^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ora,

$$\begin{aligned}[b_1, b_2]^* &= (b_1b_2 - b_2b_1)^* \\ &= b_2^*b_1^* - b_1^*b_2^* \\ &= b_2b_1 - b_1b_2 \\ &= -[b_1, b_2].\end{aligned}$$

Logo, $[b_1, b_2] \in A^-$.

(iii) Note que

$$\begin{aligned}(b_1 \circ b_2)^* &= (b_1b_2 + b_2b_1)^* \\ &= b_2^*b_1^* + b_1^*b_2^* \\ &= b_2b_1 + b_1b_2 \\ &= b_1 \circ b_2.\end{aligned}$$

Portanto, $b_1 \circ b_2 \in A^+$. ■

Definimos um **homomorfismo de álgebras com involução**

$$\varphi : (A_1, *) \to (A_2, \eta)$$

como um homomorfismo de álgebras $\varphi : A_1 \to A_2$ que satisfaz $\varphi(a^*) = \varphi(a)^\eta$, para todo $a \in A_1$.

Quando existe um isomorfismo nas condições acima, dizemos que as álgebras com involução $(A_1, *)$ e (A_2, η) são isomorfas, denotando por $(A_1, *) \simeq (A_2, \eta)$.

Definição 1.33. Dizemos que $I \subseteq A$ é um ideal de $(A, *)$ se I é um ideal de A e $I^* \subseteq I$.

Quando I é um ideal de $(A, *)$, também dizemos que I é um $*$-ideal de A. Ademais, sendo I um $*$-ideal, claramente ele induz uma involução sobre A/I, pondo $(a+I)^* = a^*+I$.

Observe que a aplicação canônica $A \to A/I$ é um $*$-homomorfismo sobrejetivo, cujo núcleo é o $*$-ideal I. Não é difícil ver que o núcleo de todo $*$-homomorfismo é um $*$-ideal.

Apresentados esses conceitos básicos, podemos começar a falar sobre identidades polinomiais e polinômios centrais com involução. Para isso, entretanto, primeiramente precisamos introduzir a ideia de álgebra associativa livre com involução.

Sejam $Y = \{y_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ e $Z = \{z_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ conjuntos enumeráveis disjuntos de variáveis e tomemos a álgebra associativa livre unitária $K\langle Y \cup Z\rangle$. Consideremos a aplicação linear $* : K\langle Y \cup Z\rangle \to K\langle Y \cup Z\rangle$ que satisfaz $1^* = 1$, $y_i^* = y_i$ e $z_i^* = -z_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e

$$(x_1 x_2 \cdots x_k)^* = x_k^* \cdots x_2^* x_1^*$$

para quaisquer $x_1, x_2, \cdots, x_k \in Y \cup Z$. Sendo $m_1 = x_1 \cdots x_l$ e $m_2 = x_{l+1} \cdots x_n$ monômios quaisquer de $K\langle Y \cup Z\rangle$, note que

$$(m_1 m_2)^* = x_n^* \cdots x_{l+1}^* x_l^* \cdots x_1^* = m_2^* m_1^*.$$

Além disso, é fácil ver que $m_1^{**} = m_1$. Logo, $*$ é uma involução e $K\langle Y \cup Z\rangle$ é chamada de **álgebra associativa livre com involução**, sendo Y o conjunto das *variáveis simétricas* e Z o conjunto das *variáveis antissimétricas*. Um endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z\rangle$ é dito um **$*$-endomorfismo** se $\varphi(y_i)$ é simétrico e $\varphi(z_i)$ é antissimétrico, para todo $i \in \mathbb{N}$; isto é equivalente a dizer que $*$ comuta com φ.

Sendo $(A, *)$ uma álgebra com involução, não é difícil ver que se $\varphi : K\langle Y \cup Z\rangle \longrightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras com involução, então $\varphi(y_i) \in A^+$ e $\varphi(z_i) \in A^-$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, considerando $a_i \in A^+$ e $b_i \in A^-$ para $i \in \mathbb{N}$, sabemos que existe um único homomorfismo $\psi : K\langle Y \cup Z\rangle \longrightarrow A$ de álgebras tal que $\psi(1) = 1_A$, $\psi(y_i) = a_i$ e $\psi(z_i) = b_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que ψ é um homomorfismo de álgebras com involução. Ademais, sendo $f(y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_n) \in K\langle Y \cup Z\rangle$, denotamos $\psi(f(y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_n))$ por $f(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$. Observe que obtemos $f(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ substituindo y_i por a_i e z_i por b_i em f, e essas substituições preservam a simetria e a antissimetria.

Agora, vamos definir identidades polinomiais e polinômios centrais para uma álgebra com involução.

Definição 1.34. Sejam $f(y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_m) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ e $(A, *)$ uma álgebra com involução. Dizemos que f é uma identidade polinomial com involução de $(A, *)$ (ou $*$-identidade polinomial), se $f(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m) = 0$, para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in A^+$ e $b_1, \cdots, b_m \in A^-$.

Dada $(A, *)$ uma álgebra com involução, definimos

$$T_*(A) = \{f \in K\langle Y \cup Z\rangle \mid \ f \text{ é uma identidade para } (A, *)\}$$

o conjunto de todas as identidades com involução da álgebra $(A, *)$. De modo análogo ao caso das identidades ordinárias, é fácil verificar que $T_*(A)$ é um ideal bilateral de $K\langle Y \cup Z\rangle$.

Exemplo 1.35. *Considere a álgebra $M_2(K)$ com a involução transposta (veja o Exemplo 1.27). Se A_1 e A_2 são elementos antissimétricos e B é um elemento simétrico de $(M_2(K), t)$, então $[A_1, A_2] = 0$ e $[A_2, A_1 \circ B] = 0$ (note que $(A_1 \circ B)^t = -A_1 \circ B$, logo esse produto resulta numa matriz antissimétrica). Logo,*

$$0 = [A_2, A_1 \circ B] = A_1 \circ [A_2, B] - [A_1, A_2] \circ B = A_1 \circ [A_2, B].$$

Logo, os polinômios $f(y_1, z_1, z_2) = z_1 \circ [z_2, y_1]$ e $g(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ são $*$-identidades de $(M_2(K), t)$.

Definição 1.36. Um ideal (resp. subespaço) J de $K\langle Y \cup Z\rangle$ é um T_***-ideal** (resp. T_***-espaço**) se $\varphi(J) \subseteq J$, para todo $*$-endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z\rangle$.

Observe que dizer que $\varphi(J) \subseteq J$, para todo $*$-endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z\rangle$, equivale a dizer que $f(g_1, \cdots, g_n, h_1, \cdots, h_m) \in J$ para quaisquer $f(y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_m) \in J$ e $g_1, \cdots, g_n$ elementos simétricos e $h_1, \cdots, h_m$ elementos antissimétricos de $K\langle Y \cup Z\rangle$. Claramente, todo T_*-ideal é um T_*-espaço.

Definição 1.37. Sejam $f = f(y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_m) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ e $(A, *)$ uma álgebra com involução. Diz-se que f é um **polinômio central com involução** (ou polinômio $*$-central) para $(A, *)$ se $f(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m) \in Z(A, *)$, para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in A^+$ e $b_1, \cdots .b_m \in A^-$.

Temos que o conjunto $T_*(A)$ é um T_*-ideal, enquanto o conjunto $C(A, *)$ dos polinômios centrais da álgebra $(A, *)$ é um T_*-espaço.

Dado $S = \{f_j(y_1, \cdots, y_{n_j}, z_1, \cdots, z_{n_j}) \mid j \in \Lambda\}$ um subconjunto de $K\langle Y \cup Z\rangle$, definimos o T_*-ideal e o T_*-espaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$ gerados por S como sendo os subespaços de $K\langle Y \cup Z\rangle$ gerados por $\{p_j f_j(g_1, \cdots, g_{n_j}, h_1, \cdots, h_{m_j})q_j \mid f_j \in S,\ p_j, q_j \in K\langle Y \cup Z\rangle,$ $g_l \in K\langle Y \cup Z\rangle^+, h_s \in K\langle Y \cup Z\rangle^-\}$ e $\{f_j(g_1, \cdots, g_{n_j}, h_1, \cdots, h_{m_j}) \mid f_j \in S,$ $g_l \in K\langle Y \cup Z\rangle^+,\ h_s \in K\langle Y \cup Z\rangle^-\}$, respectivamente.

A demonstração de que todo T_*-espaço e todo T_*-ideal podem ser gerados por um conjunto de polinômios multi-homogêneos (caso K seja infinito) ou multilineares (caso $\mathrm{char} K = 0$) é análoga àquela apresentada na Proposição 1.24.

1.4 Polinômios $*$-Próprios

Nesta seção, abordaremos os conceitos de polinômios $*$-próprios e posto de um polinômio. Definimos um comutador de grau 1 como sendo simplesmente uma variável de $Y \cup Z$.

Definição 1.38. Um polinômio $f \in K\langle Y \cup Z\rangle$ é dito $*$**-próprio** se f é constante ou é uma combinação linear de produtos de variáveis antissimétricas por comutadores (cujas entradas estão em $Y \cup Z$) de grau maior ou igual a 2.

Assim, o conjunto de todos os polinômios $*$-próprios de $K\langle Y \cup Z\rangle$ é exatamente a subálgebra de $K\langle Y \cup Z\rangle$ gerada pelo conjunto

$$\{1\} \cup Z \cup \{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \mid n \geq 2,\ x_j \in Y \cup Z\}.$$

Denotaremos por B_Y a subálgebra dos polinômios $*$-próprios de $K\langle Y \cup Z\rangle$.

Seja $L(Y \cup Z)$ o subespaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$ gerado por $Y \cup Z$ e pelos comutadores cujas entradas são variáveis em $Y \cup Z$, e consideremos uma base ordenada de $L(Y \cup Z)$ (ver seção 1.4 de [5]) formada por

$$y_1, y_2, y_3, \cdots\ z_1, z_2, z_3, \cdots,\ u_1, u_2, u_3, \cdots$$

onde $u_i = [x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}]$, com $x_{i_j} \in Y \cup Z$ e $k \geq 2$. Temos então, pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que existe uma base de $K\langle Y \cup Z\rangle$ formada pelos elementos

$$y_{i_1}^{n_1} y_{i_2}^{n_2} \cdots y_{i_p}^{n_p} z_{j_1}^{m_1} z_{j_2}^{m_2} \cdots z_{j_q}^{m_q} u_{l_1} u_{l_2} \cdots u_{l_k} \quad p, q, k, n_i, m_j \geq 0.$$

Definição 1.39. Seja f um polinômio multi-homogêneo em $K\langle Y \cup Z\rangle$. Escrevendo

$$f = \sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} g_a$$

onde g_a é um polinômio $*$-próprio, definimos o **posto** de f, denotado por $r(f)$, como sendo a maior n-upla $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ na ordem lexicográfica, entre as que possuem escalar α_a diferente de zero.

Como f possui uma única expressão na forma acima, temos que $r(f)$ está bem definido. De acordo com essa definição, f é $*$-próprio se, e somente se, $r(f) = (0, 0, \cdots, 0)$. É importante observar também que a ordem lexicográfica é uma boa ordem no conjunto $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ e assim o princípio da indução é válido, sendo portanto possível fazer indução em $r(f)$.

Vejamos agora uma propriedade importante dos polinômios $*$-próprios. Considere um polinômio multi-homogêneo

$$f(y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_m) = \alpha y_1^{b_1} y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n} g + \sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} g_a \tag{1.4.1}$$

onde $\alpha, \alpha_a \in K - \{0\}$, g e g_a são próprios e $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) < (b_1, b_2, \cdots, b_n) = r(f)$, na ordem lexicográfica. Primeiramente, observe que quanto maior a entrada a_1 na n-upla a, menor é o grau de y_1 em g_a. Por outro lado, como em g e g_a não aparecem variáveis simétricas fora de comutadores, a substituição de y_i por $y_i + 1$ não altera esses polinômios, e assim

$$\begin{aligned} f(y_1 + 1, y_2, \cdots, y_n, z_1, z_2, \cdots, z_m) = \alpha (y_1 + 1)^{b_1} y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n} g + \\ + \sum_a \alpha_a (y_1 + 1)^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} g_a. \end{aligned}$$

Observe que a componente de menor grau em y_1 deste polinômio é

$$f_1 = \alpha y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n} g + \sum_a \alpha_a y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} g_a$$

onde o somatório é sobre todos os a's tais que $a_1 = b_1$. Observe também que quando $a_1 = b_1$ temos $(b_2, \cdots, b_n) > (a_2, \cdots, a_n)$.

Consideremos agora o polinômio $f_1(y_1, y_2 + 1, y_3, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_m)$ e tomemos a sua componente de menor grau em y_2, que é

$$f_2 = \alpha y_3^{b_3} \cdots y_n^{b_n} g + \sum_a \alpha_a y_3^{a_3} \cdots y_n^{a_n} g_a$$

onde o somatório é sobre todos os a's tais que $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Temos que, para $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ vale $(b_3, \cdots, b_n) > (a_3, \cdots, a_n)$. Continuando esse mesmo raciocínio, vamos chegar ao polinômio $f_n = \alpha g$. A partir dessas ideias, temos o resultado a seguir.

Proposição 1.40. *Sejam V um T_*-espaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$ e $f \in V$ como escrito em (1.4.1), onde K é um corpo infinito. Então $g \in V$. Ademais, se V é um T_*-ideal, então os polinômios g_a's também estão em V. Consequentemente, todo T_*-ideal é gerado pelos seus polinômios $*$-próprios.*

Demonstração. Como 1 é simétrico, temos que $y_1 + 1$ é simétrico, e daí o polinômio $f(y_1 + 1, y_2, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_m)$ pertence a V. Como K é infinito, temos que $f_1 \in V$ e assim, como y_2+1 também é simétrico, temos que $f_1(y_1, y_2+1, y_3, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_m) \in V$. Novamente pelo fato de K ser infinito, temos que $f_2 \in V$. Seguindo esse raciocínio, chegamos que f_n pertence a V, e assim $g \in V$.

Se V é um T_*-ideal, temos $\alpha y_1^{b_1} y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n} g \in V$ e portanto o somatório em (1.4.1) também pertence a V. Repetindo esse processo no somatório, concluímos que os g_a's também estão em V, donde segue a última afirmação. ■

Observe que esse processo de "eliminação" de variáveis simétricas fora dos comutadores usado na proposição acima não funcionaria para variáveis antissimétricas, pois a substituição de z_i por $z_i + 1$ não define um $*$-endomorfismo de $K\langle Y \cup Z\rangle$, uma vez que $z_i + 1$ não é antissimétrico.

Dados l e m inteiros não negativos, denotemos por $P_{l,m}$ o espaço dos polinômios multilineares de $K\langle Y \cup Z\rangle$ nas variáveis $y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m$. Consideremos agora o espaço

$$\Gamma_{l,m} = P_{l,m} \cap B_Y, \text{ onde } l, m \geq 0$$

de todos os polinômios $*$-próprios multilineares em $y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m$ na álgebra $K\langle Y \cup Z\rangle$. Já vimos que se I é um T_*-ideal de $K\langle Y \cup Z\rangle$, então o conjunto $B_Y \cap I$ gera I como T_*-ideal.

Supondo agora que que K tem característica zero, com base no que foi visto na Proposição 1.24, observamos que I pode ser gerado como T_*-ideal pelos seus polinômios $*$-próprios multilineares. Assim, sendo I e J T_*-ideais de $K\langle Y \cup Z\rangle$, tem-se que

$$I = J \iff I \cap \Gamma_{l,m} = J \cap \Gamma_{l,m} \text{ para todos } l, m \geq 0.$$

Denotaremos por $\Gamma_{l,m}(I)$ o espaço vetorial quociente $\Gamma_{l,m}/(I \cap \Gamma_{l,m})$.

Sendo $(A, *)$ uma álgebra (associativa e unitária) com involução, escreve-se simplesmente $\Gamma_{l,m}(A)$ ao invés de $\Gamma_{l,m}(T_*(A))$. Se K tem característica zero, as identidades polinomiais com involução de A são determinadas pelas suas identidades $*$-próprias multilineares, isto é, são determinadas pelos subespaços $\Gamma_{l,m} \cap T_*(A)$, com $l, m \geq 0$.

Para finalizar esta seção, mostraremos que $\Gamma_{l,m}(A)$ é um S_m-módulo. Mas para isso, primeiramente definimos módulo e submódulo sobre uma álgebra.

Definição 1.41. Seja A uma álgebra associativa com unidade. Definimos um A-módulo (ou módulo sobre A) como sendo um espaço vetorial M, munido de um produto

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M & \to & M \\ & (a, m) & \mapsto & a \cdot m \end{array}$$

que, para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in K$, satisfaz:

(i) $(a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$;

(ii) $a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2$;

(iii) $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$;

(iv) $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$;

(v) $1_A \cdot m = m$.

Dizemos que um subespaço vetorial N de M é um submódulo (ou A-submódulo) de M, se $a \cdot n \in N$, para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$.

Consideremos agora G um grupo e a álgebra KG (para mais detalhes sobre tal álgebra, ver [6]). Dizemos que um espaço vetorial M é um G-módulo, quando M é um KG-módulo. Sendo assim, um S_m-módulo é um módulo da álgebra KS_m.

Definimos então a operação

$$\cdot : KS_m \times \Gamma_{l,m} \to \Gamma_{l,m}$$

tal que

$$\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma \cdot f(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma f(y_1, \cdots, y_l, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(m)}),$$

$\alpha_\sigma \in K$.

Temos que, para quaisquer $\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma, \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma \sigma \in KS_m$, $f = f(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m), g = g(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m) \in \Gamma_{l,m}$ e $\lambda \in K$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma \sigma\right) \cdot f &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} (\alpha_\sigma + \beta_\sigma) \sigma\right) \cdot f \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} (\alpha_\sigma + \beta_\sigma) f(y_1, \cdots, y_l, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(m)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \cdot f + \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma \cdot f; \\
\left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma\right) \cdot (f + g) &= \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma [f(y_1, \cdots, y_l, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(m)}) + \\
&\quad + g(y_1, \cdots, y_l, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(m)})] \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma\right) \cdot f + \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma\right) \cdot g; \\
\left(\lambda \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma\right) \cdot f &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \lambda \alpha_\sigma \sigma\right) \cdot f \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} \lambda \alpha_\sigma f(y_1, \cdots, y_l, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(m)}) \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma f(y_1, \cdots, y_l, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(m)}) \\
&= \lambda \left[\left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma\right) \cdot f\right].
\end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S_m} \lambda \alpha_\sigma f(y_1, \cdots, y_l, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(m)}) &= \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \lambda f(y_1, \cdots, y_l, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(m)}) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma \sigma\right) \cdot (\lambda f).
\end{aligned}$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{\sigma\in S_m}\alpha_\sigma\sigma\right)\cdot\left[\left(\sum_{\sigma\in S_m}\beta_\sigma\sigma\right)\cdot f\right]=\\
&\left(\sum_{\sigma\in S_m}\alpha_\sigma\sigma\right)\cdot\left(\sum_{\sigma\in S_m}\beta_\sigma f(y_1,\cdots,y_l,z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(m)})\right)=\\
&\sum_{\sigma\in S_m}\sum_{\gamma\in S_m}\alpha_\sigma\beta_\gamma f(y_1,\cdots,y_l,z_{\sigma(\gamma(1))},\cdots,z_{\sigma(\gamma(m))})=\\
&\left(\sum_{\sigma\in S_m}\sum_{\gamma\in S_m}\alpha_\sigma\beta_\gamma\sigma\gamma\right)\cdot f=\\
&\left[\left(\sum_{\sigma\in S_m}\alpha_\sigma\sigma\right)\left(\sum_{\gamma\in S_m}\beta_\gamma\gamma\right)\right]\cdot f,
\end{aligned}
$$

e, diretamente da definição de "$\cdot$", segue que $Id\cdot f=f$. Portanto, $\Gamma_{l,m}$ é um S_m-módulo.

Agora, observe que, se $f(y_1,\cdots,y_l,z_1,\cdots,z_m)$ é uma $*$-identidade polinomial para uma álgebra A, então $\left(\sum_{\sigma\in S_m}\alpha_\sigma\sigma\right)\cdot f(y_1,\cdots,y_l,z_1,\cdots,z_m)$, também é uma $*$-identidade. Assim, $\Gamma_{l,m}\cap T_*(A)$ é um subespaço de $\Gamma_{l,m}$ fechado para a operação "$\cdot$", logo, $\Gamma_{l,m}\cap T_*(A)$ é um S_m-submódulo. Daí, segue que a operação $\star: KS_m\times\Gamma_{l,m}(A)\to\Gamma_{l,m}(A)$, dada por

$$\left(\sum_{\sigma\in S_m}\alpha_\sigma\sigma\right)\star\overline{f(y_1,\cdots,y_l,z_1,\cdots,z_m)}=\sum_{\sigma\in S_m}\alpha_\sigma\overline{f(y_1,\cdots,y_l,z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(m)})}$$

está bem definida, e munido dela, o espaço $\Gamma_{l,m}(A)$ é um S_m-módulo.

