Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a existência de soluções para equações envolvendo operadores integrais via métodos de pontos fixos

por

Igor Mateus da Silva Sousa

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Sobre a existência de soluçẽs para equações envolvendo operadores integrais via métodos de pontos fixos

por

Igor Mateus da Silva Sousa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Natan de Assis Lima - UEPB

Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima - UFCG

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

janeiro/2022

Dedico este trabalho ao único eterno e infinito Deus,
Criador, Mantenedor e Provedor de todas as coisas,
por me guiar e me instruir em todos os meus passos.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter escrito em seu livro a minha história e ter incluído nele mais esta página que estou vivendo. Agradeço também a minha família por todo apoio e cuidado desde a minha tenra infância, e por todos que cruzaram minha trajetória, fundamentais para minha formação como pessoa. Agradeço ao meu orientador pelo conhecimento, conselhos e orientações a mim transmitidos durante o mestrado, sem os quais este trabalho seria impossível de se concretizar. Por fim, mas não menos importante, agradeço a banca examinadora por ter aceito o convite. Agradeço também a todos àqueles que vierem a ler este trabalho e que o mesmo possa ser útil a todos que dele fizerem uso.

"Heróis genuínos fazem-se desde dentro,
na luta da alma pela verdade da existência.
Antes de brilhar em ações espetaculares,
têm de vencer a mentira interior e pagar,
com a solidão moral extrema,
o preço da sinceridade" - Olavo de Carvalho

Resumo

Estudamos problemas envolvendo operadores integrais que generalizam os operadores de dispersão ou difusão, tão presentes em aplicações da biologia e ecologia e que aparecem em equações de reação-difusão. Para a obtenção de soluções utilizamos métodos topológicos de ponto fixo da análise funcional não linear, tais como: teoria do grau de Leray-Schauder, teoria da bifurcação de Rabinowitz, método das sub e super soluções, e etc...
Palavras-chave: Equações integrais; Operador de Difusão; Teoria de Pontos Fixos.

Abstract

We study problems involving integral operators that generalize dispersion or diffusion operators, so present in biology and ecology applications and that appear in reaction-diffusion equations. To obtain solutions it uses fixed-point topological methods of nonlinear functional analysis, such as: Leray-Schauder degree theory, Rabinowitz bifurcation theory, sub and super solutions method, and etc...
Keywords: Integral Equations; Broadcast Operator; Fixed Point Theory.

NOTAÇÕES

Segue uma lista das principais notações e siglas utilizadas no texto. Alguns símbolos aqui listados também são definidos no texto.

- E' - Dual topológico de um espaço de Banach E;
- $X := C(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$;
- $|.|$ - Norma de $\mathbb{R}^N$;
- $B_r(x) = \{y; |y - x| < r\}$;
- $||.||_\infty$ - Norma de L^∞;
- $||.||_{L^p} = ||.||_p$ - Norma no espaço L^p;
- $\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \longrightarrow F; T \text{ é linear e contínuo}\}$;
- $\mathcal{K}(E, F) = \{T : E \longrightarrow F; T \text{ é compacto}\}$;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$;
- $u^- = \min\{u, 0\}$;
- $\rightarrow$ - Convergência forte em espaços vetoriais normados;
- $\rightharpoonup$ - Convergência fraca em espaços vetoriais normados;
- $|X|$ - Medida de Lebesgue de um conjunto mensurável;
- $q.t.p.$ - Em quase todo ponto;
- w_N - Área da superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$;
- $o(1)$ - Ordem pequena;
- $\overline{\Omega}$ - Denota o fecho de Ω;
- $[Q] := \sup\limits_{x,y,z \in \Omega} |Q(x, y) - Q(z, y)|$;
- $\langle ., . \rangle$ - Produto interno;

- $\{u\}^{\perp} = \{v; \langle v, u\rangle = 0\}$;
- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I)$ é bijetora$\}$;
- $\sigma(T) = \mathbb{R}\backslash\rho(T)$;
- $diamE$ - Diâmetro de E;
- ∂A - Fronteira de A;
- $\mathcal{M}(\Omega) = \{$espaço das medidas finitas positivas em $\Omega\}$;
- $f_n \longrightarrow \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega) \iff \int_\Omega f_n g dx \longrightarrow \int_\Omega g d\mu, \forall g \in L^\infty(\Omega)$;
- $\rho(y, B)$ - Distância de y ao conjunto B;
- $D(., ., .)$ - A função grau;
- $C_\gamma(\Omega) = \{F : \Omega \subset A \longrightarrow A; F$ é γ-condensante$\}$ onde A é um espaço de Banach;
- $SC_\gamma(\Omega) = \{F : \Omega \subset A \longrightarrow A; F$ é γ-contração estrita$\}$.

Sumário

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estamos interessados em estudar problemas envolvendo o operador integral $L : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$, definido por

$$Lu = L_0u + b(x)u, \forall u \in C(\overline{\Omega})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um aberto conexo limitado, $b \in C(\overline{\Omega})$ e $L_0 : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ é o operador dado por

$$L_0u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy, \text{ para } u \in C(\overline{\Omega}) \text{ e } x \in \overline{\Omega},$$

onde $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, simétrica (ver (K_1) abaixo) e não-negativa, chamada núcleo do operador L_0, que satisfaz, a menos de menção contrária, as condições:

(K_1) $K(x,y) = K(y,x)$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$;

(K_2) Existe $\delta > 0$ tal que $K(x,y) > 0$ para todos $x, y \in \Omega$ com $|x-y| \leq \delta$.

Como para $u \in C(\overline{\Omega})$, L_0u é dado por uma integral com K uniformemente contínua em $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, não é difícil ver que $L_0u \in C(\overline{\Omega})$, e como Lu é a soma de duas funções contínuas, então $Lu \in C(\overline{\Omega})$, o que mostra a boa definição de L. Maiores detalhes sobre estes operadores serão dados no decorrer do trabalho.

Geralmente estamos interessados em encontrar soluções para problemas do tipo

$$Lu = f(x,u)$$

com $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possuindo algumas propriedades especiais.

Em alguns casos, condições de fronteira são consideradas, como por exemplo a condição de Dirichlet e de Neumann dependendo da abordagem que o autor estiver usando. Em [10], Bates at.al. estudam a existência e estabilidade de soluções estacionárias de um modelo integrodiferencial para transições de fase, que é um fluxo gradiente para um funcional de energia livre com integrais gerais não locais penalizando a não uniformidade espacial. Em [11], Bates at.al. estabelecem as propriedades de existência, unicidade, estabilidade e regularidade de soluções de ondas viajantes de uma equação integrodiferencial não linear biestável, bem como sua estabilidade assintótica global no caso de ondas contínuas de velocidade zero. Esta equação é um análogo direto da equação de difusão não linear biestável mais familiar e compartilha muitas de suas propriedades. O leitor interessado no tema também pode consultar [19], [20], [26], [28] [38], [52], [55], onde encontrará vários problemas e abordagens diferentes envolvendo o operador integral.

Estes problemas recebem o nome de equações de reação-difusão e alguns métodos são bastante utilizados para encontrar soluções, como por exemplo, os métodos de sub-supersolução, teoria da bifurcação, Teoria do Grau, e etc.

Em estudos de dispersão espacial de células ou organismos através do meio ambiente, é muito comum que equações de reação-difusão, ou até mesmo equações de evolução, sirvam de modelos muito úteis para estes estudos. Para uma espécie de modelo específico, podemos pensar em árvores cujas sementes e os pólens são disseminados em um amplo espaço.

Se $u(y)$ é pensado como uma densidade em um local y, $K(x, y)$ como a distribuição de probabilidade de saltar de um local y para um local x, então a taxa na qual os indivíduos de todos os outros locais estão chegando ao local x, é

$$\int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy.$$

O operador L_0 acima é um operador compacto.

Nota histórica: A noção de operador compacto remonta aos trabalhos de Hilbert de 1906 sobre a resolução de sistemas de infinitas equações lineares. A definição veio com Riesz em 1918 sob o nome de operador completamente contínuo. Desde 1950, a partir de uma sugestão de E. Hille, o termo operador compacto tem sido usado. O termo operador completamente contínuo foi reservado para os operadores que transformam sequências fracamente convergentes em sequências convergentes, por outro lado, quando definidos em espaços reflexivos, em particular entre espaços de Hilbert, essas duas noções coincidem.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, estudamos algumas propriedades dos operadores L e L_0 dados acima, além de apresentarmos alguma teoria espectral para o operador L tanto definido em $C(\overline{\Omega})$, como definido em $L^2(\Omega)$, também estudamos o problema do autovalor principal

$$L_0 u + b(x)u = \lambda u$$

onde $b : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ é uma função contínua não negativa, que descreve o efeito limitante da aglomeração da população. Ainda apresentamos resultados do tipo Krein-Rutman. Resultados do tipo Krein-Rutman consistem essencialmente em mostrar a existência de um menor autovalor positivo, λ_1, o qual é simples e isolado.

No Capítulo 2, apresentamos o princípio do máximo e o método de sub e super-solução, tão amplamente usado em existência de solução para equações de reação-difusão, como a apresentada acima, e aplicamos este método para mostrar a existência de solução para o problema:

$$L_0 u = f(x,u) \text{ em } \Omega,$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz.

No Capítulo 3, baseado em Alves et.al. [7], estudamos a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas não-locais

$$L_0 u = u\left(\lambda - \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy\right), \text{ em } \Omega \tag{1}$$

onde $p > 0$, λ é um parâmetro real, e $Q : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-negativa que satisfaz:

(Q_1) $Q \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ e $Q(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in \Omega$.

A existência de solução é obtida via teoria da bifurcação. Assumindo que Q satisfaz a hipótese (Q_2), isto é,

(Q_2) $Q(x,y) \geq \sigma$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ para algum $\sigma > 0$,

e considerando $[Q] := \sup\limits_{x,y,z \in \Omega} |Q(x,y) - Q(z,y)|$, obtemos o seguinte resultado

Teorema 0.1. *Suponha que* $p > 0, [Q] > 0, (K_1) - (K_2)$ *e* (Q_2) *valem. Então o problema* (1) *tem uma solução positiva para todos* $\lambda \in \left[\lambda_1, \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1 \sigma}{[Q]}\right]$, *onde* λ_1 *é o autovalor principal de* L_0.

Para obtermos uma solução positiva para todo $\lambda > \lambda_1$, precisamos das seguintes hipóteses adicionais:

(Q_2') Existem $r, \sigma > 0$ tais que $Q(x,y) \geq \sigma$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ e $|x - y| \leq r$.

(Q_3) Existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ e uma função não-negativa $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $a^{-1} \in L^q(\Omega)$, onde $q = \max\{1, p\}$ e $Q(x_0, y) \geq Q(x,y) + a(x)$ para todos $x, y \in \Omega$,

com as quais obtemos o seguinte resultado:

Teorema 0.2. *Assuma que* $p > 0, (K_1) - (K_2)$ *e* $(Q_2') - (Q_3)$ *valem. Então existe uma componente conexa de soluções positivas de* (1) *saindo de* $\lambda_1 > 0$, *com a propriedade que inclui soluções da forma* (λ, u) *para todo* $\lambda > \lambda_1$.

É importante salientar que a hipótese (Q_2) é mais forte que a hipótese (Q_2').

Se além destas hipóteses, considerarmos a seguinte:

(Q_4) Existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $Q(x_0, y) \geq Q(x,y)$ para todos $x, y \in \Omega$,

obtemos o principal teorema deste capítulo, a saber:

Teorema 0.3. *Assuma que* $p > 0, (K_1), (K_2), (Q'_2)$ *e* (Q_4) *valem. Então, o problema* (1) *tem uma solução positiva para todo* $\lambda > \lambda_1$.

A presença do termo de reação não-local na equação (1) acima, significa, do ponto de vista biológico, que o efeito de aglomeração depende não apenas de seu próprio ponto no espaço, mas também depende de toda a população em um habitat N-dimensional Ω (ver [5], [6], [10], [11], [12], [19], [18], [20], [22], [23], [24], [25], [27], [30], [32], [33], [34], [35], [36], [38], [40], [41], [44], [47], [48], [53] e [54] para maiores detalhes).

No Capítulo 4, usando Lima e Souto [58], estudamos a existência de soluções para a seguinte classe de problemas não-locais

$$L_0 u = f(x,u) + g(x), \text{ em } \Omega, \qquad (P)$$

onde $g \in C(\overline{\Omega})$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz crescente com respeito à variável $t \in \mathbb{R}$. Como g pode ser decomposto da forma $g(x) = t\phi_1(x) + g_1(x)$, $x \in \Omega$, onde ϕ_1 é uma autofunção positiva associada ao autovalor principal λ_1 de L_0 e $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$, então o problema (P) pode ser escrito como segue

$$L_0 u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x) \text{ em } \Omega. \qquad (P)_t$$

A motivação para estudar (P) vem do resultado de Ambroseti-Prodi [9], que é um resultado interessante no que diz respeito à solubilidade do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + g(x), \ em \ \Omega, \\ u = 0, \ em \ \partial\Omega, \end{cases} \qquad (2)$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com uma fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$. A não-linearidade é dada por uma função C^2 de valor-real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f"$(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e

$$0 < \lim_{s \to -\infty} f'(s) < \lambda_1 < \lim_{s \to +\infty} f'(s) < \lambda_2, \qquad (3)$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores de $(-\Delta, H_0^1)$. Sob essas hipóteses, eles provaram a existência de uma variedade C^1, $\mathcal{M}$ em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ que divide este espaço em dois conjuntos abertos $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ com as seguintes propriedades:

(i) se $g \in \mathcal{O}_1$, o problema (2) não tem solução; (ii) se $g \in \mathcal{M}$, o problema (2) tem exatamente uma solução; (iii) se $g \in \mathcal{O}_2$, o problema (2) tem exatamente duas soluções. Em [9], o método que foi usado é baseado em teoremas de inversão para aplicações diferenciáveis com singularidades em espaços de Banach. Este método é muito bonito e geométrico, mas parece depender muito do fato de que f é uma função convexa. Além disso, a obra de Ambrosetti e Prodi tem o inconveniente de não dar condições necessárias ou suficientes para (i), (ii) e (iii) ocorrerem.

Em 1975, Beger e Podolak [15], deram um passo importante no estudo do problema e obtiveram uma estrutura cartesiana para a variedade $\mathcal{M}$ nos espaços de Hilbert. Eles decompuseram a função $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ na forma $g = t\phi_1 + g_1$, onde ϕ_1 é uma autofunção positiva normalizada (em $L^2(\Omega)$) associada à um autovalor λ_1 (autovalor de $(-\Delta, H_0^1)$) e $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ no sentido de $L^2(\Omega)$, i.e., $\int_\Omega g_1(x)\phi_1(x)dx = 0$. Assim, eles escreveram a equação (2) como

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + t\phi_1(x) + g_1(x), \ \ em \ \Omega, \\ u = 0, \ \ em \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

Usando o método de Liapunov-Schmidt, para cada g_1 como acima, eles encontraram um número real $t(g_1) \in \mathbb{R}$ dependendo continuamente em g_1, de modo que: (i) $g \in \mathcal{O}_1$ (i.e, (4) não tem solução), se $t > t(g_1)$; (ii) $g \in \mathcal{M}$, (i.e. (4) tem exatamente uma solução), se $t = t(g_1)$; (iii) $g \in \mathcal{O}_2$ (i.e. (4) tem exatamente duas soluções), se $t < t(g_1)$.

Também em 1975, Kazdan e Warner [42], publicaram um longo artigo lidando com operadores elípticos uniformes de segunda ordem com condições de Dirichlet ou Newmann. Eles trabalharam substituindo as hipóteses (3) por hipóteses

$$-\infty \leq \limsup_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} \leq +\infty \tag{5}$$

que não envolve a derivada de f. Eles encontraram uma sub e uma supersolução para t suficientemente negativa, e usando o método de iteração monótona, provaram a existência de uma solução. Mesmo removendo a convexidade da função f, comprovou-se a existência de uma função $t : \{\phi_1\}^{\perp} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que: (i) (4) não tem solução, se $t > t(g_1)$ e (ii) (4) tem pelo menos uma solução, se $t < t(g_1)$.

Posteriormente, Amann e Hess [8] e concomitantemente Dancer [29] melhoraram o trabalho de Kazdan e Warner encontrando pelo menos duas soluções para $t < t(g_1)$, e pelo menos uma solução para $t = t(g_1)$. Eles usaram os argumentos da teoria do grau para obter este resultado.

Observa-se que a convexidade estrita da função f implica na possibilidade de obtenção em cada caso, do número exato de soluções. Por outro lado, a posição dos limites $\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s}$ em relação ao espectro de $(-\Delta, H_0^1)$ influencia o número de soluções que podemos ter. Por exemplo, se, em adição das hipóteses relevantes para o problema (4), assumimos a convexidade (5) e as hipóteses que $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_2$, então para cada $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ no sentido de $L^2(\Omega)$, existe $t(g_1)$ tal que: (i) (4) não tem solução, se $t > t(g_1)$; (ii) (4) tem exatamente uma solução, se $t = t(g_1)$; (iii) (4) tem exatamente duas soluções, se $t < t(g_1)$.

Outro exemplo, se considerarmos as hipóteses

$$\limsup_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}<\lambda_1<\lambda_2<\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}<\lambda_3,$$

então pode-se encontrar $\tau\in\mathbb{R}$ tal que (4) tem pelo menos três soluções se $t<\tau$.

Para resolver o problema (P) acima, iremos fazer uso do operador auxiliar $F_t : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ dado por

$$F_t u := \frac{1}{M}L_0u + u - \frac{1}{M}f(x,u) - \frac{1}{M}(t\phi_1 + g_1(x)), \text{ para algum } M>0.$$

Note que um ponto fixo para este operador é solução para o problema $(P)_t$, ou seja, os zeros de $I-F_t$. O leitor poderia tentar usar a teoria do grau de Leray-Schauder para resolver este problema, mas chamo a atenção para o fato de que o operador F_t não é compacto, o que nos impede de fazer isto. Porém, uma vez que o operador F_t é $\gamma-$condensante (ver Apêndice B), iremos usar o método de sub-supersolução e a teoria do grau para aplicações $\gamma-$condensantes, que é uma extensão do grau de Leray-Schauder, e obteremos um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi, isto é, obteremos uma condição necessária em g para a não-existência de soluções, a existência de pelo menos uma solução, e a existência de pelo menos duas soluções distintas. Mais especificamente, assumindo que f satisfaz a hipótese:

(f_1) Existe $A>||k||_\infty$ e $C>0$ tal que $f(x,s)\geq As-C$ para todo $s\geq 0$ e para todo $x\in\overline{\Omega}$, onde $k(x)=\displaystyle\int_\Omega K(x,y)dy$,

obtemos o seguinte resultado:

Teorema 0.4. *Suponha que K satisfaz (K_1), (K_2), e suponha que f é uma função localmente Lipschitz, crescente com respeito à variável $t\in\mathbb{R}$ verificando (f_1). Então para todo $g_1\in\{\phi_1\}^\perp$, existe um número real $t(g_1)$ tal que*

(i) o problema $(P)_t$ não tem solução positiva, se $t>t(g_1)$;

(ii) o problema $(P)_t$ tem pelo menos uma solução positiva, se $t<t(g_1)$.

Para obtermos pelos menos duas soluções, precisamos das hipóteses adicionais:

(f_2) Existe um número $0<a<\lambda_1$ tal que $\displaystyle\lim_{s\to-\infty}\frac{f(x,s)}{s}=a$, para todo $x\in\overline{\Omega}$,

(f_3) Para todo compacto $K\subset\mathbb{R}$ existe um número $\sigma>0$ tal que $\dfrac{f(x,s)-f(x,t)}{s-t}>\sigma$, para todo $s,t\in K$ e todo $x\in\overline{\Omega}$.

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 0.5. *Sob as hipóteses do Teorema 0.4, em adição à* (f_2) *e* (f_3) *temos que, para todo* $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$*, existe um número real* $t(g_1)$ *tal que*

(i) o problema $(P)_t$ *tem pelo menos duas soluções, se* $t < t(g_1)$*;*

(ii) o problema $(P)_t$ *tem pelo menos uma solução, se* $t = t(g_1)$*.*

A diferença do problema com L_0 do problema com $-\Delta$, é que $(-\Delta)^{-1}$ é um operador compacto, enquanto $(L_0 + M)^{-1}$ não é um compacto para qualquer $M \geq 0$ grande. Esta diferença entre os operadores traz algumas dificuldades, dentre elas os métodos de bifurcação e teoria do grau são feitos de forma diferente.

No final do trabalho, incluímos dois apêndices. O Apêndice A trata sobre alguns resultados da Teoria Espectral de Operadores Compactos e Auto-adjuntos, uma vez que o operador L_0 é compacto e quando definido em $L^2(\Omega)$ é auto-adjunto, portanto, alguns resultados deste apêndice, especialmente a Alternativa de Fredholm serão bastante úteis. E por fim, no Apêndice B, apresentamos um pequeno resumo sobre o Grau para Aplicações $\gamma-$condensantes, salientando o fato de que este grau extende o grau de Leray-Schauder.

Capítulo 1

Estudo do Operador L

Neste capítulo, provaremos a existência de um autovalor principal para o operador integral $Lu = L_0u + b(x)u$ sob certas condições, e consideraremos brevemente algumas de suas propriedades, em outras palavras, consideramos o problema não-local $Lu = \lambda u$ em um domínio Ω. Por solução deste problema, entendemos uma função $u \in L^1(\Omega)$ que verifica a igualdade acima quase sempre, embora na maioria das aplicações, inclusive neste capítulo, estamos lidando com $u \in L^2(\Omega)$. Este operador foi recentemente usado para modelar várias situações físicas. Para obter alguns resultados de existência e unicidade de soluções, vamos usar a teoria apresentada no Apêndice A sobre operadores compactos e autoadjuntos, pois como será visto neste capítulo, o operador de difusão L é um operador limitado e simétrico. O mecanismo de dispersão é um dos principais focos de interesse teórico e tem recebido muita atenção recentemente. A maioria dos modelos contínuos relacionados à dispersão é baseada em equações de reação-difusão que foram extensamente estudadas. No estudo de modelos clássicos de dispersão, que muitas vezes são baseados na equação de reação-difusão, muitos resultados úteis sobre a dinâmica global de equações difusas foram estabelecidos em termos dos autovalores principais de problemas de autovalores elípticos escalares. Porém, neste trabalho, não aprofundaremos este estudo, apenas daremos uma ideia introdutória ao leitor. Para maiores detalhes, indicamos as referências dadas acima na introdução.

1.1 A função Núcleo e o operador integral

Considere Ω um aberto conexo e limitado em $\mathbb{R}^N$ e $X = C(\overline{\Omega})$ o conjunto das funções de valor real contínuas definidas em $\overline{\Omega}$, com a norma usual $||u||_\infty = \max\left\{|u(x)| : x \in \overline{\Omega}\right\}$. O operador integral $L : X \longrightarrow X$ será definido por

$$Lw = L_0w + b(x)w, \text{ para } w \in X,$$

onde $b : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva e $L_0 : X \longrightarrow X$ é definido por

$$L_0 w(x) = \int_\Omega K(x,y)w(y)dy, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall w \in X.$$

Lembrando que $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva contínua chamada de núcleo de L_0 tal que

(K_1) $K(x,y) = K(y,x)$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$, ou seja, K é simétrica.

Denotando por X_+ o cone positivo em X, isto é, $X_+ = \{u \in X : u(x) \geq 0, \forall x \in \Omega\}$, sabemos que dado $u \in X$, existem $u^+ \in X_+$ e $u^- \in X \backslash X_+$ onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$ (parte positiva e parte negativa de u, respectivamente) tal que $u = u^+ + u^-$ (ver [1] para mais detalhes).

Um operador $T : X \longrightarrow X$ é chamado positivo se $T(X_+) \subset X_+$. A afirmação a seguir mostra que o operador L_0 é positivo e que X_+ tem interior não-vazio, que denotamos por $intX_+$.

Afirmação 1.1. $L_0(X_+ \backslash \{0\}) \subset intX_+$.

De fato, se $u \in X_+ \backslash \{0\}$ existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) > 0$, e sendo u contínua, existe $\alpha > 0$ e $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que $u(y) \geq \alpha > 0$ em $B_{\delta_1}(x_0) \cap \overline{\Omega}$. Daí,

$$\begin{aligned} L_0 u(x) &= \int_\Omega K(x,y)u(y)dy \\ &\geq \int_{\Omega \cap B_{\delta_1}(x_0)} K(x,y)u(y)dy \\ &\geq \alpha \int_{\Omega \cap B_{\delta_1}(x_0)} K(x,y)dy > 0, \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

pois K é positivo em $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

Assim, $L_0 u > 0$ em Ω, e como será mostrado no Lema 1.8, se $Lu(z) = 0$ para algum $z \in \overline{\Omega}$, então existe uma bola $B_r(z)$ tal que $L_0 u(x) = 0$ em $B_r(z) \cap \overline{\Omega}$, o que não pode ocorrer. Logo $L_0 u > 0$ no compacto $\overline{\Omega}$, daí $L_0 u(x) \geq \sigma > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, para algum $\sigma > 0$. Segue que $B_{\frac{\sigma}{2}}(L_0 u) \subset X_+$. De fato,

$$\begin{aligned} f \in B_{\frac{\sigma}{2}}(L_0 u) &\iff ||f - L_0 u||_\infty < \frac{\sigma}{2} \\ &\iff |f(x) - L_0 u(x)| < \frac{\sigma}{2}, \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) > L_0 u(x) - \frac{\sigma}{2} \geq \sigma - \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{2} > 0, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Donde $L_0 u \in intX_+$, como queríamos mostrar.

De agora em diante, a menos de menção contrária, iremos supor uma condição mais fraca para K, qual seja, K é não negativa, verifica (K_1) e satisfaz

(K_2) Existe $\delta > 0$ tal que $K(x,y) > 0$ para todos $x, y \in \Omega$ com $|x - y| \leq \delta$.

Proposição 1.2. *L_0 é um operador linear e compacto.*

Demonstração. A prova da linearidade de L_0 é trivial, e portanto será omitida. Para a segunda parte, basta notar que L_0 é um operador integral, e seguindo o mesmo raciocínio do Exemplo 1 do Apêndice A, com algumas adaptações, segue facilmente que L_0 é um operador compacto. □

Proposição 1.3. *O operador L é limitado em X e*

$$||L|| \leq \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega K(x,y)dy + ||b||_\infty.$$

Demonstração. Sendo $||L|| = \sup\limits_{||w||_\infty \leq 1} ||Lw||_\infty$, temos para $||w||_\infty \leq 1$

$$\begin{aligned}
||Lw||_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |Lw(x)| &= \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left| \int_\Omega K(x,y)w(y)dy + b(x)w(x) \right| \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left(\int_\Omega |K(x,y)|w(y)|dy + |b(x)||w(x)| \right) \\
&= \sup_{x\in\overline{\Omega}} \int_\Omega |K(x,y)||w(y)|dy + \sup_{x\in\overline{\Omega}} |b(x)||w(x)| \\
&\leq |w| \left[\sup_{x\in\overline{\Omega}} \int_\Omega |K(x,y)|dy + \sup_{x\in\overline{\Omega}} |b(x)| \right] \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} \int_\Omega K(x,y)dy + ||b||_\infty.
\end{aligned}$$

Daí, $||L|| \leq \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \int_\Omega K(x,y)dy + ||b||_\infty$. □

1.2 O espectro de L em X

O resolvente de L, bem como seu espectro, são definidos de modo usual (ver Apêndice A). $EV(L)$ denota o conjunto dos autovalores de L dado por

$$EV(L) = \{\lambda \in \mathbb{R}; Ker(L - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

De agora em diante, denotamos $M = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} b(x)$ e fixe um $\lambda > M$, donde $\lambda - b(x) \geq \lambda - M > 0$, e assim podemos definir o operador linear $S_0 : X \longrightarrow X$, por

$$S_0 u(x) = (\lambda - b(x))^{-1} u(x), \forall u \in X, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Afirmação 1.4. *O operador S_0 é um operador linear limitado, bijetivo com operador* *inverso dado por*

$$S_0^{-1}u(x) = (\lambda - b(x))u(x), \forall u \in X, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Demonstração. A linearidade é trivial e portanto será omitida. Mostremos a limitação. Como $|S_0 u(x)| \leq (\lambda - M)^{-1}||u||_\infty$, segue que $||S_0 u||_\infty \leq (\lambda - M)^{-1}||u||_\infty$, que mostra que S_0 é um operador limitado. Para mostrar a injetividade, basta notar que dados $u, v \in X$

$$\begin{aligned} S_0 u = S_0 v &\iff (\lambda - b(x))^{-1}u(x) = (\lambda - b(x))^{-1}v(x) \\ &\iff u(x) = v(x), \forall x \in \overline{\Omega}, i.e., u = v. \end{aligned}$$

Para a sobrejetividade, note que dado $u \in X$, tomando $v := (\lambda - b(x))u$, segue facilmente que $S_0 v(x) = u(x)$, donde S_0 é bijetiva. Além disso, não é difícil mostrar que $S_0(S_0^{-1}u) = u$ e $S_0^{-1}(S_0 u) = u$, para todo $u \in X$. □

Com o estudo feito acima, temos que $T_0 = S_0 \circ L_0$ é um operador compacto em X (ver Corolário A.9).

