Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço via fórmula de Bochner

por

**Ismael Araújo Da Silva** †

sob orientação do

**Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESQPB.

# Rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço via fórmula de Bochner


**por**

**Ismael Araújo da Silva**


Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Eraldo Almeida Lima Júnior

**Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior -UFPB**

Marco Lazaro

**Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez -UFCG**

**Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima -UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**

**Centro de Ciências e Tecnologia**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Curso de Mestrado em Matemática**

**Março/2022**

# Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo das hipersuperfícies $\Sigma^n$ tipo-espaço completas, com curvatura média constante, imersas no produto Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$ o qual tem fibra Riemanniana $M^n$ completa. Com o uso da fórmula de Bochner juntamente com o princípio do máximo de Omori-Yau demonstramos que, se considerarmos uma tal hipersuperfície imersa em $-\mathbb{R} \times M^n$ com $M^n$ completa e com curvatura seccional não negativa, e sendo limitado o ângulo hiperbólico normal da hipersuperfície, então esta deve ser máxima. Além disso, se a hipersuperfície for limitada no infinito futuro ou passado então ela será um *slice*. Verificamos também tal resultado para gráficos inteiros.

**Palavras chave:** Produtos Lorentzianos, fórmula de Bochner, hipersuperfícies tipo-espaço completas.

# Abstract

In this work we present a study of complete spacelike hypersurfaces $\Sigma^n$, with constant mean curvature, immersed in the Lorentzian product $\mathbb{R} \times M^n$ which has complete Riemannian fiber $M^n$. Using Bochner's formula jointly with the Omori-Yau's maximum principle we show that if we consider such a hypersurface immersed in $-\mathbb{R} \times M$ with $M^n$ having non-negative sectional curvature, and assuming the boundedness of the normal hyperbolic angle of the hypersurface, then it must be maximal. Furthermore, if the hypersurface is bounded away from the future (or past) infinity then it is a *slice*. We also verify this result for entire graphs.

**Keywords:** Lorentzian products, Bochner's formula, complete spacelike hypersurfaces.

# Conteúdo

# Introdução

O estudo da geometria de uma hipersuperfície tipo-espaço, imersa em um produto Lorentziano, tem crescido gradualmente nos últimos anos. Do ponto de vista matemático, esse crescimento se deve ao fato que tais hipersuperfícies apresentam ótimos resultados do tipo Bernstein. Os resultados do tipo Bernstein podem ser obtidos quando se considera a rigidez de uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um produto Lorentziano da forma $-\mathbb{R} \times M^n$, em que a fibra $M^n$ é uma variedade Riemaninana de dimensão $n$. Em 1915 Bernstein [6] provou que os únicos gráficos inteiros e mínimos do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ são os planos. Para o caso em que o ambiente é uma variedade de Lorentz, Calabi [8] mostrou que para $n \leq 4$ as únicas hipersuperfícies tipo-espaço, completas e máximas, imersas no produto de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, são os hiperplanos tipo-espaço, tal resultado ficou conhecido como teorema de Calabi-Bernstein. Um caso mais geral do teorema de Calabi-Bernstein, em que a hipersuperfície tem dimensão $n$ qualquer, foi provado por Cheng e Yau [11]. Posteriormente, Caminha [10] mostrou que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas, com curvatura média constante positiva e curvatura escalar não negativa, imersas em $\mathbb{L}^{n+1}$, são os cilindros sobre uma curva plana, generalizando então o teorema de Calabi-Bernstein para o contexto de hipersuperfícies com curvatura média constante.

Quando se considera uma imersão $f : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+k}$ de uma variedade diferenciável $\Sigma^n$ de dimensão $n$ em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+k}$ de dimensão $n+k$, pode-se induzir em $\Sigma^n$ uma métrica Riemanniana a partir da métrica de $\overline{M}^{n+k}$: para $v_1, v_2 \in T_p\Sigma^n$, define-se $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Dessa forma chama-se $f$ de imersão isométrica de $\Sigma^n$ em $\overline{M}^{n+k}$. Uma das principais relações entre as métricas de $\Sigma^n$ e $\overline{M}^{n+k}$ é a chamada fórmula de Gauss $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N$ em que a aplicação

$A : T\Sigma^n \to T\Sigma^n$ dada por $AX = -\overline{\nabla}_X N$ é o operador de forma de $\Sigma^n$ com respeito a aplicação normal de Gauss $N$. A partir da fórmula de Gauss podemos estudar relações entre as geometrias de $\Sigma^n$ e $\overline{M}^{n+k}$. Para uma imersão isométrica de codimensão igual a 1 e o ambiente $\overline{M}^{n+1}$ munido da métrica Lorentziana, isto é, $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$ munido da métrica $\langle , \rangle = -dt^2 + \langle , \rangle_M$. Tem-se então uma imersão isométrica em um produto Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$. Nestas condições podemos obter resultados do tipo Bernstein.

Nesta dissertação estudamos a geometria de uma hipersuperfície tipo-espaço $\Sigma^n$ imersa no ambiente Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$, em que a fibra $M^n$ é uma variedade Riemaniana conexa de dimensão $n$. Neste ambiente apresentamos os seguintes resultados:

Com o uso da fórmula de Bochner, o princípio de Omori-Yau e uma extensão do teorema de Liouville [17], mostremos que considerando uma hipersuperfície $\Sigma^n$ completa, tipo-espaço, com curvatura média constante, imersa num produto Lorentziano com fibra completa e curvatura seccional não negativa. Teremos que, se o ângulo hiperbólico normal $\theta$ da hipersuperfície for limitado então a $\Sigma^n$ será máxima. Além disso se a hipersuperfície $\Sigma^n$ for limitada no infinito futuro ou passado então a $\Sigma^n$ será um *slice*.

Considerando um gráfico vertical $\Sigma^n(u)$ inteiro com curvatura média constante em um espaço produto Lorentziano, cuja a fibra é geodesicamente completa e tem curvatura seccional não negativa: Se a norma da função $u$ é limitada por uma constante positiva menor do que 1, então $\Sigma^n(u)$ é um gráfico máximo completo. Além disso, se $\Sigma^n(u)$ for limitado no infinito futuro ou passado do ambiente Lorentziano, então $\Sigma^n(u)$ é um *slice*, ou seja, $u$ é uma função constante.

Os resultados citados acima são referentes ao artigo de Aquino et al. [4]. Além destes, apresentaremos o seguinte resultado, referente ao artigo da Alma et al. [3].

Para o caso $n = 2$, se considerarmos a fibra com uma superfície completa com curvatura Gaussiana não negativa então qualquer superfície $\Sigma^2$, máxima, completa, imersa em $-\mathbb{R} \times M^2$ é totalmente geodésica. Além disso se a curvatura Gaussiana for estritamente positiva em algum ponto da fibra $M^2$ então $\Sigma^2$ é um *slice*.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo trataremos de alguns pré-requisitos para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Nas respectivas seções deste capítulo abordaremos um pouco dos conceitos relacionados a campos de vetores, Métricas Riemannianas, Geodésicas, Tensores, Curvaturas e Variedades Riemannianas completas. Algumas demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo não serão expostas, por escapar às nossas finalidades, mas tais demonstrações podem serem encontradas em [13].

Neste capítulo veremos que a partir da definição de campo vetorial é possível introduzir na variedade uma outra aplicação, via o produto interno munido no espaço tangente a variedade $M^n$, que pega um par de vetores tangentes e leva em valores de $\mathbb{R}$, esta aplicação é denominada de métrica, que nos permite calcular grandezas geométricas de $M^n$, tais como comprimento de curvas e áreas de domínios. Além disso é possível sempre considerar uma única conexão em $M^n$ que satisfaz condições específicas, a saber: a simetria e a compatibilidade com a métrica Riemanniana, chamada de conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana). Após estas construções, consideraremos sempre uma variedade com a conexão de Levi-Civita.

Um estudo mais detalhado dos conteúdos abordados neste capítulo pode ser feito com acesso à referência [13].

## 1.1 Campos de vetores

Dada uma variedade $M^n$ definimos um campo vetorial como uma aplicação diferenciável que tem como imagem vetores tangentes a $M^n$.

Dados dois campos vetoriais diferenciáveis, digamos, $X$ e $Y$ em $M^n$ e uma função diferenciável $f : M^n \to \mathbb{R}$, podemos considerar as operações $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. No geral essas operações não são campos vetoriais por si mesmas, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira, entretanto veremos adiante que a diferença de tais operações define um único campo em $M^n$.

**Definição 1.1** *Um campo de vetores $X$ em uma variedade diferenciável $M^n$ é uma correspondência que associa cada ponto $p \in M^n$ um vetor $X(p)$ no espaço tangente $T_pM^n$ de $M^n$ no ponto $p$.*

Quando a aplicação $X : M^n \to TM = \{(p, v); p \in M^n, v \in T_pM^n\}$ for diferenciável, dizemos que o campo $X$ é diferenciável.

Dados $X$ e $Y$ campos de vetores diferenciáveis, definidos em uma variedade $M^n$, então podemos definir um único campo da forma $XY - YX$ em $M^n$. Este campo é chamado de *Colchete de Lie* e é denotado por $[X, Y]$, essa definição decorre do seguinte lema

**Lema 1.1** *Sejam $X, Y$ campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável $M^n$. Então existe um único campo $[X, Y]$ tal que para toda função $f \in C^\infty(M^n) = \{\phi : M^n \to \mathbb{R}; \phi$ é diferenciável $\}$ se tem $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.*

**Prova.** Inicialmente suponhamos a existência de um campo $XY - YX$ e mostraremos que ele é único. Considere $p \in M^n$ e $\varphi : U \to M^n$ uma parametrização em $p$, então

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

são as expressões de $X$ e $Y$ na parametrização $\varphi$. Logo, para todo $f \in C^\infty(M^n)$, teremos

$$X(Y(f)) = X\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

e
$$Y(X(f)) = Y\left(\sum_{j=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$
Portanto, o campo $XY - YX$ é dado, na parametrização $\varphi$, por

$$(XY - YX)(f) = XYf - YXf = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j},$$

donde o campo $XY - YX$ é único.

Para a demonstração da existência definimos localmente $XY - YX$ em cada vizinhança coordenada $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ de $M^n$ pela expressão acima. Da unicidade da expressão, segue que $(XY - YX)_\alpha = (XY - YX)_\beta$ em $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \phi$, o que permite definir $XY - YX$ em toda $M^n$.

$\blacksquare$

## 1.2 Métrica Riemanniana

Para uma variedade diferenciável $M^n$ podemos definir uma aplicação diferenciável que nos permite medir comprimentos de vetores tangentes, e consequentemente podemos calcular comprimentos de curvas definidas em $M^n$ e áreas de regiões de $M^n$. A aplicação é a seguinte

**Definição 1.2** *Seja $M^n$ uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em $M^n$ é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M^n$ um produto interno $\langle , \rangle_p$ em $T_pM^n$ de tal forma que para todo par $X, Y$ de campos de vetores diferenciáveis definidos em uma vizinhaça $U$ de $M^n$, a função $\langle X, Y\rangle$ é diferenciável em $U$.*

Uma variedade diferenciável, com uma métrica Riemanniana introduzida, é chamada de variedade Riemanniana.

Para uma variedade Riemanniana $N^{n+k}$ é possível induzir, em uma outra variedade diferenciável $M^n$, uma métrica por meio da aplicação definida a seguinte

**Definição 1.3** *Sejam $M^m$ e $N^n$ variedades Riemannianas. Dizemos que um difeomorfismo $f : M^n \to N$ é uma isometria quando para todo $u, v \in T_pM^n$,*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \qquad \forall p \in M^n.$$

Dizemos que $f : M^m \to N^n$ é uma isometria local em $p \in M^m$ quando existe uma vizinhança $U \subset M^m$ de $p$ tal que $f : U \to f(U)$ é uma isometria. Se $f$ é uma isometria local para todo $p \in M^m$ então $M^m$ e $N^n$ são ditos localmente isométricos.

**Definição 1.4** *Sejam $M^m$ e $N^n$ variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é uma imersão se a diferencial $df_p : T_pM^m \to T_{f(p)}N^n$ é injetiva para todo $p \in M^m$.*

Quando uma imersão $f : M^m \to N^n$ é um homeomorfismo sobre sua imagem, em que $f(M^m)$ tem topologia induzida pela topologia de $N^n$, dizemos que $f$ é um mergulho. Por exemplo, se $M^m \subset N^n$ então a inclusão $i : M^m \to N^n$ é um mergulho e neste caso dizemos que $M^m$ é uma subvariedade de $N^n$.

Se $f : M^m \to N^n$ é uma imersão com $n < m$, então a diferença $m - n$ é chamada de codimensão da imersão $f$. Quando uma imersão tem codimensão igual a 1 dizemos que $f(M^m) \subset N^n$ é uma hipersuperfície.

**Exemplo 1** *Seja $f : M^n \to N^{n+k}$ uma imersão, se $N^{n+k}$ tem estrutura Riemanniana, $f$ induz uma estrutura Riemanniana em $M^n$ por $\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_pM$. A métrica de $M^n$ é chamada de métrica induzida por $f$.*

Sejam $M_1$ e $M_2$ variedades Riemannianas, considerando a estrutura diferenciável produto $M_1 \times M_2$, teremos para $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ que

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_q$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$, define uma métrica Riemanniana em $M_1 \times M_2$, onde $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ são as projeções naturais.

Em uma variedade diferenciável $M^n$, uma aplicação $c : I \subset \mathbb{R} \to M^n$ diferenciável é chamada de curva. Uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M^n$ é chamado de campo vetorial $V$ ao longo de $c$. Dizemos que $V$ é diferenciável quando para toda função $f \in C^\infty(M^n)$, a função $t \mapsto V(t)f$ é diferenciável em $I$. O campo $c'(t)$ é chamado campo velocidade, ou campo tangente da curva $c$.

Se $M^n$ é uma variedade Riemanniana, definimos então o comprimento de uma curva $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to M^n$, por

$$L_\alpha = \int_a^b \langle \alpha'(\tau), \alpha'(\tau)\rangle^{1/2} d\tau.$$

## 1.3 Conexões Riemannianas

Indicaremos por $\mathcal{X}(M^n)$ o conjunto dos campos de vetores de classe $C^\infty$ em uma variedade diferenciável $M^n$.

**Definição 1.5** *Uma conexão afim $\nabla$ em uma variedade diferenciável $M^n$ é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M^n) \times \mathcal{X}(M^n) \to \mathcal{X}(M^n)$$

*que pega um par de campos $(X, Y)$ em $\mathcal{X}(M^n) \times \mathcal{X}(M^n)$ e leva num campo $\nabla_X Y$, satisfazendo*

*i)* $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

*ii)* $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

*iii)* $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Para uma variedade diferenciável $M^n$ com uma conexão afim $\nabla$. É possível obter uma única correspondência que associa, um campo vetorial $V$ ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M^n$, um outro campo vetorial ao longo de $c$ denotado por $\frac{DV}{dt}$, que satisfaz

*a)* $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,

*b)* $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde $W$ é um campo de vetores ao longo de $c$ e $f$ uma função diferenciável em $I$,

*c)* Se $V$ é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M^n)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)}Y$.