1.5 Superálgebras e Superinvoluções

Seja A uma álgebra associativa e unitária. Uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em A é um par (A_0,A_1) de subespaços de A tais que

$$A=A_0\oplus A_1\qquad\text{e}\qquad A_iA_j\subseteq A_{i+j}$$

onde $i+j$ é a adição módulo 2. Uma *superálgebra* ou *álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada* é uma álgebra munida de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação.

Sejam E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação $E=E_0\oplus E_1$ e A uma superálgebra. Definimos o *envelope de Grassmann* $E(A)$ como $E(A)=E_0\otimes A_0\oplus E_1\otimes A_1$, onde $A=A_0\oplus A_1$ é a $\mathbb{Z}_2$-graduação de A.

Exemplo 1.42. *Considere a álgebra $M_2(K)$. Os subespaços*

$$A_0=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\mid a,b\in K\right\}\qquad e\qquad A_1=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\c&0\end{pmatrix}\mid b,c\in K\right\}$$

constituem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $M_2(K)$ (chamada de $\mathbb{Z}_2$-graduação usual). Vamos denotar por $M_{1,1}(K)$ a álgebra $M_2(K)$ munida desta $\mathbb{Z}_2$-graduação.

Consideremos então o envelope de Grassmann $E(M_{1,1}(K))=E_0\otimes A_0\oplus E_1\otimes A_1$. Temos que a álgebra $M_{1,1}(E)$ é isomorfa ao envelope de Grassmann $E(M_{1,1}(E))$.

Sendo $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra, uma **superinvolução** em A é uma transformação linear $\circ : A \to A$ $\mathbb{Z}_2$-graduada (isto é, $(A_i)^\circ \subseteq A_i$ para $i = 0,\, 1$) tal que $(a^\circ)^\circ = a$ para todo $a \in A$ e $(ab)^\circ = (-1)^{\|a\|\|b\|} b^\circ a^\circ$ para quaisquer $a, b \in A_0 \cup A_1$, onde

$$\|x\| = \begin{cases} 0, & \text{se } a \in A_0 \\ 1, & \text{se } a \in A_1 \end{cases}.$$

Segue do Teorema 3.2 de [13] que existem apenas duas superinvoluções em $M_{1,1}(K)$, a saber, as aplicações $\circ, \diamond : M_{1,1}(K) \longrightarrow M_{1,1}(K)$, definidas por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\circ = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\diamond = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Ademais, esse resultado é generalizado em [17].

Considerando as aplicações $\circ$ e $\diamond$ acima, definamos agora $* : M_{1,1}(E) \longrightarrow M_{1,1}(E)$ e $\sharp : M_{1,1}(E) \longrightarrow M_{1,1}(E)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = a(E_{11})^\circ + b(E_{12})^\circ + c(E_{21})^\circ + d(E_{22})^\circ = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\sharp = a(E_{11})^\diamond + b(E_{12})^\diamond + c(E_{21})^\diamond + d(E_{22})^\diamond = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Temos que essas aplicações são involuções na álgebra $M_{1,1}(E)$, induzidas pelas superinvoluções $\circ$ e $\diamond$ em $M_{1,1}(K)$. Observe que $*$ é a involução definida no Exemplo 1.30.

Considerando agora a transformação linear ϕ definida por

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

tem-se que ϕ é um isomorfismo das álgebras com involução entre $(M_{1,1}(E), *)$ e $(M_{1,1}(E), \sharp)$. Assim, essas álgebras satisfazem o mesmo T_*-ideal de identidades polinomiais com involução.

Esta ideia apresentada acima de definir uma involução em $M_{1,1}(E)$ a partir de uma superinvolução em $M_{1,1}(K)$, faz parte de um contexto mais geral no qual, partindo de uma superinvolução numa superálgebra, e de uma superinvolução em $E = E_0 \oplus E_1$, podemos definir uma involução no envelope de Grassmann desta superálgebra. Mais precisamente, sendo $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra, seja $\bullet$ uma superinvolução em A. Considerando em E uma superinvolução $\star$ (observemos que a aplicação identidade é uma superinvolução em E), temos que a aplicação linear $* : E(A) \to E(A)$ tal que $(a \otimes e)^* = a^\bullet \otimes e^\star$, onde $a \in A_0 \cup A_1$ e $e \in E_0 \cup E_1$, é uma involução em $E(A)$.

Para uma leitura mais aprofundada a respeito de superinvoluções e identidades polinomiais com involução em álgebras de matrizes sobre a álgebra exterior indicamos as referências [1] e [10] (seções 1 e 3).

Capítulo 2

Identidades Polinomiais com Involução de $M_{1,1}(E)$

Este capítulo tem como objetivo determinar uma base para o T_*-ideal da álgebra com involução $M_{1,1}(E)$. Para ele, usamos como referência [10].

Como visto anteriormente,

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a, d \in E_0,\ b, c \in E_1 \right\}$$

e a involução $*$ é definida como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (veja o Exemplo 1.30). No decorrer do capítulo, K é um corpo de característica zero.

Já vimos que os subespaços dos elementos simétricos de $M_{1,1}(E)$ em relação à involução $*$ é

$$M_{1,1}(E)^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix};\ a \in E_0, b \in E_1 \right\},$$

enquanto o subespaço dos elementos antissimétricos é

$$M_{1,1}(E)^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix};\ a \in E_0, b \in E_1 \right\}.$$

Lema 2.1. *$(M_{1,1}(E), *)$ satisfaz as seguintes $*$-identidades polinomiais:*

(a) $[y_1, y_2]$

(b) $z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1$

(c) $[z_1, z_2][z_3, z_4]$

Demonstração. Considere $\overline{y_i} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}$ e $\overline{z_j} = \begin{pmatrix} c_j & 0 \\ d_j & -c_j \end{pmatrix}$, $i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3, 4$, elementos simétricos e antissimétricos quaisquer de $M_{1,1}(E)$, respectivamente.

(a)

$$[\overline{y_1}, \overline{y_2}] = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 a_1 & a_2 b_1 + b_2 a_1 \\ 0 & a_2 a_1 \end{pmatrix} = 0.$$

(b)

$$\overline{z_1z_2z_3} - \overline{z_3z_2z_1} = \begin{pmatrix} c_1c_2c_3 & 0 \\ d_1c_2c_3 - c_1d_2c_3 + c_1c_2d_3 & -c_1c_2c_3 \end{pmatrix} - $$
$$- \begin{pmatrix} c_3c_2c_1 & 0 \\ d_3c_2c_1 - c_3d_2c_1 + c_3c_2d_1 & -c_3c_2c_1 \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Note que

$$\begin{aligned}[\overline{z_1}, \overline{z_2}] &= \begin{pmatrix} c_1c_2 & 0 \\ d_1c_2 - c_1d_2 & c_1c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_2c_1 & 0 \\ d_2c_1 - c_2d_1 & c_2c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(d_1c_2 - c_1d_2) & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$[\overline{z_3}, \overline{z_4}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(d_3c_4 - c_3d_4) & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $[\overline{z_1}, \overline{z_2}][\overline{z_3}, \overline{z_4}] = 0$. ■

Proposição 2.2. *Os seguintes polinômios pertencem ao ideal $T_*(M_{1,1}(E))$:*

(i) $[y_1, z_1, z_2, z_3] - 2(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3]$;

(ii) $[z_1, z_2]y_1[z_3, z_4] + [z_3, z_4]y_1[z_1, z_2]$;

(iii) $2z_1[y_1, z_2, z_3] + [y_1, z_1, z_2, z_3] + [z_1, z_2][y_1, z_3] + [z_1, z_3][y_1, z_2] + [z_2, z_3][y_1, z_1]$;

(iv) $2[z_1, z_2]z_3[y_1, z_4] + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4]$;

(v) $[y_1, z_1][y_2, z_2] + [y_1, z_2][y_2, z_1]$;

(vi) $[y_1, z_1][y_2, z_2, z_3] - [y_1, z_2, z_1][y_2, z_3]$;

(vii) $[z_1, z_2][y_1, z_3][y_2, z_4] - [z_1, z_4][y_1, z_2][y_2, z_3] - [z_2, z_3][y_1, z_1][y_2, z_4] + [z_3, z_4][y_1, z_1][y_2, z_2]$.

Demonstração. É suficiente e necessário considerar a avaliação das indeterminadas y_i e z_i nos elementos simétricos e antissimétricos

$$\overline{y_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix} = \alpha_i(E_{11} + E_{22}) + \beta_i E_{12}$$

e

$$\overline{z_i} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & -a_i \end{pmatrix} = a_i(E_{11} - E_{22}) + c_i E_{21}$$

de $M_{1,1}(E)$, respectivamente (Lembre que $E_0 = Z(E)$ e $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in E_1$). Lembremos que E_{ij} é a matriz de $M_2(K)$ tendo 1 na entrada (i, j) e zero nas demais.

Primeiramente, observe que, pela Proposição 1.32, $[\overline{z_i}, \overline{z_j}]$ é antissimétrico, enquanto $\overline{z_i} \circ \overline{z_j}$ e $[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}, \cdots, \overline{z_{j_n}}]$ são simétricos. Ademais,

$$\begin{aligned}[\overline{z_i}, \overline{z_j}] &= a_ia_j(E_{11} + E_{22}) - a_ic_jE_{21} + c_ia_jE_{21} - a_ja_i(E_{11} + E_{22}) + a_jc_iE_{21} - c_ja_iE_{21} \\ &= 2(c_ia_j - a_ic_j)E_{21}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{z_i} \circ \overline{z_j} &= a_i a_j (E_{11} + E_{22}) - a_i c_j E_{21} + c_i a_j E_{21} + a_j a_i (E_{11} + E_{22}) - a_j c_i E_{21} + c_j a_i E_{21} \\ &= 2 a_i a_j (E_{11} + E_{22}).\end{aligned}$$

Por outro lado, segue que

$$\begin{aligned}[\overline{y_i}, \overline{z_j}] &= \alpha_i a_j (E_{11} - E_{22}) + \alpha_i c_j E_{21} - \beta_i a_j E_{12} + \beta_i c_j E_{11} - a_j \alpha_i (E_{11} - E_{22}) - \\ &\quad - a_j \beta_i E_{12} - c_j \alpha_i E_{21} - c_j \beta_i E_{22} \\ &= \beta_i c_j (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_i a_j E_{12}.\end{aligned}$$

Ademais, por indução em $n \geq 1$, segue que

$$[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}, \cdots, \overline{z_{j_n}}] = (-2)^{n-1} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_{n-1}} c_{j_n} (E_{11} + E_{22}) + (-2)^n \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_n} E_{12}. \quad (2.0.1)$$

De fato, para $n = 1$, segue do que foi visto anteriormente que $[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}] = \beta_i c_{j_1} (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_i a_{j_1} E_{12}$.

Supondo que a igualdade (2.0.1) vale para algum $k \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned}[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}, \cdots, \overline{z_{j_k}}, \overline{z_{j_{k+1}}}] &= [[\overline{y_i}, \overline{z_{j_1}}, \cdots, \overline{z_{j_k}}], \overline{z_{j_{k+1}}}] \\ &= [(-2)^{k-1} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_{k-1}} c_{j_k} (E_{11} + E_{22}), a_{j_{k+1}} (E_{11} - E_{22})] + \\ &\quad + [(-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} E_{12}, a_{j_{k+1}} (E_{11} - E_{22})] + \\ &\quad + [(-2)^{k-1} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_{k-1}} c_{j_k} (E_{11} + E_{22}), c_{j_{k+1}} E_{21}] + \\ &\quad + [(-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} E_{12}, c_{j_{k+1}} E_{21}] \\ &= -(-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} a_{j_{k+1}} E_{12} - (-2)^k a_{j_{k+1}} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} E_{12} + \\ &\quad + (-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} c_{j_{k+1}} E_{11} - (-2)^k c_{j_{k+1}} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} E_{22} \\ &= (-2)^k \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} c_{j_{k+1}} (E_{11} + E_{22}) + (-2)^{k+1} \beta_i a_{j_1} \cdots a_{j_k} a_{j_{k+1}} E_{12}.\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução, a igualdade (2.0.1) vale para todo $n \geq 1$.

(i) Observe que

$$[\overline{y_1}, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}] = (-2)^2 \beta_1 a_1 a_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + (-2)^3 \beta_1 a_1 a_2 a_3 E_{12}$$

e

$$(\overline{z_1} \circ \overline{z_2})[\overline{y_1}, \overline{z_3}] = 2(a_1 a_2)(E_{11} + E_{22})(\beta_1 c_3 (E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1 a_3 E_{12}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}[\overline{y_1}, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}] - 2(\overline{z_1} \circ \overline{z_2})[\overline{y_1}, \overline{z_3}] &= (-2)^2 \beta_1 a_1 a_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + (-2)^3 \beta_1 a_1 a_2 a_3 E_{12} - \\ &\quad - 4\beta_1 a_1 a_2 c_3 (E_{11} + E_{22}) + 8\beta_1 a_1 a_2 a_3 E_{12} \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) Note que

$$\begin{aligned}[\overline{z_1}, \overline{z_2}]\overline{y_1}[\overline{z_3}, \overline{z_4}] &= 2(c_1 a_2 - a_1 c_2) E_{21} [\alpha_1 (E_{11} + E_{22}) + \beta_1 E_{12}] 2(c_3 a_4 - a_3 c_4) E_{21} \\ &= 2[(c_1 a_2 \alpha_1 - a_1 c_2 \alpha_1) E_{21} + (c_1 a_2 \beta_1 - a_1 c_2 \beta_1) E_{22}] 2(c_3 a_4 - a_3 c_4) E_{21} \\ &= 4(c_1 a_2 \beta_1 c_3 a_4 - c_1 a_2 \beta_1 a_3 c_4 - a_1 c_2 \beta_1 c_3 a_4 + a_1 c_2 \beta_1 a_3 c_4) E_{21},\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$[\overline{z_3},\overline{z_4}]\overline{y_1}[\overline{z_1},\overline{z_2}] = 4(c_3a_4\beta_1c_1a_2 - c_3a_4\beta_1a_1c_2 - a_3c_4\beta_1c_1a_2 + a_3c_4\beta_1a_1c_2)E_{21}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
[\overline{z_1},\overline{z_2}]\overline{y_1}[\overline{z_3},\overline{z_4}] + [\overline{z_3},\overline{z_4}]\overline{y_1}[\overline{z_1},\overline{z_2}] &= 4(c_1a_2\beta_1c_3a_4 - c_1a_2\beta_1a_3c_4 - a_1c_2\beta_1c_3a_4 + \\
&+ a_1c_2\beta_1a_3c_4)E_{21} + 4(c_3a_4\beta_1c_1a_2 - c_3a_4\beta_1a_1c_2 - \\
&- a_3c_4\beta_1c_1a_2 + a_3c_4\beta_1a_1c_2)E_{21} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(iii) Note que

$$\begin{aligned}
\overline{z_1}[\overline{y_1},\overline{z_2},\overline{z_3}] &= [a_1(e_{11} - e_{22}) + c_1E_{21}](-2\beta_1a_2c_3(E_{11} + E_{22}) + 4\beta_1a_2a_3E_{12}) \\
&= -2a_1\beta_1a_2c_3(E_{11} - E_{22}) + 4a_1\beta_1a_2a_3E_{12} - 2c_1\beta_1a_2c_3E_{21} + \\
&+ 4c_1\beta_1a_2a_3E_{22} \\
&= -2a_1a_2\beta_1c_3(E_{11} - E_{22}) + 4a_1a_2a_3\beta_1E_{12} - 2a_2c_1\beta_1c_3E_{21} + \\
&+ 4a_2a_3c_1\beta_1E_{22}; \\
[\overline{y_1},\overline{z_1},\overline{z_2},\overline{z_3}] &= 4\beta_1a_1a_2c_3(E_{11} + E_{22}) - 8\beta_1a_1a_2a_3E_{12} \\
&= 4a_1a_2\beta_1c_3(E_{11} + E_{22}) - 8a_1a_2a_3\beta_1E_{12}; \\
[\overline{z_1},\overline{z_2}][\overline{y_1},\overline{z_3}] &= 2(c_1a_2 - a_1c_2)E_{21}[\beta_1c_3(E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1a_3E_{12}] \\
&= 2c_1a_2\beta_1c_3E_{21} - 2a_1c_2\beta_1c_3E_{21} - 4c_1a_2\beta_1a_3e_{22} + 4a_1c_2\beta_1a_3E_{22} \\
&= 2a_2c_1\beta_1c_3E_{21} - 2a_1c_2\beta_1c_3E_{21} - 4a_2a_3c_1\beta_1E_{22} + 4a_1a_3c_2\beta_1E_{22}; \\
[\overline{z_1},\overline{z_3}][\overline{y_1},\overline{z_2}] &= 2a_3c_1\beta_1c_2E_{21} - 2a_1c_3\beta_1c_2E_{21} - 4a_2a_3c_1\beta_1E_{22} + 4a_1a_2c_3\beta_1E_{22}; \\
[\overline{z_2},\overline{z_3}][\overline{y_1},\overline{z_1}] &= 2a_3c_2\beta_1c_1E_{21} - 2a_2c_3\beta_1c_1E_{21} - 4a_1a_3c_2\beta_1E_{22} + 4a_1a_2c_3\beta_1E_{22}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$2\overline{z_1}[\overline{y_1},\overline{z_2},\overline{z_3}] + [\overline{y_1},\overline{z_1},\overline{z_2},\overline{z_3}] + [\overline{z_1},\overline{z_2}][\overline{y_1},\overline{z_3}] + [\overline{z_1},\overline{z_3}][\overline{y_1},\overline{z_2}] + [\overline{z_2},\overline{z_3}][\overline{y_1},\overline{z_1}] = 0.$$

(iv) Note que:

$$\begin{aligned}
[\overline{z_1},\overline{z_2}]\overline{z_3}[\overline{y_1},\overline{z_4}] &= 2(c_1a_2 - a_1c_2)E_{21}[a_3(E_{11} - E_{22}) + c_3E_{21}][\beta_1c_4(E_{11} + E_{22}) - \\
&- 2\beta_1a_4E_{12}] \\
&= 2(c_1a_2a_3 - a_1c_2a_3)E_{21}[\beta_1c_4(E_{11} + E_{22}) - 2\beta_1a_4E_{12}] = \\
&= 2(c_1a_2a_3\beta_1c_4 - a_1c_2a_3\beta_1c_4)E_{21} - 4(c_1a_2a_3\beta_1a_4 - a_1c_2a_3\beta_1a_4)E_{22} \\
&= 2(a_2a_3c_1\beta_1c_4 - a_1a_3c_2\beta_1c_4)E_{21} - 4(a_2a_3a_4c_1\beta_1 - a_1a_3a_4c_2\beta_1)E_{22}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\overline{z_1},\overline{z_2}][\overline{y_1},\overline{z_3},\overline{z_4}] &= 2(c_1a_2 - a_1c_2)E_{21}[-2\beta_1a_3c_4(E_{11} + E_{22}) + 4\beta_1a_3a_4E_{12}] = \\
&= 8(a_2a_3a_4c_1\beta_1 - a_1a_3a_4c_2\beta_1)E_{22} - 4(a_2a_3c_1\beta_1c_4 - a_1a_3c_2\beta_1c_4)E_{21}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
2[\overline{z_1},\overline{z_2}]\overline{z_3}[\overline{y_1},\overline{z_4}] + [\overline{z_1},\overline{z_2}][\overline{y_1},\overline{z_3},\overline{z_4}] &= 4(a_2a_3c_1\beta_1c_4 - a_1a_3c_2\beta_1c_4)E_{21} - \\
&- 8(a_2a_3a_4c_1\beta_1 - a_1a_3a_4c_2\beta_1)E_{22} + \\
&+ 8(a_2a_3a_4c_1\beta_1 - a_1a_3a_4c_2\beta_1)E_{22} - \\
&- 4(a_2a_3c_1\beta_1c_4 - a_1a_3c_2\beta_1c_4)E_{21} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(v) Note que:

$$\begin{aligned}[\overline{y_1},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_2}] &= [\beta_1 c_1(E_{11}+E_{22}) - 2\beta_1 a_1 E_{12}][\beta_2 c_2(E_{11}+E_{22}) - 2\beta_2 a_2 E_{12}]\\ &= \beta_1 c_1 \beta_2 c_2 (E_{11}+E_{22}) - 2\beta_1 c_1 \beta_2 a_2 e_{12} - 2\beta_1 a_1 \beta_2 c_2 E_{12}\\ &= \beta_1 c_1 \beta_2 c_2 (E_{11}+E_{22}) - 2a_2\beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} - 2a_1\beta_1\beta_2 c_2 E_{12};\\ [\overline{y_1},\overline{z_2}][\overline{y_2},\overline{z_1}] &= \beta_1 c_2 \beta_2 c_1 (E_{11}+E_{22}) - 2a_1\beta_1 c_2\beta_2 E_{12} - 2a_2\beta_1\beta_2 c_1 E_{12}.\end{aligned}$$