Lema 1.1. *Suponha que $\lambda > M$. Então:*

(1) $\lambda \in \sigma(L) \iff Ker(L - \lambda I) \neq \{0\}$, isto é, os elementos de $\sigma(L) \cap (M, \infty)$ são autovalores de L, ou ainda $\sigma(L) \cap (M, \infty) \subset EV(L)$;

(2) $\dim Ker(L - \lambda I)$ é finita.

Demonstração. Suponha que $g \in R(L - \lambda I)$, isto é, exite um $w \in X$ tal que

$$\begin{aligned} Lw - \lambda w = g &\iff L_0 w = (\lambda - b(x))w + g \\ &\iff S_0 \circ L_0 w = w + S_0 g. \end{aligned}$$

Isto é, $g \in R(L - \lambda I) \iff S_0 g \in R(T_0 - I)$. Como S_0 é bijetivo, $R(L - \lambda I) = X \iff R(T_0 - I) = X$. Agora, usando um argumento análogo, vamos mostrar que $Ker(L - \lambda I) = Ker(T_0 - I)$. De fato,

$$\begin{aligned} g \in Ker(L - \lambda I) &\iff (L - \lambda I)g = 0 \\ &\iff Lg = \lambda g \iff L_0 g = (\lambda - b(x))g \\ &\iff S_0 \circ L_0 g = g \iff (T_0 - I)g = 0 \iff g \in Ker(T_0 - I). \end{aligned}$$

Agora estamos prontos para mostrar este lema. Observe que

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(L) &\iff L - \lambda I \text{ não é bijetivo} \\ &\iff R(L - \lambda I) \neq X \text{ ou } Ker(L - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\iff R(T_0 - I) \neq X \text{ ou } Ker(T_0 - I) \neq \{0\} \\ &\iff T_0 - I \text{ não é bijetivo} \iff 1 \in \sigma(T_0). \end{aligned}$$

Como T_0 é compacto, usando a alternativa de Fredholm obtemos (1) e (2) (ver Teorema A.13 e Proposição A.12, respectivamente). $\square$

1.3 O espectro de L em $L^2(\Omega)$

Podemos notar que L_0 e L estão bem definidos em $L^2(\Omega)$, e L é um operador linear limitado e L_0 é um operador linear compacto, ambos definidos em $L^2(\Omega)$.

Afirmação 1.5. *L_0 está bem definido e é limitado.*

Demonstração. De fato, dado $w \in L^2(\Omega)$ e $x \in \Omega$, temos

$$|L_0 w(x)| \leq \int_\Omega |K(x,y)||w(y)|dy \leq \left[\int_\Omega K(x,y)^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} ||w||_{L^2(\Omega)},$$

onde na segunda desigualdade estamos usando Holder, notando que a função $K(x,.) \in L^2(\Omega)$. Daí

$$|L_0 w(x)|^2 \leq ||w||^2_{L^2(\Omega)} \int_\Omega K(x,y)^2 dy \leq ||K||^2_\infty ||w||^2_{L^2(\Omega)} |\Omega|,$$

donde, integrando em ambos os membros, temos

$$||L_0 w||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||K||^2_\infty |\Omega|^2 ||w||^2_{L^2(\Omega)},$$

e extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$||L_0 w||_{L^2(\Omega)} \leq ||K||_\infty |\Omega| ||w||_{L^2(\Omega)},$$

o que mostra a boa definição de L_0 e a limitação. $\square$

Afirmação 1.6. *Também temos $L_0(L^2(\Omega)) \subset X$.*

Demonstração. Para mostrar que $L_0 w \in X$, seja $x_0 \in \overline{\Omega}$. Sendo K uniformemente contínua em $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |K(x,y) - K(x_0,y)| \leq \epsilon$. Assim, temos

$$|L_0 w(x) - L_0 w(x_0)| \leq \int_\Omega |K(x,y) - K(x_0,y)||w(y)|dy \leq \epsilon \int_\Omega |w(y)|dy \leq \epsilon ||w||_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}}.$$

Na última desigualdade estamos usando Holder. Com isso mostramos que $\lim_{x \to x_0} Lw(x) = Lw(x_0)$. Daí $L_0 w \in X$, isto é, $L_0(L^2(\Omega)) \subset X$. $\square$

A compacidade de L_0 em $L^2(\Omega)$ segue da mesma forma (ver Exemplo 1 no Apêndice A).

Afirmação 1.7. *L está bem definido e é um operador limitado.*

Demonstração. Como $|b(x)w(x)|^2 \leq ||b||_\infty^2 |w(x)|^2$, segue que

$$||b(x)w||_{L^2(\Omega)} \leq ||b||_\infty^2 ||w||_{L^2(\Omega)}^2,$$

donde,

$$||Lw||_{L^2(\Omega)} \leq ||L_0 w||_{L^2(\Omega)} + ||b(x)w||_{L^2(\Omega)} \leq (||b||_\infty + ||K||_\infty |\Omega|)||w||_{L^2(\Omega)}$$

o que mostra a boa definição de L, bem como sua limitação. □

Se $\lambda > M$, podemos definir o operador linear S_0 que está também bem definido em $L^2(\Omega)$ e que é bijetivo e limitado.

Afirmação 1.8. *Basta notar que*

$$||S_0 u||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda - M} ||u||_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. De fato, como $\lambda - b(x) \geq \lambda - M$, então

$$S_0 u(x) = \frac{u(x)}{\lambda - b(x)} \leq \frac{u(x)}{\lambda - M}.$$

Daí,

$$\int_\Omega (S_0 u(x))^2 dx \leq \frac{1}{\lambda - M} \int_\Omega u(x)^2 dx,$$

isto é,

$$||S_0 u||_2^2 \leq \frac{1}{\lambda - M} ||u||_2^2,$$

o que mostra a afirmação. □

Observação 1.1. *O operador linear $T_0 = S_0 \circ L_0$ é um operador compacto (ver Corolário A.9) e não é difícil mostrar que $T_0(L^2(\Omega)) \subset X$, pois $L_0(L^2(\Omega)) \subset X$ e $S_0 u \in X$ para todo $u \in X$.*

Para evitar alguma confusão, vamos denotar $\tilde{\sigma}(L)$ o espectro de $L : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ e $\tilde{E}V(L)$ seu conjunto de autovalores. Temos as seguintes propriedades:

Lema 1.2. *Suponha que $\lambda > M$. Então*

(1) $\lambda \in \tilde{\sigma}(L) \iff Ker(L - \lambda I) \neq \{0\}$, isto é, os elementos de $\tilde{\sigma}(L) \cap (M, \infty)$ são autovalores de L;

(2) $\dim Ker(L - \lambda I)$ é finita;

(3) $\lambda \in \tilde{E}V(L) \iff \lambda \in EV(L)$;

(4) se ψ é uma autofunção associada à $\lambda \in \tilde{E}V(L)$ então $\psi \in X$;

(5) $\tilde{\sigma}(L) \cap (M, \infty) = \sigma(L) \cap (M, \infty)$.

Demonstração. A prova de (1) e (2) é análoga à do lema anterior substituindo X por $L^2(\Omega)$.

Para provar (3), de $X \subset L^2(\Omega)$ temos que $EV(L) \subset \tilde{E}V(L)$, e a suficiência da condição está feita. Agora suponha que $\lambda > M$ é um autovalor de $L : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, então existe $w \in L^2(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que:

$$(\lambda - b(x))w = L_0 w \in L_0(L^2(\Omega)) \subset X \iff w = \frac{L_0 w}{\lambda - b(x)} \in X,$$

porque $\lambda - b(x) \geq \lambda - M > 0$. Este argumento mostra a parte (4) e a necessidade da condição (3). Já o item (5) segue diretamente do item (1) e (3). $\square$

1.4 L como um operador simétrico em $L^2(\Omega)$

É fácil ver que para todos $u, v \in L^2(\Omega)$ temos

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle \,, \text{ onde } \langle u, v\rangle = \int_\Omega uvdx$$

é o produto interno de $L^2(\Omega)$.

De fato, sendo $Lu(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy + b(x)u(x)$, então

$$\begin{aligned}\langle Lu, v\rangle &= \int_\Omega \int_\Omega K(x,y)u(y)v(x)dydx + \int_\Omega b(x)u(x)v(x)dx \\ &= \int_\Omega \int_\Omega K(y,x)v(x)u(y)dxdy + \int_\Omega b(y)v(y)u(y)dy = \langle u, Lv\rangle\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade estamos usando o fato que K é simétrico e o Teorema de Fubini para inverter a ordem de integração. Para justificar a última igualdade, notando que $\int_\Omega Lv(y)u(y)dy = \int_\Omega Lv(x)u(x)dx$ e que $Lv(y) = \int_\Omega K(y,x)v(x)dx + b(y)v(y)$ temos

$$\langle Lv, u\rangle = \int_\Omega \int_\Omega K(y,x)v(x)u(y)dxdy + \int_\Omega b(y)v(y)u(y)dy.$$

Logo, L é um operador simétrico, ou autoadjunto em $L^2(\Omega)$. Sabemos que $\tilde{\sigma}(L) \subset [m_0, m]$, onde

$$m_0 = \inf_{u \in L^2(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\langle Lu, u\rangle}{\int_\Omega u^2 dx} \text{ e } m = \sup_{u \in L^2(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\langle Lu, u\rangle}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

Além disso, $m_0, m \in \tilde{\sigma}(L)$ (ver Proposição A.20). É claro que $m = \sup \tilde{\sigma}(L)$. Note que m é dado por

$$m = \sup_{u \in L^2(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u(x)u(y)dxdy + \int_\Omega b(x)u^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$$

Da positividade do núcleo K, m pode ser dada por

$$m = \sup_{0 \le u \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega \times \Omega} K(x,y)u(x)u(y)dxdy + \int_\Omega b(x)u^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$$

Vamos comparar m com outra constante:

$$r(L) = \sup \{\lambda \in \mathbb{R}; \exists \phi > 0, \phi \in X \text{ tal que } L\phi \ge \lambda\phi\}.$$

$r(L)$ é chamado autovalor principal ou primeiro autovalor de L. Frequentemente o primeiro autovalor de um operador é denotado por λ_1, e o faremos sempre que necessário.

Agora, vamos começar com o

Lema 1.3. *Para $M = \sup_{x \in \overline{\Omega}} b(x)$, temos*

(1) $m \ge M$;

(2) $r(L) \le m$.

Demonstração. Seja $\lambda < M$, então $A = \{x \in \Omega; b(x) > \lambda\}$ é um conjunto aberto em Ω e então $|A| > 0$. Fixe qualquer v não-nulo, com $v \in X$ tal que $v \ge 0$ em Ω e $v = 0$ fora de A, e observe que

$$\begin{aligned} m &\ge \frac{\int_{\Omega \times \Omega} K(x,y)v(x)v(y)dxdy + \int_\Omega b(x)v^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx} \\ &\ge \frac{\int_A b(x)v^2 dx}{\int_A v^2 dx} \ge \frac{\lambda \int_A v^2 dx}{\int_A v^2 dx} = \lambda. \end{aligned}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ e tomando $\lambda = M - \epsilon < M$, segue que $m \ge M - \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \to 0$, segue que $m \ge M$. Com isso, mostramos o item (1).

Para verificar (2), dado qualquer $\epsilon > 0$, fixe $\lambda > r(L) - \epsilon$ tal que existe $\phi \in X, \phi > 0$ tal que $L\phi \ge \lambda\phi$. Então

$$\begin{aligned} m &\ge \frac{\int_{\Omega \times \Omega} K(x,y)\phi(x)\phi(y)dxdy + \int_\Omega b(x)\phi^2 dx}{\int_\Omega \phi^2 dx} \\ &= \frac{\int_\Omega L\phi(x)\phi(x)dx}{\int_\Omega \phi^2 dx} \ge \frac{\int_\Omega \lambda\phi(x)^2 dx}{\int_\Omega \phi^2 dx} = \lambda > r(L) - \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos $r(L) \le m$. □

Lema 1.4. *Suponha que $w \in L^2(\Omega)$ é tal que*

$$m = \frac{\int_{\Omega \times \Omega} K(x,y)w(x)w(y)dxdy + \int_\Omega b(x)w^2 dx}{\int_\Omega w^2 dx}.$$

Então $Lw = mw$, isto é, m é o autovalor máximo de L. Além disso, como Ω é um conjunto conexo, $m > b(x)$ e devemos ter $w > 0$ em Ω ou $w < 0$ em Ω (w não pode mudar seu sinal).

Demonstração. Agora vamos mostrar que $Lw = mw$. De fato, temos $\langle Lw, w\rangle = m\int_\Omega w^2 dx$ e, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $v \in L^2(\Omega)$:

$$\langle L(w+tv), w+tv\rangle \leq m\int_\Omega (w+tv)^2 dx$$

isto é,

$$\langle Lw, w\rangle + 2t\langle Lw, v\rangle + t^2\langle Lv, v\rangle \leq m\int_\Omega w^2 dx + 2mt\int_\Omega wv dx + mt^2\int_\Omega v^2 dx$$

donde,

$$\langle Lw, w\rangle + 2t\langle Lw, v\rangle + t^2\langle Lv, v\rangle \leq \langle Lw, w\rangle + 2mt\int_\Omega wv dx + mt^2\int_\Omega v^2 dx,$$

que implica,

$$\langle Lw, v\rangle + \frac{t}{2}\langle Lv, v\rangle \leq m\int_\Omega wv dx + \frac{mt}{2}\int_\Omega v^2 dx, \text{ se } t > 0.$$

e

$$\langle Lw, v\rangle + \frac{t}{2}\langle Lv, v\rangle \geq m\int_\Omega wv dx + \frac{mt}{2}\int_\Omega v^2 dx, \text{ se } t < 0.$$

Passando ao limite com $t \longrightarrow 0$ concluímos que $\langle Lw, v\rangle = m\int_\Omega wv dx = \langle mw, v\rangle$, para todo $v \in L^2(\Omega)$, isto é, $Lw = mw$.

Agora provamos que se $w \neq 0$ e $w \geq 0$ em Ω devemos ter $m > b(x)$ e $w > 0$ em Ω.

Com efeito, tome $C = w^{-1}(\{0\}) = \{x \in \Omega; w(x) = 0\}$. Não sabemos se w é contínuo em Ω. Observe que C é um conjunto aberto: se $z \in C$ temos de (K_2) que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega\cap\{|y-z|\leq\delta\}} K(z,y)w(y)dy \leq \int_\Omega K(z,y)w(y)dy \\ &= Lw(z) - b(z)w(z) = (m - b(z))w(z) = 0, \end{aligned}$$

que implica que $w(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$ com $|x - z| \leq \delta$, ou seja, $\Omega \cap B_\delta(z) \subset C$, mostrando que C é aberto.

Afirmamos que $m > b(x)$ para todo $x \in \Omega\backslash C$. Com efeito, suponha que temos algum $z \in \Omega\backslash C$ com $m = b(z)$. Usando a última desigualdade acima concluímos que $w(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$ com $|x - z| \leq \delta$, que contradiz $w(z) > 0$. Uma análise simples sobre

$$w(x) = \frac{L_0 w(x)}{m - b(x)}, x \in \Omega\backslash C$$

mostra que w é contínua em $\Omega \backslash C$ e este conjunto é aberto em Ω. Como $\Omega = (\Omega \backslash C) \cup C$ é conexo, ou seja, não admite uma cisão não-trivial e $\Omega \backslash C$ é não-vazio, concluímos que $w > 0$ em Ω, e consequentemente $m > b(x)$ em Ω.

Para completar a prova, será provado que w não muda seu sinal. De fato, se w muda seu sinal, considere os seguintes conjuntos

$$A = \{x \in \Omega; w(x) > 0\} \text{ e } B = \{x \in \Omega; w(x) < 0\},$$

que têm medidas positivas de Lebesgue. É fácil ver que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)w(x)w(y)dxdy &= \int_{A\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy + \int_{B\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy \\ &+ \int_{A\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy + \int_{B\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy\end{aligned}$$

Agora, temos dois casos a considerar. Suponha que $K(x,y)$ é não-nulo em $A \times B$. Sob esta condição, observe que

$$\int_{A\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy = \int_{A\times A} K(x,y)|w(x)||w(y)|dxdy,$$

$$\int_{B\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy = \int_{B\times B} K(x,y)|w(x)||w(y)|dxdy,$$

$$\int_{A\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy < 0 < \int_{A\times B} K(x,y)|w(x)||w(y)|dxdy,$$

e

$$\int_{B\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy < 0 < \int_{B\times A} K(x,y)|w(x)||w(y)|dxdy.$$

Estas desigualdades implicam que

$$\begin{aligned}m &= \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)w(x)w(y)dxdy + \int_\Omega b(x)w^2dx}{\int_\Omega w^2dx} \\ &< \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)|w(x)||w(y)|dxdy + \int_\Omega b(x)|w|^2dx}{\int_\Omega |w|^2dx}\end{aligned}$$

que é impossível, então, neste caso $w \geq 0$ em Ω ou $w \leq 0$ em Ω.

Suponha agora que $K(x,y) \equiv 0$ em $(A \times B) \cup (B \times A)$. Então temos para

$$a_1 = \int_{A\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy + \int_A b(x)w^2dx,$$

$$a_2 = \int_{B\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy + \int_B b(x)w^2dx,$$

$$b_1 = \int_A w^2dx \text{ e } b_2 = \int_B w^2dx$$

que
$$m = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \frac{a_1}{b_1} \leq m \text{ e } \frac{a_2}{b_2} \leq m$$
Note que $a_1 = \langle Lw^+, w^+\rangle$ e $b_1 = \langle w^+, w^+\rangle$, bem como $a_2 = \langle Lw^-, w^-\rangle$ e $b_2 = \langle w^-, w^-\rangle$. Um simples cálculo mostra que $a_1 = mb_1$. De fato, se $a_1 < mb_1$ então

$$m = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} < \frac{mb_1 + mb_2}{b_1 + b_2} = m,$$

o que é um absurdo. Isso implica que $w^+ = \max\{w, 0\}$ satisfaz

$$m = \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)w^+(x)w^+(y)dxdy + \int_B b(x)(w^+)^2dx}{\int_\Omega (w^+)^2dx}$$

e da primeira parte desta prova, devemos ter $w^+ > 0$ em Ω, mas isso contradiz $|B| > 0$. A prova está completa. □

Observação 1.2. *Se em adição às hipóteses do último lema tivermos* $M > \sup\{b(x) : x \in \partial\Omega\}$*, então* $m > M$*. Pois neste caso* M *é atingido em* Ω*, e como pelo Lema 1.4, temos* $m > b(x)$ *em* Ω*, o resultado segue.*

1.5 Resultados do tipo Krein-Rutman

Em análise funcional , o teorema de Krein-Rutman é uma generalização do teorema de Perron-Frobenius para espaços de Banach de dimensão infinita. Foi provado por Kerin e Rutman em 1948. Existem várias versões deste Teorema e muitas aplicações importantes em diversas áreas da Análise. Resultados do tipo Krein-Rutman consistem essencialmente em mostrar a existência de um menor autovalor positivo, λ_1, o qual é simples e isolado. Além disto, que este é o único autovalor positivo que admite autofunção positiva.

Proposição 1.9. *Se* w *é uma autofunção de* L *associada à* m*, então* w *deve ser autofunção positiva (ou negativa). Além do mais,* $\dim Ker(L - mI) = 1$.

Demonstração. Se $Lw = mw$ então $\langle Lw, w\rangle = m\int_\Omega w^2dx$, $w \neq 0$. Da prova do Lema 1.4 concluímos a primeira parte desta prova. Para a segunda parte, suponha que temos duas autofunções w, ϕ associadas à m linearmente independentes. Sem perda de generalidade podemos supor que $\int_\Omega w\phi dx = 0$, devido ao processo de Orotogonalização de Gram-Schimdt. Mas isso não é possível, pois podemos supor w e ϕ ambos positivos em Ω, e então $\int_\Omega w\phi dx > 0$. Este absurdo conclui a prova. □

Podemos mostrar que $m > M$ se, e somente se, o supremo m é atingido.

Lema 1.5. *Se* $m > M$*, então* m *é um autovalor com uma autofunção positiva* ϕ *e o supremo* m *é atingido. Além disso,* $m = r(L)$*.*

Demonstração. De fato, $m \in (M, \infty) \cap \sigma(L)$, e do Lema 1.2 parte (1), m é um autovalor de L, com uma autofunção ϕ, e o supremo m é atingido. Do Lema 1.4, ϕ deve ser positivo. Para a segunda parte, veja que a existência da autofunção $\phi > 0$ dada acima tal que $L\phi = m\phi$, implica que $m \leq r(L)$ e da desigualdade do Lema 1.3 parte (2) segue que $m = r(L)$. □

Vamos introduzir uma hipótese para obter a desigualdade estrita $m > M$.

Suponha que existem $\delta > 0$, $x_0 \in \Omega$ e uma função c tal que

(b_1) $M - b(x) \leq c(x)$ para todo $x \in B = B_\delta(x_0)$ e $|x - x_0|^{-N} c(x) \in L^1(B)$.

Lema 1.6. *A condição (b_1) implica que $m > M$.*

Demonstração. Primeiro observe que

$$\int_B c(x)dx \leq \delta^{2N} \int_B \frac{c(x)}{|x - x_0|^{2N}} dx = \frac{|B|^2}{\omega_N^2} \int_B \frac{c(x)}{|x - x_0|^{2N}} dx,$$

onde $w_N = \int_{|s|=1} ds$.

Considere $u(x) = 1$ para $x \in B = B_\delta(x_0)$, e $u = 0$ fora de B. Seja $\sigma \leq K(x, y)$, para todo $x, y \in B$, para alguma $\sigma \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned} m &\geq \frac{\int_{\Omega \times \Omega} K(x, y)u(x)u(y)dxdy + \int_\Omega b(x)u^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} \\ &\geq \frac{\sigma|B||B| + M|B| - \int_B c(x)dx}{|B|} \\ &\geq M + |B| \left(\sigma - \frac{1}{\omega_N^2} \int_\Omega \frac{c(x)}{|x - x_0|^{2N}} dx \right) > M, \end{aligned}$$

para uma escolha conveniente de δ pequeno. □

Teorema 1.10. *Sob a condição (b_1), o problema do autovalor*

$$L_0 u + b(x)u = \lambda u,$$

tem um único autovalor $r(L)$ com autovetor que não muda seu sinal e tal que $\dim Ker(L - r(L)I) = 1$*. Além disso, $r(L) = \sup \sigma(L)$.*

Demonstração. Segue diretamente usando os Lemas 1.6 e 1.5, respectivamente. □

Corolário 1.11. *O problema do autovalor*

$$L_0 u = \lambda u, \ \text{em } \Omega,$$

tem um único autovalor $\lambda_1 > 0$ tal que $dim Ker(L_0 - \lambda_1 I) = 1$, cada autofunção é contínua e com sinal definido. Além disso, $\lambda_1 = \sup \sigma(L_0)$, onde $\sigma(L_0)$ é o espectro do operador integral L_0.

Agora, antes de provar nosso próximo resultado, é necessário lembrar que as suposições sobre K implicam que para cada $u \in X$, com $u \geq 0$ em Ω, apenas uma das possibilidades abaixo vale:

$$L_0 u > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \text{ ou } u \equiv 0 \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Portanto, temos o seguinte lema:

Lema 1.7. *Suponha que $u \in X$, $u \geq 0$, $u \neq 0$ em Ω e $c(x)$ dada por $L_0 u = c(x)u$, então $||c||_\infty \geq \lambda_1$. Essa desigualdade se torna igualdade quando $c(x) \equiv \lambda_1$.*

Demonstração. Considere φ_1 uma autofunção positiva associada à λ_1. Portanto, $L_0\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ e

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega uL_0\varphi_1 dx = \int_\Omega \varphi_1 L_0 u dx = \int_\Omega c(x)u\varphi_1 dx \leq ||c||_\infty \int_\Omega u\varphi_1 dx.$$

Como $\int_\Omega u\varphi_1 dx > 0$ a desigualdade leva à $||c||_\infty \geq \lambda_1$. Para a segunda parte, suponha que $||c||_\infty = \lambda_1$, mas que não vale $c(x) \equiv \lambda_1$. Então existe $B \subset \Omega$ tal que $\lambda_1 - c(x) > 0$ em B. Daí

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega c(x)u\varphi_1 dx &= \int_B c(x)u\varphi_1 dx + \int_{\Omega\setminus B} c(x)u\varphi_1 dx \\ &< \int_B \lambda_1 u\varphi_1 dx + \lambda_1 \int_{\Omega\setminus B} u\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx,\end{aligned}$$

o que é um absurdo. $\square$

Lema 1.8 (Regularidade)**.** *Seja $u \in L^1(\Omega)$ uma função não-negativa e $c \in X$ satisfazendo*

$$L_0 u(x) = c(x)u(x) \text{ q.s. em } \Omega.$$

Então, se $u \neq 0$ temos que u é contínua e positiva em $\overline{\Omega}$. Além disso, c é positivo em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Claramente $L_0 u \in X$ e daí, $c(x)u \in X$. Considere os seguintes conjuntos:

$$V = \left\{x \in \overline{\Omega};\ \text{existe uma bola B centrada num ponto } x \text{ tal que } u \equiv 0 \text{ q.s. em } B \cap \Omega\right\}$$

e $W = \left\{x \in \overline{\Omega}; L_0 u(x) > 0\right\}$. Ambos subconjuntos V e W são abertos em $\overline{\Omega}$. Agora mostraremos que $W \cap V = \emptyset$ e $V = \overline{\Omega}\setminus W$.

De fato, se $z \notin W$ temos $L_0 u(z) = 0$. Assim,

$$0 = L_0 u(z) = \int_\Omega K(z,y)u(y)dy \geq \int_{\Omega\cap B_\delta(z)} K(z,y)u(y)dy,$$

desde que $K(z,y) > 0$ para todo $|z-y| \leq \delta$, temos $u(y) = 0$ *q.s.* em $B_\delta(z) \cap \Omega$, isto é, $z \in V$. Como Ω é conexo, devemos ter $V = \emptyset$ e $W = \overline{\Omega}$. Além disso, c é positivo e $u(x) = \dfrac{L_0 u(x)}{c(x)}$ é contínuo e positivo em $\overline{\Omega}$. $\square$

Lema 1.9 (Regularidade)**.** *Se $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz e é crescente com respeito à variável $t \in \mathbb{R}$ e $u \in L^\infty(\Omega)$ verificando*

$$L_0 u(x) = g(x, u(x)) \textit{ para todo } x \in \Omega,$$

então $u \in X$.

