Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Graduações e identidades na álgebra das matrizes triangulares superiores como álgebra associativa, de Lie e de Jordan

por

Eduardo Pinto da Fonsêca [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

F676g Fonsêca, Eduardo Pinto da.

Graduações e identidades na álgebra das matrizes triangulares superiores como álgebra associativa, de Lie e de Jordan / Eduardo Pinto da Fonsêca. – Campina Grande, 2022.

173 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva".

Referências.

1. Álgebra. 2. Graduações e Identidades – Álgebra. 3. Codimenções Graduadas. 4. Expoente Graduado. I. Silva, Diogo Diniz Pereira da. II. Título.

CDU 512(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Graduações e identidades na álgebra das matrizes triangulares superiores como álgebra associativa, de Lie e de Jordan

por

Eduardo Pinto da Fonsêca

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Alan de Araújo Guimarães

Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães

Felipe Y. Yasumura

Prof. Dr. Felipe Yukihide Yasumura

Diogo Diniz P. S. Filho

Prof. Dr. Diogo Diniz

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho/2022

Resumo

Neste trabalho estudamos a descrição das graduações por um grupo G, a menos de isomorfismo, em $UT_n(K)$ vista como álgebra associativa, com o produto usual de matrizes; como álgebra de Lie, com o comutador de Lie e vista como álgebra de Jordan com o produto de Jordan derivado de uma álgebra associativa, onde K é um corpo infinito de característica diferente de 2 e $n \geq 4$. Nos casos em que $UT_n(K)$ é vista como álgebras de Lie e de Jordan, consideraremos que G seja um grupo abeliano, já no caso associativo, consideraremos que G é um grupo qualquer. Também estudamos as identidades polinomiais graduadas, bem como comportamento assintótico das codimensões graduadas, nesses 3 casos e obtemos um valor para o expoente graduado. Também introduzimos o leitor a um assunto técnico, a respeito do estudo de ações, pelo grupo S_m das permutações, em sequências com entradas em um conjunto qualquer, que derivam resultados que estão por trás de alguns dos teoremas de classificações das graduações em $UT_n(K)$ nos casos de Lie e de Jordan.

Abstract

In this work we study the description of the gradings by a group G, up to isomorphism, in $UT_n(K)$ as an associative algebra, with usual multiplication of matrices; as a Lie algebra, with the Lie commutator and as a Jordan algebra with the Jordan product obtained from an associative algebra, with K an infinite field with characteristic different from 2 and $n \geq 4$. In the cases where $UT_n(K)$ is considered as a Lie and a Jordan algebra, we will assume that G is an abelian group. In the associative case, G is an arbitrary group. Also we study the graded polynomial identites and the asymptotic behavior of the graded codimensions, in all cases we give an estimate of the value of the graded exponent. We introduce the reader to a technical subject of action of groups, by the group S_m of permutations, in sequences in a any set, and derive some theorems of classifications of gradings in $UT_n(K)$ in the Lie and the Jordan cases.

Agradecimentos

Agradeço a todos que tiveram paciência comigo e que influenciaram em minha jornada até aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Dedicatória

A toda minha família.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, entendemos álgebras sobre um corpo K, como um K-espaço vetorial A munido de uma aplicação bilinear $A \times A \to A$ que é a multiplicação da álgebra. Também consideramos que uma G-graduação, por um grupo G qualquer, em A é uma decomposição $\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ da álgebra como soma direta de subespaços vetoriais, indexados pelos elementos de G, e tais que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ para todos $g, h \in G$. A noção de álgebra graduada é um conceito relativamente recente, da álgebra moderna. A descrição de todas as possíveis G-graduações é um importante problema na teoria de anéis graduados e suas aplicações. Em alguns casos as graduações em uma álgebra A foram completamente descritas, como por exemplo, todas as graduações por um grupo abeliano na álgebra das matrizes $n \times n$ foram descritas em [4], graduações em algumas álgebras de Lie simples de dimensão finita foram descritas em [5], já em [28] são descritas todas as G-graduações para $UT_n(K)$. Em [13] os autores apresentam a classificação das graduações em álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados. Em destaque, de forma vital para esse trabalho, ressaltamos os resultados de [24], [25] e [28] onde são descritas as graduações para as álgebras de matrizes triangulares superiores $UT_n^{(-)}$, $UT_n^{(+)}$ e UT_n, respectivamente.

Assim como é feito em certos resultados de Álgebra Linear, onde avaliamos matrizes com entradas em K em polinômios de $K[x]$, podemos avaliar uma quantidade maior de elementos da álgebra A, em polinômios da álgebra associativa livre $K\langle X \rangle$, onde $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, sempre que A for uma álgebra associativa, isto é, sua multiplicação for uma operação associativa. No caso em que A pertence a uma variedade de álgebras não necessariamente associativas podemos formalizar os conceitos de álgebra livre, "polinômios" e "substituição" das variáveis por elementos de A fazendo os ajustes

necessários, faremos isto nesta dissertação no Capítulo 1. Assim surge o conceito de identidade polinomial, que são os polinômios que se anulam para qualquer substituição das variáveis por elementos da álgebra. Claramente o polinômio nulo é uma identidade polinomial para qualquer álgebra, assim as álgebras que possuem alguma identidade polinomial não nula, são chamadas de Álgebras com Identidades Polinomiais (*Polynomial Identity Algebras*, em inglês) ou simplesmente de PI Álgebras. De forma geral, o estudo sobre identidades polinomiais tomou força em 1948, com um artigo do matemático Irvin Kaplansky [20], embora o conceito tenha aparecido implicitamente mais de vinte anos antes, em trabalhos de Dehn [9] em 1922 e Wagner [29] em 1936. Muito da teoria de PI Álgebras foi desenvolvido nas décadas de 1960 e 1970, como pode ser visto em [19]. Determinar as identidades polinomiais de uma álgebra é um processo difícil, com destaque para álgebras sobre corpos de característica 2. Para o caso das matrizes 2×2 o problema foi resolvido ao se considerar K infinito, porém o problema segue aberto para matrizes $n \times n$ onde $n \geq 3$.

Seja P_n o subespaço gerado pelos monômios $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)}$, $\sigma \in S_n$. Sob a hipótese de que $charK = 0$, como visto em [15], o conjunto $T(A)$ das identidades polinomiais de uma álgebra associativa A é completamente determinado por $P_n \cap T(A)$, $n = 1, 2, \ldots$. Neste contexto temos a noção de n-ésima codimensão de A, que é dada por $c_n(A) = dim\ P_n/(P_n \cap T(A))$, e que se mostrou um importante conceito que deu origem a um ramo de estudo das PI Álgebras, que é saber o comportamento da sequência $(c_n(A))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Caso o limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ exista iremos nos referir a ele como o expoente de A, e denotamos tal valor por $exp(A)$. O Teorema de Regev [27] garante que a sequência $(c_n(A))_{n\in\mathbb{N}^*}$ é exponencialmente limitada para qualquer álgebra associativa A que tenha pelo menos uma identidade polinomial não nula, isto é, existe $d > 0$ tal que $c_n(A) \leq d^n$ para todo n. Como $c_n(A) \leq d^n$ para algum $d > 0$, segue que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \leq d < \infty$, assim podemos considerar os limites $0 \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} < \infty$. Amistur conjecturou que esses limites sempre coincidem, isto é, $\sqrt[n]{c_n(A)}$ converge, e o limite é um inteiro não negativo. Essa conjectura foi confirmada por Giambruno e Zaicev.

Uma condição menos restritiva, é que K seja um corpo infinito, neste caso precisamos apenas das identidades polinomiais multihomogêneas, veja [15]. Por isso neste

trabalho iremos supor que K é um corpo infinito e $charK \neq 2$. Em característica 2 as álgebras de Jordan apresentam algumas dificuldades a serem contornadas, como por exemplo $a \circ a = aa + aa = 2a^2 = 0$ para todo $a \in A^{(+)}$. Em [18] são tratados alguns casos de álgebras de Jordan sobre corpos de característica 2, assim como em [11] são apresentados resultados acerca de álgebras de Lie sobre característica 2.

Seja A uma álgebra associativa, uma forma de relacionar o conceito de álgebras graduadas por um grupo e identidades polinomiais surge com as identidades polinomiais graduadas. Como A possui elementos que chamamos de homogêneos, que são os elementos de $\underset{g\in G}{\cup} A_g$, fazemos apenas substituições com esses elementos, ademais substituímos esses elementos apenas em variáveis específicas, que serão variáveis de mesmo grau que o elemento a ser substituído. O interesse em identidades polinomiais graduadas foi inspirado por sua importância na solução de A. Kemer ao Problema de Specht, veja [6] e [21]. Um exemplo desta relação entre identidades graduadas e ordinárias é o resultado provado em [3] e [7] que se G é um grupo finito, então A possui uma identidade não nula se, e somente se, o somando direto referente ao elemento neutro de G possui uma identidade não nula.

Assim como temos o conceito de PI expoente da álgebra associativa A, também temos o de expoente graduado, que será um dos focos desse trabalho. Iremos estudar o comportamento assintótico das codimensões graduadas para as álgebras UT_n, $UT_n^{(+)}$ e $UT_n^{(-)}$, no Capítulo 4, e veremos que independente do caso e do tipo de graduação, o comportamento assintótico é igual .

Neste trabalho iniciaremos definindo nossos conceitos fundamentais, como por exemplo, o que é uma álgebra, o que são identidades polinomiais e seu expoente. No Capítulo 2 abordaremos algumas permutações especiais do grupo simétrico S_m, que são as permutações do conjunto

$$\mathscr{T}_m := \{\sigma \in S_m \mid \sigma(1) > \cdots > \sigma(t) < \sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m), \text{ para algum } 1 \leq t \leq m\},$$

e mostraremos que tais permutações tem relação com as multiplicações em $UT^{(-)}$ e $UT^{(+)}$, e que consequentemente nos possibilitam fazer cálculos técnicos que estão por trás de diversos resultados importantes a respeito das graduações em $UT_n^{(\pm)}$. No Capítulo 3, iremos estudar as graduações em $UT_n, UT_n^{(-)}$ e $UT_n^{(+)}$, neste capítulo veremos que em UT_n, a menos de isomorfismo, há apenas um tipo de graduação, que é

justamente o que denominamos *Graduação Elementar*, que é uma graduação onde as matrizes elementares são elementos homogêneos, já nos casos de $UT^{(-)}$ e $UT_n^{(+)}$ aparece mais uma família de graduações, que não são isomorfas as graduações elementares, tais graduações são chamadas de *Mirror Pattern Type*. Por fim, no Capítulo 4 iremos estudar o comportamento assintótico das codimensões graduadas dessas álgebras, usando técnicas de contagem e combinatórias. Para evitar confusão entre a notação da álgebra de Lie $UT_n^{(-)}$ e a álgebra de Jordan $UT^{(+)}$, iremos denotar $UT_n^{(+)}$ por UJ_n.

Capítulo 1

Noções preliminares

Neste trabalho é presumido que o leitor tenha conhecimento das definições e resultados básicos de *Álgebra*, tais como: grupo, corpo, característica de um corpo e *etc.* Também será presumido que o leitor saiba as definições e resultados básicos de *Álgebra Linear*, tais como: espaço vetorial sobre um corpo qualquer, subconjuntos L.I. de um espaço vetorial, base de um espaço vetorial, dimensão, subespaço, espaço quociente, espaço produto, transformações lineares, aplicações multilineares e *etc.* Para um leitor que deseja um aprofundamento em *Álgebra*, indicamos a referência [14] e para um aprofundamento em *Álgebra Linear* indicamos [17]. De toda forma, ainda assim, serão apresentadas definições e resultados a respeito de *Teoria de Grupos* e *Álgebra Linear* que serão importantes para o trabalho. Abordaremos neste capítulo inicial as noções básicas a respeito de álgebras que serão necessárias para o entendimento dos demais capítulos.

1.1 Álgebras

No que segue adiante, até o fim deste trabalho, fixaremos K um corpo infinito de característica diferente de 2. Todos espaços vetoriais, produtos tensoriais, etc., serão sobre o corpo K.

Definição 1.1 (Definition 1.1.1, de [11]) *Um K-espaço vetorial A é chamado de álgebra sobre K, ou uma K-álgebra, se A está munido de uma operação binária $* : A \times A \longrightarrow A$, chamada de multiplicação, tal que para quaisquer $a, b, c \in A$ e*

$\lambda \in K$ tenhamos

$$a * (b + c) = a * b + a * c,$$

$$(b + c) * a = b * a + c * a,$$

$$\lambda(a * b) = (\lambda a) * b = a * (\lambda b).$$

Denotamos a K-álgebra por $(A, *)$, ou simplesmente por A quando $*$ estiver subentendida.

Normalmente denotamos a multiplicação de A por " $\cdot$ ", e escrevemos ab em vez de $a \cdot b$. Note que pela definição, a multiplicação $*$ de uma álgebra A é uma aplicação bilinear do espaço vetorial produto $A \times A$ em A. Em outras palavras, uma álgebra A é um espaço vetorial munido de uma aplicação bilinear $* : A \times A \longrightarrow A$.

Notação 1.2 *Seja $(A, *)$ uma álgebra. Dado $a \in A$ denotamos $a^1 = a$ e indutivamente para um inteiro $n > 1$ denotamos $a^n = a^{n-1} * a$.*

Devemos ter um cuidado com a notação descrita acima, diferente do caso para anéis, em algumas álgebras $(A, *)$ pode ocorrer a existência de elementos $a \in A$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ tais que $a^{n+m} \neq a^n * a^m$. As álgebras $(A, *)$ que satisfazem a propriedade $a^{n+m} = a^n * a^m$ para todos $a \in A$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ são chamadas de álgebras associativas a potência. Para exibirmos um exemplo de uma álgebra que não seja associativa a potência, vejamos um mecanismo simples de construir álgebras.

Lema 1.3 (Remark 1.1.2, de [11]) *Seja A um espaço vetorial e β uma base de A. Toda aplicação $\circledast : \beta \times \beta \longrightarrow A$ pode ser estendida, de forma única, em uma multiplicação $* : A \times A \longrightarrow A$, de modo que $(A, *)$ seja uma álgebra.*

Prova. Seja $\beta = \{b_\ell\}_{\ell \in \Lambda}$, dados $x, y \in A$ existem únicos $\lambda_\ell, \lambda'_\ell \in K$ onde $\ell \in \Lambda$, tais que $x = \sum_{i \in \Lambda} \lambda_i b_i$ e $y = \sum_{j \in \Lambda} \lambda'_j b_j$. Definamos

$$x * y = \sum_{i,j \in \Lambda} \lambda_i \lambda'_j (b_i \circledast b_j).$$

Uma verificação simples mostra que $(A, *)$ é uma álgebra. É fácil ver que $*$ estende $\circledast$. A unicidade segue da bilinearidade de $*$ e do fato de $*$ coincidir com $\circledast$ em $\beta \times \beta$. ■

Desta forma temos um mecanismo para construir álgebras. Basta iniciarmos com um conjunto β, tomar A como sendo o espaço vetorial gerado pelos símbolos de β, e então escolher de forma arbitrária uma função $\circledast : \beta \times \beta \longrightarrow A$.

A partir daqui quando escrevermos ab, estaremos simbolizando o elemento $a*b \in A$, para a e b pertencentes a álgebra $(A, *)$. Note que não foi exigida mais nenhuma propriedade algébrica a respeito da multiplicação $*$. Na medida que $*$ apresenta propriedades úteis, separamos as álgebras em algumas classes, tais como as que definimos a seguir.

Definição 1.4 (Definition 1.1.8, de [11]) *Seja $(A, *)$ uma álgebra, dizemos que*

(*i*) *A é associativa, se $x(yz) = (xy)z$ para todos $x, y, z \in A$,*

(*ii*) *A é comutativa, se $xy = yx$ para todos $x, y \in A$,*

(*iii*) *A tem elemento unidade, ou é unitária, se existe $u \in A$, chamado de unidade, tal que $xu = ux = x$ para todo $x \in A$.*

Note que quando A é uma álgebra associativa, temos que A também é um anel, com sua soma e multiplicação de vetores. De forma análoga como definimos alguns subconjuntos especiais para os anéis, definimos para as álgebras, até mesmo quando não são associativas, tais como as definições apresentadas a seguir.

Definição 1.5 (Definition 1.1.3, de [11]) *Seja A uma álgebra. Dado um subconjunto $B \subseteq A$ não vazio, dizemos que B*

(*i*) *é uma subálgebra da álgebra A, se B é subespaço vetorial do espaço A e se $xy \in B$ para quaisquer $x, y \in B$,*

(*ii*) *é um ideal à direita da álgebra A, se B é subespaço de A e $ba \in B$ para todos $a \in A$ e $b \in B$,*

(*iii*) *é um ideal à esquerda da álgebra A, se B é um subespaço de A e $ab \in B$ para todos $a \in A$ e $b \in B$*

(*iv*) *é um ideal, ou um ideal bilateral, da álgebra A, se B é subespaço de A e $ab, ba \in B$ para todos $a \in A$ e $b \in B$.*

(*v*) *é o centro de A, se B é conjunto dos elementos $b \in A$ tais que $ab = ba$ para todo $a \in A$, com o adicional de que se $b \in B$, então*

$$b(xy) = (bx)y, \quad x(by) = (xb)y \quad e \quad x(yb) = (xy)b$$

para todos $x, y \in A$. Neste caso usamos a notação $B = Z(A)$.

Observação 1.6 *Note que no caso do item (i) da definição acima, podemos restringir $*$ para $* : B \times B \longrightarrow B$ e assim B será por si só uma álgebra. Isto justifica a nomenclatura de "subálgebra". Note também que no caso do item (iv) temos que todo ideal da álgebra A também é um ideal à direita, ideal à esquerda e subálgebra da álgebra A. A respeito do item (v), uma simples verificação mostra que o centro também é um subespaço vetorial de A.*

Algumas das propriedades da ***Definição 1.4*** e da ***Definição 1.5*** acima, podem ser trabalhosas de serem verificadas em certos casos particulares. Vejamos algumas formas de simplificar essas propriedades e também propriedades básicas a respeito da multiplicação.

Proposição 1.7 *Seja A uma álgebra e β uma base do espaço vetorial A.*

(i) *Dados $a, b \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, então $(\lambda_1 a)(\lambda_2 b) = \lambda_1\lambda_2 ab$,*

(ii) *A é associativa se, e somente se, $(xy)z = x(yz)$ para todos $x, y, z \in \beta$,*

(iii) *A é comutativa se, e somente se, $xy = yx$ para todos $x, y \in \beta$,*

(iv) *A é unitária se, e somente se, existe $u \in A$ tal que $ux = xu = x$ para todo $x \in \beta$. Ademais, no caso em que A tem unidade, sua unidade é única,*

(v) *seja J um subespaço de A. Temos que J é um ideal da álgebra A se, e somente se, $vx, xv \in J$ para todos $v \in J$ e $x \in \beta$,*

(vi) *dado $a \in A$ temos que $a \in Z(A)$ se, e somente se, $ax = xa$ e*

$$a(xy) = (ax)y, \quad x(ay) = (xa)y \quad e \quad x(ya) = (xy)a$$

para todos $x, y \in \beta$,

(vii) *se A é associativa e $a \in A$, dados $m, n \in \mathbb{N}^*$ temos $a^n a^m = a^{m+n}$ e $(a^n)^m = a^{nm}$,*

(viii) *para qualquer $a \in A$ segue que $a * 0 = 0 * a = 0$, onde 0 é o vetor nulo de A,*

(ix) *dados $a, b \in A$ segue que $-ab = (-a)b = a(-b)$ e $ab = (-a)(-b)$,*

(x) *se A é unitária e $1 \in A$ é a unidade de A, segue que $(-1)a = -a = a(-1)$, para todo $a \in A$,*

(xi) *se A é unitária e $1 \in A$ é a unidade de A então $1 \neq 0$ sempre que $dim A > 0$.*

Prova.

(i) Sejam $a, b \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ então

$$(\lambda_1 a)(\lambda_2 b) = \lambda_1(a(\lambda_2 b)) = \lambda_1(\lambda_2(ab)) = (\lambda_1\lambda_2(ab)) = \lambda_1\lambda_2 ab.$$

(ii) Supondo A associativa, é claro que $(xy)z = x(yz)$ para todos $x, y, z \in \beta$. Reciprocamente, suponha que $(xy)z = x(yz)$ para todos $x, y, z \in \beta$. Pondo $\beta = \{b_i \mid i \in I\}$ temos que $(b_i b_j)b_l = b_i(b_j b_l)$ para todos $b_i, b_j, b_l \in \beta$. Dados $a, b, c \in A$, existem únicos $\lambda_i^{(x)} \in K$, onde $x \in \{a, b, c\}$ e $i \in I$ tais que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i^{(x)} b_i.$$

Daí

$$\begin{aligned}
(ab)c &= \left(\left(\sum_{i\in I} \lambda_i^{(a)} b_i\right)\left(\sum_{j\in I} \lambda_j^{(b)} b_j\right)\right)\left(\sum_{l\in I} \lambda_l^{(c)} b_l\right) \\
&= \left(\sum_{i,j\in I} \lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(b)} b_i b_j\right)\left(\sum_{l\in I} \lambda_l^{(c)} b_l\right) \\
&= \sum_{i,j,l\in I} \lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(b)}\lambda_l^{(c)}(b_i b_j)b_l \\
&= \sum_{i,j,l\in I} \lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(b)}\lambda_l^{(c)} b_i(b_j b_l) \\
&= \left(\sum_{i\in I} \lambda_i^{(a)} b_i\right)\left(\sum_{j,l\in I} \lambda_j^{(b)}\lambda_l^{(c)} b_j b_l\right) \\
&= \left(\sum_{i\in I} \lambda_i^{(a)} b_i\right)\left(\left(\sum_{j\in I} \lambda^{(b)} b_j\right)\left(\sum_{l\in I} \lambda_l^{(c)} b_l\right)\right) \\
&= a(bc).
\end{aligned}$$

Donde segue que A é uma álgebra associativa.

(iii) Supondo A comutativa, é imediato que $xy = yx$ para todos $x, y \in \beta$. Reciprocamente, supondo que $xy = yx$ para todos $x, y \in \beta$, usando a notação do item acima, temos $b_i b_j = b_j b_i$ para todos $b_i b_j \in \beta$ e para $a, b \in A$ temos

$$ab = \sum_{i,j\in I} \lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(b)} b_i b_j = \sum_{j,i\in I} \lambda_j^{(b)}\lambda_i^{(a)} b_j b_i = ba.$$

Donde segue que A é uma álgebra comutativa.

(iv) Supondo A unitária, seja $u \in A$ uma unidade de A, então por definição temos $ux = xu = x$ para todos $x \in \beta$. Reciprocamente, suponha que exista $u \in A$ tal que $ux = xu = x$ para todo $x \in \beta$, usando a notação anterior, temos

$$ua = \sum_{i \in I} \lambda_i^{(a)}(ub_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i^{(a)} b_i = a,$$

de forma análoga temos $au = a$ e portanto u é uma unidade de A. Ademais, suponha que $u \in A$ e $w \in A$ são unidades para A, segue que $w = wu = u$. Donde segue que a unidade de A, caso exista, é única.

(v) Seja J um subespaço de A. Se J é um ideal da álgebra A, segue por definição que $vx, xv \in J$ para todos $v \in J$ e $x \in \beta$. Reciprocamente, continuando com a notação dos itens anteriores, como J é um subespaço, segue que qualquer combinação linear dos elementos vb_i e $b_i v$, onde $v \in J$ e $b_i \in \beta$, pertencem a J. Pois por hipótese temos $vx, xv \in J$ para todos $v \in J$ e $x \in \beta$. Dado $a \in A$ e $v \in J$ temos

$$av = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i^{(a)} b_i v \right) \in J \quad \text{e} \quad va = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i^{(a)} v b_i \right) \in J.$$

Portanto J é um ideal da álgebra A.

(vi) Dado $a \in A$, semelhante aos itens (ii) e (iii) vemos que $a \in Z(A)$ se, e somente se, ele associa e comuta com todos os elementos de β.

(vii) Segue direto do fato de que A é um anel.

(viii)-(x) A prova destes itens repete *ipsis litteris* a prova para anéis.

(xi) Se $1 = 0$ então dado $x \in A$ temos $x = 1x = 0x = 0$. Portando $x = 0$ e daí $dim A = 0$, o que contradiz a hipótese de que $dim A > 0$.

■

Fixemos uma notação a respeito do item (iv) da ***Definição 1.4*** que foi apresentada um pouco mais acima.

Notação 1.8 *No caso que A é uma álgebra unitária. Como vimos na proposição acima, o elemento $u \in A$ que satisfaz $ux = xu = x$ para todo $x \in A$, é único. Assim denotaremos a unidade de A por "1". Ademais para $a \in A$ denotamos $a^0 = 1$.*

Vejamos alguns exemplos de álgebras, subálgebras e ideais.

Exemplo 1 *São exemplos dos conceitos definidos acima:*

(i) O espaço $A = K[x]$ dos polinômios na variável "x", com a multiplicação usual de polinômios, é uma álgebra associativa, comutativa e unitária. Ademais o subconjunto $B = \{p \in K[x] \mid p(0) = 0\}$ é uma subálgebra de A e $J = \{0\}$ é um ideal de A. Como A é comutativa e associativa, temos $A = Z(A)$.

(ii) Fixado $n \in \mathbb{N}^*$. O espaço $A = M_n(K)$ das matrizes quadradas de ordem n com entradas em K, com a multiplicação usual de matrizes é uma álgebra associativa com unidade. O subconjunto $B = UT_n(K)$ formado pelas matrizes com entradas abaixo da diagonal principal nulas, é uma subálgebra de A, e o subconjunto $N \subseteq B$ formado pelos elementos de B que tem a diagonal nula, é um ideal de B. Não é difícil de verificar que $Z(A) = \{\lambda 1 \mid \lambda \in K\}$.

(iii) Seja F um corpo que contém K como subcorpo, com a adição e multiplicação de F temos que F é uma álgebra associativa, comutativa e com unidade.

(iv) O $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial usual

$$(x, y, z) \times (a, b, c) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (yc - zb, -xc + az, xb - ay),$$

é uma álgebra. Porém nesse exemplo $A = (\mathbb{R}^3, \times)$ não é associativa, não é unitária e nem comutativa. Das propriedades do produto vetorial sabemos que $u \times v = -v \times u$ para todos $u, v \in A$. Ademais para cada $u \in A$ não nulo, se $v \in A$ é tal que o subconjunto $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^3$ é L.I. então $u \times v \neq 0$.

*(v) Seja $(G, \circledast)$ um grupo com notação multiplicativa e elemento neutro $1 \in G$. Considerando o conjunto $\beta = G$, tomemos $K[G]$ como sendo o K-espaço vetorial gerado pelos símbolos de G. Usando o **Lema 1.3** e o comentário que vem logo em seguida a ele, a operação $\circledast$ de G estende de forma única uma multiplicação $*$ em $K[G]$ tal que $K[G]$ seja uma álgebra. Para ser mais específico, sejam escalares $\lambda_i \in K$, então*

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h \in G} \lambda_h h\right) = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \lambda_h gh,$$

*onde na direita a justaposição gh está representando o produto $g \circledast h$ em G. A álgebra $K[G]$ é chamada de álgebra do grupo G sobre K. Pela **Proposição 1.7** $K[G]$ é uma álgebra associativa com unidade. Ademais, ela será comutativa se, e somente se, G for abeliano.*

(vi) *Sejam V um K-espaço vetorial. Consideremos o espaço vetorial $\mathscr{L}(V)$, dos operadores lineares de V. Sabemos que com a operação "$\circ$" de composição de funções, $\mathscr{L}(V)$ é um anel. Ademais, se $f, g \in \mathscr{L}(V)$ e $\lambda \in K$, então $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$. Desta forma temos que $(\mathscr{L}(V), \circ)$ é uma álgebra associativa e unitária. Caso $dimV = 1$, então $Z(\mathscr{L}(V)) = \mathscr{L}(V)$. Caso $dimV > 1$, então $Z(\mathscr{L}(V)) = \{\lambda Id_V \mid \lambda \in K\}$.*

(vii) *Seja A um espaço vetorial de dimensão 2 e base $\beta = \{a, b\}$. Definamos $\circledast : \beta \times \beta \longrightarrow A$ dada por $a \circledast a = b$, $a \circledast b = a$, $b \circledast a = b$ e $b \circledast b = a$, temos*

$$a^3 = a^2a = ba = b \neq a = ab = aa^2.$$

Dessa forma temos que A não é associativa por potências.

Observação 1.9 *Seja A uma álgebra associativa. Como já observamos, temos que $(A, +, *)$ forma um anel. Note que se $J \subseteq A$ é um ideal da álgebra A, como na **Definição 1.5**, temos que $x - y \in J$ para todos $x, y \in J$ e $ax, xa \in J$ para todos $x \in J$ e $a \in A$. Portanto J é um ideal do anel A. A recíproca desta afirmação não é verdadeira. Considere $K = \mathbb{R}$ e a álgebra $B = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0\}$ do item (i) do **Exemplo 1**. Considere o conjunto $J \subset B$ formado pelos polinômios tais que o coeficiente que acompanha a potência $x = x^1$ é um número inteiro. Em símbolos*

$$J = \{a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x \in B \mid n \in \mathbb{N}^*, a_n, \ldots, a_2 \in \mathbb{R} \text{ e } a_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

É fácil ver que $p(x) - f(x) \in J$ para todos $p, f \in J$ e que $p(x)q(x) \in J$ para todos $p(x) \in J$ e $q(x) \in B$. Assim J é um ideal do anel B. Porém note que J não é um subespaço, já que o polinômio $p(x) = x$ é um elemento de J, mas $\frac{1}{2}p(x)$ não é um elemento de J, e consequentemente J não é fechado em relação a multiplicação por escalar.

Antes de abordamos classes específicas de álgebras, abordemos algumas propriedades comuns a todas. Uma delas é o quociente de uma álgebra por um ideal, que será visto na próxima seção.

1.2 Álgebra quociente

Esta seção é dedicada a definir o quociente de uma álgebra por um de seus ideais.

Proposição 1.10 *Sejam A uma álgebra e J um ideal (bilateral) da álgebra A. Como J é um subespaço consideremos o espaço quociente A/J. Definamos a multiplicação $(\overline{a}, \overline{b}) \mapsto \overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$ em A/J. Então essa multiplicação está bem definida e A/J munida com essa multiplicação é uma álgebra.*

Prova. A prova de que a multiplicação está bem definida e é distributiva bilateralmente em relação a soma de A/J não difere do caso em que A é um anel. Tomando $a, b \in A$ e $\lambda \in K$, temos

$$\lambda\overline{a}\overline{b} = \overline{\lambda(ab)} = \overline{(\lambda a)b} = \overline{\lambda ab} = (\lambda\overline{a})\overline{b}.$$

Analogamente temos $\lambda\overline{a}\overline{b} = \overline{a}(\lambda\overline{b})$. ■

Definição 1.11 *Sejam A uma álgebra e J um ideal de A. A álgebra A/J com multiplicação $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$, onde $a, b \in A$, é chamada de álgebra quociente de A por J.*

Naturalmente, assim bem como há para outras estruturas tais como anéis, espaços vetoriais e etc, nos perguntamos sobre as funções $f : A \longrightarrow B$, onde A e B são álgebras sobre o mesmo corpo de escalares, que são compatíveis com as estruturas de A e B vistas como álgebras. É justamente o que veremos na próxima seção.

1.3 Homomorfismos de álgebras e involuções de álgebras associativas

Nesta seção abordaremos uma importante classe de funções que servirá como base para definições e resultados importantes que serão apresentados adiante.

Definição 1.12 (Definition 1.1.6, de [11]) *Sejam $(A, *)$ e $(B, \circledast)$ álgebras sobre um mesmo corpo K. Dizemos que $f : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras se, f for uma transformação linear entre os espaços vetoriais A e B tal que $f(x*y) = f(x)\circledast f(y)$, para quaisquer $x, y \in A$. Em outras palavras, devemos ter*

(i) $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$, para todos $x, y \in A$ e $\lambda \in K$,

(ii) $f(x * y) = f(x) \circledast f(y)$, para todos $x, y \in A$.

Ademais, dizemos que f é um isomorfismo de álgebras, caso f seja um homomorfismo de álgebras e seja uma função bijetiva, neste caso dizemos que A e B são álgebras isomorfas e denotamos $A \simeq B$. Se $f : A \longrightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras, também dizemos que f é um endomorfismo da álgebra A, e caso f seja bijetora, dizemos que f é um automorfismo da álgebra A.

Observação 1.13 *Sob a notação da definição acima. Caso f seja um isomorfismo de álgebras, assim como ocorre para espaços vetoriais, anéis e grupos, podemos identificar A e B como sendo a mesma estrutura, isto é, são a mesmas álgebras porém com possivelmente representações com símbolos diferentes para os elementos.*

Sob nossa convenção de omitir os símbolos de multiplicação, denotamos a propriedade (ii) da definição pouco acima apenas por $f(xy) = f(x)f(y)$, para $x, y \in A$. Igualmente ao que ocorre para as demais estruturas, se A e B são álgebras e $f : A \longrightarrow B$ é um isomorfismo de álgebras, então a função inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ também é um isomorfismo de álgebras. A demonstração desse fato pode ser obtida diretamente do fato de que f^{-1} ainda é uma transformação linear e de que a $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$, $x, y \in B$, é demonstrada da mesma forma que para anéis, tendo em vista que a associatividade não é necessária na demonstração.

Um importante conjunto relacionado a um homomorfismo de álgebras, e que será usado neste trabalho, é o seguinte

Definição 1.14 (Theorem 1.1.7, de [11]) *Sejam A e B álgebras. Dado um homomorfismo de álgebras $f : A \longrightarrow B$, definimos o núcleo de f como sendo o conjunto $Ker(f)$ dado por*

$$Ker(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}.$$

Analogamente como há para as estruturas de espaço vetorial, anéis e grupos, temos o seguinte resultado

Teorema 1.15 (Theorem 1.1.7, de [11]) *Sejam A e B álgebras sobre um corpo K e $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras, então o núcleo $Ker(f)$ de f é um ideal bilateral de A e a imagem de f, isto é, $Im(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A; f(a) = b\}$ é uma subálgebra de B. Ademais a álgebra quociente $A/Ker(f)$ é isomorfa a álgebra $Im(f)$.*

Prova. Sejam A, B e f como no enunciado. Como f é uma transformação linear, segue que $Ker(f)$ é um subespaço de A. Ademais, dado $v \in Ker(f)$ e $a \in A$, temos $f(v) = 0$, daí

$$f(va) = f(v)f(a) = 0f(a) = 0 = f(a)0 = f(a)f(v) = f(av).$$

Logo $av, va \in Ker(f)$ para todos $v \in Ker(f)$ e $a \in A$. Logo, $Ker(f)$ é um ideal de A. Mostremos que $Im(f)$ é uma subálgebra de B. Como f é uma transformação linear, então $Im(f)$ é subespaço de B. Dados $b_1, b_2 \in Im(f)$, existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. Daí

$$b_1b_2 = f(a_1)f(a_2) = f(a_1a_2) \in Im(f).$$

Logo, $Im(f)$ é subálgebra de B. Para mostrarmos que $A/Ker(f) \simeq Im(f)$, consideremos a função

$$\begin{aligned} \Phi : A/Ker(f) &\longrightarrow Im(f) \\ \overline{a} &\mapsto \Phi(\overline{a}) = f(a). \end{aligned}$$

Sabemos que Φ está bem definida e é um isomorfismo de espaços vetoriais. Dados $\overline{x}, \overline{y} \in A/Ker(f)$, então

$$\Phi(\overline{x} \cdot \overline{y}) = \Phi(\overline{xy}) = f(xy) = f(x)f(y) = \Phi(\overline{x})\Phi(\overline{y}).$$

Portanto Φ é um isomorfismo de álgebras. ■

Como corolário temos

Corolário 1.16 (Segundo teorema do isomorfismo) *Sejam A uma álgebra, B uma subálgebra de A e I um ideal de A, então temos o seguinte isomorfismo de álgebras quocientes*

$$\frac{B+I}{I} \simeq \frac{B}{B \cap I}.$$

Caso B seja apenas um subespaço de A o isomorfismo acima ainda ocorre, mas como um isomorfismo de espaços vetoriais.

Prova. Sejam A uma álgebra e I um ideal da álgebra A. Caso B seja apenas um espaço vetorial, temos que I é subespaço de $B + I$ e $B \cap I$ é subespaço de B. Consideremos a função

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow \frac{B+I}{I} \\ b &\mapsto f(b) = \overline{b} = b + I. \end{aligned}$$

Note que f é uma transformação linear sobrejetiva e que $Ker(f) = B \cap I$. Logo

$$\frac{B}{B \cap I} = \frac{B}{ker(f)} \simeq Im(f) = \frac{B+I}{I}$$

como espaço vetorial. Suponha agora que B seja subálgebra de A, é fácil ver que $B+I$ é subálgebra de A que contém I. Ademais $B \cap I$ é um ideal de B. Como $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ em $(B + I)/I$ para todos $x, y \in B$, temos que a mesma aplicação $b \mapsto b + I$ de B em $(B + I)/I$ é um homomorfismo de álgebras. Portanto $B/(B \cap I)$ e $(B + I)/I$ são álgebras isomorfas. ■

Vejamos alguns exemplos de homomorfismos de álgebras.

Exemplo 2 *São exemplos de homomorfismos de álgebras:*

(i) Sejam K um corpo e F uma extensão do corpo K, isto é, um corpo que contém K como subcorpo. Considere F como uma K-álgebra, como no item (iii) do ***Exemplo 1****. Fixado $\alpha \in F$, consideremos a função*

$$\begin{aligned} \varphi : K[x] &\longrightarrow F \\ p(x) &\mapsto \varphi(p(x)) = p(\alpha). \end{aligned}$$

ou seja, φ como sendo o homomorfismo avaliação. Da teoria de anéis sabemos que $\varphi(p(x)f(x)) = \varphi(p(x))\varphi(f(x))$. Da álgebra linear sabemos que φ é uma transformação linear. Portanto φ é um homomorfismo de álgebras, com núcleo $Ker(\varphi) = \{p(x) \in K[x] \mid p(\alpha) = 0\}$.

Consideremos o caso particular $K = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{C}$ e $\alpha = i \in \mathbb{C}$. Pelos estudos de polinômios reais, sabemos que se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\langle x^2 + 1\rangle$ é o ideal de $\mathbb{R}[x]$ gerado por $x^2 + 1$, como anel, então

$$p(i) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) \in \langle x^2 + 1\rangle = \{q(x) \cdot (x^2 + 1) \mid q(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Ademais φ é claramente sobrejetiva. Daí pelo ***Teorema 1.15****, temos*

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle = \mathbb{R}[x]/Ker(\varphi) \simeq Im(\varphi) = \mathbb{C}.$$

(ii) Seja A uma álgebra, então a função $Id : A \longrightarrow A$, definida por $Id(a) = a$ para todo $a \in A$ é um isomorfismo de álgebras.