O campo $\frac{DV}{dt}$ é denominado de *derivada covariante* de $V$ ao longo de $c$.

Sendo $c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ e $V = \sum_j v^j X_j$, a derivada covariante tem expressão clássica

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{1.1}$$

em que as funções $\Gamma_{ij}^k$, definidas para um sistema de coordenadas locais $(U, \varphi)$ por $\nabla_{X_i}X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, são os chamados *simbolos de Christoffel* da conexão $\nabla$.

Podemos ver que no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_{ij}^k = 0$ e neste caso a derivada covariante coincide com a derivada usual.

**Definição 1.6** *Seja $M^n$ uma variedade diferenciável com uma conexão $\nabla$. Um campo vetorial $V$ ao longo de uma curva $c : I \to M^n$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

No caso em que $M^n$ é uma variedade Riemanniana. A conexão $\nabla$ é dita compatível com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável $c$ em $M^n$ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos $X, Y$, ao longo de $c$, tenhamos $\langle X, Y \rangle$ igual a uma função constante.

**Proposição 1.7** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana. Uma conexão $\nabla$ em $M^n$ é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par de campos de vetores $V$ e $W$ ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M^n$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \qquad t \in I.$$

Podemos escrever a Proposição 1.7 em termos de campos quaisquer, como segue no seguinte corolário

**Corolário 1.8** *Uma conexão $\nabla$ em uma variedade Riemanniana $M^n$ é compatível com a métrica se, e somente se, para quaisquer campos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M^n)$,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle .$$

Quando $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ para uma conexão $\nabla$ em uma variedade Riemanniana $M^n$, dizemos que $\nabla$ é simétrica, e daí segue que em um sistema de coordenadas $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$

O teorema a seguir classifica as variedades com uma conexão $\nabla$ de interesse, tal conexão leva o nome de conexão Riemanniana ou conexão de Levi-Civita.

**Teorema 1.9** ***(Levi-Civita)*** *Dada uma variedade Riemanniana $M^n$. Existe uma única conexão afim $\nabla$ em $M^n$, simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

**Prova.** Partiremos da suposição que existe uma conexão $\nabla$, simétrica e compatível com a métrica, em $M^n$ e mostraremos que tal conexão é única.

Do Corolário (1.8) teremos as seguintes expressões:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle , \tag{1.2}$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle , \tag{1.3}$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle . \tag{1.4}$$

Por outro lado, usando a simetria de $\nabla$, teremos

$$\nabla_X Y = [X,Y] + \nabla_Y X \tag{1.5}$$

$$[X,Z] = \nabla_X Z - \nabla_Z X \tag{1.6}$$

$$[Y,Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y. \tag{1.7}$$

Fazendo (1.2) + (1.3) − (1.4), teremos

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ &\quad - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle . \end{aligned}$$

Usando (1.5), (1.6) e (1.7), na expressão acima obtemos a chamada *fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}\left(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle\right. \\ &\quad \left. - \langle [X,Z], Y\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle - \langle [X,Y], Z\rangle\right). \end{aligned} \tag{1.8}$$

A expressão (1.8) mostra que qualquer conexão simétrica e compatível com a métrica terá sempre a mesma expressão em (1.8), o que mostra a unicidade de $\nabla$.

Para a demonstração da existência, definimos $\nabla$ como está em (1.8) e, mostraremos que $\nabla$ é conexão, simétrica e compatível com a métrica.

Considerando $f, g \in C^{\infty}(M^n)$ e $V, W \in \mathcal{X}(M^n)$, teremos que

$$\begin{aligned}
\left\langle Z, \nabla_{(fW+gV)}X \right\rangle &= \frac{1}{2}\left(X\left\langle fW+gV, Z\right\rangle + (fW+gV)\left\langle Z, X\right\rangle - Z\left\langle X, fW+gV\right\rangle\right.\\
&\quad \left. - \left\langle [X,Z], fW+gV\right\rangle - \left\langle [fW+gV, Z], X\right\rangle - \left\langle [X, fW+gV], Z\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(fX\left\langle W, Z\right\rangle + gX\left\langle V, Z\right\rangle + fW\left\langle Z, X\right\rangle + gV\left\langle Z, X\right\rangle - fZ\left\langle X, W\right\rangle\right.\\
&\quad -gZ\left\langle X, V\right\rangle - f\left\langle [X,Z], W\right\rangle - g\left\langle [X,Z], V\right\rangle - \left\langle [fW, Z], X\right\rangle\\
&\quad \left. - \left\langle [gV, Z], X\right\rangle - \left\langle [X, fW], Z\right\rangle - \left\langle [X, gV], Z\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(fX\left\langle W, Z\right\rangle + gX\left\langle V, Z\right\rangle + fW\left\langle Z, X\right\rangle + gV\left\langle Z, X\right\rangle\right.\\
&\quad -fZ\left\langle X, W\right\rangle - gZ\left\langle X, V\right\rangle - f\left\langle [X,Z], W\right\rangle - g\left\langle [X,Z], V\right\rangle\\
&\quad - \left\langle f[W,Z] - Z(f)W, X\right\rangle - \left\langle g[V,Z] - Z(g)V, X\right\rangle\\
&\quad \left. - \left\langle f[X,W] + X(f)W, Z\right\rangle - \left\langle g[X,V] + X(g)V, Z\right\rangle\right)\\
&\quad \left\langle Z, f\nabla_W X\right\rangle + \left\langle Z, g\nabla_V X\right\rangle + \left\langle W, Z(f)X\right\rangle + \left\langle V, Z(g)X\right\rangle\\
&\quad - \left\langle W, X(f)Z\right\rangle - \left\langle V, X(g)Z\right\rangle = \left\langle Z, f\nabla_W X + g\nabla_V X\right\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle Z, \nabla_Y (V+W)\right\rangle &= \frac{1}{2}\left((V+W)\left\langle Y, Z\right\rangle + Y\left\langle Z, V+W\right\rangle - Z\left\langle V+W, Y\right\rangle\right.\\
&\quad \left. - \left\langle [V+W, Z], Y\right\rangle - \left\langle [Y,Z], V+W\right\rangle - \left\langle [V+W, Y], Z\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(V\left\langle Y, Z\right\rangle + W\left\langle Y, Z\right\rangle + Y\left\langle Z, V\right\rangle + Y\left\langle Z, W\right\rangle\right.\\
&\quad -Z\left\langle V, Y\right\rangle - Z\left\langle W, Y\right\rangle - \left\langle [V,Z], Y\right\rangle - \left\langle [W,Z], Y\right\rangle\\
&\quad \left. - \left\langle [Y,Z], V\right\rangle - \left\langle [Y,Z], W\right\rangle - \left\langle [V,Y], Z\right\rangle - \left\langle [W,Y], Z\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(V\left\langle Y, Z\right\rangle + Y\left\langle Z, V\right\rangle - Z\left\langle V, Y\right\rangle - \left\langle [V,Z], Y\right\rangle - \left\langle [Y,Z], V\right\rangle\right.\\
&\quad \left. - \left\langle [V,Y], Z\right\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(W\left\langle Y, Z\right\rangle + Y\left\langle Z, W\right\rangle - Z\left\langle W, Y\right\rangle - \left\langle [W,Z], Y\right\rangle\right.\\
&\quad \left. - \left\langle [Y,Z], W\right\rangle - \left\langle [W,Y], Z\right\rangle\right)\\
&= \left\langle Z, \nabla_Y V\right\rangle + \left\langle Z, \nabla_Y W\right\rangle = \left\langle Z, \nabla_Y V + \nabla_Y W\right\rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle Z, \nabla_Y(fX)\rangle &= \frac{1}{2}\left((fX)\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, fX\rangle - Z\langle fX, Y\rangle - \langle [fX, Z], Y\rangle\right.\\
&\quad \left. - \langle [Y, Z], fX\rangle - \langle [fX, Y], Z\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(fX\langle Y, Z\rangle + fY\langle Z, X\rangle - fZ\langle X, Y\rangle - f\langle [X, Z], Y\rangle\right.\\
&\quad \left. -f\langle [Y, Z], X\rangle - f\langle [X, Y], Z\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(\langle Z(f)X, Y\rangle + \langle Y(f)X, Z\rangle\right)\\
&= \langle Z, f\nabla_Y X\rangle + \langle Z, Y(f)X\rangle = \langle Z, f\nabla_Y X + Y(f)X\rangle .
\end{aligned}$$

Assim, $\nabla$ é uma conexão afim. Temos ainda que,

$$\begin{aligned}
\langle Z, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle &= \langle Z, \nabla_X Y\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle\\
&= \frac{1}{2}\left(Y\langle X, Z\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Z\langle Y, X\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle\right.\\
&\quad \left. - \langle [Y, X], Z\rangle\right) - \frac{1}{2}\left(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle\right.\\
&\quad \left. - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\right)\\
&= -\frac{1}{2}\langle [Y, X], Z\rangle + \frac{1}{2}\langle [X, Y], Z\rangle\\
&= -\frac{1}{2}\langle -[X, Y], Z\rangle + \frac{1}{2}\langle [X, Y], Z\rangle\\
&= \langle Z, [X, Y]\rangle .
\end{aligned}$$

Logo, $\nabla$ é uma conexão simétrica.

Por fim, vejamos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle &= \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\\
&= \frac{1}{2}\left(Y\langle X, Z\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Z\langle Y, X\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle\right.\\
&\quad \left. - \langle [Y, X], Z\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(Z\langle X, Y\rangle + X\langle Y, Z\rangle - Y\langle Z, X\rangle - \langle [Z, Y], X\rangle\right.\\
&\quad \left. - \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Z, X], Y\rangle\right)\\
&= X\langle Z, Y\rangle .
\end{aligned}$$

Segue, então, do Corolário (1.8) que a conexão $\nabla$ é compatível com a métrica.

■

O teorema de Levi-Civita, no geral, vale para qualquer variedade diferenciável munido de uma métrica não-degenerada. De agora em diante, consideraremos sempre variedades com a conexão de Levi-Civita.

## 1.4 Geodésicas

As geodésicas, de uma variedade Riemanniana $M^n$, são as curvas de $M^n$ que tem aceleração nula. Uma geodésica em uma variedade Riemanniana $M$ é caracterizada por ser a curva que minimiza comprimento de arco, entre dois pontos de $M^n$.

**Definição 1.10** *Uma curva diferenciável $\gamma : I \to M^n$ é uma geodésica se $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ em $I$.*

Sejam $\gamma$ uma curva definida em uma variedade Riemanniana $M^n$ e $(U, \varphi)$ um sistema de coordenadas em torno do ponto $\gamma(t_0)$ em que $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ em $U$. Então segue de (1.1) que $\gamma$ é geodésica se e somente se

$$0 = \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Logo teremos um sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0, \qquad k = 1, ..., n, \tag{1.9}$$

que são as equações locais satisfeitas pela geodésica $\gamma$.

Para um aberto $U \subset M^n$ de uma variedade Riemanniana $M^n$. Dizemos que uma coleção $\{E_1, ..., E_n\}$ de campos de vetores em $U$ é um referencial ortonormal em $U$ quando $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$ para todo ponto de $U$, em que $\delta_{ij}$ é o *delta de Kronecker*.

Se $U$ é um domínio de uma carta em $M^n$ (aberto e conexo cuja fronteira é a imagem de uma esfera por um homeomorfismo diferenciável), com campos coordenados $\partial_1, ..., \partial_n$ então sempre podemos obter um referencial ortonormal em $U$, usando o processo de ortogonalização de *Gramm-Schmidt*.

**Proposição 1.11** *Dados $p \in M^n$, existem uma vizinhança $V$ de $p$ em $M^n$, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação $\gamma(-2, 2) \times \mathcal{U} \to M^n$, $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_qM^n, |w| < \varepsilon\}$ tal que $t \to \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de $M^n$ que no instante $t = 0$ passa por $q$ com velocidade $w$, para cada $q \in V$ e cada $w \in T_qM^n$, com $|w| < \varepsilon$.*

Seja $p \in M^n$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado conforme a Proposição 1.11, então definimos a aplicação exponencial de $\mathcal{U}$, $\exp : \mathcal{U} \to M^n$, por

$$\exp(q,v) = \gamma(1,q,v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}), \qquad (q,v) \in \mathcal{U}.$$

Para $B_\varepsilon(0)$, uma bola aberta de centro na origem de $T_qM^n$ de raio $\varepsilon$, definimos a aplicação $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM^n \to M^n$ por $\exp_q(v) = \exp(q,v)$. Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de $M^n$ obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de $q$, sobre a geodésica que passa por $q$ com velocidade $\frac{v}{|v|}$.

**Lema 1.2** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana. Então para cada $p \in M^n$ existe uma vizinhança $U \subset M^n$ de $p$ e um referencial ortonormal $\{E_i\}_i$ em $U$, tal que, em $p$, $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0$. Esse referencial é chamado de referencial geodésico.*

**Prova.** Consideremos $B_\delta(0) \subset T_pM^n$ tal que $\exp_p : B_\delta(0) \to \exp_p(B_\delta(0))$ é um difeomorfismo e seja $f = \exp_p \circ J$, em que $J : B_\delta(0) \subset R^n \to B_\delta(0) \subset T_pM^n$ é uma isometria.

Agora, seja $v \in T_pM^n$ com $\exp_p(tv) = \gamma(t)$, $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Escrevendo $v = \sum_{i=1}^{n+1} a_iE_i$ em que $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ é uma base ortonormal de $T_pM^n$, teremos para um sistema de coordenadas $(U, \varphi_i)$ normal em $M^n$, que

$$\varphi_i(\gamma(t)) = f_i(tv) = tf_i(v) = ta_i$$

em que $J(a_1, ..., a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_iE_i$. Assim $v = \gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0$, deste modo $E_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0$ e o referencial $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\}$ é ortonormal em $p$. Além disso, substituindo $\varphi_i(\gamma(t)) = ta_i$ em (1.9), obtemos

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))a_ia_j = 0, \qquad k \in \{1, ..., n+1\}.$$

Sendo $a_i, a_j$ arbitrários, teremos $\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0$, donde $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$.

∎

Para mais detalhes da demonstração acima, ver [16].

## 1.5 Tensores covariantes

Um tensor pode ser visto como a generalização de campos de vetores e um ponto importante a se destacar é que, assim como os campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

**Definição 1.12** *Um tensor (covariante) de ordem $r$ em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear*

$$T : \mathcal{X}(M^n)^r \to C^\infty(M^n),$$

*em que $\mathcal{X}(M^n)^r$ denota o produto cartesiano de $\mathcal{X}(M^n)$ por ele mesmo $r$ vezes.*

O tensor de ordem 2

$$G : \mathcal{X}(M^n) \times \mathcal{X}(M^n) \to C^\infty(M^n)$$

definido por

$$G(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

é chamado de *tensor métrico.*

Vale salientar que um tensor $T$ tem caráter pontual, no seguinte sentido: Se considerarmos um ponto $p \in M^n$ e uma vizinhança $U$ de $p$ em $M^n$ onde definimos campos $E_1, ..., E_n \in \mathcal{X}(M^n)$, de modo que em cada ponto de $U$ a coleção $\{E_i\}_i$, $i = 1, ..., n$ é uma base local para o espaço tangente em $U$ no respectivo ponto. Podemos então escrever $T$ no ponto de $M^n$ dependendo apenas dos valores em $p$ da componentes de $T$, e dos valores de $X_i \in \mathcal{X}(M^n)$, $i = 1, ..., r$.