Demonstração. Sabemos que $v(x) = L_0 u(x)$ é uma função contínua em $x \in \overline{\Omega}$, porque L_0 é um operador linear compacto, com núcleo K contínuo. Fixe $x_0 \in \overline{\Omega}$ e consideramos $(x_n) \subset \overline{\Omega}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Daí, como $|u(x_n)| \leq ||u||_\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por Bolzano-Weierstrass, existe $(u(x_{n_k})) \subset (u(x_n))$ subsequência convergente, digamos que

$$u(x_{n_k}) \longrightarrow s \in [-||u||_\infty, ||u||_\infty].$$

Portanto, como $v(x_{n_k}) = L_0 u(x_{n_k}) = g(x_{n_k}, u(x_{n_k}))$ tomando o limite de $k \longrightarrow \infty$, temos $v(x_0) = g(x_0, s)$. Por outro lado,

$$g(x_0, u(x_0)) = L_0 u(x_0) = v(x_0) = g(x_0, s).$$

Portanto, como g é crescente temos $s = u(x_0)$, isto é, $u(x_{n_k}) \longrightarrow u(x_0)$ em X. Portanto, $u \in X$. $\square$

Lema 1.10. *Se $g(x) > \lambda_1$ em Ω, então $L_0 u = g(x) u$ não adimte uma solução positiva.*

Demonstração. Suponha que $L_0 u = g(x) u$ admite uma solução positiva u e considere φ_1 uma autofunção positiva associada à λ_1. Então,

$$\lambda_1 \int_\Omega u \varphi_1 dx = \int_\Omega u L_0 \varphi_1 dx = \int_\Omega \varphi_1 L_0 u dx = \int_\Omega g(x) u \varphi_1 dx,$$

isto é,

$$\int_\Omega (g(x) - \lambda_1) u \varphi_1 dx = 0,$$

como $u\varphi_1 > 0$ temos $g(x) - \lambda_1 = 0$, que é um absurdo. $\square$

Perceba que na teoria até aqui apresentada enunciamos condições para existência de soluções para o problema do autovalor principal $Lu = \lambda u$ e estudamos também algumas características destas soluções. O próximo capítulo trata de problemas mais gerais e expõe um método muito útil para garantir a existência de solução para muitas equações integrais, o método de sub-supersolução.

Capítulo 2

O Método de sub-supersolução

O método de sub e supersolução tem desempenhado um papel importante no estudo de problemas de contorno para equações diferenciais parciais elípticas não lineares. São utilizadas para estudar problemas de Dirichlet e/ou problemas de valor de fronteira de Neumann para problemas elípticos semilineares e também para sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares. Ver [4], [8] e [29] para maiores detalhes. Antes de apresentar o método de sub-supersolução, apresentamos o princípio do máximo, que é uma ferramenta indispensável à este método. Como o operador Laplaciano, o operador integral possui um princípio do máximo importante.

2.1 Um Princípio do Máximo

A função $k : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$k(x) = \int_{\Omega} K(x,y)dy,$$

é muito importante para o princípio de máximo apresentado aqui.

Lembrando que K é a função núcleo dada no capítulo anterior satisfazendo as condições (K_1) e (K_2), isto é, K é simétrico e positivo numa faixa da diagonal de $\Omega \times \Omega$,

Observação 2.1. *É fácil ver que*

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)v(y)^2 dxdy = \int_{\Omega} k(x)v(x)^2 dx,$$

e

$$\langle L_0 v, v\rangle \leq ||k||_\infty ||v||_2^2,$$

e como K é simétrico, também temos que

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)\left[v(x)-v(y)\right]^2 dxdy = 2\int_{\Omega} k(x)v(x)^2 dx - 2\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)v(x)v(y)dxdy.$$

O lema abaixo apresenta uma relação interessante entre o autovalor principal de L_0 e a função k.

Lema 2.1. *Seja λ_1 o autovalor principal de L_0. Então, $\lambda_1 \equiv k(x)$ ou $||k||_\infty > \lambda_1 > \inf_{x\in\overline{\Omega}} k(x)$.*

Demonstração. De fato, $\langle L_0\phi_1, 1\rangle = \langle \phi_1, L_0 1\rangle$ pela simetria de L_0, assim

$$\lambda_1 \int_\Omega \phi_1(x)dx = \int_\Omega k(x)\phi_1(x)dx,$$

daí,

$$\int_\Omega (\lambda_1 - k(x))\phi_1(x)dx = 0.$$

Então, ou $\lambda_1 \equiv k(x)$ ou o integrando muda de sinal. Se o integrando muda de sinal, existem $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$, tais que

(1) $(\lambda_1 - k(x))\phi_1(x) > 0$ em $\Omega_1 \Longrightarrow \lambda_1 > k(x)$ em Ω_1,

(2) $(\lambda_1 - k(x))\phi_1(x) < 0$ em $\Omega_2 \Longrightarrow \lambda_1 < k(x)$ em Ω_2,

lembrando que $\phi_1 > 0$ em Ω. De (1) segue que $\lambda_1 > \inf_{x\in\overline{\Omega}} k(x)$. De (2) segue que $||k||_\infty > \lambda_1$ e a prova está concluída. □

Lema 2.2 (Princípio do Máximo)**.** *Suponha que K satisfaz (K_1), (K_2) e Ω é um conjunto aberto conexo. Seja $u \in X$ verificando*

$$L_0 u - c(x)u(x) \le 0,$$

para todo $x \in \Omega$, onde c é uma função limitada satisfazendo $c(x) > k(x)$ q.t.p. em Ω. Então $u > 0$ ou $u \equiv 0$ em Ω.

Demonstração. Seja $u^-(x) = \min\{u, 0\}$. Note que $u^-(x) \le 0$, para todo $x \in \Omega$. Além disso $u = u^+ + u^-$. Como $L_0 u - c(x)u \le 0$, multiplicando por u^- e integrando sobre Ω, temos

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega K(x,y)u(y)dy - c(x)u(x) \right) u^-(x)dx \ge 0$$

isto é,

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u(y)u^-(x)dydx \ge \int_\Omega c(x)u(x)u^-(x)dx$$

ou seja,

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u(y)u^-(x)dydx \ge \int_\Omega c(x)u^-(x)^2dx$$

daí,

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^+(y)u^-(x)dydx + \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^-(y)u^-(x)dydx \ge \int_\Omega c(x)u^-(x)^2dx.$$

Como $\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^+(y)u^-(x)dydx \leq 0$, temos

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^-(y)u^-(x)dydx \geq \int_\Omega c(x)u^-(x)^2dx.$$

Da Observação 2.1, temos que

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)\left[u^-(x)-u^-(y)\right]^2 dydx = 2\int_\Omega k(x)u^-(x)^2dx - 2\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^-(x)u^-(y)dydx.$$

Daí, segue que

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)\left[u^-(x)-u^-(y)\right]^2 dydx + \int_\Omega k(x)u^-(x)^2dx \geq \int_\Omega c(x)u^-(x)^2dx$$

ou seja,

$$0 \geq -\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)\left[u^-(x)-u^-(y)\right]^2 dydx \geq \int_\Omega \left[c(x)-k(x)\right]u^-(x)^2dx \geq 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \left[c(x)-k(x)\right]u^-(x)^2dx = 0,$$

portanto, $[c(x)-k(x)]\,u^-(x)^2 = 0$ em Ω. Como $c(x)-k(x) > 0$ $q.t.p$ em Ω, devemos ter $u^- \equiv 0$ em Ω, isto é, $u \geq 0$ em Ω.

Mostremos que ou $u \equiv 0$ ou $u > 0$ em Ω. De fato, se $u(x_1) = 0$ para algum $x_1 \in \Omega$, então

$$L_0u(x_1) - c(x_1)u(x_1) \leq 0$$

isto é,

$$0 \leq L_0u(x_1) \leq 0$$

donde,

$$\int_\Omega K(x_1,y)u(y)dy = 0,$$

que implica que $u \equiv 0$ em uma vizinhança de x_1. Um argumento padrão de conexidade garante $u \equiv 0$ em Ω. Além disso, como u é contínua, então $u \geq 0$ em Ω implica que $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Mais ainda, se $u(x_1) = 0$ para algum $x_1 \in \partial\Omega$, então $u \equiv 0$ em uma vizinhança de x_1 em $\overline{\Omega}$, e sendo $\overline{\Omega}$ conexo, segue que $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. □

Observação 2.2. *Como um corolário para o Princípio do Máximo, se $w \in X$ verifica $L_0w - c(x)w = 0$, em Ω então $w \equiv 0$. De fato, se $L_0w - c(x)w = 0$, então $L_0w - c(x)w \leq 0$ e $L_0w - c(x)w \geq 0$, e do princípio do máximo, temos respectivamente $w \equiv 0$ ou $w > 0$ e $w \equiv 0$ ou $w < 0$ em Ω, que implica em $w \equiv 0$. Assim, para cada $f \in L^2(\Omega)$, o problema $L_0u - c(x)u = f$ em Ω admite um única solução $u \in X$ (ver Lema A.2).*

2.2 O Método de sub-supersolução

É bem conhecido que o método de sub-supersolução tem sido amplamente utilizado em equações de reação-difusão com termo não-local que surgem em dispersão da população ou de organismos no contexto de modelos biológicos. Aqui vamos colocar uma generalização desses resultados para equações de reação-difusão para operadores de reação-dispersão sem hipótese de monotonicidade. Para este propósito, consideramos a seguinte equação

$$L_0 u = f(x,u) \text{ em } \Omega \qquad\qquad (P)$$

onde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz.

Primeiro damos a definição de sub e supersolução para o sistema acima.

Definição 2.1. *Uma função positiva $\overline{u} \in X$ é dita ser uma supersolução de (P) se*

$$L_0 \overline{u} \leq f(x, \overline{u}) \text{ em } \Omega.$$

Uma subsolução $\underline{u}$ é definida semelhantemente invertendo a desigualdade.

Lema 2.3. *Suponha que (P) tem uma supersolução positiva $\overline{u}$ e uma subsolução positiva $\underline{u}$ definida em Ω tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$. Além do mais, suponha que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz, no sentido que exite um $\beta_0 > 0$ tal que*

$$|f(x,s) - f(x,t)| \leq \beta_0 |s-t|, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}, s,t \in [-|\underline{u}|, |\overline{u}|].$$

Então (P) tem uma solução $u \in X$ satisfazendo $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$.

Demonstração. Defina $\Sigma = \{u \in X; \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$. Da Observação 2.2, temos que $L_0 v(x) - \beta v(x) = f(x,v)$ admite, pelo menos, uma solução, desde que $\beta > k(x)$ q.s. em Ω.

Afirmação 2.2. *Como f é Lipschitz, para qualquer $\beta > \beta_0$, a função $s \longmapsto f(x,s) - \beta s$ é decrescente em $[-|\underline{u}|, |\overline{u}|]$ para cada $x \in \Omega$ fixado.*

De fato, para $x \in \Omega$ fixo e dados $s,t \in [-|\underline{u}|, |\overline{u}|]$ com $s < t$, temos

$$\begin{aligned} f(x,s) - \beta s - f(x,t) + \beta t &= f(x,s) - f(x,t) + \beta(t-s) \\ &\geq -|f(x,s) - f(x,t)| + \beta(t-s) \\ &\geq -\beta_0 |s-t| + \beta(t-s) \\ &\geq \beta_0 (s-t) + \beta_0 (t-s) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x,s) - \beta s > f(x,t) - \beta t,$$

o que mostra que a função $s \longmapsto f(x,s) - \beta s$ é decrescente em $[-|\underline{u}|, |\overline{u}|]$.

Agora, da Observação 2.2, para cada $u \in X$ o problema

$$L_0 v(x) - \beta v(x) = f(x, u(x)) - \beta u(x), \text{ para todo } x \in \Omega$$

admite pelo menos uma solução $v \in X$.

Em seguida, se $w_1, w_2 \in \Sigma$ são tais que $w_1 \leq w_2$, então

$$f(x, w_2(x)) - \beta w_2(x) \leq f(x, w_1(x)) - \beta w_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

E tomando $v_1, v_2 \in X$ tais que

$$L_0 v_1(x) - \beta v_1(x) = f(x, w_1(x)) - \beta w_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega$$

e

$$L_0 v_2(x) - \beta v_2(x) = f(x, w_2(x)) - \beta w_2(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

isso implica que,

$$L_0 v_2(x) - \beta v_2(x) \leq L_0 v_1(x) - \beta v_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

isto é,

$$L_0(v_2(x) - v_1(x)) - \beta(v_2(x) - v_1(x)) \leq 0, \text{ para todo } x \in \Omega,$$

e do Princípio do Máximo, temos $v_1(x) \leq v_2(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Consideramos a sequência $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ dada por

$$L_0 u_1(x) - \beta u_1(x) = f(x, \overline{u}(x)) - \beta \overline{u}(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

$$L_0 u_2(x) - \beta u_2(x) = f(x, u_1(x)) - \beta u_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

e

$$L_0 u_n(x) - \beta u_n(x) = f(x, u_{n-1}(x)) - \beta u_{n-1}(x) \text{ para todo } x \in \Omega,$$

que é uma sequência monótona decrescente.

Similarmente, também obtemos outra sequência $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ por

$$L_0 v_1 - \beta v_1(x) = f(x, \underline{u}(x)) - \beta \underline{u}(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

$$L_0 v_2(x) - \beta v_2(x) = f(x, v_1(x)) - \beta v_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

e

$$L_0 v_n(x) - \beta v_n(x) = f(x, v_{n-1}(x)) - \beta v_{n-1}(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

que é uma sequência monótona crescente.

De fato, como

$$L_0 u_1 - \beta u_1 = f(x, \overline{u}) - \beta \overline{u}$$

e $\overline{u}$ é supersolução de (P), segue que

$$L_0u_1 - \beta u_1 \geq L_0\overline{u} - \beta\overline{u}$$

ou seja,

$$L_0(\overline{u} - u_1) - \beta(\overline{u} - u_1) \leq 0,$$

e pelo Princípio do Máximo, segue que $u_1 \leq \overline{u}$. Por outro lado, como

$$L_0v_1 - \beta v_1 = f(x, \underline{u}) - \beta\underline{u},$$

e $\underline{u}$ é subsolução de (P), segue que

$$L_0v_1 - \beta v_1 \leq L_0\underline{u} - \beta\underline{u},$$

isto é,

$$L_0(v_1 - \underline{u}) - \beta(v_1 - \underline{u}) \leq 0,$$

e pelo Princípio do Máximo, segue que $\underline{u} \leq v_1$. Além do mais, como $\underline{u} \leq \overline{u}$, pela propriedade inicial, segue que $v_1 \leq u_1$, e juntando com as duas desigualdades acima, temos que $\underline{u} \leq v_1 \leq u_1 \leq \overline{u}$. Além disso, usando a propriedade inicial n vezes, temos

$$\overline{u} \leq v_1 \leq ... \leq v_n \leq u_n \leq ... \leq u_1 \leq \overline{u},$$

então existe funções u^*, v^* tal que

$$u^*(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \text{ e } v^*(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) \text{ ponto a ponto em } \Omega.$$

Segue que $\underline{u} \leq v^* \leq u^* \leq \overline{u}$. Pelo Teorema de Dini, segue que $u^*, v^* \in X$ e a convergência é uniforme, isto é, $u_n \longrightarrow u^*$ em X e $v_n \longrightarrow v^*$ em X. Como o operador L_0 é linear e compacto, temos que $L_0u_n \longrightarrow L_0u^*$ em X e $L_0v_n \longrightarrow L_0v^*$ em X.

Devido à continuidade de f, temos

$$\lim_{n\to\infty} [f(x, u_n(x)) + \beta u_n(x)] = f(x, u^*(x)) + \beta u^*(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} [f(x, v_n(x)) + \beta v_n(x)] = f(x, v^*(x)) + \beta v^*(x).$$

Uma vez que

$$L_0u_n(x) - \beta u_n(x) = f(x, u_{n-1}(x)) - \beta u_{n-1}(x) \text{ para todo } x \in \Omega,$$

e

$$L_0v_n(x) - \beta v_n(x) = f(x, v_{n-1}(x)) - \beta v_{n-1}(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

fazendo $n \to \infty$, temos

$$L_0 u^*(x) - \beta u^*(x) = f(x, u^*(x)) - \beta u^*(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

$$L_0 v^*(x) - \beta v^*(x) = f(x, v^*(x)) - \beta v^*(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

isto é, u^* e v^* são soluções do problema (P) e a prova está concluída.

$\square$

Capítulo 3

Existência de solução para um modelo de dispersão não-local com termo não-local via teoria da bifurcação

Neste capítulo estudamos a existência de solução positiva para a seguinte equação

$$L_0 u = u\left(\lambda - \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy\right) \text{ em } \Omega, \qquad (P)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio suave limitado, $p > 0$, λ é um parâmetro real, $Q : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-negativa com $Q \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ verificando algumas hipóteses que serão detalhadas abaixo, lembrando que $X = C(\overline{\Omega})$ e $L_0 : X \longrightarrow X$ é o operador de dispersão não-local dado como antes, isto é

$$L_0 u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy \text{ para } u \in X, \qquad (1)$$

com um núcleo de dispersão K contínuo.

Neste contexto λ é um parâmetro que representa a taxa de crescimento intrínseca da espécie, e o termo não local

$$\int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy$$

pode ser interpretado como uma média ponderada de u em todo o domínio. A presença do termo não-local na equação (P) significa, do ponto de vista biológico, que o efeito de aglomeração depende não apenas de seu próprio ponto no espaço, mas também depende de toda a população em um habitat N-dimensional Ω.

Neste capítulo, nosso principal objetivo é mostrar a existência de solução para (P) via resultado de bifurcação global devido a Rabinowitz [51]. Aqui vamos estudar a existência de uma solução positiva para a equação (P), sem condição de fronteira, supondo que K satisfaça:

(K_1) $K(x,y) = K(y,x)$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$;

(K_2) Existe $\delta > 0$ tal que $K(x,y) > 0$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ e $|x-y| \leq \delta$;

e supondo que Q seja uma função contínua que satisfaça:

(Q_1) $Q \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ e $Q(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in \Omega$;

(Q_2) $Q(x,y) \geq \sigma$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ e para algum $\sigma > 0$.

Se a desigualdade acima não funcionar para todo x, y em Ω, podemos considerar uma hipótese mais fraca para Q, qual seja,

(Q_2') Existem $r, \sigma > 0$ tal que $Q(x,y) \geq \sigma$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ e $|x-y| \leq r$.

Será bastante usada também a condição abaixo:

(Q_2'') Se w é mensurável e $\int_{\Omega\times\Omega} Q(x,y)|w(y)|^p|w(x)|^2 dxdy = 0$, então $w = 0$ $q.s.$ em Ω.

As condições (K_1) e (K_2) acima são hipóteses usualmente consideradas no operador L_0, como vimos no capítulo anterior.

É importante destacar que a hipótese (Q_2') implica na condição (Q_2''). De fato, suponha que $w \neq 0$ $q.s.$ em Ω. Daí, existe $\epsilon > 0$ tal que o conjunto $E = \{x \in \Omega; |w(x)| \geq \epsilon\}$ tem medida positiva. Sem perda de generalidade, vamos supor que $diamE < r$. Daí, temos

$$\int_{E\times E} Q(x,y)|w(y)|^p|w(x)|^2 dxdy \geq \sigma\epsilon^p\epsilon^2|E||E| > 0.$$

Este absurdo conclui a prova.

Definição 3.1. *Para cada $Q : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos a oscilação de Q em x, uniformemente em y, por*

$$[Q] = \sup_{x,y,z\in\Omega} |Q(x,y) - Q(z,y)|$$

Com as hipóteses acima, teremos nosso primeiro resultado que estabelece a existência de bifurcação. Seu enunciado é o seguinte

Teorema 3.2. *Suponha que $p > 0, [Q] > 0, (K_1) - (K_2)$ e (Q_2) valem. Então o problema (P) tem uma solução positiva para todos $\lambda \in \left[\lambda_1, \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1\sigma}{[Q]}\right]$, onde λ_1 é o autovalor principal de L_0.*

É um corolário da prova do Teorema 3.2 que se $[Q] = 0$ temos solução para todo $\lambda > \lambda_1$. A fim de obter um resultado de bifurcação global, assumiremos a seguinte suposição em Q :

(Q_3) Existem $x_0 \in \overline{\Omega}$ e uma função não-negativa $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $a^{-1} \in L^q(\Omega)$, onde $q = \max\{1, p\}$ e $Q(x_0, y) \geq Q(x, y) + a(x)$ para todos $x, y \in \Omega$.

Note que (Q_3) implica que $Q(x_0, y) \geq Q(x, y)$ para todos $x, y \in \Omega$ e $a(x_0) = 0$. Aqui está um exemplo de uma função Q que satisfaz (Q_3):

$$Q(x, y) = h(y)\,[M - |x - x_1|^{q_1}|x - x_2|^{q_2}...|x - x_k|^{q_k}] + g(y)$$

onde $x_i \in \overline{\Omega}$, $q_i < \frac{N}{p}, M > 0$ é suficientemente grande, h e g são funções contínuas positivas em $\overline{\Omega}$. É possível ver que (Q_3) funciona para x_0 sendo qualquer x_i e $a(x) = m|x - x_1|^{q_1}|x - x_2|^{q_2}...|x - x_k|^{q_k}$ para $m > 0$ suficientemente pequeno.

O próximo resultado garante a existência de uma componente conexa de soluções que contém a solução para nosso problema (P) qualquer que seja $\lambda > \lambda_1$.

Teorema 3.3. *Assuma que $p > 0, (K_1) - (K_2)$ e $(Q_2') - (Q_3)$ valem. Então existe uma componente conexa de soluções positivas de (P) saindo de $\lambda_1 > 0$, com a propriedade que inclui soluções da forma (λ, u) para todo $\lambda > \lambda_1$.*

Na Seção 3.4, sob uma condição mais fraca em Q, podemos resolver o problema para todos $\lambda > \lambda_1$, mas não podemos garantir a existência de uma componente conexa de soluções positivas para (P). Aqui consideramos que Q satisfaz:

(Q_4) Existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $Q(x_0, y) \geq Q(x, y)$ para todos $x, y \in \Omega$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 3.4. *Assuma que $p > 0, (K_1), (K_2), (Q_2')$ e (Q_4) valem. Então, o problema (P) tem uma solução positiva para todo $\lambda > \lambda_1$.*

Na verdade, comentamos no final da Seção 3.4 que temos o mesmo resultado do Teorema 3.4 se Q satisfizer uma condição mais geral do que (Q_4):

(Q_4') Existe uma decomposição $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} E_j$, $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, ..., x_m \in E_m$ tal que $Q(x_j, y) \geq Q(x, y)$ para todo $x \in E_j, y \in \Omega$.

3.1 Construindo a equação de bifurcação

Em toda esta seção, estamos assumindo que K é uma função contínua não-negativa que verifica (K_1) e (K_2). Além disso, para cada $w \in X$, definimos a função $\phi_w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_w(x) = \int_\Omega Q(x, y)|w(y)|^p dy,$$

onde $p > 0$ e Q é uma função contínua satisfazendo (Q_2').

Como Q e w são limitadas, temos que ϕ_w está bem definida.

Observação 3.1. *As propriedades abaixo resultantes da definição serão úteis mais tarde:*

(ϕ_1) $t^p\phi_w = \phi_{tw}$, *para todo* $w \in X$ *e* $t > 0$;

(ϕ_2) $||\phi_w||_\infty \leq ||Q||_\infty ||w||_\infty^p |\Omega|$, *para todo* $w \in X$;

(ϕ_3) $||\phi_w - \phi_v||_\infty \leq ||Q||_\infty |||w|^p - |v|^p||_\infty |\Omega|$, *para todos* $w, v \in X$;

(ϕ_4) $\phi : X \longrightarrow X$, *dado por* $\phi(w) = \phi_w$, *é completamente contínua em* X.

Demonstração. Dado $x \in \Omega$, temos

(ϕ_1) $t^p\phi_w(x) = t^p \int_\Omega Q(x,y)|w(y)|^p dy = \int_\Omega Q(x,y)|tw(y)|^p dy = \phi_{tw}(x)$;

(ϕ_2) Segue diretamente de

$$\phi_w(x) \leq ||Q||_\infty ||w||_\infty^p \int_\Omega dy = ||Q||_\infty ||w||_\infty^p |\Omega|;$$

(ϕ_3) Como

$$|\phi_w(x) - \phi_v(x)| \leq \int_\Omega |Q(x,y)| \left[|w(y)|^p - |v(y)|^p\right] dy \leq ||Q||_\infty |||w|^p - |v|^p||_\infty |\Omega|,$$

o resultado segue;

(ϕ_4) Como ϕ é um operador integral e Q é uma função contínua, seguindo um cálculo análogo ao do Exemplo 1 no Apêndice A, concluímos que ϕ é completamente contínua.

$\square$

A seguir pretendemos provar a existência de solução positiva para (P) usando o Teorema Global da Bifurcação. Tendo isso em mente, é muito importante observar que se (λ, u) é uma solução de (P), então do Lema 1.8, $\lambda > \phi_u(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ (será visto que é uma condição necessária para obter uma solução positiva) e daí

$$L_0 u = (\lambda - \phi_u(x))u \iff u = \frac{L_0 u}{\lambda - \phi_u(x)} \iff u = \lambda^{-1} L_0 u + \frac{\phi_u(x) L_0 u}{\lambda(\lambda - \phi_u(x))}$$

De fato, se $u = \dfrac{L_0 u}{\lambda - \phi_u(x)}$ então,

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1} L_0 u + \frac{\phi_u(x) L_0 u}{\lambda(\lambda - \phi_u(x))} &= \lambda^{-1} L_0 u + \frac{\phi_u(x) u}{\lambda} \\
&= \frac{\lambda\lambda^{-1} L_0 u + \phi_u(x) u}{\lambda} \\
&= \frac{L_0 u + \phi_u(x) u}{\lambda} = \frac{\lambda u}{\lambda} = u
\end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda^{-1}L_0u + \frac{\phi_u(x)L_0u}{\lambda(\lambda-\phi_u(x))} \\
&= \frac{\lambda\lambda^{-1}L_0u(\lambda-\phi_u(x)) + \phi_u(x)L_0u}{\lambda(\lambda-\phi_u(x))} \\
&= \frac{L_0u(\lambda-\phi_u(x)+\phi_u(x))}{\lambda(\lambda-\phi_u(x))} \\
&= \frac{\lambda L_0u}{\lambda(\lambda-\phi_u(x))} = \frac{L_0u}{\lambda-\phi_u(x)},
\end{aligned}
$$

que mostra a segunda equivalência acima. Para $\gamma = \lambda^{-1}$, temos

$$u = \gamma L_0u + \frac{\gamma^2\phi_u(x)L_0u}{1-\gamma\phi_u(x)}$$

ou equivalentemente

$$u = \gamma L_0u + G(\gamma, u),$$

onde $G(\gamma, u) = \dfrac{\gamma^2\phi_u(x)L_0u}{1-\gamma\phi_u(x)}$. Note que G está bem definida nos seguintes conjuntos: $A = \{(\gamma, v) \in (0,\infty)\times X; 1-\gamma\phi_u(x) < 0 \text{ em } \Omega\}$ e $B = \{(\gamma, v) \in (0,\infty)\times X; 1-\gamma\phi_u(x) > 0 \text{ em } \Omega\}$. Por conveniência, vamos considerar G restrito ao conjunto A. Além disso, para cada $0 < a < b$,

$$\lim_{v\to 0} \frac{G(\gamma, v)}{||v||_\infty} = 0, \text{ uniformemente em } \gamma \in [a, b]. \qquad (\mathcal{G})$$

De fato, tomando $||v||_\infty \leq \frac{1}{(2\gamma)^{\frac{1}{p}}||Q||_\infty^{\frac{1}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}}$ e $||v||_\infty < \frac{1}{2}$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{G(\gamma, v)}{||v||_\infty} &= \frac{\gamma^2\phi_v(x)L_0v}{(1-\gamma\phi_v(x))||v||_\infty} \\
&< \frac{\gamma^2\phi_v(x)L_0v}{(1-\gamma||Q||_\infty||v||_\infty^p|\Omega|)||v||_\infty} \\
&< \frac{\gamma^2\phi_v(x)L_0v}{(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{b^2||Q||_\infty||v||_\infty^p|\Omega|||K||_\infty||v||_\infty}{\frac{1}{4}} \to 0 \text{ com } ||v||_\infty \to 0
\end{aligned}
$$

Em seguida, lembramos a definição de operador compacto quando o domínio não é um conjunto fechado. Este tipo de operador desempenha um papel importante em nossa abordagem.