(iii) Seja A uma álgebra associativa de dimensão finita n. Para cada $a \in A$ definamos a aplicação

$$\begin{aligned} L_a : A &\longrightarrow A \\ x &\mapsto L_a(x) = ax. \end{aligned}$$

Pela definição de multiplicação de uma álgebra, vemos que L_a é um operador linear do espaço vetorial A. Note que dados $a, b \in A$ então

$$L_a \circ L_b(x) = L_a(L_b(x)) = a(bx) = (ab)x = L_{ab}(x), \ \forall x \in A.$$

Ademais se $\lambda \in K$, segue que

$$L_{a+\lambda b}(x) = (a + \lambda b)x = ax + \lambda bx = L_a(x) + \lambda L_b(x) \ \forall x \in A.$$

Seja $\mathscr{L}(A)$ o espaço vetorial dos operadores lineares de A, note que munindo $\mathscr{L}(A)$ com a multiplicação sendo a composição de funções, temos que $\mathscr{L}(A)$ é uma álgebra. Definindo

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow \mathscr{L}(A) \\ a &\mapsto \varphi(a) = L_a, \end{aligned}$$

os cálculos acima mostram que φ é um homomorfismo de álgebras, cujo núcleo será $Ker(\varphi) = \{a \in A \mid ax = 0 \ \forall x \in A\}$. Outro homomorfismo pode ser criado da seguinte forma. Fixemos uma base β de A, cada operador L_a induz uma matriz $[L_a]_\beta \in M_n(K)$, onde $[L_a]_\beta$ é a matriz de L_a em relação a base β. Os cálculos acima mostram que

$$[L_a]_\beta[L_b]_\beta = [L_a \circ L_b]_\beta = [L_{ab}]_\beta.$$

Portanto a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : A &\longrightarrow M_n(K) \\ a &\mapsto \psi(a) = [L_a]_\beta \end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras. Note que se para todo $a \in A$ não nulo existir $b \in A$ tal que $ab \neq 0$ (em particular se A for unitária e $n > 0$, tal condição é satisfeita), então ψ é injetiva e A será uma álgebra isomorfa a uma subálgebra ($Im(\psi)$) de $M_n(K)$.

(iv) Seja A uma álgebra unitária, a aplicação $\lambda \mapsto \lambda 1$ de K em A é um homomorfismo de álgebras injetor. Daí o subespaço $\{\lambda 1 \mid \lambda \in K\}$ de A é uma álgebra isomorfa a K. Muitas vezes fazemos a identificação $K = \{\lambda 1 \mid \lambda \in K\}$, identificando pontualmente $\lambda = \lambda 1 \in A$.

(v) Seja A uma álgebra associativa unitária. Dados $a, b \in A$ tais que $ba = 1$. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow A \\ x &\mapsto \varphi(x) = axb. \end{aligned}$$

Das propriedades da multiplicação segue que φ é um operador linear. Ademais, dados $x, y \in A$, temos

$$\varphi(x)\varphi(y) = (axb)(ayb) = ax(ba)yb = axyb = \varphi(xy).$$

Donde segue que φ é um homomorfismo de álgebras. Veja também que

$$axb = 0 \quad \Longrightarrow \quad b(axb)a = b0a \quad \Longrightarrow \quad x = 0,$$

logo φ é um homomorfismo de álgebras injetor. Note que se A tem dimensão finita então φ é também sobrejetor e, portanto, um automorfismo de A.

Sejam A e B álgebras. Em alguns casos, uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ pode satisfazer $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$ para todos $x, y \in A$, um exemplo de aplicação deste tipo é a transposição de matrizes. Nesse caso φ é chamada de antihomomorfismo. Uma classe particular de antihomomorfismos, que será de grande importância para estre trabalho, é a seguinte:

Definição 1.17 (Definition 3.3.7, página 69 de [15]) *Seja A uma álgebra associativa. Dizemos que um operador linear $\varphi : A \to A$ é uma involução se*

$$\varphi(\varphi(x)) = x, \quad \varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x) \quad \forall x, y \in A.$$

Note que se A é uma álgebra associativa e φ é uma involução da álgebra A, então φ é bijetora, pois coincide com sua própria inversa. Ademais se B é uma subálgebra de A tal que $\varphi(B) \subseteq B$, então $\varphi_{|_B} : B \longrightarrow B$ definida por $\varphi_{|_B}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in B$, é uma involução da álgebra B. Antes de exibirmos exemplos de involuções, nem sempre é simples verificar se uma transformação linear é um homomorfismo de álgebras ou uma involução. Vejamos algumas propriedades a respeito dessas funções.

Proposição 1.18 *Sejam A, B e C álgebras, e β uma base do espaço A.*

(i) Dados $\varphi : A \longrightarrow B$ e $\psi : B \longrightarrow C$ homomorfismos de álgebras, então $\psi \circ \varphi : A \longrightarrow C$ é um homomorfismo de álgebras. Ademais se ψ e φ são isomorfismos de álgebras, então $\psi \circ \varphi$ é um isomorfismo de A em C,

(ii) Suponha que $\varphi : A \longrightarrow B$ é uma transformação linear. Então φ é um homomorfismo de álgebras se, e somente se, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todos $x, y \in \beta$.

(iii) Suponha que A seja associativa e que $\varphi : A \longrightarrow A$ seja um operador linear. Então φ é uma involução se, e somente se, $\varphi(\varphi(x)) = x$ e $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$ para todos $x, y \in \beta$.

Prova.

(i) Sejam φ e ψ como no enunciado. Temos que $\psi \circ \varphi$ é uma transformação linear. Ademais, dados $a, b \in A$ temos

$$\psi \circ \varphi(ab) = \psi(\varphi(ab)) = \psi(\varphi(a)\varphi(b)) = \psi(\varphi(a))\psi(\varphi(b)) = (\psi \circ \varphi(a))(\psi \circ \varphi(b)).$$

Portanto $\psi \circ \varphi$ é um homomorfismo de álgebra. Caso ψ e φ sejam bijetores, então $\psi \circ \varphi$ é uma transformação linear bijetora e $\phi = (\psi \circ \varphi)^{-1}$ é um homomorfismo de álgebras.

(ii) Sejam A e B álgebras. Dada uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ e uma base β do espaço vetorial A. Caso φ seja um homomorfismo de álgebras, segue que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para quaisquer $x, y \in \beta$. Reciprocamente, pondo

$\beta = \{b_i \mid i \in I\}$, dados $a, b \in A$ existem únicos $\lambda_l^{(x)} \in K$, onde $x \in \{a, b\}$ e $l \in I$ tais que

$$x = \sum_{l \in I} \lambda_l^{(x)} b_l.$$

Suponha que $\varphi(b_i b_j) = \varphi(b_i)\varphi(b_j)$ para todos $b_i, b_j \in \beta$. Temos que

$$ab = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i^{(a)} b_i\right)\left(\sum_{j \in I} \lambda_j^{(a)} b_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(b)} b_i b_j,$$

daí

$$\varphi(ab) = \sum_{i,j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(b)} \varphi(b_i b_j) = \sum_{i,j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(b)} \varphi(b_i)\varphi(b_j)$$

por outro lado

$$\varphi(a)\varphi(b) = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i^{(a)} \varphi(b_i)\right)\left(\sum_{j \in I} \lambda_j^{(b)} \varphi(b_j)\right) = \sum_{i,j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(b)} \varphi(b_i)\varphi(b_j).$$

Portanto $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

(iii) Análogo ao item anterior.

■

Note que em qualquer álgebra A a função identidade é um automorfismo da álgebra A, daí $A \simeq A$. Ademais o item (i) da proposição acima implica que se B e C são álgebras tais que $A \simeq B$ e $B \simeq C$, então $A \simeq C$. Por fim, como a função inversa de um isomorfismo de álgebras também é um isomorfismo de álgebras temos que $B \simeq A$ se, e somente se, $A \simeq B$. Assim surge uma forma de classificação de álgebras em classes de equivalência, dadas pela relação de que as álgebras A e B pertencem a mesma classe se, e somente se, $A \simeq B$. Alguns exemplos de classificação de álgebras que usam esta relação são os famosos teoremas de Frobenius e Wedderburn.

Teorema 1.19 (Frobenius, Theorem 1.4 de [8] página 4) *Seja $\mathbb{H}$ a $\mathbb{R}$-álgebra dos quatérnions reais, isto é, a álgebra com unidade, de base $\{1, i, j, k\}$ e de multiplicação*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \qquad ki = -ik = j, \qquad jk = -kj = i.$$

Se $(D, *)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra de dimensão finita, tal que $(D, +, *)$ é um anel com divisão, então a álgebra D é isomorfa a uma e somente uma dessas seguintes $\mathbb{R}$-álgebras: $\mathbb{H}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Vale informar que nas hipóteses do teorema acima, poderíamos trocar "*dimensão finita*" pelo que chamamos de *álgebra algébrica*. Não iremos entrar nesses detalhes pois fogem do objetivo desse trabalho.

Teorema 1.20 (Wedderburn, adaptação de Theorem 2.61 de [8] página 42) *Se A é uma K-álgebra simples de dimensão finita, isto é, os únicos ideais bilaterais da álgebra A são A e $\{0\}$ e de dimensão finita, então existe $n \in \mathbb{N}^*$ e $(D, *)$ uma álgebra tal que $(D, +, *)$ é um anel com divisão tais que as álgebras A e $M_n(D)$ são isomorfas.*

Não é difícil de ver que $dim M_n(D) = n^2 \cdot dim D$. Por mais que esses dois teoremas citados acima pareçam deslocados do objetivo desse trabalho, eles serão usados para a construção de um exemplo importante posteriormente, sobre álgebras de Lie. Prosseguindo com o trabalho, vejamos alguns exemplos de involuções.

Exemplo 3 *São exemplos de involuções*

(i) Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Consideremos as álgebras associativas $M_n(K)$ e $UT_n(K)$, do item (ii) do ***Exemplo 1****. Tomemos o operador linear $\varphi : M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$, definido na base canônica por*

$$\varphi(e_{ij}) = e_{n+1-j,n+1-i}.$$

Da ***Proposição 1.18*** *vemos que $\varphi^2 = 1$ e $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$ para todos $x, y \in M_n(K)$. Ademais, note que se $j \geq i$, então $n + 1 - i \geq n + 1 - j$. Logo $\varphi(UT_n(K)) \subseteq UT_n(K)$. Seja φ_n a aplicação $x \mapsto \varphi(x)$ em $UT_n(K)$, temos que φ e φ_n são involuções das álgebras $M_n(K)$ e $UT_n(K)$, respectivamente.*

(ii) Seja A uma álgebra associativa e comutativa. Então todo homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A$ de álgebras tal que $\varphi^2 = 1$, é uma involução.

(iii) Seja G um grupo. Tomemos a álgebra de grupo $K[G]$ como no item (v) do ***Exemplo 1****. Consideremos o operador linear $\varphi : K[G] \longrightarrow K[G]$, definido na base G por $\varphi(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$. Como $(g^{-1})^{-1} = g$ e $(gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$ para todos $g, h \in G$, pela* ***Proposição 1.18*** *temos que φ é uma involução. Caso G possua algum elemento $t \in G$ de ordem 2, podemos criar o operador linear $\psi : K[G] \longrightarrow K[G]$, definido na base G por $\psi(x) = tx^{-1}t$ para todo $x \in G$. Note que*

$$\psi^2(x) = t(tx^{-1}t)^{-1}t = tt^{-1}xt^{-1}t = x \quad e \quad \psi(xy) = (tx^{-1}t)(ty^{-1}t) = t(yx)^{-1}t.$$

Donde segue que ψ é uma involução.

A seguir veremos alguns tipos particulares de álgebras, iniciamos a próxima seção com o conceito de álgebra de Lie.

1.4 Álgebras de Lie

Uma das álgebras que iremos discutir nos resultados principais deste trabalho é a álgebra $UT_n^{(-)}$ formada pelo espaço vetorial $UT_n(K)$ com o produto $x * y = [x, y] := xy - yx$. Este é um exemplo de uma classe de álgebras que definiremos a seguir.

Definição 1.21 (Definition 12.1.1 página 307 de [15]) *Uma álgebra de Lie é uma álgebra (não necessariamente associativa) tal que*

(i) $xy = -yx$

(ii) $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$.

Como estamos supondo $charK \neq 2$, o item (i) da definição acima pode ser trocado por $x^2 = 0$, para todo x, iremos provar esta afirmação na proposição a seguir.

Proposição 1.22 (Exercise 1.1.9, página 8 de [11]) *Seja A uma álgebra sobre um corpo K, tal que $charK \neq 2$. Então são equivalentes:*

(i) $xy = -yx$ *para todos* $x, y \in A$,

(ii) $x^2 = 0$ *para todo* $x \in A$.

Prova. Supondo (i), fazendo $y = x$, temos $xx = -xx$, daí $2x^2 = 0$. Como $charK \neq 2$, temos $x^2 = 0$ para todo $x \in A$. Reciprocamente, suponto (ii), para quaisquer $x, y \in A$ temos $(x + y)^2 = 0$, daí

$$0 = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = xy + yx \quad \Longrightarrow \quad -yx = xy.$$

■

A expressão $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ que aparece no item (ii) da ***Definição 1.21*** é conhecida como identidade de Jacobi. Verificar se uma álgebra é uma álgebra de Lie pode não ser uma tarefa simples, principalmente para verificar a identidade de Jacobi. A proposição a seguir torna essa tarefa mais simples.

Proposição 1.23 *Seja A uma álgebra e β uma base do espaço vetorial A. Segue que A é uma álgebra de Lie se, e somente se, valem*

(i) $xy = -yx$ *para todos* $x, y \in \beta$,

(ii) $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ *para todos* $x, y, z \in \beta$.

Ademais se A é uma álgebra que satisfaz a relação $xy = -yx$, para todos $x, y \in A$, então a identidade de Jacobi é equivalente a $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$.

Prova. Suponha que A seja uma álgebra de Lie, então por definição segue os itens (i) e (ii). Reciprocamente, suponha que valham os itens (i) e (ii). Pondo $\beta = \{b_i \mid i \in I\}$, dado $a \in A$, existem únicos $\lambda_i^{(a)} \in K$ tais que $a = \sum_{i \in I} \lambda_i^{(a)} b_i$. Por hipótese temos $b_i b_j = -b_j b_i$ para todos $b_i, b_j \in \beta$. Tememos $a, b \in A$. Temos

$$ab = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i^{(a)} b_i\right)\left(\sum_{j \in I} \lambda_j^{(b)} b_j\right) = \sum_{i,j \in I} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(b)} b_i b_j$$

por outro lado

$$ba = \sum_{i,j \in I} \lambda_j^{(b)} \lambda_i^{(a)} b_j b_i = \sum_{i,j} -\lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(b)} b_i b_j.$$

Portanto $ab = -ba$. Para provar a identidade de Jacobi, para $x, y, z \in A$, definamos

$$J_{cb}(x, y, z) = x(yz) + y(zx) + z(xy).$$

Dados $a, b \in A$ e $\lambda \in K$, temos

$$\begin{aligned} J_{cb}(a + \lambda b, , y, z) &= (a + \lambda b)(yz) + y(z(a + \lambda b)) + z((a + \lambda b)y) \\ &= a(yz) + \lambda b(yz) + y(za + \lambda zb) + z(ay + \lambda by) \\ &= (a(yz) + y(za) + z(ay)) + \lambda(b(yz) + y(zb) + z(by)) \\ &= J_{cb}(a, y, z) + \lambda J_{cb}(b, y, z). \end{aligned}$$

Analogamente temos

$$J_{cb}(x, a + \lambda b, z) = J_{cb}(x, a, z) + \lambda J_{cb}(x, b, z)$$

e

$$J_{cb}(x, y, a + \lambda b) = J_{cb}(x, y, a) + \lambda J_{cb}(x, y, b).$$

Mostremos que $J_{cb}(a,b,c)=0$ para todos $a,b,c\in A$. Com efeito

$$\begin{aligned}
J_{cb}(a,b,c) &= J_{cb}(\sum_{i\in I}\lambda_i^{(a)}b_i\ ,\ \sum_{j\in I}\lambda^{(b)}b_j\ ,\ \sum_{l\in I}\lambda_l^{(c)}b_l)\\
&= \sum_{i\in I}\lambda_i^{(a)}J_{cb}(b_i\ ,\ \sum_{j\in I}\lambda^{(b)}b_j\ ,\ \sum_{l\in I}\lambda_l^{(c)}b_l)\\
&= \sum_{i\in I}\lambda_i^{(a)}\left(\sum_{j\in I}\lambda_j^{(b)}J_{cb}(b_i\ ,\ b_j\ ,\ \sum_{l\in I}\lambda_l^{(c)}b_l)\right)\\
&= \sum_{i\in I}\lambda_i^{(a)}\left(\sum_{j\in I}\lambda_j^{(b)}\left(\sum_{l\in I}\lambda_l^{(c)}J_{cb}(b_i\ ,\ b_j\ ,\ b_l)\right)\right)\\
&= \sum_{i,j,l\in I}\lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(b)}\lambda_l^{(c)}J_{cb}(b_i,b_j,b_l).
\end{aligned}$$

Como $J_{cb}(b_i,b_j,b_l)=0$ para todos $b_i,b_j,b_j\in\beta$, segue que $J_{cb}(a,b,c)=0$ para todos $a,b,c\in A$.

Por fim, suponha que A seja uma álgebra tal que $xy=-yx$ para todos $x,y\in A$. Dados $x,y,z\in A$ temos

$$(xy)z+(yz)x+(zx)y=0\iff -z(xy)-x(yz)-y(zx)=0\iff x(yz)+y(zx)+z(xy)=0.$$

■

Vejamos exemplos de álgebras de Lie

Exemplo 4 *São exemplos de álgebras de Lie*

(i) o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ *com produto*

$$(x,y,z)\times(a,b,c)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}=(yc-zb,-xc+az,xb-ay),$$

é uma álgebra de Lie. De fato sabemos que $v^2=0$ *para todo* $v\in\mathbb{R}^3$. *Sejam* $\vec{i},\vec{j}$ *e* $\vec{k}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^3$, *em particular* $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=0$. *Para verificarmos a identidade de Jacobi, tomando* x,y *e* z *entre os elementos* $\vec{i},\vec{j}$ *e* $\vec{k}$. *Caso* x,y *e* z *são dois a dois distintos, como* $xy=\pm z$, $xz=\pm y$ *e* $yz=\pm x$ *é fácil ver que*

$$(xy)z+(yz)x+(zx)y=\pm z^2\pm x^2\pm y^2=0.$$

Caso sejam todos iguais, isto é, $x=y=z$ *também é nítido que teremos* $(xy)z+(yz)x+(zx)y=0$. *Supondo então, sem perda de generalidade, que* $x=y\neq z$. *Então*

$$(xy)z+(yz)x+(zx)y=0+(xz)x+(zx)x=(xz)x-(xz)x=0.$$

Portanto $(\mathbb{R}^3,\times)$ *é uma álgebra de Lie.*

(ii) *Seja V um espaço vetorial. Definamos $uv = 0$ para todos $u, v \in V$. Então V com este produto é uma álgebra de Lie, as álgebras de Lie desta forma serão chamadas de abelianas.*

(iii) *Seja L um espaço vetorial de dimensão 2. Fixemos uma base de $\beta = \{w, \ell\}$ de L. Definamos $\circledast : \beta \times \beta \longrightarrow L$ pondo $w \circledast w = \ell \circledast \ell = 0$, $w \circledast \ell = \ell$ e $\ell \circledast w = -\ell$. Consideremos a álgebra L formada pela extensão bilinear de $\circledast$. Temos que L é uma álgebra de Lie. De fato, pela definição de $\circledast$, temos $w^2 = \ell^2 = 0$ e $w\ell = -\ell w$. Para verificarmos a identidade de Jacobi, tomemos x, y e z entre os elementos w e ℓ. Obrigatoriamente deveremos ter pelo menos dois elementos iguais entre x, y e z. Suponha sem perda de generalidade que $x = y$. Assim, como no item (i) temos*

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 + (xz)x + (zx)x = (xz)x - (xz)x = 0.$$

Logo L é uma álgebra de Lie.

Há uma forma simples de criar álgebras de Lie, a seguir apresentamos uma definição que será útil para este proposito e também nos próximos capítulos.

Definição 1.24 ([30]) *Seja A uma álgebra associativa. Para $a_1, a_2 \in A$ definimos o comutador $[a_1, a_2]$ de a_1 e a_2 como sendo $[a_1, a_2] := a_1a_2 - a_2a_1$, e para $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$, onde $m > 2$, definimos indutivamente $[a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m] := [[a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}], a_m]$.*

Proposição 1.25 (Exercise 1.1.10, item (ii), página 8 de [11]) *Seja A uma álgebra associativa. Então o espaço vetorial A munido da operação*

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot] : A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\mapsto [x, y] = xy - yx,\end{aligned}$$

é uma álgebra de Lie. Ademais se B é uma subálgebra de A, então $[x, y] \in B$ para todo $x, y \in B$ e $(B, [\cdot,\cdot])$ também é uma álgebra de Lie e é uma subálgebra de $(A, [\cdot,\cdot])$.

Prova. Mostremos que $(x, y) \mapsto [x, y]$, $x, y \in A$ é uma aplicação bilinear. Note que $[x, y] = -[y, x]$ para todos $x, y \in A$. Dados $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$

$$[a + b, c] = (a + b)c - c(a + b) = ac + bc - ac + cb = [a, c] + [b, c]$$

$$[c, a + b] = -[a + b, c] = -([a, c] + [b, c]) = [c, a] + [c, b]$$

$$[a, \lambda b] = a(\lambda b) - (\lambda b)a = \lambda ab - \lambda ba = \lambda[a, b] = \lambda ab - \lambda ba = (\lambda a)b - b(\lambda a) = [\lambda a, b].$$

Provemos agora a identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned}
&[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]\\
&=[ab-ba,c]+[bc-cb,a]+[ca-ac,b]\\
&=abc-bac-cab+cba+bca-cba-abc+acb+cab-acb-bca+bac\\
&=\cancel{abc}-\cancel{bac}-\cancel{cab}+cba+\cancel{bca}-cba-\cancel{abc}+acb+\cancel{cab}-acb-\cancel{bca}+\cancel{bac}\\
&=0.
\end{aligned}$$

Por fim, se B é uma subálgebra de A, é claro que $xy-yx\in B$ para todos $x,y\in B$ e que $(B,[\cdot,\cdot])$ é subálgebra de $(A,[\cdot,\cdot])$. ■

Notação 1.26 ([11]) *Dada uma álgebra associativa A, denotaremos por $A^{(-)}$ a álgebra de Lie $(A,[\cdot,\cdot])$, onde $[a,b]=ab-ba$, $a,b\in A$.*

Desta forma temos uma maneira prática de criar álgebras de Lie. Em verdade, de certa forma, todas as álgebras de Lie são subálgebras de álgebras construídas dessa forma. Para enunciarmos com precisão esse resultado, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.27 (Definition 1.3.1, página 11 de [11]) *Sejam A uma álgebra associativa com unidade e L uma álgebra de Lie. Se L é isomorfa a alguma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que dizemos que A é uma álgebra envelopante, ou envolvente, para L. Uma álgebra associativa com unidade $U=U(L)$ é a álgebra envelopante, ou envolvente, universal da álgebra de Lie L, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U tem a seguinte propriedade universal: Para qualquer álgebra A associativa com unidade e qualquer homomorfismo de álgebras $\varphi: L\longrightarrow A^{(-)}$, existe, e é único, um homomorfismo $\phi: U\longrightarrow A$, tal que ϕ estende φ, isto é, ϕ e φ são iguais em L, e que $\phi(1)=1$.*

Com isso enunciaremos, sem demonstrar o seguinte resultado

Teorema 1.28 (Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem 1.3.2, página 11 de [11]) *Toda álgebra de Lie L possui uma álgebra envelopante universal $U(L)$, e que é única a menos de isomorfismo. Ademais, se L possui uma base $\{e_i \mid i\in I\}$, e o conjunto de índices I é ordenado, então $U(L)$ tem uma base*

$$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_p},\ \ i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_p, i_k\in I, p=0,1,2,\ldots.$$

Prova. Uma demonstração para esse resultada pode ser encontrada em [11] na página 17. ■

Um corolário que segue direto do teorema acima é que se L é uma álgebra de Lie, então existe uma álgebra associativa e com unidade A tal que L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$.

Observação 1.29 *Seja L uma álgebra de Lie, embora L seja isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, para alguma álgebra associativa com unidade A, nem sempre L será isomorfa a uma álgebra $A^{(-)}$, onde A é associativa. De fato, considere $L = sl_2(\mathbb{R})$ como o subespaço das matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ cuja a soma dos elementos da diagonal principal é nula, isto é,*

$$sl_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma verificação direta mostra que $sl_2(\mathbb{R})$ é subálgebra de $M_2(\mathbb{R})^{(-)}$. Em verdade, dados $x, y \in M_2(\mathbb{R})^{(-)}$, temos $[x, y] \in sl_2(\mathbb{R})$. Note que

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset sl_2(\mathbb{R}).$$

Como β é L.I. segue que $3 \leq dim\, sl_2(\mathbb{R})$, e de $sl_2(\mathbb{R})$ ser subespaço próprio de $M_2(\mathbb{R})^{(-)}$ temos que $dim\, sl_2(\mathbb{R}) = 3$. Mostremos que $(sl_2(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra simples, isto é, os únicos ideais de $sl_2(\mathbb{R})$ são $\{0\}$ e $sl_2(\mathbb{R})$. Com efeito, suponha que J seja um ideal não nulo de $sl_2(\mathbb{R})$, então há uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in J$ não nula. Suponha que $a \neq 0$. Assim temos porém nesse caso J não seria um ideal já que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in J.$$

Portanto $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in J$. Caso $b \neq 0$, então

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -2a & -b \end{pmatrix} \in J$$

daí há uma matriz em J cuja diagonal principal é não nula. Novamente pelo caso $a \neq 0$ temos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in J$. Caso $c \neq 0$, temos

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} c & -2a \\ 0 & -c \end{pmatrix} \in J.$$

Pelo caso $a \neq 0$, temos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in J$. Logo em todo caso segue que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in J$. Daí

$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J \quad e \quad \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in J.$$

*Portanto $\beta \subset J$ e consequentemente $J = sl_2(\mathbb{R})$. Agora suponha que há uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa A tal que $sl_2(\mathbb{R}) \simeq A^{(-)}$. Caso A tenha um ideal não nulo próprio I, claramente I também é ideal da álgebra $A^{(-)}$, portanto $sl_2(\mathbb{R})$ teria um ideal não nulo próprio. Absurdo. Portanto A é simples e de dimensão finita. Usando o Teorema de Wedderburn (**Teorema 1.20**) e o Teorema de Frobenius (**Teorema 1.19**), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que A é isomorfa a $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ ou $M_n(\mathbb{H})$. Daí $dim A = n^2$, $2n^2$ ou $4n^2$. Mas $dim A = dim\ sl_2(\mathbb{R}) = 3$. Absurdo. Portanto não existe uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa A, tal que as álgebras de Lie $A^{(-)}$ e $sl_2(\mathbb{R})$ sejam isomorfas.*

Outro tipo particular de álgebras são as álgebras de Jordan, que veremos na seção a seguir.

1.5 Álgebras de Jordan

Em nosso trabalho estudaremos a álgebra UT_n com produto $x \circ y = xy + yx$ que se enquadra na classe das álgebras de Jordan. Vejamos formalmente o que é uma álgebra de Jordan.

Definição 1.30 (Definition 3, página 6 de [18]) *Uma álgebra de Jordan é uma álgebra (não necessariamente associativa) sobre um corpo de característica diferente de 2, tal que*

(i) $xy = yx$

(ii) $(xy)(xx) = x(y(xx))$.

Note que se A é uma álgebra álgebra comutativa, então $(xy)(xx) = x(y(xx))$ é equivalente a $(xx)(yx) = ((xx)y)x$.

Exemplo 5 *São exemplos de álgebras de Jordan:*

(i) Seja A uma álgebra comutativa e associativa, então A é uma álgebra de Jordan.

(ii) Seja A uma álgebra sobre um corpo de característica diferente de 2. Definindo a operação

$$\begin{aligned} \odot : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \odot b = \frac{1}{2}(ab + ba). \end{aligned}$$

Temos que $A^{(+)} = (A, \odot)$ *é uma álgebra comutativa. Ademais, se* A *for associativa, então* $A^{(+)}$ *é uma álgebra de Jordan. De fato, mostremos que* $A^{(+)}$ *é uma álgebra. Dados* $a, b, c \in A$ *e* $\lambda \in K$ *temos*

$$a \odot (b + c) = \frac{1}{2}(a(b + c) + (b + c)a) = \frac{1}{2}(ab + ba + ac + ca) = a \odot b + a \odot c,$$

como $\odot$ *é comutativa, temos* $(b + c) \odot a = b \odot a + c \odot a$,

$$\lambda(a \odot b) = \frac{\lambda}{2}(ab + ba) = \frac{1}{2}((\lambda a)b + b(\lambda a)) = (\lambda a) \odot b.$$

Analogamente temos $\lambda(a \odot b) = a \odot (\lambda b)$, *portanto* $A^{(+)}$ *é uma álgebra comutativa. Supondo* A *associativa, temos*

$$(a \odot b) \odot (a \odot a) = \frac{1}{2}(ab + ba) \odot a^2 = \frac{1}{4}(aba^2 + ba^3 + a^3b + a^2ba)$$

por outro lado

$$a \odot (b \odot (a \odot a)) = a \odot (b \odot a^2) = \frac{1}{2}a \odot (ba^2 + a^2b) = \frac{1}{4}(aba^2 + a^3b + ba^3 + a^2ba).$$

Como $\odot$ *é comutativa, segue que* $A^{(+)}$ *é uma álgebra de Jordan.*

(iii) Seja V *um* K*-espaço vetorial com uma forma bilinear simétrica* $f : V \times V \longrightarrow K$. *Consideremos a soma direta externa de espaços vetoriais* $J = K \oplus V$, *vamos identificar cada par* $(\lambda, v) \in K \oplus V$ *com* $\lambda + v$. *Vamos munir* J *com a operação* $*$ *dada por*

$$(\alpha + a) * (\beta + b) = (\alpha\beta + f(a, b)) + (\beta a + \alpha b)$$

onde $\alpha, \beta \in K$ *e* $a, b \in V$. *Temos que* $(J, *)$ *é uma álgebra de Jordan. De fato, claramente* $*$ *é comutativa. Mostremos que* $*$ *é bilinear. Dados* $a, b, c \in V$ *e* $\alpha, \beta, \gamma \in K$. *Segue que*

$$(\alpha + a) * ((\beta + b) + (\gamma + c)) = (\alpha(\beta + \gamma) + f(a, b + c)) + ((\beta + \gamma)a + \alpha(b + c))$$

$$= (\alpha\beta + f(a, b)) + (\beta a + \alpha b) + (\alpha\gamma + f(a, c)) + (\gamma a + \alpha c)$$

$$= (\alpha + a) * (\beta + b) + (\alpha + a) * (\gamma + c).$$

Dado $\lambda \in K$

$$\lambda((\alpha + a) * (\beta + b)) = \lambda((\alpha\beta + f(a, b)) + (\beta a + \alpha b))$$

$$= ((\lambda\alpha)\beta + f(\lambda a, b)) + (\beta(\lambda a) + (\lambda\alpha)b) = (\lambda\alpha + \lambda a) * (\beta + b).$$

Portanto $\lambda(x * y) = (\lambda x) * y$ *para todos* $x, y \in J$ *e* $\lambda \in K$. *Analogamente mostramos que* $\lambda(x * y) = x * (\lambda y)$ *para* $x, y \in J$ *e* $\lambda \in K$. *Pondo* $x = \alpha + a$ *e* $y = \beta + b$, *temos*

$$(x * y) * (x * x) = (\alpha\beta + f(a, b) + \beta a + \alpha b) * (\alpha^2 + f(a, a) + 2\alpha a)$$

a componente em K da operação acima é

$$\begin{aligned}&\alpha^3\beta + \alpha\beta f(a,a) + \alpha^2 f(a,b) + f(a,b)f(a,a) + f(\beta a + \alpha b, 2\alpha a)\\ =&\alpha^3\beta + \alpha\beta f(a,a) + \alpha^2 f(a,b) + f(a,b)f(a,a) + 2\alpha\beta f(a,a) + 2\alpha^2 f(b,a)\\ =&\alpha^3\beta + 3\alpha\beta f(a,a) + 3\alpha^2 f(a,b) + f(a,b)f(a,a),\end{aligned}$$

a componente em V é

$$\begin{aligned}&(\alpha^2 + f(a,a))(\beta a + \alpha b) + (\alpha\beta + f(a,b))2\alpha a\\ =&(\alpha^2\beta + \beta f(a,a) + 2\alpha^2\beta + 2\alpha f(a,b))a + (\alpha^3 + \alpha f(a,a))b\\ =&(3\alpha^2\beta + \beta f(a,a) + 2\alpha f(a,b))a + (\alpha^3 + \alpha f(a,a))b.\end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}x * (y * (x * x)) &= x * (y * (\alpha^2 + f(a,a) + 2\alpha a))\\ &= x * (\alpha^2\beta + \beta f(a,a) + f(b, 2\alpha a) + 2\alpha\beta a + (\alpha^2 + f(a,a))b).\end{aligned}$$

A componente em K da operação acima é

$$\begin{aligned}&\alpha^3\beta + \alpha\beta f(a,b) + 2\alpha^2 f(b,a) + f(a, 2\alpha\beta a + (\alpha^2 + f(a,a))b)\\ =&\alpha^3\beta + \alpha\beta f(a,b) + 2\alpha^2 f(b,a) + 2\alpha\beta f(a,a) + \alpha^2 f(a,b) + f(a,a)f(a,b)\\ =&\alpha^3\beta + 3\alpha\beta f(a,b) + 3\alpha^2 f(a,b) + f(a,b)f(a,a),\end{aligned}$$

a componente em V é

$$\begin{aligned}&(\alpha^2\beta + \beta f(a,a) + f(b,2\alpha a))a + \alpha(2\alpha\beta a + (\alpha^2 + f(a,a))b)\\ =&(3\alpha^2\beta + \beta f(a,a) + 2\alpha f(a,b))a + (\alpha^3 + \alpha f(a,a))b.\end{aligned}$$

Comparando as componentes, vemos que $(J, *)$ é uma álgebra de Jordan.

O item (ii) do exemplo anterior nos dá uma maneira de construir álgebras de Jordan. Para abordarmos isso com mais exatidão, vejamos o seguinte resultado.

Proposição 1.31 *Seja $(A, *)$ uma álgebra e seja $\lambda \in K$ não nulo. A álgebra $(A, \times)$, onde a operação $\times$ é dada por $a \times b := \lambda a * b$, para $a, b \in A$, é uma álgebra isomorfa a $(A, *)$.*

Prova. Como $\times$ é múltiplo escalar de uma aplicação bilinear, então $\times$ é bilinear. Ademais, a função $\varphi : (A, \times) \longrightarrow (A, *)$, dada por $\varphi(a) = \lambda a$ é um isomorfismo de álgebras. De fato, φ é uma transformação linear bijetora, ademais, dados $a, b \in A$ temos

$$\varphi(a) * \varphi(b) = (\lambda a) * (\lambda b) = \lambda(\lambda a * b) = \lambda(a \times b) = \varphi(a \times b).$$

Portanto $(A, \times) \simeq (A, *)$. ■

A proposição acima e o Exemplo 5 implicam que se A é uma álgebra associativa, então A munido com a operação $x \circ y := xy + yx$ é uma álgebra de Jordan.

Definição 1.32 (Definition 2', página 6 de [18]) *Uma álgebra de Jordan J é dita especial, se existe uma homomorfismo de álgebras injetor de J em U^+ (item (ii) do exemplo anterior), onde U é uma álgebra associativa. Álgebras de Jordan que não são especiais são chamadas de excepcionais.*

Notação 1.33 *Dada A uma álgebra, em geral se denota $A^{(+)}$ como sendo a K-álgebra formada no espaço vetorial A com a operação $(a, b) \mapsto \frac{1}{2}(ab + ba)$. Devido ao isomorfismo na **Proposição 1.31**, neste trabalho, se A é uma álgebra, denotaremos por $A^{(+)}$ como sendo a K-álgebra formada pelo espaço vetorial A com a operação "$\circ$" dada por $a \circ b := ab + ba$, onde $a, b \in A$.*

Desta forma, se A é uma álgebra associativa, então $A^{(+)}$ é uma álgebra de Jordan especial. Também fixaremos a notação $UJ_n = UT_n^{(+)}$.

Vimos que toda álgebra de Lie, é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, para alguma álgebra associativa A. O mesmo questionamento pode surgir para as álgebras de Jordan, isto é, dada uma álgebra de Jordan, ela deve ser isomorfa a uma subálgebra de $A^{(+)}$ para alguma álgebra associativa A? Ou até mesmo sempre isomorfa a própria $A^{(+)}$? Como a própria definição de álgebras de Jordan excepcionais sugere, isto não é verdade. Antes de mencionarmos esse exemplo precisamos de algumas construções. Construções essas que serão importantes para nosso trabalho.

1.6 Álgebras graduadas por um grupo

Esta seção é dedicada a definir o conceito de graduação de uma álgebra por um grupo. Tal conceito será base para todo esse trabalho.

Definição 1.34 (Definition 1.6 de [13]) *Sejam G um grupo e A uma álgebra. Uma G-graduação da álgebra A é uma decomposição do espaço vetorial A, dada por uma coleção de subespaços $\{A_g\}_{g \in G}$ de A*

$$\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

tal que $A_g A_h := \{xy \mid x \in A_g \text{ e } y \in A_h\} \subseteq A_{gh}$, para todos $g, h \in G$. Neste caso dizemos que A é G-graduada.

Em outras palavras, uma G-graduação é uma maneira de decompor o espaço vetorial A, de forma compatível tanto com a multiplicação da álgebra A quanto com a multiplicação do grupo G.

Da definição, temos que todo $a \in A$ pode ser escrito de forma única como uma soma, com uma quantidade finita de parcelas não nulas, $a = \sum_{g \in G} a_g$, onde $a_g \in A_g$.

Definição 1.35 (página 61 de [15]) *Sejam G um grupo e A uma álgebra G-graduada. Se $a \in A$ é tal que $a \in A_g$, para algum $g \in G$, então dizemos que a é um elemento homogêneo. Neste caso, se $a \neq 0$, definimos o grau G-deg(a) do elemento homogêneo a como sendo G-deg$(a) = g$. Quando não houver risco de confusão, denotaremos este grau apenas por deg(a). Ademais os subespaços A_g são chamados de componentes homogêneas de A.*

Note que pela definição de G-graduação, podem existir componentes homogêneas triviais, isto é, iguais a $\{0\}$. Por isso definamos:

Definição 1.36 (Definition 1.1, página 9 de [13]) *Seja A uma álgebra com uma G-graduação*

$$\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

definimos o suporte supp$\mathscr{G}$ da graduação como sendo o conjunto

$$supp\mathscr{G} = \{g \in G \mid A_g \neq \{0\}\}.$$

Algumas das subestruturas de A podem ser compatíveis com G-graduação também, isto motiva a definição a seguir.

Definição 1.37 (Página 61 de [15]) *Sejam G um grupo e $A = \underset{g \in G}{\oplus} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dado $W \subseteq A$ um subespaço (subálgebra ou ideal) da álgebra A, dizemos que W é um subespaço (subálgebra ou ideal) graduado ou homogêneo se*

$$W = \bigoplus_{g \in G} (W \cap A_g).$$

Sejam G um grupo e A uma álgebra G-graduada. Note que se W é um subespaço, subálgebra ou um ideal da álgebra A, temos que $\underset{g \in G}{\oplus} (W \cap A_g) \subseteq W$. Então para que W seja graduado basta que $W \subseteq \underset{g \in G}{\oplus} (W \cap A_g)$. Ademais, se W é graduado, dado $w \in W$, escrevendo $w = \sum_{g \in G} w_g$, onde $w_g \in A_g$, então $w_g \in W$, para todo $g \in G$.