Logo,

$$[\overline{y_1},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_2}] + [\overline{y_1},\overline{z_2}][\overline{y_2},\overline{z_1}] = 0.$$

(vi) Segue que:

$$\begin{aligned}[\overline{y_1},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_2},\overline{z_3}] &= [\beta_1 c_1(E_{11}+E_{22}) - 2\beta_1 a_1 E_{12}][-2\beta_2 a_2 c_3(E_{11}+E_{22})+\\ &+ 4\beta_2 a_2 a_3 E_{12}]\\ &= 4\beta_1 c_1 a_2 a_3 \beta_2 E_{12} - 2\beta_1 c_1 a_2 \beta_2 c_3 (E_{11}+E_{22}) + 4\beta_1 a_1 a_2 \beta_2 c_3 E_{12}\\ &= 4a_2 a_3 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} - 2a_2\beta_1 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11}+E_{22}) + 4a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 c_3 E_{12}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\overline{y_1},\overline{z_2},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_3}] &= [-2\beta_1 a_2 c_1(E_{11}+E_{22}) + 4\beta_1 a_2 a_1 E_{12}][\beta_2 c_3(E_{11}+E_{22})-\\ &- 2\beta_2 a_3 E_{12}]\\ &= -2\beta_1 a_2 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11}+E_{22}) + 4\beta_1 a_2 c_1 \beta_2 a_3 E_{12} + 4\beta_1 a_2 a_1 \beta_2 c_3 E_{12}\\ &= -2a_2\beta_1 c_1\beta_2 c_3(E_{11}+E_{22}) + 4a_2 a_3 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} + 4a_1 a_2 \beta_1\beta_2 c_3 E_{12}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}[\overline{y_1},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_2},\overline{z_3}] - [\overline{y_1},\overline{z_2},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_3}] &= 4a_2 a_3 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} - 2a_2 \beta_1 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11}+E_{22})+\\ &+ 4a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 c_3 E_{12} - [-2a_2\beta_1 c_1 \beta_2 c_3 (E_{11}+E_{22})+\\ &+ 4a_2 a_3 \beta_1 c_1 \beta_2 E_{12} + 4a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 c_3 E_{12}]\\ &= 0.\end{aligned}$$

(vii) Note que:

$$\begin{aligned}[\overline{z_1},\overline{z_2}][\overline{y_1},\overline{z_3}][\overline{y_2},\overline{z_4}] &= 2(c_1 a_2 - a_1 c_2)E_{21}[\beta_1 c_3(E_{11}+E_{22}) - 2\beta_1 a_3 E_{12}][\beta_2 c_4(E_{11}+\\ &+ E_{22}) - 2\beta_2 a_4 e_{12}]\\ &= 2c_1 a_2 \beta_1 c_3 \beta_2 c_4 E_{21} - 4c_1 a_2 \beta_1 c_3 \beta_2 a_4 E_{22} - 2a_1 c_2 \beta_1 c_3 \beta_2 c_4 E_{21}+\\ &+ 4a_1 c_2 \beta_1 c_3 \beta_2 a_4 E_{22} - 4c_1 a_2 \beta_1 a_3 \beta_2 c_4 E_{22} + 4a_1 c_2 \beta_1 a_3 \beta_2 c_4 E_{22}\\ &= 2a_2 c_1 \beta_1 c_3 \beta_2 c_4 E_{21} - 4a_2 a_4 c_1 \beta_1 c_3 \beta_2 E_{22} - 2a_1 c_2 \beta_1 c_3 \beta_2 c_4 E_{21}+\\ &+ 4a_1 a_4 c_2 \beta_1 c_3 \beta_2 E_{22} - 4a_2 a_3 c_1 \beta_1 \beta_2 c_4 E_{22} + 4a_1 a_3 c_2 \beta_1 \beta_2 c_4 E_{22}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\overline{z_1},\overline{z_4}][\overline{y_1},\overline{z_2}][\overline{y_2},\overline{z_3}] &= 2a_4c_1\beta_1c_2\beta_2c_3E_{21} - 4a_4a_3c_1\beta_1c_2\beta_2E_{22} - 2a_1c_4\beta_1c_2\beta_2c_3E_{21} + \\
&+ 4a_1a_3c_4\beta_1c_2\beta_2E_{22} - 4a_4a_2c_1\beta_1\beta_2c_3E_{22} + 4a_1a_2c_4\beta_1\beta_2c_3E_{22} \\
&= 2a_4c_1\beta_1c_2\beta_2c_3E_{21} - 4a_3a_4c_1\beta_1c_2\beta_2E_{22} - 2a_1c_4\beta_1c_2\beta_2c_3E_{21} + \\
&+ 4a_1a_3c_4\beta_1c_2\beta_2E_{22} - 4a_2a_4c_1\beta_1\beta_2c_3E_{22} + 4a_1a_2c_4\beta_1\beta_2c_3E_{22}; \\
[\overline{z_2},\overline{z_3}][\overline{y_1},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_4}] &= 2a_3c_2\beta_1c_1\beta_2c_4E_{21} - 4a_4a_3c_2\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 2a_2c_3\beta_1c_1\beta_2c_4E_{21} + \\
&+ 4a_2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 4a_1a_3c_2\beta_1\beta_2c_4E_{22} + 4a_2a_1c_3\beta_1\beta_2c_4E_{22} \\
&= 2a_3c_2\beta_1c_1\beta_2c_4E_{21} - 4a_3a_4c_2\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 2a_2c_3\beta_1c_1\beta_2c_4E_{21} + \\
&+ 4a_2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 4a_1a_3c_2\beta_1\beta_2c_4E_{22} + 4a_1a_2c_3\beta_1\beta_2c_4E_{22}; \\
[\overline{z_3},\overline{z_4}][\overline{y_1},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_2}] &= 2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2c_2E_{21} - 4a_4a_2c_3\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 2a_3c_4\beta_1c_1\beta_2c_2E_{21} + \\
&+ 4a_3a_2c_4\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 4a_1a_4c_3\beta_1\beta_2c_2E_{22} + 4a_1a_3c_4\beta_1\beta_2c_2E_{22} \\
&= 2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2c_2E_{21} - 4a_2a_4c_3\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 2a_3c_4\beta_1c_1\beta_2c_2E_{21} + \\
&+ 4a_2a_3c_4\beta_1c_1\beta_2E_{22} - 4a_1a_4c_3\beta_1\beta_2c_2E_{22} + 4a_1a_3c_4\beta_1\beta_2c_2E_{22}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&[\overline{z_1},\overline{z_2}][\overline{y_1},\overline{z_3}][\overline{y_2},\overline{z_4}] - [\overline{z_1},\overline{z_4}][\overline{y_1},\overline{z_2}][\overline{y_2},\overline{z_3}] - [\overline{z_2},\overline{z_3}][\overline{y_1},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_4}] \\
&+ [\overline{z_3},\overline{z_4}][\overline{y_1},\overline{z_1}][\overline{y_2},\overline{z_2}] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, os polinômios *(i)-(vii)* são $*$-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$. ■

2.1 Um T_*-Ideal Gerado por $*$-Identidades Polinomiais de $M_{1,1}(E)$

Seja I o T_*-ideal gerado por

$$[y_1,y_2],\ z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1,\ [z_1,z_2][z_3,z_4]$$

e pelos polinômios listados na Proposição 2.2. O principal objetivo deste capítulo é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Em característica zero, o T_*-ideal das $*$-identidades polinomiais da álgebra com involução $M_{1,1}(E)$ é gerado, como T_*-ideal, pelos polinômios*

$$[y_1,y_2],\ z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1,\ [z_1,z_2][z_3,z_4]$$

e pelos polinômios (i),...,(vii) da Proposição 2.2. Em outras palavras, $I = T_*(M_{1,1}(E))$.

Como os geradores de I são $*$-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$, temos que $I \subseteq T_*(M_{1,1}(E))$. Para mostrar a inclusão contrária, primeiramente serão deduzidas algumas consequências dos geradores de I. Denotaremos por $(-1)^\rho$ o sinal da permutação ρ.

Observação 2.4. *Para quaisquer permutações $\sigma,\tau \in S_l$, o ideal I contém o polinômio*

$$[y_{\sigma(1)},z_{\tau(1)}][y_{\sigma(2)},z_{\tau(2)}]\cdots[y_{\sigma(l)},z_{\tau(l)}] - (-1)^{\sigma\tau}[y_1,z_1][y_2,z_2]\cdots[y_l,z_l].$$

De fato, sendo f_1 e f_2 elementos simétricos de $K\langle Y\cup Z\rangle$, temos que $[f_1,f_2]\in I$ e assim $f_1f_2 \equiv_I f_2f_1$ (onde $\equiv_I$ significa congruência módulo I). Como qualquer comutador da forma $[y_i, z_j]$ é simétrico, logo, módulo I, podemos reorganizar os comutadores de forma a ordenar os y_i's. Assim:

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}][y_{\sigma(2)}, z_{\tau(2)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}] \equiv_I [y_1, z_{\tau(\sigma^{-1}(1))}] \cdots [y_l, z_{\tau(\sigma^{-1}(l))}].$$

Ora, mas segue da identidade *(v)* que $[y_1, z_1][y_2, z_2] \equiv_I -[y_1, z_2][y_2, z_1]$. Logo,

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}][y_{\sigma(2)}, z_{\tau(2)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}] \equiv_I (-1)^{\tau\sigma^{-1}}[y_1, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_l, z_l].$$

Como $(-1)^{\sigma^{-1}} = (-1)^{\sigma}$, segue o resultado.

Lema 2.5. *Para qualquer permutação $\sigma \in S_k$, o ideal I contém o polinômio*

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}] - [y_1, z_1, \cdots, z_k, z_{k+1}].$$

Demonstração. Primeiramente, note que o comutador $[y_i, z_{j_1}, \cdots, z_{j_m}]$ é simétrico (veja a Proposição 1.32). Além disso, segue da identidade *(i)* que

$$[y_1, z_1, z_2, z_3] \equiv_I 2(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3] = 2(z_2 \circ z_1)[y_1, z_3] \equiv_I [y_1, z_2, z_1, z_3]. \qquad (2.1.1)$$

Dado então qualquer $k > 2$ e $\sigma \in S_k$, como

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}] = [[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k-2)}], z_{\sigma(k-1)}, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}]$$

e $[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k-2)}]$ é simétrico, usando a igualdade (2.1.1) e indução, os z_i's podem ser organizados, ou seja,

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}] \equiv_I [y_1, z_1, \cdots, z_k, z_{k+1}].$$

Portanto, $[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}] - [y_1, z_1, \cdots, z_k, z_{k+1}] \in I$. ■

Lema 2.6. *O seguinte polinômio*

$$2z_2[y_1, z_1] + 2z_1[y_1, z_2] + [y_1, z_1, z_2] + [y_1, z_2, z_1]$$

é um elemento de I.

Demonstração. Para quaisquer a_1, a_2 e a_3 numa álgebra associativa, tem-se que

$$[a_1, a_2 \circ a_3] = [a_1, a_2] \circ a_3 + a_2 \circ [a_1, a_3].$$

Como $z_1 \circ z_2$ é simétrico (veja Proposição 1.32), segue que

$$[y_1, z_1] \circ z_2 + z_1 \circ [y_1, z_2] = [y_1, z_1 \circ z_2] \in I.$$

Note então que,

$$\begin{aligned} [y_1, z_1, z_2] + z_2[y_1, z_1] &= [y_1 z_1 - z_1 y_1, z_2] + z_2(y_1 z_1 - z_1 y_1) \\ &= y_1 z_1 z_2 - z_1 y_1 z_2 - z_2 y_1 z_1 + z_2 z_1 y_1 + z_2 y_1 z_1 - z_2 z_1 y_1 \\ &= [y_1, z_1] z_2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 2z_2[y_1, z_1] + 2z_1[y_1, z_2] + [y_1, z_1, z_2] + [y_1, z_2, z_1] &= z_2[y_1, z_1] + [y_1, z_1]z_2 + z_1[y_1, z_2] + \\ &+ [y_1, z_2]z_1 \\ &= [y_1, z_1] \circ z_2 + z_1 \circ [y_1, z_2] \\ &= [y_1, z_1 \circ z_2]. \end{aligned}$$

e portanto segue o resultado. ■

Lema 2.7. *O ideal I contém o polinômio*

$$4z_1z_2[y_1, z_3] - 2[z_1, z_2][y_1, z_3] - [y_1, z_1, z_2, z_3].$$

Demonstração. Primeiramente, lembre que $2(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3] - [y_1, z_1, z_2, z_3] \in I$, pela identidade *(i)* da Proposição 2.2. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
4z_1z_2[y_1, z_3] - 2[z_1, z_2][y_1, z_3] &= 4z_1z_2(y_1z_3 - z_3y_1) - 2(z_1z_2 - z_2z_1)(y_1z_3 - z_3y_1) \\
&= 4z_1z_2y_1z_3 - 4z_1z_2z_3y_1 - 2z_1z_2y_1z_3 + 2z_1z_2z_3y_1 + \\
&+ 2z_2z_1y_1z_3 - 2z_2z_1z_3y_1 \\
&= 2z_1z_2y_1z_3 - 2z_1z_2z_3y_1 + 2z_2z_1y_1z_3 - 2z_2z_1z_3y_1 \\
&= 2z_1z_2(y_1z_3 - z_3y_1) + 2z_2z_1(y_1z_3 - z_3y_1) \\
&= 2(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3].
\end{aligned}$$

Portanto, $4z_1z_2[y_1, z_3] - 2[z_1, z_2][y_1, z_3] - [y_1, z_1, z_2, z_3] \in I$. ■

Lema 2.8. *O seguinte polinômio pertence a I:*

$$[z_2, z_3][y_1, z_1, z_4] - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4].$$

Demonstração. Considere $f = [z_2, z_3][y_1, z_1, z_4] - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4]$. Segue da identidade *(iv)* da Proposição 2.2, que, módulo I,

$$\begin{aligned}
[z_2, z_3][y_1, z_1, z_4] &\equiv -2[z_2, z_3]z_1[y_1, z_4]; \\
[z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] &\equiv -2[z_1, z_3]z_2[y_1, z_4]; \text{ e} \\
[z_1, z_2][y_1, z_3, z_4] &\equiv -2[z_1, z_2]z_3[y_1, z_4].
\end{aligned}$$

Logo, módulo I,

$$f \equiv -2[z_2, z_3]z_1[y_1, z_4] + 2[z_1, z_3]z_2[y_1, z_4] - 2[z_1, z_2]z_3[y_1, z_4].$$

Já da identidade *(b)* do Lema 2.1, segue que $z_1z_2z_3 \equiv_I z_3z_2z_1$. Daí,

$$\begin{aligned}
f &\equiv_I -2([z_2, z_3]z_1 - [z_1, z_3]z_2 + [z_1, z_2]z_3)[y_1, z_4] \\
&= -2(z_2z_3z_1 - z_3z_2z_1 - z_1z_3z_2 + z_3z_1z_2 + z_1z_2z_3 - z_2z_1z_3)[y_1, z_4] \\
&\equiv_I 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $f \in I$. ■

Lema 2.9. *O ideal I contém o polinômio*

$$\begin{aligned}
&[z_1, z_4][y_1, z_3, z_2] - [z_1, z_4][y_1, z_2, z_3] + [z_2, z_3][y_1, z_4, z_1] - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] + \\
&\qquad + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4].
\end{aligned}$$

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned}
f = {} & [z_1, z_4][y_1, z_3, z_2] - [z_1, z_4][y_1, z_2, z_3] + [z_2, z_3][y_1, z_4, z_1] - \\
& - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] + [z_1, z_2][y_1, z_3, z_4].
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.8, segue que, módulo I,

$$[z_1, z_2][y_1, z_3, z_4] - [z_1, z_3][y_1, z_2, z_4] \equiv -[z_2, z_3][y_1, z_1, z_4].$$

Logo, módulo I,

$$\begin{aligned} f \equiv\ & [z_1, z_4][y_1, z_3, z_2] - [z_1, z_4][y_1, z_2, z_3] + [z_2, z_3][y_1, z_4, z_1]- \\ & - [z_2, z_3][y_1, z_1, z_4]. \end{aligned}$$

Ora, note que:

$$\begin{aligned} [y_1, z_3, z_2] - [y_1, z_2, z_3] &= [y_1z_3 - z_3y_1, z_2] - [y_1z_2 - z_2y_1, z_3] \\ &= y_1z_3z_2 - z_3y_1z_2 - z_2y_1z_3 + z_2z_3y_1- \\ &\quad - y_1z_2z_3 + z_2y_1z_3 + z_3y_1z_2 - z_3z_2y_1 \\ &= y_1[z_3, z_2] - [z_3, z_2]y_1 \\ &= [y_1, [z_3, z_2]]. \end{aligned}$$

Analogamente, $[y_1, z_4, z_1] - [y_1, z_1, z_4] = [y_1, [z_4, z_1]]$. Logo, módulo I,

$$\begin{aligned} f &\equiv [z_1, z_4][y_1, [z_3, z_2]] + [z_2, z_3][y_1, [z_4, z_1]] \\ &= [z_1, z_4]y_1[z_3, z_2] + [z_2, z_3]y_1[z_4, z_1] - [z_1, z_4][z_3, z_2]y_1 - [z_2, z_3][z_4, z_1]y_1 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

pela identidades *(c)* (Lema 2.1) e *(ii)* (Proposição 2.2), lembrando que $[z_i, z_j] = -[z_j, z_i]$. ■

2.2 Os Geradores do Espaço $\Gamma_{l,m}(I)$

O espaço vetorial de todos os polinômios $*$-próprios multilineares nas variáveis $y_1, \cdots, y_l$ e $z_1, \cdots, z_m$ na álgebra $F\langle Y \cup Z\rangle/I$ é o quociente $(\Gamma_{l,m} + I)/I$. Temos

$$\Gamma_{l,m}(I) = \frac{\Gamma_{l,m}}{I \cap \Gamma_{l,m}} \simeq \frac{\Gamma_{l,m} + I}{I}\ .$$

No restante deste capítulo, um circunflexo sobre uma variável significa que ela está faltando na expressão. Ademais, se $f \in \Gamma_{l,m}$, a sua imagem em $\Gamma_{l,m}(I)$ também será representado por f (ao invés de $\overline{f}$).

Primeiramente, será feito o estudo do subespaço $\Gamma_{0,m}$. Nesse caso, são considerados apenas polinômios $f(z_1, \cdots, z_m)$ nas variáveis antissimétricas.

Lema 2.10. *O espaço $\Gamma_{0,m}(I)$ é gerado pelos polinômios*

$$z_1 \cdots z_m \qquad \text{e} \qquad z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_{m-1}[z_i, z_m],\ i = 1, \cdots, m-1.$$

Demonstração. Note que $[z_i, z_j] \circ z_k = [z_i, z_j]z_k + z_k[z_i, z_j] \in I$, pois

$$[z_i, z_j]z_k + z_k[z_i, z_j] = z_iz_jz_k - z_jz_iz_k + z_kz_iz_j - z_kz_jz_i$$

e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1 \in I$. Logo, módulo I,

$$[z_i, z_j]z_k \equiv -z_k[z_i, z_j]. \tag{2.2.1}$$

Observe então que

$$z_1z_2z_3\cdots z_n[z_a,z_b] = z_2z_1z_3\cdots z_n[z_a,z_b] + [z_1,z_2]z_3\cdots z_n[z_a,z_b]$$

e

$$[z_1,z_2]z_3\cdots z_n[z_a,z_b] \equiv_I (-1)^{n-2}z_3\cdots z_n[z_1,z_2][z_a,z_b].$$

Como o segundo membro dessa congruência pertence a I (identidade *(c)* do Lema 2.1), segue que

$$[z_1,z_2]z_3\cdots z_n[z_a,z_b] \in I$$

e daí

$$z_1z_2z_3\cdots z_n[z_a,z_b] \equiv_I z_2z_1z_3\cdots z_n[z_a,z_b].$$

Logo, para qualquer $\sigma \in S_n$,

$$z_{i_{\sigma(1)}}z_{i_{\sigma(2)}}\cdots z_{i_{\sigma(n)}}[z_a,z_b] \equiv_I z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_n}[z_a,z_b]. \tag{2.2.2}$$

Sejam $\sigma \in S_m - \{id\}$ e $i \in \{2,\ldots,m\}$ tal que $\sigma(i-1) > \sigma(i)$. Então

$$z_{\sigma(1)}\ldots z_{\sigma(i-1)}z_{\sigma(i)}\ldots z_{\sigma(m)} = z_{\sigma(1)}\ldots z_{\sigma(i)}z_{\sigma(i-1)}\ldots z_{\sigma(m)} + z_{\sigma(1)}\ldots\left[z_{\sigma(i-1)},z_{\sigma(i)}\right]\ldots z_{\sigma(m)}.$$

Agora, segue das congruências (2.2.1) e (2.2.2) que

$$z_{\sigma(1)}\ldots\left[z_{\sigma(i-1)},z_{\sigma(i)}\right]\ldots z_{\sigma(m)} \equiv_I \pm z_{\sigma(1)}\ldots \widehat{z_{\sigma(i)}}\ldots \widehat{z_{\sigma(i-1)}}\ldots z_{\sigma(m)}\left[z_{\sigma(i-1)},z_{\sigma(i)}\right].$$

Aplicando esta ideia repetidamente, concluímos que $\Gamma_{0,m}(I)$ é gerado pelo monômio $z_1z_2\cdots z_m$ e pelos polinômios $z_1\cdots\hat{z_a}\cdots\hat{z_b}\cdots z_m[z_a,z_b]$, $1 \le a < b \le m$.