Definição 3.5. *Seja A um conjunto aberto em $(0,\infty)\times X$. Um operador não-linear $G : A \longrightarrow X$ é dito ser compacto se G é contínuo, e para cada $B \subset A$ tal que B é limitado e $dist(B, \partial A)$ é positiva, então $G(B)$ é relativamente compacto em X.*

Observação 3.2. *O operador G é bem definido em*

$$A = \{(\gamma, v) \in (0, \infty) \times X; \gamma ||\phi_v||_\infty < 1\},$$

uma vez que este conjunto coincide com o conjunto A dado mais acima, o que justifica a mesma notação.

Além disso, A é um conjunto aberto que contém $(\lambda_1^{-1}, 0)$. É fácil ver que G é compacto em cada $\overline{U_{\Lambda,\rho,M}}$, onde

$$U_{\Lambda,\rho,M} = \{(\gamma, v) \in (0, \infty) \times X; ||v||_\infty < M, \Lambda^{-1} < \gamma \text{ e } 1 - \gamma||\phi_v||_\infty > \rho\} \text{ e } U_{\Lambda,\rho,M} \subset A.$$

Usando as notações acima, vemos que (λ, u) resolve (P) se, e somente se,

$$L_0 u + \phi_u(x) u = \lambda u,$$

ou equivalentemente, $u = F(\gamma, u) = \gamma L_0 u + G(\gamma, u)$, onde $\gamma = \lambda^{-1}$.

Em seguida vamos aplicar o Teorema 29.1 em Deimiling [30], que é uma versão do bem conhecido Teorema Global de Bifurcação devido à Rabinowitz [51].

Teorema 3.6 (Bifurcação Global)**.** *Seja X um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R} \times X$ uma vizinhança de $(\gamma_0, 0)$, $G : \overline{U} \longrightarrow X$ completamente contínuo e $G(\gamma, u) = o(||u||_X)$ com $u \longrightarrow 0$, uniformemente em γ, em compactos de $\mathbb{R}$. Seja $T \in L(X)$ compacto e γ_0 um valor característico de multiplicidade algébrica ímpar, $F(\gamma, u) = u - \gamma T u + G(\gamma, u)$ e*

$$\Sigma = \{(\gamma, u) \in U; F(\gamma, u) = 0, u \neq 0\}.$$

Então o componente $C = C_\gamma$ de $\overline{\Sigma}$, contendo $(\gamma_0, 0)$ tem pelo menos uma das seguintes propriedades:

(i) $C \cap \partial U \neq \emptyset$.

(ii) *C contém um número ímpar de zeros triviais $(\gamma_i, 0) \neq (\gamma_0, 0)$, onde γ_i é um valor característico de T de multiplicidade algébrica ímpar.*

3.2 Provas dos Teoremas 3.2 e 3.3

Do Capítulo 1, sabemos que existe uma primeira autofunção positiva φ_1 associada à λ_1. Do teorema da bifurcação, existe uma componente conexa fechada $C = C_{\lambda_1^{-1}}$ de soluções para (P) que satisfaz (i) ou (ii). Afirmamos que (ii) não ocorre. Para mostrar esta afirmação, precisamos do lema abaixo:

Lema 3.1. *Existe $\delta > 0$ tal que, se $(\gamma, u) \in C$ com $|\gamma - \lambda_1^{-1}| + ||u||_\infty < \delta$ e $u \neq 0$, então* *u tem sinal definido, isto é,*

$$u(x) > 0, \forall x \in \overline{\Omega} \text{ ou } u(x) < 0, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Demonstração. Caso contrário, existe $\gamma_n \longrightarrow \lambda_1^{-1}$ e $u_n \longrightarrow 0$ tal que u_n muda de sinal. Assim, é suficiente mostrar que para quaisquer duas sequências $(u_n) \subset X$ e $\gamma_n \longrightarrow \lambda_1^{-1}$ com

$$u_n \neq 0, ||u_n||_\infty \longrightarrow 0 \text{ e } u_n = F(\gamma_n, u_n) = \gamma_n L_0 u_n + G(\gamma_n, u_n),$$

u_n tem sinal definido para n suficientemente grande.

Tomando $w_n = \frac{u_n}{||u_n||_\infty}$, temos que $(w_n) \subset X$ e

$$w_n = \gamma_n L_0 w_n + \frac{G(\gamma_n, u_n)}{||u_n||_\infty} = \gamma_n L_0 w_n + o_n(1),$$

onde temos usado $\mathcal{G}$ na última igualdade. Da compacidade do operador L_0 podemos assumir que $(L_0 w_n)$ é convergente para alguma subsequência. Então,

$$w_n \longrightarrow w \text{ em } X,$$

para algum $w \in X$ com $||w||_\infty = 1$. Deste modo,

$$w = \lambda_1^{-1} L_0 w,$$

ou equivalentemente,

$$L_0 w = \lambda_1 w \text{ em } \Omega.$$

Deste modo, $w \neq 0$ é uma autofunção associada com λ_1, e pelo Corolário 1.5,

$$w(x) > 0, \forall x \in \overline{\Omega} \text{ ou } w(x) < 0, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Na sequência, sem perda de generalidade, assumimos que w é positivo em $\overline{\Omega}$. Como w é o limite uniforme de (w_n) em X, devemos ter $w_n > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e n grande o suficiente. Como u_n e w_n tem o mesmo sinal, u_n também é positivo, que é a conclusão desejada. □

Observação 3.3. *É fácil checar que $(\gamma, u) \in \Sigma$ se, e somente se, $(\gamma, -u)$ está também em Σ. Basta ver que $F(\gamma, -u) = -F(\gamma, u)$. Portanto, considerando os conjuntos*

$$C^+ = \{(\gamma, u) \in C : u(x) > 0, \forall x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(\lambda_1^{-1}, 0)\}$$

e

$$C^- = \{(\gamma, u) \in C : u(x) < 0, \forall x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(\lambda_1^{-1}, 0)\},$$

temos

$$C = C^+ \cup C^-. \tag{3.1}$$

Além disso, $C^- = \{(\gamma, u) \in C; (\gamma, -u) \in C^+\}$ *e* $C^+ \cap C^- = \{(\lambda_1^{-1}, 0)\}$.

De fato, fixando

$$C^\pm = \{(\gamma, u) \in C; u^\pm \neq 0\}$$

isto é, $C^\pm$ é o subconjunto de C das funções que mudam o sinal. Como

$$C = C^+ \cup C^- \cup C^\pm,$$

deduzimos que para provar (3.1) é suficiente mostrar que $\overline{C^\pm} = \emptyset$. Supondo por contradição que $\overline{C^\pm} \neq \emptyset$, sabemos que C é um conjunto conexo em $(0, \infty) \times X$ e $C^+ \cup C^-$ é um conjunto fechado não-vazio.

De fato, o limite (λ, u) de uma sequência (λ_n, u_n) em $C^+ \cup C^-$, com $u_n \neq 0$ para n suficientemente grande é tal que $u \geq 0$ em Ω ou $u \leq 0$ em Ω. Se $u \neq 0$, sendo (λ, u) solução do problema, temos que $u > 0$ em Ω ou $u < 0$ em Ω (ver parágrafo mais abaixo), donde $(\lambda, u) \in C^+ \cup C^-$, e se $u = 0$, então $(\lambda, u) = (\lambda_1^{-1}, 0) \in C^+ \cup C^-$ (ver Observação 3.4 abaixo), o que mostra que $C^+ \cup C^-$ é um conjunto fechado.

Como $(C^+ \cup C^-) \cap C^\pm = \emptyset$, devemos ter

$$(C^+ \cup C^-) \cap \overline{C^\pm} \neq \emptyset.$$

Portanto, existe uma solução $(\gamma, u) \in C$ e sequências $(\gamma_n, u_n) \subset C^+ \cup C^-$ e $(s_n, w_n) \subset C^\pm$ tal que

$$\gamma_n, s_n \longrightarrow \gamma \text{ em } \mathbb{R}, u_n \longrightarrow u \text{ em } X \text{ e } w_n \longrightarrow u \text{ em } X.$$

Consequentemente $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ ou $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $u \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Como (γ, u) verifica $u = \gamma L_0 u + G(\gamma, u)$, $L_0 u > 0$ e $G(\gamma, u) \geq 0$, segue que $u > 0$ em $\overline{\Omega}$. Portanto, w_n é positivo para n suficientemente grande, obtendo uma contradição. Deste modo, $\overline{C^\pm} \neq \emptyset$, finalizando a prova de (3.1).

Observação 3.4. *O Lema 1.9 mostra que o componente conexo saindo de* $(\lambda_1, 0)$ *não tem pontos de acumulação da forma* $(\lambda, 0)$ *com* $\lambda > \lambda_1$.

De fato, caso contrário, existiriam sequências $\gamma_n \longrightarrow \lambda$ e $u_n \longrightarrow 0$, com $(\gamma_n, u_n) \in C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $||\phi_{u_n}||_\infty \longrightarrow 0$, donde $\lambda_n - \phi_{u_n}(x) \longrightarrow \lambda$, assim, para n suficientemente grande, teríamos $\lambda_n - \phi_{u_n}(x) > \lambda_1$ que pelo Lema 1.9, (λ_n, u_n) não pode pertencer a esta componente, o que é um absurdo.

Agora, consideramos $U \subset A$ como na Observação 3.1, isto é, $U = U_{\Lambda,\rho,M}$. Então,

Lema 3.2.

$$C^+ \cap \partial U \neq \emptyset.$$

Demonstração. Suponha por contradição que $C^+ \cap \partial U = \emptyset$ (pela simetria de Σ, temos também $C^- \cap \partial U = \emptyset$). Então, do Teorema Global da bifurcação, existe $(\tilde{\gamma}, 0) \in C \subset \overline{\Sigma}$, onde $\tilde{\gamma} \neq \lambda_1^{-1}$ e $\tilde{\gamma}$ é um valor característico de L_0 com multiplicidade algébrica ímpar. Daí, existe $(u_n) \subset X$ e $\gamma_n \longrightarrow \tilde{\gamma}$, tal que

$$u_n \geq 0, u_n \neq 0, ||u_n||_\infty \longrightarrow 0 \text{ e } u_n = F(\gamma_n, u_n).$$

Assim, $L_0 u_n = (\lambda_n - \phi_{u_n}(x))u_n$ e $\phi_{u_n}(x) \longrightarrow 0$ em Ω, onde $\lambda_n = \gamma_n^{-1}$. Além disso, temos que

$$\lambda_n - \phi_{u_n}(x) \longrightarrow \tilde{\gamma}^{-1} > \lambda_1^{-1},$$

donde, segue que

$$\lambda_n - \phi_{u_n}(x) > \lambda_1 \text{ para todo n suficientemente grande},$$

e pelo Lema 1.9, (λ_n, u_n) não pertence a C para n suficientemente grande, isto é, $(\tilde{\gamma}, 0)$ não pode pertencer a esta componente, o que é um absurdo. □

O próximo resultado estabelece mais algumas propriedades das soluções positivas de (P).

Lema 3.3. *Se (γ, u) é uma solução de $u = F(\gamma, u) = \gamma L_0 u + G(\gamma, u)$ com $u > 0$ em Ω, então temos*

$$\gamma \phi_u(x) < 1 \text{ para todos } x \in \overline{\Omega},$$

isto é, $(\gamma, u) \in A = \{(\gamma, v) \in (0, \infty) \times X; \gamma ||\phi_v||_\infty < 1\}$. Isso também afirma que $C^+ \subset A$. Semelhantemente, é fácil mostrar que $C^- \subset A$.

Demonstração. Note que, $u = F(\gamma, u) = \gamma L_0 u + G(\gamma, u)$ é equivalente à $L_0 u + \phi_u(x) u = \lambda u$, onde $\gamma = \lambda^{-1}$ e como $u > 0$ em Ω, então

$$0 < L_0 u = (\lambda - \phi_u(x))u,$$

isso implica

$$\lambda - \phi_u(x) > 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto, $\lambda^{-1}\phi_u(x) < 1$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e daí

$$\gamma \phi_u(x) < 1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

isto é, $(\gamma, u) \in A$. □

Como $\overline{\Omega}$ é um compacto, podemos cobri-lo com um número finito de bolas centradas em alguns pontos de $\overline{\Omega}$ e raio $r > 0$, isto é, existem $x_1, ..., x_m \in \Omega$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\overline{\Omega} = \bigcup (B_{\frac{r}{2}}(x_j) \cap \overline{\Omega}),$$

onde $r > 0$ foi dado na hipótese (Q_2'). O inteiro m aparecerá no próximo lema.

Lema 3.4. *Seja $\Lambda > 0$ e suponha que (λ, u) é tal que $L_0 u + \phi_u(x)u = \lambda u$ para algum $\lambda \in (0, \Lambda]$. Então $||u||_p \leq \left(\frac{m\lambda}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}$, isto é, u é uniformemente limitado em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Pela cobertura acima, considere $E_j = \Omega \cap B_r(x_j)$, daí

$$\sigma \int_{E_j} |u(y)|^p dy \leq \int_{E_j} Q(x_j, y)|u(y)|^p dy \leq \phi_u(x_j),$$

do Lema 3.3,

$$\sigma \int_{E_j} |u(y)|^p dy \leq \lambda.$$

Então, notando que $\Omega = \bigcup_{j=1}^m E_j$, temos

$$\sigma \int_{\Omega} |u(y)|^p dy \leq m\lambda,$$

isto é, $||u||_p \leq \left(\dfrac{m\lambda}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}$. □

Corolário 3.7. *Sob a condição (Q_2), $\phi_v(x) \geq \sigma ||v||_p^p$, para todo $v \in X$, $x \in \overline{\Omega}$.*

Prova do Teorema 3.2.

Demonstração. Se u é uma solução positiva de $L_0 u + \phi_u(x)u = \lambda u$ para algum λ, então $\lambda - \phi_u(x) \geq \lambda_1$ para todo $x \in \Omega$. De fato, seja $x_* \in \overline{\Omega}$ tal que $\phi_u(x_*) \leq \phi_u(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Do Lema 1.7 temos $||\lambda - \phi_u||_\infty > \lambda_1$, por isso

$$\lambda - \phi_u(x_*) > \lambda_1,$$

ou equivalentemente, $\lambda - \lambda_1 > \phi_u(x_*)$. Além disso, do Corolário 3.7

$$\lambda - \lambda_1 > \phi_u(x_*) \geq \sigma ||u||_p^p. \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$\lambda - \phi_u(x) = \lambda - \phi_u(x) + \phi_u(x_*) - \phi_u(x_*)$$

ou

$$\lambda - \phi_u(x) > \lambda_1 - |\phi_u(x) - \phi_u(x_*)|. \tag{3.3}$$

Além disso, de (3.2) temos

$$|\phi_u(x) - \phi_u(x_*)| \leq \int_{\Omega} |Q(x, y) - Q(x_*, y)||u(y)|^p dy \leq [Q]\, ||u||_p^p \leq [Q]\, \frac{(\lambda - \lambda_1)}{\sigma}. \tag{3.4}$$

Note que, se $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1\sigma}{[Q]} - \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$ fixado e pequeno, temos $0 < \lambda - \lambda_1 < \dfrac{\lambda_1\sigma}{[Q]} - \epsilon$. Deste modo, de (3.3) e (3.4), segue que

$$\lambda - \phi_u(x) > \lambda_1 - [Q]\,\frac{(\lambda - \lambda_1)}{\sigma} > \frac{[Q]\,\epsilon}{\sigma},$$

e então,

$$\lambda - \phi_u(x) > \frac{[Q]\,\epsilon}{\sigma} > 0 \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Portanto, com o estudo acima, obtemos que para cada $\epsilon > 0$, existe $\rho > 0$ ($\rho = [Q]\,\epsilon\sigma^{-1}$) tal que $\lambda - ||\phi_u||_\infty \geq \rho$, para todo $\lambda \in \left(\lambda_1, \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1\sigma}{[Q]} - \epsilon\right]$. Além disso, temos

$$|u(x)| \leq \frac{|L_0u(x)|}{\lambda - \phi_u(x)} \leq \frac{|L_0u(x)|}{\rho} \leq \frac{||K||_{p'}}{\rho}||u||_p, \text{ para todo } x \in \Omega,$$

onde temos usado a Desigualdade de Hölder na última desigualdade e $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Do Lema 3.4, $||u||_p$ é limitada, então existe $M > 0$ tal que $||u||_\infty \leq M$.

Reunindo todas as informações acima, para $\epsilon > 0$ fixo, e considerando $\Lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_1\sigma}{[Q]} - \epsilon$ achamos $\rho > 0$ e $M > 0$ tal que, para $U = U_{\Lambda, \frac{\rho}{2}, 2M}$ temos $C^+ \cap \partial U \neq \emptyset$, então temos $(\gamma, u) \in C^+$ e umas das seguintes condições ocorre: $\lambda - ||\phi_u||_\infty = \frac{\rho}{2}$ ou $||u||_\infty = 2M$ ou $\lambda = \Lambda$. Mas temos visto que, sob as condições acima, $\lambda - ||\phi_u||_\infty > \rho$ e $||u||_\infty \leq M$, isto é, devemos ter $\lambda = \Lambda$ e a componente conexa C^+ cruza o hiperplano $\{\lambda\} \times X$ para todo $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$. Completando a prova do Teorema 3.2.

□

Agora estudaremos a bifurcação para todo $\lambda > \lambda_1$. Da mesma forma, como na última prova, queremos encontrar um número positivo $\rho > 0$ tal que, qualquer que seja o número $\Lambda > \lambda_1$, se u é uma solução positiva de $L_0u + \phi_u(x)u = \lambda u$ para algum $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$, então $\lambda - ||\phi_u||_\infty \geq \rho$. Para obter este número, precisamos de mais informações sobre Q e p.

Lema 3.5. *Suponha $p > 0$ e $(Q_2') - (Q_3)$ valem. Então existem $\rho > 0$ e $M > 0$ tal que $\lambda - ||\phi_u||_\infty \geq \rho$ e $||u||_\infty \leq M$ para todo (λ, u) tal que $L_0u + \phi_u(x)u = \lambda u$, $u > 0$ e $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$.*

Demonstração. Para começar, vamos provar primeiro a existência de ρ, depois mostramos a existência de M. Se não houver ρ, então podemos encontrar uma sequência (λ_n, u_n) tal que $L_0u_n + \phi_{u_n}(x)u_n = \lambda_n u_n, u_n > 0, \lambda_n \in (\lambda_1, \Lambda]$, com $\lambda_n \longrightarrow \lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$ para algum λ e $0 < \lambda_n - ||\phi_{u_n}||_\infty < \frac{1}{n}$, ou seja, $||\phi_{u_n}||_\infty \longrightarrow \lambda$. Em seguida, dividimos em dois casos o nosso estudo, a saber $p > 1$ e $p \in (0, 1]$.

Caso 1: $p > 1$. Pelo Lema 3.4, (u_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ e como $p > 1$, existe alguma subsequência de (u_n), ainda denotada da mesma forma, tal que

$u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Como L_0 é um operador linear compacto, da Proposição A.10 (a) segue que $L_0 u_n \longrightarrow L_0 u$ em X, e como ϕ é compacta, temos que (ϕ_{u_n}) é uniformemente convergente, digamos $\phi_{u_n} \longrightarrow v$ em X. A seguir, vamos mostrar que $\phi_{u_n} \longrightarrow \phi_u$ em X, contudo, como ϕ não é linear, o argumento acima não funciona e precisamos usar outros argumentos. Do limite $\phi_{u_n} \longrightarrow v$ em X, sabemos que $\phi_{u_n}(x) \longrightarrow v(x), \forall x \in \Omega$. Agora, como $\lambda_n - \phi_{u_n}(x) > 0$, temos $\lambda - v(x) \geq 0$. Passando ao limite no sentido fraco em $L^p(\Omega)$ em $L_0 u_n + \phi_{u_n}(x) u_n = \lambda_n u_n$, temos o seguinte:

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$, $\forall w \in L^{p'}(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, temos

$$\int_\Omega u_n w dx \longrightarrow \int_\Omega u w dx.$$

Semelhantemente,

$$\int_\Omega w L_0 u_n dx = \int_\Omega u_n L_0 w dx \longrightarrow \int_\Omega u L_0 w dx = \int_\Omega w L_0 u dx.$$

Além disso, $\int_\Omega \phi_{u_n}(x) u_n w dx = \int_\Omega u_n (\phi_{u_n}(x) w) dx \longrightarrow \int_\Omega u v(x) w dx$. Senão, vejamos: Usando o fato que $\phi_{u_n} w \longrightarrow v w$ em X, temos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega u_n (\phi_{u_n}(x) w) dx - \int_\Omega u v(x) w dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega u_n (\phi_{u_n}(x) w) dx - \int_\Omega u v(x) w dx + \int_\Omega u \phi_{u_n}(x) w dx - \int_\Omega u \phi_{u_n}(x) w dx \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega u (\phi_{u_n}(x) w - v(x) w) dx \right| + \left| \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w (u_n - u) dx \right| \\
&\leq ||\phi_{u_n} w - v w||_\infty \left| \int_\Omega u dx \right| + K \left| \int_\Omega w (u_n - u) dx \right| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $n \longrightarrow \infty$ em

$$\int_\Omega w L_0 u_n dx + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) u_n w dx = \lambda_n \int_\Omega u_n w dx$$

temos que

$$\int_\Omega w L_0 u dx + \int_\Omega v(x) u w dx = \lambda \int_\Omega u w dx,$$

ou equivalentemente,

$$\int_\Omega w (L_0 u + v(x) - \lambda u) dx = 0, \forall w \in L^{p'}(\Omega),$$

e pelo Teorema de D'Bois-Reymond, temos que

$$L_0 u = (\lambda - v(x)) u \text{ q.s. em } \Omega.$$

Em seguida consideramos os casos $u \equiv 0$ e $u \neq 0$, e em ambos os casos chegaremos a uma contradição. Isso prova a existência de ρ.

O caso $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$: Neste caso, $u_n \rightharpoonup 0$ em $L^p(\Omega)$, e como $u_n > 0$, temos para $w \equiv 1$, onde claramente $w \in L^{p'}(\Omega)$, segue que

$$||u_n||_1 = \int_\Omega u_n dx = \int_\Omega w u_n dx \longrightarrow 0,$$

donde $u_n \longrightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$ e portanto $L_0 u_n \longrightarrow 0$ em X. Isso produz $u_n \longrightarrow 0$ em $L^p(\Omega)$. De fato, por (Q_3),

$$\lambda_n > \phi_{u_n}(x_0) \geq \phi_{u_n}(x) + a(x)||u_n||_p^p \text{ para todo } x \in \Omega,$$

portanto,

$$\lambda_n - \phi_{u_n}(x) > a(x)||u_n||_p^p, \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Deste, segue que

$$\int_\Omega |u_n(y)|^p dy = \int_\Omega \left[\frac{L_0 u_n(y)}{\lambda_n - \phi_{u_n}(y)}\right]^p dy \leq \frac{||L_0 u_n||_\infty^p}{(||u_n||_p^p)^p} \int_\Omega \frac{1}{a(y)^p} dy,$$

que implica

$$\left(\int_\Omega |u_n(y)|^p dy\right)^{p+1} \leq ||L_0 u_n||_\infty^p \int_\Omega \frac{1}{a(y)^p} dy < \infty.$$

Passando ao limite, e usando o fato que $||L_0 u_n||_\infty \longrightarrow 0$, encontramos $||u_n||_p \longrightarrow 0$. Portanto, $u_n \longrightarrow 0$ em $L^p(\Omega)$. Por isso, $\phi_{u_n} \longrightarrow 0$ em X, que contradiz $||\phi_{u_n}||_\infty \longrightarrow \lambda$.

O caso $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$: Sabemos que $L_0 u = (\lambda - v(x))u$ e do Lema 1.8, $u > 0$ e $\lambda - v(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$. Fazendo $v_n = u_n - u$, temos:

(i) $v_n \rightharpoonup 0$;

(ii) $L_0 v_n = (\lambda_n - \phi_{u_n}(x))u_n - (\lambda - v(x))u$, que implica em

$$L_0 v_n = (\lambda - v(x))(u_n - u) + [\lambda_n - \lambda + v(x) - \phi_{u_n}(x)]\, u_n.$$

Portanto,

$$v_n = \frac{L_0 v_n}{(\lambda - v(x))} + \frac{[\lambda_n - \lambda + v(x) - \phi_{u_n}(x)]}{(v(x) - \lambda)} u_n.$$

Ora, $v_n \longrightarrow 0$ em $L^p(\Omega)$. De fato,

$$\frac{L_0 v_n}{(\lambda - v(x))} \longrightarrow 0 \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}$$

e

$$[\lambda_n - \lambda + v(x) - \phi_{u_n}(x)] \longrightarrow 0 \text{ uniformemente em } \overline{\Omega},$$

donde, lembrando que (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega \left|\frac{\lambda_n - \lambda + v(x) - \phi_{u_n}(x)}{\lambda - v(x)}\right|^p |u_n(x)|^p dx \leq \frac{||\lambda_n - \lambda + v - \phi_{u_n}||_\infty^p}{(\lambda - ||v||_\infty)^p}||u_n||_p^p \longrightarrow 0,$$

e sendo $v_n = u_n - u$, segue que $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Portanto, $\phi_{u_n} \longrightarrow \phi_u$ em X, $||\phi_{u_n}||_\infty \longrightarrow ||\phi_u||_\infty$ e como $\lambda_n - \phi_{u_n}(x) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, temos que $\lambda - \phi_u(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então $\lambda - ||\phi_u||_\infty > 0$, que contradiz $||\phi_{u_n}||_\infty \longrightarrow \lambda$. Isso prova a existência de ρ.

Agora, vamos provar a existência de M. Note que

$$|u(x)| \leq \frac{|L_0 u(x)|}{\lambda - \phi_u(x)} \leq \frac{|L_0 u(x)|}{\rho} \leq \frac{||K||_q}{\rho}||u||_p, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

onde temos usado a desigualdade de Hölder na última desigualdade, com $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Do Lema 3.4, $||u||_p$ é limitada, então existe um $M > 0$ tal que $||u||_\infty \leq M$.