Exemplo 6 *São exemplo de álgebras graduadas:*

(i) *Seja A uma álgebra qualquer e G um grupo qualquer de elemento neutro $1 \in G$. Pondo $A_1 = A$ e $A_g = \{0\}$ para $g \in G - \{1\}$, temos que $\mathscr{G}$ definida pela coleção $\{A_g\}_{g\in G}$ é uma G-graduação para A. Note que $supp\mathscr{G} = \{1\}$, caso $A \neq 0$. Ademais todo subespaço é graduado.*

(ii) *Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Temos que A_1 é uma subálgebra graduada de A. De fato, note que A_1 é um subespaço e que $xy \in A_{1\cdot 1} = A_1$, para todos $x, y \in A_1$, portanto A_1 é subálgebra. Ademais, é fácil ver que na verdade todas as componentes homogêneas de A são subespaços graduados. Mais geralmente, se H é um subgrupo de G, então $B = \bigoplus_{h\in H} A_h$ é uma subálgebra graduada.*

(iii) *Sejam $A = K[x]$ á álgebra dos polinômios na variável x, e o grupo $G = (\mathbb{Z}, +)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definamos $A_n = \{0\}$, caso $n < 0$. Para $n = 0$ definamos $A_0 = K$ e $A_n = \{\lambda x^n \mid \lambda \in K\}$, para $n > 0$. Desta forma temos $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ e $A_n A_m = A_{n+m}$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Portanto, esta coleção de subespaços é uma $\mathbb{Z}$-graduação em $K[x]$. Aqui temos $supp\mathscr{G} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Note que o subespaço $B = \{p(x) \in K[x] \mid p(0) = 0\}$ é uma subálgebra graduada.*

(iv) *Seja G um grupo, consideremos a álgebra de grupo $A = K[G]$. Temos uma G-graduação natural de A onde $A_g = \{\lambda g \mid \lambda \in K\}$, para cada $g \in G$. Neste caso temos $supp\mathscr{G} = G$. Note que o subespaço de A gerado pelo centro $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \ \forall x \in G\}$ de G é uma subálgebra graduada, de fato, esta subálgebra coincide com $\bigoplus_{h\in Z(G)} A_h$.*

(v) *Considere o conjunto de símbolos $\mathscr{B} = \{E_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}^*\}$, onde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Seja A o K-espaço vetorial gerado por $\mathscr{B}$. Denotemos*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Consideremos $* : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \longrightarrow A$ dada por $E_{i,j} * E_{p,q} = \delta_{j,p} E_{i,q}$. Como sabemos, a extensão bilinear de $*$ a A faz de A uma álgebra. Note que A é uma álgebra associativa. De fato, dados $E_{i,j}, E_{p,q}, E_{n,m} \in \mathscr{B}$, temos

$$(E_{i,j}E_{p,q})E_{n,m} = \delta_{j,p}E_{iq}E_{n,m} = \delta_{j,p}\delta_{q,n}E_{i,m},$$

por outro lado

$$E_{i,j}(E_{p,q}E_{n,m}) = \delta_{q,n}E_{i,j}E_{p,m} = \delta_{j,p}\delta_{q,n}E_{i,m}.$$

Consideremos o grupo $(\mathbb{Z}, +)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ coloquemos A_n como o subespaço gerado por $\{E_{i,j} \mid j - i = n\}$, isto é,

$$A_n = span_K\{E_{i,j} \mid j - i = n\}.$$

É obvio que $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$. *Ademais, fixados* $n, m \in \mathbb{Z}$, *sejam* $E_{i,j}, E_{p,q} \in \mathscr{B}$ *tais que* $j - i = n$ *e* $q - p = m$. *Caso* $j \neq p$, *trivialmente, temos que* $E_{i,j}E_{p,q} = 0 \in A_{n+m}$, *por outro lado se* $j = p$ *temos* $E_{i,j}E_{p,q} = E_{i,q}$ *e*

$$q - i = q + 0 - i = q - p + j - i = m + n.$$

Portanto, de toda forma $E_{i,j}E_{p,q} \in A_{n+m}$. *Como* $B_t = \{E_{r,s} \mid s - r = t\}$ *é o conjunto gerador de* A_t, *temos que* $A_nA_m \subseteq A_{n+m}$. *Logo* $\mathscr{G} : A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ *é uma* $\mathbb{Z}$*-graduação para* A. *Desta forma temos que* $supp\mathscr{G} = \mathbb{Z}$. *Note também que fixado* $m \in \mathbb{N}$, *temos que*

$$M_m(K) \simeq span_K\{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq m\}.$$

Fazendo a identificação $M_m(K) = span_K\{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$, *é fácil ver que* $M_m(K)$ *é uma subálgebra graduada de* A.

(vi) Sejam A *uma álgebra associativa e* G *um grupo abeliano. Dada uma* G*-graduação* $\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ *de* A. *Então* $\mathscr{G}$ *também é uma* G*-graduação tanto para a álgebra de Lie* $A^{(-)}$, *quanto para a álgebra de Jordan* $A^{(+)}$. *De fato, para cada* $g, h \in G$, *tomando* $a \in A_g$ *e* $b \in A_h$, *temos que* $ab \in A_{gh}$ *e* $ba \in A_{hg}$. *Como* $gh = hg$, *pois* G *é abeliano, temos que* $ab \pm ba \in A_{gh}$, *donde* $[a, b], a \circ b \in A_{gh}$ *para todos* $a \in A_g$ *e* $b \in A_h$.

(vii) Seja A *uma álgebra e* $\varphi : A \longrightarrow A$ *um homomorfismo de álgebras tal que* $\varphi^2 = 1$, *neste caso* φ *é um isomorfismo de* A *em* A. *O espaço vetorial* A *pode ser decomposto como*

$$A = \{x \in A \mid \varphi(x) = x\} \oplus \{x \in A \mid \varphi(x) = -x\}.$$

Para cada $i \in \mathbb{Z}_2$ *definamos* $A_i = \{x \in A \mid \varphi(x) = (-1)^i x\}$. *Desta forma* $A = A_0 \oplus A_1$. *Tomando* $a \in A_i$ *e* $b \in A_j$, *onde* $i, j \in \mathbb{Z}_2$. *O elemento* $x = ab$ *é tal que*

$$\varphi(x) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = (-1)^{i+j}ab = (-1)^{i+j}x.$$

Portanto $x \in A_{i+j}$. *Donde segue que* $A = A_0 \oplus A_1$ *é uma* $\mathbb{Z}_2$*-graduação para* A. *Por exemplo, a* $\mathbb{R}$*-álgebra* $\mathbb{C}$ *dos números complexos com a aplicação* $\varphi(a + bi) = \overline{a + bi} = a - bi$, *onde* $i^2 = -1$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$. *Reciprocamente, suponha que* $A = A_0 \oplus A_1$ *é uma álgebra* $\mathbb{Z}_2$ *graduada, definamos* $\varphi : A \longrightarrow A$ *por* $\varphi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, *para* $a_0 \in A_0$ *e* $a_1 \in A_1$. *Desta forma temos que* φ *é uma transformação linear bijetora. Para* $a_0, b_0 \in A_0$ *e* $a_1, b_1 \in A_1$ *temos*

$$\begin{aligned}\varphi((a_0 + a_1)(b_0 + b_1)) &= \varphi((a_0b_0 + a_1b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0)) \\ &= (a_0b_0 + a_1b_1) - (a_0b_1 + a_1b_0),\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}\varphi(a_0+a_1)\varphi(b_0+b_1) &= (a_0-a_1)(b_0-b_1)\\ &= (a_0b_0+a_1b_1)-(a_0b_1+a_1b_0).\end{aligned}$$

Ademais $\varphi^2(a_0+a_1)=a_0+a_1$. *Portanto* φ *é um isomorfismo de* A *em* A *tal que* $\varphi^2=1$.

(viii) Suponha que $m\in\mathbb{N}^*$ *é tal que* K *possua* $e\in K$ *uma raiz* m*-ésima primitiva da unidade. Consideremos as duas matrizes* $E,J\in M_m(K)$

$$E=\begin{pmatrix} e^{m-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{m-2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma verificação mostra que $EJ=eJE$ *e* $E^m=J^m=I$, *onde* I *é a matriz identidade* $m\times m$. *Afirmamos que as matrizes* E^iJ^j, $1\le i,j\le m$, *são L.I. De fato, denotando por* L_j *o subespaço de* $M_m(K)$ *gerado pelas matrizes* $J^j, EJ^j, E^2J^j,\ldots,E^{m-1}J^j$. *Desde que* $L_j\subseteq span_K\{E_{1,j+1},E_{2,j+2},\ldots,E_{mj}\}$, *onde* E_{pq} *são as matrizes elementares de* $M_m(K)$. *Assim é claro que*

$$L_1+L_2+\cdots+L_m=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_m.$$

Portanto basta mostramos que para cada $j=1,2,\ldots,m$ *as matrizes* J^j, EJ^j, E^2J^j, $\ldots$, $E^{m-1}J^j$ *são L.I. Com efeito, supondo* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in K$ *tais que*

$$\lambda_1J^j+\lambda_2EJ^j+\cdots+\lambda_{m-1}E^{m-2}J^j+\lambda_mE^{m-1}J^j=0.$$

Como J *é invertível, multipliquemos a equação acima por* $(J^j)^{-1}$ *pela direita e por* E *pela esquerda, desta forma temos*

$$\lambda_1E+\lambda_2E^2+\cdots+\lambda_{m-1}E^{m-1}+\lambda_mI=0$$

temos o sistema

$$\begin{cases}\lambda_1e^{m-1}+\lambda_2(e^{m-1})^2+\cdots+\lambda_{m-1}(e^{m-1})^{m-1}+\lambda_m=0\\ \lambda_1e^{m-2}+\lambda_2(e^{m-2})^2+\cdots+\lambda_{m-1}(e^{m-2})^{m-1}+\lambda_m=0\\ \vdots\\ \lambda_1e+\lambda_2(e)^2+\cdots+\lambda_{m-1}(e)^{m-1}+\lambda_m=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}+\lambda_m=0\end{cases}$$

denotando $\xi_n = e^{n-1}$, *em forma matricial o sistema fica*

$$\begin{pmatrix} \xi_m & \xi_m^2 & \cdots & \xi_m^{m-1} & 1 \\ \xi_{m-1} & \xi_{m-1}^2 & \cdots & \xi_{m-1}^{m-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^{m-1} & 1 \\ \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{m-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seja C *a matriz dos coeficientes da equação acima,* C^t *a transposta de* C, *e* C' *a matriz obtida de* C^t *após trocar a ultima linha de* C^t *com a penúltima, em seguida a nova antepenúltima com a linhas acima dela, e assim por diante até a ultima linha se torar a primeira e a* i*-ésima linha se tornar a* $(i+1)$*-ésima linha,* $i = 1, 2, \ldots, m-1$. *Temos* $det(C) = det(C^t) = (-1)^{m-1} det(C')$. *Note que* C' *é uma matriz de Vandermonde. Daí*

$$\begin{vmatrix} \xi_m & \xi_m^2 & \cdots & \xi_m^{m-1} & 1 \\ \xi_{m-1} & \xi_{m-1}^2 & \cdots & \xi_{m-1}^{m-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^{m-1} & 1 \\ \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{m-1} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \xi_m & \xi_{m-1} & \cdots & \xi_2 & \xi_1 \\ \xi_m^2 & \xi_{m-1}^2 & \cdots & \xi_2^2 & \xi_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_m^{m-2} & \xi_{m-1}^{m-2} & \cdots & \xi_2^{m-2} & \xi_1^{m-2} \\ \xi_m^{m-1} & \xi_{m-1}^{m-1} & \cdots & \xi_2^{m-1} & \xi_1^{m-1} \end{vmatrix}.$$

O determinante da direita vale $\prod_{1 \le i < j \le m} (\xi_i - \xi_j)$, *que é não nulo, já que* $\xi_n = e^{n-1}$ *e* e *é uma raiz* m*-ésima primitiva da unidade. Portanto* $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$. *Concluímos que as matrizes* $E^i J^j$, $1 \le i, j \le m$ *são L.I. Como são* m^2 *matrizes, temos que* $\beta = \{E^i J^j \mid 1 \le i, j \le m\}$ *é uma base de* $M_m(K)$. *Considere o grupo* $G = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$. *Para cada* $h = (i, j) \in G$ *consideremos* $A_h = span_K\{E^i J^j\}$. *Dados* $h = (i, j), g = (p, q) \in G$, *lembrando que* $EJ = eJE$, *temos*

$$(E^i J^j)(E^p J^q) = E^i (J^j E^p) J^q = E^i (e^{-j} E J^j E^{p-1}) J^q = E^i (e^{-jp} E^p J^j) J^q$$

portanto $(E^i J^j)(E^p J^q) = e^{-jp} E^{i+p} J^{j+q}$. *Como* $E^m = J^m = I$, *temos que* $A_h A_g \subseteq A_{h+g}$, *para todos* $h, g \in G$. *Portanto*

$$\mathscr{G} : M_m(K) = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m} span_K\{E^i J^j\}$$

é uma $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$*-graduação de* $M_m(K)$.

Um caso particular desta construção, para $m = 2$ *é* $A = M_2(K)$, $e = -1$, $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *e*

$$A_{(0,0)} = span_K \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad A_{(1,0)} = span_K \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A_{(0,1)} = span_K\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad A_{(1,1)} = span_K\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

(ix) Seja G um grupo qualquer. Consideremos a álgebra $A = UT_2(K)$ das matrizes triangulares superiores 2×2. Fixando $g_0 \in G-\{1\}$. Sejam e_{ij}, $i \leq j$, as matrizes unitárias. Ponha

$$A_g = \begin{cases} span_K\{e_{11}, e_{22}\}, \text{ se } g = 1, \\ span_K\{e_{12}\} \text{ se } g = g_0, \\ \{0\}, \text{ se } g \in G - \{1, g_0\}. \end{cases}$$

Note que $xy \in A_1$ para $x, y \in \{e_{11}, e_{22}\}$. Ademais, para $X \in \{e_{11}, e_{22}\}$ temos $\{Xe_{12}, e_{12}X\} = \{0, e_{12}\}$, portanto $A_1A_{g_0}, A_{g_0}A_1 \subseteq A_{g_0}$. Como $e_{12}^2 = 0$, temos que $\mathscr{G} : UT_2 = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é uma G-graduação para UT_2. Neste caso temos $supp\mathscr{G} = \{1, g_0\}$. O fato de $g_0 \neq 1$ só foi importante para que tal graduação não coincida com a graduação trivial.

(x) Análogo ao item anterior, seja G um grupo qualquer e $A = M_2(K)$ a álgebra das matrizes 2×2. Fixado $g_0 \in G - \{1\}$ tal que $g_0^{-1} \neq g_0$, e sejam e_{ij} as matrizes unitárias, definamos

$$A_g = \begin{cases} span_K\{e_{11}, e_{22}\}, \text{ se } g = 1, \\ span_K\{e_{12}\} \text{ se } g = g_0, \\ span_K\{e_{21}\} \text{ se } g = g_0^{-1}, \\ \{0\}, \text{ se } g \in G - \{1, g_0, g_0^{-1}\}. \end{cases}$$

Temos que $\mathscr{G} : M_2(K) = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é uma G-graduação para $M_2(K)$, com $supp\mathscr{G} = \{1, g_0, g_0^{-1}\}$. Note também que $UT_2(K)$ é uma subálgebra graduada.

Um exemplo particular de subespaço graduado, que será importante para este trabalho, é o seguinte:

Proposição 1.38 *Seja G um grupo qualquer e $L = (L, [,])$ uma álgebra de Lie G-graduada, $L = \bigoplus_{g\in G} L_g$. Temos que o centro $Z(L)$ de L é um subespaço graduado.*

Prova. Basta mostrar que $Z(L) \subseteq \bigoplus_{g\in G}(L_g \cap Z(L))$. Dado $x \in Z(L)$, existem $x_g \in L_g$, com uma quantidade finita deles não nulos, tais que $x = \sum_{g\in G} x_g$. Se mostrarmos que cada $x_g \in Z(L)$, o resultado estará provado, pois aí teremos $x_g \in L_g \cap Z(L)$ e consequentemente $x \in \bigoplus_{g\in G}(L_g \cap Z(L))$. Seja $\beta = \{y_i\}_{i\in\Lambda}$ uma base de L formada por elementos homogêneos. Tomando $y \in \beta$, digamos que $G\text{-}deg(y) = h$, temos $[y, x_g] =$

$a_{hg} \in L_{hg}$, para cada $g \in G$. Note também que $g \mapsto hg$ é uma permutação em G, daí usando o fato de que $x \in Z(L)$ temos

$$0 = [y, x] = [y, \sum_{g \in G} x_g] = \sum_{g \in G} [y, x_g] = \sum_{g \in G} a_{hg} = \sum_{g' \in G} a_{g'}$$

portanto $a_{g'} = 0$ para todo $g' \in G$. Concluímos então que $[y, x_g] = 0$ para todos $y \in \beta$ e $g \in G$ e assim $x_g \in Z(L)$. ■

De maneira natural, surge a necessidade de se verificar se um dado homomorfismo entre álgebras, graduadas por um mesmo grupo, é compatível com a graduação. É o que faremos na próxima seção .

1.7 Homomorfismos e involuções graduadas

Nesta seção apresentaremos os conceitos de homomorfismos e involuções graduadas e também alguns resultados que serão necessários nos próximos capítulos.

Definição 1.39 ([24]) *Sejam $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ álgebras G-graduadas. Dizemos que $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras graduadas, se φ é um homomorfismo de álgebras com a condição adicional que $\varphi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$. Ademais, caso φ seja bijetiva, dizemos que φ é um isomorfismo de álgebras graduadas. Também chamamos φ de homomorfismo graduado.*

Sob as condições da definição acima, note que se φ for um isomorfismo graduado, então vale $\varphi(A_g) = B_g$, para todo $g \in G$. Reciprocamente, caso φ seja graduado e $\varphi(A_g) = B_g$, para todo $g \in G$, então φ é um isomorfismo. Ainda no caso em que φ seja um isomorfismo graduado, vemos a estrutura A munida com sua G-graduação como sendo a mesma estrutura B munida com sua respectiva G-graduação. Analogamente definimos involução graduada. Uma maneira de se verificar se um homomorfismo é graduado é apresentado na proposição a seguir.

Proposição 1.40 *Sejam $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ álgebras G-graduadas. Um homomorfismo (ou involução, no caso em que $A = B$) $\varphi : A \longrightarrow B$ é graduado se, e somente se, $\varphi(s) \in B_g$, para cada $s \in S_g$, onde S_g é um conjunto gerador para o subespaço A_g.*

Prova. Segue direto do fato de que φ é uma transformação linear que $\varphi(S_g) \subseteq B_g$ implica em $\varphi(A_g) \subseteq B_g$. ■

Exemplo 7 *São exemplos de homomorfismos graduados:*

(i) Sejam $A = \underset{g\in G}{\oplus} A_g$ *e* $B = \underset{g\in G}{\oplus} B_g$ *álgebras* G*-graduadas, a aplicação* $a \mapsto 0$ *de* A *em* B *é um homomorfismo graduado e* $a \mapsto a$ *de* A *em* A *é um isomorfismo graduado.*

(ii) Considere a álgebra $K[x]$ *com a* $\mathbb{Z}$*-graduação dada por*

$$K[x]_n = \begin{cases} \{0\}, \text{ se } n < 0, \\ \{\lambda x^n \mid \lambda \in K\}, \text{ se } n \geq 0. \end{cases},$$

e a álgebra de grupo $K[\mathbb{Z}]$ *com sua graduação natural. Temos que a transformação linear* $\varphi : K[x] \longrightarrow K[\mathbb{Z}]$ *definida por* $\varphi(x^g) = g$*, para cada* $g \in \mathbb{Z}$*, é um homomorfismo graduado.*

(iii) Considere $A = M_2(K)$ *e* $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$*. Consideremos a* G*-graduação de* A *dada por*

$$A_{(0,0)} = span_K \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad A_{(1,0)} = span_K \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A_{(0,1)} = span_K \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad A_{(1,1)} = span_K \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Consideremos a transformação linear $a \mapsto a^t$*, onde* a^t *representa a transposta da matriz* $a \in A$*. Sabemos que* $(ab)^t = b^t a^t$*, para todos* $a, b \in A$*. Ademais* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e*

$$X^t = X \text{ para } X \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Portanto $a \mapsto a^t$ *é uma involução graduada. Ademais note que não existe uma* G*-graduação* $A' = A = \underset{g\in G}{\oplus} B_g$*, de* A *tal que todas as matrizes unitárias* E_{ij} *sejam homogêneas e que exista um isomorfismo de álgebras* $\varphi : A \mapsto A'$ *que seja graduado. Pois se* $b \in A'$ *é tal que* $b^2 = b \neq 0$ *e* b *é homogêneo, segue que o grau* g *de* b *na graduação de* A' *satisfaz* $g^2 = g$*, ou seja,* $g = 1$*, portanto* $b \in B_1$*. Se todas as matrizes unitárias fossem homogêneas em* A'*, teríamos* $E_{11}, E_{22} \in B_1$*, daí* $dim B_1 \geq 2 > dim A_1 = 1$*.*

(iv) Seja $A = \underset{g\in G}{\oplus} A_g$ *uma álgebra associativa unitária* G*-graduada. Suponha que existam* $a, b \in A_1$ *tais que* $ba = 1$*. Sabemos que* $\varphi : A \mapsto A$ *definido por* $\varphi(x) = axb$ *é um automorfismo. Note que* φ *será graduado, pois se* $x \in A_g$ *para algum* $g \in G$*, temos que* axb *também é homogêneo e tem grau* G*-deg*$(axb) = 1g1 = g$*. Portanto* $\varphi(x) \in A_g$ *para cada* $x \in A_g$*.*

(v) Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ *uma álgebra* G*-graduada. Suponha que* B *é uma álgebra isomorfa a álgebra* A *e que* $\psi : A \longrightarrow B$ *seja um isomorfismo de álgebras. Para cada* $g \in G$*, ponha* $B_g = \psi(A_g)$*. Sabemos que* $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$*. Essa decomposição é uma* G*-graduação de* B*. De fato, fixando* $g, h \in G$*, dados* $x \in B_g$ *e* $y \in B_h$*, existem* $a \in A_g$ *e* $b \in A_h$*,* $x = \psi(a)$ *e* $y = \psi(b)$*. Como* $ab \in A_{gh}$ *temos*

$$xy = \psi(a)\psi(b) = \psi(ab) \in \psi(A_{gh}) = B_{gh}.$$

Nessas condições, ψ *é um isomorfismo graduado.*

(vi) Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$*,* $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$ *e* $C = \bigoplus_{g\in G} C_g$ *álgebras* G*-graduadas e sejam* $\psi : A \longrightarrow B$ *e* $\varphi : B \longrightarrow C$ *homomorfismos graduados, então* $\varphi \circ \psi : A \longrightarrow C$ *é um homomorfismo graduado. De fato, é claro que a composição é homomorfismo de álgebras, além disso*

$$\varphi \circ \psi(A_g) = \varphi(\psi(A_g)) \subseteq \varphi(B_g) \subseteq C_g.$$

Seja A uma álgebra, com o conceito de isomorfismo graduado, de modo análogo ao que foi feito anteriormente onde separamos as álgebras em classes de equivalência dada pela relação $A \simeq B$ podemos separar as G-graduações que A em classes de equivalência:

Definição 1.41 *Sejam* A *uma álgebra e* G *um grupo. Dadas* $\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g\in G} B_g$ *e* $\mathscr{H} : A = \bigoplus_{g\in G} C_g$ G*-graduações para a álgebra* A*, dizemos que* $\mathscr{G}$ *e* $\mathscr{H}$ *são graduações isomorfas caso exista um automorfismo* $\varphi : A \longrightarrow A$ *da álgebra* A *tal que* $\varphi(B_g) = C_g$ *para qualquer* $g \in G$*. Neste caso denotamos* $(A, \mathscr{G}) \cong (A, \mathscr{H})$*.*

Desta forma, embora sejam decomposições diferentes, $\mathscr{G}_1$ e $\mathscr{G}_2$ podem ser vistas como sendo a mesma graduação. Isto é similar ao que ocorre com outras estruturas como grupos, espaços vetoriais e álgebras isomorfas. Naturalmente, surge a pergunta, para algumas álgebras específicas, quais são todas as G-graduações a menos de isomorfismos graduados a álgebra pode admitir? Por exemplo, em [10] vemos que se G é um grupo finito, a álgebra associativa UT_n admite $\mid G \mid^{n-1}$ G-graduações não isomorfas duas a duas, com a propriedade de todas as matrizes unitárias serem homogêneas. Em [28] vemos que qualquer G-graduação em UT_n (para qualquer grupo G) é isomorfa a uma G-graduação onde todas as matrizes unitárias são homogêneas.

1.8 Graduações induzidas

Algo lógico a se pensar, é em como construir novas G-graduações a partir de uma G-graduação dada, ou até mesmo uma H-graduação a partir da G-graduação, onde H é um outro grupo. Para esse último questionamento tem uma forma simples de se construir esta graduação no caso em que G e H sejam grupos isomorfos, basta tomar $A'_h = A_{\psi(h)}$, onde $\psi : H \longrightarrow G$ é um isomorfismo de grupos.

Proposição 1.42 *Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada e B uma subálgebra graduada. Então $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$, onde $B_g = B \cap A_g$, é uma G-graduação para a álgebra B. Ademais, se J é um ideal graduado, $A/J = \bigoplus_{g\in G} (A/J)_g$, onde $(A/J)_g = (J + A_g)/J$, define uma G-graduação para A/J.*

Prova. $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$ ser uma G-graduação para a álgebra B, segue direto do fato de que $\{A_g\}_{g\in G}$ formam uma G-graduação para A e de que $B = \bigoplus_{g\in G} (B \cap A_g)$. Para o caso de J, inicialmente note que

$$\frac{A}{J} = \frac{\sum_{g\in G}(A_g + J)}{J} = \sum_{g\in G} \frac{A_g + J}{J} = \sum_{g\in G} \left(\frac{A}{J}\right)_g .$$

Para cada $g \in G$ considere $a_g \in A_g$ tais que $\sum_{g\in G} \overline{a_g} = \overline{0} = J$. Daí segue que $\sum_{g\in G} a_g \in J$. Como J é subespaço graduado, temos $a_g \in J$ para cada $g \in G$. Logo $\overline{a_g} = \overline{0}$ e consequentemente $A/J = \bigoplus_{g\in G} (A/J)_g$. Ademais se $g, h \in G$, dados $\overline{x} \in (A/J)_g$ e $\overline{y} \in (A/J)_h$, onde podemos tomar $x \in A_g$ e $y \in A_h$, temos que $xy \in A_{gh} \subseteq A_{gh} + J$. Portanto $\overline{x} \cdot \overline{y} \in (A_{gh} + J)/J$. ■

Suponha que A seja uma álgebra e G um grupo. Tomemos $\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação para A. Considere H o subgrupo de G gerado por $supp\mathscr{G}$ veja que $A = \bigoplus_{h\in H} A_h$ é uma H-graduação para A. Dessa forma, nos livramos de algumas componentes homogêneas desnecessárias. Por isso, as vezes convém supor que G é gerado por $supp\mathscr{G}$.

Façamos uma construção mais elaborada, no sentido de passar de uma G-graduação para uma H-graduação, onde G e H sejam grupos quaisquer.

Suponha que G e H são grupos e $\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é uma G- graduação para uma álgebra A. Dado um homomorfismo de grupos $\psi : G \to H$, para cada $h \in H$ definamos

o subespaço A'_h de A, dado por

$$A'_h = \begin{cases} \bigoplus_{g\in G:\ \psi(g)=h} A_g, \text{ caso } \psi^{-1}(h) \neq \emptyset, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $A = \bigoplus_{h\in H} A'_h$. Mostremos que a decomposição ${}^{\psi}\mathscr{G} : A = \bigoplus_{h\in H} A'_h$ é uma H-graduação de A. Com efeito, dados $h, t \in H$, tomemos $a \in A'_h$ e $b \in A'_t$. Assim existem $g_1, \ldots, g_k \in G$ tais que $\psi(g_i) = h$ e elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ tais que $a_i \in A_{g_i}$ de modo que $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Analogamente, existem elementos $g'_1, g'_2, \ldots, g'_m \in G$ com $\psi(g'_j) = t$ e elementos $b_1, b_2, \ldots, b_m \in A$ tais que $b_j \in A_{g'_j}$ com $b = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$. Daí $ab = \sum_{i,j} a_i b_j$, ademais temos $G\text{-}deg(a_i b_j) = g_i g'_j$ e $\psi(g_i g'_j) = ht$. Portanto $a_i b_j \in A'_{ht}$, e concluímos que $ab \in A'_{ht}$.

Definição 1.43 (página 16 de [13]) *Sejam G e H grupos, $\psi : G \to H$ um homomorfismo de grupos, A uma álgebra e $\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação de A. A H-graduação ${}^{\psi}\mathscr{G} : A = \bigoplus_{h\in H} A'_h$ de A, onde A'_h é dado por*

$$A'_h = \begin{cases} \bigoplus_{g\in G:\ \psi(g)=h} A_g, \ \textit{caso } \psi^{-1}(h) \neq \emptyset, \\ 0, \ \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

é chamada graduação obtida de $\mathscr{G}$ induzida por ψ.

Observação 1.44 *A respeito da construção feita acima. Note que se $a \in A$ é homogêneo e de grau $G\text{-}deg(a) = g$ na G-graduação, então a continua homogêneo na H-graduação, e agora com grau $\psi(g)$. As componentes homogêneas de $\mathscr{G}$ estão contidas nas componentes homogêneas de ${}^{\psi}\mathscr{G}$.*

Na construção acima foi importante que houvesse um homomorfismo de grupos $\psi : G \longrightarrow H$. Caso ψ seja o homomorfismo trivial então $\psi^{-1}(1) = G$ e portanto a H-decomposição de A será a H-graduação trivial. Dados dois grupos G e H, nem sempre existe um homomorfismo de grupos $\psi : G \longrightarrow H$ não trivial. Como por exemplo se G for um grupo simples e H é um grupo tal que $| H | < | G |$, então dado um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow H$, temos que ψ é trivial ou injetor. Pela desigualdade das cardinalidades, ψ deve ser trivial.

1.9 Grupos livres

Nesta seção apresentaremos o conceito de grupos livre e de grupo abeliano livre, que serão usados posteriormente quando estivermos estudando as graduações das álgebras $UT_n, UT_n^{(-)}$ e $UT_n^{(+)}$. Também iremos colocar aqui alguns conceitos e resultados sobre grupos que serão necessários adiante.

Seja L um conjunto não vazio de símbolos l_i, $i \in I$, para algum conjunto I de índices. Pensemos em L como um alfabeto e os símbolos l_i são letras. Consideremos novos símbolos l_i^n, $n \in \mathbb{Z}$, com a convenção $l_i = l_i^1$. Diremos que os símbolos l_i^n são sílabas e as justaposições w de uma quantidade finita de sílabas serão chamadas de palavras. Também consideremos a palavra vazia 1 que não tem sílabas.

Exemplo 8 *Se* $L = \{l_1, l_2, l_3\}$, *então*

$$l_1 l_3^{-4} l_2^2 l_3, \quad l_2^3 l_2^{-1} l_3 l_1^2 l_1^{-7} \quad e \quad l_3^2$$

são palavras.

Há dois tipos naturais de modificações em certas palavras, as contrações elementares. A primeira é substituir $l_i^n l_i^m$ por l_i^{n+m} e substituir l_i^0 por 1, isto é, tirá-lo da palavra. Por uma quantidade finita de contrações elementares toda palavra pode ser transformada em uma palavra reduzida, isto é, uma palavra onde não é possível fazer mais contrações elementares.

Consideremos o conjunto $F[L]$ de todas as palavras, em forma reduzida, formadas de nosso alfabeto S. Dados $w_1, w_2 \in F[L]$, pondo $w_1 \cdot w_2$ como sendo a forma reduzida da palavra obtida da justaposição $w_1 w_2$ de w_1 e w_2. Note que a forma reduzida não depende de como fazemos as contrações, logo a operação " $\cdot$ " está bem definida, é associativa, possui elemento neutro 1 e toda palavra $w \in F[L]$ é inversível. Portanto $(F[L], \cdot)$ é um grupo.

Definição 1.45 (página 342 de [14]) *O grupo* $F[L]$ *descrito acima é chamado de grupo livre gerado por* L.

O grupo $F[L]$ tem a seguinte propriedade universal:

Teorema 1.46 (página 343 de [14]) *Sejam* L *um conjunto não vazio,* $F[L]$ *o grupo livre gerado por* L *e* H *um grupo qualquer. Toda função* $\varphi : L \longrightarrow H$ *admite uma, e apenas uma, extensão* $\Phi : F[L] \longrightarrow H$, *onde* Φ *é um homomorfismo de grupos.*

Prova. Dados $l_1, l_2, \ldots, l_p \in L$ e $n_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{Z}$ definamos

$$\Phi(l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_p^{n_p}) = \varphi(l_1)^{n_1} \varphi(l_2)^{n_2} \cdots \varphi(l_p)^{n_p} \in H$$

as justaposições no lado direito da equação representam a operação do grupo H. Definamos também $\Phi(1) = 1$. É fácil ver que $\Phi : F[L] \longrightarrow H$ é um homomorfismo de grupos e que estende φ. A unicidade segue do fato de coincidirem em L, e portanto a imagem de $l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_p^{n_p}$ deverá ser $\varphi(l_1)^{n_1} \varphi(l_2)^{n_2} \cdots \varphi(l_p)^{n_p}$. ■

A nomenclatura *livre* dada ao grupo $F[L]$, é devido ao teorema acima. Uma propriedade importante de tais grupos é apresentada no próximo teorema.

Teorema 1.47 (página 342 de [14]) *Sejam L_1 e L_2 conjuntos não vazios, $F[L_1]$ e $F[L_2]$ os grupos livres gerados por L_1 e L_2, respectivamente. Temos que $F[L_1]$ e $F[L_2]$ são grupos isomorfos se, e somente se, $\mid L_1 \mid = \mid L_2 \mid$.*

Podemos generalizar o conceito de *livre* para outros grupos da seguinte forma.

Definição 1.48 *Se G é um grupo com um conjunto $L = \{l_i \mid i \in I\}$ de geradores, e se G é isomorfo a $F[L]$ por um homomorfismo $\Phi : G \to F[L]$ tal que $\Phi(l_i) = l_i$, então G é livre em L, e os l_i's são geradores livres de G. Um grupo é livre quando é livre em algum subconjunto não vazio L. Além do mais definimos o posto do grupo livre G em L, como sendo a cardinalidade $\mid L \mid$ de L.*

Note que se G é livre em L, então para todo grupo H e função $\varphi : L \longrightarrow H$ há um, e apenas um, homomorfismo de grupos $\Phi : G \longrightarrow H$, tal que Φ estende a função φ.

Observação 1.49 *Uma observação curiosa a respeito do posto de um grupo livre é que o posto não se comporta como a dimensão de um espaço vetorial, no sentido que G possa ser um grupo livre e ter um subgrupo H que também é livre, mas o posto de H ser maior que o posto de G. Por exemplo, considere os símbolos x e y, e tome $L = \{x, y\}$. Temos que o grupo livre $F[L] = F[\{x, y\}]$ tem posto 2. Porém para cada inteiro $k \geq 0$, consideremos o elemento $z_k = x^k y x^{-k}$. Consideremos H como o subgrupo de $F[L]$ gerado por $L' = \{z_k \mid k \geq 0\}$. H é livre em L' e $\mid L' \mid > \mid L \mid$.*

Iremos agora formular o conceito análogo de grupo livre na classe dos grupos abelianos. Note que na construção de $F[L]$ podemos adicionar a hipótese de que as letras l_i comutam. Desta forma o grupo $F_{ab}[L]$ obtido é um grupo abeliano, também dado qualquer grupo abeliano H e qualquer função $\varphi : L \longrightarrow H$, existe um, e apenas

um homomorfismo de grupos $\Phi : F_{ab}[L] \longrightarrow H$, tal que Φ estende φ. Note que no caso de L ser finito, digamos $L = \{l_1, \ldots, l_n\}$, então para cada $x \in F_{ab}[L]$ existem únicos inteiros $m_1, \ldots, m_n$ tais que $x = l_1^{m_1} l_2^{m_2} \cdots l_n^{m_n}$. Mostremos que este grupo é isomorfo a $\mathbb{Z}^n$. Seja $e_i \in \mathbb{Z}^n$ a n-upla com 1 na i-ésima entrada e 0 nas demais. Consideremos $L = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. A aplicação

$$\Phi(m_1, m_2, \ldots, m_n) = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$$

é um isomorfismo de grupos tal que $\Phi(e) = e$ para todos $e \in L$. Há um análogo ao ***Teorema 1.47*** para grupos abelianos livres. Veja que o posto de $\mathbb{Z}^n$ é n e portanto $\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n$ se, e somente se, $m = n$. Assim iremos nos referir a $\mathbb{Z}^n$ como o grupo abeliano livre de posto n.

Como dedicamos esta seção a falar de grupos, fixemos a seguinte notação:

Notação 1.50 *Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por S_m o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, m\}$ com a operação de composição.*

A seguir definiremos o conceito e ação de grupo em um conjunto, que será importante para o capítulo seguinte.

Definição 1.51 *Sejam G um grupo de elemento neutro $1 \in G$ e X um conjunto não vazio. Definimos uma ação (à esquerda) de G em X como sendo uma aplicação $\rho : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \rho(g, x) = g \cdot x$, que satisfaz:*

i) $1 \cdot x = x$, *para todo* $x \in X$.

ii) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, *para quaisquer* $g_1, g_2 \in G$ *e* $x \in X$.

A ideia da definição acima é conseguir "*multiplicar*" os elementos de um conjunto X, não vazio, pelos elementos de G de tal forma que essa multiplicação seja compatível com a operação de G. O item i) do exemplo a seguir ilustra a ideia.

Exemplo 9 *São exemplos de ações de grupos:*

i) Seja V um espaço vetorial real, considere o grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*$, sendo " $\cdot$ " a multiplicação por escalar em V. Então a aplicação $\rho : \mathbb{R}^* \times V \to V$ dada por $\rho(\lambda, v) = \lambda \cdot v$ é uma ação de $\mathbb{R}^*$ em V.

ii) Sendo G um grupo e X um conjunto não vazio, definindo $\rho_0 : G \times X \to X$ por $\rho_0(g, x) = x$ para quaisquer $g \in G$ e $x \in X$, então essa aplicação é uma ação e é chamada de ação trivial.

iii) *Sejam G um grupo e m um inteiro positivo. Tomemos $X = G^m$ e definamos*

$$\begin{aligned} \rho : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, (g_1, g_2, \ldots, g_m)) &\mapsto \rho(g, (g_1, \ldots, g_m)) = (gg_1, gg_2, \ldots, gg_m). \end{aligned}$$

Temos que ρ é uma ação de G em G^m.

iv) *Seja G um grupo, tomando $X = G$ definamos a ação $\rho : G \times G \to G$ como sendo a conjugação: $(g, x) \mapsto \rho(g, x) = g \cdot x = gxg^{-1}$. Temos $1 \cdot x = 1x1^{-1} = x$, ademais:*

$$\begin{aligned} (g_1g_2) \cdot x &= g_1g_2x(g_1g_2)^{-1} \\ &= g_1g_2xg_2^{-1}g_1^{-1} \\ &= g_1(g_2xg_2^{-1})g_1^{-1} \\ &= g_1(g_2 \cdot x)g_1^{-1} \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot x). \end{aligned}$$

v) *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G, X um conjunto não vazio e $\rho : G \times X \to X$ uma ação de G em X. A aplicação $\rho_H : H \times X \to X$, definida por $\rho_H(h, x) = \rho(h, x)$, é uma ação de H em X e dizemos que esta ação é a restrição de ρ a H.*

vi) *Seja X um conjunto não vazio. Considerando o conjunto G das funções bijetoras de X em X. Dos resultados da teoria clássica de funções não é difícil ver que G com a composição de funções forma um grupo, com elemento neutro dado pela função identidade, $Id : X \to X$ dada por $Id(x) = x$ para todo $x \in X$. Tomando então a aplicação*

$$\begin{aligned} \rho : G \times X &\to X \\ (f, x) &\mapsto \rho(f, x) = f \cdot x = f(x) \end{aligned}$$

temos:

1. *$Id \cdot x := Id(x) = x$ para todo $x \in X$.*
2. *$(f_1 \circ f_2) \cdot x := (f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1 \cdot (f_2(x)) = f_1 \cdot (f_2 \cdot x)$ para quaisquer $f_1, f_2 \in G$ e $x \in X$.*

Daí temos que $(f, x) \mapsto f(x)$ é uma ação de $(G, \circ)$ em X.