Suponha a, $b \neq m$. Note que

$$z_m[z_a,z_b] + z_a[z_b,z_m] - z_b[z_a,z_m] = z_mz_az_b - z_mz_bz_a + z_az_bz_m - z_az_mz_b - z_bz_az_m + z_bz_mz_a$$

pertence a I, pela identidade (b) do Lema 2.1. Logo, $\Gamma_{0,m}(I)$ é gerado pelo monômio $z_1\cdots z_m$ e pelos polinômios $z_1\cdots\hat{z_i}\cdots z_{m-1}[z_i,z_m]$, $i = 1,\cdots,m-1$. ■

Observação 2.11. *Observando a identidade (a) do Lema 2.1 e observando que um comutador da forma* $[y_{i_1},z_{j_1},\cdots,z_{j_m}]$ *é simétrico, podemos concluir que qualquer comutador* $[r_1,\cdots,r_h] \in F\langle Y\cup Z\rangle/I$ *não nulo (onde cada* r_i *é uma variável) possui no máximo uma variável simétrica. Ademais, podemos supor que tal variável sempre aparece na primeira entrada. De fato, é possível mostrar que em uma álgebra associativa, o comutador* $[x_1,\cdots,x_n,a]$ *pode ser escrito como combinação linear de comutadores da forma* $[a,x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)}]$, $\sigma \in S_n$. *Para* $n=2$, *esse resultado é consequência direta da identidade de Jacobi (veja a Observação 1.9). Supondo que o resultado é válido para algum* $n \ge 2$, *segue que*

$$\begin{aligned}[x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},a] &= [[x_1,\cdots,x_n],x_{n+1},a]\\ &= -[x_{n+1},a,[x_1,\cdots,x_n]] - [a,[x_1,\cdots,x_n],x_{n+1}]\\ &= [[a,x_{n+1}],[x_1,\cdots,x_n]] + [[x_1,\cdots,x_n,a],x_{n+1}]\\ &= -[x_1,\cdots,x_n,[a,x_{n+1}]] + [[x_1,\cdots,x_n,a],x_{n+1}].\end{aligned}$$

Fazendo agora $y = [a,x_{n+1}]$ *e usando a hipótese de indução em* $[x_1,\cdots,x_n,y]$ *e em* $[x_1,\cdots,x_n,a]$, *segue o resultado.*

Temos que a Observação 2.11 implica que

$$\Gamma_{l,m}(I) = 0, \text{ para todo } l > m \geq 0.$$

Em outras palavras, $\Gamma_{l,m} \subseteq I$, para todo $l > m \geq 0$.

Lema 2.12. *O espaço $\Gamma_{l,l}(I)$ é gerado pelo polinômio $[y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l]$.*

Demonstração. Como as variáveis simétricas só aparecem dentro de comutadores e em cada comutador só aparece no máximo uma variável simétrica, é fácil ver que $\Gamma_{l,l}(I)$ é gerado pelos polinômios

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}], \quad \sigma, \tau \in S_l.$$

Mas, da Observação 2.4, segue que

$$[y_{\sigma(1)}, z_{\tau(1)}] \cdots [y_{\sigma(l)}, z_{\tau(l)}] \equiv_I (-1)^{\sigma\tau} [y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l].$$

Portanto, $\Gamma_{l,l}(I)$ é gerado por $[y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l]$. ∎

Agora, considere $m = l + k$, $k \geq 0$. Para qualquer permutação $\sigma \in S_{l+k}$, define-se

$$p_\sigma = [y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(l+k)}]. \tag{2.2.3}$$

Se $m = l + 1$, para $\sigma \in S_{l+1}$, define-se os polinômios

$$f_\sigma = z_{\sigma(1)}[y_1, z_{\sigma(2)}][y_2, z_{\sigma(3)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(l+1)}]. \tag{2.2.4}$$

Se $m = l + k > l + 1$ (ou seja, $k > 1$), para $\sigma \in S_{l+k}$, definem-se

$$g_\sigma = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(l+k)}]. \tag{2.2.5}$$

Lema 2.13. *Seja $l > 0$ e $k \geq 2$, segue que:*

(1) O espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelos polinômios p_σ e f_τ, para $\sigma, \tau \in S_{l+1}$.

(2) O espaço $\Gamma_{l,l+k}(I)$ é gerado pelos polinômios p_σ e g_τ, para $\sigma, \tau \in S_{l+k}$.

Demonstração. Seja $m \geq l + 1$. Os elementos de $\Gamma_{l,m}(I)$ são combinações lineares de polinômios $c_1 \cdots c_n$ $(n \geq l)$, onde c_i ou é uma variável antissimétrica ou é um comutador do tipo $[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}]$, com $y \in Y$ e $z_{i_1}, \cdots, z_{i_n} \in Z$. Como

$$\begin{aligned} [y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}, z] &= [[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}], z] \\ &= [y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}]z - z[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}], \end{aligned}$$

segue que

$$[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}]z = [y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}, z] + z[y, z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}].$$

Daí, qualquer elemento de $\Gamma_{l,m}(I)$ é combinação linear de polinômios $wc'_1c'_2 \cdots c'_l$, onde

$$w = z_{\beta(1)} z_{\beta(2)} \cdots z_{\beta(t)}$$

é um monômio de grau $t \geq 0$ em variáveis antissimétricas e

$$c'_i = [y_{\rho(i)}, z_{\beta(t+h_1+\cdots+h_{i-1}+1)}, \cdots, z_{\beta(t+h_1+\cdots+h_i)}]$$

é um comutador de comprimento $h_i+1 \geq 2$, para permutações $\rho \in S_l$, $\beta \in S_m$ e $l+1$-uplas de inteiros $(t, h_1, \cdots, h_l)$.

Como $[y_1, y_2]$ pertence ao ideal I e cada c_i' é simétrico, podemos supor $\rho(i) = i$, $i = 1, \cdots, l$. Ademais, a identidade *(vi)* permite supor que $h_i = 1$ para qualquer $i \geq 2$. Em outras palavras, $\Gamma_{l,m}(I)$ é gerado pelos polinômios

$$P_{t,\beta} = z_{\beta(1)} \cdots z_{\beta(t)}[y_1, z_{\beta(t+1)}, \cdots, z_{\beta(m-l+1)}][y_2, z_{\beta(m-l+2)}] \cdots [y_l, z_{\beta(m)}]$$

com $0 \leq t \leq m-l$ e $\beta \in S_m$. Observe que $P_{0,\beta} = p_\beta$.

Se $m = l+1$, então $t \in \{0, 1\}$, assim,

$$\begin{aligned} P_{0,\beta} &= [y_1, z_{\beta(1)}, z_{\beta(2)}][y_2, z_{\beta(3)}] \cdots [y_l, z_{\beta(l+1)}] = p_\beta \\ P_{1,\beta} &= z_{\beta(1)}[y_1, z_{\beta(2)}][y_2, z_{\beta(3)}] \cdots [y_l, z_{\beta(l+1)}] = f_\beta. \end{aligned}$$

Agora, assuma $m \geq l+2$. Será denotado por W_m o subespaço de $\Gamma_{l,m}(I)$ gerado pelos polinômios p_σ e g_τ, $\sigma, \tau \in S_m$. Será provado, por indução em m, que $W_m = \Gamma_{l,m}(I)$. Mas, W_m é um S_m-submódulo de $\Gamma_{l,m}(I)$ com respeito à ação natural do grupo simétrico S_m, permutando as variáveis $z_1, \cdots, z_m$ (veja no final de Seção 1.4). Assim, é suficiente mostrar que W_m contém os polinômios $P_{t,\mathrm{Id}}$ para qualquer $1 \leq t \leq m-l$.

Se $m = l+2$, considere os polinômios $P_{1,\mathrm{Id}} = z_1[y_1, z_2, z_3][y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m]$ e $P_{2,\mathrm{Id}} = z_1 z_2[y_1, z_3][y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m]$. Note que, pela identidade *(iii)*,

$$\begin{aligned} 2P_{1,\mathrm{Id}} &= (-[y_1, z_1, z_2, z_3] - [z_1, z_2][y_1, z_3] - [z_1, z_3][y_1, z_2] - \\ &\quad - [z_2, z_3][y_1, z_1])[y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] \\ &= -[y_1, z_1, z_2, z_3][y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] - [z_1, z_2][y_1, z_3][y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] - \\ &\quad - [z_1, z_3][y_1, z_2][y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] - [z_2, z_3][y_1, z_1][y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] \\ &= -p_{\mathrm{Id}} - g_{\mathrm{Id}} - g_{\gamma_1} - g_{\gamma_2} \in W_m \end{aligned}$$

onde $\gamma_1 = (2\ \ 3)$ e $\gamma_2 = (1\ \ 2\ \ 3)$.Logo, $P_{1,\mathrm{Id}} \in W_m$.

Já pelo Lema 2.7, segue que

$$\begin{aligned} 4P_{2,\mathrm{Id}} &= (2[z_1, z_2][y_1, z_3] + [y_1, z_1, z_2, z_3])[y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] \\ &= 2[z_1, z_2][y_1, z_3][y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] + [y_1, z_1, z_2, z_3][y_2, z_4] \cdots [y_l, z_m] \\ &= 2g_{\mathrm{Id}} + p_{\mathrm{Id}} \in W_m. \end{aligned}$$

Logo, $P_{2,\mathrm{Id}} \in W_m$.

Se $m = l+k > l+2$, então note que pela hipótese de indução,

$$z_2 z_3 \cdots z_t[y_1, z_{t+1}, \cdots, z_{k+1}][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_l, z_{k+l}]$$

é combinação linear dos polinômios

$$\begin{aligned} &[y_1, z_{\sigma(2)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}] \text{ e} \\ &[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}][y_1, z_{\tau(4)}, \cdots, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}], \end{aligned}$$

onde σ e τ são permutações do conjunto $\{2, 3 \cdots, m\}$. Logo, $P_{t,\mathrm{Id}}$ é combinação linear dos polinômios

$$\begin{aligned} &z_1[y_1, z_{\sigma(2)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}] \qquad \text{e} \\ &z_1[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}][y_1, z_{\tau(4)}, \cdots, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}] \end{aligned}$$

onde σ e τ são permutações do conjunto $\{2, 3 \cdots, m\}$.

Como $[y_1, z_{\sigma(2)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}]$ é simétrico, substituindo y_1 na identidade *(iii)* por este polinômio, e também substituindo, na mesma identidade, z_2 por $z_{\sigma(k)}$ e z_3 por $z_{\sigma(k+1)}$, e depois multiplicando por $[y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}]$, obtemos o primeiro como combinação linear de polinômios de W_m.

Já para o segundo polinômio, como visto na prova do Lema 2.10, $z_1[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}] \equiv_I -[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}]z_1$. Assim, usando a identidade *(iv)*,

$$
\begin{aligned}
& z_1[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}][y_1, z_{\tau(4)}, \cdots, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}] = \\
& -[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}]z_1[y_1, z_{\tau(4)}, \cdots, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}] = \\
& \frac{1}{2}[z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}][y_1, z_{\tau(4)}, \cdots, z_{\tau(k)}, z_1, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}] \in W_n
\end{aligned}
$$

pois é múltiplo escalar de algum g_γ.

Portanto, $\Gamma_{l,m}(I) = W_m$. ■

Proposição 2.14. *O espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelos polinômios*

- $f = z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}]$;
- $p_1 = [y_1, z_1, z_2][y_2, z_3] \cdots [y_l, z_{l+1}]$;
- $p_i = [y_1, z_i, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_i, z_{i+1}] \cdots [y_l, z_{l+1}]$ *para* $i = 2, \cdots, l+1$.

Demonstração. De acordo com o Lema 2.13, $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelos polinômios $p_\sigma = [y_1, z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_2, z_{\sigma(3)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(l+1)}]$ e $f_\tau = z_{\tau(1)}[y_1, z_{\tau(2)}][y_2, z_{\tau(3)}] \cdots [y_l, z_{\tau(l+1)}]$, onde $\sigma, \tau \in S_{l+1}$. A Observação 2.4 permite assumir $\sigma(2) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(l+1)$ e $\tau(2) < \tau(3) < \cdots < \tau(l+1)$. Assim, os geradores são f, p_i $(i \geq 1)$ e $z_j[y_1, z_1] \cdots [y_j, z_{j+1}] \cdots [y_l, z_{l+1}]$, para $j > 1$. Finalmente, pelo Lema 2.6, o polinômio $z_j[y_1, z_1]$ é combinação linear (módulo I) dos polinômios $z_1[y_1, z_j]$, $[y_1, z_j, z_1]$ e $[y_1, z_1, z_j]$. Daí, usando a Observação 2.4, segue o resultado. ■

Assuma $m = l + k \geq l + 2$, e considere os subespaços $U_{l,m}$ e $V_{l,m}$ de $\Gamma_{l,m}(I)$ gerados pelos polinômios p_σ e g_τ, respectivamente $(\sigma, \tau \in S_m)$:

$$
\begin{aligned}
U_{l,m} &= \left\langle [y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}];\ \sigma \in S_m \right\rangle \\
V_{l,m} &= \left\langle [z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}][y_1, z_{\tau(3)}, \cdots, z_{\tau(k+1)}][y_2, z_{\tau(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\tau(m)}];\ \tau \in S_m \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Segue do Lema 2.13 que

$$\Gamma_{l,m}(I) = U_{l,m} + V_{l,m}, \ \ m \geq l + 2. \tag{2.2.6}$$

Proposição 2.15. *O espaço $U_{l,m}$ é gerado pelos polinômios*

$$P_{(j_1, \cdots, j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_k}, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]$$

onde $\{1, \cdots, m\} = \{i_1, \cdots, i_k\} \cup \{j_1, \cdots, j_l\}$ *com* $m = k + l$ *e*

- $i_1 < \cdots < i_k$,
- $j_1 < \cdots < j_l$.

Demonstração. Ora, pela Observação 2.4, segue que, módulo I,

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}] \equiv$$
$$(-1)^{\gamma} \left[[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}], z_{j_1}\right] [y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]$$

onde γ é a permutação do conjunto $\{\sigma(k+1), \sigma(k+2), \cdots, \sigma(m)\}$ que organiza-o de modo a obter $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$.

Pelo Lema 2.5, segue que, módulo I,

$$[y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, z_{j_1}] \equiv [y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_k}, z_{j_1}]$$

com $i_1 < \cdots < i_k$. Portanto, vale o resultado. ∎

Consideramos agora o espaço $V_{l,m}$. A argumentação será iniciada com o caso mais fácil: $l = 1$, e assim $m \geq 3$.

Lema 2.16. *O espaço $V_{1,m}$ é gerado pelos polinômios*

- $G = [z_1, z_m][y_1, z_2, \cdots, z_{m-1}]$;
- $G_{2;(i,j)} = [z_1, z_i][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_m, z_j]$ $(2 \leq i < j \leq m)$;
- $G_{3;(i)} = [z_2, z_i][y_1, z_3, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_m, z_1]$ $(3 \leq i \leq m)$.

Demonstração. Sejam V o subespaço de $V_{1,m}$ gerado pelos polinômios do enunciado e $g_\sigma = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(m)}]$. O objetivo aqui é mostrar que g_σ pertence a V. Pode-se assumir $\sigma(1) < \sigma(2)$. Pelo Lema 2.5, é possível reorganizar as variáveis $z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(m-1)}$ em qualquer ordem. Logo, suponha $\sigma(3) < \cdots < \sigma(m-1)$. Assim, $1 \in \{\sigma(1), \sigma(3), \sigma(m)\}$.

Suponha $1 = \sigma(m)$, então ou temos $g_\sigma = [z_2, z_i][y_1, z_3, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_1] = G_{3;(i)} \in V$ ou $g_\sigma = [z_i, z_j][y_1, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_1]$, com $3 \leq i < j \leq m$. Nesse último caso, obtemos pelo Lema 2.5,

$$g_\sigma = [z_i, z_j][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_2, z_1].$$

Pelo Lema 2.8, vemos claramente que g_σ é combinação linear dos polinômios

$$[z_2, z_i][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_1] \qquad \text{e} \qquad [z_2, z_j][y_1, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_1]$$

que são $G_{3;(i)}$ e $G_{3;(j)}$, respectivamente. Logo, se $\sigma(m) = 1$, então $g_\sigma \in V$.

Da mesma forma, se $1 = \sigma(3)$, então

$$[z_i, z_j][y_1, z_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_{\sigma(m)}] = [z_i, z_j][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, z_1, z_{\sigma(m)}]$$

que é claramente combinação linear dos polinômios

$$[z_1, z_i][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_{\sigma(m)}] \qquad \text{e} \qquad [z_1, z_j][y_1, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_{\sigma(m)}].$$

Logo, se $\sigma(3) = 1$, então $g_\sigma \in V$.

Por fim, analisaremos o caso em que $1 = \sigma(1)$. É suficiente mostrar que

$$[z_1, z_i][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_{\sigma(m)}] \in V.$$

Isso é claramente verdade se $m = 3$ (basta olhar o polinômio $G_{2;(i,j)}$). Logo, assumindo que $m \geq 4$, a prova é feita através de indução inversa sobre $\sigma(m)$. Se $\sigma(m) = m$, então o polinômio é um elemento de V, pois obtém-se o polinômio $G_{2;(i,m)}$.

Então, para um certo $j \geq 2$, assumimos que a hipótese é verdadeira para $\sigma(m) \geq j+1$. Considerando agora o polinômio $g = [z_1, z_i][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_j]$, claramente, se $i < j$, está feito, pois $g = G_{2;(i,j)}$, que é um gerador de V. Suponha então $i > j$ e seja $h = \sigma(m-1)$. Se $j > h$, então $2 \leq \sigma(3) < \ldots < \sigma(m-1) = h < j < i$ e daí $i = m$, $j = m-1$ e $h = m-2$ (observe que o conjunto $\{\sigma(3), \ldots, \sigma(m-1), j, i\}$ tem $m-1$ elementos). Neste caso, $g = [z_1, z_m][y_1, \cdots, z_{m-1}] = G$, o primeiro gerador de V.

Assuma então $j < h$. Neste caso, pelo Lema 2.9, segue que, módulo I,

$$\begin{aligned}[z_1, z_i][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_h, z_j] &= \big[[y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_{\sigma(m-2)}], z_h, z_j\big] \\ &= [z_1, z_i][y_1, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_j, z_h] - [z_j, z_h][y_1, \cdots, z_i, z_1] + \\ &+ [z_1, z_h][y_1, \cdots, z_j, z_i] - [z_1, z_j][y_1, \cdots, z_h, z_i].\end{aligned}$$

A última parcela é o gerador $G_{2;(j,i)}$ de V; a segunda parcela pertence a V pelo primeiro caso ($\sigma(m) = 1$). Por fim, a primeira e a terceira parcelas pertencem a V pela hipótese de indução. ■

Proposição 2.17. *O espaço $V_{l,m}$ ($m = l + k$ com $l \geq 2$ e $k \geq 2$) é gerado pelos seguintes polinômios:*

(1) $G = [z_1, z_{k+1}][y_1, z_2, \cdots, z_k][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_l, z_{l+k}]$;

(2) $G_{2;(j_1,\cdots,j_{l+1})} = [z_1, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-2}}, z_{j_2}][y_2, z_{j_3}] \cdots [y_l, z_{j_{l+1}}]$
onde $2 \leq j_1 < \cdots < j_{l+1} \leq m$ *e* $2 \leq i_1 < \cdots < i_{k-2} \leq m$;

(3) $G_{3;(j_1,\cdots,j_l)} = [z_2, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]$
onde $3 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq m$ *e* $3 \leq i_1 < \cdots < i_{k-2} \leq m$;

(4) $G_{4;(j_1,\cdots,j_{l-1})} = [z_2, z_{i_{k-1}}][y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_1}] \cdots [y_l, z_{j_{l-1}}]$
onde $3 \leq j_1 < \cdots < j_{l-1} \leq m$ *e* $3 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq m$ *com* $j_1 < i_{k-1}$.

Demonstração. Seja W o subespaço de $V_{l,m}$ gerado pelos polinômios do enunciado. Escreva $n = k+1$ e, para qualquer $A \subset \{1, \cdots, m\}$ de cardinalidade n, considere o subespaço V_A de $V_{l,m}$ gerado pelos polinômios g_σ (polinômio (2.2.5)) tais que $\sigma(i) \in A$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. O objetivo é provar que $V_A \subseteq W$ para todo A.