Caso 2: $\mathbf{p} \in (0, 1]$. Como no primeiro caso, podemos assumir que $u_n^p \not\longrightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$, pois caso contrário, teremos $\phi_{u_n} \longrightarrow 0$ em X, que contradiz o limite $||\phi_{u_n}||_\infty \longrightarrow \lambda > 0$. Em seguida, como (u_n^p) é limitado em $L^1(\Omega)$, para alguma subsequência, podemos assumir que $u_n^p \longrightarrow \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, para algum $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, onde $\mathcal{M}(\Omega)$ denota o espaço das medidas finitas positivas em Ω. Deste modo,

$$\int_\Omega \phi u_n^p dx \longrightarrow \int_\Omega \phi d\mu, \forall \phi \in X,$$

e daí

$$\phi_{u_n}(x) = \int_\Omega Q(x,y) u_n^p dy \longrightarrow \int_\Omega Q(x,y) d\mu := v(x), \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Como $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, um simples cálculo dá $v \in X$ e $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Usando o fato que

$$\lambda_n - \phi_{u_n}(x) \geq a(x) \int_\Omega u_n^p dx, \tag{3.6}$$

tomando o limite de $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\lambda - v(x) \geq a(x)W, \forall x \in \overline{\Omega},$$

onde $W = \int_\Omega d\mu > 0$. Aqui sabemos que $W > 0$, porque supomos $u_n^p \not\longrightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$. Como a é uma função não-negativa e $a^{-1} \in L^1(\Omega)$, temos que o conjunto $\mathcal{O} = \{x \in \Omega; a(x) = 0\}$ tem medida nula, assim

$$\lambda - v(x) > 0 \text{ q.s. em } \overline{\Omega}.$$

Afirmação 3.8. *A sequência (u_n) é limitada em $L^1(\Omega)$.*

De fato, assumimos por contradição que $||u_n||_1 \longrightarrow \infty$ e tome $w_n = \dfrac{u_n}{||u_n||_1}$. Usando o fato que (λ_n, u_n) é uma solução de (P), temos

$$L_0 w_n + \phi_{u_n} w_n = \lambda_n w_n,$$

e daí,

$$w_n = \frac{L_0 w_n}{\lambda_n - \phi_{u_n}}.$$

Como (w_n) é limitada em $L^1(\Omega)$, para alguma subsequência, temos que $L_0 w_n \longrightarrow w_*$ em X, consequentemente

$$w_n(x) \longrightarrow \frac{w_*(x)}{\lambda - v(x)} = w(x) \text{ q.s. em } \overline{\Omega}.$$

Da definição de w, vemos que $w \in C(\Omega \backslash \mathcal{O})$ e $w(x) \geq 0$ q.s. em $\overline{\Omega}$. Além disso, temos também

$$|w_n(x)| \leq \frac{||L_0 w_n||_\infty}{\lambda_n - \phi_{u_n}},$$

mas $\lambda_n - \phi_{u_n}(x) \geq a(x) \int_\Omega u_n^p dx$ e que $\int_\Omega |u_n|^p dx \geq \frac{W}{2}$ para n suficientemente grande. Donde, $\lambda_n - \phi_{u_n}(x) \geq a(x)\frac{W}{2}$, para n suficientemente grande. Portanto,

$$|w_n(x)| \leq \frac{2||L_0 w_n||_\infty}{a(x) W} \text{ q.s. em } \overline{\Omega}.$$

Como $a^{-1} \in L^1(\Omega)$, as informações acima garantem, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$w_n \longrightarrow w \text{ em } L^1(\Omega),$$

então $||w||_1 = 1$. Por outro lado, também temos que

$$L_0\left(\frac{u_n}{||u_n||_1^{p+1}}\right) + \phi_{w_n}(x) w_n = \lambda_n \frac{u_n}{||u_n||_1^{p+1}},$$

donde $\phi_{w_n} w_n \longrightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$. Como $w_n \longrightarrow w$ em $L^1(\Omega)$, temos o seguinte:

(i) $\phi_{w_n} \longrightarrow \phi_w$ uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(ii) $w_n \longrightarrow w$ q.s. em $\overline{\Omega}$.

Que implicam em: $\phi_{w_n}(x) w_n(x) \longrightarrow \phi_w(x) w(x)$ q.s. em Ω. Daí, pelo Lema de Fatou's

$$0 \leq \int_\Omega \phi_w w dx \leq \liminf \int_\Omega \phi_{w_n} w_n dx = 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \int_\Omega Q(x,y) w^p(y) w^2(x) dx dy = 0.$$

De (Q_2) temos que $w = 0$, que é um absurdo. Isso prova que (u_n) é limitada em $L^1(\Omega)$. Daí, existe uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que $u_n \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, portanto $L_0 u_n \longrightarrow L_0 u$ e $\phi_{u_n} \longrightarrow \phi_w$ em X, pois são ambos operadores compactos. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ em

$$L_0 u_n = (\lambda_n - \phi_{u_n}) u_n,$$

segue que

$$L_0 u = (\lambda - \phi_u) u.$$

Assim, $\lambda - \phi_u(x) > 0, \forall x \in \overline{\Omega}$, portanto $\lambda - ||\phi_u||_\infty > 0$. Esta contradição encerra a prova. $\square$

Prova do Teorema 3.3

Demonstração. Reunindo todas as informações acima, para todo $\Lambda > \lambda_1$, encontramos $\rho > 0$ e $M > 0$ tal que para $U = U_{\Lambda, \frac{\rho}{2}, 2M}$ temos $C^+ \cap \partial U \neq \emptyset$, portanto temos $(\lambda, u) \in C^+$ e umas das seguintes condições ocorre: $\lambda - ||\phi_u||_\infty = \frac{\rho}{2}$, $||u||_\infty = 2M$ ou $\lambda = \Lambda$. Mas temos visto que, sob as condições acima, $\lambda - ||\phi_u||_\infty > \rho$ e $||u||_\infty \leq M$, isto é, a componente conexa C^+ cruza o hiperplano $\{\Lambda\} \times X$, para todo $\Lambda > \lambda_1$.

Para completar a prova, vamos mostrar a inexistência de solução para $\lambda \leq \lambda_1$. De fato, suponha que (λ, u) satisfaz $u \geq 0, \lambda > 0$ e $L_0 u + \phi_u u = \lambda u$. Então, para todo $v \in L^2(\Omega)$,

$$\langle L_0 u, v \rangle + \langle \phi_u u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle .$$

Tomando $v = \varphi_1$, a autofunção associada à λ_1, temos

$$\langle L_0 u, \varphi_1 \rangle + \langle \phi_u u, \varphi_1 \rangle = \lambda \langle u, \varphi_1 \rangle .$$

Como L_0 é simétrico em $L^2(\Omega)$, segue que

$$\lambda_1 \langle \varphi_1, u \rangle + \langle \phi_u u, \varphi_1 \rangle = \lambda \langle u, \varphi_1 \rangle .$$

Usando o fato de que $\langle \phi_u u, \varphi_1 \rangle > 0$, temos

$$\lambda_1 \langle \varphi_1, u \rangle < \lambda \langle \varphi_1, u \rangle$$

isto é,

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega \varphi_1 u dx < 0,$$

mostrando que $\lambda_1 < \lambda$. $\square$

3.3 Prova do Teorema 3.4.

Nesta seção, fixamos $\lambda > \lambda_1$ e mostramos que o Problema (P) tem uma solução positiva que será um limite uniforme de soluções dadas pelo Teorema 3.3.

Primeiro, considere $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 = \frac{N}{p}$ e defina

$$Q_\epsilon(x,y) = Q(x,y)(2 - a_\epsilon(x))$$

onde

$$a_\epsilon(x) = \begin{cases} |x-x_0|^\epsilon, & se\ |x-x_0| \leq 1, \\ 1, & se\ |x-x_0| \geq 1. \end{cases}$$

Note que, $2Q(x,y) \geq Q_\epsilon(x,y) \geq Q(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in \Omega$ e $Q_\epsilon(x,y) \geq \sigma$ quando $|x-y| \leq r$, e daí, Q_ϵ verifica (Q_2). Além disso, $Q_\epsilon(x_0,y) - Q_\epsilon(x,y) = 2Q(x_0,y) - Q(x,y)(2-a_\epsilon(x)) \geq 2Q(x,y) - Q(x,y)(2-a_\epsilon(x))$, isto é,

$$Q_\epsilon(x_0,y) - Q_\epsilon(x,y) \geq Q(x,y)a_\epsilon(x) \geq \frac{1}{2}Q_\epsilon(x,y)a_\epsilon(x), \forall x, y \in \Omega. \tag{3.7}$$

Relacionado à a_ϵ temos: $0 \leq a_\epsilon(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$. Além disso, $a_\epsilon^{-1} \in L^q(\Omega)$, onde $q = \max\{1, p\}$. De fato,

$$\int_\Omega a_\epsilon(x)^{-p}dx = \int_{\Omega \backslash B_1(x_0)} dx + \int_{\Omega \cap B_1(x_0)} |x-x_0|^{-p\epsilon}dx \leq |\Omega| + \int_{B_1(x_0)} |x-x_0|^{-\epsilon p}dx.$$

Assim,

$$\int_\Omega a_\epsilon(x)^{-p}dx < \infty \iff \int_{B_1(x_0)} |x-x_0|^{-\epsilon p}dx < \infty.$$

Daí, fazendo uma mudança de variável, temos

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^{\epsilon p}}dx = w_N \int_0^1 r^{N-1-\epsilon p}dr = w_N \frac{r^{N-\epsilon p}}{N-\epsilon p} \Big|_0^1 < \infty \iff N - \epsilon p > 0, \text{ i.e. } \epsilon < \frac{N}{p},$$

onde $w_N = \int_{|s|=1} ds$. Portanto, $a_\epsilon^{-1} \in L^q(\Omega)$ para $0 < \epsilon < \frac{N}{p}$.

Consideraremos a seguinte família de problemas auxiliares:

$$L_0 u + \phi_u^\epsilon(x)u = \lambda u, \text{ em } \Omega, \tag{P_ϵ}$$

onde $\phi_u^\epsilon(x) = \int_\Omega Q_\epsilon(x,y)|u(y)|^p dy$.

Lema 3.6. *Suponha que (Q_2') e (Q_4) valem e fixe $\epsilon > 0$. Então, se (λ, u) é uma solução positiva de (P_ϵ) com $\lambda > \lambda_1$ e $u > 0$, temos*

$$\lambda - \phi_u^\epsilon(x) \geq \theta a_\epsilon(x), \text{ para todo } x \in \Omega, \tag{3.8}$$

onde $\theta = \min\{\frac{\lambda_1}{2}, \lambda - \lambda_1\}$.

Demonstração. Note que $(Q_2'), (Q_4)$ e (3.7) implicam em $\phi_u^\epsilon(x_0) \geq \phi_u^\epsilon(x)$, para todo $x \in \Omega$ e,

$$\lambda - \phi_u^\epsilon(x) \geq \phi_u^\epsilon(x_0) - \phi_u^\epsilon(x) \geq a(x) \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy \geq \frac{1}{2} a_\epsilon(x)\phi_u^\epsilon(x). \tag{3.9}$$

Portanto, se $\phi_u^\epsilon(x) \leq \lambda_1$, temos $\lambda - \phi_u^\epsilon(x) \geq \lambda - \lambda_1 \geq (\lambda - \lambda_1)a_\epsilon(x)$. Por outro lado, se $\phi_u^\epsilon(x) > \lambda_1$, de (3.7) temos $\lambda - \phi_u^\epsilon(x) \geq \frac{\lambda_1}{2} a_\epsilon(x)$. Enfim, como $\theta = \min\{\frac{\lambda_1}{2}, \lambda - \lambda_1\}$, temos que

$$\lambda - \phi_u^\epsilon(x) \geq \theta a_\epsilon(x), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

□

Como uma consequência do Lema 3.6, vemos que a mesma conclusão do Lema 3.5 vale para o problema auxiliar (P_ϵ).

Lema 3.7. *Suponha que $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ é fixo, $p > 0$, (Q_2') e (Q_4) valem. Então existe $\rho > 0$ e $M > 0$ tal que $\lambda - ||\phi_u^\epsilon||_\infty \geq \rho$ e $||u||_\infty \leq M$ para todo (λ, u) satisfazendo (P_ϵ), com $u > 0$ e $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$.*

Demonstração. Procedemos exatamente como na prova do Lema 3.5. Aqui substituímos (3.5) por (3.8) no caso $p > 1$, e substituímos (3.6) por (3.8) para o caso $p \leq 1$. □

Usando o Lema 3.7 e seguindo todas as etapas na prova do Teorema 3.3, para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ fixado, temos uma componente conexa C_ϵ^+ associada à equação de bifurcação (P_ϵ), que cruza os hiperplanos $\{\lambda\} \times X$ para todo $\lambda > \lambda_1$.

Observação 3.5. *Retomamos esta última obervação como segue: para qualquer $\lambda > \lambda_1$ e qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ temos um $u \in X$ positivo satisfazendo (P_ϵ).*

Agora estamos prontos para provar o Teorema 3.4.

Prova do Teorema 3.4.

Demonstração. Fixe $\lambda > \lambda_1$ novamente e considere as funções $g_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g_n(x) = \int_\Omega Q_{\frac{1}{n}}(x,y)|u_n(y)|^p dy,$$

onde u_n é dada pela Observação 3.4, com $\epsilon = \frac{1}{n}$, que verifica $L_0 u_n + g_n(x) u_n = \lambda u_n$. A prova consiste em provar que o problema (P) tem uma solução que é um limite de uma sequência de u_n quando n vai para o infinito.

Sabemos, pelo Lema 3.4, que $||u_n||_p$ é limitado e g_n é limitado em $L^\infty(\Omega)$. Além disso, g_n é uniformemente convergente, a menos de subsequência, em partes compactas de $\overline{\Omega}\backslash\{x_0\}$. De fato, como $g_n(x) = 2\phi_{u_n}(x) - a_{\frac{1}{n}}(x)\phi_{u_n}(x)$ e sendo (u_n) limitada em $L^p(\Omega)$, temos que existe uma subsequência de (u_n), ainda denotada da mesma forma, tal que ϕ_{u_n} converge uniformemente, e como $a_{\frac{1}{n}}$ converge uniformemente para a função identicamente igual a 1, quando $|x - x_0| \geq \epsilon$, para qualquer $\epsilon > 0$, temos o resultado.

Em seguida, dividimos em dois casos o nosso estudo, a saber, $p > 1$ e $p \in (0, 1]$.

Caso 1: $p > 1$**.** Pelo Lema 3.4, (u_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$, e como $p > 1$, existe alguma subsequência de (u_n), ainda denotada da mesma forma, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Como na prova do Teorema 3.3, $L_0 u_n$ converge para $L_0 u$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Denotamos por v o limite uniforme de g_n nas partes compactas de $\overline{\Omega}\backslash\{x_0\}$. Vamos mostrar que u_n converge para u em $L^p(\Omega)$. Do Lema 3.6 temos para $R < 1$,

$$\lambda - g_n(x) \geq \theta a_{\frac{1}{n}}(x) \geq \theta R^{\frac{1}{n}}, \text{ para } x \in \overline{\Omega}\backslash B_R(x_0),$$

isto é, $\lambda - g_n(x)$ converge uniformemente para $\lambda - v(x)$ em $\overline{\Omega}\backslash B_R(x_0)$ que implica $\lambda - v(x) \geq \theta$ em $\overline{\Omega}\backslash B_R(x_0)$, por isso

$$u_n(x) = \frac{L_0 u_n(x)}{\lambda - g_n(x)} \longrightarrow \frac{L_0 u(x)}{\lambda - v(x)} \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}\backslash B_R(x_0). \tag{3.10}$$

Além disso, $v(x) < \lambda$ para $x \neq x_0$. Agora, na vizinhança de x_0, temos

$$\int_{B_R(x_0)} u_n(y)^p dy = \int_{B_R(x_0)} \left[\frac{L_0 u_n(y)}{\lambda - g_n(y)}\right]^p dy \leq \frac{||L_0 u_n||_\infty^p}{\theta^p} \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{a^p_{\frac{1}{n}}(y)} dy.$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(x_0)} \frac{1}{a_{\frac{1}{n}}(y)^p} dy &= \int_{|y-x_0|\leq R} \frac{1}{|y-x_0|^{\frac{p}{n}}} dy \\
&= \int_{|x|\leq R} \frac{dx}{|x|^{\frac{p}{n}}} = w_N \int_0^R \frac{r^{N-1}}{r^{\frac{p}{n}}} dr \\
&= w_N \int_0^R r^{N-1-\frac{p}{n}} dr = \frac{w_N r^{N-\frac{p}{n}}}{N-\frac{p}{n}} \Big|_0^R = w_N \frac{R^{N-\frac{p}{n}}}{N-\frac{p}{n}},
\end{aligned}$$

onde $w_N = \int_{|s|=1} ds$.

Daí, temos

$$\int_{B_R(x_0)} u_n(y)^p dy \leq \frac{||L_0 u_n||_\infty^p w_N R^{N-\frac{p}{n}}}{\theta^p (N - \frac{p}{n})}. \tag{3.11}$$

Portanto,

$$\limsup \int_{B_R(x_0)} |u_n(y)|^p dy \leq C R^N, \tag{3.12}$$

onde C é uma constante.

Note que,

$$\int_\Omega |u_n - u_m|^p dx = \int_{B_R(x_0)} |u_n - u_m|^p dx + \int_{B_R(x_0)^c} |u_n - u_m|^p dx.$$

Mas, de (3.10), sabemos que $\int_{B_R(x_0)^c} |u_n - u_m|^p dx \longrightarrow 0$, com $n, m \longrightarrow \infty$, e como

$$\int_{B_R(x_0)} |u_n - u_m|^p dx \leq 2^p \int_{B_R(x_0)} |u_n|^p dx + 2^p \int_{B_R(x_0)} |u_m|^p dx,$$

por (3.12), dado $\epsilon > 0$, podemos tomar R suficientemente pequeno, tal que

$$2^p \int_{B_R(x_0)} |u_n|^p dx + 2^p \int_{B_R(x_0)} |u_m|^p dx \leq \epsilon, \text{ para n,m suficientemente grandes.}$$

Logo, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$, e portanto, convergente. Além disso, como convergência forte implica convergência fraca, pela unicidade do limite fraco, $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$.

Agora, afirmamos que g_n converge para ϕ_u em $\overline{\Omega}$. De fato, como (u_n) converge em $L^p(\Omega)$, passando à uma subsequência, se necessário, (u_n) é dominada por uma função $h \in L^p(\Omega)$, pois $u_n \longrightarrow u$ q.s. em Ω, e daí

$$Q_{\frac{1}{n}}(x, y) u_n(y)^p \leq 2||Q||_\infty h(y)^p,$$

ou seja, para cada x fixo, a sequência de funções $Q_{\frac{1}{n}}(x, y) u_n(y)^p$ é dominada por uma função em $L^1(\Omega)$, e para cada x fixo, fazendo $n \to \infty$, temos

$$Q_{\frac{1}{n}}(x, y) u_n(y)^p \longrightarrow Q(x, y) u(y)^p, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Pelo Teorema da convergência dominada temos que $g_n(x) \longrightarrow \phi_u(x)$, para todo $x \in \Omega$. Como $g_n(x) < \lambda$, temos $\phi_u(x) \leq \lambda$. Passando ao limite no sentido fraco em $L^p(\Omega)$ em $L_0 u_n + g_n(x) u_n = \lambda u_n$, obtemos

$$L_0 u = (\lambda - \phi_u(x)) u \text{ q.s. em } \Omega.$$

Em seguida, vamos considerar os casos $u \equiv 0$ e $u \neq 0$.

O caso u $\equiv$ 0: Não podemos ter $u \equiv 0$, porque $g_n(x) \leq 2||Q||_\infty ||u_n||_p^p$, e assim g_n converge uniformemente para 0 em $\overline{\Omega}$, que contradiz o Lema 1.9, pois teríamos $\lambda - g_n(x) > \lambda_1$ em $\overline{\Omega}$, para n suficientemente grande.

O caso u $\neq$ 0: Do Lema 1.8, $u > 0$ e $\lambda - v(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$. Por outro lado, argumentando como acima, $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Por isso, $g_n \longrightarrow \phi_u$ em X, $||g_n||_\infty \longrightarrow ||\phi_u||_\infty$ e $\lambda - \phi_u(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então u é uma solução positiva procurada.

Caso 2: p $\in (0, 1]$**:** Como no primeiro caso, podemos assumir que $u_n^p \not\longrightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$. Em seguida, como (u_n^p) é limitado em $L^1(\Omega)$, para alguma subsequência, podemos assumir que $u_n^p \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ para algum $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, onde $\mathcal{M}(\Omega)$ denota o espaço das medidas positivas finitas em Ω. Deste modo,

$$\int_\Omega \phi u_n^p dy \longrightarrow \int_\Omega \phi d\mu, \forall \phi \in X,$$

e daí,

$$g_n(x) = \int_\Omega Q_{\frac{1}{n}}(x,y)u_n^p dy \longrightarrow \int_\Omega Q(x,y)d\mu := v(x), \forall x \in \overline{\Omega}.$$

De fato, sabemos que

$$\int_\Omega Q_{\frac{1}{n}}(x,y)u_n^p dy - \int_\Omega Q(x,y)d\mu = \int_\Omega (Q_{\frac{1}{n}}(x,y) - Q(x,y))u_n^p dy + \left[\int_\Omega Q(x,y)u_n^p dy - \int_\Omega Q(x,y)d\mu\right].$$

Notando que x está fixo e que $Q(x,.) \in X$, da convergência em $\mathcal{M}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega Q(x,y)u_n^p dy - \int_\Omega Q(x,y)d\mu \longrightarrow 0.$$

Além disso, como $Q_\epsilon(x,y) - Q(x,y) = Q(x,y)(1 - |x-x_0|^\epsilon)$, se $|x - x_0| \geq R$, então

$$|Q_\epsilon(x,y) - Q(x,y)| \leq ||Q||_\infty (1 - R^\epsilon).$$

Logo, $\lim_{\epsilon \to 0} Q_\epsilon(x,y) = Q(x,y)$, uniformemente em $\overline{\Omega}$, lembrando que x está fixo. Daí, fazendo $n \to \infty$, tem-se

$$\int_\Omega (Q_{\frac{1}{n}}(x,y) - Q(x,y))u_n^p dy \leq ||Q_{\frac{1}{n}}(x,.) - Q(x,.)||_\infty \int_\Omega u_n^p dy \longrightarrow 0,$$

pois $\left(\int_\Omega u_n^p dy\right)_n$ é limitada.

Como $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, um simples cálculo dá $v \in X$ e $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Usando o fato que

$$\lambda_n - g_n(x) \geq \theta a_{\frac{1}{n}}(x), \text{ para } x \neq x_0,$$

donde, fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\lambda - v(x) \geq \theta > 0, \forall x \in \overline{\Omega} \backslash \{x_0\}.$$

Por isso, $\lambda - v(x) \geq \theta > 0$, q.s. em $\overline{\Omega}$.

Afirmação 3.9. *A sequência (u_n) é limitada em $L^1(\Omega)$.*

De fato, assumimos, por contradição, que $||u_n||_1 \longrightarrow \infty$ e tomamos $w_n = \frac{u_n}{||u_n||_1}$. Usando o fato que (λ, u_n) é uma solução de $(P_{\frac{1}{n}})$, temos

$$L_0 w_n + g_n(x) w_n = \lambda w_n,$$

e daí,

$$w_n = \frac{L_0 w_n}{\lambda_n - g_n(x)}.$$

Como (w_n) é limitado em $L^1(\Omega)$, para alguma subsequência, temos que $L_0 w_n \longrightarrow w_*$ em

X, consequentemente,

$$w_n(x) \longrightarrow \frac{w_*(x)}{\lambda - v(x)} := w(x) \text{ q.s. em } \overline{\Omega}.$$

Da definição de w, vemos que $w \in X$ e $w(x) \geq 0$ q.s. em $\overline{\Omega}$. Além disso, temos

$$w_n(x) \leq \frac{2||L_0 w_n||_\infty}{\theta}, \text{ q.s. em } \overline{\Omega}.$$

As informações acima garantem, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$w_n \longrightarrow w \text{ em } L^1(\Omega),$$

então $||w||_1 = 1$. Por outro lado, também temos que

$$L_0\left(\frac{u_n}{||u_n||_1^{p+1}}\right) + \phi_{w_n}^{\frac{1}{n}}(x) w_n = \lambda \frac{u_n}{||u_n||_1^{p+1}},$$

onde

$$\phi_{w_n}^{\frac{1}{n}}(x) = \int_\Omega Q_{\frac{1}{n}}(x,y)|w_n(y)|^p dy.$$

Então $\phi_{w_n}^{\frac{1}{n}} w_n \longrightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$, e daí, notando que $\phi_{w_n}^{\frac{1}{n}} w_n \longrightarrow \phi_w w$ q.s. em $\overline{\Omega}$, uma vez que $\phi_{w_n}^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \phi_w$ em X, temos pelo Lema de Fatou

$$0 \leq \int_\Omega \phi_w w dx \leq \liminf \int_\Omega \phi_{w_n}^{\frac{1}{n}} w_n dx = 0,$$

donde,

$$\int_\Omega \int_\Omega Q(x,y) w^p(y) w^2(x) dx dy = 0.$$

De (Q_2') temos que $w = 0$, o que é um absurdo. Isso prova que (u_n) é limitado em $L^1(\Omega)$. Argumentando como acima, substituindo w_n por u_n, podemos provar que $u_n \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, e o resultado segue repetindo os mesmos argumentos no Caso 1. □

Comentários finais: Esperamos que os resultados da bifurcação deste capítulo, permaneçam válidos para condições mais fracas em Q, sem hipóteses (Q_3) e (Q_4), por exemplo.

Para finalizar este capítulo, gostaríamos de observar que o mesmo resultado desta seção é válido sob a condição (Q_4'):

(Q_4') Existe uma decomposição $\Omega = \bigcup_{j=1}^m E_j$, $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, ..., x_m \in E_m$ tal que $Q(x_j, y) \geq Q(x,y)$, para todos $x \in E_j, y \in \Omega$.

É possível verificar se considerarmos Q_ϵ, substituindo a_ϵ por $a'_\epsilon(x) = a_{1\epsilon}(x) a_{2\epsilon} .... a_{m\epsilon}(x)$, onde

$$a_{j\epsilon}(x) = \begin{cases} |x - x_j|^{\epsilon}, \ se \ |x - x_j| \leq 1, \\ 1, \ se \ |x - x_j| > 1, \end{cases}$$

então a prova funciona com os seguintes ajustes. A convergência uniforme de g_n é nas partes compactas de $\overline{\Omega}\backslash\{x_1, ..., x_m\}$. No Caso 1, $p > 1$, u_n converge uniformemente em

$$\overline{\Omega}\backslash \bigcup_{j=1}^{m} B_R(x_j), \text{ para } R > 0 \text{ pequeno},$$

e para qualquer $j = 1, 2, ...m$,

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_j)} u_n(y)^p dy &= \int_{B_R(x_j)} \left[\frac{L_0 u_n(y)}{\lambda - g_n(y)} \right]^p dy \\ &\leq \frac{||L_0 u_n||_\infty^p}{\theta^p} \int_{B_R(x_j)} \frac{1}{a_{\frac{1}{n}}(y)^p} dy \\ &\leq \frac{||L_0 u_n||_\infty^p w_N R^{N - \frac{p}{n}}}{\theta^p (N - \frac{p}{n})}. \end{aligned}$$

A prova segue como na prova do Teorema 3.4.

Capítulo 4

Um resultado do tipo Ambroseti-Prodi para equações integrais envolvendo o operador de dispersão

Neste capítulo estudamos a existência de soluções para a seguinte equação

$$L_0 u = f(x,u) + g(x), \text{ em } \Omega, \qquad (P)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado, $g \in X$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função que verifica algumas hipóteses que serão detalhadas abaixo, e $L_0 : X \longrightarrow X$ é o operador integral, definido como anteriormente.