Podemos estender os tensores à noção de derivada covariante, como segue no exemplo seguinte

**Exemplo 2** *Sendo $T$ um tensor de ordem $r$. A diferencial covariante $\nabla T$ de $T$ dada por*

$$\nabla T(X_1, ...X_r, Y) = Y(T(X_1, ..., X_r)) - T(\nabla_Y X_1, ..., X_r) - \cdots - T(X_1, ..., X_{r-1}, \nabla_Y X_r)$$

*para cada $Y \in \mathcal{X}(M^n)$, é um tensor de ordem $r{+}1$. De fato, basta verificar a linearidade* *em cada entrada de $T$, para isso considere $V, W \in \mathcal{X}(M^n)$ e $f \in C^\infty(M^n)$. Daí*

$$
\begin{aligned}
&\nabla T(X_1, ..., fV + W, ..., X_r, Y)\\
&= Y(T(X_1, ..., fV + W, ..., X_r)) - T(\nabla_Y X_1, ..., fV + W, ..., X_r)\\
&\quad - \cdots - T(X_1, ..., \nabla_Y(fV + W), ..., X_r) - \cdots\\
&\quad - T(X_1, ..., fV + W, ..., X_{r-1}, \nabla_Y X_r)\\
&= fY(T(X_1, ..., V, ..., X_r)) + Y(T(X_1, ..., W, ..., X_r))\\
&\quad - fT(\nabla_Y X_1, ..., V, ..., X_r) - T(\nabla_Y X_1, ..., W, ..., X_r)) - \cdots\\
&\quad - fT(X_1, ..., \nabla_Y V, ..., X_r) - T(X_1, ..., \nabla_Y W, ..., X_r) - \cdots\\
&\quad - fT(X_1, ..., V, ..., X_{r-1}, \nabla_Y X_r) - T(X_1, ..., W, ..., X_{r-1}, \nabla_Y X_r)\\
&= f\nabla T(X_1, ..., V, ..., X_r, Y) + \nabla T(X_1, ..., W, ..., X_r, Y).
\end{aligned}
$$

A derivada covariante de tensores é uma generalização da derivada covariante de campos de vetores. De fato, fixando $X \in \mathcal{X}(M^n)$ e considerando a aplicação que pega $Y \in \mathcal{X}(M^n)$ e leva na função $G_X(Y) = \langle X, Y \rangle$, temos que a derivada covariante do tensor $G_X$ em relação ao campo $Z \in \mathcal{X}(M^n)$ é tal que, para todo $Y \in \mathcal{X}(M^n)$,

$$
\begin{aligned}
\nabla G_X(Y, Z) &= Z(G_X(Y)) - G_X(\nabla_Z Y) = Z(X(Y)) - X(\nabla_Z Y)\\
&= Z \langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle .
\end{aligned}
$$

Assim o tensor $\nabla G_X$ pode ser identificado ao campo $\nabla_Z X$.

## 1.6 Curvatura

A noção de curvatura (tensor curvatura) é um caso particular da noção de tensor covariante. Podemos pensar no tensor curvatura como o objeto que nos permite ver o quanto uma variedade Riemanniana $M^n$ deixa de ser euclidiana.

**Definição 1.13** *Definimos o tensor curvatura $R$ de uma variedade Riemanniana $M^n$ como sendo a aplicação que associa a cada par de campos $X, Y$ em $\mathcal{X}(M^n)$, uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M^n) \to \mathcal{X}(M^n)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad Z \in \mathcal{X}(M^n)$$

*em que $\nabla$ é a conexão Riemanniana e $[X, Y]$ o colchete de Lie de $X$ e $Y$.*

O tensor curvatura da variedade Riemanniana $\mathbb{R}^n$ é identicamente nula.

**Proposição 1.14** *O tensor curvatura R satisfaz as seguintes propriedades:*
*a)* $\langle R(X,Y)Z,T\rangle + \langle R(Y,Z)X,T\rangle + \langle R(Z,X)Y,T\rangle = 0$
*b)* $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(Y,X)Z,T\rangle$
*c)* $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(X,Y)T,Z\rangle$
*d)* $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(Z,T)X,Y\rangle$.

A propriedade *a*) é conhecida como *primeira identidade de Bianchi.*

### 1.6.1 Curvatura seccional

A definição de curvatura seccional de uma variedade Riemanniana generaliza a noção de curvatura Gaussiana de uma superfície do $\mathbb{R}^3$.

Para dois vetores lineamente independentes $u$ e $v$ em um espaço vetorial n-dimensional $V$, definimos

$$|u \times v| = \sqrt{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2}.$$

que é a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par $u, v \in V$.

**Definição 1.15** *Seja $M^n$ uma variedade Remanniana e $\sigma$ uma espaço bi-dimensional do espaço tangente $T_pM^n$. A curvatura seccional de $M^n$ associada a $\sigma$ é definida por*

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X \times Y|^2}$$

*em que $X, Y \in T_pM^n$ são quaisquer dois vetores que formam uma base para $\sigma$.*

A curvatura seccional está bem definida, isto é, $K$ não depende da base escolhida para o espaço $\sigma$.

**Lema 1.3** *Sejam $M^n$ uma variedade Riemannniana e $p \in M^n$. Definindo para todo $X, Y, W, Z \in T_pM^n$,*

$$\langle R'(X,Y)Z,W\rangle = \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle.$$

*então $M^n$ tem curvatura seccional constante igual a $K_0$ se, e somente se, $R = K_0R'$, em que $R$ é o tensor curvatura de $M^n$.*

### 1.6.2 Curvatura de Ricci

Considere uma base ortonormal $\{E_1, ..., E_{n-1}\}$ do hiperplano $T_pM^n$ ortogonal a $E_n$ então a expressão

$$Ric_p = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \langle R(E_n, E_i)E_n, E_i \rangle \,,$$

não depende da base ortonormal. Assim podemos definir a curvatura de Ricci em todo espaço tangente como segue

**Definição 1.16** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana. Definimos o tensor curvatura de Ricci de $M^n$ como o tensorial covariante de ordem 2 dado como o traço, em relação a métrica, do tensor curvatura no seu primeiro e último índice, isto é,*

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle \,,$$

*em que $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal em $p$.*

## 1.7 Variedades Riemannianas geodesicamente completas

Nesta seção veremos algumas relações entre as propriedades locais e globais de uma variedade Riemanniana. Veremos a relação entre a completude, em termos de espaço métrico, com a completude no sentido geodésico, isto significa que a variedade não possui furos ou fronteiras (Teorema de Hopf-Rinow). Veremos ainda uma outra caracterização das variedades Riemannianas completas (Proposição 1.19).

A definição a seguir caracteriza as propriedades globais de uma variedade Riemanniana $M^n$.

**Definição 1.17** *Uma variedade Riemanniana $M^n$ é geodesicamente completa quando para todo $p \in M^n$ as geodésicas radiais $\gamma(t)$ partindo de $p$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, $M^n$ é geodesicamente completa se para todo $p \in M^n$ a aplicação exponencial está definida em todo $T_pM^n$.*

O seguinte lema estabelece uma equivalência em uma variedade Riemanniana, entre sua completude como espaço métrico e a completude geodésica.

**Lema 1.4** *(Hopf-Rinow) Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana. Então $M^n$ é geodesicamente completa se, e somente se, os limitados e fechados de $M^n$ são compactos.*

Uma demonstração para o teorema de Hopf-Rinow pode ser visto em [13].

**Definição 1.18** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva $\alpha : [0, a) \to M^n$ é divergente se $\alpha([0, a))$ não está contida em nenhum compacto $K$ de $M^n$, em que $a$ é um número real positivo ou $a = +\infty$.*

A proposição seguinte caracteriza uma variedade Riemanniana não completa como uma variedade que possui alguma curva divergente com comprimento de arco finito.

**Proposição 1.19** *Uma variedade Riemanniana $M^n$ é completa se, e somente se, toda curva divergente $\alpha : [0, a) \to M^n$ satifaz*

$$\int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = +\infty.$$

**Prova.** Suponha que $\int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = L < +\infty$ e veja que

$$dist(\alpha(0), \alpha(t)) \leq \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau \leq \int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = L < +\infty.$$

Assim, $\alpha([0, a])$ é limitado, e daí segue do Lema 1.4 que $\overline{\alpha([0, a))}$ é compacto em $M^n$. O que implica que o traço da curva $\alpha$ está contido num compacto, donde $\alpha$ é não divergente.

Reciprocamente suponha que $M^n$ não é completa, segue então que a aplicação exp não está definida em todo $T_pM^n$. Assim existem $p \in M^n$, $0 < t_0 < \infty$ e $v \in T_pM^n$ com $|v| < 1$ tais que $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ está definida para todo $t \in [0, t_0)$, mas não está definida em $t_0$.

Agora suponha que $\gamma$ é não divergente, então $\gamma([0, t_0))$ está contida em algum compacto $K$ de $\Sigma^n$. Considere uma sequência $(t_n)_n \subset [0, t_0)$ tal que $t_n \to t_0$ e seja $\gamma_n = \gamma(t_n)$, com isso para uma curva $\alpha$ parametrizada pelo comprimento de arco que passa por $\gamma_n$ e $\gamma_m$, se tem

$$dist(\gamma_n, \gamma_m) = dist(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \left| \int_{t_m}^{t_n} |\alpha'(\tau)| d\tau \right| = \left| \int_{t_m}^{t_n} 1 d\tau \right| = |t_n - t_m|.$$

Logo $(\gamma_n)_n$ é uma sequência de Cauchy no compacto $K$, portanto $\gamma_n \to \gamma_0 \in K \subset M^n$.

Seja $(V, \delta)$ uma vizinhança totalmente normal de $\gamma_0$, isto é, dado $r \in V$ existe $\delta > 0$ tal que a aplicação $\exp : B_\delta(0) \to \exp_r(B_\delta(0)) \supset V$ é um difeomorfismo. Seja $n_0$ tal que para $n, m \geq n_0$ se tenham $|t_n - t_m| < \delta$ e $\gamma_n, \gamma_m \in V$. Logo existe uma única geodésica $g$ ligando $\gamma_n$ a $\gamma_m$ nesta vizinhança totalmente normal. E $g$ coincide com $\gamma$, onde esta é definida. Usando que $\exp_{\gamma(t_n)}$ é diefeomorfismo entre $B_\delta$ e sua imagem que contém $V$ podemos estender $\gamma$ além de $t_0$, o que é um absurdo. Logo $\gamma$ é uma curva divergente. Além disso

$$\int_0^{t_0} |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^{t_0} 1 d\tau = t_0 < \infty,$$

donde $\gamma$, também, não tem comprimento infinito.

$\blacksquare$

# Capítulo 2

# Operadores diferenciáveis em variedades Riemannianas e a fórmula de Bochner

Neste capítulo veremos alguns operadores diferenciáveis em variedades Riemannianas e algumas de suas propriedades. Estes operadores serão utilizados para o desenvolvimento de alguns resultados principais desenvolvidos nos capítulos 4 e 5. Na ultima seção deste capítulo, veremos a fórmula de Bochner, que será usada fortemente em alguns dos teoremas principais deste trabalho. A fórmula de Bochner relaciona a curvatura de Ricci, aplicada no gradiente de uma função $f$, com operações entre os operadores diferenciáveis, aplicados em $f$.

Nas respectivas seções deste capítulo, veremos conceitos relacionados ao gradiente de uma função, A divergência de um campo vetorial, laplaciano de uma função, Hessiano de uma função e a Fórmula de Bochner. Para um estudo mais detalhado destes conceitos ver [9]

## 2.1 O gradiente de uma função

O gradiente de uma função $f$, definida em uma variedade Riemanniana $M^n$, tem um comportamento análogo ao comportamento da derivada de uma função definida no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Assim podemos pensar no gradiente como a derivada de uma função definida em um ambiente mais geral.

**Definição 2.1** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de $f$ é o campo vetorial $\nabla f$ sobre $M^n$, tal que*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$$

*para todo campo vetorial $X$ de $M^n$.*

A definição 2.1 garante a unicidade do gradiente de uma função $f$, se caso exista. Já a existência é garantida pela seguinte proposição

**Proposição 2.2** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M^n$. Então, em $U$, temos*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

**Prova.** Escrevendo o campo de vetores $X$ no referencial ortonormal, isto é, $X = \sum a_j E_j$, teremos que

$$\left\langle X, \sum_{i}^{n} E_i(f) E_i \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j E_j, \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_j E_i(f) \langle E_j, E_i \rangle .$$

Como $\langle E_j, E_i \rangle = \delta_{ij}$ então

$$\left\langle X, \sum_{i}^{n} E_i(f) E_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j E_j(f) = X(f) = \langle \nabla f, X \rangle = \langle X, \nabla f \rangle$$

para todo campo vetorial $X$ de $U \subset M^n$. Logo,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

■

Deste resultado segue, então, algumas propriedades de gradiente

**Proposição 2.3** *Se $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaveis, então*

*a)* $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

*b)* $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Um ponto $p \in M^n$ é um máximo local (respectivamente, mínimo local) de uma função $f \in C^\infty(M^n)$ quando existe uma vizinhança $U$ de $p$, em $M^n$, tal que $f(x) \leq f(p)$ (respectivamente, $f(x) \geq f(p)$) para todo $x \in M^n \cap U$. Veremos na proposição seguinte que o gradiente de um extremo local (máximo ou mínimo local de uma função) é zero.

**Proposição 2.4** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Dado $p \in M^n$ e $v \in T_pM^n$, seja $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ uma curva suave, tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. Então*

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.$$

*Em particular, se $p$ é um extremo local para $f$, então $\nabla f(p) = 0$.*

**Prova.** Considere $V$ um campo de vetores ao longo de $c$, com $V(0) = v$, daí

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \langle \nabla f, V(0) \rangle = (V(f))(p) = c'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.$$

Agora, se $p \in M^n$ é extremo local para $f$, segue que existe $U \subset M^n$ vizinhança de $p$ em $M^n$ tal que $f(p) \geq f(x)$ $\forall x \in U$ caso $f(p)$ seja valor de máximo local (ou $f(p) \leq f(x)$ caso $f(p)$ seja valor de mínimo local). Assim $f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um extremo local em 0, daí

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0} = 0 \quad \forall v \in T_pM^n.$$

Logo $\nabla f(p) = 0$. ■

Dizemos que $p \in M^n$ é um *ponto crítico* de uma função $f : M^n \to \mathbb{R}$ se $\nabla f(p) = 0$.