Conceitos como *livre* também são aplicados para álgebras. Vejamos na próxima seção.

1.10 Álgebra associativa livre G-graduada

Nesta seção, apresentaremos uma álgebra específica que servirá de base para diversas definições e resultados abordados neste trabalho.

Para cada $g \in G$, considere o conjunto $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\} = \{x_n^{(g)} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ um conjunto infinito enumerável de variáveis, tais que $x_n^{(g)} = x_m^{(h)}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $g, h \in G$ se, e somente se, $n = m$ e $g = h$. Consideremos X como sendo o conjunto $X = \bigcup_{g \in G} X_g$. Dados $x_{i_1}^{(g_{j_1})}, x_{i_2}^{(g_{j_2})}, \ldots, x_{i_p}^{(g_{j_p})} \in X$, formaremos símbolos pela justaposição das variáveis, isto é, formaremos símbolos da forma "$x_{i_1}^{(g_{j_1})} x_{i_2}^{(g_{j_2})} \cdots x_{i_p}^{(g_{j_p})}$". Denotemos por $K\langle X\rangle$ o K-espaço vetorial formado por esses símbolos. Dados dois símbolos $x_{i_1}^{(g_{j_1})} x_{i_2}^{(g_{j_2})} \cdots x_{i_p}^{(g_{j_p})}$ e $x_{s_1}^{(g_{t_1})} x_{s_2}^{(g_{t_2})} \cdots x_{s_q}^{(g_{t_q})}$, definiremos que a multiplicação deles será o símbolo formado pela justaposição dos dois símbolos, isto é

$$(x_{i_1}^{(g_{j_1})} x_{i_2}^{(g_{j_2})} \cdots x_{i_p}^{(g_{j_p})})(x_{s_1}^{(g_{t_1})} x_{s_2}^{(g_{t_2})} \cdots x_{s_q}^{(g_{t_q})}) = x_{i_1}^{(g_{j_1})} x_{i_2}^{(g_{j_2})} \cdots x_{i_p}^{(g_{j_p})} x_{s_1}^{(g_{t_1})} x_{s_2}^{(g_{t_2})} \cdots x_{s_q}^{(g_{t_q})}.$$

Podemos estender essa multiplicação como uma aplicação bilinear em $K\langle X\rangle$. Desta forma $K\langle X\rangle$ é uma álgebra com essa multiplicação. Note que $K\langle X\rangle$ será uma álgebra associativa e unitária. As variáveis de X_g serão ditas homogêneas de grau g. Os símbolos "$x_{i_1}^{(g_{j_1})} x_{i_2}^{(g_{j_2})} \cdots x_{i_p}^{(g_{j_p})}$" serão chamados de monômios. Definimos o grau homogêneo do monômio $x_{i_1}^{(g_{j_1})} x_{i_2}^{(g_{j_2})} \cdots x_{i_p}^{(g_{j_p})} \in K\langle X\rangle$ como sendo $g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_p} \in G$, e definimos seu grau total como sendo p. Denotemos por $K\langle X\rangle^{(g)}$ o subespaço gerado por todos os monômios que tem grau homogêneo g. Note que $K\langle X\rangle^{(g)} K\langle X\rangle^{(h)} \subseteq K\langle X\rangle^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$ e que

$$K\langle X\rangle = \bigoplus_{g \in G} K\langle X\rangle^{(g)}.$$

Com essas observações a decomposição acima define uma G-graduação para $K\langle X\rangle$. Denotemos por $K\langle X\rangle^{gr}$ a álgebra $K\langle X\rangle$ munida dessa G-graduação. Os elementos $f \in K\langle X\rangle$ serão chamados de polinômios e com frequência denotamos $f = f(x_{i_1}^{(g_{j_1})}, \ldots, x_{i_p}^{(g_{j_p})})$, onde $x_{i_l}^{(g_{j_l})}$ são as variáveis que compõem os monômios que formam f.

Definição 1.52 (Definition 3.3.3. página 66 de [15]) *A álgebra $K\langle X\rangle^{gr}$ vista acima é chamada de álgebra associativa livre G-graduada de posto enumerável sobre K.*

O termo "*livre*" é referente a seguinte propriedade:

Teorema 1.53 (página 66 de [15]) *Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra definida acima. Dada $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra associativa G-graduada e uma função $\varphi : X \longrightarrow A$ qualquer, com a propriedade de que $\varphi(X_g) \subseteq A_g$, então existe um único homomorfismo graduado $\Phi : K\langle X\rangle^{gr} \longrightarrow A$, tal que Φ estende φ.*

Prova. Para cada monômio $x_{i_1}^{(g_1)}x_{i_2}^{(g_2)}\cdots x_{i_p}^{(g_p)}$, definamos Φ como

$$\Phi(x_{i_1}^{(g_1)}x_{i_2}^{(g_2)}\cdots x_{i_p}^{(g_p)}) = \varphi(x_{i_1}^{(g_1)})\varphi(x_{i_2}^{(g_2)})\cdots\varphi(x_{i_p}^{(g_p)}) \in A.$$

A as justaposições no lado direito da igualdade acima são as multiplicações na álgebra A. Como os monômios formam uma base para $K\langle X\rangle$, Φ pode ser estendida em uma transformação linear de $K\langle X\rangle$ em A e Φ estende φ. Pela definição de Φ, é fácil ver que isso define um homomorfismo de álgebras. Ademais se $x_{i_1}^{(g_1)}x_{i_2}^{(g_2)}\cdots x_{i_p}^{(g_p)} \in K\langle X\rangle^{(g)}$, então $g_1g_2\cdots g_p = g$, ademais como $\varphi(X_h) \subseteq A_h$, para todo $h \in G$, temos que $\varphi(x_{i_1}^{(g_1)})\varphi(x_{i_2}^{(g_2)})\cdots\varphi(x_{i_p}^{(g_p)}) \in A_{g_1g_2\cdots g_p} = A_g$, portanto $\Phi(x_{i_1}^{(g_1)}x_{i_2}^{(g_2)}\cdots x_{i_p}^{(g_p)}) \in A_g$. Desta forma Φ é um homomorfismo graduado. A unicidade segue do fato de que qualquer homomorfismo que estenda φ deve coincidir com Φ nos monômios. ■

Observação 1.54 *Note que na construção da álgebra $K\langle X\rangle$, poderíamos ter fixado $r \in \mathbb{N}$ e ter definido $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots, x_r^{(g)}\}$. Como também poderíamos ter acrescentado o símbolo "1" que representaria a justaposição de 0 varáveis, e consequente 1 será a unidade. Veja que se pegarmos $r = 1$ e $G = \{1\}$ e acrescentarmos o símbolo 1, e denotarmos $x_1^{(1)}$ simplesmente por x, temos a álgebra $K[x]$ dos polinômios na variável x. Por fim note que no teorema acima, se acrescentarmos o símbolo 1, e pondo a hipótese de que A é unitária, o teorema pode ser anunciado como: existe e é única a Φ que estende φ e que satisfaz $\Phi(1) = 1$.*

A álgebra associativa livre G-graduada $K\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} K\langle X\rangle^{(g)}$ servirá de base para várias definições importantes. Antes de apresentarmos tais definições, há construções semelhantes para álgebras que não são associativas. Vejamos a seguinte propriedade:

Proposição 1.55 *Seja A uma álgebra qualquer. Dada uma família $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subálgebras de A, então $B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ é uma subálgebra de A.*

Prova. Sabemos que B é um subespaço de A. Dados $x, y \in B$, então $x, y \in B_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$ fixo. Como B_λ é subálgebra, temos $xy \in B_\lambda$. Portanto $xy \in B_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Logo $xy \in B$, para todos $x, y \in B$. ■

Com o auxílio da proposição acima, definimos:

Definição 1.56 *Seja A uma álgebra e $S \subseteq A$. Consideremos o conjunto*

$$\Lambda = \{B \subseteq A \mid B \text{ é subálgebra (resp. ideal) de } A \text{ e } S \subseteq B\}.$$

Note que $A \in \Lambda \neq \emptyset$. Definimos a subálgebra (resp. ideal) de A gerada por S como sendo $\bigcap\limits_{B\in\Lambda} B$.

Exemplo 10 *A seguir listamos alguns exemplos da definição anterior.*

(i) Seja $K[x]$ a álgebra dos polinômios na variável x. A subálgebra de $K[x]$ gerada por $S = \{x\}$ é $B = \{p(x) \in K[x] \mid p(x) = 0\}$. De fato, note que $S \subseteq B$, e se C é uma subálgebra tal que $S \subseteq C$, então como C é fechado a produto devemos ter $x, x^2, \ldots, x^n \in C$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto $B \subseteq C$. Logo

$$\bigcap_{C\in\Lambda} C \subseteq B \subseteq \bigcap_{C\in\Lambda} C.$$

(ii) A álgebra $K\langle X\rangle$ é gerada por X. A argumentação é similar a do item anterior.

(iii) Seja $n \in \mathbb{N}$, consideremos a álgebra $M_n(K)$ e $S = \{e_{ij} \mid j \geq i\}$. Então a subálgebra de $M_n(K)$ gerada por S é $UT_n(K)$.

(iv) Seja A uma álgebra e $\mathscr{G} : A = \bigoplus\limits_{g\in G} A_g$ uma G-graduação para A. Considerando $S = \bigcup\limits_{g\in supp\mathscr{G}} A_g$, então a subálgebra de A gerada por S é A.

A seguir apresentamos o conceito de álgebra livre em uma classe de álgebras.

Definição 1.57 (Definition 1.2.1, página 9 de [11]) *Seja $\mathscr{A}$ uma classe de álgebras. Dada $F \in \mathscr{A}$ uma álgebra gerada por um conjunto X, dizemos que F é uma álgebra livre na classe $\mathscr{A}$, livremente gerada por X, se para qualquer álgebra $A \in \mathscr{A}$, toda função $X \longrightarrow A$ pode ser estendida para um homomorfismo de álgebras $F \longrightarrow A$. A cardinalidade $\mid X \mid$, é chamada de posto de F.*

Um exemplo de uma álgebra livre, pode ser construída a partir de $K\langle X\rangle$ onde $G = \{1\}$. Basta ver uma álgebra associativa A qualquer como $A = A_1$. Assim $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas, livremente gerada por X e com posto $\mid X \mid = \mid \mathbb{N} \mid$. Note também que se tivéssemos construído $K\langle X\rangle$ com unidade e com $G = \{1\}$, como na ***Observação 1.54*** teríamos uma álgebra livre na classe das álgebras associativas e unitárias. Vejamos exemplos de álgebras livres nas classes das álgebras de Lie e álgebras de Jordan especiais.

Definição 1.58 *Definamos $L(X)$ como sendo a subálgebra da álgebra de Lie $K\langle X\rangle^{(-)}$, gerada por X.*

Uma importante propriedade de $L(X)$ é a seguinte.

Teorema 1.59 (Theorem 1.3.5 (Witt) página 14 de [11]) *Considere $K\langle X\rangle$ com unidade e $G = \{1\}$. A subálgebra $L(X)$ da álgebra $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada pelo conjunto X, é isomorfa a uma álgebra F, livre na classe das álgebras de Lie livremente gerada por X. A álgebra envelopante universal da álgebra de Lie $L(X)$ é $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.*

Prova. Uma demonstração pode ser obtida em [11], página 14. ■

Analogamente, assim como criamos a álgebra $L(X)$ para as álgebras de Lie, criaremos para as álgebras de Jordan especiais.

Definição 1.60 (página 7 de [18]) *Fixe $r \in \mathbb{N}^*$ e $G = \{1\}$. Consideremos a álgebra associativa livre G-graduada com unidade, $K\langle X\rangle$, onde $X = X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. Definimos a álgebra de Jordan especial livre com unidade em r geradores livres, como sendo a subálgebra $FSJ^{(r)}$ de $K\langle X\rangle^{(+)}$ gerada pelo conjunto $X \cup \{1\}$.*

O termo *livre* se dá pelo fato de que, dada A uma álgebra associativa com unidade, então toda função $\varphi : X \longrightarrow A^{(+)}$ pode ser estendida como um homomorfismo de álgebras $\Phi : FSJ^{(r)} \longrightarrow A^{(+)}$, tal que Φ estende φ e $\Phi(1) = 1$. Também poderíamos ter definido $FSJ^{(r)}$ sem unidade, e portanto $FSJ^{(r)}$ seria livre na classe das álgebras de Jordan especiais, livremente gerada por $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$.

Claramente podemos definir FSJ^{gr} como sendo a subálgebra de $K\langle X\rangle^{(+)}$ gerada por X, onde G é um grupo abeliano qualquer e $X_g = \{x_n^{(g)} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Assim teríamos um análogo a álgebra associativa livre G-graduada para álgebras de Jordan especiais. Assim temos propriedades semelhantes para $K\langle X\rangle, L(X)$ e FSJ^{gr}, no quesito de estender homomorfismos graduados, respectivamente cada um em sua classe de álgebras.

Como prometido, apresentaremos um exemplo de uma álgebra de Jordan excepcional.

Teorema 1.61 (Theorem 2, página 11 de [18]) *Seja $FSJ^{(3)}$ a álgebra de Jordan especial livre em três geradores x, y e z. Seja R o ideal de $FSJ^{(3)}$ gerado pelo conjunto unitário $\{x \circ x - y \circ y\}$, então a álgebra quociente $FSJ^{(3)}/R$ é uma álgebra de Jordan excepcional.*

Prova. Uma demonstração pode ser encontrada em [18] na página 11. ■

Na próxima seção definiremos objetos que serão estudados nesse trabalho

1.11 Identidades graduadas para álgebras associativas

Nesta seção faremos algumas das definições mais importantes do trabalho, momentaneamente para álgebras associativas. Portanto nesta seção, a menos de menção contrária a álgebra A denotará uma álgebra associativa. Muitas das definições dependem da G-graduação de A. Por isso convém denotarmos por $(A,\mathscr{G})$ a álgebra A com uma G-graduação $\mathscr{G} : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, quando necessário. Definamos o ideal das identidades polinomiais graduadas

Definição 1.62 (página 66 de [15]) *Consideremos $(A,\mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Seja Ψ o conjunto de todos os homomorfismos de álgebras graduados $\psi : K\langle X\rangle^{gr} \longrightarrow (A,\mathscr{G})$. Definimos o ideal das identidades polinomiais G-graduadas de A como*

$$Id^{gr}(A) = \bigcap_{\psi\in\Psi} Ker\psi.$$

Fixado $(A,\mathscr{G})$, cada polinômio $f = f(x_{i_1}^{g_1},\ldots,x_{i_m}^{g_m}) \in K\langle X\rangle^{gr}$, pode ser visto como uma função $f : A_{g_1}\times A_{g_2}\times\cdots\times A_{g_m} \longrightarrow A$, onde dado $(a_1,\ldots,a_m)\in A_{g_1}\times A_{g_2}\times\cdots\times A_{g_m}$ trocamos a variável $x_{i_p}^{g_p}$ por a_p e as justaposições das variáveis viram a multiplicação da álgebra A. Desta forma temos

$$Id^{gr}(A) = \{f\in K\langle X\rangle^{gr} \mid f\equiv 0\}.$$

Caso $G=\{1\}$ e A associativa, temos apenas a decomposição trivial de $A = A_1$, denotamos $Id^{gr}(A) = T(A)$, e chamamos $f\in T(A)$ de uma identidade ordinária de A. Assim quando for referido ao "caso ordinário" estamos nos referindo ao caso em que $G=\{1\}$.

Notação 1.63 *Ao nos referirmos ao "caso ordinário", estamos nos referindo ao caso em que $K\langle X\rangle$ é construída com o grupo trivial $G_0=\{1\}$. Denotaremos as varáveis $x_i^{(1)}$ apenas por x_i e X por X_0. Consequentemente denotamos $K\langle X\rangle$ por $K\langle X_0\rangle$. Como $G_0=\{1\}$, dada uma álgebra A qualquer, a única decomposição possível de A é $A=A_1$, assim denotemos a única G_0-graduação por $\mathscr{G}_0$. Por fim, denotamos $Id^{gr}(A)=T(A)$, com a graduação de $\mathscr{G}_0$ de uma álgebra associativa A.*

Uma importante propriedade que $Id^{gr}(A)$ possui, é a seguinte:

Proposição 1.64 *Sejam G um grupo, $(A,\mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada e $\varphi : K\langle X\rangle^{gr} \longrightarrow K\langle X\rangle^{gr}$ um endomorfismo graduado, então $\varphi(Id^{gr}(A)) \subseteq Id^{gr}(A)$.*

Prova. Dado $h \in \varphi(Id^{gr}(A))$, basta mostrarmos que $\psi(h) = 0$ para todo homomorfismo graduado $\psi : K\langle X\rangle^{gr} \longrightarrow A$. Com efeito, como $h \in \varphi(Id^{gr}(A))$, existe $f \in Id^{gr}(A)$ tal que $h = \varphi(f)$. Dado $\psi : K\langle X\rangle^{gr} \longrightarrow A$ um homomorfismo graduado. Sabemos que $\psi \circ \varphi : K\langle X\rangle^{gr} \longrightarrow A$ é também um homomorfismo graduado (item (vi) do ***Exemplo 7***). Daí $\psi \circ \varphi(f) = 0$, pois $f \in Id^{gr}(A)$. Portanto $\psi(h) = \psi(\varphi(f)) = 0$. ■

Portanto se $(A,\mathscr{G})$ é uma álgebra associativa G-graduada, temos que $Id^{gr}(A)$ é invariante sob todos os endomorfismos graduados de $K\langle X\rangle^{gr}$. Em particular no caso ordinário, ($G = G_0 = \{1\}$), então $T(A)$ é invariante sob todos os endomorfismos da álgebra $K\langle X_0\rangle$.

Ainda no caso ordinário, note que $K\langle X_0\rangle$ será uma álgebra livre, livremente gerada por X_0, na classe das álgebras associativas. Com essas notações temos que se G é um grupo e $\mathscr{G}$ é uma G-graduação de A, então $f \in Id^{gr}(A) \subseteq K\langle X\rangle^{gr}$ é uma identidade polinomial graduada de A. Enquanto $g \in T(A) \subseteq K\langle X_0\rangle$ será dita uma identidade polinomial ordinária de A. Em particular toda identidade polinomial ordinária é uma identidade polinomial graduada, tomando a graduação pelo grupo trivial unitário $G_0 = \{1\}$.

Vejamos o seguinte resultado que será importante para nosso trabalho

Lema 1.65 *Sejam $A = \underset{g\in G}{\oplus} A_g$ e $B = \underset{g\in G}{\oplus} B_g$ álgebras associativas G-graduadas. Se existir $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo graduado injetor, então $Id^{gr}(B) \subseteq Id^{gr}(A)$.*

Prova. Suponha que $\varphi : A \longrightarrow B$ seja um homomorfismo graduado injetor. Tomemos $f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, \ldots, x_{i_m}^{(g_m)}) \in Id^{gr}(B)$, dados $a_1, \ldots, a_m \in A$ tais que $a_i \in A_{g_i}$. Como φ é graduado temos $\varphi(a_i) \in B_{g_i}$, daí

$$0 = f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)) = \varphi(f(a_1, \ldots, a_m)).$$

Assim $f(a_1, \ldots, a_m) \in Ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$. Como φ é uma transformação linear injetora, temos $Ker\varphi = \{0\}$ e portanto $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$. Donde segue que $f \in Id^{gr}(A)$. ■

Um claro exemplo de aplicação deste resultado é quando $(B, \mathscr{G})$ é uma álgebra associativa G-graduada e A é uma subálgebra graduada. Consideremos a G-graduação $\mathscr{H} : A = \underset{g\in G}{\oplus} A \cap B_g$ de A. Então a inclusão $a \mapsto a$ de A em B é um homomorfismo graduado e injetor, logo $Id^{gr}(B) \subseteq Id^{gr}(A)$.

Em particular, para o caso ordinário, temos que se B é uma álgebra associativa e A é uma subálgebra de B, temos $T(B) \subseteq T(A)$, em $K\langle X_0\rangle$. Isto é nítido, afinal se f se anula em substituições por elementos de B, em particular pelos elementos de A, que também estão em B.

Temos um resultado análogo para o caso em que φ seja sobrejetiva.

Lema 1.66 *Sejam $A = \underset{g\in G}{\oplus} A_g$ e $B = \underset{g\in G}{\oplus} B_g$ álgebras associativas G-graduadas. Se existir $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo graduado sobrejetor, então $Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B)$.*

Prova. Suponha que $\varphi : A \longrightarrow B$ seja um homomorfismo graduado injetor. Tomemos $f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, \ldots, x_{i_m}^{(g_m)}) \in Id^{gr}(A)$. Dados $b_1, \ldots, b_m \in B$ tais que $b_i \in B_{g_i}$, como φ é sobrejetor e graduado, existem $a_i \in A_{g_i}$ tais que $\varphi(a_i) = b_i$ daí

$$f(b_1, \ldots, b_m) = f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)) = \varphi(f(a_1, \ldots, a_m)) = \varphi(0) = 0.$$

Portanto $f \in Id^{gr}(B)$ ■

Combinando os dois lemas acima temos

Teorema 1.67 *Sejam $A = \underset{g\in G}{\oplus} A_g$ e $B = \underset{g\in G}{\oplus} B_g$ álgebras associativas G-graduadas. Se existir $\varphi : A \longrightarrow B$ um isomorfismo graduado, então $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(B)$.*

Prova. Como φ é injetor temos $Id^{gr}(B) \subseteq Id^{gr}(A)$, e como φ é também sobrejetor, temos $Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B)$. Portanto $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(B)$. ■

Assim, dada uma álgebra associativa A e um grupo G. Dadas $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$, G-graduações de A tais que $(A, \mathscr{G}) \cong (A, \mathscr{H})$, então $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ determinam o mesmo ideal de identidades graduadas.

Veremos na próxima seção, alguns exemplos de identidades polinomiais para álgebras associativas.

1.12 Polinômios multilineares e codimensões graduadas para álgebras associativas

Nesta seção, continuaremos supondo que A é uma álgebra associativa, a menos de menção contrária. Verificar se um polinômio é uma identidade graduada pode ser difícil, mas para certos polinômios só precisamos considerar substituições das variáveis por elementos da base.

Definição 1.68 *Um polinômio $f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, \ldots, x_{i_m}^{(g_m)}) \in K\langle X\rangle$ é dito multilinear nas variáveis $x_{i_1}^{(g_1)}, \ldots, x_{i_m}^{(g_m)}$ (distintas) se é da forma*

$$f = \sum_{\sigma \in S_m} \lambda_\sigma x_{i_{\sigma(1)}}^{(g_{\sigma(1)})} x_{i_{\sigma(2)}}^{(g_{\sigma(2)})} \cdots x_{i_{\sigma(m)}}^{(g_{\sigma(m)})},$$

onde S_m é o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, m\}$ e $\lambda_\sigma \in K$, para cada $\sigma \in S_m$.

Uma propriedade importante desses polinômios é que se $f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, \ldots, x_{i_m}^{(g_m)}) \in K\langle X\rangle$, é multilinear, então a função $f : A_{g_1} \times A_{g_2} \times \cdots \times A_{g_m} \longrightarrow A$ definida por f, é uma aplicação multilinear do espaço vetorial produto $A_{g_1} \times A_{g_2} \times \cdots \times A_{g_m}$ no espaço vetorial A, onde $(A, \mathscr{G})$ é uma álgebra associativa G-graduada, isto é, fixado $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ temos

$$f(a_1, \ldots, a_j + \lambda a_j', \ldots, a_m) = f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_m) + \lambda f(a_1, \ldots, a_j', \ldots, a_m)$$

para todos $a_i \in A_{g_i}$, $\lambda \in K$ e $a_j' \in A_{g_j}$.

Para mostrar que um polinômio multilinear é identidade, é suficiente verificar que o resultado de qualquer substituição das variáveis por elementos de um conjunto gerador do espaço base da álgebra é zero.

Proposição 1.69 *Seja $(A, \mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada e seja $f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, \ldots, x_{i_m}^{(g_m)}) \in K\langle X\rangle^{gr}$ um polinômio multilinear. Temos que f é uma identidade polinomial G-graduada para $(A, \mathscr{G})$ se, e somente se, $f(v_1, \ldots, v_m) = 0$, para quaisquer $v_i \in S_i$, onde S_i é um conjunto gerador do subespaço A_{g_i}.*

Prova. A implicação é clara, provemos então a recíproca. Sejam S_i conjuntos geradores para os espaços vetoriais A_{g_i}. Suponha que $f(v_1, \ldots, v_m) = 0$, para todos $v_i \in S_i$. Dados $a_i \in A_{g_i}$, existem $\lambda_{li} \in K$, $n_i \in \mathbb{N}$ e $v_{li} \in S_i$ tas que

$$a_i = \sum_{l_i=1}^{n_i} \lambda_{l_i,i} v_{l_i,i}$$

portanto

$$f(a_1,\ldots,a_m)=\sum_{l_1=1}^{n_1}\sum_{l_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{l_m=1}^{n_m}\lambda_{l_11}\lambda_{l_22}\cdots\lambda_{l_mm}f(v_{l_11},v_{l_22},\ldots,v_{l_mm})=0.$$

■

Exemplo 11 *São exemplos de identidades polinomiais*

(i) Seja $(A,\mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada. Dado $g\in G-supp\mathscr{G}$, então $x_1^{(g)}f\in Id^{gr}(A)$, para todo $f\in K\langle X\rangle^{gr}$.

(ii) Seja A uma álgebra associativa e comutativa, então $[x_1,x_2]$ é uma identidade ordinária. Consequentemente, dada uma G-graduação $\mathscr{G}$ para A, então $[x_1^{(g)},x_1^{(h)}]$, $g,h\in G$, é uma identidade graduada.

(iii) Tomemos $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ e $A=M_2(K)$. Consideremos a G-graduação $\mathscr{G}$ de A definida por

$$A_{(0,0)}=span_K\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad A_{(1,0)}=span_K\left\{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},$$

$$A_{(0,1)}=span_K\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\},\quad A_{(1,1)}=span_K\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

*Como em (viii) do **Exemplo 6**. Note que $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ comutam, portanto o polinômio multilinear $f=x_1^{((0,0))}x_2^{((1,0))}-x_2^{((1,0))}x_1^{((0,0))}$ é uma identidade polinomial G-graduada. Note também que $x_1x_2-x_2x_1$ não é uma identidade ordinária para A. Um exemplo de uma identidade polinomial ordinária que não seja multilinear é o polinômio $h=[[x_1,x_2]^2,x_3]$, que é uma identidade ordinária para A. De fato, para cada $x\in A=M_2(K)$, o teorema de Cayley-Hamilton nos garante que*

$$x^2-tr(x)x+det(x)I=0,$$

onde $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, e $tr(x)$ e $det(x)$ são o traço e o determinante da matriz x, respectivamente. Caso $tr(x)=0$, então $x^2=-det(x)I$, daí $x^2\in Z(A)$ e nesse caso $[x,x_3]=0$ para qualquer $x_3\in A$. Sabemos que a matriz $x_1x_2-x_2x_1$ tem traço nulo para quaisquer $x_1,x_2\in A$, tomemos $x=[x_1,x_2]$. Desta forma $h=[[x_1,x_2]^2,x_3]$ é uma identidade ordinária para A, conhecida como identidade de Hall. Desta forma, para qualquer G-graduação de A, e quaisquer escolhas de $g,h,t\in G$ e $p,q,r\in\mathbb{N}$, temos que $[[x_p^{(g)},x_q^{(h)}]^2,x_r^{(t)}]$ é uma identidade graduada para $A=M_2(K)$.

Uma identidade multilinear que merece destaque para esse trabalho é a seguinte

Proposição 1.70 *Seja N o subespaço vetorial de UT_n formado pelas matrizes triangulares estritamente superiores, que são as matrizes de diagonal nula, isto é, $N = span_K\{e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Então N é subálgebra (ideal) de UT_n, $UJ_n = UT_n^+$ e $UT_n^{(-)}$. Ademais os polinômios $x_1x_2\cdots x_n \in K\langle X_0\rangle$, $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n \in FSJ^n$ e $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in L(X_0)$ são identidades polinomiais para N.*

Prova. Seja $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$. Sabemos que $e_{ij}e_{pq} = \delta_{jp}e_{iq}$. Para mostrar que N é ideal, basta notar que dadas e_{ij} e e_{pq} com $i \leq j$ e $p < q$ segue que $e_{ij}e_{pq}$ e $e_{pq}e_{ij}$ pertencem a N. Como $\beta = \{e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ é uma base para N, então $x * y \in N$ para todos $x, y \in N$, onde $*$ representa qualquer uma das três operações $\cdot, \circ$ e $[\cdot,\cdot]$. Mostremos que $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$ é uma identidade para N, caso associativo. Para isso, como f é multilinear, basta verificar que $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$ para todos $b_i \in \beta$. Suponha por absurdo que existam $e_{i_1j_1}, e_{i_2j_2}, \ldots, e_{i_nj_n} \in \beta$ tais que $f(e_{i_1j_1}, e_{i_2j_2}, \ldots, e_{i_nj_n}) \neq 0$. Temos

$$0 \neq e_{i_1j_1}e_{i_2j_2}e_{i_3j_3}\cdots e_{i_nj_n} = \delta_{j_1i_2}\delta_{j_2i_3}\cdots\delta_{j_{n-1}i_n}e_{i_1j_n}.$$

Dessa forma devemos ter $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \ldots, j_{n-1} = i_n$. Daí

$$j_n > i_n = j_{n-1} > i_{n-1} = j_{n-2} > \cdots > i_3 = j_2 > i_2 = j_1 > i_1$$

$$j_n > i_n > i_{n-1} > \ldots > i_2 > i_1.$$

Concluímos que o inteiro positivo j_n é maior que outros n inteiros positivos distintos, donde segue que $j_n \geq n + 1$ o que é um absurdo pois contraria o fato de que $j_n \leq n$. Portanto o produto associativo de quaisquer n elementos de N é nulo, devido a isto, temos que $[x_1, \ldots, x_n]$ e $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$ também se anulam para qualquer substituição dos x_i por elementos de N. ■

Vale observar que

$$e_{12}e_{23}e_{34}\cdots e_{n-2,n-1}e_{n-1,n} = e_{1n} \neq 0$$

e portanto $x_1x_2\cdots x_k$, com $1 \leq k \leq n-1$ não é uma identidade polinomial para N. Ademais como UT_n tem unidade, temos que $x_1x_2\cdots x_k$ não é uma identidade para UT_n para todos $n, k \in \mathbb{N}^*$.

Os polinômios multilineares e o subespaço gerado por polinômios deste tipo num conjunto fixo de variáveis serão importantes e a seguinte definição utiliza tais conceitos.

Definição 1.71 (Página 97 de [15]) *Seja G um grupo, fixado $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$, todos os polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$ nas variáveis $x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, \ldots, x_m^{(a_m)}$ formam um subespaço denotado por*

$$P_m^{(a_1,a_2,\ldots,a_m)} = span_K\{x_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)})} x_{\sigma(2)}^{(a_{\sigma(2)})} \cdots x_{\sigma(m)}^{(a_{\sigma(m)})} \mid \sigma \in S_m\}$$

que também pode ser denotado por P_m^a. Definimos também, no caso de $(A, \mathscr{G})$ ser uma álgebra associativa G-graduada

$$P_m^a(A) = P_m^a/(P_m^a \cap Id^{gr}(A)).$$

Note que $\dim P_m^{(a_1,\ldots,a_m)} = m!$. Ainda a respeito dos polinômios multilineares definimos:

Definição 1.72 *Seja G um grupo, denotamos por P_m^G o subespaço com base*

$$\{x_{\sigma(1)}^{(g_1)} x_{\sigma(2)}^{(g_2)} \cdots x_{\sigma(m)}^{(g_m)} \mid \sigma \in S_m, g_1, \ldots, g_m \in G\}.$$

Note que com essas definições temos $P_m^G = \bigoplus_{a \in G^m} P_m^a$. Vale salientar que embora possa parecer contraditório, nem todos os polinômios de P_m^G são multilineares, por exemplo, tomemos $G = \{1, g\}$ um grupo com 2 elementos e $m = 2$, então $f = x_1^{(1)} * x_2^{(1)} + x_1^{(g)} * x_2^{(g)} \in P_2^G$, mas f não é um polinômio multilinear.

Com isso definimos as codimensões de uma álgebra graduada como:

Definição 1.73 (Página 97 de [15]) *Sejam G um grupo e $(A, \mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada. Fixado $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$, definimos a m-ésima codimensão homogênea associada a $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ como sendo*

$$c_m^{(a_1,a_2,\ldots,a_m)}(A) = dim \frac{P_m^{(a_1,a_2,\ldots,a_m)}}{P_m^{(a_1,a_2,\ldots,a_m)} \cap Id^{gr}(A)} = dim P_m^a(A).$$

Sejam G um grupo, $(A, \mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada e $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$. Note que a intersecção

$$P_m^{(a_1,a_2,\ldots,a_m)} \cap Id^{gr}(A)$$

consiste de todas as identidades graduadas multilineares de A nas variáveis $x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, \ldots, x_m^{(a_m)}$.

Enunciaremos uma importante observação em forma de teorema, para isso vamos adaptar momentaneamente a notação para enunciarmos o resultado denotando por $c_m^a(A, \mathscr{G})$ a m-ésima codimensão homogênea associada a $a \in G^m$ da álgebra associativa G-graduada $(A, \mathscr{G})$.

Teorema 1.74 *Sejam A uma álgebra associativa e G um grupo. Suponha que $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ são G-graduações para A tais que $(A,\mathscr{G}) \simeq (A,\mathscr{H})$. Então $c_m^a(A,\mathscr{G}) = c_m^a(A,\mathscr{H})$ para todos $m \in \mathbb{N}^*$ e $a \in G^m$.*

Prova. Segue direto do ***Teorema 1.67***. ■

Também definimos a sequência de codimensões graduadas de uma álgebra graduada da seguinte forma:

Definição 1.75 (Definition 10.5.1, págima 268 de [15]) *Sejam G um grupo e $(A,\mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada, definimos a m-ésima codimensão graduada de $(A,\mathscr{G})$ como sendo*

$$c_m^G(A) = dim\frac{P_m^G}{P_m^G \cap Id^{gr}(A)}.$$

Analogamente, por ora, denotando por $c_m^G(A,\mathscr{G})$ a m-ésima codimensão graduada de uma álgebra associativa G-graduada $(A,\mathscr{G})$, temos

Teorema 1.76 *Sejam A uma álgebra associativa e G um grupo. Suponha que $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ são G-graduações para A tais que $(A,\mathscr{G}) \simeq (A,\mathscr{H})$. Então $c_m^G(A,\mathscr{G}) = c_m^G(A,\mathscr{H})$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$.*

Prova. Segue direto do ***Teorema 1.67***. ■

Observação 1.77 *Caso $(A,\mathscr{G})$ seja uma álgebra associativa G-graduada, onde G é um grupo finito, há uma maneira de relacionar as identidades ordinárias de A e as graduadas. Com efeito, para todo $i = 1,2,\ldots,$ defina*

$$x_i = \sum_{g\in G} x_i^{(g)}$$

o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\}$ gera a álgebra associativa livre de posto enumerável $K\langle X_0\rangle$. Ademais dado $f \in K\langle X_0\rangle$, f é uma identidade ordinária se, e somente se, $f(x_1,\ldots,x_n) \in Id^{gr}(A)$. De fato, caso $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X_0\rangle$ seja uma identidade ordinária, claramente $f(x_1,\ldots,x_n) \in Id^{gr}(A)$. Reciprocamente suponha que $f(x_1,\ldots,x_n) \in Id^{gr}(A)$, note que fazendo substituições em $\sum_{g\in G} x_i^{(g)}$ por elementos homogêneos, podemos construir todos os elementos de A, e o resultado da avaliação por $f(x_1,\ldots,x_n)$ será sempre nulo.

No caso particular de $G_0 = \{1\}$, temos

$$P_m := P_m^{G_0} = P_m^{(1,1,\ldots,1)} = span_K\{x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)} \mid \sigma \in S_m\}$$

Denotamos $c_m^{G_0}(A)$, simplesmente por $c_m(A)$, e chamamos $c_m(A)$ de codimensão ordinária de A.

Exemplo 12 *São exemplos de codimensões*

(i) Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Seja N a subálgebra de UT_n gerada pelas matrizes $\{e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. De acordo com a ***Proposição 1.70*** *temos que $c_m(N) = 0$ para todo $m \geq n$.*

(ii) Seja A uma álgebra associativa e comutativa, então $c_m(A) \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$. De fato note que $x_1x_2 - x_2x_1 \in T(A)$. Fixados $i, j \in \mathbb{N}^*$ distintos, então a aplicação $\varphi_{ij} : X \longrightarrow X$ que permuta x_i com x_1; x_2 com x_j e preserva como ponto fixo as demais variáveis, se estende a um endomorfismo em $K\langle X_0\rangle$ e temos que $\varphi_{ij}(f) \in T(A)$ para todo $f \in T(A)$. Em particular $\varphi_{ij}(x_1x_2 - x_2x_1) \in T(A)$. Isto quer dizer que em $K\langle X_0\rangle/T(A)$ temos

$$\overline{x_i} \cdot \overline{x_j} = \overline{x_j} \cdot \overline{x_i}$$

portanto

$$\overline{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)}} = \overline{x_1x_2 \cdots x_m}$$

em $P_m(A)$, para todo $\sigma \in S_m$. Logo $\dim P_m(A) \leq 1$, para todo $m \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Supondo $charK = 0$, então $T(UT_2)$ é a intersecção de todos ideais de $K\langle X_0\rangle$ que são invariantes sob endomorfismos da álgebra $K\langle X_0\rangle$ e que contem o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$, e $c_m(UT_2) = 2^{m-1}(m-2) + 2$. Uma demonstração para estas afirmações pode ser encontrada em [15], página 88, Theorem 4.1.5.

Vejamos algumas propriedades envolvendo $c_m^G(A)$, $dimP_m^a(A)$ e $c_m(A)$. Para isso abordemos alguns resultados para $K\langle X_0\rangle$. Abordaremos o caso ordinário por simplicidade, os resultados poderão ser estendidos para o caso $K\langle X\rangle$ com um grupo G qualquer.