Sejam $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ subconjuntos de $\{1, \cdots, m\}$, onde $a_1 < \cdots < a_n$ e $b_1 < \cdots < b_n$. Diremos que $A \leq B$ se $(a_1, \cdots, a_n) \leq (b_1, \cdots, b_n)$ na ordem lexicográfica. Assim, a prova da afirmação $V_A \subseteq W$ é feita através de indução sobre A. Primeiro, considere o conjunto $A = \{1, \cdots, n\}$. Se $g_\sigma \in V_A$, então, pela Observação 2.4, pode-se assumir $\sigma(n+1) < \cdots < \sigma(m)$, isto é,

$$g_\sigma = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(n)}][y_2, z_{n+1}] \cdots [y_l, z_m].$$

Pelo Lema 2.16, $[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(n)}]$ é uma combinação linear $(\operatorname{mod} I)$ dos polinômios

$$\begin{aligned}&[z_1, z_n][y_1, z_2, \cdots, z_{n-1}];\\ &[z_1, z_i][y_1, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, z_n, z_j] \ (2 \leq i < j \leq n);\\ &[z_2, z_i][y_1, z_3, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n, z_1]; (3 \leq i \leq n).\end{aligned}$$

Assim, g_σ é uma combinação linear dos geradores de G, $G_{2;(i,j,n+1,n+2,\cdots,m)}$ e $G_{3;(i,n+1,n+2,\cdots,m)}$ de W, e daí $V_{\{1,\cdots,n\}} \subseteq W$.

Agora, seja $A \neq \{1, \cdots, n\}$ e assuma que $V_B \subseteq W$ para qualquer $B < A$. Se $g_\sigma \in V_A$, então $A = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\}$. Como acima, é possível assumir $\sigma(n+1) < \cdots < \sigma(m)$. Assim, se $1 \notin A$, então $1 = \sigma(n+1)$. Aplicando a Observação 2.4 em

$$\big[[y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(n-1)}], z_{\sigma(n)}\big]\,[y_2, z_1][y_3, z_{\sigma(n+2)}]\cdots[y_l, z_{\sigma(m)}]$$

segue que

$$g_\sigma = -[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(n-1)}, z_1][y_2, z_{\sigma(n)}][y_3, z_{\sigma(n+2)}]\cdots[y_l, z_{\sigma(m)}]$$

pois apenas permutamos 1 e $\sigma(n)$. Isto significa que existe algum subconjunto B de $\{1, \cdots, m\}$ tal que $1 \in B$ e $g_\sigma \in V_B$. Como $1 \in B$, temos $B < A$. Logo, $g_\sigma \in V_B \subseteq W$.

Agora será analisado o caso onde $1 \in A$. Seja $A = \{1, a_2, \cdots, a_n\}$. Então, pelo Lema 2.16 e Observação 2.4, qualquer elemento de V_A é uma combinação linear $(\operatorname{mod} I)$ dos polinômios

(α) $[z_1, z_{a_n}][y_1, z_{a_2}, \cdots, z_{a_{n-1}}][y_2, z_{b_1}]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}]$;

(β) $[z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_2}, \cdots, z_{a_n}, z_{a_j}][y_2, z_{b_1}]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}]$ $(2 \leq i < j \leq n)$;

(γ) $[z_{a_2}, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{b_1}]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}]$ $(3 \leq i \leq n)$,

onde $b_1 < \cdots < b_{l-1}$ e $\{1, \cdots, m\} = \{1, a_2, \cdots, a_n\} \cup \{b_1, \cdots, b_{l-1}\}$.

Agora, cada um dos polinômios anteriores será considerado separadamente.

Caso (α):

$$g = [z_1, z_{a_n}][y_1, z_{a_2}, \cdots, z_{a_{n-1}}][y_2, z_{b_1}]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Se $a_{n-1} > b_1$, então pela Observação 2.4,

$$g = -[z_1, z_{a_n}][y_1, z_{a_2}, \cdots, z_{b_1}][y_2, z_{a_{n-1}}]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Isso implica que $g \in V_B$, onde $B = \{1, a_2, \cdots, a_{n-2}, b_1, a_n\} < A$, e assim $g \in W$ por indução.

Se $a_{n-1} < b_1$, então, como $1 < a_2 \cdots < a_{n-1} < b_1 < \cdots < b_{l-1}$ e $a_{n-1} < a_n$, segue que $\{1, a_2, \cdots, a_{n-1}\} = \{1, 2, \cdots, n-1\}$, pois

$$1 < a_2 < \cdots < a_{n-2} < a_{n-1} \leq m - l = k = n + 1.$$

Assim,

$$g = [z_1, z_{a_n}][y_1, z_2, \cdots, z_{n-1}][y_2, z_{b_1}]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Claramente, pode-se assumir que $a_n > n$, pois caso contrário teríamos $A = \{1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ e daí $g = G$, o gerador de W listado em *(1)* no enunciado. Logo, $n \in \{b_1, \cdots, b_{l-1}\}$ e daí $b_1 = n$. Usando a identidade *(vii)* (Proposição 2.2), segue que $g - g_2 - g_3 + g_4 \in I$, onde

- $g_2 = [z_1, z_n][y_1, z_2, \cdots, z_{n-2}, z_{a_n}][y_2, z_{n-1}]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $g_3 = [z_{a_n}, z_{n-1}][y_1, z_2, \cdots, z_{n-2}, z_1][y_2, z_n]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $g_4 = [z_{n-1}, z_n][y_1, z_2, \cdots, z_{n-2}, z_1][y_2, z_{a_n}]\cdots[y_l, z_{b_{l-1}}]$.

Nesse caso, escreve-se $g = g_2 + g_3 - g_4$ (módulo I).

Mas $g_2 = -[z_1, z_n][y_1, z_2, \cdots, z_{n-1}][y_2, z_{a_n}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$, e assim $g_2 \in V_{\{1,\cdots,n\}} \subseteq W$. De modo análogo, $g_4 \in V_{\{1,\cdots,n\}} \subseteq W$.

Pelo Lema 2.5, $g_3 = [z_{a_n}, z_{n-1}][y_1, z_3, \cdots, z_{n-2}, z_2, z_1][y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$. Assim, usando a identidade do Lema 2.8, segue que

$$g_3 = ([z_{a_n}, z_2][y_1, z_3, \cdots, z_{n-1}, z_1] + [z_2, z_{n-1}][y_1, z_3, \cdots, z_{n-2}, z_{a_n}, z_1])\,[y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Note que $[z_2, z_{a_n}][y_1, z_3, \cdots, z_{n-1}, z_1][y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$ é um gerador de W do tipo *(4)* e $[z_2, z_{n-1}][y_1, z_3, \cdots, z_{n-2}, z_{a_n}, z_1][y_2, z_n] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$ é um gerador do tipo *(3)*. Isso conclui o caso (α).

Caso (β):

$$g = [z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_2}, \cdots, z_{a_n}, z_{a_j}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Se $a_j < b_1$, então o polinômio g é um gerador de W do tipo *(2)*. Considere então $a_j > b_1$. Pela Observação 2.4, $g = -[z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_2}, \cdots, z_{a_n}, z_{b_1}][y_2, z_{a_j}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$. Isso implica que $g \in V_B$ para $B = \{1, a_2, \cdots, a_{j-1}, b_1, a_{j+1}, \cdots, a_n\} < A$. Assim, $g \in W$, por indução.

Caso (γ):

$$g = [z_{a_2}, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Se $a_i < b_1$, então $b_1 \geq 3$ e $2 \in A$. Logo, $a_2 = 2$ e g é um gerador de W do tipo *(3)*. Agora, suponha $a_i > b_1$ e assuma também $a_2 > b_1$, isto é, $b_1 = 2$. Usando a identidade *(vii)* (Proposição 2.2) segue que $h_1 - h_2 - h_3 + g \in I$, onde

- $h_1 = [z_1, z_2][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_{a_2}][y_2, z_{a_i}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $h_2 = [z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_2][y_2, z_{a_2}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $h_3 = [z_2, z_{a_2}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{a_i}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$.

Assim, pode-se escrever $g = -h_1 + h_2 + h_3$. Claramente $h_1, h_3 \in V_B$, onde $B = \{1, 2, a_2, \cdots, \hat{a_i}, \cdots, a_n\}$. Daí, como $B < A$, segue por indução que $h_1, h_3 \in W$. Analogamente, $h_2 \in V_{\{1,2,a_3,\cdots,a_n\}}$, e assim $h_2 \in W$, pois $\{1, 2, a_3, \cdots, a_n\} < A$.

A última possibilidade a considerar é o caso $a_2 < b_1$. Então $a_2 = 2$ e $g = [z_2, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$. Lembremos que estamos assumindo $a_i > b_1$. Se $i = n$, então o polinômio g é um gerador de W do tipo *(4)*. Sendo $i < n$, então, usando a identidade *(vii)* (Proposição 2.2), segue que $g = -H_1 + H_2 + H_3$, onde

- $H_1 = [z_1, z_{b_1}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_2][y_2, z_{a_i}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $H_2 = [z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_{b_1}][y_2, z_2] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $H_3 = [z_{b_1}, z_2][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_1][y_2, z_{a_i}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$.

Como acima, H_1 e H_3 são elementos de V_B para $B = \{1, 2, a_3, \cdots, a_{i-1}, b_1, a_{i+1}, \cdots, a_n\} < A$. Assim, por indução, $H_1, H_3 \in W$. Ademais, pela Observação 2.4,

$$H_2 = -[z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_2][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}].$$

Daí, H_2 é uma combinação linear dos polinômios

- $q_1 = [z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_2, z_{a_n}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $q_2 = [z_2, z_{a_n}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_i}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $q_3 = [z_1, z_{a_n}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_2, z_{a_i}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;
- $q_4 = [z_1, z_2][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_n}, z_{a_i}][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$;

pois, pelo Lema 2.9, tem-se que $-H_2 - q_1 + q_2 - q_3 + q_4 \in I$. Pela Observação 2.4, segue que

$$q_1 = -[z_1, z_{a_i}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_2, z_{b_1}][y_2, z_{a_n}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$$

isto é, $q_1 \in V_B$, onde $B = \{1, 2, a_3, \cdots, a_{n-1}\} \cup \{b_1\}$. Analogamente, os polinômios q_3 e q_4 pertencem a V_C, onde $C = \{1, 2, a_3, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_n\} \cup \{b_1\}$. Como $B, C < A$, segue por indução que $q_1, q_3, q_4 \in W$. Finalmente, pelo Lema 2.5,

$$q_2 = [z_2, z_{a_n}][y_1, z_{a_3}, \cdots, z_{a_{n-1}}, z_1][y_2, z_{b_1}] \cdots [y_l, z_{b_{l-1}}]$$

isto é, q_2 é um gerador de W do tipo *(4)*, o que conclui a prova. ■

2.3 A Independência Linear

Agora será provado que os geradores dos espaços $\Gamma_{l,m}(I)$ dados nos resultados anteriores são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$. Para isso, consideremos as seguintes matrizes em $M_{1,1}(E)$:

$$Y_i = \begin{pmatrix} u_i & \zeta_i \\ 0 & u_i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z_i = \begin{pmatrix} v_i & 0 \\ \eta_i & -v_i \end{pmatrix}$$

onde $u_i = e_{6(i-1)+1}e_{6(i-1)+2}$, $\zeta_i = e_{6(i-1)+3}$, $v_i = e_{6(i-1)+4}e_{6(i-1)+5}$ e $\eta_i = e_{6i}$, para $i \in \mathbb{N}$. Observe que Y_i é um elemento simétrico e Z_i é um elemento antissimétrico na álgebra com involução $(M_{1,1}(E), *)$.

Não é difícil ver que dois produtos de elementos distintos pertencentes ao conjunto $\{u_i, \zeta_i, v_i, \eta_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ são iguais na álgebra exterior se têm exatamente os mesmos fatores (não necessariamente na mesma ordem). Logo, as matrizes que definimos acima serão ideais para o que faremos a seguir.

Ademais, considere o seguinte resultado de Álgebra Linear:

Lema 2.18. *Sejam V um F-espaço vetorial e W, U subespaços de V, com $U \subseteq W$. Se $S \subset V$ é um conjunto linearmente independente módulo W e gera V módulo U, então $W = U$.*

Demonstração. De fato, se $w \in W$, então existem $a_1, \cdots, a_n \in F$, $s_1, \cdots, s_n \in S$ e $u \in U$ tais que

$$a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n + u = w.$$

Logo, $a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n = w - u \in W$. Mas, como o conjunto S é LI módulo W, temos que cada a_i é nulo, $i = 1, \cdots, n$. Assim, $w = u \in U$.

Portanto, $W = U$. ■

Nos lemas a seguir, será provado que os geradores do espaço $\Gamma_{l,m}(I)$ são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$, e assim, com auxílio do Lema 2.18, será provado que $\Gamma_{l,m} \cap I = \Gamma_{l,m} \cap T_*(M_{1,1}(E))$.

Lema 2.19. *Os seguintes polinômios*

- $z_1 \cdots z_m$;
- $q_i = z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_{m-1}[z_i, z_m]$ $(i = 1, \cdots, m-1)$,

são linearmente independentes módulo as $*$-identidades de $M_{1,1}(E)$.

Demonstração. Observe que a entrada $(1,1)$ da matriz $Z_1 \cdots Z_m$ é igual a $v_1 \cdots v_m$, a entrada $(2,2)$ é igual a $(-1)^m v_1 \cdots v_m$ e a entrada $(1,2)$ é igual a zero. De fato, note que, para $n = 2$,

$$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} v_1 v_2 & 0 \\ \eta_1 v_2 - v_1 \eta_2 & v_1 v_2 \end{pmatrix}.$$

e para n qualquer o resultado segue por indução.

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} [Z_i, Z_m] &= \begin{pmatrix} v_i & 0 \\ \eta_i & -v_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_m & 0 \\ \eta_m & -v_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_m & 0 \\ \eta_m & -v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i & 0 \\ \eta_i & -v_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_i v_m & 0 \\ \eta_i v_m - v_i \eta_m & v_i v_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_m v_i & 0 \\ \eta_m v_i - v_m \eta_i & v_m v_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(\eta_i v_m - v_i \eta_m) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como as entradas $(2,2)$ e $(1,2)$ de $Z_1 \cdots \hat{Z}_i \cdots Z_{m-1}$ são $\pm v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_{m-1}$ e zero, respectivamente, segue que

$$Z_1 \cdots \hat{Z}_i \cdots Z_{m-1}[Z_i, Z_m] = \pm 2 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_{m-1}(\eta_i v_m - v_i \eta_m) E_{21}.$$

Logo, $z_1 \cdots z_m$ não é combinação linear módulo $T_*(M_{1,1}(E))$ dos demais polinômios, pois a entrada $(1,1)$ de $Z_1 \cdots Z_m$ é um monômio não nulo de E.

Por fim, fixado $i \in \{1, \cdots, m\}$, note que o monômio $v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_{m-1} \eta_i v_m$ vai aparecer na entrada $(2,1)$ apenas do elemento $Z_1 \cdots \hat{Z}_i \cdots Z_{m-1}[Z_i, Z_m]$. Como esses monômios são distintos em E, e portanto linearmente independentes, os polinômios correspondentes são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$. ■

Segue então dos Lemas 2.10, 2.18 e 2.19 que

$$\Gamma_{0,m}(I) = \Gamma_{0,m}(T_*(M_{1,1}(E))). \tag{2.3.1}$$

Lema 2.20. *O polinômio $[y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l]$ não pertence a $T_*(M_{1,1}(E))$.*

Demonstração. Segue que em $M_{1,1}(E)$

$$[Y_i, Z_i] = \zeta_i \eta_i (E_{11} + E_{22}) - 2\zeta_i v_i E_{12}.$$

Logo, a entrada $(1,1)$ de $[Y_1, Z_1] \cdots [Y_l, Z_l]$ é o monômio $\zeta_1 \eta_1 \cdots \zeta_l \eta_l$, que não é nulo em E. ■

Logo, os Lemas 2.12, 2.18 e 2.20 implicam que

$$\Gamma_{l,l}(I) = \Gamma_{l,l}(T_*(M_{1,1}(E))). \tag{2.3.2}$$

Lema 2.21. *Os seguintes polinômios*

- $f = z_1[y_1, z_2]\cdots[y_l, z_{l+1}]$;
- $p_1 = [y_1, z_1, z_2][y_2, z_3]\cdots[y_l, z_{l+1}]$;
- $p_i = [y_1, z_i, z_1][y_2, z_2]\cdots[y_i, z_{i+1}]\cdots[y_l, z_{l+1}]$, *para* $i = 2, \cdots, l+1$,

são linearmente independentes módulo as $*$*-identidades de* $M_{1,1}(E)$.

Demonstração. Inicialmente, serão calculados os polinômios f, p_i, $i \geq 1$ nas matrizes Y_i e Z_i. De forma análoga a prova do Lema 2.20, segue que $[Y_i, Z_j] = \zeta_i\eta_j(E_{11} + E_{22}) - 2\zeta_i v_j E_{12}$. Deste modo, a entrada $(1,1)$ de $[Y_1, Z_2][Y_2, Z_3]\cdots[Y_l, Z_{l+1}]$ é $\zeta_1\eta_2\zeta_2\eta_3\cdots\zeta_l\eta_{l+1}$, enquanto sua entrada $(2,1)$ é zero. Assim, a entrada $(2,1)$ de $Z_1[Y_1, Z_2]\cdots[Y_l, Z_{l+1}]$ é $\eta_1\zeta_1\eta_2\zeta_2\eta_3\cdots\zeta_l\eta_{l+1}$.

Por outro lado, note que a entrada $(2,1)$ de $[Y_1, Z_1, Z_2]$ é zero, assim como a de $[Y_1, Z_i, Z_1]$ (veja a prova da Proposição 2.2). Deste modo, usando um argumento análogo ao usado anteriormente, $p_i(Y_1, \cdots, Y_{l+1}, Z_1, \cdots, Z_{l+1})$ tem entrada $(2,1)$ nula, para todo $i = 1, \cdots, l+1$. Assim, o polinômio f não é combinação linear módulo $T_*(M_{1,1}(E))$ dos polinômios p_i, $i \geq 1$.

Agora, a entrada $(1,1)$ de $p_i(Y_1, \cdots, Y_{l+1}, Z_1, \cdots, Z_{l+1})$ é $\pm 2v_i\zeta_1\cdots\zeta_l\eta_1\cdots\hat{\eta}_i\cdots\eta_{l+1}$. Logo, para $i = 1, \cdots, l+1$, os monômios obtidos são distintos em E. Portanto, os polinômios p_i são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$. ■

Segue do lema anterior, junto com o Lema 2.18 e a Proposição 2.14 que

$$\Gamma_{l,l+1}(I) = \Gamma_{l,l+1}(T_*(M_{1,1}(E))). \tag{2.3.3}$$

Proposição 2.22. *Os seguintes polinômios de* $\Gamma_{1,m}$, $m \geq 3$:

(1) $G = [z_1, z_m][y_1, z_2, \cdots, z_{m-1}]$;

(2) $G_{2;(i,j)} = [z_1, z_i][y_1, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_m, z_j]$, $2 \leq i < j \leq m$;

(3) $G_{3;(i)} = [z_2, z_i][y_1, z_3, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_m, z_1]$, $3 \leq i \leq m$;

(4) $P_{(j)} = [y_1, z_1, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_m, z_j]$, $1 \leq j \leq m$,

geram $\Gamma_{1,m}(I)$. *Ademais, eles são linearmente independentes módulo as* $*$*-identidades de* $M_{1,1}(E)$.

Demonstração. Como $m \geq 3$, segue que

$$\Gamma_{1,m} = U_{1,m} + V_{1,m}.$$

Pela Proposição 2.15 junto com o Lema 2.16, os polinômios do enunciado geram $\Gamma_{1,m}(I)$. Basta então provar a independência linear.

Como feito anteriormente, serão calculados os polinômios dos enunciado nas matrizes Y_i e Z_i. Denota-se por $\overline{G}$, $\overline{G_{2;(i,j)}}$, $\overline{G_{3;(i)}}$, $\overline{P_{(j)}}$ os elementos correspondentes em $M_{1,1}(E)$.

Primeiramente, observe que a entrada $(1,1)$ de $\overline{P_{(j)}} = P_{(j)}(Y_1, Z_1, \cdots, Z_m)$ é $(-2)^{m-1}\zeta_1 v_1 \cdots \hat{v_j} \cdots v_m \eta_j$. De fato, de modo análogo à prova da Proposição 2.2, segue que

$$\overline{P_{(j)}} = [Y_1, Z_1, \cdots, \hat{Z_j}, \cdots, Z_m, Z_j] = (-2)^{m-1}\zeta_1 v_1 \cdots \hat{v_j} \cdots v_m \eta_j (E_{11} + E_{22}) + \\ + (-2)^m \zeta_1 v_1 \cdots v_m E_{12}.$$

Logo, a entrada $(1,1)$ de $\overline{P_{(j)}}$ é não nula em E. Como os monômios $\zeta_1 v_1 \cdots \hat{v_j} \cdots v_m \eta_j$ são todos distintos, segue que os polinômios $P_{(j)}$, $j = 1, \cdots, m$, são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$.