Observemos que o gradiente de uma função constante é nulo. No geral a recíproca desse resultado não é verdadeira, mas se considerarmos que a variedade $M^n$ é conexa, teremos o resultado da recíproca como segue no corolário a seguir

**Corolário 2.5** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana conexa e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $\nabla f = 0$ em $M^n$, então $f$ é constante em $M^n$.*

**Prova.** Fixando $p \in M^n$ e considerando $A = \{x \in M^n | f(x) = f(p)\}$. Temos que $A \neq \phi$, pois $p \in A$ e $A$ é fechado, pois $f$ é contínua. Vejamos que $A$ também é aberto. De fato, seja $y \in A$ e $U \subset M^n$ vizinhança conexa de $y$. Para todo $x \in U$ existe uma curva $c : [0,1] \to U$ com $c(0) = y$ e $c(1) = x$, segue então que

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = \left\langle \nabla f, \frac{dc}{dt} \right\rangle = 0.$$

Assim $(f \circ c) : [0,1] \to \mathbb{R}$ é constante. Dessa forma $f(p) = f(y) = f(c(0)) = f(c(1)) = f(x) \Rightarrow x \in A$. Como $x \in U$ é qualquer então $U \subset A$ donde $A$ é aberto.

Sendo $M^n$ conexo e $A \neq \phi$, teremos $M^n = A$, e portanto $f$ é constante em $M^n$.

■

## 2.2 A divergência de um campo vetorial

A divergência de um campo pode ser vista como uma aplicação, que leva valores em $\mathbb{R}$, que mede a variação da densidade do fluido em cada ponto do campo.

**Definição 2.6** *Seja $X$ um campo vetorial em $M^n$. A divergência de $X$ é a função suave $divX : M^n \to \mathbb{R}$, dada para $p \in M^n$ por*

$$(divX)(p) = tr\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}$$

*em que $v \in T_pM^n$.*

A proposição seguinte fornece a expressão do divergente de um campo de vetores $X$ escristo em uma base ortonormal.

**Proposição 2.7** *Seja $X$ um campo de vetores diferenciável em $M^n$ e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M^n$. Se $X = \sum_i a_i E_i$ em $U$, então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \left( E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \right).$$

*Em particular se o refencial for geodésico em $p$, então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n} E_i(a_i).$$

**Prova.** Temos que

$$\begin{aligned}
(divX)(p) &= tr\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\} = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( E_i \langle X, E_i \rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( E_i \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j E_j, E_i \right\rangle - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( E_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_j \langle E_j, E_i \rangle \right) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \right).
\end{aligned}$$

■

Com esse resultado, temos as seguintes propriedades de divergente

**Proposição 2.8** *Se $X, Y$ são campos de vetores sobre $M^n$, e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

*a)* $div(X+Y) = divX + divY$

*b)* $div(fX) = fdivX + \langle \nabla f, X \rangle$

## 2.3 O Laplaciano de uma função

Para uma função $f \in C^\infty(M^n)$ podemos calcular seu gradiente que é um campo vetorial definido em $M^n$, e para tal campo vetorial podemos fazer o cálculo de seu divergente que assume valores em $\mathbb{R}$, essa composição é a função laplaciano de $f$.

**Definição 2.9** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O laplaciano de $f$ é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Se $M^n$ é uma variedade Riemanniana, uma função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$ é harmônica (respectivamente, subharmônica) se $\Delta f = 0$ (respectivamente $\Delta f \geq 0$) em $M^n$.

Como consequência da proposição 2.2, teremos o seguinte

**Proposição 2.10** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave em $M^n$, e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M^n$. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left( E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i) f \right).$$

*Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então teremos em $p$ que*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f)).$$

**Prova.** Temos que $\nabla f = \sum_i E_i(f) E_i$ em $U$. Segue da definição de laplaciano que

$$\Delta f = div(\nabla f) = div \left( \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i \right).$$

Assim

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left( E_i(E_i(f)) - \langle \nabla_{E_i} E_i, \nabla f \rangle \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i) f \right).$$

■

Com isso, temos a seguinte propriedade de laplaciano

**Proposição 2.11** *Dadas $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ funções, tem-se*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle .$$

*Em particular,*

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

**Prova.** Usando as propriedades de gradiente e divergente,

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= div(\nabla(fg)) = div(g\nabla f + f\nabla g) = div(g\nabla f) + div(f\nabla g) \\
&= gdiv(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle + fdiv(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle \\
&= g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle .
\end{aligned}$$

■

## 2.4 O Hessiano de uma função

Para o nosso ambiente $M^n$, definimos o Hessiano de umas função $f \in C^\infty(M^n)$ via conexão de Levi-Civita $\nabla$, como segue

**Definição 2.12** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O hessiano de $f$, denotado por $\nabla^2$, é o campo de operadores lineares $\nabla^2 f : T_pM^n \to T_pM^n$, definido para $v \in T_pM^n$ por*

$$(\nabla^2 f)(v) = \nabla_v(\nabla f).$$

Com o uso da métrica introduzida em $M^n$, teremos

**Proposição 2.13** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave e $p \in M^n$. O operador linear $(\nabla^2 f)_p : T_pM^n \to T_pM^n$ é auto-adjunto.*

**Prova.** Sejam $v, w \in T_pM^n$ e $V$, $W$ suas respectivas extensões a campos de uma vizinhança de $p \in M^n$. Temos da definição de hessiano,

$$
\begin{aligned}
\left\langle (\nabla^2 f)_p(v), w \right\rangle &= \langle \nabla_V (\nabla f), W \rangle_p \\
&= (V \langle \nabla f, W \rangle)(p) - \langle \nabla f, \nabla_V W \rangle_p \\
&= (V \langle \nabla f, W \rangle)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V, W] \rangle_p \\
&= W(Vf)(p) + ([V, W]f)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V, W] \rangle_p \\
&= W(Vf)(p) + ([V, W]f)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p - \langle \nabla f, [V, W] \rangle_p \\
&= W(Vf)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p \\
&= W\left( \langle \nabla f, V \rangle_p \right) - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p \\
&= \langle \nabla_W \nabla f, V \rangle_p + \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p \\
&= \langle \nabla_W \nabla f, V \rangle_p \\
&= \left\langle (\nabla^2 f)_p(w), v \right\rangle.
\end{aligned}
$$

■

A hessiana $\nabla^2 f$ é a forma bilinear em $T_pM^n$ que aplica $v, w \in T_pM^n$ em

$$\left\langle (\nabla^2 f)(v), w \right\rangle = \langle \nabla_v (\nabla f), w \rangle = v(w(f)) - (\nabla_v w)f.$$

**Proposição 2.14** *Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta f = tr(\nabla^2 f).$$

**Prova.** Temos que

$$
\begin{aligned}
tr(\nabla^2 f)_p &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\nabla^2 f)_p(E_i), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} (\nabla f), E_i \rangle \\
&= tr\{v \to \nabla_v \nabla f)(p)\} \\
&= div(\nabla f)(p) = \Delta f(p).
\end{aligned}
$$

Isso mostra a igualdade em cada ponto $p \in M^n$. Agora se $U$ é uma vizinhança de $p \in M^n$ onde esteja definido um referencial ortonormal $E_1, ..., E_n$, o resultado é obtido.

■

## 2.5 A fórmula de Bochner

Se $T : V \to V$ é um operador linear auto-adjunto definido no espaço vetorial $V$, então denotaremos $|T|^2 = tr(T^2)$, assim para $\{E_1, ..., E_n\}$ referencial ortonormal,

$$|T|^2 = tr(T^2) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle T^2(E_i), E_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T(E_i), T(E_i)\rangle = \sum_{i=1}^{n} |T(E_i)|^2.$$

Para maiores detalhes do teorema seguinte, ver [7].

**Teorema 2.15** *(Bochner). Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\nabla^2 f|^2.$$

**Prova.** Fixando $p \in M^n$ e considerando $\{E_i\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M^n$ de $p$, geodésico em $p$. Então teremos em $p$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i \langle \nabla f, \nabla f\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (E_i (\langle \nabla_{E_i}(\nabla f), \nabla f\rangle + \langle \nabla f, \nabla_{E_i}(\nabla f)\rangle)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (2E_i (\langle \nabla_{E_i}(\nabla f), \nabla f\rangle)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), \nabla f\rangle + \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), \nabla_{E_i}(\nabla f)\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), \nabla f\rangle + |\nabla_{E_i}\nabla f|^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), \nabla f\rangle + \sum_{i=1}^{n} |(\nabla^2 f)_p(E_i)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), \nabla f\rangle + |\nabla^2 f|^2. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Agora para $X \in \mathcal{X}(M^n)$, teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i, X)\nabla f, E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(\left\langle \nabla_X\nabla_{E_i}\nabla f - \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f + \nabla_{[E_i,X]}\nabla f, E_i\right\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f - \nabla_{[E_i,X]}\nabla f, E_i\right\rangle. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Para primeira soma de (2.2), seja $\{E_i\}$ um referencial geodésico em $p \in M^n$, temos

$$
\begin{aligned}
X\left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\right\rangle &= \left\langle \nabla_X(\nabla_{E_i}\nabla f), E_i\right\rangle + \left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_X E_i\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_X(\nabla_{E_i}\nabla f), E_i\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_X(\nabla_{E_i}\nabla f), E_i\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} X\left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\right\rangle \\
&= X\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\right\rangle\right) \\
&= X(tr(Hessf))_p(E_i) = X(\Delta f) \\
&= \left\langle X, \nabla(\Delta f)\right\rangle_p . \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Para a segunda soma em (2.2), sendo $\nabla^2$ auto-adjunta, teremos

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{[E_i,X]}\nabla f, E_i\right\rangle &= \left\langle (\nabla^2 f)([E_i,X]), E_i\right\rangle \\
&= \left\langle [E_i,X], (\nabla^2 f)(E_i)\right\rangle \\
&= \left\langle [E_i,X], \nabla_{E_i}\nabla f\right\rangle ,
\end{aligned}
$$

daí

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle \nabla_{E_i}(\nabla_X\nabla f), E_i\right\rangle - \left\langle \nabla_{[E_i,X]}\nabla f, E_i\right\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(E_i\left\langle \nabla_X\nabla f, E_i\right\rangle - \left\langle [E_i,X], \nabla_{E_i}\nabla f\right\rangle\right) \qquad (2.4) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(E_i\left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, X\right\rangle - \left\langle \nabla_{E_i}X - \nabla_X E_i, \nabla_{E_i}\nabla f\right\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), X\right\rangle + \left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}X\right\rangle - \left\langle \nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}\nabla f\right\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), X\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), X\right\rangle . \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Susbstituindo (2.3) e (2.5) em (2.2), teremos

$$\begin{aligned} Ric(X,\nabla f) &= -\sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i,X)\nabla f, E_i\rangle \\ &= -\langle X, \nabla(\Delta f)\rangle_p + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), X\rangle, \end{aligned}$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), X\rangle = Ric(X,\nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle_p,$$

fazendo $X = \nabla f$,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i}\nabla f), \nabla f\rangle = Ric(\nabla f,\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle_p.$$

Usando (2.1),

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f,\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\nabla^2 f|^2.$$

■

# Capítulo 3

# Hipersuperfícies tipo-espaço em $-\mathbb{R} \times M^n$

Este capítulo é destinado às construções e apresentações de alguns conceitos e resultados auxiliares que serão utilizados nos capítulos 4 e 5. Para isto, consideraremos uma imersão isométrica, em um produto Lorentziano, com codimensão igual a um.

Um estudo em casos mais gerais referente a espaço produto, que é apresentado neste capítulo, pode ser feito com acesso a [12]

No que segue estudaremos a geometria de uma hipersuperfície tipo-espaço $\Sigma^n$ imersa num produto Lorentziano de dimensão $n+1$, da forma $\mathbb{R} \times M^n$, em que $M^n$ é uma variedade Riemanniana conexa e $\mathbb{R} \times M^n$ é dotado com a métrica Lorentziana

$$\langle , \rangle = -\pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2) + \pi_{M^*}(\langle , \rangle_M)$$

em que $\pi_{\mathbb{R}}$ e $\pi_M$ denotam as projeções canônicas de $\mathbb{R} \times M^n$ sobre as componentes $\mathbb{R}$ e $M^n$, respectivamente, $dt^2$ e $\langle , \rangle_M$ denotam as métricas Riemannianas de $\mathbb{R}$ e $M^n$ respectivamente. Como a métrica Lorentziana, definida acima, é não-degenerada, então podemos sempre considerar uma conexão de Levi-Civita no ambiente Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$.

Por simplicidade escrevemos $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times M^n$ e

$$\langle , \rangle = -dt^2 + \langle , \rangle_M .$$

Com essa métrica, temos que o campo de vetores unitários

$$\partial_t = \left(\frac{\partial_t}{\partial t}\right)_{(t,p)} \qquad (t,p) \in -\mathbb{R} \times M^n$$

é tipo-tempo, pois $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = -1$. Nessa configuração, dizemos que dois campos de vetores $X$ e $Y$ em $-\mathbb{R} \times M^n$ estão na mesma orientação temporal se $\langle X, Y \rangle \leq -1$.

**Definição 3.1** *Uma imersão suave $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$ de uma variedade conexa $\Sigma^n$ é dita uma hipersuperfície tipo-espaço, se a métrica induzida em $\Sigma^n$ via $\psi$ for Riemanniana.*

Para uma imersão $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$ no produto Lorentziano denotaremos $\psi(\Sigma^n)$ simplismente por $\Sigma^n$. Para o caso da imersão tipo-espaço denotaremos a métrica em $\overline{M}^{n+1}$ e em $M^n$ pelo mesmo símbolo $\langle , \rangle$.

Definimos o complemento ortogonal $\mathcal{X}(\Sigma^n)^\perp$ de $\mathcal{X}(\Sigma^n)$ em $\mathcal{X}(-\mathbb{R} \times M^n)$ por

$$\mathcal{X}(\Sigma^n)^\perp = \{V \in \mathcal{X}(-\mathbb{R} \times M^n) |\, \langle V, W \rangle = 0 \quad \forall W \in \mathcal{X}(\Sigma^n)\}.$$

Uma vez que $\partial_t$ é paralelo em $-\mathbb{R} \times M^n$, teremos $\overline{\nabla}_X \partial_t = 0$. Com isso temos o seguintes resultado

**Proposição 3.2** *Se $\Sigma^n$ é uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz $\overline{M}^{n+1}$ temporalmente orientada, então $\Sigma^n$ admite um único campo de vetores normal unitário $N \in \mathcal{X}(\Sigma^n)^\perp$ com mesma orientação temporal de $\partial_t$. Em particular, $M^n$ é orientada.*

**Prova.** Considere $\{E_i\}_i$ um referencial ortonormal em $\Sigma^n$ e definimos

$$\overline{N} = \partial_t - \sum_{i=1}^{n} \langle d\psi(E_i)\partial_t, \partial_t \rangle \, d\psi(E_i).$$

Veja que $\overline{N}$ está unicamente definido, é um campo ortogonal e pode ser estendido globalmente em $\Sigma^n$. Além disso

$$\langle \overline{N}, \partial_t \rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle d\psi(E_i), \partial_t \rangle^2 = -1 - \sum_{i=1}^{n} \langle d\psi(E_i), \partial_t \rangle^2 \leq -1.$$

Por fim definimos $N$, normalizando $\overline{N}$

$$N = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|}.$$

■

Iremos nos referir a $N$ como sendo a aplicação normal de Gauss a qual está na mesma orientação temporal de $\partial_t$.