Definição 1.78 (Definition 1.2.7, página 10 de [12]) *Um polinômio*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum \alpha_i x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{d_i}} \in K\langle X_0\rangle, \alpha_i \in K$$

é dito homogêneo de grau d se todos os monômios $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_{d_i}}$ com coeficientes não nulos apresentam d variáveis, isto é $d_i = d$ para todo i. Também dizemos que $f(x_1, \ldots, x_m)$ é multi homogêneo de multigrau $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ se cada x_j aparece o mesmo número de vezes t_j em cada monômio.

Note que os polinômios multilineares são polinômios multi homogêneos de multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$. Dado $f \in K\langle X_0\rangle$, seja x_k uma variável que aparece em f, digamos que o maior número de vezes que x_k aparece em um monômio de f é d, então podemos

decompor f como uma soma $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$, onde f_i é a soma de todos os monômios de f tais que a variável x_k aparece i vezes, chamemos cada f_i de componente homogênea de f de grau i em x_k. Utilizando essa notação, enunciamos o seguinte resultado:

Proposição 1.79 (Proposition 1.2.8, página 11 de [12]) *Seja*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{d} f_i \in K\langle X_0 \rangle$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_k.

(i) Se K contém mais do que d elementos (em nosso trabalho isso será satisfeito pois consideraremos K um corpo infinito), se $f \in T(A)$ para alguma álgebra associativa A, então $f_i \in T(A)$, $i = 0, 1, \ldots, d$.

(ii) Se K tem característica 0 (ou se $charK$ for maior do que o grau de f), então dada A uma álgebra associativa, temos que $f \in T(A)$ se, e somente se, um certo conjunto de polinômios multilineares obtidos de f, também estão em $T(A)$.

Prova.

(i) Suponha que K é infinito e que $f \in T(A)$ para alguma álgebra associativa A. Note que fixado $\lambda \in K$, a aplicação $\phi : X_0 \longrightarrow X_0$ tal que $\phi(x_j) = x_j$ para $j \neq k$ e $\phi(x_k) = \lambda x_k$ estende um homomorfismo em $K\langle X_0 \rangle$. Como $T(A)$ é invariante sob todos os homomorfismos de $K\langle X_0 \rangle$ em si próprio, então $\phi(f) \in T(A)$. Como K é infinito, podemos escolher $d+1$ elementos distintos $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d$ em K, assim como já observado, temos

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi_j x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} \xi_j^i f_i(x_1, \ldots, x_m) \in T(A),$$

onde $j = 0, 1, \ldots, d$.

Consideremos o quociente $K\langle X_0 \rangle / T(A)$. Para cada $g \in K\langle X_0 \rangle$, denotemos apenas por g o elemento $\overline{g} = g + T(A)$ em $K\langle X_0 \rangle / T(A)$. Com essa notação, devemos mostrar que $f_i = 0$. Dessa forma temos $\sum_{i=0}^{d} \xi_j^i f_i = 0$ para cada $j = 0, 1, \ldots, d$, o que nos dá o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f_0 + \xi_0 f_1 + \xi_0^2 f_2 + \cdots + \xi_0^{d-1} f_{d-1} + \xi_0^d f_d = 0 \\ f_0 + \xi_1 f_1 + \xi_1^2 f_2 + \cdots + \xi_1^{d-1} f_{d-1} + \xi_1^d f_d = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_0 + \xi_d f_1 + \xi_d^2 f_2 + \cdots + \xi_d^{d-1} f_{d-1} + \xi_d^d f_d = 0 \end{cases}$$

Em forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \cdots & \xi_0^d \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_d & \xi_d^2 & \cdots & \xi_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por Vandermonde o determinante da matriz dos coeficientes é

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \cdots & \xi_0^d \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_d & \xi_d^2 & \cdots & \xi_d^d \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (\xi_j - \xi_i),$$

como tomamos todos os ξ_j distintos, temos que $\prod_{i<j}(\xi_j - \xi_i) \neq 0$, e portanto a matriz dos coeficientes é inversível e consequentemente $f_i = 0$ para cada $i = 0, 1, \ldots, d$.

(ii) Não demonstraremos o segundo item, mas os polinômios multilineares em questão são obtidos por meio do processo de multilinearização de f que junto com a demonstração de (ii) pode ser vista em [12], página 11, Proposition 1.2.8.

■

Podemos adaptar a proposição acima para $K\langle X\rangle$, pois para cada $\lambda \in K$, $g_0 \in G$ e $k \in \mathbb{N}^*$ fixos, a função $\phi : X \longrightarrow X$ dada por $\phi(x_i^{(h)}) = x_i^{(h)}$ para $h \neq g_0$ ou $i \neq k$ e $\phi(x_k^{(g_0)}) = \lambda x_k^{(g_0)}$, então a extensão de ϕ a um homomorfismo é um homomorfismo graduado, e usaremos o fato de que $Id^{gr}(A)$ é invariante por homomorfismos graduados.

Estamos prontos para relacionar os dois conceitos de codimensão graduada apresentados.

Teorema 1.80 *Sejam G um grupo e $(A, \mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada, então $P_m^G(A)$ é um espaço vetorial isomorfo a soma direta externa dos espaços vetoriais $P_m^a(A)$, com $a \in G^m$. Consequentemente para cada $m \in \mathbb{N}^*$ segue que*

$$c_m^G(A) = \sum_{a \in G^m} \dim P_m^a(A)$$

quando a soma da direita fizer sentido.

Prova. Considere o espaço vetorial quociente $K\langle X\rangle/Id^{gr}(A)$ e seus subespaços $(P_m^G + Id^{gr}(A))/Id^{gr}(A)$ e $(P_m^a + Id^{gr}(A))/Id^{gr}(A)$, $a \in G^m$. Mostremos que

$$\frac{P_m^G + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)} = \bigoplus_{a\in G^m} \frac{P_m^a + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)}.$$

Inicialmente, mostremos que a soma da direita é direta. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_p \in G^m$ suponha que $f_i \in P_m^{a_i}$ e $g_i \in Id^{gr}(A)$ são tais que

$$\overline{f_1 + g_1} + \overline{f_2 + g_2} + \cdots + \overline{f_p + g_p} = \overline{0}$$

logo

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p \in Id^{gr}(A).$$

Denotemos $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_p$, como os polinômios f_i são multilineares e L.I., eles determinam componentes multihomogêneas diferentes do polinômio f. Portanto, como $f \in Id^{gr}(A)$, pela ***Proposição 1.79***, temos que $f_i \in Id^{gr}(A)$ e portanto $\overline{f_i + g_i} = \overline{0}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, p$. Logo a soma em questão é de fato direta. Ademais, como $P_m^G = \sum_{a\in G^m} P_m^a$ é claro que $(P_m^G + Id^{gr}(A))/Id^{gr}(A) = \sum_{a\in G^m}(P_m^a + Id^{gr}(A))/Id^{gr}(A)$. Logo

$$\frac{P_m^G + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)} = \bigoplus_{a\in G^m} \frac{P_m^a + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)},$$

De acordo com o ***Corolário 1.16***, para $P \in \{P_m^G, P_m^a\}$ segue que

$$\frac{P + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)} \simeq \frac{P}{P \cap Id^{gr}(A)}.$$

portanto

$$P_m^G(A) \simeq \bigoplus_{a\in G^m} P_m^a(A).$$

Ademais

$$\dim \frac{P + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)} = \dim \frac{P}{P \cap Id^{gr}(A)},$$

portanto

$$\dim \frac{P_m^G + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)} = \sum_{a\in G^m} \dim \frac{P_m^a + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)}.$$

Concluímos que

$$c_m^G(A) = \sum_{a\in G^m} \dim P_m^a(A).$$

■

Uma relação entre a codimensão ordinária e as codimensões homogêneas, no caso em que G é um grupo finito é a seguinte

Proposição 1.81 (Página 268 de [15]) *Sejam G um grupo finito e $(A,\mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada, temos*

$$c_m(A) \leq \sum_{(a_1,\ldots,a_m)\in G^m} c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(A) \qquad e \qquad c_m^G(A) \leq \mid G \mid^m c_m(A)$$

Prova. Para cada $a=(a_1,\ldots,a_m)\in G^m$, fixe uma base $\mathscr{B}^{(a_1,\ldots,a_m)}$ do espaço vetorial $(P_m^a + Id^{gr}(A))/Id^{gr}(A)$, tomemos $\mathscr{B} = \underset{a\in G^m}{\cup} \mathscr{B}^{(a_1,\ldots,a_m)}$. Pelo ***Corolário 1.16*** temos

$$\mid \mathscr{B}^{(a_1,\ldots,a_m)} \mid = \dim \frac{P_m^a + Id^{gr}(A)}{Id^{gr}(A)} = \dim \frac{P_m^a}{P_m^a \cap Id^{gr}(A)} = c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(A).$$

Dessa forma $k_m = \mid \mathscr{B} \mid$ é tal que $k_m = \sum_{a\in G^m} c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(A)$. Como na ***Observação 1.77***, para cada $i\in\mathbb{N}$ definamos

$$x_i = \sum_{g\in G} x_i^{(g)},$$

a subálgebra de $K\langle X\rangle$ gerada por $\{x_1,x_2,\ldots\}$ é isomorfa a $K\langle X_0\rangle$.

Seja W_m o subespaço de $K\langle X\rangle/Id^{gr}(A)$ gerado por $\mathscr{B}$, temos $\dim W_m \leq k_m$. Por outro lado, qualquer polinômio multilinear f nas variáveis $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ é tal que $\overline{f}\in W_m$. Segue que quaisquer k_m+1 polinômios multilineares nas variáveis $x_1,\ldots,x_m$ são tais que suas classes de equivalência estão em W_m e portanto são L.D. em $K\langle X\rangle/Id^{gr}(A)$. Logo $c_m(A)\leq K_m$.

Vamos provar a segunda desigualdade. Para cada $a=(a_1,\ldots,a_m)\in G^m$, mostremos que $c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(A)\leq c_m(A)$. Sejam

$$P_m = span_K\{x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)} \mid \sigma\in S_m\} \text{ e } P_m^a = span_K\{x_{\sigma(1)}^{(a_1)}\cdots x_{\sigma(m)}^{(a_m)} \mid \sigma\in S_m\},$$

subespaços de $K\langle X_0\rangle$ e de $K\langle X\rangle$, respectivamente. Considere a transformação linear $\psi: P_m \longrightarrow P_m^a$ que satisfaz

$$\psi(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)}) = x_{\sigma(1)}^{(a_1)}\cdots x_{\sigma(m)}^{(a_m)}.$$

Temos que ψ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Consideremos a aplicação de $P_m(A) = P_m/(P_m\cap T(A))$ em $P_m^a(A) = P_m^a/(P_m^a\cap Id^{gr}(A))$ definida por

$$f + P_m\cap T(A) \mapsto \psi(f) + P_m^a \cap Id^{gr}(A).$$

A aplicação acima está bem definida. De fato, suponha que $f,g\in P_m$ sejam tais que $f-g\in T(A)$, então claramente $\psi(f)-\psi(g)=\psi(f-g)\in Id^{gr}(A)$, (pois se $f-g$

se anula para quaisquer substituições de elementos de A, em particular por elementos homogêneos). Logo

$$f + P_m \cap T(A) = g + P_m \cap T(A) \quad \Longrightarrow \quad \psi(f) + P_m^a \cap Id^{gr}(A) = \psi(g) + P_m^a \cap Id^{gr}(A).$$

O que concluí a boa definição da aplicação. Ademais $f + P_m \cap T(A) \mapsto \psi(f) + P_m^a \cap Id^{gr}(A)$ é claramente uma transformação linear sobrejetora. Logo $c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(A) = \dim P_m^a(A) \leq dim P_m(A) = c_m(A)$. Portanto

$$c_m^G(A) = \sum_{a \in G^m} c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(A) \leq \sum_{a \in G^m} c_m(A) = \mid G \mid^m c_m(A).$$

■

Analisando a demonstração da proposição acima obtemos o corolário a seguir.

Corolário 1.82 *Sejam G um grupo qualquer e $(A, \mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada. Então*

$$c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(A) \leq c_m(A)$$

para todo $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G^m$.

Prova. Na demonstração da proposição anterior não foi necessário a finitude de G para que $c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(A) \leq c_m(A)$. ■

Encerramos esta seção com a definição abaixo:

Definição 1.83 ([23]) *Seja $(A, \mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada, definimos o expoente graduado de A, caso exista, como sendo o limite $exp^G(A) = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m^G(A)}$.*

Seja A uma álgebra associativa, no caso da graduação $\mathscr{G}_0$ de A pelo grupo trivial $G_0 = \{1\}$, que é o caso ordinário, denotamos $exp^{G_0}(A)$ simplesmente por $exp(A)$. Ainda supondo A associativa, lembrando que denotamos por P_m o K-espaço vetorial gerado por todos os polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_m$ na álgebra associativa livre $K\langle X_0\rangle$, e $T(A)$ o ideal das identidades ordinárias de A. Em característica 0 o conjunto $P_m \cap T(A)$ determina $T(A)$. O Teorema de Regev [27] garante que a sequência $(c_m(A))_{m\in\mathbb{N}}$ é exponencialmente limitada para qualquer álgebra associativa A que tenha pelo menos uma identidade ordinária não nula, isto é, existe $d > 0$ tal que $c_m(A) \leq d^m$ para todo m. Como $c_m(A) \leq d^m$ para algum $d > 0$, segue que $\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m(A)} \leq d < \infty$. Assim podemos considerar os limites $0 \leq \liminf\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m(A)} \leq \limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m(A)} < \infty$. Amistur conjecturou que esses limites sempre coincidem, isto é, $\sqrt[m]{c_m(A)}$ converge, e o limite é um inteiro não negativo. Essa conjectura foi confirmada por Giambruno e Zaicev. Esse limite é chamado de PI-expoente de A, e é denotado por $exp(A)$.

1.13 Álgebras relativamente livres

Um conceito que generaliza o de álgebras livres, que nos possibilitam facilitar certos cálculos envolvendo polinômios, é a seguinte:

Definição 1.84 (Definition 2.2.4, página 23 de [11]) *Para um conjunto Y fixado. A álgebra $F_Y(\mathscr{A})$, em uma classe de álgebras $\mathscr{A}$, é dita uma álgebra relativamente livre para $\mathscr{A}$, se $F_Y(\mathscr{A})$ é livre em $\mathscr{A}$ e é livremente gerada por Y. Definimos o posto de $F_Y(\mathscr{A})$ como sendo a cardinalidade $\mid Y \mid$ de Y.*

Caso $\mid Y \mid = m$, denotamos $F_Y(\mathscr{A}) = F_m(\mathscr{A})$. Caso Y seja infinito, denotamos apenas por $F(\mathscr{A})$. O motivo de denotarmos assim é devido ao fato de que a álgebra só depende da cardinalidade de Y, como veremos a seguir. Denotamos por $K\langle Y\rangle$ a álgebra associativa dos polinômios criados a partir dos símbolos de Y.

Proposição 1.85 (Proposition 2.2.5, página 23 de [11]) *Dado um conjunto de polinômios $\{f_i \in K\langle X_0\rangle \mid i \in I\}$, e seja $\mathscr{A}$ a classe de todas as álgebras associativas A que tais que $\{f_i \in K\langle X_0\rangle \mid i \in I\} \subseteq T(A)$. Seja Y um conjunto qualquer e J o ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por*

$$\{f_i(s_1, \ldots, s_{n_i}) \mid s_j \in K\langle Y\rangle, i \in I\}.$$

A álgebra quociente $F = K\langle Y\rangle/J$ é relativamente livre em $\mathscr{A}$, com conjunto livre de geradores $\overline{Y} = \{y + J \mid y \in Y\}$. Quaisquer duas álgebras relativamente livres de $\mathscr{A}$, com o mesmo posto, são isomorfas.

Prova. Inicialmente, mostremos que $F \in \mathscr{A}$. Dado $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, um dos polinômios do conjunto de polinômios mencionado, e sejam $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_n} \in F$, $\overline{s_j} = s_j + J$, $s_j \in K\langle Y\rangle$. Então $f(s_1, \ldots, s_n) \in J$, daí

$$0 = \overline{0} = J = \overline{f_i(s_1, \ldots, s_n)} = f(\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_n}).$$

Portanto f_i é uma identidade polinomial ordinária para F. Daí $F \in \mathscr{A}$.

Provemos agora a propriedade universal de F. Sejam $A \in \mathscr{A}$ e $\phi : \overline{Y} \longrightarrow A$ uma função qualquer. Definimos a aplicação $\theta : Y \longrightarrow A$, por $\theta(y) = \phi(\overline{y})$ e estendemos θ para um homomorfismo (ainda denotado por θ) $\theta : K\langle Y\rangle \longrightarrow A$. Isto é possível, pois $K\langle Y\rangle$ é uma álgebra associativa livre na classe das álgebras associativas, livremente gerada por Y. Para o objetivo de mostrar que ϕ pode ser estendida para um homomorfismo $F \longrightarrow A$, é suficiente mostrar que $J \subseteq Ker(\theta)$. Dado $f \in J$, temos

$$f = \sum_{i \in I} u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_{n_i}}) v_i \qquad g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle Y\rangle.$$

Para $a_1, \ldots, a_{n_i} \in A$, o elemento $f_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ é igual a 0 em A, e isto implica em $\theta(f) = 0$, isto é, $J \subseteq Ker(\theta)$ e $F \simeq F_{\overline{Y}}(\mathscr{A})$ é a álgebra relativamente livre em $\mathscr{A}$, livremente gerada por $\overline{Y}$.

Por fim, suponha que Y e Z são conjuntos com a mesma cardinalidade. Denotemos $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ e $Z = \{z_i \mid i \in I\}$ e sejam $F_Y(\mathscr{A})$ e $F_Z(\mathscr{A})$ as álgebras relativamente livres respectivas. Como as álgebras $F_Y(\mathscr{A})$ e $F_Z(\mathscr{A})$ são relativamente livres, podemos definir homomorfismos

$$\phi : F_Y(\mathscr{A}) \longrightarrow F_Z(\mathscr{A}), \quad \psi : F_Z(\mathscr{A}) \longrightarrow F_Y(\mathscr{A})$$

por $\phi(y_i) = z_i$ e $\psi(z_i) = y_i$. Como as composições $\phi \circ \psi$ e $\psi \circ \phi$ agem como identidades em Y e Z, respectivamente. Logo ϕ e ψ são isomorfismos, e um é o inverso do outro. ■

O trabalho até aqui tem indicado que muitos cálculos serão feitos em álgebras quocientes. Portanto formalizemos nossas notações a respeito disso.

Notação 1.86 *Sejam A uma álgebra e I um ideal da álgebra A. Diremos que $S \subseteq A$ é L.I. (ou L.D.) módulo I se $\overline{S} = \{\overline{s} = s + I \mid s \in S\}$ é L.I (ou L.D.) no espaço quociente A/I. Também dizemos que S gera um subespaço $V \subseteq A$ módulo I se $\overline{S}$ gera o subespaço $\{\overline{v} = v + I \mid v \in V\} = (V + I)/I$ em A/I. Nessas situações, quando conveniente, representamos os elementos $\overline{a} = a + I$, $a \in A$ apenas por a e diremos que os cálculos estão feitos módulo I.*

1.14 Álgebras absolutamente livres e variedades

As definições da seção anterior que dependiam de $K\langle X\rangle$ dependiam da associatividade. Vamos adaptar as definições anteriores para álgebras de Lie e de Jordan especiais. Antes disso, façamos uma breve conversa sobre identidades polinomiais. Para isso, precisamos de uma álgebra polinomial para fazermos substituições. Considere $X = \{x_i^{(g)} \mid i \in \mathbb{N}^*, g \in G\}$, seja $K\{X\}$ o espaço vetorial formado por todas as palavras formadas com as letras de X e com todas as distribuições de parênteses possíveis que façam sentido. Definiremos a multiplicação dessas palavras pela justaposição delas feita colocando-se adequadamente parênteses quando necessário. De modo análogo a construção feita para $K\langle X\rangle$, transformamos $K\{X\}$ em uma álgebra

G-graduada. Porém $K\{X\}$ não é associativa. Analogamente também poderíamos ter construído $K\{X\}$ com unidade adicionando a palavra vazia 1.

Como feito para o caso associativo, o caso em que $G = G_0 = \{1\}$ será chamado de caso ordinário e denotamos $x_i^{(1)}$ por x_i.

Definição 1.87 (Exercise 1.2.4, página 10 de [11]) *A álgebra $K\{X_0\}$ é chamada de álgebra livre não associativa, ou álgebra absolutamente livre. Caso $K\{X_0\}$ seja considerada com unidade, então é chamada de álgebra livre não associativa com unidade.*

É fácil ver que $K\{X_0\}$ é livre, livremente gerada por X_0, na classe de todas as álgebras. Também chamaremos os elementos de $K\{X\}$ de polinômios.

Seja A uma álgebra qualquer e f um elemento de $K\{X_0\}$, dizemos que A satisfaz a identidade f, (e denotamos $f = 0$ em A) ou que f é uma identidade para A se f está no núcleo de todos os homomorfismos de $K\{X_0\}$ em A. Obviamente f está contido em uma subálgebra de $K\{X_0\}$ gerada por um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de X_0, e daí f é combinação linear de produtos de x_i. Por isso escrevemos $f = f(x_1, \ldots, x_m)$. Se $a_1, \ldots, a_m \in A$, então existe um homomorfismo de $K\{X_0\}$ em A tal que $x_i \mapsto a_i$. A imagem de f sob esse homomorfismo é única e é denotada por $f(a_1, \ldots, a_m)$. Logo A satisfaz a identidade f se, e somente se, $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$ para todos $a_i \in A$.

Seja I um subconjunto de $K\{X_0\}$, chamamos a classe $\mathscr{V}(I)$ de todas as álgebras que satisfazem as identidades $f \in I$ de *variedade definida por I*.

Exemplo 13 *São exemplos de variedades*

(i) Seja $f = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$, então a variedade $\mathscr{V}(I)$ definida por $I = \{f\}$ é justamente a classe de todas as álgebras associativas.

(ii) Sejam $f = x_1^2$ e $g = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2$, então a variedade $\mathscr{V}(I)$ definida por $I = \{f, g\}$ é justamente a classe de todas as álgebras de Lie.

(iii) Seja $f = x_1x_2 - x_2x_1$, então a variedade $\mathscr{V}(\{f\})$ é a classe de todas as álgebras comutativas. Considerando $g = (x_1x_2)x_1^2 - x_1(x_2x_1^2)$, então a variedade $\mathscr{V}(\{f, g\})$ é a classe de todas as álgebras de Jordan.

Dada uma álgebra A, o subconjunto de $K\{X_0\}$ formado por todas as identidades de A é um ideal de $K\{X_0\}$ invariante por todos os endomorfismos de $K\{X_0\}$. Um ideal com essa característica de ser invariante por todos os endomorfismos de $K\{X_0\}$

é chamado T-ideal em $K\{X_0\}$. No caso de $K\{X\}$, os T-ideais são os ideais que são invariantes sob todos os endomorfismos graduados de $K\{X\}$.

Tanto o conjunto de todas as álgebras associativas quanto o conjunto de todas as álgebras de Lie formam uma variedade. Ademais, considerando os polinômios $f = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$, $g = x_1^2$ e $h = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2$, tomemos T_1 como a intersecção de todos os T-ideais de $K\{X_0\}$ que contém f e T_2 a intersecção de todos os T-ideais de $K\{X_0\}$ que contém g e h. Claramente T_1 e T_2 são T-ideais e as álgebras quocientes

$$\frac{K\{X_0\}}{T_1} \quad \text{e} \quad \frac{K\{X_0\}}{T_2}$$

são uma álgebra associativa e de Lie respectivamente, e que são relativamente livres na classe das álgebras associativas e álgebras de Lie, respectivamente. Mais precisamente

Proposição 1.88 *Considere os polinômios $f_{g,h,t} = (x_1^{(g)}x_2^{(h)})x_3^{(t)} - x_1^{(g)}(x_2^{(h)}x_3^{(t)}) \in K\{X\}$, onde $g,h,t \in G$. Seja T a intersecção de todos os T-ideais de $K\{X\}$ que contém o subconjunto $\{f_{g,h,t} \mid g,h,t \in G\} \subseteq K\{X\}$. Então*

$$\frac{K\{X\}}{T} \simeq K\langle X\rangle.$$

Prova. Inicialmente, como $f_{g,h,t} \in T$, em $K\{X\}/T$ temos $\overline{f_{g,h,t}} = \overline{0}$. Como T é T-ideal, temos

$$\left(\overline{x_i^{(g)}} \cdot \overline{x_j^{(h)}}\right) \cdot \overline{x_l^{(t)}} = \overline{x_i^{(g)}} \cdot \left(\overline{x_j^{(h)}} \cdot \overline{x_l^{(t)}}\right)$$

para todos $g,h,t \in G$ e $i,j,k \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $K\{X\}/T$ é associativa e a aplicação $x_i^{(g)} \mapsto \overline{x_i^{(g)}}$ de X em $K\{X\}/T$, estende de forma única um homomorfismo de álgebras graduas $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow K\{X\}/T$, tal que $\varphi(x_i^{(g)}) = \overline{x_i^{(g)}}$. Vamos construir uma inversa para φ. Considere a aplicação $x \mapsto x$ de X em X, isto estende de forma única um homomorfismo de álgebras graduadas $\psi : K\{X\} \longrightarrow K\langle X\rangle$. Note que ψ literalmente retira os parenteses dos polinômios. Dado um endomorfismo τ de $K\{X\}$, podemos construir um endomorfismo de $K\langle X\rangle$, estendendo a aplicação $X \longrightarrow K\langle X\rangle$ dada por $x_i^{(g)} \mapsto \psi(\tau(x_i^{(g)}))$ para uma aplicação $\tau' : K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle$. Note que $\psi \circ \tau = \tau' \circ \psi$. Logo $Ker\psi$ é um T-ideal. Note também que $\psi(f_{g,h,t}) = 0$, portanto $T \subseteq Ker\psi$. Assim fica bem definida a aplicação $\overline{x} \mapsto \psi(x)$ de $K\{X\}/T \longrightarrow K\langle X\rangle$. Perceba que esta última aplicação é um homomorfismo de álgebras e é a função inversa de φ. ■

Em termos gerais, para definirmos as codimensões de álgebras, de qualquer classe, usamos a álgebra absolutamente livre. Porém por sua complicação, para casos particulares, quando a classe de álgebras em questão são uma variedade, usamos álgebras relativamente livres naquela variedade. Como fizemos com mais detalhes para o caso associativo, iremos adaptar as definições para os casos de Lie e de Jordan.

1.15 Identidades e codimensões graduadas para álgebras de Lie

Esta seção é dedicada a adaptar as definições de identidades e codimensões antes apresentadas apenas para álgebras associativas, agora para álgebras de Lie. Por conveniência, a menos de menção contrária L denotará uma álgebra de Lie e G será um grupo abeliano. Consideremos a subálgebra $L(X)$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X. Lembremos que qualquer função $\phi : X \longrightarrow L$ pode ser estendida de forma única para um homomorfismo de álgebras $\Phi : L(X) \longrightarrow L$. Isto é, $L(X)$ é livre, livremente gerada por X, na classe das álgebras de Lie. Nos próximos parágrafos abordaremos essa informação de forma mais precisa.

Os elementos de $L(X)$ são chamamos de polinômios de Lie em X. Quaisquer comutadores com elementos de X são chamados de monômios de Lie. Desta forma temos que $L(X)$ é gerado como espaço vetorial pelos monômios de Lie. Infelizmente, diferente do caso associativo, monômios de Lie podem ser linearmente dependentes como, por exemplo, uma verificação direta mostra que os monômios de Lie $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], [x_1, x_2, x_3, x_4]$ e $[x_2, x_1, x_4, x_3]$ são distintos e satisfazem

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = [x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_2, x_1, x_4, x_3].$$

Outro exemplo pode ser obtida da própria identidade de Jacobi

$$[x_1, x_2, x_3] = [x_1, [x_2, x_3]] + [x_1, [x_3, x_2]].$$

De toda forma, todo monômio de Lie f nas variáveis $x_1, \ldots, x_m$ é um polinômio associativo multi-homogêneo.

Sejam G um grupo abeliano e L uma álgebra de Lie G-graduada. Temos então que L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, para alguma álgebra associativa A com unidade,

isto é, a multiplicação de L é da forma $[\cdot,\cdot] : A \times A \longrightarrow A$, $[a,b] := a\cdot b - b\cdot a$, onde " $\cdot$ " é a multiplicação de A como álgebra associativa, restrita a algum subespaço invariante por $[\cdot,\cdot]$. Então dado um polinômio de Lie $f = f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_m^{(g_m)}) \in L(X)$, f pode ser visto como um polinômio em $K\langle X\rangle$, assim temos a noção de $f(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A$ para $a_i \in L_{g_i} \subseteq A$. Mais precisamente, identificando L como subálgebra de $A^{(-)}$, como $K\langle X\rangle$, (com unidade) é a álgebra envelopante de $L(X)$, dada uma aplicação $\varphi : X \longrightarrow L$, podemos considerar $\varphi : X \longrightarrow A$, compondo com a inclusão de L em A, e assim existe e é único o isomorfismo de álgebras, que leva unidade em unidade $\Phi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ que estende φ. A restrição de Φ a $L(X)$ é um homomorfismo de $L(X)$ em $A^{(-)}$ e que manda os geradores de $L(X)$ em L. Daí a imagem da restrição de Φ está contido em L. Portanto, semelhante ao caso associativo, podemos considerar substituições de variáveis, nos elementos de $L(X)$ por elementos de L. Claramente a escolha da álgebra A não interfere.

Como G é abelino, dado um monômio de Lie $f(x_1^{(g_1)}, x_2^{(g_2)}, \ldots, x_m^{(g_m)}) \in L(X)$, então f é polinômio associativo multi-homogêneo em $K\langle X\rangle$, e seus monômios tem todos o mesmo grau $g_1 g_2 \cdots g_m$. Portanto f é homogêneo em $K\langle X\rangle^{gr}$ de grau $g_1 g_2 \cdots g_m$. Ademais se $f, p \in L(X)$ são monômios de Lie tais que f tem grau $g \in G$ em $K\langle X\rangle^{gr}$ e p tem grau $h \in G$ em $K\langle X\rangle^{gr}$, temos que $[f,p]$ é um polinômio associativo homogêneo em $K\langle X\rangle^{gr}$ de grau $gh \in G$. Note também que nessa situação $f \in L(X) \cap K\langle X\rangle_g$ e $p \in L(X) \cap K\langle X\rangle_h$. Como $L(X)$ é gerado pelos monômios de Lie, segue que

$$L(X) = \bigoplus_{g\in G} (L(X) \cap K\langle X\rangle_g)$$

é uma G graduação para $L(X)$ onde $L(X)_g = L(X) \cap K\langle X\rangle_g$. Adaptaremos as mesmas notações para o caso ordinário da G_0-graduação pelo grupo trivial $G_0 = 1$.

Outra maneira de ver essa graduação é a seguinte, pelo item (vi) do ***Exemplo 6***, como G é a abeliano, a decomposição $K\langle X\rangle^{gr} = \underset{g\in G}{\oplus} K\langle X\rangle_g$ também é uma G-graduação para a álgebra de Lie $K\langle X\rangle^{(-)}$, assim $L(X)$ é uma subálgebra homogênea de $K\langle X\rangle^{(-)}$ com a G-graduação $\underset{g\in G}{\oplus} K\langle X\rangle_g$.

Estamos aptos a definir identidade graduada.

Definição 1.89 *Sejam G um grupo abeliano e $L = \underset{g\in G}{\oplus} L_g$ uma álgebra de Lie G-graduada. Um polinômio de Lie $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_m^{(g_m)}) \in L(X)$ é dito uma identidade*

graduada para $(L, \mathscr{G})$ *se* $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$ *para todos* $a_i \in L_{g_i}$. *Denotamos por* $Id^{gr}(L)$ *o subconjunto de* $L(X)$ *de todas as identidades graduadas de* L.

Obvio que a definição de $Id^{gr}(L)$ depende da G-graduação $\mathscr{G}$ de L. É fácil ver que dada uma álgebra associativa A, então $Id^{gr}(A^{(-)})$ é subespaço de $Id^{gr}(A)$. Também estendemos as definições de polinômios de Lie multi-homogêneos e multi-lineares. De modo análogo ao caso associativo $Id^{gr}(L)$ é um ideal da álgebra $L(X)$ e é invariante sob todos os endomorfismos graduados.

Uma importante propriedade dos polinômios de Lie multi-homogêneos é a que está presente na próxima proposição que será enunciada para o caso ordinário, mas claramente é válida para o caso geral.

Proposição 1.90 (Proposition 12.2.6, página 310-311 de [15]) *Seja* $f(x_1, \ldots, x_m) \in L(X_0)$ *um polinômio de Lie homogêneo de grau* k. *Então*

(i) f *é uma combinação linear de monômios de Lie* $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$,

(ii) se f *é multi-linear,* $k = m$, *então* f *é combinação linear de monômios de Lie*

$$[x_m, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m-1)}], \quad \sigma \in S_{m-1};$$

(iii) o conjunto $\{[x_m, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m-1)}] \mid \sigma \in S_{m-1}\} \subseteq L(X)$ *é L.I.*

Assim definimos, de modo análogo ao caso associativo a codimensão graduadas para álgebras de Lie associada a uma sequência de elementos do grupo.

Definição 1.91 *Sejam* G *um grupo abeliano e* $(L, \mathscr{G})$ *uma álgebra de Lie* G*-graduada. Para cada* $m \in \mathbb{N}$ *e* $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ *denotaremos por* V_m^a *o subespaço de* $L(X)$ *de todos os polinômios de Lie multilineares nas variáveis* $x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, \ldots, x_m^{(a_m)}$, *isto é,*

$$V_m^a = span_K\{[x_m^{(a_m)}, x_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)})}, \ldots, x_{\sigma(m-1)}^{(a_{\sigma(m-1)})}] \mid \sigma \in S_{m-1}\}.$$

Denotamos

$$V_m^a(L) = \frac{V_m^a}{V_m^a \cap Id^{gr}(L)}$$

e definimos a m*-ésima codimensão homogênea associada a* $a = (a_1, \ldots, a_m)$ *como*

$$c_m^{(a_1, \ldots, a_m)}(L) = \dim V_m^a(L).$$

A seguir definimos a sequência de codimensões graduadas para álgebras de Lie e o expoente graduado.

Definição 1.92 *Sejam G um grupo abeliano e $(L,\mathscr{G})$ uma álgebra de Lie G-graduada. Para cada $m\in\mathbb{N}$ denotamos $V_m^G=\underset{a\in G^m}{\oplus}V_m^a$ e $V_m^G(L)=V_m^G/(V_m^G\cap Id^{gr}(L))$. Definimos a m-ésima codimensão graduada de $(L,\mathscr{G})$ por $c_m^G(L)=\dim V_m^G(L)$. Por fim, se o limite $\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{c_m^G(L)}$ existir, iremos nos referir a ele como expoente graduado de L e o denotaremos por $exp^G(L)$.*

Como visto no caso associativo, ***Proposição 1.79*** e ***Teorema 1.80***, (a demonstração pode ser adaptada para o caso de Lie), como K é infinito, temos que os polinômios multi-homogêneos de $Id^{gr}(L)$ descrevem completamente $Id^{gr}(L)$. Caso $charK=0$ então os subespaços $V_m^G\cap Id^{gr}(L)$ descrevem completamente $Id^{gr}(L)$. Assim como no caso associativo, temos como corolário

$$c_m^G(L)=\sum_{a\in G^m}\dim c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(L).$$

Os outros resultados, como os ***Teoremas 1.74, 1.76*** e ***1.67*** também podem ter suas demonstrações adaptadas.

Teorema 1.93 *Sejam G um grupo abeliano, $L=\underset{g\in G}{\oplus}L_g$ e $T=\underset{g\in G}{\oplus}T_g$ álgebras de Lie G-graduadas. Se existir $\varphi:L\longrightarrow T$ um isomorfismo graduado então $Id^{gr}(L)=Id^{gr}(T)$. Ademais, seja L uma álgebra de Lie. Suponha que $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ sejam G-graduações para L tais que $(L,\mathscr{G})\simeq(L\mathscr{H})$, então*

$$c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(L,\mathscr{G})=c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(L,\mathscr{H})\qquad e\qquad c_m^G(L,\mathscr{G})=c_m^G(L\mathscr{H})$$

para todo $(a_1,\ldots,a_m)\in G^m$, bem como $exp^G(L,\mathscr{G})=exp^G(L,\mathscr{H})$.

Agora adaptemos as definições para o caso das álgebras de Jordan especiais.

1.16 Identidades e codimensões graduadas para álgebras de Jordan especiais

Utilizemos essa seção para fazer uma breve adaptação do conceito de codimensões graduadas para álgebras de Jordan especiais. Por ora, J denotará uma álgebra de Jordan especial qualquer e FSJ^{gr} será a subálgebra de $K\langle X\rangle^{(+)}$ gerada por X.

Como J é uma álgebra de Jordan especial, existe uma álgebra associativa A, tal que J é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(+)}$. Consideremos J como literalmente a subálgebra de $A^{(+)}$. Dada uma aplicação $\varphi:X\longrightarrow J$, podemos considerar $\varphi:X\longrightarrow$

A, compondo com a inclusão de J em A. Então existe e é único o homomorfismo de álgebras $\Phi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ que estende φ. Restringindo Φ a FSJ^{gr}, como as imagens dos geradores de FSJ^{gr} estão em J, a imagem da restrição de Φ a FSJ^{gr} está contida em J. Assim, análogo ao caso de associativo e ao caso de Lie, podemos considerar substituições das variáveis dos elementos de FSJ^{gr} por elementos de J. Claramente a construção não depende da álgebra A escolhida.

Assim como no caso de Lie, temos que FSJ^{gr} é G-graduada com a G-graduação dada por

$$FSJ^{gr} = \bigoplus_{g\in G}(FSJ^{gr} \cap K\langle X\rangle_g).$$

Fato esse que nos possibilita definir o ideal das identidades graduadas de J.

Definição 1.94 *Sejam G um grupo abeliano e $J = \underset{g\in G}{\oplus} J_g$ uma álgebra de Jordan especial G-graduada. Um polinômio de Jordan $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_m^{(g_m)}) \in L(X)$ é dito uma identidade graduada para $(J,\mathscr{G})$ se $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$ para todos $a_i \in J_{g_i}$. Denotamos por $Id^{gr}(J)$ o subconjunto de FSJ^{gr} de todas as identidades graduadas de J.*

Ressaltemos que a definição de $Id^{gr}(J)$, depende da G-graduação $\mathscr{G}$. É fácil ver que se A é uma álgebra associativa, então $Id^{gr}(A^{(+)})$ é subespaço de $Id(A)$. Ademais $Id^{gr}(J)$ é um ideal da álgebra FSJ^{gr} que é invariante sob todos os endomorfismos graduados da álgebra FSJ^{gr}.

Assim como feito para o caso Lie, temos

Definição 1.95 *Sejam G um grupo abeliano e $(J,\mathscr{G})$ uma álgebra de Jordan especial G-graduada. Para cada $m \in \mathbb{N}^*$ e $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ denotaremos por W_m^a o subespaço de FSJ^{gr} de todos os polinômios de Jordan multilineares nas variáveis $x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, \ldots, x_m^{(a_m)}$, isto é,*

$$W_m^a = span_K\{x_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)})} \circ x_{\sigma(2)}^{(a_{\sigma(2)})} \circ \cdots \circ x_{\sigma(m)}^{(a_{\sigma(m)})} \mid \sigma \in S_m\}.$$

Denotamos

$$W_m^a(J) = \frac{W_m^a}{W_m^a \cap Id^{gr}(J)}$$

e definimos a m-ésima codimensão homogênea associada a $a = (a_1, \ldots, a_m)$ como

$$c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(J) = \dim W_m^a(J).$$

Agora podemos adaptar a definição de sequência das codimensões graduadas e expoente graduado.