Por outro lado, qualquer combinação linear dos polinômios G, $G_{2;(i,j)}$ e $G_{3;(i)}$ calculada nas matrizes Y_i e Z_i só tem como entradas possivelmente não nulas os coeficientes de E_{21} e E_{22} (observe na prova do Lema 2.19 que um comutador do tipo $[Z_i, Z_j]$ só tem o coeficiente de E_{21} não nulo). Logo, uma combinação linear não nula das matrizes $\overline{P_{(j)}}$ não pode ser combinação linear das matrizes dos tipos $\overline{G}$, $\overline{G_{2;(i,j)}}$ e $\overline{G_{3;(i)}}$.

Resta agora mostrar que os polinômios G, $G_{2;(i,j)}$ e $G_{3;(i)}$ são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$. Para isso, considere uma combinação linear desses polinômios com coeficientes α, $\alpha_{2;(i,j)}$ e $\alpha_{3;(i)}$, respectivamente. Assuma que isto é uma $*$-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. Assim, quando computado nas matrizes Y_i e Z_i, segue que

$$\alpha\overline{G} + \sum_{2 \leq i < j \leq m} \alpha_{2;(i,j)} \overline{G_{2;(i,j)}} + \sum_{i=3}^{m} \alpha_{3;(i)} \overline{G_{3;(i)}} = 0.$$

Note que, usando um raciocínio análogo ao visto na prova do Lema 2.19 e o cálculo de $\overline{P_{(j)}}$, as entradas $(2,1)$ de $\overline{G}$, $\overline{G_{2;(i,j)}}$ e $\overline{G_{3;(i)}}$ são, com o mesmo coeficiente $2(-2)^{m-1}$, os seguintes elementos de E:

- $\tilde{G} = (\eta_1 v_m - v_1 \eta_m)\zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2}\eta_{m-1}$;
- $\tilde{G}_{2;(i,j)} = (\eta_1 v_i - v_1 \eta_i)\zeta_1 v_2 \cdots \hat{v_i} \cdots \hat{v_j} \cdots v_m \eta_j$;
- $\tilde{G}_{3;(i)} = (\eta_2 v_i - v_2 \eta_i)\zeta_1 v_3 \cdots \hat{v_i} \cdots v_m \eta_1$,

respectivamente.

Analisando os monômios onde a variável η_1 não aparece, segue que

$$\alpha v_1 \eta_m \zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2}\eta_{m-1} + \sum_{2 \leq i < j \leq m} \alpha_{2;(i,j)} v_1 \eta_i \zeta_1 v_2 \cdots \hat{v_i} \cdots \hat{v_j} \cdots v_m \eta_j = 0.$$

Daí, para cada par (i,j) com $i < m-1$, segue que $\alpha_{2;(i,j)} = 0$. Assim,

$$\alpha v_1 \eta_m \zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2}\eta_{m-1} + \alpha_{2;(m-1,m)} v_1 \eta_{m-1} \zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2}\eta_m = 0.$$

Logo, $\alpha = \alpha_{2;(m-1,m)}$, já que η_{m-1}, η_m e ζ_1 são elementos anticomutativos e v_1, v_2, $\cdots$, v_{m-2} são elementos centrais em E.

Considere $\beta := \alpha_{2;(m-1,m)}$, logo $\alpha = \beta$ e

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_{2;(m-1,m)} + \sum_{i=3}^{m} \alpha_{3;(i)} \tilde{G}_{3;(i)} = 0. \tag{2.3.4}$$

Sendo $m > 3$, se $3 \leq i \leq m-2$, então o monômio $v_2\eta_i\zeta_1 v_3 \cdots \hat{v}_i \cdots v_m\eta_1$ aparece apenas no polinômio $\tilde{G}_{3;(i)}$. Daí, $\alpha_{3;(i)} = 0$ para qualquer $i = 3, \cdots, m-2$, e assim a equação (2.3.4) vira

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_{2;(m-1,m)} + \alpha_{3;(m-1)}\tilde{G}_{3;(m-1)} + \alpha_{3;(m)}\tilde{G}_{3;(m)} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \alpha(\eta_1 v_m - v_1\eta_m)\zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2}\eta_{m-1} + \beta(\eta_1 v_{m-1} - v_1\eta_{m-1})\zeta_1 v_2 \cdots v_{m-2}\eta_m + \\ & + \alpha_{3;(m-1)}(\eta_2 v_{m-1} - v_2\eta_{m-1})\zeta_1 v_3 \cdots v_{m-2}v_m\eta_1 + \alpha_{3;(m)}(\eta_2 v_m - v_2\eta_m)\zeta_1 v_3 \cdots v_{m-1}\eta_1. \end{aligned}$$

Ora, como os elementos $\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_{m-1},\ \eta_m$ e ζ_1 são anticomutativos e os elementos $v_1, \cdots, v_m$ são centrais na álgebra exterior, e $\alpha = \beta$ segue que

$$\alpha_{3;(m)} = -\alpha_{3;(m-1)} \quad , \quad \alpha = -\alpha_{3;(m)} \quad \text{e} \quad \alpha = -\alpha_{3;(m-1)}.$$

Segue das duas primeiras igualdades que $\alpha = \alpha_{3;(m-1)}$ e assim concluímos que $\alpha = \beta = \alpha_{3;(m-1)} = \alpha_{3;(m)} = 0$.

Por outro lado, se $m = 3$, observe que a equação (2.3.4) fica da forma

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_{2;(2,3)} + \alpha_{3;(3)}\tilde{G}_{3;(3)} = 0$$

isto é,

$$\alpha(\eta_1 v_3 - v_1\eta_3)\zeta_1\eta_2 + \beta(\eta_1 v_2 - v_1\eta_2)\zeta_1\eta_3 + \alpha_{3;(3)}(\eta_2 v_3 - v_2\eta_3)\zeta_1\eta_1 = 0.$$

Agora, é fácil ver que $\alpha = \beta = \alpha_{3;(3)} = 0$, o que conclui a demonstração. ∎

Como consequência desta última proposição e do Lema 2.18, segue que

$$\Gamma_{1,m}(I) = \Gamma_{1,m}(T_*(M_{1,1}(E))),\ m \geq 3. \tag{2.3.5}$$

Observação 2.23. *Seja $f(y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_m) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ tal que*

$$f(y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_m)[y_{l+1}, z_{m+1}]$$

é uma $*$-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. Então $f(y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_m)$ é também uma $*$-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. De fato, considerando em f uma qualquer substituição das variáveis por elementos de $M_{1,1}(E)$ (preservando simetria e antissimetria), denotemos por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o elemento obtido. Fazendo agora as substituições

$$y_{l+1} = \begin{pmatrix} 1 & e_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad z_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_j & -1 \end{pmatrix}$$

onde $i \neq j$ e e_i e e_j não aparecem nos elementos a, b, c e d, temos

$$\begin{pmatrix} ae_ie_j & -2ae_i + be_ie_j \\ ce_ie_j & -2ce_i + de_ie_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}[y_{l+1}, z_{m+1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde concluímos que $a = c = 0$ e também $b = d = 0$.

Proposição 2.24. *Seja $m = l + k$. Se $l \geq 2$ e $k \geq 2$, então os polinômios de $\Gamma_{l,m}$:*

(1) $G = [z_1, z_{k+1}][y_1, z_2, \cdots, z_k][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_l, z_{l+k}]$;

(2) $G_{2;(j_1,\cdots,j_{l+1})} = [z_1, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-2}}, z_{j_2}][y_2, z_{j_3}] \cdots [y_l, z_{j_{l+1}}]$, *onde* $2 \leq j_1 < \cdots < j_{l+1} \leq m$ *e* $2 \leq i_1 < \cdots < i_{k-2} \leq m$;

(3) $G_{3;(j_1,\cdots,j_l)} = [z_2, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]$, *onde* $3 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq m$ *e* $3 \leq i_1 < \cdots < i_{k-2} \leq m$;

(4) $G_{4;(j_1,\cdots,j_{l-1})} = [z_2, z_{i_{k-1}}][y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_1}] \cdots [y_l, z_{j_{l-1}}]$, *onde* $3 \leq j_1 < \cdots < j_{l-1} \leq m$ *e* $3 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq m$ *com* $j_1 < i_{k-1}$;

(5) $P_{(j_1,\cdots,j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_k}, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]$, *onde* $j_1 < \cdots < j_l \leq m$ *e* $i_1 < \cdots < i_k \leq m$,

são os geradores de $\Gamma_{l,m}(I)$. *Ademais, esses polinômios são linearmente independentes módulo as* $*$*-identidades polinomiais de* $M_{1,1}(E)$.

Demonstração. Como na proposição anterior, a primeira parte da afirmação é uma consequência simples da decomposição

$$\Gamma_{l,m} = U_{l,m} + V_{l,m},$$

junto com os resultados das Proposições 2.15 e 2.22. Assim, resta provar a independência linear dos polinômios dados módulo as $*$-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$.

Calculando um polinômio Q nas matrizes Y_i e Z_i, denota-se por $\overline{Q}$ o elemento correspondente de $M_{1,1}(E)$. Como na Proposição 2.22, primeiro provamos que polinômios do tipo (5) são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$, e também que o subespaço gerado por esses polinômios é independente (módulo $T_*(M_{1,1}(E))$) do subespaço gerado pelos demais polinômios do enunciado. Para isso, como

$$\begin{aligned}[][Y_1, Z_{i_1}, \cdots, Z_{i_k}, Z_{j_1}] = (-2)^k \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_k} \eta_{j_1}(E_{11} + E_{22}) + \\ + (-2)^{k+1} \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_{j_1} E_{12}\end{aligned}$$

e $[Y_r, Z_{j_r}] = \zeta_r \eta_{j_r}(E_{11} + E_{22}) - 2\zeta_r v_{j_r} e_{12}$, $r = 2, \cdots, l$, observe que a entrada $(1,1)$ de $\overline{P}_{(j_1,\cdots,j_l)}$ é o elemento $(-2)^k \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_k} \eta_{j_1} \zeta_2 \eta_{j_2} \cdots \zeta_l \eta_{j_l}$ não nulo de E. Do fato desses monômios serem dois a dois distintos em E concluímos a independência linear (módulo $T_*(M_{1,1}(E))$) dos polinômios $P_{(j_1,\cdots,j_l)}$.

Por outro lado, em qualquer combinação linear dos elementos $\overline{G}$, $\overline{G}_{2;(j_1,\cdots,j_{l+1})}$, $\overline{G}_{3;(j_1,\cdots,j_l)}$, $\overline{G}_{4;(j_1,\cdots,j_{l-1})}$, as possíveis entradas não nulas são apenas os coeficientes de E_{21} e E_{22} (análogo à proposição anterior). Logo, temos a independência dos subespaços gerados pelos polinômios do tipo (5) e pelos polinômios dos demais tipos.

Mostremos agora a independência linear (módulo $T_*(M_{1,1}(E))$) dos polinômios dos tipos (1), (2), (3) e (4). Note que, usando um raciocínio análogo ao cálculo de $\overline{P}_{(j_1,\cdots,j_l)}$ e à prova do Lema 2.19, segue que as entradas $(2,1)$ das matrizes $\overline{G}$, $\overline{G}_{2;(j_1,\cdots,j_{l+1})}$, $\overline{G}_{3;(j_1,\cdots,j_l)}$ e $\overline{G}_{4;(j_1,\cdots,j_{l-1})}$, com mesmo coeficiente $2(-2)^{k-2}$, são, respectivamente,

- $\tilde{G} = (\eta_1 v_{k+1} - v_1 \eta_{k+1}) \zeta_1 v_2 \cdots v_{k-1} \eta_k \zeta_2 \eta_{k+2} \cdots \zeta_l \eta_{k+l}$;
- $\tilde{G}_{2;(j_1,\cdots,j_{l+1})} = (\eta_1 v_{j_1} - v_1 \eta_{j_1}) \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_{k-2}} \eta_{j_2} \zeta_2 \eta_{j_3} \cdots \zeta_l \eta_{j_{l+1}}$;
- $\tilde{G}_{3;(j_1,\cdots,j_l)} = (\eta_2 v_{j_1} - v_2 \eta_{j_1}) \zeta_1 v_{i_1} \cdots v_{i_{k-2}} \eta_1 \zeta_2 \eta_{j_2} \cdots \zeta_l \eta_{j_l}$;

- $\tilde{G}_{4;(j_1,\cdots,j_{l-1})} = (\eta_2 v_{i_{k-1}} - v_2\eta_{i_{k-1}})\zeta_1 v_{i_1}\cdots v_{i_{k-2}}\eta_1\zeta_2\eta_{j_1}\cdots\zeta_l\eta_{j_{l-1}}$,

onde os índices satisfazem as mesmas condições apresentadas no enunciado da proposição. Denote por $\mathcal{G}_{(i)}$ o conjunto de todos os geradores do tipo (i), para $i = 2, 3, 4$, do enunciado da proposição. Assuma que uma combinação linear

$$\alpha G + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(2)}} \alpha_H H + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(3)}} \alpha_H H + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(4)}} \alpha_H H \tag{2.3.6}$$

é uma $*$-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. Logo, segue que em E

$$\alpha\tilde{G} + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(2)}} \alpha_H \tilde{H} + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(3)}} \alpha_H \tilde{H} + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(4)}} \alpha_H \tilde{H} = 0. \tag{2.3.7}$$

Na Equação (2.3.7), considerando os monômios em que η_1 não aparece, segue que

$$\alpha w + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(2)}} \alpha_H w_H = 0,$$

onde

$$w = v_1\eta_{k+1}\zeta_1 v_2\cdots v_{k-1}\eta_k\zeta_2\eta_{k+2}\cdots\zeta_l\eta_{k+l}$$

e $w_H = v_1\eta_{j_1}\zeta_1 v_{i_1}\cdots v_{i_{k-2}}\eta_{j_2}\zeta_2\eta_{j_3}\cdots\zeta_l\eta_{j_{l+1}}$ se $H = G_{2;(j_1,\cdots,j_{l+1})} \in \mathcal{G}_{(2)}$. Daí, para qualquer $H \in \mathcal{G}_{(2)}$, segue que $\alpha_H = 0$ se $H \neq G_{2;(k,\cdots,k+l)} := G_2$. Sendo $\beta = \alpha_{G_2}$, a equação (2.3.7) se torna

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_2 + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(3)}} \alpha_H \tilde{H} + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(4)}} \alpha_H \tilde{H} = 0. \tag{2.3.8}$$

Agora, fixada uma sequência $(j_1, \cdots, j_l)$, com $3 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq m-1$, e considerando os polinômios envolvidos na Equação (2.3.8), observe que o conjunto dos elementos η_1, $\eta_{j_1}, \cdots$, η_{j_l} aparece somente na parcela $\tilde{H} = \tilde{G}_{3;(j_1,\cdots,j_l)}$. Para ver, por exemplo, que este conjunto de elementos não aparece nas parcelas correspondentes ao $\mathcal{G}_{(4)}$, basta observar que, nas condições do enunciado para os polinômios de tipo (4), tem-se $m \in \{j_1, \cdots, j_{l-1}\}$, pois $\{i_1, \cdots, i_{k-1}, j_1, \cdots, j_{l-1}\} = \{3, \cdots, m\}$ e i_{k-1} ou j_{l-1} é o maior elemento deste conjunto.

Assim, o coeficiente α_H, com $H = G_{3;(j_1,\cdots,j_l)}$, é nulo, e daí

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_2 + \sum_{3\leq j_1<\cdots<j_{l-1}<m} \alpha_{(j_1,\cdots,j_{l-1})}\tilde{G}_{3;(j_1,\cdots,j_{l-1},m)} + \sum_{H\in\mathcal{G}_{(4)}} \alpha_H \tilde{H} = 0 \tag{2.3.9}$$

onde $\alpha_{(j_1,\cdots,j_{l-1})} = \alpha_H$ para $H = G_{3;(j_1,\cdots,j_{l-1},m)}$.

Agora, fixada a sequência de inteiros $(j_1, \cdots, j_{l-1})$, com $3 \leq j_1 < \cdots < j_{l-1} \leq m-1$, considere os polinômios envolvidos na equação (2.3.9). Observe que o conjunto dos elementos η_1, η_2, $\eta_{j_1}, \cdots$, $\eta_{j_{l-1}}$ aparece apenas no polinômio $\tilde{H} = \tilde{G}_{4;(j_1,\cdots,j_{l-1})}$. Logo seu coeficiente deve ser zero, donde a combinação linear em (2.3.6) vira

$$\begin{aligned}\alpha G + \beta G_2 + &\sum_{3\leq j_1<\cdots<j_{l-1}<m} \alpha_{(j_1,\cdots,j_{l-1})} G_{3;(j_1,\cdots,j_{l-1},m)} + \\ + &\sum_{3\leq j_1<\cdots<j_{l-2}<m} \alpha_{(j_1,\cdots,j_{l-2})} G_{4;(j_1,\cdots,j_{l-2},m)}\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

onde $\alpha_{(j_1,\cdots,j_{l-2})} = \alpha_H$ para $H = G_{4;(j_1,\cdots,j_{l-2},m)}$.

Mostremos agora a independência linear dos polinômios por indução em l (resta apenas mostrar que os coeficientes envolvidos na combinação linear (2.3.10) são nulos, pois isso já foi visto para os demais). Note que se $l = 2$, então o último somatório da combinação linear (2.3.10) some, e ela vira

$$\alpha G + \beta G_2 + \sum_{3 \leq j_1 < k+2} \alpha_{j_1} G_{3;(j_1,k+2)}.$$

Temos então uma combinação linear dos polinômios

- $G = [z_1, z_{k+1}][y_1, z_2, \cdots, z_k][y_2, z_m]$;
- $G_2 = [z_1, z_k][y_1, z_2, \cdots, z_{k+1}][y_2, z_m]$;
- $G_{3;(j_1,m)} = [z_2, z_{j_1}][y_1, z_3, \cdots, \hat{z_{j_1}}, \cdots, z_{m-1}, z_1][y_2, z_m]$, onde $3 \leq j_1 \leq m - 1$;

que é uma $*$-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$. Colocando o termo $[y_2, z_m]$ em evidência e usando a observação anterior, chegamos a uma $*$-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$ que é combinação linear de polinômios dentre aqueles listados no enunciado da Proposição 2.22. Assim, o caso $l = 2$ está feito.

Supondo agora $l > 2$ e observando que (2.3.10) é uma combinação linear dos polinômios

- $G = [z_1, z_{k+1}][y_1, z_2, \cdots, z_k][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_{l-1}, z_{m-1}][y_l, z_m]$;
- $G_2 = [z_1, z_k][y_1, z_2, \cdots, z_{k+1}][y_2, z_{k+2}] \cdots [y_{l-1}, z_{m-1}][y_l, z_m]$;
- $G_{3;(j_1,\cdots,j_{l-1},m)} = [z_2, z_{j_1}][y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_{l-1}, z_{j_{l-1}}][, y_l, z_m]$, onde $3 \leq j_1 < \cdots < j_{l-1} \leq m - 1$ e $3 \leq i_1 < \cdots < i_{k-2} \leq m - 1$;
- $G_{4;(j_1,\cdots,j_{l-2},m)} = [z_2, z_{i_{k-1}}][y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-2}}, z_1][y_2, z_{j_1}] \cdots [y_{l-1}, z_{j_{l-2}}][y_l, z_m]$, onde $3 \leq j_1 < \cdots < j_{l-2} \leq m - 1$ e $3 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq m - 1$ com $j_1 < i_{k-1}$;

que é uma $*$-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$, basta colocar o termo $[y_l, z_m]$ em evidência e usar a observação anterior para chagar a uma $*$-identidade polinomial de $M_{1,1}(E)$ que é combinação linear de polinômios dos tipos (1), (2), (3) e (4) do enunciado, para $l - 1$. Por indução, concluímos que todos os coeficientes são nulos.

Portanto, os polinômios *(1)–(5)* apresentados no enunciado são linearmente independentes módulo as $*$-identidades polinomiais de $M_{1,1}(E)$. ■

Segue da Proposição acima e do Lema 2.18 que

$$\Gamma_{l,m}(I) = \Gamma_{l,m}(T_*(M_{1,1}(E))), \ m = l + k, \ l \geq 2, \ k \geq 2. \tag{2.3.11}$$

Portanto, as equações (2.3.1)–(2.3.3), (2.3.5), e (2.3.11) implicam que $I = T_*(M_{1,1}(E))$, já que o corpo K tem característica zero. Assim, o Teorema 2.3 fica provado.

Capítulo 3

Polinômios Centrais com Involução para $M_{1,1}(E)$

Neste capítulo, temos como objetivo encontrar uma base para o espaço dos polinômios centrais com involução de $M_{1,1}(E)$. Utilizamos como referência para ele [20]. No decorrer do capítulo, K é um corpo com $\text{char}K = 0$.