## 3.1 Equações fundamentais da imersão

Podemos considerar o espaço tangente de $\Sigma^n$ em $p$ como subespaço tangente para $\overline{M}^{n+1}$ em $p$, e escrevermos

$$T_p\overline{M}^{n+1} = T_p\Sigma^n \oplus (T_p\Sigma^n)^{\perp},$$

em que $(T_p\Sigma^n)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $T_p\Sigma^n$ em $T_p\overline{M}^{n+1}$. Da soma de Whitney, teremos

$$T\overline{M}^{n+1}|_{\psi(\Sigma^n)} = T\Sigma^n \oplus (T\Sigma^n)^{\perp}.$$

Sejam $\overline{\nabla}$ e $\nabla$ as conexões de Levi-Civita de $\overline{M}^{n+1}$ e $\Sigma^n$, respectivamente. Assim para campos vetoriais $X, Y \in T\Sigma^n$, teremos

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$$

ou

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$$

em que a aplicação $II : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \to (T\Sigma^n)^{\perp}$ é chamada de segunda forma fundamental, a qual é bilinear e simétrica ao longo do anel $C^{\infty}(\Sigma^n)$. Veja que $N$ é base de $(T\Sigma^n)^{\perp}$, então $II(X, Y) = c_{(X,Y)}N$ e $\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = c_{(X,Y)}N$ o que implica em

$$\left\langle \overline{\nabla}_X Y, N \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \right\rangle = c_{(X,Y)} \langle N, N \rangle = -c_{(X,Y)},$$

com isso

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \left\langle \overline{\nabla}_X Y, N \right\rangle N.$$

Sendo $\langle Y, N \rangle = 0$ para todo $Y \in T\Sigma^n$ tem-se

$$0 = X \langle Y, N \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, N \right\rangle + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X N \right\rangle \Rightarrow \left\langle \overline{\nabla}_X Y, N \right\rangle N = -\left\langle Y, \overline{\nabla}_X N \right\rangle N,$$

daí

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \left\langle \overline{\nabla}_X N, Y \right\rangle N.$$

Definimos $A : T\Sigma^n \to T\Sigma^n$ por $AX = -\overline{\nabla}_X N$ o qual representa o operador de forma (ou endomorfismo de Weingarten) de $\Sigma^n$ com respeito a aplicação normal de Gauss $N$ que tem mesma orientação temporal de $\partial_t$. Com isso, teremos a fórmula de Gauss

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N.$$

### 3.1.1 Equação de Gauss

O tensor curvatura $R$ da hipersuperfície $\Sigma^n$ pode ser escrito em termos do operador de forma $A$ e do tensor curvatura $\overline{R}$ do espaço ambiente $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times M^n$ pela chamada equação de Gauss.

**Proposição 3.3** *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $\overline{R}$, $R$ os tensores curvaturas de $\overline{M}^{n+1}$ e $M^n$ respectivamente. Então para campos vetoriais $X, Y$ e $Z$ em $TM$ vale a equação de Gauss dada por*

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX$$

*em que $(\quad)^{\top}$ denota a componente tangente de um campo vetorial em $\mathcal{X}(\overline{M}^{n+1})$ ao longo de $\Sigma^n$.*

**Prova.** Temos, da singularidade da conexão, que

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= (\overline{\nabla}_Y (\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top} - (\overline{\nabla}_X (\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z)^{\top}, \end{aligned}$$

como

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} = (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z)^{\top}$$

então

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (\overline{\nabla}_Y (\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top} - (\overline{\nabla}_X (\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z)^{\top} \\ &= \left(\overline{\nabla}_Y (\overline{\nabla}_X Z)^{\top} - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_X (\overline{\nabla}_Y Z)^{\top}\right)^{\top} + (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} \\ &= \left(\overline{\nabla}_Y \nabla_X Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z\right)^{\top} + (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} \\ &= -\left(\overline{\nabla}_Y (\overline{\nabla}_X Z - \nabla_X Z)\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_X (\overline{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z)\right)^{\top} + (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top}, \end{aligned}$$

usando a fórmula de Gauss, teremos

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= -\left(\overline{\nabla}_Y(-\langle AX,Z\rangle N)\right)^\top + \left(\overline{\nabla}_X(-\langle AY,Z\rangle N)\right)^\top + (\overline{R}(X,Y)Z)^\top \\
&= \left(\overline{\nabla}_Y \langle AX,Z\rangle N\right)^\top - \left(\overline{\nabla}_X \langle AY,Z\rangle N\right)^\top + (\overline{R}(X,Y)Z)^\top \\
&= \left(Y\langle AX,Z\rangle N + \langle AX,Z\rangle \overline{\nabla}_Y N\right)^\top - \left(X\langle AY,Z\rangle N + \langle AY,Z\rangle \overline{\nabla}_X N\right)^\top \\
&\quad +(\overline{R}(X,Y)Z)^\top \\
&= \langle AX,Z\rangle \overline{\nabla}_Y N - \langle AY,Z\rangle \overline{\nabla}_X N + (\overline{R}(X,Y)Z)^\top \\
&= \langle AX,Z\rangle (-AY) - \langle AY,Z\rangle (-AX) + (\overline{R}(X,Y)Z)^\top \\
&= (\overline{R}(X,Y)Z)^\top - \langle AX,Z\rangle AY + \langle AY,Z\rangle AX.
\end{aligned}
$$

■

## 3.2 Função altura e função suporte

Definimos a função altura $h$, de uma hipersuperfície tipo espaço $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$, como sendo a projeção canônica do produto Lorentziano $-\mathbb{R}\times M^n$ sobre $\mathbb{R}$, restrito a $\Sigma^n$, isto é, $h : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ é dada por $h(t,p) = t$ desde que $(t, \psi(p))$ corresponda a posição de $\psi(p)$ em $-\mathbb{R} \times M^n$. Com isso temos o seguinte resultado

**Proposição 3.4** *O gradiente da função altura é dado por*

$$\nabla h = -\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N \tag{3.1}$$

*Consequentemente vale a relação*

$$|\nabla h|^2 = -1 + \langle N, \partial_t\rangle^2 . \tag{3.2}$$

*Além disso, o laplaciano da função altura é dada por*

$$\Delta h = -nH \langle N, \partial_t\rangle , \tag{3.3}$$

*em que $H = -\frac{1}{n}tr(A)$ é a curvatura média de $\Sigma^n$ em relação a $N$.*

**Prova.** Seja $X \in \mathcal{X}(\Sigma^n)$, então podemos escrever $X = X^* + f\partial_t$ em que $X^*$ é tangente a fibra Riemanniana $M^n$, assim

$$\langle \nabla h, X\rangle = X(h) = X(t) = (X^* + f\partial_t)(t) = X^*(t) + f\partial_t(t) = f,$$

por outro lado $X = X^* + f\partial_t$ o que implica em

$$\langle X, \partial_t\rangle = \langle X^*, \partial_t\rangle + f\langle \partial_t, \partial_t\rangle = -f,$$

assim $\langle \nabla h, X\rangle = -\langle \partial_t, X\rangle$ para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma^n)$, daí

$$\langle \nabla h, X\rangle = -\left\langle \partial_t^{\perp} + \partial_t^{\top}, X\right\rangle = -\left\langle \partial_t^{\top}, X\right\rangle$$

donde se tem

$$\nabla h = -\partial_t^{\top} = -\partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N,$$

logo

$$\nabla h = -\partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N.$$

Agora, considerando uma extensão local de $\nabla h$ em $-\mathbb{R} \times M^n$, de (3.1) teremos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \nabla h &= \overline{\nabla}_X(-\partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N) \\
&= -\overline{\nabla}_X \partial_t - \overline{\nabla}_X(\langle \partial_t, N\rangle N) \\
&= -\overline{\nabla}_X \partial_t - X(\langle \partial_t, N\rangle)N - \langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N \\
&= -\overline{\nabla}_X \partial_t - \left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, N\right\rangle N - \left\langle \partial_t, \overline{\nabla}_X N\right\rangle N - \langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N \\
&= -\left\langle \partial_t, \overline{\nabla}_X N\right\rangle N - \langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N.
\end{aligned}$$

Usando a fórmula de Gauss, teremos

$$\nabla_X \nabla h = -\langle \partial_t, \nabla_X N\rangle N - \langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N - \left\langle \overline{\nabla}_X N, \nabla h\right\rangle N$$

$$-\left(\left\langle \partial_t + \nabla h, \overline{\nabla}_X N\right\rangle N\right) - \langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N.$$

Usando (3.1), novamente

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla h &= -\left(-\left\langle \langle \partial_t, N\rangle N, \overline{\nabla}_X N\right\rangle N\right) - \langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N \\
&= \langle \partial_t, N\rangle \left\langle N, \bar{\nabla}_X N\right\rangle N - \langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N \\
&= -\langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N \\
&= \langle \partial_t, N\rangle AX.
\end{aligned}$$

Considere um referencial geodésico $\{E_i\}$ em $\Sigma^n$, daí para $X = E_i$, temos $\nabla_{E_i}\nabla h = \langle \partial_t, N\rangle AE_i$ e assim

$$\begin{aligned}
\Delta h &= div(\nabla h) = tr\{v \to (\nabla_v \nabla h)\}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla h, E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \langle \partial_t, N\rangle AE_i, E_i\rangle\\
&= \langle \partial_t, N\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle\\
&= \langle \partial_t, N\rangle (-nH).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta h = -nH\langle \partial_t, N\rangle$.

■

A função $\langle N, \partial_t\rangle$ que mede, geometricamente, a menos de sinal, o cosseno hiperbólico do ângulo entre o campo $N$, normal a $\Sigma^n$, e o campo $\partial_t$, é chamada de função suporte.

**Proposição 3.5** *O gradiente da função suporte $\langle N, \partial_t\rangle$ é dado por*

$$\nabla \langle N, \partial_t\rangle = A(\nabla h)$$

*em que $A$ é o operador de forma e $h$ é a função altura.*

**Prova.** Sendo $\overline{\nabla}_X\partial_t = 0$ e $\overline{\nabla}_X N = -AX$, para todo $X \in TM$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \langle N, \partial_t\rangle, X\rangle &= X\langle N, \partial_t\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X N, \partial_t\right\rangle + \left\langle N, \overline{\nabla}_X \partial_t\right\rangle\\
&= \left\langle \overline{\nabla}_X N, \partial_t\right\rangle = \left\langle -AX, \partial_t^{\top} + \partial_t^{\perp}\right\rangle\\
&= \left\langle -AX, \partial_t^{\top}\right\rangle = \left\langle AX, -\partial_t^{\top}\right\rangle = \langle AX, \nabla h\rangle\\
&= \langle A(\nabla h), X\rangle\\
\Rightarrow \nabla \langle N, \partial_t\rangle &= A(\nabla h)
\end{aligned}$$

■

Uma interpretação geométrica da norma do gradiente da função altura $h$ envolve a noção de ângulo hiperbólico normal, a qual apresentaremos na seguinte definição

**Definição 3.6** *Seja* $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço em que* $M^n$ *uma variedade Riemanniana. A função ângulo hiperbólico normal* $\theta$*, é a aplicação diferencial* $\theta : \psi(\Sigma^n) \to [0, +\infty)$ *tal que* $\cosh\theta = -\langle N, \partial_t\rangle$*, onde* $N$ *é a aplicação normal de Gauss e tem a mesma orientação temporal de* $\partial_t$*.*

Consequentemente de (3.2), teremos

$$|\nabla h|^2 = \cosh^2\theta - 1. \tag{3.4}$$

Dizemos que uma hipersuperfície $\Sigma^n$ é máxima quando sua curvatura média $H$ é identicamente nula, isto é, $H \equiv 0$ em $\Sigma^n$. Dessa forma se $\Sigma^n$ é uma hipersuperfície máxima em $-\mathbb{R} \times M^n$, então de (3.3) $h$ é uma função harmônica, isto é, $\Delta h = 0$ em $\Sigma^n$. Notemos ainda que os *slices* $M_t^n = \{t\} \times M^n$ são exemplos triviais de hipersuperfícies máximas em $-\mathbb{R} \times M^n$. De fato, como $N = \partial_t$ em $M_t^n$ e $\partial_t$ é paralelo, então segue que o operador $A$ é identicamente nulo, donde $H \equiv 0$ em $\Sigma^n$.

**Definição 3.7** *Dizemos que uma hipersuperfície tipo-espaço* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *imersa em um espaço produto Lorentziano* $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times M^n$ *é limitada no infinito futuro de* $\overline{M}^{n+1}$ *se existe* $t_1 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\psi(\Sigma^n) \subset \{(t,p) \in \overline{M}^{n+1}; t \leq t_1\}.$$

*Analogamente, dizemos que* $\Sigma^n$ *é limitado no infinito passado de* $\overline{M}^{n+1}$ *se existe* $t_2 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\psi(\Sigma^n) \subset \{(t,p) \in \overline{M}^{n+1}; t \geq t_2\}.$$

## 3.3 Teorema de Omori-Yau

Em 1967 H. Omori [15] provou o primeiro resultado da ferramenta que conhecemos hoje como princípio de Omori-Yau. Então em 1975, S.T. Yau [17] obteve um princípio do máximo mais simples gerando o resultado seguinte

**Lema 3.1** *Seja* $\Sigma^n$ *uma variedade Riemmaniana n-dimensional completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiomente e* $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave que é limitada superiomente em* $\Sigma^n$*. Então existe uma sequência de pontos* $(p_k)_k$ *em* $\Sigma^n$ *tal que*

$$\lim_k u(p_k) = \sup_{\Sigma^n} u, \quad \lim_k |\nabla u(p_k)| = 0, \qquad \limsup_k \Delta u(p_k) \leq 0$$

*a sequência* $(p_k)_k \subset \Sigma^n$ *é chamada de sequência maximizante de Omori-Yau para a função* $u$*, ou simplesmente, sequência de Omori-Yau.*

O princípio de Omori-Yau é uma ferramenta analítica que iremos usar em alguns dos principais resultados deste trabalho. Uma demonstração e um estudo detalhado referente ao Lema 3.1 pode ser encontrado em [5].

# Capítulo 4

# Resultados do tipo Bernstein em $-\mathbb{R} \times M^n$

Neste capítulo estudaremos a geometria de hipersuperfícies completas, com curvatura média constante e imersas em um produto Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$, cuja a fibra $M^n$ tem curvatura secional não negativa. Para obtenção dos resultados deste capítulo faremos uso dos conteúdos abordados nos capítulos anteriores, especialmente usaremos a fórmula de Bochner vista na Seção 2.5, princípio de Omori-Yau visto na Seção 3.3 e também uma extensão do teorema de Liouville devido a Yau [17].