Definição 1.96 *Sejam G um grupo abeliano e $(J,\mathscr{G})$ uma álgebra de Jordan especial G-graduada. Para cada $m \in \mathbb{N}^*$ denotamos $W_m^G = \underset{a\in G^m}{\oplus} W_m^a$ e $W_m^G(J) = W_m^G/(W_m^G \cap Id^{gr}(J))$. Definimos a m-ésima codimensão graduada de $(J,\mathscr{G})$ por $c_m^G(J) = \dim W_m^G(J)$. Por fim, se o limite $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m^G(J)}$, existir, iremos nos referir a ele como expoente graduado de J e o denotaremos por $exp^G(J)$.*

De forma análoga, temos

$$c_m^G(J) = \sum_{a\in G^m} \dim c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(J).$$

Por fim

Teorema 1.97 *Sejam G um grupo abeliano, $J = \underset{g\in G}{\oplus} J_g$ e $T = \underset{g\in G}{\oplus} T_g$ álgebras de Jordan especiais G-graduadas. Se existir $\varphi : J \longrightarrow T$ um isomorfismo graduado então $Id^{gr}(J) = Id^{gr}(T)$. Ademais, seja J uma álgebra de Jordan especial, suponha que $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ sejam G-graduações para J tais que $(J,\mathscr{G}) \simeq (J\mathscr{H})$, então*

$$c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(J,\mathscr{G}) = c_m^{(a_1,\ldots,a_m)}(J,\mathscr{H}) \qquad e \qquad c_m^G(J,\mathscr{G}) = c_m^G(J\mathscr{H})$$

para todo $(a_1,\ldots,a_m) \in G^m$, bem como $exp^G(J,\mathscr{G}) = exp^G(J,\mathscr{H})$.

Capítulo 2

Sequências espelhadas

Este capítulo tem o intuito de introduzir o leitor a uma área um tanto técnica, que está por trás de muitos resultados importantes para a classificação das graduações para UT_n nos casos de Lie e de Jordan.

2.1 Notação a ser usada no capítulo

Inicialmente vejamos como se comportam o produto de m elementos em uma álgebra de Lie e em uma álgebra de Jordan especial. Para isso, fixemos a notação de que S_m seja o grupo simétrico das permutações de $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, e consideraremos a operação de composição normada de dentro pra fora, isto é,

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_n(x) := \sigma_1(\sigma_2(\cdots(\sigma_{n-1}(\sigma_n(x)))\cdots))).$$

Como de costume, como já estamos utilizando justaposição para operações de grupos, também denotaremos a composição apenas pela justaposição dos elementos, isto é, $\sigma \circ \tau = \sigma\tau$. Também fixemos a notação a seguir que será muito usada neste capítulo:

Notação 2.1 *[30] Seja S_m o grupo das permutações de $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. Denotemos* $\mathscr{T}_m := \{\sigma \in S_m \mid \sigma(1) > \cdots > \sigma(t) < \sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m),$ *para algum* $1 \leq t \leq m\}$.

Nessas condições claramente temos $\sigma(t) = 1$ e $m \in \{\sigma(1), \sigma(m)\}$. Se escrevermos os elementos de S_m com a notação de duas linhas, como

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(m) \end{pmatrix},$$

então podemos facilmente reconhecer se um elemento $\sigma \in S_m$ pertence a $\mathscr{T}_m$ observando que para todo $r = 1, 2, \ldots, m$, os números $1, 2, \ldots, r$, na segunda linha aparecem juntos em um único bloco. Ademais, note que $\mathscr{T}_1 = S_1$ e $\mathscr{T}_2 = S_2$, porém para $m \geq 3$ temos que $\mathscr{T}_m$ nunca será subgrupo de S_m. Para isso, dado $m \geq 3$, consideremos as permutações

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m-1 & m \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots & m-1 & m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m-1 & m \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \cdots & m-1 & m \end{pmatrix}$$

desta forma temos $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{T}_m$, mas

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m-1 & m \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \cdots & m-1 & m \end{pmatrix},$$

assim $\sigma_2 \circ \sigma_1 \notin \mathscr{T}_m$. Portanto $\mathscr{T}_m$ não é fechado em relação a composição. Ademais, note que $\sigma_2^{-1} \notin \mathscr{T}_m$, donde $\mathscr{T}_m$ não é fechado para inverso. Fixemos também a seguinte notação:

Notação 2.2 *Se $1 \leq i \leq m$, definiremos como em [30], a permutação i-reversa como*

$$\tau_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \ldots & m \\ i & i-1 & \ldots & 2 & 1 & i+1 & i+2 & \ldots & m \end{pmatrix}.$$

Assim temos, $\tau_i^2 = 1$ e $\tau_i \in \mathscr{T}_m$, $1 \leq i \leq m$. Note que para $k \leq i$ temos $\tau_i(k) + k = i + 1$ e portanto $\tau_i(k) = i - k + 1$. Com essas notações fixadas, prossigamos com a análise de como se comporta a multiplicação em álgebras de Lie e de Jordan especiais.

2.2 Combinatória para comutadores em álgebras de Lie e de Jordan especiais

Nessa seção, evidenciaremos a compatibilidade que há entre o conjunto $\mathscr{T}_m$ e o produto de m elementos seguidos em álgebras de Lie e de Jordan especiais. Antes façamos uma observação importante:

Observação 2.3 *Sejam m um inteiro positivo e $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$ inteiros pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$. Para cada i, $1 \leq i \leq k$, definamos o ciclo $J_i \in S_m$ dado por*

$$J_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n_i - 1 & n_i & n_i + 1 & \cdots & m \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n_i & 1 & n_i + 1 & \cdots & m \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n_i).$$

Uma verificação direta mostra que dado $x \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x < n_k$, tem-se

$$J_1 J_2 \cdots J_k(x) = x + k.$$

Lema 2.4 (Lemma 1, de [30]) *Seja m um inteiro positivo. Dado $\sigma \in S_m$, as seguintes sentenças são equivalentes*

(i) $\sigma \in \mathscr{T}_m$;

(ii) Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que: $\sigma(j) > \sigma(j+1)$ se, e somente se, $1 \leq j \leq r$;

(iii) Existem $j_1 > j_2 > \cdots > j_r > 1$ tais que

$$\sigma = (j_r \quad j_r - 1 \quad \ldots \quad 1)(j_{r-1} \quad j_{r-1} - 1 \quad \ldots \quad 1) \cdots (j_2 \quad \ldots \quad 1)(j_1 \quad \ldots \quad 1)$$

$$\sigma = (j_r \ldots 1) \cdots (j_1 \ldots 1),$$

onde, $j_i = \sigma(i)$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

Ademais dada uma álgebra associativa A e $x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$ temos

$$[x_1, x_2, \ldots, x_m] = \sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} (-1)^{\sigma^{-1}(1)-1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)}$$

e

$$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_m = \sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)}.$$

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$

Supondo (i), existe $t \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots > \sigma(t-1) > \sigma(t) = 1$ e $\sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m)$. Caso $t = 1$, temos que σ é a identidade, e portanto basta tomar $r = 0$. Caso $t > 1$, tomemos $r = t - 1$. Provemos a afirmação do item (ii). Supondo j tal que $\sigma(j) > \sigma(j+1)$, devemos ter $1 \leq j \leq r = t - 1$, pois supondo, por absurdo, que $j > r = t - 1$ devemos ter $j + 1 > j \geq t$ e portanto $\sigma(j+1) > \sigma(j) > \cdots > \sigma(t)$, o que é uma contradição. Supondo agora $1 \leq j \leq r = t - 1$, temos $j < j + 1 \leq t$ e portanto $\sigma(j) > \sigma(j+1)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Supondo (ii), tomemos $j_i = \sigma(i)$, para cada $i = 1, 2, \ldots, r$. Pelo item (ii) temos $j_1 > j_2 > \cdots > j_r$. Note que fazendo $j = r$ no item (ii), temos $\sigma(r) > \sigma(r+1)$, logo $\sigma(r) \neq 1$, portanto $j_1 > j_2 > \cdots > j_r > 1$. Mostremos agora a igualdade

$$\sigma = (j_r \ldots 1) \cdots (j_1 \ldots 1)$$

que é equivalente a

$$(1 \dots j_1) \cdots (1 \dots j_r)\sigma = Id$$

Com efeito, para cada $i = 1, 2, \dots, r$ definamos o ciclo $J_i = (1\ 2\ \dots\ \sigma(i)\ )$, como na ***Observação 2.3***, pondo $n_i = j_i = \sigma(i)$. Assim devemos mostrar que $J_1 J_2 \cdots J_r \sigma = Id$. Dado um inteiro x tal que $1 \leq x \leq r$, temos $J_k(\sigma(x)) = J_k(j_x) = j_x = \sigma(x)$ para $x < k \leq r$, então, utilizando a ***Observação 2.3***, temos

$$\begin{aligned} J_1 J_2 \cdots J_r \sigma(x) &= J_1 \cdots J_{x-1} J_x(\sigma(x)) \\ &= J_1 J_2 \cdots J_{x-1}(1) \\ &= 1 + x - 1 \\ &= x \\ &= Id(x). \end{aligned}$$

Supondo agora $x > r$, temos duas possibilidades: $\sigma(x) < \sigma(r)$ ou $\sigma(x) > \sigma(r)$. Supondo inicialmente que $\sigma(x) < \sigma(r)$, temos a seguinte afirmação:

Afirmação 1: Se $x > r$ e $\sigma(x) < \sigma(r)$, então $\sigma(x) = x - r$.

De fato, é fácil ver que supondo (ii) temos $\sigma(1) > \cdots > \sigma(r) > \sigma(r+1)$ e $\sigma(r+1) < \sigma(r+2) < \cdots < \sigma(m)$. Temos $\sigma(1) > \cdots > \sigma(r) > \sigma(x)$, $\sigma(m) > \cdots > \sigma(x+1) > \sigma(x)$ e $\sigma(x) > \sigma(x-1) > \cdots > \sigma(r+2) > \sigma(r+1)$ assim temos exatamente $m - x + r$ valores maiores que $\sigma(x)$, logo $\sigma(x) = m - (m - x + r) = x - r$ e portanto usando a **Observação 2.3** temos

$$J_1 J_2 \cdots J_r \sigma(x) = \sigma(x) + r = x - r + r = x = Id(x).$$

Por fim supondo $x > r$ e $\sigma(x) > \sigma(r)$, consideremos o conjunto

$$Y = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 \leq y \leq r \text{ e } \sigma(y) = j_y > \sigma(x)\}.$$

Afirmação 2 Caso $Y = \emptyset$, então $J_k \sigma(x) = \sigma(x)$ para todo $k \in \{1, \dots, r\}$ e $\sigma(x) = x$.

De fato, a primeira afirmação segue do fato de que $\sigma(x) > j_1 > \cdots > j_r$ e portanto $\sigma(x)$ é ponto fixo de todos os ciclos J_k, mostremos que $\sigma(x) = x$. Como $x > r$ temos $\sigma(x) < \sigma(x+1) < \cdots < \sigma(m)$, então existem pelo menos $m - x$ valores maiores que $\sigma(x)$, donde segue que $\sigma(x) \leq m - (m - x) = x$. Por outro lado, como já observado

temos $\sigma(x) > j_1 > \cdots > j_r$ e $\sigma(r+1) < \cdots < \sigma(x)$ temos que existem pelo menos $r + x - (r+1) = x - 1$ valores menores que $\sigma(x)$, ou seja, $\sigma(x) \geq x$, concluímos então que $\sigma(x) = x$.

Portanto se $Y = \emptyset$ temos

$$J_1 J_2 \cdots J_r \sigma(x) = \sigma(x) = x = Id(x).$$

Se $Y \neq \emptyset$, tomemos $p = \max Y$, então $J_k(\sigma(x)) = \sigma(x)$ para $p < k \leq r$, portanto

$$J_1 J_2 \cdots J_r \sigma(x) = J_1 J_2 \cdots J_p \sigma(x) = \sigma(x) + p.$$

Precisamos mostrar que $x = \sigma(x) + p$, isto é, $\sigma(x) = x - p$. De fato, para i tal que $r + 1 \leq i < x$ temos $\sigma(i) < \sigma(x)$, o que nos diz que há pelo menos $x - (r+1)$ valores menores que $\sigma(x)$, e para $p < i \leq r$ também temos $\sigma(i) < \sigma(x)$, logo existem pelo menos $r - p$ valores menores que $\sigma(x)$ neste caso. Então existem, no total, pelo menos $x - (r+1) + r - p = x - p - 1$ valores menores que $\sigma(x)$ e daí $\sigma(x) \geq x - p$. Agora para os valores maiores como $j_1 > \cdots > j_p > \sigma(x)$ já temos p valores maiores que $\sigma(x)$, e para i tal que $x < i \leq m$ também temos $\sigma(i) > \sigma(x)$ o que nos dá mais $m - x$ valores maiores que $\sigma(x)$ totalizando pelo menos $m - x + p$ valores maiores que $\sigma(x)$, então $\sigma(x) \leq m - (m - x + p) = x - p$. Assim, $\sigma(x) = x - p$, como queríamos mostrar.

$(iii) \Rightarrow (i)$

Supondo (iii), para cada j_i, denotemos por Q_i o ciclo $Q_i = (j_i \quad j_i - 1 \quad \cdots \quad 2 \quad 1)$. Assim temos $\sigma = Q_r Q_{r-1} \cdots Q_2 Q_1$. Inicialmente, como $j_1 > j_2 > \cdots > j_r > 1$, temos que Q_k não move j_i para $i < k$, isto é, $Q_k(j_i) = j_i$, e que $j_i > r - i + 1$. Daí

$$\begin{aligned}
\sigma(1) &= Q_r \cdots Q_3 Q_2 Q_1(1) = Q_r \cdots Q_3 Q_2(j_1) = j_1 \\
\sigma(2) &= Q_r \cdots Q_3 Q_2 Q_1(2) = Q_r \cdots Q_3 Q_2(1) = Q_r \cdots Q_3(j_2) = j_2 \\
&\vdots \\
\sigma(r) &= Q_r \cdots Q_3 Q_2 Q_1(r) = Q_r \cdots Q_{k+1} Q_k(r - (k-1)) = Q_r(1) = j_r
\end{aligned}$$

Portanto $\sigma(i) = j_i$. Ademais como $j_i > r - i + 1$ para cada $1 \leq i \leq r$, temos

$$\sigma(r+1) = Q_r \cdots Q_1(r+1) = r + 1 - r = 1.$$

Fazendo $t = r + 1$, temos $\sigma(1) > \cdots > \sigma(t-1) > \sigma(t) = 1$. Falta apenas provar que $\sigma(t) < \cdots < \sigma(m)$. Para isso é suficiente mostrar que para cada $p \geq 1$ temos

$\sigma(r+p) < \sigma(r+p+1)$. Com efeito, para cada p com $1 \leq p \leq m-r-1$, definamos o conjunto K_p como sendo $K_p = \{i \in \{1,\ldots,r\} \mid j_i \geq r+p+1-i\}$. Note que se $i \notin K_p$, então $j_i - 1 < r+p-i$, ademais, como $j_i > j_{i+1}$, temos $j_i - 1 \geq j_{i+1}$. Logo

$$r+p+1-(i+1) = r+p-i > j_i - 1 \geq j_{i+1},$$

ou seja, $r+p+1-(i+1) > j_{i+1}$, consequentemente $i+1 \notin K_p$. Desta forma $K_p = \emptyset$ ou $K_p = \{1,2,\ldots,k_p\}$. Se $K_p \neq \emptyset$, denotemos $k_p = \max K_p = \mid K_p \mid$, e caso $K_p = \emptyset$, denotemos $k_p = 0$.

Afirmação 3: Para cada p com $1 \leq p \leq m-r-1$, temos $\sigma(r+p) = r+p-k_p$. De fato, caso $K_p \neq \emptyset$, então $r+p = r+p+1-1 \leq j_1$, daí Q_1 move $r+p$ para $r+p-1$. Ademais $r+p-1 = r+p+1-2 \leq j_2$ e daí Q_2 move $r+p-1$ para $r+p-2$, e assim por diante, isto é

$$Q_{k_p}Q_{k_p-1}\cdots Q_2Q_1(r+p) = r+p-k_p.$$

Note para $s \geq k_p+1$ temos $r+p-k_p = r+p+1-(k_p+1) \geq r+p+1-s > j_s$ e portanto Q_s não move $r+p-k_p$. Daí

$$\sigma(r+p) = Q_rQ_{r-1}\cdots Q_{k_p}\cdots Q_2Q_1(r+p) = Q_r\cdots Q_{k_p+1}(r+p-k_p) = r+p-k_p.$$

Caso $K_p = \emptyset$, então $k_p = 0$ e $1 \notin K_p$. Portanto $r+p = r+p+1-1 > j_1 > j_2 > \cdots > j_r$, e assim nenhum Q_s move $r+p$ para $1 \leq s \leq r$. Logo $\sigma(r+p) = r+p = r+p-k_p$.

Afirmação 4: Para cada p, com $1 \leq p \leq m-r-1$, temos $k_{p+1} - k_p \leq 0$. De fato, caso $K_{p+1} = \emptyset$, temos $k_{p+1} = 0$, e como $k_p \geq 0$, temos $k_{p+1} - k_p \leq 0$. Caso $K_{p+1} \neq \emptyset$, mostremos que $k_{p+1} \in K_p$, isto é $j_{k_{p+1}} \geq r+p+1-k_{p+1}$. Com efeito, como $k_{p+1} \in K_{p+1}$ temos

$$j_{k_{p+1}} \geq r+(p+1)+1-k_{p+1} > r+p+1-k_{p+1}.$$

Logo $k_{p+1} \in K_p$. Consequentemente $K_p \neq \emptyset$ e $k_p \geq k_{p+1}$, portanto $k_{p+1} - k_p \leq 0$.

Mostremos agora que $\sigma(r+p) < \sigma(r+p+1)$. Para $p \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq p \leq m-r-1$, de acordo com as **Afirmações 3** e **4** temos $k_{p+1} \leq k_p$, logo $r+p-k_p < r+p+1-k_{p+1}$

e portanto $\sigma(r+p) < \sigma(r+p+1)$. Assim, pondo $t = r+1$, concluímos que

$$\sigma(1) > \cdots > \sigma(t) = 1 < \sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m).$$

Por fim provemos por indução a afirmação no final do lema. Para $m = 2$ temos

$$\mathscr{T}_2 = S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e $[x_1, x_2] = x_1x_2 + (-1)^{2-1}x_2x_1 = \sum_{\sigma\in\mathscr{T}_2}(-1)^{\sigma^{-1}(1)-1}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}$. Antes de prosseguir com a indução, note que dado $\sigma \in \mathscr{T}_m$, definindo $\sigma', \sigma'' \in S_{m+1}$ por

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m & m+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(m-1) & \sigma(m) & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m & m+1 \\ m+1 & \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(m-2) & \sigma(m-1) & \sigma(m) \end{pmatrix}$$

temos $\sigma', \sigma'' \in \mathscr{T}_{m+1}$, é fácil ver que se $\sigma, \theta \in \mathscr{T}_m$ temos $\sigma' \neq \sigma''$ e

$$\sigma' = \theta' \iff \sigma = \theta \iff \sigma'' = \theta''.$$

Reciprocamente, dado $\tau \in \mathscr{T}_{m+1}$, pela definição de $\mathscr{T}_{m+1}$ devemos ter $\tau(1) = m+1$ ou $\tau(m+1) = m+1$. Se $\tau(1) = m+1$, então $\{\tau(2), \tau(3), \ldots, \tau(m+1)\} = \{1, 2, \ldots, m\}$, consideremos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m \\ \tau(2) & \tau(3) & \cdots & \tau(m) & \tau(m+1) \end{pmatrix}.$$

Caso $\tau(m+1) = m+1$, temos $\{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(m)\} = \{1, 2, \ldots, m\}$, consideremos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(m-1) & \tau(m) \end{pmatrix}.$$

Em todo caso temos $\sigma \in \mathscr{T}_m$. Ademais, note que $\tau = \sigma'$ ou $\tau = \sigma''$. Portanto temos

$$\mathscr{T}_{m+1} = \{\sigma' \mid \sigma \in \mathscr{T}_m\} \dot{\cup} \{\sigma'' \mid \sigma \in \mathscr{T}_m\}$$

onde não há repetição entre os elementos σ', com $\sigma \in \mathscr{T}_m$ e também não há repetição entre os elementos σ'', com $\sigma \in \mathscr{T}_m$. Note também que $(\sigma')^{-1}(1) - 1 = \sigma^{-1}(1) - 1$ e $(\sigma'')^{-1}(1) - 1 = \sigma^{-1}(1)$. Estamos prontos para completar a indução. Supondo que para algum $m \in \mathbb{N}$, com $m \geq 2$, temos

$$[x_1, x_2, \ldots, x_m] = \sum_{\sigma\in\mathscr{T}_m} (-1)^{\sigma^{-1}(1)-1}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(m)}$$

podemos computar $[x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}]$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}] &= [[x_1, x_2, \ldots, x_m], x_{m+1}] \\
&= [\sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} (-1)^{\sigma^{-1}(1)-1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)}, x_{m+1}] \\
&= \left(\sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} (-1)^{\sigma^{-1}(1)-1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)} \right) x_{m+1} \\
&\quad - x_{m+1} \left(\sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} (-1)^{\sigma^{-1}(1)-1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)} \right) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} (-1)^{\sigma^{-1}(1)-1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)} x_{m+1} \right) \\
&\quad + \left(\sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} (-1)^{\sigma^{-1}(1)} x_{m+1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)} \right) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} (-1)^{(\sigma')^{-1}(1)-1} x_{\sigma'(1)} x_{\sigma'(2)} \cdots x_{\sigma'(m)} x_{\sigma'(m+1)} \right) \\
&\quad + \left(\sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} (-1)^{(\sigma'')^{-1}(1)-1} x_{\sigma''(1)} x_{\sigma''(2)} x_{\sigma''(3)} \cdots x_{\sigma''(m+1)} \right) \\
&= \sum_{\tau \in \mathscr{T}_{m+1}} (-1)^{\tau^{-1}(1)-1} x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(m)} x_{\tau(m+1)},
\end{aligned}$$

o que completa a indução. Analogamente mostramos que

$$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_m = \sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)}.$$

■

Dessa forma, particularmente, em $K\langle X \rangle$, temos expressões para os polinômios multilineares $\sum_{\tau \in S_m} \lambda_\tau x_{\tau(1)} * x_{\tau(2)} * \cdots * x_{\tau(m-1)} * x_{\tau(m)}$, onde $*$ representa o produto $\circ$ de Jordan ou $[,]$ de Lie:

$$\sum_{\tau \in S_m} \lambda_\tau x_{\tau(1)} \circ x_{\tau(2)} \circ \cdots \circ x_{\tau(m)} = \sum_{\tau \in S_m} \sum_{\sigma \in \mathscr{T}_m} \lambda_\tau x_{\tau(\sigma(1))} x_{\tau(\sigma(2))} \cdots x_{\tau(\sigma(m))}$$

$$\sum_{\tau\in S_m}\lambda_\tau[x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\cdots,x_{\tau(m)}]=\sum_{\tau\in S_m}\sum_{\sigma\in\mathscr{T}_m}(-1)^{\sigma^{-1}(1)-1}\lambda_\tau x_{\tau(\sigma(1))}x_{\tau(\sigma(2))}\cdots x_{\tau(\sigma(m))}.$$

Coloquemos em prática a ligação que o conjunto $\mathscr{T}_m$ tem com o produto de Jordan e com o comutador de Lie para a álgebra das matrizes triangulares superiores.

Lema 2.5 (Adaptação do Lemma 4, de [30]) *Sejam $r_1,r_2,\ldots,r_m\in UT_n$ matrizes unitárias triangulares estritamente superiores tais que $r_1r_2\cdots r_m\neq 0$. Então*

(i) $r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)}\cdots r_{\sigma^{-1}(m)}\neq 0$ *se, e somente se,* $\sigma=1$*;*

(ii) $[r_{\sigma^{-1}(1)},r_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,r_{\sigma^{-1}(m)}]\neq 0$ *se, e somente se,* $\sigma\in\mathscr{T}_m$*.*

(iii) $r_{\sigma^{-1}(1)}\circ r_{\sigma^{-1}(2)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(m)}\neq 0$ *se, e somente se,* $\sigma\in\mathscr{T}_m$*.*

Prova.

(i) Note que $r_k=e_{i_kj_k}$ com $i_k<j_k$, como $r_1r_2\cdots r_k\neq 0$ devemos ter

$$i_1<j_1=i_2<j_2=i_3<\cdots<j_{m-2}=i_{m-1}<j_{m-1}=i_m<j_m$$

assim fica claro que $r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)}\cdots r_{\sigma^{-1}(m)}\neq 0$ se, e somente se, $\sigma=1$.

(ii) Dados índices $i_1,i_2,\ldots,i_m$, pelo ***Lema 2.4*** temos

$$[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}]=\sum_{\tau\in\mathscr{T}_m}(-1)^{\tau^{-1}(1)-1}x_{i_{\tau(1)}}x_{i_{\tau(2)}}\cdots x_{i_{\tau(m)}}$$

fazendo $i_l=\sigma^{-1}(l)$, para $l=\tau(k)$ temos $i_{\tau(k)}=\sigma^{-1}(\tau(k))$ assim segue que

$$[r_{\sigma^{-1}(1)},r_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,r_{\sigma^{-1}(m)}]=\sum_{\tau\in\mathscr{T}_m}(-1)^{\tau^{-1}(1)-1}r_{\sigma^{-1}(\tau(1))}r_{\sigma^{-1}(\tau(2))}\cdots r_{\sigma^{-1}(\tau(m))}$$

como vimos no item (i), dentre as parcelas no lado direito apenas uma pode ser não nula, e isso acontecerá justamente se para algum $\tau\in\mathscr{T}_m$ tivemos que $\sigma^{-1}\circ\tau$ seja a permutação identidade, que equivale a $\sigma=\tau\in\mathscr{T}_m$.

(iii) Pelo fato de que

$$r_{\sigma^{-1}(1)}\circ r_{\sigma^{-1}(2)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(m)}=\sum_{\tau\in\mathscr{T}_m}r_{\sigma^{-1}(\tau(1))}r_{\sigma^{-1}(\tau(2))}\cdots r_{\sigma^{-1}(\tau(m))}$$

a demonstração segue análoga ao item anterior.

■

No ***Lema 2.4*** vimos algumas caracterizações para os elementos de $\mathscr{T}_m$. Há mais formas de caracterizar os elementos de $\mathscr{T}_m$, como a que vem a seguir.

Lema 2.6 (Lemma 3, de [30]) *Seja $\sigma \in S_m$. Temos que $\sigma \in \mathscr{T}_m$ se, e somente se, σ satisfaz a seguinte condição: existe um inteiro t, com $1 \leq t \leq m$, tal que*

(i) $\sigma(t) = 1$;

(ii) *para todos inteiros $k_1, k_2 \geq 0$ tais que $k_1 + k_2 < m$ e*

$$\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), \ldots, \sigma(t+k_2-1), \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, \ldots, k_1+k_2+1\}$$

segue uma das duas sentenças

- $t - k_1 - 1 \geq 1$ *e* $\sigma(t-k_1-1) = k_1+k_2+2$ *ou*
- $t + k_2 + 1 \leq m$ *e* $\sigma(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$.

Prova. Supondo $\sigma \in \mathscr{T}_m$. Tomando k_1 e k_2 como na condição (ii). Note que

$$\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots > \sigma(t-1) > \sigma(t) < \sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m-1) < \sigma(m)$$

portanto temos $\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots > \sigma(t-k_1-1)$ e $\sigma(t+k_2+1) < \cdots < \sigma(m-1) < \sigma(m)$. Assim entre os números $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(t-k_1-1), \sigma(t+k_2+1), \ldots, \sigma(m-1), \sigma(m)$ o menor deles ou é $\sigma(t-k_1-1)$ ou $\sigma(t+k_2+1)$. Ademais

$$\{\sigma(1), \ldots, \sigma(t-k_1-1), \sigma(t+k_2+1), \ldots, \sigma(m)\} = \{k_1+k_2+2, \ldots, m\}$$

portanto $\sigma(t-k_1-1) = k_1+k_2+2$ ou $\sigma(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$.

Reciprocamente suponha que $\sigma \in S_m$ satisfaz as condições mencionadas. Para $k_1 = k_2 = 0$ temos $\{\sigma(t)\} = \{1\}$, portanto $\sigma(t-1) = 0+0+2 = 2$ ou $\sigma(t+1) = 2$, assim temos

$$\sigma(t-1) > \sigma(t) \quad \text{ou} \quad \sigma(t) < \sigma(t+1).$$

Caso $\sigma(t-1) = 2$, tomemos $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$ e teremos $\{\sigma(t-1), \sigma(t)\} = \{1, 2\}$, e daí $\sigma(t-2) = 3$ ou $\sigma(t+1) = 3$ e portanto

$$\sigma(t-2) > \sigma(t-1) > \sigma(t) \quad \text{ou} \quad \sigma(t-1) > \sigma(t) < \sigma(t+1).$$

Por outro lado, caso $\sigma(t+1) = 2$, tomando $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$ temos $\{\sigma(t), \sigma(t+1)\} = \{1, 2\}$ e portanto $\sigma(t-1) = 3$ ou $\sigma(t+2) = 3$ e portanto

$$\sigma(t-1) > \sigma(t) < \sigma(t+1) \quad \text{ou} \quad \sigma(t) < \sigma(t+1) < \sigma(t+2).$$

Continuando o processo, em todo caso vemos que no final teremos

$$\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots > \sigma(t-1) > \sigma(t) < \sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m-1) < \sigma(m)$$

portanto $\sigma \in \mathscr{T}_m$. ■

Observação 2.7 *Dados inteiros positivos m_1 e m_2, onde $m_1 \leq m_2$, podemos considerar S_{m_1} subgrupo de S_{m_2} de maneira usual, sob a seguinte identificação, os elementos de S_{m_1} são os elementos de S_{m_2} que fixam todos os símbolos $x > m_1$. Usando a mesma identificação, notando que dado $\sigma \in \mathscr{T}_{m_1}$ teremos $\sigma(m_1) < \sigma(m_1+1) < \cdots < \sigma(m_2)$ temos*

$$\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots < \sigma(m_1-1) < \sigma(m_1) < \sigma(m_1+1) < \cdots < \sigma(m_2-1) < \sigma(m_2)$$

assim teremos $\sigma \in \mathscr{T}_{m_2}$ e portanto sob essa identificação podemos considerar $\mathscr{T}_{m_1}$ como subconjunto de $\mathscr{T}_{m_2}$.

Com a notação estabelecida acima enunciamos mais uma descrição alternativa para $\mathscr{T}_m$.

Lema 2.8 *[Corollary 7 de [30]] Para $m \geq 2$ temos*

$$\mathscr{T}_m = \{\tau_2^{i_2} \circ \tau_3^{i_3} \circ \cdots \circ \tau_m^{i_m} \mid i_2 \ldots, i_m \in \{0,1\}\}.$$

Prova. Note que se $\sigma \in \mathscr{T}_m$ então $\sigma \circ \tau_m \in \mathscr{T}_m$. De fato, seja r o número natural tal que $\sigma(j) > \sigma(j+1)$ se, e somente se, $1 \leq j \leq r$, então $\sigma \circ \tau_m(j) > \sigma \circ \tau_m(j+1)$ se, e somente se, $1 \leq j \leq m-r$ e portanto $\sigma \circ \tau_m \in \mathscr{T}_m$. Deste modo concluímos que $\mathscr{T}_m \supseteq \{\tau_2^{i_2} \circ \tau_3^{i_3} \circ \cdots \circ \tau_m^{i_m} \mid i_2 \ldots, i_m \in \{0,1\}\}$. Vamos agora provar a inclusão contrária por indução em m, se $m = 2$ a inclusão é claramente verdadeira. Suponha agora que o resultado vale para $m-1 \geq 2$. Seja $\sigma \in \mathscr{T}_m$, então seja $\sigma \circ \tau_m^{i_m}$, onde $i_m = 0$ se $\sigma(m) = m$ e $i_m = 1$ se $\sigma(m) \neq m$. Temos que $\sigma \circ \tau_m^{i_m} \in \mathscr{T}_m$, além disso se $\sigma(m) \neq m$ então $\sigma(1) = m$ e portanto $\sigma \circ \tau_m(m) = m$. Assim $\sigma \circ \tau_m^{i_m} \in \mathscr{T}_{m-1}$ e segue da hipótese de indução que existem $i_2, \ldots, i_{m-1} \in \{0,1\}$ tais que

$$\sigma \circ \tau_m^{i_m} = \tau_2^{i_2} \circ \cdots \circ \tau_{m-1}^{i_{m-1}}.$$

Como cada permutação τ_i tem ordem 2 segue da igualdade acima que vale a igualdade $\sigma = \tau_2^{i_2} \circ \cdots \circ \tau_{m-1}^{i_{m-1}} \circ \tau_m^{i_m}$. Deste modo temos que

$$\mathscr{T}_m \subseteq \{\tau_2^{i_2} \circ \tau_3^{i_3} \circ \cdots \circ \tau_m^{i_m} \mid i_2 \ldots, i_m \in \{0,1\}\},$$

e portanto os dois conjuntos são iguais. ■

Proposição 2.9 *Seja m_2 um inteiro positivo. Dado $\sigma \in \mathscr{T}_{m_2}$, que tenha algum ponto fixo j tal que $j \geq \sigma^{-1}(1)$, pondo*

$$m_1 = min\{i \in \{1, 2, \ldots, m_2\} \mid i \geq \sigma^{-1}(1) \text{ e } \sigma(i) = i\},$$

temos $\sigma \in \mathscr{T}_{m_1}$. Consequentemente, se m_3 é tal que $m_3 \leq m_2$ onde $m_3 \geq \sigma^{-1}(1)$ e $\sigma(m_3) = m_3$, ou equivalentemente $m_3 \geq m_1$, temos $\sigma \in \mathscr{T}_{m_3}$.

Prova. Basta notar que como $m_1 \geq \sigma^{-1}(1)$, devemos ter $\sigma(m_1) < \sigma(m_1+1) < \cdots < \sigma(m_2-1) < \sigma(m_2)$ e como $\sigma(m_1) = m_1$ os $m_2 - m_1$ elementos do conjunto $\{\sigma(m_1+1), \sigma(m_1+2), \ldots, \sigma(m_2-1), \sigma(m_2)\}$ devem assumir valores entre $\{m_1+1, m_1+2, \ldots, m_2-1, m_2\}$ e portanto $\sigma(k) = k$ para $m_1 \leq k \leq m_2$, e naturalmente já temos $\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots < \sigma(m_1-1) < \sigma(m_1)$, logo $\sigma \in \mathscr{T}_{m_1}$. Ademais consequentemente temos $\sigma \in \mathscr{T}_{m_3}$. ■

Agora que temos propriedades bem estabelecidas sobre o conjunto $\mathscr{T}_m$, utilizemos elas para introduzirmos alguns conceitos e resultados técnicos, que estão por trás de diversos resultados a respeito de graduações em UJ_n e $UT_n^{(-)}$.

2.3 Ações de permutações em sequências

2.3.1 Ações em sequências em conjuntos arbitrários

Nessa seção estudaremos um tipo especial de ação de grupo (***Definição 1.51***), com o intuito de provar um importante teorema, a saber ***Teorema 2.34***. Vamos fixar uma ação em especial. Seja X um conjunto qualquer não vazio, dada uma sequência $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in X^m$. Temos uma ação a esquerda de S_m em X^m

$$\sigma s = \sigma(s_1, s_2, \ldots, s_m) = (s_{\sigma^{-1}(1)}, s_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(m)}).$$

De fato, tomemos $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in X^m$ e $\sigma, \tau \in S_m$, sendo $1 \in S_m$ a permutação identidade temos $1s = s$. Ademais, denotando $i_l = \sigma^{-1}(l)$ fazendo $l = \tau^{-1}(k)$ temos $i_{\tau^{-1}(k)} = \sigma^{-1}(\tau^{-1}(k))$

$$\begin{aligned}
\tau(\sigma s) &= \tau(s_{\sigma^{-1}(1)}, s_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(m)}) \\
&= \tau(s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_m}) \\
&= (s_{i_{\tau^{-1}(1)}}, s_{i_{\tau^{-1}(2)}}, \ldots, s_{i_{\tau^{-1}(m)}}) \\
&= (s_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))}, s_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(2))}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(m))}) \\
&= (s_{(\tau\sigma)^{-1}(1)}, s_{(\tau\sigma)^{-1}(2)}, \ldots, s_{(\tau\sigma)^{-1}(m)}) \\
&= (\tau\sigma)s.
\end{aligned}$$

Notação 2.10 *Dado T subconjunto de S_m e $s \in X^m$ denotemos*

$$Ts = \{\sigma s \mid \sigma \in T\}.$$

Também denotemos rev $s := \tau_m s$ *a sequência reversa de* s*, isto é, se* $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$*, então a sequência reversa rev* s *de* s *é rev* $s = \tau_m s = (s_m, s_{m-1}, \ldots, s_2, s_1)$.

Utilizando a definição estabelecida acima, definimos:

Definição 2.11 (Definition 8 de [30]) *Dadas duas sequências* $s, s' \in X^m$*, dizemos que* s *e* s' *são espelhadas (mirrored) se* $\mathscr{T}_m s = \mathscr{T}_m s'$.

Equivalentemente, s e s' são espelhadas se, e somente se, para todos $\tau', \sigma \in \mathscr{T}_m$, podemos encontrar $\tau, \sigma' \in \mathscr{T}_m$ tais que $\sigma s = \sigma' s'$ e $\tau' s' = \tau s$.

Vejamos dois exemplos de sequências espelhadas:

Exemplo 14

(*i*) *Para qualquer* $s \in X^m$*, temos que* s *e* $s' = s$ *são espelhadas.*

(*ii*) *Se* $s, s' \in X^m$ *são espelhadas, então* s *e rev* s' *são espelhados. Consequentemente* s *e rev* s *são espelhados.*

De fato, dado $\sigma \in \mathscr{T}_m$*, existe* $\sigma' \in \mathscr{T}_m$ *tal que* $\sigma s = \sigma' s'$*, pois* s *e* s' *são espelhadas. Pelo* ***Lema 2.8*** *vemos que* $\sigma'' := \sigma \tau_m \in \mathscr{T}_m$ *daí*

$$\sigma'' rev\ s' = \sigma' \tau_m \tau_m s' = \sigma' s' = \sigma s.$$

Reciprocamente, dado $\tau' \in \mathscr{T}_m$*, temos* $\tau' \tau_m \in \mathscr{T}_m$ *e existe* $\tau \in \mathscr{T}_m$ *tal que* $\tau s = \tau' \tau_m s'$*, daí* $\tau s = \tau' rev\ s'$*. Donde segue que* s *e* s' *são espelhadas.*

Provaremos que esses dois exemplos são as únicas formas de produzir sequências espelhadas, isto é, s e s' são espelhadas se, e somente se, $s = s'$ ou $s = rev\ s'$. A recíproca já foi provada, vamos nos concentrar em provar a implicação que falta. Para isso vamos fixar algumas notações:

Notação 2.12 *Denotaremos* $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$*. Ademais cada sequência* $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ *em* X^m *pode ser vista como uma função*

$$\begin{aligned} s : I_m &\longrightarrow X \\ i &\mapsto s(i) = s_i \end{aligned}$$

e para qualquer $\sigma \in S_m$ *temos a igualdade de funções* $\sigma s = s \circ \sigma^{-1} : I_m \longrightarrow X$*. Dados inteiros* $0 < m_2 \leq m$*, denotaremos por* $I^{(m)}_{-m_2} = \{m, m-1, \ldots, m-m_2+1\}$*, note que* $I^{(m)}_{-m} = I_m$*. Assim* $I^{(m)}_{-m_2}$ *denota os últimos* m_2 *elementos de* I_m*, coloquemos então* $I^{(m)}_0 = \emptyset$.