No presente capítulo, nosso principal objetivo é mostrar a existência de um resultado do tipo Ambroseti-Prodi para o problema (P). Isto é, problemas do tipo Ambroseti-Prodi são caracterizadas pela determinação de funções g para as quais a equação (P) tem solução ou não, e em caso afirmativo, o número mínimo (ou, se possível, número exato) de soluções.

Observe que o problema (P) pode ser escrito como segue

$$L_0 u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x) \text{ em } \Omega, \qquad (P)_t$$

onde $g \in X$ é decomposto como $g(x) = t\phi_1(x) + g_1(x)$, $x \in \Omega$, onde ϕ_1 é uma autofunção positiva normalizada associada ao autovalor principal λ_1 de L_0, e $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$, isto é, $\int_\Omega g_1(x)\phi_1(x)dx = 0$.

Portanto, este capítulo está organizado metodicamente como indicamos a seguir: Na Seção 4.1 supondo que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz e crescente com respeito à variável $t \in \mathbb{R}$ tal que:

(f_1) Existe $A > ||k||_\infty$ e $C > 0$ tal que $f(x,s) \geq As - C$ para todo $s \geq 0$ e para todo

$x \in \overline{\Omega}$, onde $k(x) = \int_\Omega K(x,y)dy$.

Com estas hipóteses encontramos um número $m > 0$ em que o problema $(P)_t$ não tem solução positiva se $t > m$. Em adição, se assumirmos que f também verifica

(f_2) Existe um número $0 < a < \lambda_1$ tal que $\lim_{s\to-\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = a$, para todo $x \in \overline{\Omega}$,

encontramos um número $m > 0$ tal que o problema $(P)_t$ não tem solução (positiva, negativa ou que muda de sinal) se $t > m$.

Note que todas funções que verificam $\liminf_{s\to+\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} > ||k||_\infty$ também satisfaz (f_1). De fato, lembrando que

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = L \iff L = \lim M_n,$$

onde $M_n = \inf \left\{ \frac{f(x,s)}{s}; s \geq n \text{ e } x \in \overline{\Omega} \right\}$. Note que a sequência (M_n) é crescente, e portanto existe o limite. Como $||k||_\infty < L$, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $||k||_\infty + \epsilon < L$, e como $\lim M_n = L$, existe um n_0 suficientemente grande, tal que $||k||_\infty + \epsilon \leq M_{n_0} \leq L$. Daí,

$$||k||_\infty + \epsilon \leq \frac{f(x,s)}{s}, \forall x \in \overline{\Omega}, s \geq n_0.$$

Agora, para $0 \leq s \leq n_0$, temos

$$f(x,s) \geq (||k||_\infty + \epsilon)s - C, \forall x \in \overline{\Omega},$$

para $C > 0$ suficientemente grande. Basta tomar $C > 0$ tão grande, tal que

$$f(x_0, s_0) \geq (||k||_\infty + \epsilon)n_0 - C,$$

onde $f(x_0, s_0) = \inf_{\overline{\Omega}\times[0,n_0]} f(x,s)$.

Portanto, das duas desigualdades acima, segue que $f(x,s) \geq (||k||_\infty + \epsilon) - C, \forall x \in \overline{\Omega}$ e para todo $s \geq 0$. Tomando $A = ||k||_\infty + \epsilon$, temos a condição (f_1).

Na Seção 4.2 estudamos a existência de uma solução para a equação $(P)_t$ sem condições de contorno. Assumindo que f satisfaz a condição (f_1) mostramos a existência de pelo menos uma solução positiva. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Suponha que K satisfaz (K_1), (K_2), e suponha que f verifica (f_1) e f é uma função localmente Lipschitz, crescente com respeito à variável $t \in \mathbb{R}$. Então para todo $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$, existe um número real $t(g_1)$ tal que*

(i) o problema $(P)_t$ não tem solução positiva, se $t > t(g_1)$;

(ii) o problema $(P)_t$ tem pelo menos uma solução positiva, se $t < t(g_1)$.

Aqui a afirmação de existência é provada pelo método de iteração monótona.

Na Seção 4.3 temos analisado a existência de uma segunda solução para o problema (P). A fim de obter esta segunda solução, assumimos em f a condição (f_2) e a condição

(f_3) Para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$ existe um número $\sigma > 0$ tal que $\dfrac{f(x,s) - f(x,t)}{s-t} > \sigma$, para todo $s, t \in K$ e todo $x \in \overline{\Omega}$.

Note que toda função que verifica $f'_t(x,t) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, também satisfaz (f_3). De fato, seja um compacto $K \subset \mathbb{R}$, donde o conjunto $\overline{\Omega} \times K$ é compacto, e sendo a função $f'_t(x,t)$ contínua, ela assume um valor mínimo neste compacto, digamos σ, e sendo $f'_t(x,t) > 0$, segue que $\sigma > 0$. Por fim, dados $s, t \in K$ e $x \in \overline{\Omega}$, pelo Teorema do Valor Médio, existe um $t_0 \in K$ tal que

$$\frac{f(x,s) - f(x,t)}{s-t} = f'_t(x,t_0) > \sigma$$

que é a condição (f_3).

Com as hipóteses acima, temos o principal resultado deste capítulo:

Teorema 4.2. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1, em adição à (f_2) e (f_3) temos que, para todo $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$, existe um número real $t(g_1)$ tal que*

(i) o problema $(P)_t$ tem pelo menos duas soluções, se $t < t(g_1)$;

(ii) o problema $(P)_t$ tem pelo menos uma solução, se $t = t(g_1)$.

Na Seção 4.3, já que a diferença do problema com L_0 do problema com $-\Delta$ é que $(-\Delta)^{-1}$ é um operador compacto, e $(L_0 - AI)^{-1}$ não é um compacto para qualquer $A \geq 0$ grande, com isso não podemos usar a teoria do grau de Leray-Schauder. Diante desse problema, faremos uso da teoria do grau para aplicações $\gamma-$*condensantes* (ver Deimling, pp.71), que é uma extensão do grau de Leray-Schauder, para uma classe maior de perturbações da identidade, definidas em termos de medidas de não-compacidade, uma vez que existem vários tipos interessantes de equações funcionais que não podem ser tratadas por operadores compactos, mais precisam da estrutura dessa classe maior.

Fizemos alguns comentários no final da Seção 4.2 de que temos no máximo uma solução para $(P)_t$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, quando f satisfaz a condição (f_1) e a condição abaixo,

(f_4) $|f(x,s) - f(x,t)| < ||k||_\infty |s-t|$ para todo $s, t \in \mathbb{R}_+$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$.

Observação 4.1. *Um fato interessante é que podemos substituir ϕ_1 pela constante $\phi_0 \equiv 1$ e considerar o problema*

$$L_0 u = f(x,u) + t + g_1(x) \ \ em\ \Omega, \qquad (Q)_t$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $g_1 \in X$ é tal que $\int_\Omega g_1(x)dx = 0$, f verifica as hipóteses $(f_1) - (f_2)$ e temos que a prova do Teorema 4.1 e do Teorema 4.2 segue de forma análoga do problema $(P)_t$.

4.1 Não existência de solução

Nesta seção, vamos provar a inexistência de solução para $t \in \mathbb{R}$ grande. Considere o problema $(P)_t$, isto é,

$$L_0 u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x), x \in \Omega.$$

Vemos que u resolve (P) se, e somente se, u resolve $(P)_t$.

Primeiro, vamos mostrar a inexistência de solução positiva.

Lema 4.1. *Assuma (f_1). Então existe $m > 0$, independente de $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ tal que, para todo $t > m$, o problema $(P)_t$ não tem solução positiva.*

Demonstração. Suponha que o problema $(P)_t$ tem uma solução positiva u, então $L_0 u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1$ em Ω. Multiplicando a equação acima por ϕ_1 e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega \phi_1 L_0 u dx = \int_\Omega \phi_1 f(x,u) dx + t \int_\Omega \phi_1^2 dx + \int_\Omega \phi_1 g_1 dx,$$

como $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ temos

$$\int_\Omega \phi_1 L_0 u dx = \int_\Omega \phi_1 f(x,u) dx + t,$$

de (f_1) temos

$$\int_\Omega \phi_1 L_0 u dx \geq A \int_\Omega \phi_1 u dx - C \int_\Omega \phi_1 dx + t.$$

Como L_0 é simétrica, temos

$$\lambda_1 \int_\Omega \phi_1 u dx \geq A \int_\Omega \phi_1 u dx - C \int_\Omega \phi_1 dx + t.$$

Como $A > ||k||_\infty$ e do Lema 1.10 temos $||k||_\infty \leq \lambda_1$, segue que $\lambda_1 - A < 0$ e daí,

$$t \leq (\lambda_1 - A) \int_\Omega \phi_1 u dx + C \int_\Omega \phi_1 dx \leq C \int_\Omega \phi_1 dx.$$

Portanto, a existência de solução positiva u para $(P)_t$ necessariamente implica que

$$t \leq m := C \int_\Omega \phi_1 dx,$$

isto é, se $t > m$ o problema $(P)_t$ não tem solução. □

Este resultado não afirma que, para $t > m$, o problema $(P)_t$ não tem solução negativa ou nodal. Também não afirma que para $t \leq m$, o problema $(P)_t$ tem solução positiva.

Agora, assumindo que f também satisfaz (f_2) ainda podemos encontrar um $m > 0$ em que o problema $(P)_t$ não tem solução (positiva, negativa ou nodal) para $t > m$. Antes precisamos da seguinte estimativa,

Observação 4.2. *Assuma (f_1) e (f_2). Então existe um número $C_1 > 0$ tal que, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\epsilon > 0$,*

(3) $f(x,s) \geq As - C_1, \forall s \in \mathbb{R}$ e $f(x,s) \geq (a+\epsilon)s - C_1, \forall s \in \mathbb{R}$.

Lema 4.2. *Assuma (f_1) e (f_2). Então, existe um número real $m > 0$, independente de $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ tal que, para todo $t > m$, o problema $(P)_t$ não tem solução (positiva, negativa ou nodal).*

Demonstração. Similarmente ao Lema 4.1, usando (3) temos

$$t \leq (\lambda_1 - A)\int_\Omega \phi_1 u dx + C_1 \int_\Omega \phi_1 dx \leq C_1 \int_\Omega \phi_1 dx, \text{ se } \int_\Omega u\phi_1 dx \geq 0,$$

e

$$t \leq (\lambda_1 - (a+\epsilon))\int_\Omega \phi_1 u dx + C_1 \int_\Omega \phi_1 dx \leq C_1 \int_\Omega \phi_1 dx, \text{ se } \int_\Omega u\phi_1 dx \leq 0,$$

onde estamos considerando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $a + \epsilon < \lambda_1$.

Portanto, a existência de solução u para $(P)_t$ necessariamente implica que

$$t \leq m := C_1 \int_\Omega \phi_1 dx,$$

isto é, se $t > m$ o problema $(P)_t$ não tem solução. □

4.2 Prova do Teorema 4.1.

Nesta seção, mostraremos a existência de uma solução positiva para o problema $(P)_t$, isto é, provamos o Teorema 4.1. Neste caso, estamos assumindo que f somente verifica (f_1).

O próximo lema garantirá a existência de uma supersolução para (P).

Lema 4.3. *Assuma (f_1). Então, para todo $g \in X$, o problema (P) tem uma supersolução $w \in X$. Além disso, qualquer subsolução $u \in X$ de (P) é tal que $u < w$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração. Seja $w \in X$ a única solução de

$$L_0 w - Aw = -||g||_\infty - C, \text{ em } \Omega,$$

onde A e C foram introduzidos na propriedade (f_1). Portanto,

$$L_0 w = Aw - ||g||_\infty - C < f(x,w) + g(x), \text{ em } \Omega,$$

isto é, $w \in X$ é uma supersolução de (P). Como $A > ||k||_\infty$ do Princípio do Máximo (ver Lema 1.11), temos $w > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Agora, seja $u \in X$ uma subsolução de (P), isto é,

$$L_0 u \geq f(x, u) + g(x), \text{ em } \Omega.$$

Portanto,

$$L_0(w - u) \leq Aw - ||g||_\infty - C - f(x, u) - g(x),$$

e como $-C - f(x, u) \leq -Au$, temos

$$L_0(w - u) \leq A(w - u) - ||g||_\infty - g(x) \leq A(w - u)$$

que implica em

$$L_0(w - u) - A(w - u) \leq 0.$$

Portanto, do Princípio do Máximo (ver Lema 1.11), temos que $w > u$ em $\overline{\Omega}$. □

Corolário 4.3. *Assuma* (f_1). *Seja* $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *dados, então existe* $R > 0$ *tal que, se* $u \in X$ *é uma função positiva tal que*

$$L_0 u(x) = f(x, u) + t\phi_1(x) + g_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

temos que $||u||_\infty < R$.

Demonstração. Do Lema 4.3, existe $w \in X$ supersolução de $(P)_t$ tal que $0 < u < w$ em $\overline{\Omega}$. Daí, $||u||_\infty < ||w||_\infty = R$. Portanto, existe $R > 0$ tal que $||u||_\infty < R$. □

Observação 4.3. *Se* (P) *tem solução para* $g \in X$, *então para todo* $h \in X$ *tal que* $h \leq g$ *em* Ω, *o problema*

$$L_0 v = f(x, v) + h(x), \text{ em } \Omega \tag{4}$$

também tem solução.

De fato, seja $v \in X$ *uma solução de* (P) *para dado* $g \in X$. *Então,* v *é uma subsolução de* (4) *porque*

$$L_0 v - f(x, v) = g(x) \geq h(x), x \in \Omega.$$

Do Lema 4.3, (4) *tem uma supersolução* $w \in X$ *tal que,* $v < w$ *em* $\overline{\Omega}$. *Daí, do método de sub-supersolução com algumas ligeiras adaptações,* (4) *tem uma solução* $U \in X$ *tal que* $v \leq U \leq w$.

Da Observação 4.3 o seguinte lema é provado:

Lema 4.4. *Seja* $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ *dado. Suponha que o problema* $(P)_t$ *tem uma solução para um dado* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Então o problema* $(P)_t$ *tem uma solução para qualquer* $t < t_0$.

A fim de provar o Teorema 4.1, ainda precisamos obter uma subsolução para $(P)_t$. O próximo lema garantirá a existência desta subsolução.

Lema 4.5. *Sob a condição (f_1) e dado $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que o problema $(P)_t$ tem uma subsolução.*

Demonstração. Escolha t de modo que $-f(x,0) > t\phi_1(x) + g_1(x)$ para todo $x \in \Omega$. Para isto, basta tomar t suficientemente pequeno, mais precisamente, $t < -\dfrac{||f(.,0)+g_1||_\infty}{||\phi_1||_\infty}$. Considere $z = \epsilon\phi_1$, daí

$$L_0(\epsilon\phi_1) - f(x,\epsilon\phi_1) - t\phi_1 - g_1 = \epsilon\lambda_1 - f(x,\epsilon\phi_1) - t\phi_1 - g_1 > 0,$$

para $\epsilon \approx 0^+$ e para todo $x \in \Omega$, isto é,

$$L_0 z > f(x,z) + t\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega$$

concluindo que z é uma subsolução positiva de $(P)_t$. □

Prova do Teorema 4.1.

Demonstração. Seja $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ dado. Do Lema 4.5, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que o problema $L_0 u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x)$ em Ω tem uma subsolução positiva $z \in X$. Por outro lado, para este g_1 e t, do Lema 4.3, temos uma supersolução positiva $w \in X$ tal que $z \leq w$ em $\overline{\Omega}$. Assim, do método de sub-supersolução, $(P)_t$ tem uma solução positiva $u \in X$ tal que $z \leq u \leq w$.

Deste modo, o conjunto

$$\Sigma = \{t \in \mathbb{R}; (P)_t \text{ tem solução positiva }\}$$

não é vazio, do Lema 4.2 temos que Σ é limitado por cima e do Lema 4.4 este conjunto é visto como uma semi-reta. Isto é, tomando $t(g_1)$ para ser o supremo de Σ, segue que para todo $t > t(g_1)$, o problema $(P)_t$ não tem solução. □

Comentários: Considerando f nas hipóteses (f_1) e (f_4), podemos mostrar a unicidade de solução para cada $t \in \mathbb{R}$.

De fato, considere $u, w \in X$ funções positivas tal que

$$L_0 u(x) = f(x,u) + t\phi_1(x) + g_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

e

$$L_0 w(x) = f(x,w) + t\phi_1(x) + g_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Assim, se $u(x) \neq w(x)$, temos

$$L_0(u(x) - w(x)) = f(x,u(x)) - f(x,w(x)) = \left(\frac{f(x,u(x)) - f(x,w(x))}{u(x) - w(x)}\right)(u(x) - w(x)),$$

daí,

$$L_0(u(x) - w(x)) - a(x)(u(x) - w(x)) = 0,$$

onde

$$a(x) = \begin{cases} \frac{f(x,u(x)) - f(x,w(x))}{u(x) - w(x)}, \ se \ u(x) \neq w(x), \\ 0, \ se \ u(x) = w(x). \end{cases}$$

Além disso, de (f_4) temos $a(x) > k(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Do Princípio do Máximo, devemos ter $u \equiv w$ em $\overline{\Omega}$.

4.3 Prova do Teorema 4.2.

Nesta seção, a fim de obter uma segunda solução para o problema (P), é necessário fazer outras hipóteses sob f, isto é, assumindo que f verifica (f_1), (f_2) e (f_3). Além disso, para provar o Teorema 4.2, vamos usar a teoria do grau para aplicações $\gamma-$condensantes que estende o grau de Leray-Schauder para uma ampla classe de perturbações da identidade, definidas em termos de medidas de não compacidade (ver Deimling [17], pp.71).

Começamos com o teorema que estabelece uma estimativa a priori.

Teorema 4.4 (Uma estimativa a priori). *Dado $g \in X$, existe um número $R > 0$ tal que, se u é uma solução de (P), isto é, u é uma solução de*

$$L_0 u = f(x, u) + g(x) \ em \ \Omega,$$

então $||u||_\infty < R$.

Demonstração. Sabemos que de (f_1) (Lema 4.3), existe uma função $w \in X$ tal que toda solução de (P) verifica $u < w$ em $\overline{\Omega}$. Suponha por contradição que existe $(u_n) \subset X$ tal que,

$$||u_n|| \longrightarrow \infty \text{ e } L_0 u_n = f(x, u_n) + g(x), \text{ em } \Omega.$$

Temos que $u_n < w$ em $\overline{\Omega}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere $v_n = \frac{u_n}{||u_n||_\infty}$, então (v_n) é uma sequência limitada em $X \subset L^2(\Omega)$ e sem perda de generalidade, podemos supor que existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em $L^2(\Omega)$, a menos de subsequência. Como L_0 é linear e compacto, temos $L_0 v_n \longrightarrow L_0 v$ em X.

Agora, de (f_2), para todo $\epsilon > 0$, existe um $M > 0$ tal que, para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos

$$(a - \epsilon)s \geq f(x, s) \geq (a + \epsilon)s, \forall s \leq -M,$$

e como f é limitada em $\overline{\Omega} \times [-M, ||w||_\infty]$, existe $C_\epsilon > 0$ suficientemente grande, tal que

$$(a - \epsilon)s + C_\epsilon \geq f(x, s) \geq (a + \epsilon)s - C_\epsilon, \forall s \in [-M, ||w||_\infty] .$$

Juntando estas informações, temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que para todo

$x \in \overline{\Omega}$,

$$(a-\epsilon)s + C_\epsilon \geq f(x,s) \geq (a+\epsilon)s - C_\epsilon, \forall s \leq ||w||_\infty.$$

Daí,

$$(a-\epsilon)u_n + g(x) + C_\epsilon \geq f(x,u_n) + g(x) \geq (a+\epsilon)u_n + g(x) - C_\epsilon,$$

que implica

$$(a-\epsilon)v_n + \frac{g(x)+C_\epsilon}{||u_n||_\infty} \geq L_0 v_n(x) \geq (a+\epsilon)v_n + \frac{g(x)-C_\epsilon}{||u_n||_\infty}. \qquad (i)$$

Como $||u_n||_\infty \longrightarrow \infty$ e $u_n < w$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe um $x_n \in \overline{\Omega}$ tal que

$$-u_n(x_n) = |u_n(x_n)| = ||u_n||_\infty,$$

pois caso $||u_n||_\infty$ fosse atingido em um x_n tal que $u_n(x_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teríamos $u_n(x_n) \longrightarrow \infty$, o que é absurdo, pois $u_n < w$. Daí,

$$(a-\epsilon) = (a-\epsilon)||v_n||_\infty = (a-\epsilon)|v_n(x_n)| = -(a-\epsilon)v_n(x_n) \leq -L_0 v_n(x_n) + \frac{g(x_n)+C_\epsilon}{||u_n||_\infty},$$

isto é,

$$(a-\epsilon) \leq ||L_0 v_n||_\infty + \frac{||g||_\infty + C_\epsilon}{||u_n||_\infty}.$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{a}{2}$ e passando ao limite, vemos que $||L_0 v||_\infty \geq \frac{a}{2}$. Portando, $||v||_\infty > 0$, $v \neq 0$ e fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (i), obtemos

$$(a-\epsilon)v \geq L_0 v \geq (a+\epsilon)v, \forall \epsilon > 0,$$

e fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, temos $L_0 v = av$ em Ω. Por outro lado, temos

$$v_n(x) = \frac{u_n(x)}{||u_n||_\infty} < \frac{w(x)}{||u_n||_\infty} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty, \forall x \in \Omega,$$

que implica $v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) < 0$, para todo $x \in \Omega$. Assim, temos $v(x) < 0$ para todo $x \in \Omega$, isto é, v teria sinal definido e seria autofunção associada ao autovalor $a < \lambda_1$, que é uma absurdo. $\square$

Corolário 4.5. *Dado $g_1 \in X$, $r > 0$ tal que $t \in [-r,r]$ então existe $R > 0$ tal que $||u_t|| \leq R$ com $u_t \in X$ solução de $(P)_t$, para todo $t \in [-r,r]$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $r > 0$, $u_n \in X$ solução de $(P)_{t_n}$ tal que $t_n \in [-r,r]$, com $||u_n||_\infty \longrightarrow \infty$. Agora, é só usar o mesmo argumento apresentado na prova do Teorema 4.4. De fato, considere $v_n = \frac{u_n}{||u_n||_\infty}$, então existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que a menos de subsequência temos $L_0 v_n \longrightarrow L_0 v$ em X.

De (f_2), dado $\epsilon > 0$ existe C_ϵ, tal que

$$(a-\epsilon)v_n + \frac{t_n\phi_1 + g_1 + C_\epsilon}{||u_n||_\infty} \geq L_0 v_n(x) \leq (a+\epsilon)v_n + \frac{t_n\phi_1 + g_1 - C_\epsilon}{||u_n||_\infty} \tag{4.1}$$

Além disso,

$$L_0 u_n = f(x, u_n) + t_n\phi_1 + g_1(x) \leq f(x, u_n) + r\phi_1 + g_1(x),$$

ou seja, u_n é subsolução do problema $L_0 u = f(x,u) + r\phi_1 + g_1(x)$ e pelo Lema 4.3 existe uma supersolução $w \in X$ tal que $u_n < w, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, como $||u_n||_\infty \longrightarrow \infty$ e $u_n < w$ para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um $x_n \in \overline{\Omega}$ tal que

$$-u_n(x_n) = |u_n(x_n)| = ||u_n||_\infty,$$

donde, de (4.5) temos que

$$(a-\epsilon) \leq ||L_0 v_n||_\infty + \frac{r||\phi_1||_\infty + ||g_1||_\infty}{||u_n||_\infty}.$$

Escolhendo $\epsilon = \dfrac{a}{2}$ acima, e fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos $||L_0 v||_\infty \geq \dfrac{a}{2}$, donde $||v||_\infty > 0$ e $v \neq 0$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (4.5), obtemos

$$(a-\epsilon)v \geq L_0 v \geq (a+\epsilon)v, \forall \epsilon > 0,$$

e fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, temos $L_0 v = av$ em Ω. Por outro lado, para todo $x \in \Omega$, temos

$$v_n(x) = \frac{u_n}{||u_n||_\infty} < \frac{w(x)}{||u_n||_\infty} \longrightarrow 0$$

que implica em $v(x) < 0$ em Ω, isto é, v tem sinal definido e seria uma autofunção associada ao autovalor $a < \lambda_1$, o que é um absurdo. $\square$

Agora, para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos um operador $F_t : X \longrightarrow X$ por

$$F_t u := \frac{1}{M} L_0 u + u - \frac{1}{M} f(x,u) - \frac{1}{M}(t\phi_1 + g_1(x)), \text{ para algum } M > 0. \tag{4.2}$$

Note que um ponto fixo para este operador é solução para o problema $(P)_t$. De fato, se $u \in X$ é tal que $F_t u = u$ temos

$$u = F_t u = \frac{1}{M} L_0 u + u - \frac{1}{M} f(x,u) - \frac{1}{M}(t\phi_1 + g_1(x))$$

ou

$$L_0 u = f(x,u) + t\phi_1(x) + g_1(x), \text{ em } \Omega,$$

isto é, u é uma solução de $(P)_t$.

Com as informações acima, temos definido uma aplicação contínua que não é compacta. Em adição, temos previamente que as soluções de nosso problema $(P)_t$ são precisamente os zeros de $I - F_t$. Para obter nosso resultado, precisamos mostrar que a função F_t é $\gamma-$condensante.

Observação 4.4. *Do Teorema 4.4, existe um $R > 0$ tal que, se u é uma solução de $(P)_t$ então $||u||_\infty < R$. Por outro lado, como f é uma função localmente Lipschitz, existe um número $M > 0$ tal que*

$$M > \Gamma = \sup_{-R \leq s,t \leq R} \left(\frac{f(x,s) - f(x,t)}{s - t} \right), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

De (f_3), existe $\sigma > 0$ tal que

$$0 < \sigma < \frac{f(x,s) - f(x,t)}{s - t} \leq \Gamma, \text{ para todos } -R \leq s,t \leq R, \text{ e para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Com o estudo acima, obtemos

$$0 < \left(1 - \frac{f(x,s) - f(x,t)}{M(s-t)} \right) < 1 - \frac{\sigma}{M}, \text{ para todos } -R \leq s,t \leq R, \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{5}$$

Definição 4.6. *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{B}$ a família de seus conjuntos limitados. Então, $\alpha : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por*

$$\alpha(B) = \inf\{d > 0; B \text{ admite uma cobertura finita por conjuntos de diâmetro } \leq d\},$$

é chamada a medida de não compacidade de Kuratowski, e $\beta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\beta(B) = \inf\{r > 0; B \text{ pode ser coberta por um número finito de bolas de raior } r\}$$

é chamada de medida de não compacidade por bolas.

Observação 4.5. *Se $\gamma : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é qualquer α ou β dados acima, então*

(a) $\gamma(B) = 0 \iff \overline{B}$ *é compacta;*

(b) γ *é uma semi-norma, i.e,* $\gamma(\lambda B) = \lambda\gamma(B)$ *e* $\gamma(B_1 + B_2) \leq \gamma(B_1) + \gamma(B_2)$*;*

(c) se $B \subset C$, *então* $\gamma(B) \leq \gamma(C)$.

A prova destes itens pode ser encontrada em Deimling [17], pp. 41.