## 4.1 Teoremas de rigidez

Nosso primeiro resultado faz uso do lema de Omori-Yau e da fórmula de Bochner para mostrar que uma hipersuperfície é máxima nas condições de algumas hipóteses.

**Teorema 4.1** *Seja $\Sigma^n$ uma hipersuperfície completa, tipo-espaço, com curvatura média constante, imersa no espaço produto $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times M^n$ em que a fibra $M^n$ é completa com curvatura seccional não-negativa. Se o ângulo hiperbólico normal $\theta$, de $\Sigma^n$ é limitado, então $\Sigma^n$ é máxima.*

**Prova.** Sendo a função ângulo hiperbólico $\theta$ limitada, para o uso do lema de Omori-Yau, mostremos que o tensor curvatura de Ricci é limitado inferiomente. Para isso considere um referencial ortonormal $\{E_i\}$ em $\Sigma^n$ então, usando a equação de Gauss, teremos

$$R(X,E_i)X = (\overline{R}(X,E_i)X)^{\top} - \langle AX, X\rangle AE_i + \langle AE_i, X\rangle AX$$

para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma^n)$. Assim

$$\begin{aligned}
Ric(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)X, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\overline{R}(X,E_i)X)^{\top}, E_i\right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle AX, X\rangle \langle AE_i, E_i\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, X\rangle \langle AX, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(X,E_i)X - (\overline{R}(X,E_i)X)^{\perp}, E_i\right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle AX, X\rangle \langle AE_i, E_i\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \langle AX, E_i\rangle \langle AX, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\right\rangle - \langle AX, X\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle \\
&\quad + \left\langle AX, \sum_{i=1}^{n} \langle AX, E_i\rangle E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\right\rangle + \langle AX, X\rangle nH + \langle AX, AX\rangle .
\end{aligned}$$

Agora, denotando o tensor curvatura e a curvatura seccional da fibra $M^n$ por $R_M$ e $K_M$, respectivamente. Teremos

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\right\rangle &= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle_M \\
&= K_M(X^*, E_i^*)\left(\langle X^*, X^*\rangle_M \langle E_i^*, E_i^*\rangle - \langle E_i^*, X^*\rangle \langle X^*, E_i^*\rangle\right) \\
&= K_M(X^*, E_i^*)\left(\langle X^*, X^*\rangle_M \langle E_i^*, E_i^*\rangle - \langle X^*, E_i^*\rangle^2\right),
\end{aligned}$$

em que $X^* = X + \langle X, \partial_t\rangle \partial_t$ e $E_i^* = E_i + \langle E_i, \partial_t\rangle \partial_t$ são, respectivamente, as projeções dos campos vetoriais tangentes $X$ e $E_i$ em $M^n$.

Sendo $\partial_t^{\top} = \partial_t + \langle \partial_t, N\rangle N = -\nabla h$ o que implica que $\langle X, \partial_t\rangle = \left\langle X, \partial_t^{\top}\right\rangle =$

$\langle X, -\nabla h\rangle$, teremos

$$\begin{aligned}
\langle X^*, X^*\rangle_M &= \langle X + \langle X, \partial_t\rangle \partial_t, X + \langle X, \partial_t\rangle \partial_t\rangle_M \\
&= \langle X, X\rangle + 2\langle X, \partial_t\rangle \langle X, \partial_t\rangle + \langle X, \partial_t\rangle^2 \langle \partial_t, \partial_t\rangle \\
&= |X|^2 + \langle X, \partial_t\rangle^2 \\
&= |X|^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2, \\
\langle E_i^*, E_i^*\rangle_{M^n} &= 1 + \langle E_i, \nabla h\rangle^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle X^*, E_i^*\rangle_M &= (\langle X + \langle X, \partial_t\rangle \partial_t, E_i + \langle E_i, \partial_t\rangle \partial_t\rangle)^2 \\
&= (\langle X, E_i\rangle + \langle E_i, \partial_t\rangle \langle X, \partial_t\rangle + \langle X, \partial_t\rangle \langle E_i, \partial_t\rangle + \langle X, \partial_t\rangle \langle E_i, \partial_t\rangle \langle \partial_t, \partial_t\rangle)^2 \\
&= (\langle X, E_i\rangle + 2\langle X, \partial_t\rangle \langle E_i, \partial_t\rangle - \langle X, \partial_t\rangle \langle E_i, \partial_t\rangle)^2 \\
&= (\langle X, E_i\rangle + \langle X, \partial_t\rangle \langle E_i, \partial_t\rangle)^2 \\
&= (\langle X, E_i\rangle + \langle X, -\nabla h\rangle \langle E_i, -\nabla h\rangle)^2 \\
&= \langle X, E_i\rangle^2 + 2\langle X, \nabla h\rangle \langle E_i, \nabla h\rangle \langle X, E_i\rangle + \langle X, \nabla h\rangle^2 \langle E_i, \nabla h\rangle^2.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\right\rangle &= K_M(X^*, E_i^*)\left(\left(|X|^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2\right)\left(1 + \langle E_i, \nabla h\rangle^2\right) - \langle X, E_i\rangle^2\right. \\
&\quad \left. -2\langle X, \nabla h\rangle \langle E_i, \nabla h\rangle \langle X, E_i\rangle - \langle X, \nabla h\rangle^2 \langle E_i, \nabla h\rangle^2\right).
\end{aligned}$$

Segue que sendo $K_M(X^*, E_i^*) \geq 0$, existe uma constante não negativa $k$ tal que $K_M(X^*, E_i^*) \geq k$. Consequentemente teremos

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\right\rangle &\geq k\left(\left(|X|^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2\right)\left(1 + \langle E_i, \nabla h\rangle^2\right) - \langle X, E_i\rangle^2\right. \\
&\quad \left. -2\langle X, \nabla h\rangle \langle E_i, \nabla h\rangle \langle X, E_i\rangle - \langle X, \nabla h\rangle^2 \langle E_i, \nabla h\rangle^2\right) \\
&\geq k\left(|X|^2 + |X|^2\langle E_i, \nabla h\rangle^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2 \langle E_i, \nabla h\rangle^2\right. \\
&\quad \left. -\langle X, E_i\rangle^2 - 2\langle X, \nabla h\rangle \langle E_i, \nabla h\rangle \langle X, E_i\rangle - \langle X, \nabla h\rangle^2 \langle E_i, \nabla h\rangle^2\right),
\end{aligned}$$

aplicando o somatório no índice $i$, de 1 até $n$, teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\right\rangle &\geq k\Bigg(n|X|^2+|X|^2\sum_{i=1}^{n}\langle E_i,\nabla h\rangle^2+n\langle X,\nabla h\rangle^2\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\langle X,E_i\rangle^2-2\langle X,\nabla h\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle E_i,\nabla h\rangle\langle X,E_i\rangle\Bigg)\\
&\geq k\Bigg(n|X|^2+|X|^2\left\langle\sum_{i=1}^{n}\langle E_i,\nabla h\rangle E_i,\nabla h\right\rangle+n\langle X,\nabla h\rangle^2\\
&\quad -\left\langle\sum_{i=1}^{n}\langle X,E_i\rangle E_i,X\right\rangle-2\langle X,\nabla h\rangle\left\langle\sum_{i=1}^{n}\langle E_i,\nabla h\rangle E_i,X\right\rangle\Bigg)\\
&\geq k\left(n|X|^2+|X|^2|\nabla h|^2+n\langle X,\nabla h\rangle^2-|X|^2-2\langle X,\nabla h\rangle\langle\nabla h,X\rangle\right)\\
&\geq k\left((n-1)|X|^2+(n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2+|X|^2|\nabla h|^2\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$Ric(X,X)\geq k\left((n-1)|X|^2+|\nabla h|^2|X|^2+(n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2\right)+nH\langle AX,X\rangle+|AX|^2. \tag{4.1}$$

Em particular, para $X=\nabla h$, teremos

$$Ric(\nabla h,\nabla h)\geq k|\nabla h|^2(n-1)\left(1+|\nabla h|^2\right)+nH\langle A(\nabla h),\nabla h\rangle+|A(\nabla h)|^2. \tag{4.2}$$

Agora, usando a fórmula de Bochner, teremos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2=|\nabla^2 h|^2+Ric(\nabla h,\nabla h)+\langle\nabla\Delta h,\nabla h\rangle$$

em que $\nabla^2$ denota o tensor Hessiano em $\Sigma^n$. Sendo $H$ constante, teremos que $\nabla\Delta h=-nH\nabla\langle N,\partial_t\rangle=-nHA(\nabla h)$. Então, de (4.2) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 &\geq |\nabla^2 h|^2+(n-1)k|\nabla h|^2(1+|\nabla h|^2)+nH\langle A(\nabla h),\nabla h\rangle+|A(\nabla h)|^2\\
&\quad +\langle\nabla\Delta h,\nabla h\rangle\\
&\geq |\nabla^2 h|^2+(n-1)k|\nabla h|^2(1+|\nabla h|^2)+nH\langle A(\nabla h),\nabla h\rangle+|A(\nabla h)|^2\\
&\quad -nH\langle A(\nabla h),\nabla h\rangle\\
&\geq |\nabla^2 h|^2+(n-1)k|\nabla h|^2(1+|\nabla h|^2)+|A(\nabla h)|^2.
\end{aligned}$$

Para um referencial ortonormal $\{E_i\}$ temos

$$\Delta h = tr(\nabla^2 h) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla^2 h(E_i), E_i \right\rangle \leq \sum_{i=1}^{n} |\nabla^2 h(E_i)|$$

o que implica em

$$(\Delta h)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{n} |\nabla^2 h(E_i)| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\nabla^2 h(E_i)|^2 \leq n|\nabla^2 h|^2.$$

Usando a hipótese que $k$ é uma constante não negativa, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 &\geq |\nabla^2 h|^2 + (n-1)k|\nabla h|^2(1+|\nabla h|^2) + |A(\nabla h)|^2 \\ &\geq |\nabla^2 h|^2 \\ &\geq \frac{1}{n}(\Delta h)^2, \end{aligned}$$

consequentemente de (3.3) se tem

$$\begin{aligned} \Delta|\nabla h|^2 &\geq \frac{2}{n}\left(-nH\left\langle N, \partial_t \right\rangle\right)^2 \\ &\geq 2nH^2 \left\langle N, \partial_t \right\rangle^2 \\ &\geq 2nH^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por outro lado, vejamos de (4.1) que

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &\geq k\left((n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2|X|^2 + (n-2)\left\langle X, \nabla h\right\rangle^2\right) \\ &\quad + nH\left\langle AX, X\right\rangle + |AX|^2 \\ &\geq k\left((n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2|X|^2 + (n-2)\left\langle X, \nabla h\right\rangle^2\right) \\ &\quad + nH\left\langle AX, X\right\rangle + \frac{n^2H^2}{4}\left\langle X, X\right\rangle + \left\langle AX, AX\right\rangle - \frac{n^2H^2}{4}\left\langle X, X\right\rangle \\ &\geq k\left((n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2|X|^2 + (n-2)\left\langle X, \nabla h\right\rangle^2\right) \\ &\quad + \left\langle AX + \frac{nH}{2}X, AX + \frac{nH}{2}X \right\rangle - \frac{n^2H^2}{4}\left\langle X, X\right\rangle \\ &\geq k\left((n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2|X|^2 + (n-2)\left\langle X, \nabla h\right\rangle^2\right) \\ &\quad + \left| AX + \frac{nH}{2}X \right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2 \\ &\geq -\frac{n^2H^2}{4}|X|^2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que na ultima desigualdade usamos novamente que $k \geq 0$. Portanto, como $H$ é constante, a curvatura de *Ricci* de $\Sigma^n$ é limitada inferiomente. Dessa forma, observamos que usando a hipótese que o ângulo hiperbólico normal de $\Sigma^n$ é limitado, de (3.4) segue que a função $|\nabla h|^2$ também é limitada em $\Sigma^n$. Então do Lema 3.1, existe uma sequência de pontos $(P_k)_{k\geq 1}$ em $\Sigma^n$ tal que

$$\lim_k \sup \Delta |\nabla h|^2(p_k) \leq 0. \tag{4.5}$$

Usando novamente a hipótese que $H$ é constante, teremos de (4.3) e (4.5) que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_k \sup \Delta |\nabla h|^2(p_k) \\ &\geq \lim_k \sup (2nH^2) \\ &\geq 2nH^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto $H \equiv 0$ em $\Sigma^n$, isto é, $\Sigma^n$ é uma hipersuperfície máxima.

■

O próximo lema é uma consequência de uma extensão mais geral de Liouville devido a Yau [17].

**Lema 4.1** *As únicas funções harmônicas semi-limitadas definida em uma variedade Riemanniana n-dimensional completa cujo a curvatura de Ricci é não negativa, são as funções constantes.*

Como consequência do Teorema 4.1 e com o uso do Lema 4.1, mostraremos que se acrescentarmos a hipótese de $\Sigma^n$ ser limitada no infinito futuro ou passado, então a hipersuperfície $\Sigma^n$ é um *slice*.

**Teorema 4.2** *Seja $\Sigma^n$ uma hipersuperfície completa, tipo-espaço, com curvatura média constante, imersa no espaço produto $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times M^n$ em que a fibra $M^n$ é completa com curvatura seccional não-negativa. Se o ângulo hiperbólico normal $\theta$, de $\Sigma^n$ é limitado e $\Sigma^n$ é limitado no infinito futuro (ou passado) de $\overline{M}^{n+1}$, então $\Sigma^n$ é um slice, isto é, $\Sigma^n = \{t_0\} \times M^n$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.*

**Prova.** Uma véz que o ângulo hiperbólico normal $\theta$ de $\Sigma^n$ é limitado, teremos do Teorema 4.1 que $H \equiv 0$ em $\Sigma^n$. Assim segue de (3.3) que $h$ é uma função harmônica em $\Sigma^n$. Além disso, se tem de (4.4) que

$$Ric(X, X) \geq 0.$$

Por hipótese, $\Sigma^n$ é limitada no infinito futuro (ou passado) em $\overline{M}^{n+1}$, digamos que existe $t_1 \in \mathbb{R}$ fixo tal que

$$\Sigma^n \subseteq \{(t, p) \in \overline{M}^{n+1}; t \leq t_1\},$$

o que é equelivalente a função altura $h$ ser limitada superiomente em $\Sigma^n$. Analogamente se $\Sigma^n$ for limitado no infinito passado, $h$ será limitado inferiomente em $\Sigma^n$. Dessa forma, $h$ é uma função harmônica e semi-limitada em $\Sigma^n$. Segue, então, do Lema 4.1 que $h$ é constante em $\Sigma^n$ e, portanto, $\Sigma^n$ é um *slice*. ■

# Capítulo 5

# Gráficos inteiros

Neste capítulo aplicaremos os teoremas demonstrados no Capítulo 4 para obtermos resultados em gráficos verticais inteiros tipo-espaço.