Inicialmente faremos definições e deduziremos alguns resultados úteis relacionados a estes conceitos.

Definição 2.13 (Definition 12 de [30]) *Tomemos* $s, s' : I_m \longrightarrow X$, *e ponhamos* $A = s(1)$. *Uma coincidência de* (s, s') *é um par* (m_1, m_2) *onde* $m_1 > 0$ *e* $m_2 \geq 0$ *são inteiros satisfazendo*

(1) $s(i) = s'(i) = A$, *para todo* $i = 1, 2, \ldots, m_1$ *e* $i = m, m-1, \ldots, m-m_2+1$. *Esse último caso, apenas se* $m_2 > 0$.

(2) $s(m_1+1) \neq A$, $s'(m_1+1) \neq A$, $s(m-m_2) \neq A$ *e* $s'(m-m_2) \neq A$.

Neste contexto, denotamos $m' = m_1 + m_2$, $I_m^{(-)} = I_{m_1} \cup I_{-m_2}^{(m)}$ *e* $I'_m = I_m / I_m^{(-)}$.

Assim $I_m^{(-)} = I_{m_1} \cup I_{-m_2}^{(m)}$ representa os elementos das pontas (os primeiros m_1 e os últimos m_2 elementos), e $I'_m = I_m / I_m^{(-)}$ são os elementos do meio do intervalo I_m.

Exemplo 15 *Os seguinte exemplos de coincidências serão tomadas em* $X = \{A, B, C\}$

(i) Tome $s = (A, A, A, B, C, C, A)$ *e* $s' = (A, A, A, C, A, B, A)$ *em* X^7, *então* $(3, 1)$ *é uma coincidência de* (s, s');

(ii) Tome $s = (A, A, B, C)$ *e* $s' = (A, A, C, C)$ *em* X^4, *então* $(2, 0)$ *é uma coincidência para* (s, s');

(iii) Tome $s = (A, A, B, C, C, A)$ *e* $s' = (A, A, B, C, A, A)$ *em* X^6, *então* (s, s') *não admite uma coincidência;*

(iv) Se (m_1, m_2) *é uma coincidência para* (s, s'), *então* (m_1, m_2) *é uma coincidência para* (s', s).

O lema a seguir nos dá uma caracterização de alguns elementos específicos muito úteis em $\mathscr{T}_m$.

Lema 2.14 (Lemma 13 de [30]) *Sejam* $m_1, m_2 \geq 0$, *onde* $m_1 + m_2 \leq m$. *Então* $\sigma \in \mathscr{T}_m$ *satisfaz:*

- $\sigma(m-i+1) = m-i+1$, *para* $i = 1, 2, \ldots, m_2$,
- $\sigma(i) = m - m_2 - i + 1$ *para* $i = 1, 2, \ldots, m_1$,

se, e somente se, $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m_1-m_2} \circ \tau_{m-m_2}$.

Prova. Suponha que $\sigma \in \mathscr{T}_m$ satisfaz as condições acima. Mostremos que $\sigma \circ \tau_{m-m_2} \in \mathscr{T}_{m-m_1-m_2}$, pois assim como $\tau_{m-m_2}^2 = 1$ teremos $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m_1-m_2} \circ \tau_{m-m_2}$. Primeiramente mostremos que $\sigma \circ \tau_{m-m_2}(k) = k$ para $k > m - m_2 - m_1$. Com efeito, dado $k > m-m_1-m_2$, se $m-m_2 \geq k > m-m_1-m_2$ temos $\tau_{m-m_2}(k) = m-m_2-k+1$, e note que

$$k > m - m_1 - m_2 \implies m_1 > m - m_2 - k \implies m_1 \geq m - m_2 - k + 1.$$

Ademais,

$$m - m_2 \geq k \implies m - m_2 - k + 1 \geq 1.$$

Façamos então $i := m - m_2 - k + 1$ e teremos $1 \leq i \leq m_1$, devido a segunda condição temos

$$\sigma(i) = m - m_2 - i + 1 = m - m_2 - (m - m_2 - k + 1) = k$$

portanto $\sigma \circ \tau_{m-m_2}(k) = k$. Suponha agora que $k > m-m_2$, assim temos $\tau_{m-m_2}(k) = k$, e fazendo $i := m - k + 1$ temos

$$i = m - k + 1 < m - (m - m_2) + 1 = m_2 + 1$$

e como $k \leq m$ temos $i \geq 1$, portanto $1 \leq i \leq m_2$, assim devido a primeira condição temos

$$\sigma(k) = \sigma(m - i + 1) = m - i + 1 = k.$$

Assim temos $\sigma \circ \tau_{m-m_2}(k) = k$ para qualquer $k > m - m_1 - m_2$. Ademais note que

$$\sigma \circ \tau_{m-m_2} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & m - m_1 - m_2 & m - m_1 - m_2 + 1 & \cdots & m \\ \sigma(m - m_2) & \cdots & \sigma(m_1 + 1) & m - m_1 - m_2 + 1 & \cdots & m \end{pmatrix},$$

e também que $m_1 + 1 \leq \sigma^{-1}(1) \leq m - m_2$, portanto temos que

$$\sigma(m_1 + 1) > \sigma(m_1 + 2) > \cdots > \sigma(\sigma^{-1}(1)) < \cdots < \sigma(m - m_2 - 1) < \sigma(m - m_2).$$

As desigualdades acima implicam que

$$\sigma\tau_{m-m_2}(m - m_1 - m_2) > \sigma\tau_{m-m_2}(m - m_1 - m_2 - 1) > \cdots < \sigma\tau_{m-m_2}(2) < \sigma\tau_{m-m_2}(1),$$

de onde concluímos que $\sigma \circ \tau_{m-m_2} \in \mathscr{T}_{m-m_1-m_2}$ e portanto $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m_1-m_2} \circ \tau_{m-m_2}$.

Reciprocamente, dado $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m_1-m_2} \circ \tau_{m-m_2}$, note que para $i = 1, 2, \ldots, m_2$ temos $i < m_2+1$ daí $m-i+1 > m-m_2$, donde segue que $\tau_{m-m_2}(m-i+1) = m-i+1$,

note também que $i < m_2 + m_1 + 1$, e portanto $m - i + 1 > m - m_1 - m_2$ donde segue que os elementos de $\mathscr{T}_{m-m_1-m_2}$ fixam $m - i + 1$, logo σ satisfaz a primeira condição. Supondo agora $i = 1, 2, \ldots, m_1$, como $m_1 + m_2 \leq m$ temos $i \leq m_1 \leq m - m_2$ e portanto τ_{m-m_2} move i. Com efeito $\tau_{m-m_2}(i) = m - m_2 - i + 1$, note $i < m_1 + 1$ e portanto $m - m_2 - i + 1 > m - m_1 - m_2$, assim todos os elementos de $\mathscr{T}_{m-m_1-m_2}$ fixam $m - m_2 - i + 1$. Assim temos $\sigma(i) = m - m_2 - i + 1$ para $i = 1, 2, \ldots, m_2$ o que garante a segunda condição. ■

Observação 2.15 *É fácil representar uma permutação $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m_1-m_2} \circ \tau_{m-m_2}$: as últimas m_2 entradas de σ são*

$$\sigma = \begin{pmatrix} \cdots & m - m_2 + 1 & \cdots & m - 1 & m \\ \cdots & m - m_2 + 1 & \cdots & m - 1 & m \end{pmatrix}$$

e as primeiras m_1 entradas são

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m_1 & \cdots \\ m - m_2 & m - m_2 - 1 & \cdots & m - m_2 - m_1 + 1 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Vejamos uma motivação para considerar essas permutações e a noção de coincidência.

Sejam (m_1, m_2) uma coincidência para (s, s'), e $A = s(1)$. Segue que s e s' são escritas como:

$$s = (\underbrace{A, \ldots, A}_{m_1 \text{ vezes}}, B_1, \ldots, B_l, \underbrace{A, \ldots, A}_{m_2 \text{ vezes}})$$
$$s' = (A, \ldots, A, B_1', \ldots, B_l', A, \ldots, A)$$

onde $\{B_1, B_1', B_l, B_l'\} \cap \{A\} = \emptyset$. Uma permutação $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m_1-m_2} \circ \tau_{m-m_2}$ irá agir da forma

$$\sigma s = (C_1, \ldots, C_l, \underbrace{A, \ldots, A}_{m' \text{ vezes}})$$

onde $C_l = B_1$ ou $C_l = B_l$ e consequentemente $C_l \neq A$.

Seja $s : I_m \longrightarrow X$. Então há uma coincidência (m_1, m_2) para (s, s), e nós podemos considerar a restrição $s_0 = s \mid_{I_m'}$. Definamos

$$\varphi : I_{m-m'} \longrightarrow I_m'$$
$$n \mapsto n + m_1$$

e assim para cada $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m'}$ podemos considerar a composição $\sigma \circ \varphi^{-1} : I_m' \longrightarrow I_{m-m'}$. Denotemos

$$\mathscr{T}_m' = \{\sigma \circ \varphi^{-1} \mid \sigma \in \mathscr{T}_{m-m'}\}.$$

Note que se $t = \sigma^{-1}(1)$ então

$$\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots > \sigma(t) < \cdots < \sigma(m - m' - 1) < \sigma(m - m')$$

e portanto

$$\sigma(\varphi^{-1}(m_1 + 1)) > \cdots > \sigma(\varphi^{-1}(t + m_1)) < \cdots < \sigma(\varphi^{-1}(m - m_2)).$$

Assim para todo $\sigma' \in \mathscr{T}'_m$, podemos definir um elemento $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$, com apoio do ***Lema 2.14***, por

$$\sigma(i) = \begin{cases} \sigma'(i), \text{ se } i \in I'_m, \\ m - m_2 - i + 1, \text{ se } i \in I_{m_1} \\ i, \text{ se } i \in I^{(m)}_{-m_2}. \end{cases}$$

Veja que tal relação $\sigma' \mapsto \sigma$ é injetora. Ademais é claro que

$$| \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2} | = | \mathscr{T}_{m-m'} | = | \mathscr{T}'_m | .$$

Por sua injetividade e das igualdades acima vemos que $\sigma' \mapsto \sigma$ é bijetora. Em verdade sendo $\sigma' \mapsto \sigma$ bijetora segue que para cada $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$, existe uma única permutação $\theta \in \mathscr{T}_{m-m'}$ tal que

$$\sigma(i) = \begin{cases} \theta'(i - m_1), \text{ se } i \in I'_m, \\ m - m_2 - i + 1, \text{ se } i \in I_{m_1} \\ i, \text{ se } i \in I^{(m)}_{-m_2}. \end{cases}$$

Usando a notação acima vejamos um exemplo de como $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$ age em s e θ em s_0.

Exemplo 16 *Dado $s : I_m \to X$, escreva*

$$s = (\underbrace{A, \ldots, A}_{m_1 \ vezes}, B_1, \ldots, B_l, \underbrace{A, \ldots, A}_{m_2 \ vezes})$$

onde $B_1 \neq A \neq B_l$. Escrevendo s dessa forma temos a coincidência (m_1, m_2) de (s, s). Um elemento $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$ age como

$$\sigma s = (C_1, \ldots, C_l, \ \underbrace{A, \ldots, A}_{m_1+m_2 \ vezes} \ )$$

onde $\{B_1, B_l\} \ni C_l \neq A$. Ademais $s_0 = s \mid_{I'_m} = (B_1, \ldots, B_l)$, portanto $\theta s_0 = (C_1, \ldots, C_l)$.

O lema a seguir evidenciará ainda mais a importância que as permutações de $\mathscr{T}_{m-m'}\tau_{m-m_2}$ desempenham no sentido de verificar se duas sequências são espelhadas ou não.

Lema 2.16 (Lemma 17 de [30]) *Usando a notação anterior, se $\sigma \in \mathscr{T}_m$ satisfaz*

$$\sigma^{-1}(I^{(m)}_{-m'}) := \{\sigma^{-1}(m), \sigma^{-1}(m-1), \ldots, \sigma^{-1}(m-m'+1)\} = I^{(-)}_m,$$

então existe $\tau \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$ tal que $\sigma s = \tau s$.

Prova. Note que nesse caso temos $s \circ \sigma^{-1}(j) = A$ para $m - m' + 1 \leq j \leq m$. Assim segue que

$$\sigma s = (s_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(l)}, \underbrace{A, \ldots, A}_{m' \text{ vezes}})$$

onde $l = m - m'$. Para construir τ, pelo ***Lema 2.14***, devemos por $\tau(i) = m - m_2 - i + 1$ para $i \in I_{m_1}$ e $\tau(i) = i$ para $i \in I^{(m)}_{-m_2}$, assim já sabemos como τ se comporta em $I^{(-)}_m = I_{m_1} \cup I^{(m)}_{-m_2}$, falta definir as imagens $\tau(x) \in I_{m-m'}$ para elementos $x \in I'_m$ de tal forma que $\tau^{-1}(i) = \sigma^{-1}(i)$ para $i = 1, 2, \ldots, l$. Com efeito, note que por hipótese temos $\sigma(I^{(-)}_m) = \{m, m-1, \ldots, m-m'+1\}$, daí

$$\begin{aligned} I^{(-)}_m \dot{\cup}\, I'_m &= I_m \\ \sigma(I^{(-)}_m) \cup \sigma(I'_m) &= I_m \\ \sigma(I'_m) &= I_m - \sigma(I^{(-)}_m) \\ \sigma(I'_m) &= \{1, 2, \ldots, m-m'\} \\ \sigma(I'_m) &= I_{m-m'}. \end{aligned}$$

Portanto basta definir $\tau(x) = \sigma(x) \in I_{m-m'}$ para $x \in I'_m$ que teremos $\tau \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$ e $\tau^{-1}(i) = \sigma^{-1}(i)$ para $i \in I_{m-m'}$

$$\begin{aligned} \tau s &= (s_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, s_{\tau^{-1}(m-m')}, \underbrace{A, \ldots, A}_{m' \text{ vezes}}) \\ &= (s_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(m-m')}, \underbrace{A, \ldots, A}_{m' \text{ vezes}}) \\ &= \sigma s \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

De acordo com o lema acima, no sentido de verificar a definição de sequências espelhadas, mesmo que $\sigma \notin \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$, contanto que $\sigma^{-1}(I^{(m)}_{-m'}) = I^{(-)}_m$, que coincidentemente é uma característica dos elementos de $\mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$, podemos supor que $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$. Tal propriedade é conveniente pois como comentado pouco acima, temos que $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$, se e somente se, existe $\theta \in \mathscr{T}_{m-m'}$ tal que

$$\sigma(i) = \begin{cases} \theta(i - m_1), \text{ se } i \in I'_m, \\ m - m_2 - i + 1, \text{ se } i \in I_{m_1} \\ i, \text{ se } i \in I^{(m)}_{-m_2}. \end{cases}$$

Coloquemos em prática essa propriedade.

Lema 2.17 (Lemma 18 de [30]) *Sejam $s, s' : I_m \longrightarrow X$ espelhadas. Assuma que há uma coincidência (m_1, m_2) de (s, s'). Então $s_0 = s\,|_{I'_m}$ e $s'_0 = s'\,|_{I'_m}$ são espelhadas.*

Prova. Tomando $\theta \in \mathscr{T}_{m-m'}$, mostremos que existe $\alpha \in \mathscr{T}_{m-m'}$ tal que $\theta s_0 = \alpha s'_0$. Com efeito, dado $\theta \in \mathscr{T}_{m-m'}$, consideremos $\sigma \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2} \subseteq \mathscr{T}_m$ tal que

$$\sigma(i) = \begin{cases} \theta(i - m_1), \text{ se } i \in I'_m, \\ m - m_2 - i + 1, \text{ se } i \in I_{m_1} \\ i, \text{ se } i \in I^{(m)}_{-m_2}. \end{cases}$$

Como s e s' são espelhadas, existe $\tau \in \mathscr{T}_m$ tal que $\sigma s = \tau s'$. Nosso objetivo primário é verificar que $\tau^{-1}(I^{(m)}_{-m'}) = I^{(-)}_m$. Para isso assuma que há $i \in I^{(m)}_{-m'} = \{m, m-1, \ldots, m-m'+1\}$ tal que $\tau^{-1}(i) = m_1 + 1$ (ou $\tau^{-1}(i) = m - m_2$). Pela definição de coincidência, sabemos que $s'(m_1+1) \neq A$ e $s'(m-m_2) \neq A$, onde $A = s(1)$. Ademais, pela escolha de σ temos $\sigma^{-1}(i) \in \{1, 2, \ldots, m_1, m, m-1, \ldots, m-m_2+1\} = I^{(-)}_m$. Note que $\sigma s(i) = s \circ \sigma^{-1}(i) = A$, mas $\tau s(i) = s \circ \tau^{-1}(i) \neq A$, ou seja, $\sigma s \neq \tau s$, o que é uma contradição. Portanto $\tau(m_1+1), \tau(m-m_2) \notin I^{(-)}_m$. A princípio, temos 3 possibilidades, ou $\tau^{-1}(1) \leq m_1$, ou $m_1 < \tau^{-1}(1) < m - m_2 + 1$ ou $m - m_2 + 1 \leq \tau^{-1}(1)$. A primeira não pode ocorrer. Suponha que $\tau^{-1}(1) \leq m_1$, então

$$\tau(\tau^{-1}(1)+1) < \cdots < \tau(m_1+1) < \tau(m_1+2) < \cdots < \tau(m-m_2)$$

como $\tau(m-m_2) \notin I^{(m)}_{-m'}$, devido as desigualdades acima segue que $\tau(x) \notin I^{(m)}_{-m'}$ para $x \in \{\tau^{-1}(1)+1, \tau^{-1}(1)+2, \ldots, m-m_2-1, m-m_2\}$. Logo temos que

$$I^{(m)}_{-m'} \subseteq \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(\tau^{-1}(1)-1), \tau(m-m_2+1), \tau(m-m_2+2), \ldots, \tau(m)\}.$$

Porém o conjunto da direita tem menos que m' elementos, já que $\tau^{-1}(1) \leq m_1$, absurdo. De forma análoga, mostramos que não pode ocorrer a desigualdade $m-m_2+1 \leq \tau^{-1}(1)$. Portanto segue que $m_1 < \tau^{-1}(1) < m - m_2 + 1$ e consequentemente

$$I^{(m)}_{-m'} \subseteq \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(m_1), \tau(m - m_2 + 1), \tau(m - m_2 + 2), \ldots, \tau(m)\} = \tau(I^{(-)}_m).$$

Como ambos os conjuntos acima tem a mesma quantidade de elementos, segue a igualdade. Daí $I^{(m)}_{-m'} = \tau(I^{(-)}_m)$, e pelo ***Lema 2.16***, existe $\tau' \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2} \subseteq \mathscr{T}_m$ tal que $\tau s' = \tau' s'$. Como $\tau' \in \mathscr{T}_{m-m'} \circ \tau_{m-m_2}$, existe $\alpha \in \mathscr{T}_{m-m'}$ tal que

$$\tau'(i) = \begin{cases} \alpha(i - m_1), \text{ se } i \in I'_m, \\ m - m_2 - i + 1, \text{ se } i \in I_{m_1} \\ i, \text{ se } i \in I^{(m)}_{-m_2}. \end{cases}$$

Como $\sigma s = \tau s' = \tau' s'$, segue que $\theta s_0 = \alpha s'_0$. Por fim, uma coincidência de (s, s') ainda é uma coincidência para (s', s), podemos repetir o argumento e provar que s_0 e s'_0 são espelhadas. ■

Uma forma de verificar que duas sequências não são espelhadas será obtida adiante com a seguinte definição:

Definição 2.18 (Definition 19 de [30]) *Sejam $s : I_m \longrightarrow X$ e $w : I_d \longrightarrow X$ com $d \leq m$. Consideremos o conjunto*

$$\mathscr{O}(s, w) = \{(\sigma, i) \in \mathscr{T}_m \times I_m \mid \sigma s(i + j) = w(1 + j), \ \forall j = 0, 1, 2, \ldots, d - 1\}$$

e denotemos

$$\begin{aligned} n : \mathscr{T}_m \times I_m &\longrightarrow I_m \\ (\sigma, i) &\mapsto n(\sigma, i) = i. \end{aligned}$$

Definamos

$$o_w(s) = \begin{cases} \min\{n(x) \mid x \in \mathscr{O}(s, w)\}, \ \textit{se } \mathscr{O}(s, w) \neq \emptyset, \\ \infty, \ \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Com efeito, como dito logo acima da definição, temos o lema a seguir.

Lema 2.19 *Sejam $s, s' : I_m \longrightarrow X$. Se existe $w : I_d \longrightarrow X$ tal que $o_w(s) \neq o_w(s')$, então s e s' não podem ser espelhadas.*

Prova. Assumindo que $i = o_w(s) < o_w(s')$. Nesse caso, existirá $\sigma \in \mathscr{T}_m$ tal que σs tem i entradas seguidas das entradas de w. Assim é impossível tomar $\tau \in \mathscr{T}_m$ onde $\tau s'$ satisfaz essa mesma propriedade, pois caso contrário teríamos $o_w(s') \leq i$. Assim em particular temos $\sigma s \neq \tau s'$ para todo $\tau \in \mathscr{T}_m$. ■

A seguir exemplificamos um uso do lema acima.

Exemplo 17 *Sejam $s = (A, A, B, C, D)$ e $s' = (A, B, C, D, A)$. Então se $w = (A, A)$, temos $o_w(s) = 1$ e $o_w(s') = 4$, então s e s' não podem ser espelhadas. Isso poderia ser verificado de forma direta: tomando $\sigma = id \in \mathscr{T}_5$, não há nenhum $\sigma' \in \mathscr{T}_5$ tal que $\sigma' s' = \sigma s = s$.*

Entre as sequências que possam aparecer, muitas entradas podem aparecer repetidas em sequências, assim como temos a noção de partir a sequência em fragmentos, como uma ideia de subsequência, como fizemos $s_0 = s_{|I'_m}$. Tendo em vista a formalização de tais ideias fixamos a notação a seguir:

Notação 2.20 (*i*) *Dados $w_1 : I_{d_1} \longrightarrow X$ e $w_2 : I_{d_2} \longrightarrow X$, denotemos por $w = (w_1, w_2)$ a sequência $w : I_{d_1+d_2} \longrightarrow X$ definida por*

$$w(i) = \begin{cases} w_1(i), \text{ se } 1 \leq i \leq d_1, \\ w_2(i - d_1), \text{ se } i > d_1. \end{cases}$$

Equivalentemente, se $w_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{d_1}) \in X^{d_1}$ e $w_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_{d_2}) \in X^{d_2}$, então $w = (w_1, w_2) = (x_1, x_2, \ldots, x_{d_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{d_2}) \in X^{d_1+d_2}$.

(*ii*) *Analogamente definimos $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$.*

(*iii*) *Dados $A \in X$ e $d \in \mathbb{N}^*$, denotemos por $A_d : I_d \longrightarrow X$ a sequência constante $A_d(1) = A_d(2) = \cdots = A_d(d) = A$.*

Em relação a notação acima, note que se $A, B, C \in X$, então a sequência $s = (A, A, B, C, C, C, C) \in X^7$ pode escrita da forma $s = (A_2, B, C_4)$, que resulta em uma escrita bem mais simples e compacta.

2.3.2 Ações em sequências no conjunto $X = \{A, B\}$

Nessa subseção focaremos no caso particular em que $X = \{A, B\}$, é um conjunto com exatamente 2 elementos. Nesse caso para representar uma sequência $s \in \{A, B\}^m$ basta informar quantas vezes cada símbolo aparece em sequência em cada bloco de elementos repetidos, isto nos leva a seguinte definição:

Definição 2.21 (Definition 22 de [30]) *Dado $s : I_m \longrightarrow X = \{A, B\}$. Seja $n_1 \geq 0$ o maior inteiro tal que*

$$s(1) = s(2) = \cdots = s(n_1) = A$$

e para esse n_1, seja n_2 o maior inteiro tal que

$$s(n_1 + 1) = s(n_1 + 2) = \cdots = s(n_1 + n_2) = B.$$

Continuando o processo, obtemos a sequência $\Sigma(s) = (n_1, n_2, \ldots, n_{2t-1}, n_{2t})$ onde podemos ter $n_1 = 0$ e também podemos ter $n_{2t} = 0$. Chamamos tal sequência de espectro de s.

Note que o espectro de $s : I_m \longrightarrow \{A, B\}$ está subordinado ao símbolo A. Por isso poderíamos fixar a notação $\Sigma_A(s)$ em vez de $\Sigma(s)$, e definiríamos de forma análoga a sequência $\Sigma_B(s)$.

Exemplo 18 *Fixado $X = \{A, B\}$ temos:*

(i) Se $s = (A, A, B, A, B, B) = (A_2, B, A, B_2)$, então $\Sigma(s) = (2, 1, 1, 2)$;

(ii) Se $s = (B, B, B, A, B) = (B_3, A, B)$, então $\Sigma(s) = (0, 3, 1, 1)$;

(iii) Se $s = (B, A_2, B_2, A_3, B, A)$, então $\Sigma(s) = (0, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 0)$;

(iv) Se $s = (A, A)$ e $s' = (A, B)$, então $\Sigma(s) = (2, 0)$ e $\Sigma(s') = (1, 1)$;

(v) Sejam $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{2t-1}, n_{2t} \in \mathbb{N}^*$, se $s = (A_{n_1}, B_{n_2}, A_{n_3}, \ldots, A_{n_{2t-1}}, B_{n_{2t}}) \in X^{n_1+\cdots+n_{2t}}$, então $\Sigma(s) = (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{2t-1}, n_{2t})$.

Agora que temos a noção de espectro de uma sequência, que também é uma sequência, só que agora de números, podemos considerar propriedades a respeito de suas entradas.

Definição 2.22 (Definition 23 de [30]) *Seja $s : I_m \longrightarrow X = \{A, B\}$. Ponha $\Sigma(s)(l) = 0$, para $l \notin \{1, 2, 3, \ldots, 2t\}$, e para $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 2t\}$ e $j \in \mathbb{N}$, definamos*

$$e_i^{(j)}(s) = \begin{cases} \Sigma(s)(i), \text{ se } j = 0, \\ \Sigma(s)(i + j) + \Sigma(s)(i - j), \text{ se } j > 0. \end{cases}$$

Além disso ponhamos

$$m_A^{(1)}(s) = \max\{\Sigma(s)(2i + 1) \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$I_A^{(1)}(s) = \{2i + 1 \mid \Sigma(s)(2i + 1) = m_A^{(1)}(s)\}$$

e indutivamente definimos

$$m_A^{(i)}(s) = \begin{cases} \max\{e_l^{i-1}(s) \mid l \in I_A^{i-1}(s)\}, \ \textit{se } I_A^{i-1}(s) \neq \emptyset, \\ 0, \ \textit{caso contrário} \end{cases}$$
$$I_A^{(i)}(s) = \{l \in I_A^{(i-1)}(s) \mid e_l^{i-1}(s) = m_A^{(i)}(s) \ \textit{e} \ m_A^{(i)}(s) > 0\}.$$

Também fazemos o análogo para o B. Pondo $m_B^{(1)}(s) = \max\{\Sigma(s)(2i) \mid i \in \mathbb{N}^*\}$, $I_B^{(1)}(s) = \{2i \mid \Sigma(s)(2i) = m_B^{(1)}(s)\}$ e recursivamente

$$m_B^{(i)}(s) = \begin{cases} \max\{e_l^{i-1}(s) \mid l \in I_B^{i-1}(s)\}, \ \text{se } I_B^{i-1}(s) \neq \emptyset, \\ 0, \ \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$I_B^{(i)}(s) = \{l \in I_B^{(i-1)}(s) \mid e_l^{i-1}(s) = m_B^{(i)}(s) \text{ e } m_B^{(i)}(s) > 0\}.$$

Para que não haja problema em interpretar os símbolos da definição acima, lembremos que $\Sigma(s)(i)$ representa a i-ésima entrada da sequência $\Sigma(s)$, e estamos pondo $\Sigma(s)(l) = 0$ para as posições $l \in \mathbb{Z}$ que não fazem sentido ou ultrapassam o comprimento de $\Sigma(s)$. Uma boa interpretação para os números $m_A^{(i)}(s)$ é a seguinte. Dados $m \in \mathbb{N}^*$ e $s \in X^m = \{A, B\}^m$, o número $m_A^{(1)}(s)$ representa a maior quantidade de A's consecutivos que aparecem em s. Em relação a uma dessas sequências maximais de A's em s fixa, olhamos para a quantidade de B's que vem imediatamente antes e depois dessa sequência, somamos essas quantidades e armazenamos o resultado. Após fazer isso para todas as sequências maximais de A, o maior valor observado será denotado por $m_A^{(2)}(s)$. Entre as sequências maximais de A em que soma dos B's ao seu lado resulta em $m_A^{(2)}(s)$, olhamos para as sequências de A's que vem imediatamente antes e a que vem imediadamente depois das sequências de B que estão ao lado de nossa sequência de A's maximal, somamos a quantidades desses A's, guardamos o valor, após percorrer por todas as sequências maximais de A's que intercalam as quantidades $m_A^{(2)}(s)$ de B's, o maior valor obtida para a soma das quantidades dos A's será denotada por $m_A^{(3)}(s)$. Assim o raciocínio continua indutivamente. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 19 *Calculemos $m_A^{(i)}(s)$ e $m_B^{(i)}(s)$ para as seguintes sequências.*

(i) Suponha

$$s = (\ldots, A_{t_3}, B_{t_2}, A_{t_1}, B_u, A_{v_1}, B_{v_2}, A_{v_3}, \ldots, B_{p_3}, A_{p_2}, B_{p_1}, A_k, B_{q_1}, A_{q_2}, B_{q_3}, \ldots)$$

tal que k seja a maior quantidade de A's seguidos em s e há somente uma sequência de A's com k elementos, e que u é a maior quantidade de B's seguidos que aparecem em s e que haja apenas uma sequência de B's com u elementos. Daí

$$\begin{aligned} m_A^{(1)}(s) &= k \\ m_A^{(2)}(s) &= p_1 + q_1 \\ m_A^{(3)}(s) &= p_2 + q_2 \\ m_A^{(4)}(s) &= p_3 + q_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m_B^{(1)}(s) &= u \\ m_B^{(2)}(s) &= t_1 + v_1 \\ m_B^{(3)}(s) &= t_2 + v_2 \\ m_B^{(4)}(s) &= t_3 + v_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

(ii) Seja $s = (A_3, B, A_2, B_4, A_3, B_2) \in \{A, B\}^{15}$. Calculemos $m_A^{(i)}(s)$. Note que $\Sigma(s) = (3, 1, 2, 4, 3, 2)$ e portanto

$$m_A^{(1)}(s) = \max\{\Sigma(s)(2i+1) \mid i \in \mathbb{N}\} = \max\{3, 2, 3\} = 3$$

assim $I_A^{(1)}(s) = \{2i+1 \mid \Sigma(s)(2i+1) = m_A^{(1)}(s)\} = \{1, 5\}$. Como $I_A^{(1)}(s) \neq \emptyset$ temos

$$m_A^{(2)}(s) = \max\{e_l^{(1)}(s) \mid l \in I_A^{(1)}(s)\} = \max\{e_l^{(1)}(s) \mid l \in \{1, 5\}\} = \max\{e_1^{(1)}(s), e_5^{(1)}(s)\}.$$

Calculando $e_1^{(1)}(s)$ e $e_5^{(1)}(s)$

$$e_1^{(1)}(s) = \Sigma(s)(1+1) + \Sigma(s)(1-1) = \Sigma(s)(2) + \Sigma(s)(0) = 1 + 0 = 1$$

$$e_5^{(1)}(s) = \Sigma(s)(5+1) + \Sigma(s)(5-1) = \Sigma(s)(6) + \Sigma(s)(4) = 2 + 4 = 6$$

assim $m_A^{(2)}(s) = \max\{1, 6\} = 6$. Como $m_A^{(1)}(s) > 0$, segue que

$$I_A^2(s) = \{l \in I_A^{(1)}(s) \mid e_l^{(1)}(s) = m_A^{(1)}(s)\} = \{5\}.$$

Como $I_A^{(2)}(s) \neq \emptyset$, temos

$$m_A^{(3)}(s) = \max\{e_l^{(2)}(s) \mid l \in I_A^{(2)}(s)\} = \max\{e_5^{(2)}(s)\}.$$

Verificando o valor de $e_5^{(2)}(s)$ temos

$$e_5^{(2)}(s) = \Sigma(s)(5+2) + \Sigma(s)(5-2) = \Sigma(s)(7) + \Sigma(s)(3) = 0 + 2 = 2,$$

portanto $m_A^{(3)}(s) = 2$ *e* $I_A^{(3)}(s) = \{5\}$. *Como* $I_A^{(3)}(s) \neq \emptyset$, *temos*

$$m_A^{(4)}(s) = \max\{e_l^{(3)} \mid l \in I_A^{(3)}(s)\} = \max\{e_5^{(3)}\} = 1.$$

Daí $I_A^{(4)}(s) = \{5\}$. *Logo* $m_A^{(5)}(s) = e_5^{(4)} = \Sigma(s)(1) = 3$. *Assim* $I_A^{(5)}(s) = \{5\}$ *e* $m_A^{(6)}(s) = e_5^{(5)} = 0$. *Consequentemente* $m_A^{(j)} = 0$ *para* $j \geq 5$.

Calculemos agora $m_B^{(i)}(s)$,

$$m_B^{(1)}(s) = \max\{\Sigma(s)(2i) \mid i \in \mathbb{N}^*\} = \max\{1, 4, 2\} = 4,$$

assim $I_B^{(1)}(s) = \{2i \mid \Sigma(s)(2i) = m_B^{(1)}(s)\} = \{4\}$. *Como* $I_B^{(1)}(s) \neq \emptyset$ *temos*

$$\begin{aligned} m_B^{(2)}(s) &= \max\{e_l^{(1)}(s) \mid l \in I_B^{(1)}(s)\} = e_4^{(1)} = 2 + 3 = 5, \\ m_B^{(3)}(s) &= e_4^{(2)} = 1 + 2 = 3, \\ m_B^{(4)}(s) &= e_4^{(3)} = 3, \\ m_B^{(5)}(s) &= e_4^{(4)} = 0, \end{aligned}$$

portanto $m_B^{(j)}(s) = 0$ *para todo* $j \geq 5$.

(iii) Seja $s = (A_3, B_3, A_3, B)$. *Então* $\Sigma(s) = (3, 3, 3, 1)$. *Daí*

$$m_A^{(1)}(s) = \max\{\Sigma(s)(2i+1) \mid i \in \mathbb{N}\} = \max\{3, 3\} = 3$$

$$I_A^{(1)}(s) = \{2i+1 \mid \Sigma(s)(2i+1) = m_A^{(1)}(s)\} = \{1, 3\}$$

como $I_A^{(1)}(s) \neq \emptyset$, *temos*

$$m_A^{(2)}(s) = \max\{e_l^{(1)}(s) \mid l \in I_A^{(1)}(s)\} = \max\{e_1^{(1)}(s), e_3^{(1)}(s)\}$$

nesse caso

$$e_1^{(1)}(s) = \Sigma(s)(1+1) + \Sigma(s)(1-1) = \Sigma(s)(2) + \Sigma(s)(0) = 3 + 0 = 3$$

$$e_3^{(1)}(s) = \Sigma(s)(3+1) + \Sigma(s)(3-1) = \Sigma(s)(4) + \Sigma(s)(2) = 1 + 3 = 4$$

logo $m_A^{(2)} = 4$ *e* $I_A^{(2)}(s) = \{3\}$. *Como* $m_A^{(2)} > 0$ *e* $I_A^{(2)}(s) \neq \emptyset$ *temos*

$$m_A^{(3)}(s) = \max\{e_l^{(2)}(s) \mid l \in I_A^{(2)}(s)\} = \max\{e_3^{(2)}(s)\}$$

assim

$$m_A^{(3)}(s) = e_3^{(2)}(s) = \Sigma(s)(5) + \Sigma(s)(1) = 0 + 3 = 3$$

e $I_A^{(3)} = \{3\}$. *Note que* $e_3^{(3)} = 0$, *logo* $m_A^{(j)}(s) = 0$ *para todo* $j \geq 4$.

Agora calculemos $m_B^{(i)}(s)$.

$$m_B^{(1)}(s) = \max\{\Sigma(s)(2i) \mid i \in \mathbb{N}^*\} = \max\{3, 1\} = 3$$

$$I_B^{(1)}(s) = \{2i \mid \Sigma(s)(2i) = m_B^{(1)}(s)\} = \{2\}.$$

Como $I_B^{(1)}(s) \neq \emptyset$, *temos*

$$m_B^{(2)}(s) = \max\{e_l^{(1)}(s) \mid l \in I_B^{(1)}(s)\} = e_2^{(1)}(s) = 3 + 3 = 6.$$

Daí $I_B^{(2)}(s) = \{2\}$ *e*

$$\begin{aligned} m_B^{(3)}(s) &= e_2^{(2)} = \Sigma(s)(0) + \Sigma(s)(4) = 1 \\ m_B^{(4)}(s) &= e_2^{(3)} = \Sigma(s)(-1) + \Sigma(s)(5) = 0 \end{aligned}$$

logo $m_B^{(j)}(s) = 0$ *para todo* $j \geq 4$.

(iv) Seja $s' = (A_3, B, A_3, B_3)$, *a maior sequência de A's tem* 3 *elementos, que são justamente as únicas duas sequências de A que há. Logo* $m_A^{(1)}(s) = 3$. *A primeira tem* 0 *elementos na esquerda e* 1 *na direita, totalizando* 1. *Enquanto na segunda sequência de A's, temos* 1 *na esquerda e* 3 *na direita, totalizando* 4, *que é maior que* 1. *Logo* $m_A^{(2)}(s) = 4$. *Continuamos então apenas na segunda sequência de* $A's$. *Pulando uma sequência de B's na esquerda e na direita,* 3 *elementos na esquerda e* 0 *na direita, totalizando* 3. *Portanto* $m_A^{(3)}(s) = 3$. *Veja que pulando duas sequências tanto pra esquerda quanto pra direita da segunda sequência de A's não há mais elementos, portanto* $m_A^{(4)} = 0$ *e logicamente* $m_A^{(j)} = 0$ *para todo* $j \geq 4$.