Proposição 4.7. *Se $G : X \longrightarrow X$ é uma aplicação Lipschitziana, isto é, existe $K > 0$ tal que $||G(u) - G(v)||_\infty \leq K||u - v||_\infty, \forall u, v \in X$, então $\gamma(G(B)) \leq K\gamma(B)$, para todo $B \subset X$ limitado.*

Demonstração. Sabemos que $\gamma(B) = \inf\{d > 0; \exists B \subset \bigcup_{j=1}^{m} D_j; \text{diam} D_j \leq d\}$. Daí, dado $\epsilon > 0$, existe $B \subset \bigcup_{j=1}^{m} D_j$, tal que $\text{diam} D_j \leq \gamma(B) + \epsilon$. É fácil notar que $G(B) \subset \bigcup_{j=1}^{m} G(D_j)$. Sejam $w, z \in G(D_j)$, então existem $u, v \in D_j$ tal que $G(u) = w$ e $G(v) = z$. Portanto,

$$||w - z||_\infty = ||G(u) - G(v)||_\infty \leq K||u - v||_\infty \leq K \text{diam} D_j \leq K(\gamma(B) + \epsilon),$$

daí, $\text{diam} G(D_j) \leq K(\gamma(B) + \epsilon)$. Portanto, pela definição de $\gamma(G(B))$, temos $\gamma(G(B)) \leq K(\gamma(B) + \epsilon)$, e como $\epsilon > 0$ foi arbitrário, segue que $\gamma(G(B)) \leq K\gamma(B)$. O mesmo vale se tomarmos $\gamma = \beta$. □

Lema 4.6. *Suponha que* (f_1), (f_2) *e* (f_3) *valem. Então o operador* F_t *é uma aplicação* $\gamma-$*condensante para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Dizemos que uma aplicação é $\gamma-$condensante quando $\gamma(F(B)) < \gamma(B)$ sempre que $B \subset X$ é limitado e $\gamma(B) > 0$, onde γ será a medida de não compacidade de Kuratowski α ou a medida de não compacidade por bolas β. Note que, para (4.6), podemos escrever $F_t(u) = \frac{1}{M} L_0(u) + G(u)$, onde $G : X \longrightarrow X$ é dada por $G(u)(x) = u(x) - \frac{1}{M} f(x, u(x)) - \frac{1}{M}(t\phi_1(x) + g_1(x))$ em $x \in \overline{\Omega}$ e para $u \in X$. Assim, se $B \subset X$ é limitado, usando o fato que $F_t(B) \subset \frac{1}{M} L_0(B) + G(B)$, da Observação 4.5 temos

$$\gamma(F_t(B)) \leq \gamma(\frac{1}{M} L_0(B) + G(B)) \leq \frac{1}{M} \gamma(L_0(B)) + \gamma(G(B)) = \gamma(G(B))$$

pois como L_0 é compacto, ou seja, $\overline{L_0(B)}$ é compacto, devemos ter $\gamma(L_0(B)) = 0$.

Agora vamos mostrar que G é uma contração. De fato, note que para todo $-R \leq u(x), v(x) \leq R$, temos de (5) que para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$0 < \left\| 1 - \frac{f(x, u(x)) - f(x, v(x))}{M(u(x) - v(x))} \right\| < 1 - \frac{\sigma}{M}, \text{ para } u(x) \neq v(x).$$

Portanto,

$$|G(u)(x) - G(v)(x)| = \left\| u(x) - \frac{f(x, u(x))}{M} - v(x) + \frac{f(x, v(x))}{M} \right\|, \forall x \in \overline{\Omega},$$

ou

$$|G(u)(x) - G(v)(x)| \leq \left\| 1 - \frac{f(x, u(x)) - f(x, v(x))}{M(u(x) - v(x))} \right\| |u(x) - v(x)|, \forall x \in \overline{\Omega},$$

que por (5), implica em

$$|G(u)(x) - G(v)(x)| < \left(1 - \frac{\sigma}{M} \right) |u(x) - v(x)|, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

E como $1 - \dfrac{\sigma}{M} < 1$, temos que $||G(u) - G(v)||_\infty < ||u - v||_\infty$. Portanto, G é uma contração e, pela proposição acima, temos $\gamma(G(B)) < \gamma(B)$, onde $B = B_R(0) \subset X$, i.e., F_t é uma aplicação $\gamma-$condensante, quando restrita à $B_R(0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Agora determinamos o grau de $I - F_t$ para um certo subconjunto de X.

Lema 4.7. *Suponha que* (f_1), (f_2) *e* (f_3) *valem. Seja* $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ *e* $t_0 < t(g_1)$ *dado. Então existe um* $R > 0$ *tal que*

$$d(I - F_{t_0}, B_R, 0) = 0,$$

onde $B_R = \{u \in X; ||u||_\infty < R\}$.

Demonstração. Do Teorema 4.1, o problema $(P)_t$ não tem solução se $t > t(g_1)$. Daí, escolha um $t_1 > t(g_1)$. Segue-se do Teorema 4.4 que existe uma constante $R > 0$ tal que $||u||_\infty < R$ para toda solução possível do problema $(P)_{t_0}$ com g_1 fixo. Segue-se também que esta desigualdade ocorre para toda solução possível do problema $(P)_t$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, do Lema 4.4 e Corolário 4.5. Como F_t, com $t \in [t_0, t_1]$, constitui uma homotopia admissível entre F_{t_0} e F_{t_1}, porque

$$(I - F_t)u \neq 0, \text{ para todo } ||u||_\infty = R \text{ e todo } t \in [t_0, t_1],$$

temos $d(I - F_{t_0}, B_R, 0) = d(I - F_{t_1}, B_R, 0)$ (ver Apêndice B). Mas $d(I - F_{t_1}, B_R, 0) = 0$ porque o problema $(P)_t$ não tem solução para $t = t_1$. Portanto, $d(I - F_{t_0}, B_R, 0) = 0$. $\square$

Lema 4.8. *Suponha que* (f_1), (f_2) *e* (f_3) *valem. Seja* $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ *e* $t_0 < t(g_1)$ *dados. Então existe* $M > 0$ *e um aberto* $W \subset X$ *tal que*

$$d(I - F_{t_0}, W, 0) = 1.$$

Demonstração. Do Toerema 4.1 segue-se que existe $v \in X$ que é uma solução positiva de $(P)_{t*}$ com $t_0 < t* < t(g_1)$. Além disso, v é uma subsolução de $(P)_t$ quando $t = t_0$, isto é,

$$L_0 v - f(x, v) = t * \phi_1 + g_1 > t_0\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega,$$

ou

$$L_0 v > f(x, v) + t_0\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega. \tag{6}$$

Por outro lado, do Lema 4.3, existe $w \in X$ supersolução de $(P)_{t_0}$, isto é,

$$L_0 w < f(x, w) + t_0\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega. \tag{7}$$

Além disso, $v < w$ em $\overline{\Omega}$.

Agora, escolha $M > 0$ tal que $M > ||k||_\infty$, $f(x, s) - Ms$ é uma função decrescente em $0 \leq s \leq ||w||_\infty$. Note que

$$F_{t_0} := \frac{1}{M}L_0 u + u - \frac{1}{M}f(x, u) - \frac{1}{M}(t\phi_1 + g_1)$$

é uma aplicação $\gamma-$condensante pelo Lema 4.6.

Defina $W = \{u \in X; v < u < w \text{ em } \overline{\Omega}\}$, temos que W é aberto, limitado e convexo em X. Vamos mostrar que W é aberto, pois é fácil ver que W é limitado e convexo.

De fato, dado $u \in W$, como $u - v > 0$ em $\overline{\Omega}$, existe o mínimo $\theta > 0$ tal que $u(x) - v(x) \geq \theta$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Agora, seja $z \in B_{\frac{\theta}{2}}(u)$, ou seja, $||z - u||_\infty < \frac{\theta}{2}$.

Temos que

$$\begin{aligned} z(x) - v(x) &= z(x) - u(x) + u(x) - v(x) \\ &\geq -|z(x) - u(x)| + \theta \\ &\geq -||z - u||_\infty + \theta \\ &> -\frac{\theta}{2} + \theta = \frac{\theta}{2} > 0 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

ou seja, $v < z$ em $\overline{\Omega}$.

Da mesma forma, $w - u > 0$ em $\overline{\Omega}$, isto é, existe o mínimo $\alpha > 0$ tal que $w(x) - u(x) \geq \alpha$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Agora, seja $z \in B_{\frac{\alpha}{2}}(u)$, ou seja, $||z - u||_\infty < \frac{\alpha}{2}$.

Temos que

$$\begin{aligned} w(x) - z(x) &= w(x) - u(x) + u(x) - z(x) \\ &\geq \alpha - |u(x) - z(x)| \\ &\geq \alpha - ||u - z||_\infty \\ &> \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} > 0, \text{para todo } x \in \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

ou seja, $z < w$ em $\overline{\Omega}$. Daí, tomando $\lambda = \min\{\theta, \alpha\}$, temos que $B_{\frac{\lambda}{2}}(u) \subset W$.

Afirmação 4.8. $F_{t_0} : \overline{W} \longrightarrow X$ *é tal que* $F_{t_0}(\overline{W}) \subset W$.

De fato, se $u \in \overline{W}$ então $v \leq u \leq w$ em $\overline{\Omega}$. Seja $z = F_{t_0}(u)$, assim

$$Mz = L_0 u + (Mu - f(x, u)) - t_0\phi_1 - g_1, \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Agora, note que de (6), temos

$$L_0 v - Mv > f(x, v) - Mv + t_0\phi_1 + g_1, \text{ em } \overline{\Omega},$$

que implica

$$Mv < L_0 v + (Mv - f(x, v)) - t_0\phi_1 - g_1, \text{ em } \overline{\Omega}.$$

De uma forma análoga, de (7) temos

$$Mw > L_0 w + (Mw - f(x, w)) - t_0\phi_1 - g_1, \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Daí,

$$M(z-v) > L_0(u-v) + [(Mu - f(x,u)) - (Mv - f(x,v))]\,, \text{ em } \Omega.$$

Como $u - v \geq 0$ temos que $L_0(u-v) \geq 0$ (ver Afirmação 1.1) e da escolha do M, segue que $(Mv - f(x,v)) \leq (Mu - f(x,u))$, assim $M(z-v) > 0$, que implica $v < z$ em $\overline{\Omega}$. Similarmente é provado que $z < w$ em $\overline{\Omega}$. Portanto, $z \in W$.

Com o exposto acima, concluímos que, se $u \in \partial W$ então $u \neq F_{t_0}(u)$, porque se $u = F_{t_0}(u)$ devemos ter $u \in W$.

Pelo estudo feito, $d(I - F_{t_0}, W, 0)$ está bem definido. Agora vamos calcular seu grau. Considere $\psi = \dfrac{v+w}{2}$ donde, temos $v < \psi < w$, i.e., $\psi \in W$. Defina $H_\theta(u) = (1-\theta)F_{t_0}(u) + \theta\psi$. Para $0 \leq \theta \leq 1$ temos $H_\theta : \overline{W} \longrightarrow W$. De fato, sabemos que se $u \in \overline{W}$, então $F_{t_0}(u) \in W$. Assim, $v < F_{t_0}(u) < w$ e como $v < \psi < w$, da convexidade de W, temos $H_\theta(u) \in W$, isto é, H_θ é uma homotopia admissível para todo $0 \leq \theta \leq 1$.

Como $u \neq H_\theta(u)$ para todo $u \in \partial W$ e todo $\theta \in [0,1]$, isto é, o grau de H_θ é independente de θ, então

$$d(I - H_0, W, 0) = d(I - H_1, W, 0),$$

e $d(I - H_1, W, 0) = 1$ porque H_1 é constante igual à ψ, e $\psi \in W$. Daí, $d(I - H_0, W, 0) = 1$ e o lema está provado. □

Prova do Teorema 4.2.

Demonstração. (i) Seja $g \in \{\phi_1\}^\perp$ e $t_0 < t(g_1)$ dado. Do Lema 4.8, existe um $M > 0$ e um conjunto aberto W tal que $d(I - F_{t_0}, W, 0) = 1$. Assim, $I - F_{t_0}$ tem um zero em W (ver Apêndice B, propriedade D.4), isto é, o problema $(P)_{t_0}$ tem uma solução $u_1 \in W$, com estes dados g_1 e t_0. Agora, escolha $R > 0$ tal que $W \subset B_R(0)$. Do Lema 4.7, segue-se que $d(I - F_{t_0}, B_R, 0) = 0$, assim (ver propriedade D.2 do Apêndice B)

$$d(I - F_{t_0}, B_R \backslash \overline{W}, 0) = -1.$$

Daí, o problema $(P)_{t_0}$ tem outra solução $u_2 \in B_R \backslash \overline{W}$. Além disso, $u_1 \neq u_2$.

(ii) Considere uma sequência $t_n < t(g_1)$ tal que $t_n \longrightarrow t(g_1)$. Segue-se do Teorema 4.1, que o problema $(P)_t$ tem uma solução $u_n \in X$ para a função dada g_1 e cada t_n, isto é,

$$L_0 u_n = f(x, u_n) + t_n\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega. \qquad (7)$$

Como (u_n) é limitado em X, então (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$, $p > 0$. Se $p > 1$, existe alguma subsequência de (u_n), ainda denotada da mesma forma, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Como L_0 é um operador linear e compacto, temos $L_0 u_n \longrightarrow L_0 u$ em X. Por outro lado, de (7), obtemos

$$f(x, u_n) = L_0 u_n - t_n\phi_1 - g_1 \longrightarrow L_0 u - t_0\phi_1 - g_1 := z \text{ uniformemente em } \Omega.$$

De (f_3) segue que

$$\sigma||u_n - u_m||_\infty < |f(x, u_n(x)) - f(x, u_m(x))| \leq ||f(., u_n) - z||_\infty + ||z - f(., u_m)||_\infty.$$

Portanto, (u_n) é uma sequência de Cauchy em X, donde convergente, e pela unicidade do limite, segue que $u_n \longrightarrow u$ em X. Daí,

$$f(., u_n) \longrightarrow f(., u) \text{ em } X.$$

Claramente u é uma solução do Problema $(P)_t$, com o dado g_1 e $t = t(g_1)$. Neste contexto, a prova do Teorema 4.2 está completa. $\square$

Apêndice A

Teoria Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos

Assim como na Álgebra Linear, na Análise Funcional é muito útil o estudo dos autovalores e autovetores de um operador linear e contínuo. Os seguintes conceitos certamente são familiares ao leitor:

Definição A.1. *Sejam V um espaço vetorial e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Um autovalor de T é um escalar λ para o qual existe um vetor não-nulo $x \in V$ tal que $T(x) = \lambda x$. O subespaço*

$$V_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\}$$

é chamado de autoespaço associado ao autovalor λ e seus elementos são chamados de autovetores de T associados ao autovalor λ.

Por simplicidade, neste trabalho denotamos o operador identidade em um espaço vetorial por I. Suponha que V tenha dimensão finita. Neste caso,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é um autovalor de } T &\iff \ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \\
&\iff T - \lambda I \text{ não é injetora} \\
&\iff T - \lambda I \text{ não é bijetora} \\
&\iff \text{não existe } (T - \lambda I)^{-1} : V \longrightarrow V.
\end{aligned}$$

Ou seja, em dimensão finita os autovalores são exatamente os escalares λ para os quais $T - \lambda I$ não é invertível. Em dimensão infinita esse argumento não funciona e, além disso, quando $(T - \lambda I)^{-1}$ existir, devemos levar em conta sua continuidade. Essa necessidade nos levará ao conceito de *espectro* de um operador linear.

Estudaremos neste apêndice os autovalores, os autovetores e o espectro de duas classe importantes de operadores, a saber, os operadores compactos entre espaços normados e os operadores autoadjuntos entre espaços de Hilbert.

A.1 Espectro de um operador linear contínuo

Sejam E um espaço normado, $T \in \mathcal{L}(E,E)$, onde $\mathcal{L}(E,E)$ é o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas $T : E \longrightarrow E$ equipado com a norma

$$||T||_{\mathcal{L}(E,E)} = \sup\left\{\frac{||Tx||_E}{||x||_E}; x \neq 0\right\}$$

e λ um escalar que *não* é um autovalor de T. Então $\ker(T-\lambda I) = \{0\}$ e faz sentido considerar o operador

$$(T-\lambda I)^{-1} : (T-\lambda I)(E) \subseteq E \longrightarrow E,$$

que é injetor e linear. Nada sabemos, entretanto, sobre a continuidade de $(T-\lambda I)^{-1}$ e a sobrejetividade de $(T-\lambda I)$. Essas preocupações nos levam à seguinte definição:

Definição A.2. *O escalar λ é um valor regular do operador T se $(T-\lambda I)$ é bijetora e*

$$(T-\lambda I)^{-1} : E \longrightarrow E$$

é contínua. O conjunto dos valores regulares de T é chamado de conjunto resolvente de T e denotado por $\rho(T)$. Seu complementar $(\mathbb{R} - \rho(T))$ é chamado de espectro de T e denotado por $\sigma(T)$.

Se E é um espaço de Banach, do Teorema da Aplicação Aberta sabemos que

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T-\lambda I) \text{ é bijetora}\}.$$

Em espaços normados, a continuidade da inversa $(T-\lambda I)^{-1}$ não segue sempre da continuidade de $(T-\lambda I)$. Da definição resulta que todo autovalor de T pertence ao espectro de T.

O objetivo principal desta seção é provar a compacidade do espectro de um operador linear e contínuo em um espaço de Banch. O resultado a seguir será de grande ajuda. Para $T \in \mathcal{L}(E,E)$ e $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $T^n = T \circ ... \circ T$ (composição de n fatores iguais a T) e $T^0 = I$.

Proposição A.3. *Sejam E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E,E)$ com $||T|| < 1$. Então $1 \in \rho(T)$ e, em particular, $(I-T)$ tem inversa contínua e*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \in \mathcal{L}(E,E)$$

Demonstração. Ver [56] Proposição 7.1.3. □

Teorema A.4. *Sejam E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E,E)$. Então o espectro de T é um compacto contido no intervalo $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq ||T||\}$.*

Demonstração. Ver [56] Proposição 7.1.4. □

A.2 Operadores compactos

Sejam E um espaço normado de dimensão infinita e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. Sabemos que B_E não é compacto em E, logo se $T(B_E)$ for compacto em F, o operador T terá a grande vantagem de 'consertar' a não compacidade da bola unitária. Apesar de sempre ser limitado, $T(B_E)$ pode não ser fechado, logo é razoável pedir apenas que seu fecho seja compacto:

Definição A.5. *Um operador linear $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito ser compacto se $T(B_E)$ tem fecho compacto em F (na topologia forte).*

O conjunto de todos operadores compactos de E em F é denotado por $\mathcal{K}(E, F)$. Por simplicidade escrevemos $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Definição A.6. *Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito ser de posto finito se a imagem de T, $R(T)$, tem dimensão finita.*

Proposição A.7. *(a) Todo operador compacto é contínuo.*

(b) Todo operador linear contínuo de posto finito é compacto.

(c) Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a identidade em E é um operador compacto.

Demonstração. (a) Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador compacto. Por ser subconjunto do compacto $\overline{T(B_E)}$, o conjunto $T(B_E)$ é limitado, e portanto T é contínuo.

(b) Conjuntos fechados e limitados em espaços de dimensão finita são compactos.

(c) Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta. □

As seguintes caracterizações são simples mas muito úteis.

Proposição A.8. *Sejam E e F espaços normados. As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear $T : E \longrightarrow F$.*

(a) T é compacto.

(b) $\overline{T(A)}$ é compacto em F para todo limitado A em E.

(c) Para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, a sequência $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente em F.

Demonstração. Ver [56] Proposição 7.2.3. □

Como um corolário, temos o seguinte resultado

Corolário A.9. *Sejam E, F, e G espaços de Banach. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{K}(F, G)$ [respectivamente $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$]. Então $S \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$.*

O exemplo a seguir é muito importante em aplicações, e foi utilizado nos capítulos anteriores a fim de garantir que nas equações integrais que apresentamos, os operadores envolvidos nelas sejam compactos, valendo toda a teoria espectral deste apêndice. Antes de apresentar este exemplo, vamos lembrar ao leitor o que diz o Teorema de Ascoli:

Teorema A.10 (Teorema de Ascoli)**.** *Sejam K um espaço métrico compacto e A um subconjunto de $C(K)$. Então $\overline{A}$ é compacto em $C(K)$ se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(a) A é equicontínuo, isto é, para todos $t_0 \in K$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(t_0)| < \epsilon \text{ para todos } t \in K \text{ com } d(t, t_0) < \delta \text{ e } f \in A.$$

(b) O conjunto $\{f(t) : f \in A\}$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo $t \in K$.

Exemplo 1 (Operadores integrais)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ um aberto limitado e $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere o operador*

$$T : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega}), T(f)(t) = \int_{\Omega} K(s,t) f(s) ds \text{ para todo } t \in \overline{\Omega}.$$

Não é difícil mostrar que T está bem definido, isto é, $T(f) \in C(\overline{\Omega})$ para toda $f \in C(\overline{\Omega})$, e que T é linear. Queremos mostrar que o operador T é compacto, ou seja, $\overline{T(B_{C(\overline{\Omega})})}$ é compacto em $C(\overline{\Omega})$. Para isso usaremos o Teorema de Ascoli. Devemos provar que $\overline{T(B_{C(\overline{\Omega})})}$ satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema.

(a) Sejam $t_0 \in \overline{\Omega}$ e $\epsilon > 0$. Como $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ é compacto e K é contínua concluímos que K é uniformemente contínua. Existe então $\delta > 0$ tal que

$$|K(s,t_1) - K(s,t_2)| < \frac{\epsilon}{|\Omega|} \text{ para todos } s \in \overline{\Omega} \text{ e } t_1, t_2 \in \overline{\Omega} \text{ com } |t_1 - t_2| < \delta.$$

Assim, se $f \in B_{C(\overline{\Omega})}$ e $|t - t_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} |T(f)(t) - T(f)(t_0)| &= \left| \int_{\Omega} (K(s,t) f(s) - K(s,t_0) f(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |K(s,t) - K(s,t_0)|.|f(s)| ds \\ &\leq \int_{\Omega} |K(s,t) - K(s,t_0)| ds \leq \frac{\epsilon}{|\Omega} |\Omega| = \epsilon. \end{aligned}$$

Isso prova que $T(B_{C[a,b]})$ é equicontínuo em $C(\overline{\Omega})$.

(b) Sejam $t_0 \in \overline{\Omega}$ e $f \in C\left(\overline{\Omega}\right), ||f||_\infty \leq 1$. Então

$$|T(f)(t_0)| \leq \int_{\Omega} |K(s,t_0)|.|f(s)| ds \leq \int_{\Omega} |K(s,t_0)| ds.$$

Segue que o operador T é compacto. A função K é chamada de núcelo ou kernel do *operador integral T.*

Terminamos esta seção caracterizando os operadores compactos definidos em espaços reflexivos como sendo exatamente aqueles que transformam sequências fracamente convergentes em sequências convergentes.

Aqui usamos a notação $x_n \rightharpoonup x$ para denotar a convergência fraca em E, isto é

$$x_n \rightharpoonup x \iff \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x) \text{ para todo } \varphi \in E',$$

onde E' é o dual de E, isto é, o espaço dos funcionais lineares definidos em E.

Proposição A.11. *Sejam E e F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(a) Se T é compacto, então vale a implicação

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E \Longrightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x) \text{ em } F. \tag{A.1}$$

(b) Se E é reflexivo, então T é compacto se, e somente se, vale (A.1).

Demonstração. (a) Da hipótese $x_n \rightharpoonup x$ e como T ser contínuo na norma usual é equivalente a T ser contínuo na norma fraca, resulta que $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$. Suponha que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ não convirja em norma para $T(x)$. Neste caso existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência $(T(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ tais que

$$||T(x_{n_k}) - T(x)|| \geq \epsilon \text{ para todo } k. \tag{A.2}$$

De $x_{n_k} \rightharpoonup x$ segue que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é limitada, e portanto, pela compacidade de T, $(T(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ admite subsequência $(T(x_{n_{k_j}}))_{j=1}^{\infty}$ convergente, digamos

$$T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow y \in F.$$

Por maior razão $T(x_{n_{k_j}}) \rightharpoonup y$ e, como a topologia fraca é de Hausdorff, concluímos que $T(x) = y$. Então $T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow T(x)$, o que contradiz (A.2).

(b) Suponha E reflexivo e que valha (A.1). Dada uma sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, podemos extrair uma subsequência fracamente convergente, digamos $x_{n_k} \rightharpoonup x \in E$. Por hipótese $T(x_{n_k}) \longrightarrow T(x)$ e portanto T é compacto pela Proposição A.8. □

A próxima seção sobre ortogonalidade servirá como um adendo, onde algumas definições e resultados serão utilizados na demonstração da Alternativa de Fredholm, que é o principal teorema do Apêndice.

A.3 Teoria espectral de operadores compactos

O objetivo desta seção é descrever o espectro de um operador linear compacto. Começamos mostrando que os autoespaços associados aos autovalores não-nulos de um operador compacto são todos de dimensão finita.

Proposição A.12. *Sejam E um espaço de Banach, $T : E \longrightarrow E$ um operador compacto e λ um escalar não-nulo. Então:*

(a) $V_\lambda := \ker(T - \lambda I)$ *tem dimensão finita.*

(b) $(T - \lambda I)(E)$ *é fechado em E.*

Demonstração. Ver [56] Proposição 7.3.1. □

O seguinte lema elementar será útil para a demonstração do Lema A.2, que é o ingrediente principal para a demonstração da Alternativa de Fredholm:

Lema A.1. *Sejam A um conjunto qualquer e $f : A \longrightarrow A$ uma função injetora que não é sobrejetora. Então $f(f(A))$ é subconjunto próprio de $f(A)$.*

Demonstração. É claro que $f(f(A)) \subseteq f(A)$. Como f não é sobrejetora, podemos tomar $x \in (A - f(A))$. É claro que $f(x) \in f(A)$. Suponha que $f(x) \in f(f(A))$. Neste caso existe $y \in A$ tal que $f(x) = f(f(y))$. Como f é injetora resulta que $x = f(y) \in f(A)$. Esse absurdo mostra que $f(x) \notin f(f(A))$, logo $f(f(A))$ é subconjunto próprio de $f(A)$. □

Lema A.2. *Sejam E um espaço de Banach, $T : E \longrightarrow E$ um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$. Então o operador $(T - \lambda I)$ é injetor se, e somente se, é sobrejetor.*

Demonstração. Ver [56] Lema 7.3.4. □

Apliquemos o Lema A.2 para o escalar $\lambda = 1$. A condição $(T - I)$ ser injetor quer dizer que T não tem ponto fixo não-nulo, e a condição $(T - I)$ ser sobrejetora quer dizer que a equação $T(x) - x = y$ tem solução para todo $y \in E$. Temos então o

Teorema A.13 (Alternativa de Fredholm)**.** *Seja E um espaço de Banach. Se $T : E \longrightarrow E$ é um operador compacto, então uma e apenas uma das possibilidades abaixo ocorre:*

(a) T tem um ponto fixo não-nulo.

(b) A equação $T(x) - x = y$ tem solução para todo $y \in E$.

Usaremos agora o Lema A.2 para provar que, com a possível exceção da origem, o espectro de um operador compacto é formado apenas por autovalores.

Teorema A.14. *Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita e $T : E \longrightarrow E$ um operador compacto. Então*

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \text{ é um autovalor de } T\}.$$

Demonstração. Ver [56] Teorema 7.3.6. □

O último resultado desta seção informa, essencialmente, que o espectro de um operador compacto se comporta como uma sequência cujas únicas subsequências convergentes, caso existam, convergem para zero.