**Definição 5.1** *Dados $\Omega \subset M^n$ e $u \in C^\infty(\Omega)$, definimos o gráfico (vertical) de $u$ em $-\mathbb{R} \times M^n$, como sendo a hipersuperfície*

$$\Sigma^n(u) = \{(u(x), x); x \in \Omega\} \subseteq -\mathbb{R} \times M^n.$$

*Dizemos que um gráfico é inteiro quando $\Omega = M^n$.*

Podemos introduzir em $\Omega$ uma métrica a partir da métrica do espaço ambiente Lorentziano via $\Sigma^n(u)$.

**Proposição 5.2** *Um gráfico vertical $\Sigma^n(u)$ é tipo espaço se, e somente se, $|Du|_M^2 < 1$, sendo $Du$ o gradiente de $u$ em $\Omega$ e $|Du|_M$ sua norma, ambos com relação a métrica $\langle , \rangle_M$ em $\Omega$. Neste caso a aplicação normal de Gauss é*

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - |Du|_M^2}} \left(\partial_t|_{(u(x),x)} + Du(x)\right), \quad x \in \Omega.$$

*A qual tem mesma orientação temporal de $\partial_t$, em $\Sigma^n(u)$.*

**Prova.** Primeiro considere a função $G : \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $G(t,p) = t - u(p)$ e mostremos que $\overline{\nabla} G$ é uma campo normal sobre o gráfico $\Sigma^n(u)$. De fato, veja que $G \equiv 0$ em $\Sigma^n(u)$, então considere uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma^n(u)$, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p\Sigma^n(u)$. Daí

$$0 = \frac{d}{dt}(G \circ \alpha)(t)|_{t=0} = \alpha'(0)G = v(G).$$

Dessa forma, como $v(G) = \left\langle \overline{\nabla} G, v \right\rangle$ então, sendo $v$ qualquer em $T_p\Sigma^n(u)$, segue que $\overline{\nabla} G$ é ortogonal a $T_p\Sigma^n(u)$.

Por outro lado

$$\overline{\nabla} G(t,p) = \overline{\nabla}(t - u(p)).$$

Considere $\overline{w} \in T_{(t,p)}\overline{M}^{n+1}$, então $\overline{w} = (\langle \overline{w}, \partial_t \rangle \partial_t, w)$ em que $w \in T_pM^n$, daí

$$\begin{aligned} \overline{w}(G) &= (\langle \overline{w}, \partial_t \rangle \partial_t, w)(t - u(p)) \\ &= -\langle \overline{w}, \partial_t \rangle - \langle Du, w \rangle \\ &= -\langle \overline{w}, \partial_t \rangle - \langle Du, \overline{w} \rangle \\ &= \langle -\partial_t - Du, \overline{w} \rangle, \end{aligned}$$

logo $\left\langle \overline{\nabla} G, \overline{w} \right\rangle = \langle -\partial_t - Du, \overline{w} \rangle$ para todo $\overline{w} \in T_{(t,p)}\overline{M}^{n+1}$. Assim, $\overline{\nabla} G = -\partial_t - Du$ é não nulo, pois a métrica é não degenerada.

Agora, fazendo $\overline{N} = -\overline{\nabla} G$, teremos

$$\left\langle \overline{N}, \partial_t \right\rangle = \langle \partial_t + Du, \partial_t \rangle = -1 < 0.$$

Logo $\overline{N}$ e $\partial_t$ estão na mesma orientação temporal. E vejamos que

$$\left\langle \overline{N}, \overline{N} \right\rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle + 2 \langle \partial_t, Du \rangle + \langle Du, Du \rangle = -1 + |Du|^2.$$

Dessa forma, $\overline{N}$ é tipo tempo se, e somente se, $|Du|^2 < 1$. Como uma hipersuperfície é tipo espaço se, e somente se, seu campo normal é tipo tempo, então $|Du|^2 < 1$ se, e somente se, $\Sigma^n(u)$ é tipo espaço.

Por fim, normalizando $\overline{N}$, obtemos a aplicação normal de Gauss

$$N = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|} = \frac{\partial_t + Du}{\sqrt{1 - |Du|_{M^n}}}$$

■

O próximo teorema é uma condição suficiente para que um gráfico tipo espaço seja completo.

**Teorema 5.3** *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical inteiro com curvatura média constante em um espaço produto Lorentziano $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times M^n$, cuja a fibra $M^n$ é geodesicamente completa e tem curvatura seccional não negativa. Se $|Du|_M < a$, para alguma constante $0 < a < 1$, então $\Sigma^n(u)$ é um gráfico máximo completo. Além disso, se $\Sigma^n(u)$ é limitado no infinito futuro (ou passado) de $\overline{M}^{n+1}$, então $u = t_0$ para alguma contante $t_0 \in \mathbb{R}$*

**Prova.** Consideramos uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma^n(u)$ teremos $\gamma(t) = (u(\beta(t)), \beta(t))$ em que $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$, então

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= ((u(\beta(t)))', \beta'(t)) \\ &= (\langle Du, \beta'(t) \rangle, \beta'(t)) \\ &= \langle Du, \beta'(t) \rangle_M \partial_t + \beta'(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, para $X \in \mathcal{X}(\Sigma^n(u))$, teremos

$$X = \langle Du, X^* \rangle_M \partial_t + X^*,$$

em que $X^*$ é a projeção de $X$ sobre $\mathcal{X}(M^n)$. Assim, teremos

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= \langle Du, X^* \rangle_M^2 \langle \partial_t, \partial_t \rangle + 2 \langle Du, X^* \rangle_M \langle \partial_t, X^* \rangle + \langle X^*, X^* \rangle_M \\ &= \langle X^*, X^* \rangle_M - \langle Du, X^* \rangle_M^2 \\ &\geq |X^*|_M^2 - |Du|_M^2 |X|_M^2 \\ &= (1 - |Du|_M^2)|X^*|_M^2 \end{aligned}$$

em que na desigualdade usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Usando a hipótese de que $|Du|_M < a < 1$, teremos

$$\langle X, X \rangle \geq (1 - a^2)|X^*|_M^2. \tag{5.1}$$

Agora, sendo $\beta$ a projeção de $\gamma$ sobre $M^n$, então $\beta'$ será a projeção de $\gamma'$ sobre $TM^n$. Segue então de (5.1),

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \geq (1 - a^2) \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_M .$$

Denotando por $L_\gamma$ o comprimento de arco de $\gamma$ em $\Sigma^n(u)$ e por $L_\beta$ o comprimento de arco de sua projeção $\beta$, teremos

$$L_\gamma = \int_0^t \langle \gamma'(\tau), \gamma'(\tau) \rangle^{1/2} d\tau \geq \sqrt{1 - a^2} \int_0^t \langle \beta'(\tau), \beta'(\tau) \rangle_M^{1/2} d\tau = \sqrt{1 - a^2} L_\beta \tag{5.2}$$

Agora suponhamos que $\gamma$ é uma curva divergente em $\Sigma^n(u)$ e teremos que sua projeção $\beta$ também será uma curva divergente em $M^n$. De fato, se $\beta$ tivesse contida em algum compacto $K$ de $M^n$ teriamos que sua pre imagem da projeção de $\Sigma^n(u)$ em

$M^n$ seria um compacto em $\Sigma^n(u)$, contendo $\gamma$ e daí $\gamma$ não seria uma curva divergente. Sendo $M^n$ completo, segue da Proposição 1.19, que $L_\beta = +\infty$ donde de (5.2) se obtem $L_\gamma = +\infty$ e, assim novamente da Proposição 1.19 teremos que $\Sigma^n(u)$ é completa.

Agora vejamos que

$$N^* = N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t$$

em que $N^*$ é a projeção sobre $M^n$ da aplicação normal de Gauss $N$ em $\Sigma^n(u)$. De (3.2) e da expressão de $N$ na Proposição 5.2, teremos

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= -1 + \langle N, \partial_t \rangle^2 = -1 + \left( \frac{-1}{\sqrt{1 - |Du|^2_{M^n}}} \right)^2 \\ &= -1 + \frac{1}{1 - |Du|^2_{M^n}} = \frac{|Du|^2_{M^n}}{1 - |Du|^2_{M^n}}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese $|Du|_M \leq a < 1$ para algum $a \in \mathbb{R}$, então de (3.4) teremos

$$\cosh^2 \theta = 1 + |\nabla h|^2 = 1 + \frac{|Du|^2_M}{1 - |Du|^2_M} = \frac{1}{1 - |Du|^2_M} \leq \frac{1}{1 - a^2}.$$

Assim a função $\theta$ é limitada superiomente. Portanto do Teorema 4.1 teremos que o gráfico $\Sigma^n(u)$ é maxima, e do Teorema 4.2, $u$ é constante. ■

## 5.1 Um teorema de Calabi-Bernstein para superfícies máximas

Nesta seção abordaremos resultados relacionados a hipersuperfícies $\Sigma^2$ imersas em um espaço produto Lorentziano da forma $-\mathbb{R} \times M^2$, em que $M^2$ é uma superfície conexa e $-\mathbb{R} \times M^2$ é dotado da métrica Lorentziana.

Um estudo além do que vai ser apresentado nesta seção pode ser encontrado em [3].

Antes de anunciarmos o teorema de Calabi-Bernstein, vejamos alguns resultados que serão utilizados na demonstração do teorema.

**Lema 5.1** *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$ uma imersão tipo-espaço com curvatura média constante, então*

$$\Delta \langle N, \partial_t \rangle = (\overline{Ric}(N, N) + |A|^2) \langle N, \partial_t \rangle ,$$

*em que $A$ é o operador de forma definido em $T\Sigma^n$.*

**Prova.** Consideremos $\{E_i\}$ um referencial geodêsico de autovetores do operador $A$ em $p \in \Sigma^n$ fixado, então da Proposição 2.10,

$$\begin{aligned}
\Delta \langle N, \partial_t \rangle &= div\left(\nabla \langle N, \partial_t \rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} E_i\left(E_i \langle N, \partial_t \rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(\left\langle \overline{\nabla}_{E_i} N, \partial_t \right\rangle + \left\langle E_i, \overline{\nabla}_{E_i} \partial_t \right\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} E_i \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} N, \partial_t \right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} E_i \langle AE_i, \partial_t \rangle = -\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle \overline{\nabla}_{E_i}(AE_i), \partial_t \right\rangle + \left\langle AE_i, \overline{\nabla}_{E_i} \partial_i \right\rangle\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} AE_i, \partial_t \right\rangle.
\end{aligned}$$

Denotando $\partial_t + \langle N, \partial_t \rangle N = \sum_l^n \alpha_l E_l$ e $AE_i = \sum_j^n h_{ij} E_j$,

$$\begin{aligned}
\Delta \langle N, \partial_t \rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}\left(\sum_{j=1}^{n} h_{ij} E_j\right), \partial_t \right\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}(h_{ij} E_j), \partial_t \right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle E_i(h_{ij}) E_j + h_{ij} \overline{\nabla}_{E_i} E_j, \partial_t \right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i(h_{ij}) \langle E_j, \partial_t \rangle - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, \partial_t \right\rangle.
\end{aligned}$$

Sendo $\alpha_j = \langle E_j, \partial_t \rangle$ e $\partial_t = \partial_t^{\top} - \langle \partial_t, N \rangle N$,

$$
\begin{aligned}
\Delta \langle N, \partial_t \rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i(h_{ij})\alpha_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, \partial_t^{\top} - \langle \partial_t, N \rangle N \right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i(h_{ij})\alpha_j + \langle \partial_t, N \rangle \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, N \right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i(h_{ij})\alpha_j + \langle \partial_t, N \rangle \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i(h_{ij})\alpha_j + \langle \partial_t, N \rangle \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle AE_i, E_j \rangle^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i(h_{ij})\alpha_j + \langle \partial_t, N \rangle \sum_{i=1}^{n} \left\langle AE_i, \sum_{j=1}^{n} \langle AE_i, E_j \rangle \right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i(h_{ij})\alpha_j + \langle \partial_t, N \rangle \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, AE_i \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i(h_{ij})\alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i \langle AE_i, E_j\rangle \alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_i \left\langle \overline{\nabla}_j E_i, N\right\rangle \alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{E_i}(\overline{\nabla}_{E_j} E_i), N\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{E_j} E_i, \overline{\nabla}_{E_i} N\right\rangle\right) \alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}(\overline{\nabla}_{E_j} E_i), N\right\rangle \alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{E_i}(\overline{\nabla}_{E_j} E_i), N\right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{E_j}(\overline{\nabla}_{E_i} E_i), N\right\rangle\right. \\
&\quad \left. + \left\langle \overline{\nabla}_{E_j}(\overline{\nabla}_{E_i} E_i), N\right\rangle\right) \alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{E_i}(\overline{\nabla}_{E_j} E_i) - \overline{\nabla}_{E_j}(\overline{\nabla}_{E_i} E_i), N\right\rangle\right. \\
&\quad \left. + E_j \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, N\right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, \overline{\nabla}_{E_j} N\right\rangle\right) \alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\left\langle \overline{R}(E_j, E_i)E_i, N\right\rangle + E_j \langle -AE_i, E_i\rangle\right) \alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{R}(E_i, E_j)E_i, N\right\rangle - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_j \langle -AE_i, E_i\rangle\right) \alpha_j \\
&\quad + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{Ric}(E_j, N)\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} E_j \left(\sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle\right) \alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= \overline{Ric}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_j, N\right) + \sum_{j=1}^{n} E_j(-nH)\alpha_j + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= \overline{Ric}(\partial_t + \langle N, \partial_t\rangle N, N) + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= \langle N, \partial_t\rangle \overline{Ric}(N, N) + \langle \partial_t, N\rangle |A|^2 \\
&= (\overline{Ric}(N, N) + |A|^2) \langle N, \partial_t\rangle
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Podemos ainda escrever a curvatura $Ric(N,N)$ em proporção da curvatura seccional da fibra $M^n$, como segue

**Lema 5.2** *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R}\times M^n$ uma imersão tipo-espaço com curvatura média constante, então*

$$\Delta\langle N,\partial_t\rangle = \left(K_M(n-1)|\nabla h|^2+|A|^2\right)\langle N,\partial_t\rangle .$$

*Em que $K_{M^n}$ é a curvatura seccional da fibra $M^n$ e $A$ é o operador de forma.*

**Prova.** Consideremos a projeção do campo normal $N$, na fibra Riemanniana $M^n$, $N^* = N+\langle N,\partial_t\rangle\partial_t$, daí

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(N,N) &= \overline{Ric}(N^*-\langle N,\partial_t\rangle\partial_t, N^*-\langle N,\partial_t\rangle\partial_t)\\ &= \overline{Ric}(N^*,N^*)-2\langle N,\partial_t\rangle\overline{Ric}(N,\partial_t)+\langle N,\partial_t\rangle^2\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t).\end{aligned}$$

Como $\partial_t$ é campo paralelo na conexão $\overline{\nabla}$, então $\overline{Ric}(X,\partial_t)=\sum_i\left\langle\overline{R}(X,E_i)\partial_t,E_i\right\rangle=0.$