Seja $(A, *)$ uma álgebra associativa e unitária com involução. Lembramos que

$$\begin{aligned} C(A,*) = &\{f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in K\langle Y \cup Z\rangle | f(a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n) \in \\ &Z(A,*),\ \forall\ a_i \in A^+,\ b_j \in A^-\}, \end{aligned}$$

e um elemento de $C(A, *)$ é chamado de *polinômio central com involução*, ou simplesmente *polinômio $*$-central* para $(A, *)$. Ademais, lembre que $C(A, *)$ é um T_*-espaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$, chamado de *espaço dos polinômios $*$-centrais para* $(A, *)$, e $T_*(A) \subseteq C(A, *)$. No capítulo anterior determinamos os geradores de $T_*(M_{1,1}(E))$ (veja o Teorema 2.3). Neste capítulo temos como objetivo determinar um conjunto finito de geradores para os polinômios $*$-centrais para $M_{1,1}(E)$.

Neste capítulo, $*$ indica a involução apresentada no Exemplo 1.30, $R = (M_{1,1}(E), *)$ e $I = T_*(R)$. Observemos que

$$Z(M_{1,1}(E)) = Z(M_{1,1}(E), *) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix};\ a \in E_0 \right\}.$$

Dado um polinômio f de $K\langle Y \cup Z\rangle$, escrevemos $f = f_s + f_k$, onde f_s é a componente simétrica de f, enquanto f_k é a componente antissimétrica, ou seja,

$$f_s = \frac{f + f^*}{2} \qquad \text{e} \qquad f_k = \frac{f - f^*}{2}\ .$$

Observação 3.1. *Seja $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ e suponha $(A, *)$ uma álgebra com involução.*
1) Se $Z(A, *) = Z(A)$, então $f \in C(A, *)$ se, e somente se, $[x, f]$ é uma $*$-identidade polinomial de $(A, *)$ para toda $x \in Y \cup Z$.
2) Se $f \in C(A, *)$, então $f - f^*$ é uma $*$-identidade polinomial de $(A, *)$. De fato, temos $2f = (f + f^*) + (f - f^*)$, sendo a primeira parcela simétrica e a segunda antissimétrica. Substituindo y_i por $a_i \in A^+$ e z_i por $b_i \in A^-$, temos que $2f$ e $f + f^*$ resultam em elementos de A^+ (lembrando que $Z(A, *) \subseteq A^+$), enquanto $f - f^*$ resulta num elemento de A^-. Logo, $f - f^*$ deve resultar em 0, o que nos dá a afirmação.

Proposição 3.2. *Seja* $f = f_s + f_k \in K\langle Y \cup Z\rangle$*. Se* $f \in C(A,*)$*, então* $f_s \in C(A,*)$ *e* $f_k \in T_*(A)$*.*

Demonstração. Se $f = f_s + f_k$, então $f^* = f_s - f_k$. Como $f - f^*$ é uma $*$-identidade polinomial (Observação 3.1), e $f - f^* = 2f_k$, segue que $f_k = \dfrac{f - f^*}{2}$ é uma $*$-identidade polinomial. Daí, $f_k \in C(A,*)$, e portanto $f_s = f - f_k$ pertence a $C(A,*)$. ∎

Proposição 3.3. *Os seguintes polinômios pertencem a* $C(R,*)$*:*

(a) $z_1 \circ z_2$*;*

(b) $[y_1, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)y_1$*;*

Demonstração. De fato, sejam $Y_1, Z_1, Z_2, Y + Z \in R$, sendo Y_1 simétrico, Z_1 e Z_2 antissimétricos e $Y + Z$ um elemento qualquer (lembre que $R = R^+ \oplus R^-$). Note que, como $Z_1 \circ Z_2$ é simétrico,

$$\begin{aligned}
[Z_1 \circ Z_2, Y + Z] &= [Z_1 \circ Z_2, Y] + [Z_1 \circ Z_2, Z] \\
&= Z_1 \circ [Z_2, Z] + [Z_1, Z] \circ Z_2 \\
&= Z_1[Z_2, Z] + [Z_2, Z]Z_1 + [Z_1, Z]Z_2 + Z_2[Z_1, Z] \\
&= Z_1Z_2Z - Z_1ZZ_2 + Z_2ZZ_1 - ZZ_2Z_1 + \\
&+ Z_1ZZ_2 - ZZ_1Z_2 + Z_2Z_1Z - Z_2ZZ_1 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pelas identidades (a) e (b) do Lema 2.1.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[[Y_1, Z_1, Z_2] - 2(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Y + Z] &= [Y_1, Z_1, Z_2, Y] + [Y_1, Z_1, Z_2, Z] - \\
&- 2([(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Y] + [(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Z]).
\end{aligned}$$

Como $[Y_1, Z_1, Z_2]$ e $Z_1 \circ Z_2$ são simétricos, segue que $[Y_1, Z_1, Z_2, Y] = 0 = [(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Y]$, pela identidade (a) do Lema 2.1 e pela Observação 1.9. Assim,

$$\begin{aligned}
[[Y_1, Z_1, Z_2] - 2(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Y + Z] &= [Y_1, Z_1, Z_2, Z] - 2[(Z_1 \circ Z_2)Y_1, Z] \\
&= [Y_1, Z_1, Z_2, Z] - 2(Z_1 \circ Z_2)[Y_1, Z] - \\
&- 2[(Z_1 \circ Z_2), Z]Y_1 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pelas identidades (a) do Lema 2.1 e (i) da Proposição 2.2, e por $Z_1 \circ Z_2$ ser central.

Portanto, os polinômios (a) e (b) pertencem a $C(R)$. ∎

Seja então V o T_*-espaço em $K\langle Y \cup Z\rangle$ gerado por I junto com os polinômios (a) e (b) da Proposição 3.3, ou seja, V é a soma de I com o T_*-espaço gerado por esses dois polinômios. Assim, temos $V \subseteq C(R)$. Mostraremos no fim deste capítulo que $V = C(R)$.

3.1 Polinômios Centrais $*$-Próprios de $M_{1,1}(E)$

Nesta seção, estudaremos os polinômios centrais $*$-próprios para R.

Lema 3.4. *Seja $H = s_1 \cdots s_n \in K\langle Y \cup Z\rangle$, onde cada s_i é simétrico. Temos que $Q = \frac{H+H^*}{2}$ é simétrico e $Q \equiv H(\operatorname{mod} I)$.*

Demonstração. É imediato que Q é simétrico. Como $[y_1, y_2] \in I$ e $H^* = s_n \cdots s_1$, segue que $H^* \equiv H(\operatorname{mod} I)$. Portanto, $Q \equiv H(\operatorname{mod} I)$. ∎

Proposição 3.5. *Se $f(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m)$ é um polinômio central $*$-próprio multilinear para R que depende das variáveis em Y, então f é congruente módulo I a uma combinação linear dos polinômios*

$$P_{(j_1,\cdots,j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_k}, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}],$$

onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_l$ e $\{i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l\} = \{1, \cdots, m\}$.

Demonstração. Primeiramente, estamos supondo $m \geq l$, pois no caso contrário temos $f \in I$. Note que, se $m = l$, então, pelo Lema 2.12, f é um múltiplo escalar (módulo I) de $[y_1, z_1] \cdots [y_l, z_l]$.

Se $m = l + 1$, então, pela Proposição 2.14, f é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios

$$\begin{aligned} g &= z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}], \\ p_1 &= [y_1, z_1, z_2][y_2, z_3] \cdots [y_l, z_{l+1}] \text{ e} \\ p_i &= [y_1, z_i, z_1][y_2, z_2] \cdots [y_i, z_{i+1}] \cdots [y_l, z_{l+1}], \text{ para } i = 2, \cdots, l+1. \end{aligned}$$

Como consequência da Proposição 3.2, temos $f \equiv_I (f + f^*)/2$ e assim f é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios $(g+g^*)/2$ e $(p_i+p_i^*)/2$, para $i = 1, 2, \cdots, l+1$. Segue do Lema 3.4 que $(p_i + p_i^*)/2 \equiv_I p_i$, para $i = 1, 2, \cdots, l+1$. Resta então analisar $g_s = \dfrac{g + g^*}{2}$. Segue que

$$\begin{aligned} g_s &= \frac{z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}] + [y_l, z_{l+1}] \cdots [y_1, z_2](-z_1)}{2} \\ g_s &\equiv_I \frac{z_1[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}] - [y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}]z_1}{2} \\ g_s &= -\frac{[[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}], z_1]}{2}. \end{aligned}$$

Note que

$$[[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_{l+1}], z_1] = \sum_{i=1}^{l} [y_1, z_2] \cdots [y_i, z_{i+1}, z_1] \cdots [y_l, z_{l+1}].$$

Daí, pela Observação 2.4 e a identidade (vi) (Proposição 2.2), o comutador $[[y_1, z_2] \cdots [y_l, z_l], z_1]$ é uma combinação linear, módulo I, dos polinômios p_i, $i = 2, \cdots, l+1$. Assim, g_s é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios p_i, e o caso $m = l + 1$ está feito.

Por fim, se $m = l + k$, $k \geq 2$, segue do Lema 2.13 que f é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios

$$p_\sigma = [y_1, z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}],$$
$$g_\sigma = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}][y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}]$$

com $\sigma \in S_m$. De modo análogo ao que foi feito acima, concluímos que f é uma combinação linear (módulo I) dos polinômios $(p_\sigma + p_\sigma^*)/2$ e $(g_\sigma + g_\sigma^*)/2$. Segue do Lema 3.4 que $(p_\sigma + p_\sigma^*)/2 \equiv_I p_\sigma$. Quanto a $(g_\sigma + g_\sigma^*)/2$, temos.

$$\frac{g_\sigma + g_\sigma^*}{2} \equiv_I -\frac{[[y_1, z_{\sigma(3)}, \cdots, z_{\sigma(k+1)}][y_2, z_{\sigma(k+2)}] \cdots [y_l, z_{\sigma(m)}], [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}]]}{2}$$

uma vez que $[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}]$ é antissimétrico.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}[][[y_1, z_1, \cdots, z_n], [z_a, z_b]] &= [z_b, z_a, [y_1, z_1, \cdots, z_n]] \\ &= [y_1, z_1, \cdots, z_n, z_a, z_b] - [y_1, z_1, \cdots, z_n, z_b, z_a]\end{aligned}$$

sendo a última igualdade consequência da identidade de Jacobi. Usando então as Observações 1.9 e 2.4, e a identidade (vi) (Proposição 2.2), concluímos que $f \in U_{l,m}$, e assim usamos a Proposição 2.15. ■

Consideremos agora $l \geq 1$ um número natural, e os polinômios

$$P_1(y_2, \cdots, y_{l+1}, z_1, \cdots, z_{l+1}) = [y_2, z_1, z_2][y_3, z_3] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]$$

e

$$P_i(y_2, \cdots, y_{l+1}, z_1, \cdots, z_{l+1}) = [y_2, z_i, z_1] \cdots [y_i, z_{i-1}][y_{i+1}, z_{i+1}] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}],$$

para $1 < i \leq l + 1$.

Para $l \geq 1$, vamos considerar também os seguintes polinômios

$$C_l = \sum_{n=1}^{l+1} (-1)^n P_n \quad \text{e} \quad D_l = y_1 C_l - [y_1, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]. \tag{3.1.1}$$

Observemos que $C_l = C_l(y_2, \cdots, y_{l+1}, z_1, \cdots, z_{l+1})$.

Lema 3.6. *O $*$-espaço V contém os polinômios*

$$G_n(z_1, \cdots, z_{2n}) = (z_1 \circ z_2)(z_3 \circ z_4) \cdots (z_{2n-1} \circ z_{2n})$$

e os polinômios C_l, D_l definidos em (3.1.1).

Demonstração. Claramente, G_1 pertence a V. Façamos então indução sobre n. Considere então $H = (z_3 \circ z_4) \cdots (z_{2n-1} \circ z_{2n})$. Como $z_i \circ z_j$ é simétrico (Proposição 1.32), segue do Lema 3.4 que Q é simétrico e $Q \equiv H \pmod I$, onde $Q = \frac{H+H^*}{2}$. Assim, podemos escrever $Q = H + s$, onde $s \in I$. Substituindo y_1 por Q no polinômio (b) da Proposição 3.3, segue que

$$[Q, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)Q \in V.$$

Daí,

$$[H+s, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)(H+s) = [H, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)H + r \in V,$$

onde $r = [s, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)s \in I$.

Ora, $H \in V$, pela hipótese de indução, e daí $[H, z_1, z_2] \in I$. Logo, $-2(z_1 \circ z_2)H \in V$, e assim G_n pertence a V, para todo n.

Resta provar que C_l e D_l pertencem a V. O polinômio

$$C_1 = [y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2] \tag{3.1.2}$$

pertence a V, pois é consequência do polinômio (b) (Proposição 3.3), já que

$$[y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2] = [y_2, z_2, z_1] - 2(z_2 \circ z_1)y_2 + 2(z_1 \circ z_2)y_2 - [y_2, z_1, z_2].$$

Note que podemos substituir z_1 por $(y_1 \circ z_1)$ (que é antissimétrico) em (3.1.2), obtendo, pela identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned}[y_2, z_2, y_1 \circ z_1] - [y_2, y_1 \circ z_1, z_2] &= -[z_2, y_2, y_1 \circ z_1] - [y_2, y_1 \circ z_1, z_2] \\ &= [y_1 \circ z_1, z_2, y_2].\end{aligned}$$

Daí, o polinômio

$$\begin{aligned}[y_1 \circ z_1, z_2, y_2] &= [y_1 \circ [z_1, z_2] + [y_1, z_2] \circ z_1, y_2] \\ &= [y_1, y_2] \circ [z_1, z_2] + y_1 \circ [z_1, z_2, y_2] + [y_1, z_2] \circ [z_1, y_2] + \\ &+ [y_1, z_2, y_2] \circ z_1\end{aligned}$$

pertence a V. Segue das identidades (a) (Lema 2.1) e *(v)* (Proposição 2.2) que

$$[y_1 \circ z_1, z_2, y_2] \equiv_I y_1 \circ [z_1, z_2, y_2] + 2[y_1, z_1][y_2, z_2]$$

lembrando que $[y_1, z_2]$ e $[z_1, y_2]$ são simétricos. Novamente pela identidade de Jacobi e pela identidade (a) do Lema 2.1

$$\begin{aligned}[y_1 \circ z_1, z_2, y_2] &\equiv_I y_1 \circ (-[z_2, y_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]) + 2[y_1, z_1][y_2, z_2] \\ &\equiv_I 2y_1\left([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]\right) + 2[y_1, z_1][y_2, z_2].\end{aligned}$$

Assim, como $I \subseteq V$, concluímos que

$$D_1 = y_1\left([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]\right) + [y_1, z_1][y_2, z_2] \tag{3.1.3}$$

pertence a V. Para $l > 1$, substituímos y_1 por $Q_1 = \frac{Y+Y^*}{2}$, onde $Y = [y_3, z_3] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]$ em (3.1.3), e de modo análogo ao que foi feito acima, obtemos que

$$Q_1\left([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]\right) + [Q_1, z_1]\,[y_2, z_2] \in V$$

e daí

$$Y\left([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]\right) + [Y, z_1]\,[y_2, z_2] \in V \tag{3.1.4}$$

pois $Q_1 = Y + s_1$, com $s_1 \in I$. Como $Y = Q_1 - s_1$ e Q_1 é simétrico, concluímos que

$$Y([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2]) \equiv_I ([y_2, z_2, z_1] - [y_2, z_1, z_2])Y = P_2 - P_1$$

e

$$[Y, z_1][y_2, z_2] \equiv_I [y_2, z_2][Y, z_1].$$

Temos $[Y, z_1] = \sum_{i=3}^{l+1}[y_3, z_3]\cdots[y_i, z_i, z_1]\cdots[y_{l+1}, z_{l+1}]$. Ademais, para $3 \leq i \leq l+1$,

$$[y_2, z_2][y_3, z_3]\cdots[y_{i-1}, z_{i-1}][y_i, z_i, z_1]\cdots[y_{l+1}, z_{l+1}] \equiv_I$$

$$[y_2, z_i, z_2][y_3, z_3]\cdots[y_{i-1}, z_{i-1}][y_i, z_1]\cdots[y_{l+1}, z_{l+1}]$$

usando a identidade (vi) da Proposição 2.2. Usando agora a Observação 2.4, permutando z_1 em sequência com $z_{i-1}, \cdots, z_3$ e z_2, concluímos que

$$[y_2, z_i, z_2][y_3, z_3]\cdots[y_{i-1}, z_{i-1}][y_i, z_1]\cdots[y_{l+1}, z_{l+1}] \equiv_I$$

$$(-1)^{i-2}[y_2, z_i, z_1][y_3, z_2]\cdots[y_i, z_{i-1}][y_{i+1}, z_{i+1}]\cdots[y_{l+1}, z_{l+1}] = (-1)^i P_i.$$

Logo,

$$[Y, z_1][y_2, z_2] \equiv_I \sum_{n=3}^{l+1}(-1)^n P_n$$

e assim segue de (3.1.4) que $C_l \in V$.

Agora, para mostrar que $D_l \in V$, observemos primeiramente que

$$[y_2, y_1 \circ z_1, z_2] = [[y_2, y_1] \circ z_1, z_2] + [y_1 \circ [y_2, z_1], z_2] \equiv_I$$

$$2[y_1[y_2, z_1], z_2] = 2[y_1, z_2][y_2, z_1] + 2y_1[y_2, z_1, z_2] \equiv_I -2[y_1, z_1][y_2, z_2] + 2y_1[y_2, z_1, z_2]$$

e

$$[y_2, z_i, y_1 \circ z_1] = [y_2, z_1, y_1] \circ z_1 + y_1 \circ [y_2, z_i, z_1] \equiv_I 2y_1[y_2, z_i, z_1]$$

devido às identidades (a) do Lema 2.1 e (v) da Proposição 2.2. Logo, substituindo z_1 por $(y_1 \circ z_1)$ em P_1 e P_i, obtemos

$$P_1(y_2, \cdots, y_{l+1}, y_1 \circ z_1, \cdots, z_{l+1}) \equiv_I 2y_1P_1 - 2[y_1, z_1][y_2, z_2]\cdots[y_{l+1}, z_{l+1}]$$

e

$$P_i(y_2, \cdots, y_{l+1}, y_1 \circ z_1, \cdots, z_{l+1}) \equiv_I 2y_1P_i$$

e assim $2D_l$ é congruente módulo I ao polinômio obtido de C_l pela substituição de z_1 por $(y_1 \circ z_1)$. Portanto, D_l pertence a V. ■

Sejam W_1 o subespaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$ gerado pelos polinômios multilineares do tipo

$$G_n(z_{i_1}, \cdots, z_{i_{2n}})$$

e W_2 o subespaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$ gerado pelos polinômios multilineares do tipo

$$C_l([y_{t_1}, z_{i_1}, \cdots, z_{ik_1}], y_{t_2}, \cdots, y_{t_l}, z_{i_k}, z_{j_1}, \cdots, z_{j_l}).$$

Observemos que W_1 e W_2 estão contidos em V (e portanto em $C(R)$) e que os elementos de $W_1 \cup W_2$ são polinômios $*$-próprios.

O lema a seguir lida com os polinômios $*$-centrais para R que dependem apenas das variáveis em Z.

Lema 3.7. *Se $f(z_1, \cdots, z_m)$ é um polinômio multilinear (não-constante) $*$-central para R, então f é congruente módulo I a um polinômio do subespaço W_1. Em particular, f é congruente módulo I a um polinômio de V.*

Demonstração. Note que $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ é uma $*$-identidade polinomial de R, logo $z_{i_1}\cdots z_{i_{2n+1}}$ é congruente módulo I a um polinômio antissimétrico. De fato, como $z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3} \equiv_I z_{i_3}z_{i_2}z_{i_1}$, temos que $(z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3})^* = -z_{i_3}z_{i_2}z_{i_1}$ e daí

$$z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3} \equiv_I (z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3} - (z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3})^*)/2,$$

sendo este último antissimétrico. Agora, sendo $n \geq 1$ e supondo $z_{i_1}\cdots z_{i_{2n+1}} \equiv_I p$, com p antissimétrico, temos que

$$z_{i_1}\cdots z_{i_{2n+1}}z_{i_{2n+2}}z_{i_{2n+3}} \equiv_I pz_{i_{2n+2}}z_{i_{2n+3}}$$

sendo este último congruente módulo I a um polinômio antissimétrico, pelo raciocínio anterior.

Assim, se f tem grau ímpar, temos que $f(z_1,\cdots,z_m) \equiv_I f_1(z_1,\cdots,z_m)$, onde f_1 é um polinômio antissimétrico e $f_1 \in C(R)$. Pela Proposição 3.2, concluímos que f_1 pertence a I, e assim $f \in I$.