Teorema A.15. *O espectro de um operador compacto $T : E \longrightarrow E$ em um espaço de Banach E é enumerável, podendo ser finito, e o único ponto de acumulação possível é o zero.*

Demonstração. Ver [56] Teorema 7.3.7. □

A.4 Operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert

Definição A.16. *Seja H um espaço de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{L}(H, H)$ é chamado de autoadjunto ou simétrico se,*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle\,, \forall u, v \in H.$$

Teorema A.17. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador autoadjunto. Então*

$$||T|| = \sup\left\{|\left\langle T(x), x\right\rangle : ||x|| = 1\right\}.$$

Demonstração. Se $T = 0$, o resultado é imediato. Suponhamos $T \neq 0$. Note que, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\left\langle Tx, x\right\rangle| \leq ||T(x)||.||x|| \leq ||T||||x||^2$$

para todo $x \in H$, e portanto

$$\sup\left\{|\left\langle T(x), x\right\rangle| : ||x|| = 1\right\} \leq ||T||.$$

Resta provar a desigualdade inversa. Como $T \neq 0$, podemos tomar $x_0 \in H$ com $||x_0|| = 1$ e $T(x_0) \neq 0$. Chamemos

$$x := ||T(x_0)||^{\frac{1}{2}}.x_0 \text{ e } y = ||T(x_0)||^{-\frac{1}{2}}T(x_0).$$

Então $||x||^2 = ||y||^2 = ||T(x_0)||$. É claro que $\langle T(x), y\rangle = ||T(x_0)||^2$ e, como T é autoadjunto,

$$\langle T(y), x\rangle = \langle y, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), y\rangle} = ||T(x_0)||^2,$$

provando que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle T(y), x\rangle = ||T(x_0)||^2.$$

Definindo $u = x + y$ e $v = x - y$, e subtraindo as equações

$$\langle T(u), u\rangle = \langle T(x), x\rangle + \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle + \langle T(y), y\rangle$$

$$\langle T(v), v\rangle = \langle T(x), x\rangle - \langle T(x), y\rangle - \langle T(y), x\rangle + \langle T(y), y\rangle \,,$$

obtemos

$$\langle T(u), u\rangle - \langle T(v), v\rangle = 2\,\langle T(x), y\rangle + 2\,\langle T(y), x\rangle = 4||T(x_0)||^2.$$

Para simplificar a notação, escrevamos $C = \sup\{|\,\langle T(z), z\rangle\,| : ||z|| = 1\}$ e vejamos que

$$|\,\langle T(w), w\rangle\,| \leq C||w||^2 \text{ para todo } w \in H.$$

De fato, para $w = 0$ o resultado é imediato, e para $w \neq 0$,

$$\frac{1}{||w||^2}.|\,\langle T(w), w\rangle\,| = \left|\left\langle T\left(\frac{w}{||w||}\right), \frac{w}{||w||}\right\rangle\right| \leq C.$$

Usando a Lei do Paralelogramo e lembrando que $\langle T(w), w\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $w \in H$, pois $\langle T(w), w\rangle = \langle w, T(w)\rangle = \overline{\langle T(w), w\rangle}$, temos

$$\begin{aligned} 4||Tx_0||^2 &= \langle T(u), u\rangle - \langle T(v), v\rangle \leq |\,\langle T(u), u\rangle\,| + |\,\langle T(v), v\rangle\,| \\ &\leq C||u||^2 + C||v||^2 = C||x+y||^2 + C||x-y||^2 \\ &= 2C(||x||^2 + ||y||^2) = 4C||T(x_0)||. \end{aligned}$$

Como $T(x_0) \neq 0$ concluímos que $||T(x_0)|| \leq C$. Isso vale para todo $x_0 \in H$ tal que $||x_0|| = 1$ e $T(x_0) \neq 0$. Então,

$$||T|| = \sup\{||T(x_0)|| : ||x_0|| = 1\} = \sup\{||T(x_0)|| : ||x_0|| = 1 \text{ e } T(x_0) \neq 0\} \leq C.$$

□

A.5 Teoria espectral de operadores autoadjuntos

Exploraremos neta seção as propriedades espectrais dos operadores autoadjuntos e também dos operadores que são simultaneamente compactos e autoadjuntos. Começamos mostrando que os autovalores de um operador autoadjunto são sempre reais e que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais:

Proposição A.18. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador autoadjunto. Então:*

(a) Os autovalores de T são números reais.

(b) Se λ e μ são autovalores distintos de T então $V_\lambda \perp V_\mu$, isto é, $\langle x, y\rangle = 0$ para quaisquer $x \in V_\lambda$ e $y \in V_\mu$.

Demonstração. Ver [56] Proposição 7.5.1. □

Proposição A.19. *Sejam H um espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador autoadjunto e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $\lambda \in \rho(T)$ se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $||T(x) - \lambda x|| \geq C||x||$ para todo $x \in H$.*

Demonstração. Ver [56] Proposição 7.5.2. □

Proposição A.20. *Se T é simétrico, não necessariamente compacto, e*

$$m = \inf_{0 \neq u \in H} \frac{\langle Tu, u \rangle}{||u||^2}, M = \sup_{0 \neq u \in H} \frac{\langle Tu, u \rangle}{||u||^2}.$$

Então, $\sigma(T) \subset [m, M]$ e $m, M \in \sigma(T)$. Além disso, $||T|| = \max\{|m|, |M|\}$.

Demonstração. Ver [Brézis] Proposição 6.9. □

Já vimos que tanto os operadores compactos como os operadores autoadjuntos têm espectros com propriedades especiais. Natural é então esperar que operadores que são simultaneamente compactos e autoadjuntos tenham uma teoria espectral ainda mais rica. De fato isso acontece: vamos agora em busca da decomposição espectral dos operadores compactos e autoadjuntos, que nos dirá que se $T \in \mathcal{L}(H, H)$ é compacto e autoadjunto, então H admite um sistema ortonormal completo formado exclusivamente por autovetores de T. Neste caso todo vetor de H poderá ser escrito como uma soma (eventualmente infinita) de autovetores. Para provar este resultado precisamos da

Proposição A.21. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador não-nulo, compacto e autoadjunto. Então $||T||$ ou $-||T||$ é um autovalor de T. Além disso, existe um autovetor $x \in H$ associado a este autovalor tal que $||x|| = 1$ e $|\langle T(x), x \rangle| = ||T||$.*

Demonstração. Ver [56] Proposição 7.5.4. □

Corolário A.22. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador compacto e autoadjunto. Então:*

(a) $\sigma(T) \neq \emptyset$.

(b) Se $\sigma(T) = \{0\}$ *então* $T = 0$.

Demonstração. (a) Se $T = 0$ então 0 é autovalor de T. Se $T \neq 0$, então T tem um autovalor pela Proposição A.20.

(b) Se T fosse não-nulo, T teria um autovalor não-nulo pela Proposição A.20. □

Da Álgebra Linear, sabemos que quando V é um espaço vetorial de dimensão finita, uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$ é diagonalizável se, e somente se, V admite uma base formada por autovetores de T. Nesse sentido, substituindo convenientemente a noção de base algébrica, o teorema abaixo diz que operadores compactos e autoadjuntos em espaços de Hilbert são diagonalizáveis.

Teorema A.23 (Decomposição espectral de operadores compactos e autoadjuntos)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \longrightarrow H$ um operador compacto e autoadjunto. Então H admite um sistema ortonormal completo formado por autovetores de T. Mais ainda, existem sequência (finitas ou infinitas) de autovalores $(\lambda_n)_n$ de T e de vetores $(v_n)_n$ tais que cada v_n é autovetor associado a λ_n e*

$$T(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$$

para todo $x \in H$.

Demonstração. Ver [56] Teorema 7.5.6. □

Apêndice B

O Grau para Aplicações γ-Condensantes

Neste apêndice, X será sempre um espaço de Banach e $\gamma : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vai ser α ou β, medidas de não-compacidade de Kuratowski ou por bolas.

Definição B.1. *Seja $\Omega \subset X$ e $F : \Omega \longrightarrow X$ contínua. F será chamada $\gamma-$Lipschitz se $\gamma(FB) \leq k\gamma(B)$ para algum $k \geq 0$ e todo limitado $B \subset \Omega$. Se $k < 1$, vamos falar de uma $\gamma-$contração estrita e escrever $k-\gamma-$contração se k é importante. F é dito ser $\gamma-$condensante se $\gamma(FB) < \gamma(B)$ sempre que $B \subset \Omega$ é limitado e $\gamma(B) > 0$, em outras palavras, $\gamma(FB) \geq \gamma(B)$ implica $\gamma(B) = 0$. A classe $SC_\gamma(\Omega)$ consistirá de todas $\gamma-$contrações estritas $F : \Omega \longrightarrow X$ e $C_\gamma(\Omega)$ de todas aplicações $\gamma-$condensantes.*

É claro que essas definições contém a condição de que F é limitada, ou seja, F aplica subconjuntos limitados de Ω em conjuntos limitados. Obviamente $SC_\gamma(\Omega) \subset C_\gamma(\Omega)$ e $F \in C_\gamma(\Omega)$ é $\gamma-$Lipschitz com $k = 1$. Devemos manter as definições anteriores de que F é Lipschitz se $|Fx - Fy| \leq k|x-y|$ para algum $k > 0$ e todo $x, y \in \Omega$, e uma contração estrita se $k < 1$; se $k = 1$ é a menor constante de Lipschitz, F será chamada não-expansiva.

Vamos considerar conjuntos abertos limitados $\Omega \subset X$, $F \in C_\gamma(\overline{\Omega})$ e $y \notin (I - F)(\partial\Omega)$, e vamos procurar uma função D dessas triplas admissíveis $(I - F, \Omega, y)$ em $\mathbb{Z}$ que satisfaz

(D1) $D(I, \Omega, y) = 1$ para $y \in \Omega$;

(D2) $D(I-F, \Omega, y) = D(I-F, \Omega_1, y) + D(I-F, \Omega_2, y)$ sempre que Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos disjuntos de Ω tal que $y \notin (I - F)(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$;

(D3) $D(I - H(t, .), \Omega, y(t))$ é independente de $t \in J = [0, 1]$ sempre que $H \in C(J \times \Omega)$ e $\gamma(H(J \times B)) < \gamma(B)$ para todo $B \subset \overline{\Omega}$ com $\gamma(B) > 0$, $y : [0, 1] \longrightarrow X$ é contínuo e $y(t) \neq x - H(t, x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$.

Além disso, será visto mais adiante que destes itens decorre os seguintes:

(D4) $D(I - F, \Omega, y) \neq 0$ implica $(I - F)^{-1}(y) \neq \emptyset$;

(D5) $D(I-G,\Omega,y) = D(I-F,\Omega,y)$ para $G \in \mathcal{K}(\overline{\Omega}) \cap B_r(F)$ e $D(I-F,\Omega,.)$ é constante em $B_r(y)$, onde $r = \rho(y,(I-F)(\partial\Omega))$ e ρ denota a distância. Ainda mais: $D(I-F,\Omega,.)$ é constante em toda componente conexa de $X \backslash (I-F)(\partial\Omega)$;

(D6) $D(I-G,\Omega,y) = D(I-F,\Omega,y)$ sempre que $G|_{\partial\Omega} = F|_{\partial\Omega}$;

(D7) $D(I-F,\Omega,y) = D(I-F,\Omega_1,y)$ para cada subconjunto aberto Ω_1 de Ω tal que $y \notin (I-F)(\overline{\Omega} \backslash \Omega_1)$.

Agora, em primeiro lugar, observamos que D já é determinado por seus valores nas triplas admissíveis tal que F é uma $\gamma-$contração estrita, uma vez que $(D3)$ com $H(t,x) = (1-t(1-k))Fx$ para $k < 1$ e $1-k$ suficientemente pequeno, implica $D(I-F,\Omega,y) = D(I-kF,\Omega,y)$. Portanto, basta considerar F uma $\gamma-$contração estrita com constante $k < 1$.

Em seguida, $(I-F)^{-1}(y) = \emptyset$ implica $D(I-F,\Omega,y) = 0$, por $(D2)$. Vamos então assumir que $(I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset$. Considere

(2) $C_0 = \overline{conv}(F(\overline{\Omega}) + y)$ e $C_n = \overline{conv}(F(\overline{\Omega}) \cap C_{n-1} + y)$ para $n \geq 1$.

Como na prova do Teorema 9.1 (ver [30] pp.71), (C_n) é uma sequência decrescente de conjuntos convexos fechados tal que $\gamma(C_n) \longrightarrow 0$. Portanto, $C_\infty = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ é convexo compacto. Pela definição de C_n é também óbvio que $(I-F)^{-1}(y) \subset C_\infty \cap \Omega$ e $F(\overline{\Omega} \cap C_\infty) + y \subset C_\infty$. Agora, seja $C_\infty \neq \emptyset$ e $R : X \longrightarrow C_\infty$ uma retração. Então $R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ é aberto e $(I-F)^{-1}(y) \subset R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$. Portanto, $(D2)$ implica $D(I-F,\Omega,y) = D(I-F, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y)$. Afirmamos que este inteiro é igual a $D(I-FR, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y)$. Considere $H(t,x) = Fx + t(FRx - Fx)$ em $[0,1] \times \overline{R^{-1}(\Omega) \cap \Omega}$. Evidentemente, H é contínuo e, pela definição dos conjuntos C_n, $x - H(t,x) = y$ implica

$$x = (1-t)(Fx + y) + t(FRx + y) \in \overline{conv}(F(\overline{\Omega} \cap C_n) + y) \text{ para cada } n \geq 0.$$

Portanto, $x \in C_\infty$, $Rx = x$ e $x - H(t,x) = x - Fx = y$. Mas $(I-F)^{-1}(y) \subset R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ e portanto $x \notin \partial(R^{-1}(\Omega) \cap \Omega)$. Desde que $R \in \mathcal{K}(X)$, também temos

$$\gamma(H(J \times B)) \leq \gamma(conv(FB \cup FRB)) \leq \gamma(FB) \leq k\gamma(B).$$

Portanto, podemos aplicar $(D3)$ para obter o que afirmamos ser verdade. Agora, observamos que D é definido, em particular, nas triplas admissíveis de forma que $F \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$. Mas neste subconjunto, existe apenas uma função de valor em $\mathbb{Z}$ satisfazendo $(D1) - (D3)$, o grau de Leray-Schauder D_{LS} (ver [30], pp.56-60). Assim, chegamos a

(3) $D(I-F,\Omega,y) = D_{LS}(I-FR, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y)$ se $(I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset$ e $D(I-F,\Omega,y) = 0$ se $(I-F)^{-1}(y) = \emptyset$.

Finalmente, é bastante óbvio que o lado direito de (3) não muda se substituirmos R por $\tilde{R}$, a retração de X em qualquer conjunto convexo fechado C tal que $C_\infty \subset C$,

$F(\overline{\Omega} \cap C) + y \subset C$ e $F(\overline{\Omega} \cap C)$ é relativamente compacto. Tal C será considerado admissível. De fato, seja $\Omega_1 = R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$, $\Omega_2 = \tilde{R}^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ e $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Então $(D2)$ para o grau de Leray-Shauder implica

$$D(I - FR, \Omega_1, y) = D(I - FR, \Omega_3, y) \text{ e } D(I - F\tilde{R}, \Omega_2, y) = D(I - F\tilde{R}, \Omega_3, y).$$

Para ver que os lados direitos coincidem, considere $H(t, .) = tFR + (1 - t)F\tilde{R}$ que é contínua em $[0, 1] \times \overline{\Omega}_3$. Além disso,

$$H(J \times \overline{\Omega}_3) \subset conv(F(\overline{\Omega} \cap C_\infty) \cup F(\overline{\Omega} \cap C))$$

é relativamente compacto e $x - H(t, x) = y$ implica $x \in C_\infty$ como acima, i.e., $Rx = \tilde{R}x = x$ e portanto $x \in (I - F)^{-1}(y) \subset \Omega_3$. Portanto, $(D3)$ para o grau de Leray-Schauder implica o que queríamos mostrar. Agora, é claro que começamos a construção de D com as condições necessárias (3), e nós finalizamos com o

Teorema B.2. *Seja X um espaço de Banach e*

$$M = \{(I - F, \Omega, y); \Omega \subset X \text{ aberto limitado, } F \in C_\gamma(\overline{\Omega}) \text{ e } y \notin (I - F)(\partial\Omega)\}.$$

Então temos

(a) *Existe uma e apenas uma aplicação $D : M \longrightarrow \mathbb{Z}$ satisfazendo $(D1) - (D3)$, o grau para aplicações $\gamma-$condensantes;*

(b) *Seja $F \in SC_\gamma(\overline{\Omega})$. Então $D(I - F, \Omega, y) = D_{LS}(I - FR, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y)$ se existe um fechado convexo $C \subset X$ tal que $C_\infty \subset C$, $F(\overline{\Omega} \cap C) + y \subset C$ e $F(\overline{\Omega} \cap C)$ é relativamente compacto. Aqui, $C_\infty = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ é definido por (2) e R é qualquer retração em C. Em particular, se $C_\infty \neq \emptyset$, então $C = C_\infty$ é admissível. Se tal C não existe, então $D(I - F, \Omega, y) = 0$.*

(c) *Se F é somente condensante então $D(I - F, \Omega, y) = D(I - kF, \Omega, y)$, onde $k \in [0, 1]$ e $(1 - k).\sup\{|Fx| : x \in \overline{\Omega}\} < \rho(y, (I - F)(\partial\Omega))$.*

(d) *D tem as propriedades $(D4) - (D7)$, com $\mathcal{K}(\overline{\Omega})$ substituído por $C_\gamma(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Como sempre $(D4)-(D7)$ segue de $(D1)-(D3)$, desde que, em particular, $H(t, x) = tFx + (1 - t)Gx$ com $t \in J = [0, 1]$ e $F, G \in C_\gamma(\overline{\Omega})$ é admissível para $(D3)$. Além disso, $(D1)$ é óbvio e não é muito difícil verificar $(D2)$ por meio de $(D2)$ para o grau de Leray-Schauder.

Para $(D3)$, é suficiente considerar uma $\gamma-$contração H com constante $k < 1$ e $y : J \longrightarrow X$ contínua tal que $y(t) \neq x - H(t, x)$ em $J \times \partial\Omega$. Seja

$$C_0 = \overline{conv}(H(J \times \overline{\Omega}) + y(J)), C_n = \overline{conv}\left[H(J \times (\overline{\Omega} \cap C_{n-1})) + y(J)\right] \text{ para } n \geq 1$$

$$\text{e } C_\infty(H) = \bigcap_{n\geq 0} C_n.$$

Então $C_\infty(H)$ é compacto e convexo e $x = H(t,x) + y(t)$ implica $x \in C_\infty(H)$. Portanto, $C_\infty(H) = \emptyset$ implica $D(I - H(t,.), \Omega, y(t)) = 0$ em J. Seja $C_\infty(H) \neq \emptyset$ e R uma retração em $C_\infty(H)$. Note que $C_\infty(H)$ é um C admissível para $H(t,.)$, e portanto

$$D(I - H(t,.), \Omega, y(t)) = D(I - H(t, R.), R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y(t)) \text{ em } J$$

por definição. Mas $\gamma(H(J \times R(R^{-1}(\Omega) \cap \Omega))) = 0$. Portanto, $(D3)$ para o grau de Leray-Schauder nos diz que $D(I - H(t,.), \Omega, y(t))$ é constante em J. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces,* SIAM Rev. 18 (1976) 620-709.

[2] H. Amann, J. López-Gómez, *A priori bounds and multiple solutions for superlinear indefinite elliptic problems,* J. Differential Equations 146 (1998) 336-374.

[3] J.M. Fraile, P.K. Medina, J. López-Gómez, S. Merino, *Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation,* J. Differential Equations 127 (1996) 295-319.

[4] D.H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems,* Indiana Univ. Math. J. 21 (1971) 125-146.

[5] W. Allegretto and P. Nistri, *On a class of nonlocal problems with applications to mathematical biology. Differential equations with applications to biology*, (Halifax, NS, 1997), 1-14, Fields Inst. Commun., 21, Am. Math. Soc., Providence, RI (1999).

[6] C. O. Alves, M. Delgado, M. A. S. Souto and A. Suárez, *Existence of positive solution of a nonlocal logistic population model*, Z. Angew. Math. Phys. 66, pp. 943-953, (2015).

[7] C. O. Alves, N. A. Lima and M. A. S. Souto, *Existence of solution for a nonlocal dispersal model with nonlocal term via bifurcation theory*, J. Differential Equations 268 (2020) 7453-7479.

[8] H. Amann and P. Hess, *A multiplicity result for a class elliptic boudary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 84, pp. 145-151, (1975).

[9] A. Ambrosetti and G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. Ser IV, 93, pp. 231-247, (1972).

[10] P. W. Bates and A. Chmaj, *An Integrodifferential Model for Phase Transitions: Stationary Solutions in Higher Space Dimensions*, Journal of Statistical Physics, 95, pp. 5-6, (1999).

[11] P. Bates, P. Fife, X. Ren and X. Wang, *Travelling waves in a convolution model for phase transitions*. Arch. Rat. Mech. Anal., 138, pp. 105-136, (1997).

[12] P. W. Bates and G. Zhao, *Existence, uniqueness and stability of the stationary solution to a nonlocal evolution equation arising in population dispersal*, J. Math. Anal. Appl., 332, pp. 428-440, (2007).

[13] H. Berestycki, *Le nombre de solutions de certains problèmes semilineaire elliptiques*, J. Funct. analysis 40, pp. 1-29, (1981).

[14] H. Berestycki, J. Coville and V. Hoang-Hung, *Persistence criteria for populations with non-local dispersion*. J. Math. Biol., 72, pp. 1693-1745, (2016).

[15] M. S. Berger and E. Podolak, *On the solutions of nonlinear Dirichlet problem*. Indiana Univ. Math. J., 24, pp. 837-846, (1975).

[16] H. Brèzis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer (2010).

[17] F. E. Browder and R. D. Nussbaum, *The topological degree for noncompact nonlinear mappings in Banach spaces*, Bull. Amer. Math., Soc., 74, pp. 641-646, (1968).

[18] M. L. Cain, B. G. Milligan and A. E. Strand, *Long-distance seed dispersal in plant populations*. Am. J. Bot., 87 (9), pp. 1217-1227, (2000).

[19] E. Chasseigne, M. Chaves and J. D. Rossi, *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equation*, J. Math. Pures Appl. 86, pp. 271-291, (2006).

[20] X. Chen, *Existence, uniqueness and asymptotic stability of travelling waves in nonlocal evolution equations*. Adv. Differential Equations, 2, pp. 125-160, (1997).

[21] S. Chen and J. Shi, *Stability and Hopf bifurcation in a diffusive logistic population model with nonlocal delay effect*, J. Differential Equations, 253, pp. 3440-3470, (2012).

[22] M. Chipot, *Remarks on Some Class of Nonlocal Elliptic Problems*, *Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues*, World Scientific, pp. 79-102, (2006).

[23] J. S. Clark, *Why trees migrate so fast: Confronting theory with dispersal biology and the paleorecord*. The American Naturalist, 152(2), pp. 204-224, (1998).

[24] F. J. S. A. Corrêa, M. Delgado and A. Suárez, *Some nonlinear heterogeneous problems with nonlocal reaction term*, Adv. Differential Equations, 16, pp. 623-641, (2011).

[25] J. Coville, *Convergence to equilibrium for positive solutions of some mutation-selection model*, arXiv: 1308.647(2013).

[26] J. Coville, *Maximum Principles, Sliding Techniques and Applications to Nonlocal Equation*, Electronic Journal of Differential Equations, 68, pp. 1-23, (2007).

[27] J. Coville, *On a simple criterion for the existence of a principal eigenfunction of some nonlocal operators*, J. Differential Equations 249, pp. 2921-2953, (2010).

[28] J. Coville, *On uniqueness and monotonicity of solutions on non-local reaction diffusion equations*, Ann. Mat. Pura Appl. 185, pp. 461-485, (2006).

[29] E. N. Dancer, *On the range of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations*, J. Math. Pures Appl. 54, pp. 351-366, (1978).

[30] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Dover ed. (1943).

[31] D. G. de Figueiredo, *Lectures on Boundary Value Problems of Ambrosetti-Prodi Type.* 12º Seminário Brasileiro de Análise, São Paulo, Brazil (1980).

[32] P. C. Fife, *An integrodifferential analog of semilinear parabolic PDEs.* In *Partial differential equations and applications*, volume 177 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pp. 137-145. Dekker, New York, (1996).

[33] P. C. Fife, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, volume 28 of Lecture Notes in Biomathematics. Springer-Verlag, Berlin, (1979).

[34] J. Furter and M. Grinfeld, *Local vs. nonlocal interactions in population dynamics*, J. Math. Biol., 27, pp. 65-80, (1989).

[35] J. García-Melián and J.D. Rossi, *Maximum and antimaximum principles for some nonlocal difffusion operators*, Nonlinear Analysis, 71, pp. 6116-6121, (2009).

[36] J. García-Melián and J.D. Rossi, *On the principal eigenvalue of some nonlocal diffusion problems*, J. Differential Equation, 246, pp. 21-38, (2009).

[37] V. Hutson, Y. Lou, K. Mischaikow, P. Polacik, *Competing species near a degenerate limit,* SIAM J. Math. Anal. 35 (2003) 453-491.

[38] V. Hutson, S. Martinez, K. Mischaikow and G. T. Vickers, *The evolution of dispersal.* J. Math. Biol., 47(6), pp. 483-517, (2003).

[39] H.R. Thieme, *Remarks on resolvent positive operators and their pertubation,* Discrete Contin. Dyn. Syst. 4 (1998) 73-90.

[40] C.Y. Kao, Y. Lou and W. Shen, *Evolution of mixed dispersal in periodic environment*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 17, pp. 2047-2072, (2012).

[41] C.Y. Kao, Y. Lou, W. Shen, *Random dispersal vs nonlocal dispersal*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 26, pp 551-596, (2010).

[42] J. Kazdan and F. W. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equation*, Comm. Pure Appl. Math. XVIII, pp. 567-597, (1975).

[43] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis, Main Principles and Their Applications,* Appl. Math. Sci., vol. 108, Springer-Verlag, New York, 1995.

[44] H. Leman, S. Méléard and S. Mirrahimi, *Influence of a spatial structure on the long time behavior of a competitive Lotka-Volterra type system*, arXiv:1401.1182 (2014).

[45] W. Huang, *Uniqueness of the bistable traveling wave for mutualist species,* J. Dynam. Differential Equations 13 (2001) 147-183.

[46] N. A. Lima and M. A. S. Souto, *An Ambrosetti-Prodi type result for integral equations involving dispersal operators*, J. Math. Anal. Appl., 512 (2022) 126-157.

[47] J. Medlock and M. Kot, *Spreading disease: integro-differential equations old and new.* Math. Biosci., 184(2), pp. 201-222, (2003).

[48] J. D. Murray, *Mathematical biology*, volume 19 of *Biomathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, (1993).

[49] R. D. Nussbaum, *The Fixed Point Index for Local Condensing Maps*, Ann. Mat. Pura Appl., Volume 89, Issue 1, pp. 217-258, (1971).

[50] R. D. Nussbaum, *Degree Theory for Local Condensing Maps*, J. Math. Anal. Appl. 37, pp. 741-766, (1972).

[51] P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7**, pp. 487-513 (1971).

[52] F. Andreu-Vaillo, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. J. Toledo-Melero, *Nonlocal Diffusion Problems*, Applieds Mathematics - Mathematical Surveys and Monographs, Volume 165, (2010).

[53] F. M. Schurr, O. Steinitz and R. Nathan, *Plant fecundity and seed dispersal in spatially heterogeneous environments: models, mechanisms and estimation.* J. Ecol., 96(4), pp. 628-641, (2008).

[54] L. Sun, J. Shi and Y. Wang, *Existence and uniqueness of steady state solutions of a nonlocal diffusive logistic equation*, Z. Angew. Math. Phys., 64, pp. 1267-1278, (2013).

[55] J. García-Melian, R. Letelier-Albornoz, J. Sabina de Lis, *Uniqueness and asymptotic behaviour for solutions of semilinear problems with boundary blow-up*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 3593–3602.

[56] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos de análise funcional*, Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[57] J. García-Melián, Julio D. Rossi, *A logistic equation with refuge and nonlocal diffusion*, Communications on Pure and Applied Analysis, 2009.