Considere um referencial ortonormal $\{E_i\}_i$ em $p$ tal que $E_{n+1}=\partial_t$, suponha que $N^*\neq 0$ em $(t_0,p)$ e tome $E_n$ paralelo a $N^*$. Então

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(N^*,N^*) &= \sum_{i=1}^{n+1}\left\langle\overline{R}(E_i,N^*)E_i,N^*\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left\langle\overline{R}(E_i,N^*)E_i,N^*\right\rangle+\left\langle\overline{R}(E_n,N^*)E_n,N^*\right\rangle+\left\langle\overline{R}(E_{n+1},N^*)E_{n+1},N^*\right\rangle\end{aligned}$$

quando $i=n+1$, se tem $E_i=E_{n+1}=\partial_t$ e daí $\overline{R}(\partial_t,N^*)\partial_t=0$. Para $i=n$ vale $N^*=\lambda E_i$ e daí $\overline{R}(E_i,N^*)E_i=\overline{R}(E_i,\lambda E_i)E_i=0$, assim

$$\overline{Ric}(N^*,N^*)=\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle\overline{R}(E_i,N^*)E_i,N^*\right\rangle$$

sendo $E_i$ e $N^*$ tangentes ao *slice* $M^n_{t_0}$ em $(t_0,p)$, segue que (usando a equação de Gauss com $A = 0$ se tem $\overline{R} = R$ )

$$
\begin{aligned}
\overline{Ric}(N^*, N^*) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(E_i, N^*)E_i, N^* \rangle_M \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} K_M(\langle E_i, E_i \rangle_M \langle N^*, N^* \rangle_M - \langle E_i, N^* \rangle_M^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} K_M \langle N^*, N^* \rangle_M \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} K_M(\langle N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t \rangle) \\
&= K_M \sum_{i=1}^{n-1} (-1 + 2 \langle N, \partial_t \rangle^2 - \langle N, \partial_t \rangle^2) \\
&= K_M \sum_{i=1}^{n-1} (-1 + \langle N, \partial_t \rangle^2) \\
&= K_M (n-1)(-1 + \langle N, \partial_t \rangle^2) \\
&= K_M (n-1) |\nabla h|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, segue do Lema 5.1 que

$$\Delta \langle N, \partial_t \rangle = \left( K_{M^n}(n-1)|\nabla h|^2 + |A| \right) \langle N, \partial_t \rangle$$

■

O resultado de Calabi-Bernstein que veremos a seguir não é válido em espaços produtos Lorentzianos gerais. Podemos ver em [3] que quando $M^2 = \mathbb{H}^2$ é o plano hiperbólico, então existe exemplos de superfícies máximas completas em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ que não são totalmente geodésicas. Mas temos o seguinte resultado

**Teorema 5.4** *Seja $M^2$ uma superfície Riemanniana completa com curvatura Gaussiana $K_M$ não negativa. Então qualquer superfície $\Sigma^2$, máxima, completa, imersa em $-\mathbb{R} \times M^2$, é totalmente geodésica. Além disso, se $K_M > 0$ em algum ponto de $M^2$, então $\Sigma^2$ é um slice $\{t_0\} \times M^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

**Prova.** Para campos unitários $X, Y$ em $\Sigma^2$ temos da equação de Gauss,

$$\langle R(X,Y)X, Y \rangle = \left\langle (\overline{R}(X,Y)X)^{\top}, Y \right\rangle - \langle AX, X \rangle \langle AY, Y \rangle + \langle AY, X \rangle \langle AX, Y \rangle ,$$

o que implica em

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle AX, Y\rangle^2 - \langle AX, X\rangle \langle AY, Y\rangle .$$

Por outro lado temos a expressão (veja [3])

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z &= K_M\left(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\right) + K_M \langle Z,\partial_t\rangle \left(\langle X,\partial_t\rangle Y - \langle Y,\partial_t\rangle X\right) \\ &\quad + K_M\left(\langle X,Z\rangle \langle Y,\partial_t\rangle - \langle Y,Z\rangle \langle X,\partial_t\rangle\right)\partial_t. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Em particular se $\{E_1, E_2\}$ é um referencial ortonormal local em $\Sigma^2$, então segue de (5.3) que

$$\begin{aligned} \overline{K}(E_1,E_2) &= \left\langle \overline{R}(E_1,E_2)E_1, E_2\right\rangle \\ &= K_M \left\langle\left(\langle E_1,E_1\rangle E_2 - \langle E_2,E_1\rangle E_1\right), E_2\right\rangle \\ &\quad + K_M \langle E_1,\partial_t\rangle \left\langle\left(\langle E_1,\partial_t\rangle E_2 - \langle E_2,\partial_t\rangle E_1\right), E_2\right\rangle \\ &\quad + K_M\left(\langle E_1,E_1\rangle \langle E_2,\partial_t\rangle - \langle E_2,E_1\rangle \langle E_1,\partial_t\rangle\right)\langle \partial_t, E_2\rangle \\ &= K_M \langle E_1,E_1\rangle + K_M \langle E_1,\partial_t\rangle^2 + K_M \langle E_2,\partial_t\rangle \langle \partial_t, E_2\rangle \\ &= K_M\left(1 + \left\langle E_1,\partial_t^{\top}\right\rangle^2 + \left\langle E_2,\partial_t^{\top}\right\rangle^2\right) \\ &= K_M\left(1 + tr(\partial_t^{\top})\right) \\ &= K_M\left(1 + |\partial_t^{\top}|^2\right) \\ &= K_M \langle N,\partial_t\rangle^2 . \end{aligned}$$

Considerando que $\{E_1, E_2\}$ é uma base que diagonaliza o operador $A$ e sendo $\Sigma^2$ máxima, segue da equação de Gauss que

$$\begin{aligned} K(E_1,E_2) &= \overline{K}(E_1,E_2) + \langle AE_1,E_2\rangle^2 - \langle AE_1,E_1\rangle \langle AE_2,E_2\rangle \\ &= K_M \langle N,\partial_t\rangle^2 - \langle AE_1,E_1\rangle \langle AE_2,E_2\rangle \\ &= K_M \langle N,\partial_t\rangle^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\langle AE_1,E_1\rangle + \langle AE_2,E_2\rangle\right)^2 - 2\langle AE_1,E_1\rangle \langle AE_2,E_2\rangle\right) \\ &= K_M \langle N,\partial_t\rangle^2 + \frac{1}{2}\left(\langle AE_1,E_1\rangle^2 + \langle AE_2,E_2\rangle^2\right) \\ &= K_M \langle N,\partial_t\rangle^2 + \frac{1}{2}|A|^2. \end{aligned}$$

Com isso teremos que $K \geq 0$ em $\Sigma^2$ e dessa forma $\Sigma^2$ é uma superfície Riemanniana completa com curvatura gaussiana não negativa e, por um resultado clássico devido a Ahlfors [1] e Blanc, Fiala e Huber [14], teremos que $\Sigma^2$ é parabólica, no sentido de que qualquer função sub-harmônica não positiva na superfície $\Sigma^2$ deve ser constante. Temos que

$$\begin{aligned} |\nabla \langle N, \partial_t\rangle|^2 &= |A(\nabla h)|^2 = \langle A(\nabla h), A(\nabla h)\rangle \\ &= \left\langle A^2(\nabla h), \nabla h\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}|A|^2 \nabla h, \nabla h\right\rangle = \frac{1}{2}|A|^2|\nabla h|^2 \\ &= \frac{1}{2}|A|^2 \left(\langle N, \partial_t\rangle - 1\right), \end{aligned} \tag{5.4}$$

e do Lema 5.2, temos também

$$\Delta \langle N, \partial_t\rangle = \left(K_M(\langle N, \partial_t\rangle^2 - 1) + |A|^2\right) \langle N, \partial_t\rangle . \tag{5.5}$$

Agora, sendo $\langle N, \partial_t\rangle \leq -1$, vejamos que

$$0 = \nabla \left(\langle N, \partial_t\rangle \frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle}\right) = \langle N, \partial_t\rangle \nabla \left(\frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle}\right) + \frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle} \nabla \langle N, \partial_t\rangle ,$$

o que implica em

$$\nabla \left(\frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle}\right) = -\frac{\nabla \langle N, \partial_t\rangle}{\langle N, \partial_t\rangle^2},$$

e daí

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \left(\langle N, \partial_t\rangle \frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle}\right) \\ &= \langle N, \partial_t\rangle \Delta \left(\frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle}\right) + \frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle} \Delta \langle N, \partial_t\rangle + 2\left\langle \nabla \langle N, \partial_t\rangle , \nabla \left(\frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle}\right)\right\rangle , \end{aligned}$$

com isso

$$-\langle N, \partial_t\rangle \Delta \left(\frac{1}{\langle N, \partial_t\rangle}\right) = \frac{\Delta \langle N, \partial_t\rangle}{\langle N, \partial_t\rangle} - \frac{2\langle \nabla \langle N, \partial_t\rangle , \nabla \langle N, \partial_t\rangle\rangle}{\langle N, \partial_t\rangle^2}.$$

Assim usando as expressões (5.4), (5.5), teremos

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{1}{\langle N,\partial_t\rangle}\right) &= -\frac{\Delta\langle N,\partial_t\rangle}{\langle N,\partial_t\rangle^2}+\frac{2|\nabla\langle N,\partial_t\rangle|^2}{\langle N,\partial_t\rangle^3}\\
&= -\frac{\left(K_M(\langle N,\partial_t\rangle^2-1)+|A|^2\right)\langle N,\partial_t\rangle}{\langle N,\partial_t\rangle^2}\\
&\quad +\frac{|A|^2(\langle N,\partial_t\rangle^2-1)}{\langle N,\partial_t\rangle^3}\\
&= -\frac{K_M(\langle N,\partial_t\rangle^2-1)+|A|^2}{\langle N,\partial_t\rangle}+\frac{|A|^2}{\langle N,\partial_t\rangle}-\frac{|A|^2}{\langle N,\partial_t\rangle^3}\\
&= -K_M\left(\langle N,\partial_t\rangle-\frac{1}{\langle N,\partial_t\rangle}\right)-\frac{|A|^2}{\langle N,\partial_t\rangle^3}\\
&= -\frac{1}{\langle N,\partial_t\rangle}\left(K_M(\langle N,\partial_t\rangle^2-1)+\frac{|A|^2}{\langle N,\partial_t\rangle^2}\right)\geq 0,
\end{aligned}
$$

isto é, $\frac{1}{\langle N,\partial_t\rangle}$ é uma função sub-harmônica não positiva na superfície parabólica $\Sigma^2$ e, portanto, deve ser constante em $\Sigma^2$, e consequentemente $|A|^2=0$ e $K_M(\langle N,\partial_t\rangle^2-1)=0$ em $\Sigma^2$. Portanto $\Sigma^2$ é totalmente geodésica em $-\mathbb{R}\times M^2$.

Agora se $K_M>0$ em algum ponto de $\Sigma^2$, então neste ponto teremos $\langle N,\partial_t\rangle^2-1=0$ e segue de (3.2) que $h$ é constante e daí $\Sigma^2$ é um *slice*.

Finalmente, como a projeção de $\Sigma^2$ em $M^2$ é uma aplicação de recobrimento, segue, então de [3] pg.4, que $K_M>0$ em algum ponto em $\Sigma^2$ se e somente se $K_M>0$ em algum ponto de $M^2$. ■

Como consequência dos Teoremas 4.1, 5.4 e 4.2 teremos o seguinte resultado

**Corolário 5.5** *Seja $\Sigma^2$ uma superfície tipo-espaço, com curvatura média constante, imersa num produto Lorentziano $\overline{M}^3=-\mathbb{R}\times M^2$, cuja a fibra $M^2$ é completa com curvatura Gaussiana $K_M$ não negativa. Se o ângulo hiperbólico normal de $\Sigma^2$ for limitado, então $\Sigma^2$ é totalmente geodésica. Além disso, se $\Sigma^2$ for limitado no infinito futuro (ou passado) de $\overline{M}^3$ ou $K_M>0$ em algum ponto de $M^2$, então $\Sigma^2$ é um slice.*

**Prova.** Por hipótese inicial, a função ângulo hiperbólico normal $\theta$ de $\Sigma^2$ é limitada, segue então do Teorema 4.1 que $\Sigma^2$ é máxima. Consequentemente do Teorema 5.4 teremos que $\Sigma^2$ é totalmente geodésica e nos pontos em que $K_M>0$, $\Sigma^2$ é um *slice*.

Além disso se $\Sigma^2$ for limitado no infinito futuro (ou passado), então do Teorema 4.2 teremos que $\Sigma^2$ será um *slice*.

■

# Bibliografia


[1] Ahlfors, L.V., *Sur le type d'une surface de Riemann*, C.R. Acad. Sci. Paris 201 30-32, (1935).

[2] Aiyama, R., *On the Gauss map of complete space-like hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 353-361.

[3] Albujer, A.L., Alías, L.J., *Calabi-Bernstein results for maximal surfaces in Lorentzian product spaces.* Jornal of Geometry and Physics, Departamento de matemática, Universidad de Murcia, E-30100 Espinardo, Murcia, Spain 59, 620-631, (2009).

[4] Aquino, C.P, de Lima, H.F., Lima Jr, E.A., *Complete CMC spacelike hypersurfaces immersed in a Lorentzian product space.* Archiv der Mathematk. Published online 16 May 2015.

[5] Arlandson, S.O., *Sobre Hipersuperfícies Completas em Produto Riemanniano.* Ciências e Tecnologia - UFCG,. Campina Grande, (2015), (Dissertação de Mestrado).

[6] Bernstein, S. N. *Sur une théorme de géometrie et ses applications aux derives partielles du type elliptique.* Comm. Inst. Sci, Math. Mech. Univ. Kharkov, v. 15, p. 38-45, 1915-17.

[7] Bochner, S., *Vector fields and Ricci curvature, Bull.* American Math. Soc. 52 776-797, (1946).

[8] Calabi, E., *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Sumpos. Pure Math. **15** (1970), 223-230.

[9] Caminha, A., *Tópicos de Análise em Variedades.* Ceará, 2006. (Apostila).

[10] Caminha, A.,*A rigidity theorem for complete CMC hypersurfaces in Lorentz manifolds*, Diff. Geom. Appl. **24** (2006), 652-659.

[11] Cheng, S.Y., Yau, S.T., *Maximal spacelike hypersurfaces in Lorentz Minkowski space*, Ann. of Math. **104** (1976), 407-419.

[12] Dajczer, M, et al., *Submanifolds and Isometric Immersions.* Publish or Perish, Houston , (1990).

[13] do Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana.* Instituto de Matemática pura e aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 4ª Ed (2008).

[14] Huber, A., *On subharmonic functions and differential geometry in the large, Comment.* Math. Helv. 32 13-72 (1957).

[15] Omori, H., *immersions of Riemannian manifolds.* J. Math. Soc. Japan, 19 205-214, (1967).

[16] O'Neill, B.,*Semi-Riemanniana geometry with applications to relativity*, Academic Press, Los Angeles (1983).

[17] Yau, S.T., *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. 28 201-228, (1975).