Agora, assumimos que f tem grau $2n$. Usando a igualdade

$$z_{i_1}z_{i_2} = \frac{1}{2}\left(z_{i_1}\circ z_{i_2} + [z_{i_1}, z_{i_2}]\right)$$

e a $*$-identidade polinomial $[z_1, z_2][z_3, z_4]$, temos

$$\begin{aligned}
z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_{2n-1}}z_{i_{2n}} &= \frac{1}{2}\left(z_{i_1}\circ z_{i_2} + [z_{i_1}, z_{i_2}]\right) z_{i_3}\cdots z_{i_{2n}}\\
&= \frac{1}{2}(z_{i_1}\circ z_{i_2})z_{i_3}z_{i_4}\cdots z_{i_{2n}} + \frac{1}{2}[z_{i_1}, z_{i_2}]z_{i_3}z_{i_4}\cdots z_{i_{2n}}\\
&= \frac{1}{2}(z_{i_1}\circ z_{i_2})\frac{1}{2}(z_{i_3}\circ z_{i_4} + [z_{i_3}, z_{i_4}])z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}} + \frac{1}{2}[z_{i_1}, z_{i_2}]\frac{1}{2}(z_{i_3}\circ z_{i_4} +\\
&+ [z_{i_3}, z_{i_4}])z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}}\\
&= \frac{1}{4}(z_{i_1}\circ z_{i_2})(z_{i_3}\circ z_{i_4})z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}} + \frac{1}{4}(z_{i_1}\circ z_{i_2})[z_{i_3}, z_{i_4}]z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}} +\\
&+ \frac{1}{4}[z_{i_1}, z_{i_2}](z_{i_3}\circ z_{i_4})z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}} + \frac{1}{4}[z_{i_1}, z_{i_2}][z_{i_3}, z_{i_4}]z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}}\\
&\equiv_I \frac{1}{4}\left((z_{i_1}\circ z_{i_2})(z_{i_3}\circ z_{i_4})z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}} + (z_{i_1}\circ z_{i_2})[z_{i_3}, z_{i_4}]z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}} +\right.\\
&\left.(z_{i_3}\circ z_{i_4})[z_{i_1}, z_{i_2}]z_{i_5}\cdots z_{i_{2n}}\right)
\end{aligned}$$

pois $z_1 \circ z_2 \in C(R)$. Assim, continuando com o mesmo raciocínio, concluímos que

$$z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_{2n-1}}z_{i_{2n}} \equiv_I \frac{1}{2^n}(z_{i_1}\circ z_{i_2})\cdots(z_{i_{2n-1}}\circ z_{i_{2n}}) + g \tag{3.1.5}$$

onde

$$g = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n}(z_{i_1}\circ z_{i_2})\cdots(\widehat{z_{i_{2k-1}}\circ z_{i_{2k}}})\cdots(z_{i_{2n}}\circ z_{i_{2n-1}})[z_{i_{2k-1}}, z_{i_{2k}}],$$

onde o símbolo $\widehat{\ }$ sobre o polinômio $(z_{i_{2k-1}}\circ z_{i_{2k}})$ significa que ele não aparece no produto.

Como $z_1 \circ z_2$ é simétrico e central, e $[z_1, z_2]$ é antissimétrico, temos $g^* \equiv_I -g$ e daí $g \equiv_I \dfrac{1}{2}(g - g^*)$, sendo este último polinômio antissimétrico. Daí, $f \equiv_I f_1 + g_1$, onde $f_1 \in W_1$ (e portanto f_1 é central) e g_1 é um polinômio antissimétrico.

Como f e f_1 são centrais, segue que g_1 é central e a Proposição 3.2 implica que $g_1 \in I$. ■

O próximo lema lida com os polinômios $*$-centrais para R que dependem apenas das variáveis em Y.

Lema 3.8. *Seja $g(y_1, \cdots, y_m)$ um polinômio central não constante para R. Temos que g pertence a I.*

Demonstração. Consideramos $\overline{y_i} = \begin{pmatrix} 1 & e_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como o corpo K é infinito, podemos supor g multi-homogêneo, e daí, módulo I, $g \equiv \lambda y_1^{k_1} \cdots y_m^{k_m}$. Como

$$\overline{y_i}^{k_i} = \begin{pmatrix} 1 & k_i e_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\overline{y_1}^{k_1} \cdots \overline{y_m}^{k_m} = \begin{pmatrix} 1 & k_1 e_1 + \cdots + k_m e_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, como este elemento está em $Z(M_{1,1}(E))$ e $\operatorname{char} K = 0$, devemos ter $k_1\lambda = \cdots = k_m\lambda = 0$. Sendo g não constante, segue que $\lambda = 0$. Portanto, $g \in I$. ∎

Lema 3.9. *Se $f(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m)$ é um polinômio central $*$-próprio multilinear para R que depende das variáveis em Y e em Z, então f é congruente módulo I a um polinômio do subespaço W_2. Em particular, f é congruente módulo I a um polinômio em V.*

Demonstração. Denotamos por J o conjunto de l-uplas $j = (j_1, \cdots, j_l)$ com $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq m$. Sendo $j = (j_1, \cdots, j_l) \in J$, consideramos o polinômio

$$P_j = P_{(j_1, \cdots, j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_k}, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}]$$

apresentado na Proposição 2.15 (onde $k = m - l$). Pela Proposição 3.5, segue que

$$f \equiv_I \sum_{j \in J} \alpha_j P_j.$$

e observemos que $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$.

Fixada uma l-upla $(j_1, \cdots, j_l)$, se $m \in \{j_1, \cdots, j_l\}$, então $j_l = m$ e daí $[y_l, z_{j_l}] = [y_l, z_m]$. Agora, se $m \notin \{j_1, \cdots, j_l\}$, então $i_k = m$ e daí

$$P_{(j_1, \cdots, j_l)} = [y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-1}}, z_m, z_{j_1}][y_2, z_{j_2}] \cdots [y_l, z_{j_l}].$$

Como $C_l = \sum_{n=1}^{l+1} (-1)^n P_n \in V$, temos que

$$P_1(y_2, \cdots, y_{l+1}, z_1, \cdots, z_{l+1}) \equiv_V \sum_{n=2}^{l+1} (-1)^n P_n(y_2, \cdots, y_{l+1}, z_1, \cdots, z_{l+1}).$$

Substituindo y_i por y_{i-1}, para $3 \leq i \leq l+1$, y_2 por $[y_1, z_{i_1}, \cdots, z_{i_{k-1}}]$, z_1 por z_m e z_i por $z_{j_{i-1}}$, para $2 \leq i \leq l+1$, nesta congruência e usando a Observação 2.4 para "jogar" a variável z_m para o último comutador, concluímos que $P_{(j_1, \cdots, j_l)}$ é congruente módulo $W_2 + I$ a uma combinação linear de produtos de comutadores, com o comutador $[y_l, z_m]$ como último fator de cada produto.

Assim, existe um polinômio g tal que $g[y_l, z_m]$ é multilinear e $f - g[y_l, z_m]$ pertence a $W_2 + I$. Neste caso, $g[y_l, z_m]$ é um polinômio central para R. Vamos provar então que $g \in I$.

Primeiramente, observe que, como $g[y_l, z_m]$ é multilinear, temos que z_m e y_l não aparecem em g. Suponha então que ao fazer uma certa substituição em g, obtemos $\overline{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, d \in E_0$ e $b, c \in E_1$. Considerando agora as substituições

$$y_l = \begin{pmatrix} 1 & e_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad z_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_j & -1 \end{pmatrix}$$

onde e_i e e_j são distintos e não aparecem em a, b, c nem d, obtemos o elemento

$$\gamma = [y_l, z_m] = \begin{pmatrix} e_ie_j & -2e_i \\ 0 & e_ie_j \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\overline{g}\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_ie_j & -2e_i \\ 0 & e_ie_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae_ie_j & -2ae_i + be_ie_j \\ ce_ie_j & -2ce_i + de_ie_j \end{pmatrix} \in Z(M_{1,1}(E)).$$

Note que se $c \neq 0$, como e_i e e_j não aparecem em c, segue que $ce_ie_j \neq 0$, o que contradiz o fato de $\overline{g}\gamma$ ser central. Logo, $c = 0$, e daí $ae_ie_j = de_ie_j$, ou seja, $(a - d)e_ie_j = 0$. Como e_i e e_j não aparecem em a nem em d, concluímos que $a - d = 0$, ou seja, $a = d$.

Por fim, devemos ter $-2ae_i + be_ie_j = 0$ e daí $(-2a - be_j)e_i = 0$ (lembrando que $e_ie_j = -e_je_i$). Segue então que $-2a = be_j$ e assim, como e_j não aparece em a nem em b, devemos ter $a = b = 0$. Logo, $\overline{g} = 0$, e portanto $g \in I$. ■

Corolário 3.10. *Se $w(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m)$ é um polinômio central $*$-próprio para R e w é não constante, então w é congruente módulo I a um polinômio em V. Em particular, concluímos que w pertence a V.*

Demonstração. Como $\operatorname{char} K = 0$, podemos assumir que w é multilinear. O resultado é então direto dos Lemas 3.7 e 3.9. ■

3.2 Polinômios $*$-Centrais para $M_{1,1}(E)$

Conforme foi dito na Seção 1.4, todo polinômio multi-homogêneo$f(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m)$ em $K\langle Y \cup Z\rangle$ pode ser escrito de forma única como

$$f = \sum y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} w_{\mathbf{a}} \tag{3.2.1}$$

onde $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_l)$ é uma l-upla de números inteiros não negativos e $w_{\mathbf{a}}$ é um polinômio $*$-próprio, e o posto de f, denotado por $r(f)$, é a maior n-upla $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, na ordem lexicográfica, tal que $w_{\mathbf{a}} \neq 0$. Observe que se f é multilinear, então cada $w_{\mathbf{a}}$ é também multilinear e $a_i = 0$, 1.

Seja A uma álgebra associativa e unitária com involução. Sabemos que se escrevemos f como em (3.2.1), então f pertence a $T_*(A)$ se, e somente se, cada $w_{\mathbf{a}}$ pertence a $T_*(A)$ (veja a Proposição 1.40). Isso não vale para polinômios $*$-centrais. Um contra-exemplo simples é o polinômio central (b) de R. Entretanto, nós temos a seguinte proposição.

Proposição 3.11. *Seja $f(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m)$ como em (3.2.1). Se f é um polinômio $*$-central de posto* $\mathbf{a}$ *para uma álgebra com involução A, então o polinômio $w_{\mathbf{a}}$ é um polinômio $*$-central para A.*

Demonstração. É imediato da Proposição 1.40, uma vez que $C(A, *)$ é um T_*-espaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$. ■

O Lema a seguir nos ajudará na prova do Lema 3.13.

Lema 3.12. *Seja f um polinômio $*$-central para R. Temos que*

$$[fy_1, z_1, \cdots, z_n] \equiv_I f[y_1, z_1, \cdots, z_n].$$

Demonstração. De fato, para $n = 1$, temos que

$$[fy_1, z_1] = f[y_1, z_1] + [f, z_1]y_1.$$

Como f é $*$-central, segue que $[f, z_1] \in I$. Logo, $[fy_1, z_1] \equiv_I f[y_1, z_1]$.

Supondo que a congruência é válida para algum $n \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned}[fy_1, z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}] &= [[fy_1, z_1, \cdots, z_n], z_{n+1}] \\ &= [fy_1, z_1, \cdots, z_n]z_{n+1} - z_{n+1}[fy_1, z_1, \cdots, z_n].\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}[fy_1, z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}] &= [fy_1, z_1, \cdots, z_n]z_{n+1} - z_{n+1}[fy_1, z_1, \cdots, z_n] \\ &\equiv_I f[y_1, z_1, \cdots, z_n]z_{n+1} - z_{n+1}f[y_1, z_1, \cdots, z_n] \\ &\equiv_I f[y_1, z_1, \cdots, z_n]z_{n+1} - fz_{n+1}[y_1, z_1, \cdots, z_n] \\ &= f[y_1, z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}],\end{aligned}$$

pois f é $*$-central. ■

Lema 3.13. *Sejam $w(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_m) \in W_1 \cup W_2$ e $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}$ um monômio. Se o produto $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} w$ não pertence a V, então é congruente módulo V a um polinômio de posto menor que* $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_l)$.

Demonstração. Se $w \in W_1$, então só precisamos considerar o caso $w = G_n$. Note que $(z_1 \circ z_2)y_1 - \dfrac{1}{2}[y_1, z_1, z_2]$ pertence a V. Suponha que, para algum $n \geq 1$,

$$G_n y_1 - \frac{1}{2^n}[y_1, z_1, z_2, \cdots, z_{2n}] \in V.$$

Substituindo z_i por z_{i+2}, para $i = 1, \cdots, 2n$ no polinômio acima, segue que

$$(z_3 \circ z_4) \cdots (z_{2n+1} \circ z_{2n+2})y_1 - \frac{1}{2^n}[y_1, z_3, z_4, \cdots, z_{2n+2}] \in V.$$

Note que, como o polinômio $(z_1 \circ z_2) \circ y_1$ é simétrico, o polinômio

$$(z_3 \circ z_4) \cdots (z_{2n+1} \circ z_{2n+2})\left((z_1 \circ z_2) \circ y_1\right) - \frac{1}{2^n}[(z_1 \circ z_2) \circ y_1, z_3, z_4, \cdots, z_{2n+2}]$$

também pertence a V.

Como $z_1 \circ z_2$ é central, segue que $[z_1 \circ z_2, y_1] \in I \subseteq V$. Por outro lado, note que

$$2(z_1 \circ z_2)y_1 = (z_1 \circ z_2) \circ y_1 + [z_1 \circ z_2, y_1].$$

Logo, $2(z_1 \circ z_2)y_1 \equiv_I (z_1 \circ z_2) \circ y_1$. Segue então que

$$[(z_1 \circ z_2) \circ y_1, z_3, z_4, \cdots, z_{2n+2}] \equiv_I 2[(z_1 \circ z_2)y_1, z_3, z_4, \cdots, z_{2n+2}].$$

Ora, mas segue do Lema 3.12 que

$$[(z_1 \circ z_2)y_1, z_3, z_4, \cdots, z_{2n+2}] \equiv_I (z_1 \circ z_2)[y_1, z_3, z_4, \cdots, z_{2n+2}],$$

logo,

$$2G_{n+1}y_1 \equiv_V \frac{2}{2^n}(z_1 \circ z_2)[y_1, z_3, z_4, \cdots, z_{2n+2}]. \tag{3.2.2}$$

Substituindo no polinômio acima z_1 por z_{2n+1}, z_2 por z_{2n+2} e z_i por z_{i-2}, para $i = 3, \cdots, 2n+2$, como $z_i \circ z_j$ é $*$-central e $I \subseteq V$, temos

$$G_{n+1}y_1 \equiv_V \frac{1}{2^n}(z_{2n+1} \circ z_{2n+2})[y_1, z_1, z_2, \cdots, z_{2n}].$$

Como $(z_{2n+1} \circ z_{2n+2})y_1 - \frac{1}{2}[y_1, z_{2n+1}, z_{2n+2}] \in V$ e $[y_1, z_1, \cdots, z_{2n}]$ é simétrico, segue que

$$(z_{2n+1} \circ z_{2n+2})[y_1, z_1, \cdots, z_{2n}] - \frac{1}{2}[y_1, z_1, \cdots, z_{2n+2}] \in V.$$

Assim,

$$G_{n+1}y_1 - \frac{1}{2^{n+1}}[y_1, z_1, \cdots, z_{2n+2}] \in V.$$

Logo, por indução,

$$G_n y_1 - \frac{1}{2^n}[y_1, z_1, z_2, \cdots, z_{2n}] \in V. \tag{3.2.3}$$

Como $G_n \in C(R)$, temos $G_n y_1 \equiv_I y_1 G_n$ e daí

$$y_1 G_n - \frac{1}{2^n}[y_1, z_1, z_2, \cdots, z_{2n}] \in V. \tag{3.2.4}$$

Substituindo y_1 por $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}$ nesse polinômio, concluímos que $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} G_n$ é congruente módulo V a

$$f = \frac{1}{2^n}[y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}, z_1, z_2, \cdots, z_{2n}].$$

Temos que

$$[y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}, z_1] \equiv_I \sum_{i=1}^{l} l a_i y_1^{a_1} \cdots y_{i-1}^{a_{i-1}} y_i^{a_i - 1} y_{i+1}^{a_{i+1}} \cdots y_l^{a_l}[y_i, z_1]. \tag{3.2.5}$$

Como $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} w$ não pertence a V, segue que f não é uma $*$-identidade. Daí, usando (3.2.5), segue que $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} w$ é congruente módulo V a um polinômio de posto menor que **a**.

Suponha agora que $w \in W_2$. Nesse caso, só precisamos considerar $w = C_l$. Substituindo y_1 por $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l}$ em

$$D_l = y_1 C_l - [y_1, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}]$$

como D_l pertence a V, temos que $y_1^{a_1} \cdots y_l^{a_l} C_l$ é congruente módulo V a

$$f = [y_1^{a_1} \cdots y_l^{c_l}, z_1] \cdots [y_{l+1}, z_{l+1}].$$

Como no caso anterior, f é congruente módulo I a um polinômio de posto menor que $\mathbf{a}$. ■

Teorema 3.14. *O $*$-espaço $C(R)$ é gerado por $T_*(R)$ junto com os polinômios $z_1 \circ z_2$ e $[y_1, z_1, z_2] - 2(z_1 \circ z_2)y_1$. Em outras palavras, $C(R) = V$.*

Demonstração. Já temos a inclusão $V \subseteq C(R)$. Assim, só precisamos provar a inclusão inversa. Como o corpo tem característica zero, consideraremos apenas polinômios multilineares.

Seja f um polinômio $*$-central multilinear para R. Pelo Lema 3.8, podemos supor que f depende de variáveis em Z. Seja $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ o posto de f e escrevamos f como em (3.2.1). Temos que $w_{\mathbf{a}}$ é multilinear e, pela Proposição 3.11, $w_{\mathbf{a}}$ é um polinômio $*$-central para R. Neste caso, os Lemas 3.7 e 3.9 implicam que $w_{\mathbf{a}}$ pertence a $W_1 + I$ ou a $W_2 + I$, e usando o Lema 3.13 concluímos que ou $y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n} w_a \in V$ ou $y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n} w_a$ (e consequentemente f) é congruente módulo V a um polinômio de posto menor que $\mathbf{a}$.

Repetindo esse argumento se necessário, concluímos que f é congruente módulo V a um polinômio $*$-próprio central, e portanto o resultado segue do Corolário 3.10. ■

Referências Bibliográficas

[1] E. ALjadeff, A. Giambruno, Y. Karasik. Polynomial identities with involution, superinvolutions and the Grassmann envelope. *Proc. Amer. Math. Soc.* v. **145**, (2017), n. 5, 1843-1857.

[2] S. A. Amitsur and J. Levitski,.Minimal identities for algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* v. **1**, (1950), 449-463.

[3] S. A. Amitsur. Polynomial identities. *Israel J. Math.* v. **19**, (1974), 183–199. https://doi.org/10.1007/BF02756631.

[4] J. L. Boldrini, et al. *Álgebra Linear*, 3. ed. São Paulo: Harper & Row Brasil, 1980.

[5] A. P. Brandão Júnior. *Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas.* 2006. Tese de Doutorado (Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP.

[6] A. P. Brandão Júnior. *Representação de grupos.* 01 de set. de 2020, 14 de dez. de 2020. 89 p. Notas de aula.

[7] M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra.* Suíça: Springer International Publishing, 2014.

[8] J. Colombo, P. Koshlukov, Identities with involution for the matrix algebra of order two over an infinite field of characteristic p. *Israel J. Math*, v. **146** (2005), 337–356.

[9] M. Dehn. Ober die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, *Math. Ann.* v. **85**, (1922), 184-193.

[10] O. M. Di Vicenzo, P. Kushlukov. On the $*$-polynomial identities of $M_{1,1}(E)$. *Journal of Pure and Applied Algebra* , v. **215**, (2011), 262-275.

[11] V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras.* Singapore: Springer-Verlag, 1999.

[12] A. Giambruno, M. Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methods.* Rhode Island: American Mathematical Society, 2005. 352p (Mathematical Surveys and Monographs. v.122)

[13] C. Gómez-Ambrosi, I. P. Shestakov. On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with involution. *J. Algebra* , v. **208**, (1998), 43-71.

[14] A. Iopollo, F. Martino. Superinvolutions on upper-triangular matrix algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. **222**, (2018), 2022-2039.

[15] I. Kaplansky, Problems in the theory of rings, report of a conference on linear algebras. *National Acadademy of Science - National Research Council*, v. **502**, (1957), 1-3.

[16] D. Levchenko, Finite basis property of identities with involution of a second-order matrix algebra, *Serdica Mathematical Journal*, v.**1**, (1982), n. 8, 42–56.

[17] M. L. Racine. Primitive superalgebras with superinvolution. *Journal of Algebra.* v. **206**, (1998), 588-614.

[18] L. H. Rowen. Some results on the center of a ring with polynomial identity. *Bulletin of the American Mathematical Society.* v. **79**, (1973), n. 1, 219-223.

[19] L. H. Rowen. *Polynomial Identities in Ring Theory.* New York: Academic press, INC, 1980.

[20] D. D. P. da Silva e Silva. On the central polynomials with involution of $M_{1,1}(E)$. *Serdica Mathematical Journal.* v. **41**, (2015), n. 2-3, 277–29

[21] A. Steinbruch, P. Winterle. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Makron Books, 1987.

[22] I. Sviridova. *Finite basis problem for identities with involution.* 2014. Preprint, arXiv: 1410.2233.