Para $m_B^{(i)}(s)$, *note que há apenas uma sequência maximal de* $B's$, *portanto assim como no primeiro exemplo segue que*

$$\begin{aligned} m_B^{(1)}(s) &= 3 \\ m_A^{(2)}(s) &= 3 + 0 = 3 \\ m_B^{(3)}(s) &= 1 + 0 = 1 \\ m_B^{(4)}(s) &= 3 + 0 = 3 \\ m_B^{(5)}(s) &= 0 + 0 = 0 \\ &\vdots \\ m_B^{(j)}(s) &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

(v) Seja $s \in \{A, B\}^m$. *De acordo com nossa interpretação, não é difícil ver que* $m_A^{(i)}(s) = m_A^{(i)}(rev\ s)$ *e* $m_B^{(i)}(s) = m_B^{(i)}(rev\ s)$, *para todo* $i \in \mathbb{N}^*$. *Ademais*

$$m = m_A^{(1)}(s) + m_A^{(2)}(s) + m_A^{(3)}(s) + \cdots = m_B^{(1)}(s) + m_B^{(2)}(s) + m_B^{(3)}(s) + \cdots$$

Continuemos considerando $s : I_m \longrightarrow X = \{A, B\}$, e o espectro desta sequência $\Sigma(s) = (n_1, n_2, \ldots, n_{2t-1}, n_{2t})$. Note que

$$I_A^{(1)}(s) \supseteq I_A^{(2)}(s) \supseteq I_A^{(3)}(s) \supseteq I_A^{(4)}(s) \supseteq \cdots$$

e que existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $I_A^{(j_0)}(s) \neq \emptyset$ e $I_A^{(j)}(s) = \emptyset$ para todo $j > j_0$. Nesse caso se $l \in I^{(j_0)}$, então essa entrada satisfaz a seguinte condição: $e_l^{(j_0-1)}$ ou é a primeira entrada não nula de $\Sigma(s)$, ou a última entrada não nula de $\Sigma(s)$, ou a soma da primeira entrada não nula com a última entrada não nula de $\Sigma(s)$. Note que a última opção acontece se, e somente se, a sequência maximal de A's aparece no meio da sequência. Esses valores $m_A(s)^{(i)}$ nos dão uma condição necessária para que duas sequências possam ser espelhadas.

Lema 2.23 (Lemma 24 de [30]) *Dados $s, s' : I_m \longrightarrow \{A, B\}$. Se existe $i \in \mathbb{N}^*$ tal que $m_A^{(i)}(s) \neq m_A^{(i)}(s')$, então s e s' não podem ser espelhadas.*

Prova. Seja i o menor inteiro tal que $m_A^{(i)}(s) \neq m_A^{(i)}(s')$. Em particular $m_A^{(j)}(s) = m_A^{(j)}(s')$ para j inteiro tal que $1 \leq j < i$. Sem perda de generalidade vamos supor que $m_A^{(i)}(s) > m_A^{(i)}(s')$. Seja $w = (A_{n_1}, B_{n_2}, A_{n_3}, B_{n_4}, \ldots, C_{n_i})$, onde $n_j = m_A^{(j)}(s)$ para todo $j = 1, 2, \ldots, i$, e $C = A$ se i é impar e $C = B$ se i é par. Usando o item (iii) do Lema 2.4 concluímos que existe $\sigma \in \mathscr{T}_m$ tal que σs começa com w e portanto $o_w(s) = 1$. Além disso se $o_w(s') < \infty$ então existe $\sigma \in \mathscr{T}_m$ tal que $\sigma s'$ tem uma subsequência igual a w e daí segue que $m_A^{(i)}(s') \geq n_i = m_A^{(j)}(s)$ o que contradiz a desigualdade $m_A^{(i)}(s) > m_A^{(i)}(s')$, portanto $o_w(s') = \infty$. ■

Obviamente, de forma análoga, caso exista $i \in \mathbb{N}^*$ tal que $m_B(s)^{(i)} \neq m_B(s')^{(i)}$, então s e s' não podem ser espelhadas.

Exemplo 20 *Sejam $s = (A_3, B_3, A_3, B)$ e $s' = (A_3, B, A_3, B_3)$. Como vimos nos itens (iii) e (iv) do exemplo anterior, temos que $m_A^{(1)}(s) = m_A^{(1)}(s') = 3$, $m_A^{(2)} = m_A^{(2)}(s') = 4$, $m_A^{(3)}(s) = m_A^{(3)}(s')$ e $m_A^{(j)}(s) = m_A^{(j)}(s') = 0$ para todo $j > 3$. Porém $m_B^{(2)}(s) = 6 \neq 3 = m_B^{(2)}(s')$. Donde segue que s e s' não são espelhadas.*

Sejam $m \in \mathbb{N}^*$ e $\Sigma(s) = (n_1, \ldots, n_{2t})$ o espectro de $s : I_m \longrightarrow \{A, B\}$. Suponha que $n_1 > 0$, isto é, $s(1) = A$. Caso isso não ocorra, podemos renomear os símbolos A e B. Definiremos a "última entrada" de $\Sigma(s)$ como sendo

$$n_f = \begin{cases} n_{2t-1}, \text{ se } n_{2t} = 0 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Dada $s' : I_m \longrightarrow \{A, B\}$ de espectro $\Sigma(s') = \{n'_1, \ldots, n'_{2k}\}$, suponha que s e s' são espelhadas. Vamos argumentar que podemos supor simultaneamente que $n_1 > 0$ e $n'_1 > 0$. Com efeito, como s e s' são espelhadas segue que $s' = 1s' = \sigma s$ e $s = 1s = \tau s'$ para alguns $\sigma, \tau \in \mathscr{T}_m$. Lembre que $\sigma^{-1}(m) \in \{1, m\}$. Se $\sigma^{-1}(m) = 1$, então de $s' = \sigma s$ vemos que $s'_m = s_{\sigma^{-1}(m)} = s_1 = A$, e portanto, trocando s' por $rev\ s'$, podemos supor $n'_1 > 0$.

Caso $\sigma^{(-1)}(m) = m$. Temos duas possibilidades, $s_m = A$ ou $s_m = B$. Se $s_m = A$, então $s'_m = s_{\sigma^{-1}(m)} = s_m = A$ e portanto podemos novamente trocar s' por $rev\ s'$ para podermos supor $n'_1 > 0$. Porém se $s_m = B$, então

$$\tau^{-1}(m) = 1 \quad \Longrightarrow \quad s'_m = s_{\sigma^{-1}(m)} = s_m = B = s_m = s'_{\tau^{-1}(m)} = s'_1$$

$$\tau^{-1}(m) = m \quad \Longrightarrow \quad B = s_m = s'_{\tau^{-1}(m)} = s'_m.$$

No caso $\tau^{-1}(m) = 1$, trocamos s por $rev\ s$ e renomeamos A e B, e assim $n'_1 > 0$. Caso $\tau^{-1}(m) = m$, trocamos s por $rev\ s$, s' por $rev\ s'$ e renomeamos A e B.

Suponha então que $s, s' : I_m \longrightarrow \{A, B\}$ são espelhadas e que $n_1, n'_1 > 0$. Olhando para as permutações em $\mathscr{T}_{m-n_1-n_f} \circ \tau_{m-n_f}$ concluímos que $n_1 + n_f = n'_1 + n'_f$. De fato, note que $t = (j_1, \ldots, 1)s$ é a sequência obtida de s permutando ciclicamente as primeiras j_1 entradas, isto é, a i-ésima entrada de t é a $(i+1)$-ésima entrada de s para $i = 1, \ldots, j_1 - 1$ e a j_1-ésima entrada de t é a primeira entrada de s. Portanto segue do item (iii) do Lema 2.4 que para qualquer $\tau \in \mathscr{T}_m$ a sequência $\tau s'$ termina em no máximo $n'_1 + n'_f$ letras iguais a A consecutivas. No Exemplo 16 vimos que se $\sigma \in \mathscr{T}_{m-n_1-n_f} \circ \tau_{m-n_f}$ então σs termina em $n_1 + n_f$ letras iguais a A, como s e s' são espelhadas concluímos que $n_1 + n_f \leq n'_1 + n'_f$, de modo análogo concluímos que $n'_1 + n'_f \leq n_1 + n_f$ e portanto vale a igualdade. Ademais, segue do Lema 2.23 que $m_C(s)^{(i)} = m_C(s')^{(i)}$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$ e todo $C \in \{A, B\}$, portanto obtemos necessariamente que $n_i = n'_j$, para pelo menos um par de índices $i, j \in \{1, f\}$. A discussão acima prova o seguinte lema:

Lema 2.24 (Lemma 26 de [30]) *Se $s, s' : I_m \longrightarrow \{A, B\}$ são espelhadas, então há uma coincidência em (s, s') ou em $(s, rev\ s')$.*

Prova. Segue da discussão feita acima. ■

Com isso temos um caso particular do teorema que queremos demonstrar.

Proposição 2.25 (Proposition 27 de [30]) *Se $s, s' : I_m \longrightarrow \{A, B\}$ são espelhadas se, e somente se, $s = s'$ ou $s = rev\ s'$.*

Prova. Provemos por indução. Para $m = 1$ é imediato. Suponha o resultado valido para todo valor menor que m, provemos que vale para m. Pelo ***Lemma 2.24*** , há uma coincidência (m_1, m_2) para (s, s'). Daí, supondo $s(1) = A$, temos

$$s = (\underbrace{A, A, \ldots, A}_{m_1 \text{ vezes}}, B, s_{m_1+2}, \ldots, s_{m-m_2-1}, B, \underbrace{A, A, \ldots, A}_{m_2 \text{ vezes}})$$

$$s' = (\underbrace{A, A, \ldots, A}_{m_1 \text{ vezes}}, B, s'_{m_1+2}, \ldots, s'_{m-m_2-1}, B, \underbrace{A, A, \ldots, A}_{m_2 \text{ vezes}})$$

consideremos $s_0 = s_{|I'_m}$ e $s'_0 = s_{|I'_m}$. Daí segue que

$$s_0 = (B, s_{m_1+2}, \ldots, s_{m-m_2-1}, B) \quad \text{e} \quad s'_0 = (B, s'_{m_1+2}, \ldots, s'_{m-m_2-1}, B).$$

Assim segue que $s = s'$ se, e somente se, $s_0 = s'_0$. Ademais se $s_0 = rev\ s'_0$ então $m_1 = m_2$ e $s = rev\ s'$. Pelo ***Lemma 2.17***, temos que s_0 e s'_0 são espelhadas. Pela hipótese de indução segue que $s_0 = s'_0$ ou $s_0 = rev\ s'_0$. Logo $s = s'$ ou $s = rev\ s'$. ■

Usaremos esse caso particular para provar o caso em que X é um conjunto qualquer.

2.3.3 Sequências espelhadas em um conjunto qualquer

Para provarmos o resultado para o caso geral usando o caso em que X tem dois elementos, devemos dar um jeito de a partir de $s \in X^m$, onde X é qualquer, induzir uma sequência em um conjunto de 2 elementos de tal forma que preserve algumas propriedades convenientes. Adotaremos o seguinte método:

Definição 2.26 (Definition 28 de [30]) *Sejam X um conjunto qualquer e seja $s : I_m \longrightarrow X$, $X_0 \subseteq X$ e R um símbolo qualquer, não necessariamente um elemento de X. Definimos a função*

$$\pi_{X_0,R}(s) : I_m \longrightarrow X_0 \cup \{R\} \subseteq X \cup \{R\}$$

dada por

$$\pi_{X_0,R}(s)(i) = \begin{cases} s(i), \ \textit{se } s(i) \in X_0, \\ R, \ \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 21 *Seguem abaixo alguns exemplos a respeito da definição anterior:*

(i) Seja $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, *consideremos* $X_0 = \{0\}$ *e* $R = 0$, *então segue que para quaisquer* $m \in \mathbb{N}^*$ *e* $s : I_m \longrightarrow \mathbb{N}$, *segue que* $\pi_{\{0\},0}(s)(\mathbb{N}) = \{0\}$, *isto é,* $\pi_{\{0\},0}(s)(i) = 0$ *para todo* $i \in I_m$,

(ii) sejam $X = \{a, b, c, d, e\}$, $X_0 = \{a, b, c\}$, $s = (a, c, e) \in X^3$ *e* $s' = (a, a, e, b, d, a) \in X^6$, *então*

$$\pi_{X_0,R}(s) = (a, c, R) \qquad e \qquad \pi_{X_0,R}(s') = (a, a, R, b, R, a)$$

(iii) Seja X *qualquer e* $s \in X^m$. *Nomeando algum elemento de* X *de* A *e nomeando um elemendo* B *que não esteja em* X, *pondo* $X_0 = \{A\}$ *e* $R = B$, *temos que* $\pi_{\{A\},B}(s)$ *é uma sequência no conjunto* $\{A, B\}$ *com dois elementos.*

Vejamos que $\pi_{X_0,R}$ comuta com a S_m-ação e consequentemente preserva a noção de espelhamento.

Proposição 2.27 *Dadas* $s, s' : I_m \longrightarrow X$ *e* $\sigma \in S_m$. *Temos* $\pi_{X_0,R}(\sigma s) = \sigma\pi_{X_0,R}(s)$. *Ademais, se* s *e* s' *são espelhadas, então* $\pi_{X_0,R}(s)$ *e* $\pi_{X_0,R}(s')$ *também são, para todo* $X_0 \subseteq X$ *e* R.

Prova. Dado $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, segue que

$$(\sigma\pi_{X_0,R}(s))(i) = \pi_{X_0,R}(s)(\sigma^{-1}(i)) = \begin{cases} s(\sigma^{-1}(i)), \text{ se } s(\sigma^{-1}(i)) \in X_0, \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

por outro lado

$$\pi_{X_0,R}(\sigma s)(i) = \begin{cases} \sigma s(i), \text{ se } \sigma s(i) \in X_0, \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} s(\sigma^{-1}(i)), \text{ se } s(\sigma^{-1}(i)) \in X_0, \\ R, \text{ caso contrário.} \end{cases}.$$

Logo $\pi_{X_0,R}(\sigma s) = \sigma\pi_{X_0,R}(s)$. Suponha agora que s e s' são espalhadas. Dada $\tau \in \mathscr{T}_m$, existe $\tau' \in \mathscr{T}_m$ tais que $\tau s = \tau' s'$, daí

$$\tau\pi_{X_0,R}(s) = \pi_{X_0,R}(\tau s) = \pi_{X_0,R}(\tau' s') = \tau'\pi_{X_0,R}(s').$$

Analogamente, dado $\rho' \in \mathscr{T}_m$, existe $\rho \in \mathscr{T}_m$ tal que

$$\rho'\pi_{X_0,R}(s') = \rho\pi_{X_0,R}(s).$$

Portanto $\pi_{X_0,R}(s)$ e $\pi_{X_0,R}(s')$ são espelhadas. ■

Mais uma ferramenta importante para a demonstração do teorema no caso geral, é a seguinte definição:

Definição 2.28 (Definition 30 de [30]) *Sejam $s, s' : I_m \longrightarrow X$, onde X é um conjunto qualquer. Um elemento $A \in Im(s)$ é dito*

(i) direto para o par (s, s') se para todos $i \in s^{-1}(A)$, tem-se $s'(i) = A$, isto é,

$$s^{-1}(A) \subseteq (s')^{-1}(A),$$

(ii) reverso para o par (s, s') se para todos $i \in s^{-1}(A)$, tem-se $rev\ s'(i) = A$, isto é

$$s^{-1}(A) \subseteq (rev\ s')^{-1}(A).$$

Ainda a respeito desses tipos de elementos *diretos* e *reversos* temos:

Definição 2.29 (Definition 33 de [30]) *Sejam $s, s' : I_m \longrightarrow X$, onde X é um conjunto qualquer. Dizemos que (s, s') é um par especial se todo $A \in Im(s)$ é direto ou reverso para o par (s, s').*

Exemplo 22 *Exemplos das definições acima*

(i) Seja $X = \mathbb{N}$ consideremos $s, s' : I_7 \longrightarrow \mathbb{N}$ dadas por

$$s = (1, 5, 1, 2, 1, 8, 9) \quad e \quad s' = (1, 2, 1, 8, 1, 5, 1)$$

note que

$$s^{-1}(1) = \{1, 3, 5\} \subseteq \{1, 3, 5, 7\} = (s')^{-1}(1),$$

logo 1 é direto para o par (s, s'). Note que 1 não é direto para o par (s', s) e que

$$s^{-1}(5) = \{2\} = (rev\ s')^{-1}(5)$$

portanto 5 é reverso para o par (s, s') e direto para o para os pares $(rev\ s', s)$ e $(s, rev\ s')$. Já para o elemento 8 temos,

$$s^{-1}(8) = \{6\} \quad e \quad (s')^{-1}(8) = \{4\} = (rev\ s)^{-1}(8),$$

portanto 8 não é direto nem reverso para o par (s, s'). Assim (s, s') não é um par especial.

(ii) Se todo $A \in Im(s)$ é direto para o par (s, s'), então dado $i \in I_m$ temos que $s(i)$ é direto para o par (s, s'), logo $s'(i) = s(i)$. Logo $s = s'$. Reciprocamente, se $s = s'$, então todo $A \in Im(s)$ é direto para o par (s, s').

(iii) Analogamente ao item anterior, todo elemento $A \in Im(s)$ é reverso para o par (s, s') se, e somente se, $s = rev\ s'$.

(iv) Se (s, s') é um par especial. Então $(rev\ s, s')$ e $(s, rev\ s')$ são pares especiais.

(v) *Seja* (s,z) *um par especial. Mostremos que* (z,s) *também é um par especial. Inicialmente, fixado* $i = 1,2,\ldots,m$, *consideremos* $B = z(i)$. *Devemos mostrar que* $z^{-1}(B) \subseteq s^{-1}(B)$, *ou* $z^{-1}(B) \subseteq (rev\ s)^{-1}(B)$. *Pondo* $A = s(i) \in Im(s)$, *então ou* A *é direto, ou* A *é apenas reverso. Consideremos os seguintes casos:*

1. $A = s(i)$ *é direto: nesse caso temos* $A = s(i) = z(i) = B$, *logo* $B \in Im(s)$ *é direto para o par* (s,z). *Verifiquemos que nesse caso ocorre* $z^{-1}(B) \subseteq s^{-1}(B)$. *Com efeito, dado* $j \in z^{-1}(B)$, *temos os seguintes casos:*

   (a) $s(j) \in Im(s)$ *é direto: Nesse caso segue que* $s(j) = z(j) = B = A$, *logo* $j \in s^{-1}(B) = s^{-1}(A)$.

   (b) $s(j) \in Im(s)$ *é reverso: Nesse caso segue que* $s(j) = z(m-j+1)$

      (b.1) *se* $s(m-j+1)$ *é direto, segue que* $s(m-j+1) = z(m-j+1)$, *porém como* $z(m-j+1) = s(j)$ *temos que* $s(j) = s(m-j+1)$ *também é direto. Logo* $s(j) = z(j) = B$. *Consequentemente* $j \in s^{-1}(B)$.

      (b.2) *se* $s(m-j+1)$ *é reverso, segue que* $s(m-j+1) = z(j) = B$. *Como* $B = A$ *é direto, segue que* $s(m-j+1)$ *é direto, daí* $s(m-j+1) = z(m-j+1)$, *pela hipótese em* (b), *temos* $s(j) = z(m-j+1) = s(m-j+1)$, *daí* $s(j)$ *também é direto e daí* $s(j) = z(j) = B$, *portanto* $j \in s^{-1}(B)$.

2. $A = s(i)$ *é apenas reverso: nesse caso* $A = s(i) = z(m-i+1)$. *Verifiquemos que nesse caso ocorre* $z^{-1}(B) \subseteq (rev\ s)^{-1}(B)$. *Com efeito, dado* $j \in z^{-1}(B)$, *temos os seguintes casos*

   (c) $rev\ s(j) = s(m-j+1) \in Im(s)$ *é reverso: nesse caso* $s(m-j+1) = z(j) = B$, *logo* $j \in (rev\ s)^{-1}(B)$

   (d) $rev\ s(j) = s(m-j+1) \in Im(s)$ *é direto: nesse caso temos* $s(m-j+1) = z(m-j+1)$

      (d.1) *se* $s(j)$ *é reverso, temos* $s(j) = z(m-j+1)$, *e pela hipótese em* (d), *temos* $s(j) = z(m-j+1) = s(m-j+1)$, *logo* $s(m-j+1) \in Im(s)$ *também é reverso. Portanto* $s(m-j+1) = z(j) = B$. *Donde* $j \in (rev\ s)^{-1}(B)$

      (d.2) *se* $s(j)$ *é apenas direto, temos que* $s(j) = z(j) = B = z(i)$. *Inicialmente note que* $s(m-i+1)$ *não pode ser direto, pois caso contrário teríamos* $s(m-i+1) = z(m-i+1)$, *assim pela hipótese de* 2, *segue que* $s(m-i+1) = s(i) = A$, *donde segue que* A *é direto, absurdo. Portanto* $s(m-i+1)$ *é reverso. Daí* $s(m-i+1) = z(i) = B$, *donde* B *é reverso e consequentemente* $s(j) = B$ *é reverso. Absurdo, pois contrária a hipótese de que* $s(j)$ *é apenas direto.*

A ligação que há entre sequências espelhadas e pares especiais é a seguinte

Lema 2.30 *[Lemma 34 de [30]] Sejam $s, s' : I_m \longrightarrow X$, onde X é um conjunto qualquer. Se s e s' são espelhadas, então (s, s') é um par especial.*

Prova. Provemos a contra positiva: Caso exista $A \in Im(s)$ que não é direto nem reverso para o par (s, s'), então s e s' não são espelhadas. Com efeito, suponha $A \in Im(s)$ que não seja direto e nem reverso para o par (s, s'). Daí

$$s^{-1}(\{A\}) \nsubseteq (s')^{-1}(\{A\}) \quad \text{e} \quad s^{-1}(\{A\}) \nsubseteq (rev\ s')^{-1}(\{A\})$$

tomando $p \in s^{-1}(\{A\}) - (s')^{-1}(\{A\})$ e $q \in s^{-1}(\{A\}) - (rev\ s')^{-1}(\{A\})$, temos $s(p) = s(q) = A$ e $s'(p) \neq A \neq (rev\ s')(q)$. Seja $B \notin X$. Consideremos as aplicações $\pi_{\{A\},B}(s), \pi_{\{A\},B}(s') : I_m \longrightarrow \{A, B\}$ como na ***Definição 2.26***. Pela ***Proposição 2.27***, para que s e s' não sejam espelhadas, basta que $\pi_{\{A\},B}(s)$ e $\pi_{\{A\},B}(s')$ não sejam espelhadas. Pela ***Proposição 2.25***, para que $\pi_{\{A\},B}(s)$ e $\pi_{\{A\},B}(s')$ não sejam espelhadas é necessário e suficiente que $\pi_{\{A\},B}(s) \neq \pi_{\{A\},B}(s')$ e $\pi_{\{A\},B}(s) \neq rev\ \pi_{\{A\},B}(s') = \pi_{\{A\},B}(rev\ s')$. Com efeito, como $s'(p) \notin \{A\}$, temos

$$\pi_{\{A\},B}(s)(p) = A \neq B = \pi_{\{A\},B}(s')(p)$$

como $(rev\ s')(q) \notin \{A\}$, temos

$$\pi_{\{A\},B}(s)(q) = A \neq B = \pi_{\{A\},B}(rev\ s')(p) = rev\ \pi_{\{A\},B}(s')(q),$$

portanto $\pi_{\{A\},B}(s) \neq \pi_{\{A\},B}(s')$ e $\pi_{\{A\},B}(s) \neq rev\ \pi_{\{A\},B}(s')$. Concluímos assim a demonstração. ■

Lema 2.31 (Example 35 de [30]) *Seja (s, s') um par especial. Se $A = s(1)$ é direto para o par (s, s'), então há uma coincidência (* ***Definição 2.13*** *).*

Prova. Note que sendo o par (s, s') especial a quantidade de entradas iguais a A nas duas sequências é a mesma e como A é direto segue que $s^{-1}(\{A\}) = (s')^{-1}(\{A\})$. Portanto $s(i) = A$ se, e somente se, $s'(i) = A$ e existe uma coincidência para (s, s'). ■

Também precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.32 (Lemma 38 de [30]) *Sejam X um conjunto qualquer e $s, s' : I_m \longrightarrow X$ tais que (s, s') é um par especial onde $s' = \tau_{m-1}s$. Então $s = s'$.*

Prova. Seja $A = s(1)$. Se A é direto para (s, s'), então $s(1) = s'(1) = A$ e $s(m-1) = \tau_{m-1}s(1) = s'(1) = A$. Como A é direto segue que $A = s(m-1) = s'(m-1)$. Assim prosseguimos de forma indutiva. Se A é reverso, então $A = s(1) = s'(m)$, daí $A = s'(m) = \tau_{m-1}s(m) = s(m)$. Como $A = s(m)$ é reverso, segue que $s(m) = s'(1)$. Continuando o processo, o lema está demonstrado. ■

De forma análoga mostramos o seguinte lema:

Lema 2.33 *[Lemma 39 de [30]] Seja (s, s') um par especial. Suponha que (m_1, m_2) é uma coincidência para (s, s'). Consideremos $s_0 = s\mid_{I'_m}$ e $s'_0 = s'\mid_{I'_m}$. Se $s_0 = rev\ s'_0$, então $s = s'$.*

Finalmente estamos prontos para provarmos para um caso de um X qualquer:

Teorema 2.34 (Theorem 1 de [30]) *Sejam X um conjunto qualquer, $m \in \mathbb{N}^*$ e $s, s' \in X^m$. Temos que s e s' são espelhadas, isto é, $\mathscr{T}_m s = \mathscr{T}_m s'$, se, e somente se, $s = s'$ ou $s = rev\ s'$.*

Prova. A recíproca já foi demonstrada. Provemos por indução a ida. Suponha s e s' espelhadas. Para $m = 1$ o resultado segue de imediato. Suponha que o resultado é válido para todo inteiro positivo menor do que ou igual a $m-1$, onde $m \geq 2$ é um inteiro fixado. Pelo ***Lema 2.30*** que (s, s') é um par especial. Trocando s' por $rev\ s'$ se necessário, podemos supor que há uma coincidência em (s, s'). Dessa forma $s_0 = s\mid_{I'_m}$ e $s'_0 = s'\mid_{I'_m}$ são espelhadas. Pela hipótese de indução, temos $s_0 = s'_0$ ou $s_0 = rev\ s'_0$. Devido ao ***Lema 2.33***, ambos os casos implicam em $s = s'$. ■

Uma forma equivalente do teorema é o seguinte corolário:

Corolário 2.35 *Sejam X um conjunto qualquer e $s, s' \in X^m$. Então $s = s'$ ou $s = rev\ s'$ se, e somente se, para quaisquer $\sigma, \tau' \in \mathscr{T}_m$, encontramos $\sigma', \tau \in \mathscr{T}_m$ tais que $\sigma s = \sigma' s'$ e $\tau s = \tau' s'$.*

A relação entre esses resultados técnicos e as graduações em UT_n serão evidenciadas no próximo capítulo.

Capítulo 3

Graduações em UT_n, $UT_n^{(-)}$ e UJ_n

Iniciamos este capítulo relembrando que $(UT_n, *)$ representa qualquer um dos 3 casos (associativo, de Lie e de Jordan). Estudaremos aqui dois tipos de graduações particulares da álgebra $(UT_n, *)$, nos casos de Lie e de Jordan, a menos de menção contrária, assumiremos que G é abeliano. O foco nesses dois tipos de graduações será justificado. Iniciaremos estudando as graduações elementares nestas álgebras.

3.1 Graduação elementar

A seguir apresentamos a definição de graduação elementar na álgebra UT_n munida de um dos três produtos.

Definição 3.1 *[24] Uma graduação em $(UT_n, *)$, será dita elementar, quando todos os elementos e_{ij} forem homogêneos.*

Há maneiras alternativas de definir e caracterizar graduações elementares em $(UT_n, *)$ que são frequentemente encontradas na literatura existente sobre esses assunto. Veremos adiante algumas dessas formas, antes de apresentarmos tais resultados precisamos da seguinte proposição:

Proposição 3.2 *Seja $A = (UT_n, *)$, dado $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$, pondo*

$$A_g = span_K\{e_{ij} \mid g = g_i^{-1} g_j\}$$

temos que $\mathscr{G} : (A_g)_{g \in G}$ é uma G-graduação para A.

Prova. Claramente temos $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$. Para mostrar que $A_gA_h \subseteq A_{gh}$, $g, h \in G$, basta mostrarmos para as matrizes elementares. Dados $e_{ij} \in A_g$ e $e_{pq} \in A_h$, caso $e_{ij}e_{pq} = 0$, temos $e_{ij}e_{pq} \in A_{gh}$. Caso contrário, temos $j = p$ e daí $e_{ij}e_{pq} = e_{iq}$ e

$$gh = g_i^{-1}g_jg_p^{-1}g_q = g_i^{-1}g_jg_j^{-1}g_q = g_i^{-1}g_q$$

daí

$$e_{ij}e_{pq} = e_{iq} \in A_{g_i^{-1}g_q} = A_{gh}.$$

Portanto no caso associativo $\mathscr{G}$ é de fato uma G-graduação. Por fim, para os casos de Lie e de Jordan, consideraremos G abeliano. Como $e_{ij}e_{pq} \in A_{gh}$, de forma análoga temos $e_{pq}e_{ij} \in A_{hg}$. Como G é abeliano temos $gh = hg$ e portanto $e_{ij}e_{pq}, e_{pq}e_{ij} \in A_{gh}$. Consequentemente temos $e_{ij}e_{pq} \pm e_{pq}e_{ij} \in A_{gh}$ e concluímos que $\mathscr{G}$ também é uma graduação nos casos de Lie e de Jordan. ■

Observação 3.3 *Na proposição acima também poderíamos definir a graduação com* $A_g = span_K\{e_{ij} \mid g = g_ig_j^{-1}\}$.

Devido ao resultado exibido pouco acima definimos:

Definição 3.4 *Seja* $A = (UT_n, *)$. *Dado* $\varepsilon = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$ *a* G*-graduação em* A *definida por* $A_g = span_K\{e_{ij} \mid g = g_i^{-1}g_j\}$ *é chamada de* G*-graduação elementar definida pela* n*-upla* ε.

As definições apresentadas aqui são equivalentes. De fato isto é a afirmação contida na proposição a seguir que é uma adaptação de [28][Lemma 5].

Proposição 3.5 *Seja* $A = (UT_n, *)$. *Uma* G*-graduação em* A *é elementar no sentido da* ***Definição 3.4*** *se, e somente se, todas as matrizes elementares em* UT_n *são homogêneas.*

Prova. Se a G-graduação for elementar no sentido da ***Definição 3.4***, teremos por definição as matrizes e_{ij} homogêneas. Reciprocamente supondo em uma G-graduação de A todas as matrizes e_{ij} sejam homogêneas, provemos inicialmente que existem $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ tais que $G\text{-}deg(e_{i,i+1}) = g_i^{-1}g_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Se $g_1 = 1$ e $g_2 = G\text{-}deg(e_{12})$ temos $G\text{-}deg(e_{12}) = g_1^{-1}g_2$. Indutivamente, supondo que $g_1, \ldots, g_i$ foram determinados a igualdade $G\text{-}deg(e_{i,i+1}) = g_i^{-1}g_{i+1}$ determina g_{i+1} para $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Tomemos então $\varepsilon = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$. Finalmente para o grau

de e_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$, caso $i = j$, note que $e_{ii} * e_{i,i+1} = e_{i,i+1}$ e $e_{n-1,n} * e_{nn} = e_{nn}$, portanto $G\text{-}deg(e_{ii}) = 1 = g_i^{-1} g_i$. Para $i < j$ note que

$$e_{ij} = e_{i,i+1} * e_{i+1,i+2} * \cdots * e_{j-2,j-1} * e_{j-1,j},$$

daí

$$\begin{aligned} G\text{-}deg(e_{ij}) &= G\text{-}deg(e_{i,i+1}) \cdot G\text{-}deg(e_{i+1,i+2}) \cdots G\text{-}deg(e_{j-2,j-1}) \cdot G\text{-}deg(e_{j-1,j}) \\ &= g_i^{-1} g_{i+1} g_{i+1}^{-1} g_{i+2} g_{i+2}^{-1} g_{i+3} \cdots g_{j-3}^{-1} g_{j-2} g_{j-2}^{-1} g_{j-1} g_{j-1}^{-1} g_j \\ &= g_i^{-1} g_j, \end{aligned}$$

donde segue que tal graduação é a elementar definida por ε. ■

Neste trabalho adotaremos a ***Definição 3.1***. Como vimos pouco acima os graus dos elementos $e_{i,i+1}$, $1 \leq i < n$, conseguem determinar o grau de todas as demais matrizes e_{ij}. Tal propriedade importante é enfatizada na proposição a seguir.

Proposição 3.6 *Se $A = (UT_n, *)$ está munida de uma G-graduação elementar, então a sequência $\eta = (G\text{-}deg(e_{12}), G\text{-}deg(e_{23}), \ldots, G\text{-}deg(e_{n-1,n})) \in G^{n-1}$ define completamente a graduação. Reciprocamente, toda sequência $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in G^{n-1}$ define uma G-graduação elementar em $(UT_n, *)$, tal que $n_i = G\text{-}deg(e_{i,i+i})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

Prova. (=>)

É fácil ver que

$$A_g = span_K\{e_{ij} \in UT_n \mid G\text{-}deg(e_{ij}) = g\}.$$

Mostremos que podemos deduzir o grau dos e_{ij} a partir do grau dos elementos $e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{n-1,n}$. Inicialmente calculemos o grau de e_{ii}. Seja g o grau de e_{ii}, $1 \leq i < n$ e h o grau de $e_{i,i+1}$, no caso associativo, de Lie e de Jordan temos

(i) $e_{ii} e_{i,i+1} = e_{i,i+1}$

(ii) $[e_{ii}, e_{i,i+1}] = e_{i,i+1}$

(iii) $e_{ii} \circ e_{i,i+1} = e_{i,i+1}$

Em todo caso temos $gh = h$, logo $g = 1$. Portanto $G\text{-}deg(e_{ii}) = 1$ para $1 \leq i < n$. Já para o e_{nn} temos

(i) $e_{n-1,n}e_{n,n} = e_{n-1,n}$

(ii) $[e_{n-1,n}, e_{n,n}] = e_{n-1,n}$

(iii) $e_{n-1,n} \circ e_{n,n} = e_{n-1,n}$

donde segue que $G\text{-}deg(e_{nn}) = 1$. Assim só nos resta determinar o grau de e_{ij} para $i < j$. Para isso note que

(i) $e_{ij} = e_{i,i+1}e_{i+1,i+2}\cdots e_{j-2,j-1}e_{j-1,j}$

(ii) $e_{ij} = [e_{i,i+1}, e_{i+1,i+2}, \ldots, e_{j-2,j-1}, e_{j-1,j}]$

(iii) $e_{ij} = e_{i,i+1} \circ e_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ e_{j-2,j-1} \circ e_{j-1,j}$.

Em todo caso é conhecido o grau das demais matrizes elementares, e portanto está determinado o grau de e_{ij}.

(<=)

Consideremos a função $f : \{e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{n-1,n}\} \to G$, tal que vale a igualdade $\eta = (f(e_{12}), f(e_{23}), \ldots, f(e_{n-1,n}))$. Vamos estender o domínio de f para $\{e_{ij} \mid i \leq j\}$ pondo $f(e_{ii}) = 1$ para $1 \leq i \leq n$, e

$$f(e_{ij}) := f(e_{i,i+1})f(e_{i+1,i+2})\cdots f(e_{j-2,j-1})f(e_{j-1,j})$$

para $i < j$. É fácil ver que

$$f(e_{ij}) = f(e_{ik})f(e_{kj})$$

em G, para $i < k < j$. Consideremos agora a coleção $(A_g)_{g\in G}$ de subespaços de UT_n dados por

$$A_g = span_K\{e_{ij} \in UT_n \mid f(e_{ij}) = g\}.$$

É óbvio que $UT_n = \bigoplus_{g\in G} A_g$. Mostremos que isso define uma G-graduação para UT_n tal que $G\text{-}deg(e_{ij}) = f(e_{ij})$. Dados $g, h \in G$, para mostramos que $A_gA_h \subseteq A_{gh}$, caso $A_g = 0$ ou $A_h = 0$ nada a ser feito. Caso contrário basta mostramos que

$$x \in A_g, y \in A_h \quad \Longrightarrow \quad xy \in A_{gh}$$

para x e y entre as matrizes elementares. Suponha $g, h \in G$ tais que $A_g \neq 0 \neq A_h$, tomemos $e_{ij} \in A_g$ e $e_{pq} \in A_h$.

(i) **Caso associativo**. Se $e_{ij}e_{pq} = 0$, nada a ser feito. caso contrário, temos $j = p$ e daí $e_{ij}e_{pq} = e_{iq}$. Caso $i = q$, então $i = j = p = q$ e portanto $f(e_{ij}) = f(e_{pq}) = 1$ e daí $g = h = 1$ donde segue que $e_{ij}e_{pq} = e_{iq} \in A_{gh} = A_1$. Caso $i < q$ temos $f(e_{iq}) = f(e_{ij})f(e_{pq}) = gh$, logo $e_{iq} \in A_{gh}$.

(ii) **Caso de Lie e de Jordan**. Segue do item anterior vemos que $e_{ij}e_{pq} \in A_{gh}$, e analogamente teremos $e_{pq}e_{ij} \in A_{hg}$. Lembrando que nesse caso consideramos G abeliano, temos $A_{gh} = A_{hg}$ e portanto $e_{ij}e_{pq}, e_{pq}e_{ij} \in A_{gh}$, concluímos assim que $e_{ij}e_{pq} \pm e_{pq}e_{ij} \in A_{gh}$. Assim $[e_{ij}, e_{pq}], e_{ij} \circ e_{pq} \in A_{gh}$, desde que $e_{ij} \in A_g$ e $e_{pq} \in A_h$.

■

Tendo em vista o resultado acima, assumiremos a seguinte notação:

Notação 3.7 *Assim como em [24], denotaremos por* $((UT_n, *), \eta)$ *a* G*-graduação elementar definida por* $\eta \in G^{n-1}$*. Isto é,* $G\text{-}deg(e_{12}) = \eta_1, \ldots, G\text{-}deg(e_{n-1,n}) = \eta_{n-1}$*, onde* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$*.*

O resultado a seguir nos mostra que para o estudo de graduações elementares, tanto no caso de Lie quanto no de Jordan, a hipótese de que G é abeliano é natural. Esta proposição é uma adaptação de [25][Lemma 2].

Proposição 3.8 *Seja* G *um grupo qualquer. Dada uma* G*-graduação elementar em* $(UT_n, *)$ *temos que o suporte da* G*-graduação é comutativo.*

Prova. Pela ***Proposição 3.6*** vemos que qualquer elemento do suporte da graduação é produto dos $t_i = G\text{-}dege_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, portanto para provar o resultado basta mostrarmos que os elementos t_i comutam. Dados $i < j$ note que

$$\begin{aligned} 0 \neq e_{i+1,j+1} &= e_{i+1,i+2} * e_{i+2,i+3} * \cdots * e_{j-1,j} * e_{j,j+1} \\ &= e_{j,j+1} * (e_{i+1,i+2} * e_{i+2,i+3} * \cdots * e_{j-1,j}), \end{aligned}$$

portanto

$$t_{i+1}t_{i+2}\cdots t_{j-1}t_j = t_jt_{i+1}t_{i+2}\cdots t_{j-1}.$$

Multiplicando a esquerda por t_i temos

$$t_it_{i+1}t_{i+2}\cdots t_{j-1}t_j = t_it_jt_{i+1}t_{i+2}\cdots t_{j-1}. \tag{3.1}$$

Ademais

$$0 \neq e_{i,j+1} = e_{i,i+1} * e_{i+1,i+2} * \cdots * e_{j-1,j} * e_{j,j+1}$$
$$= e_{j,j+1} * (e_{i,i+1} * e_{i+1,i+2} * \cdots * e_{j-1,j}),$$

assim temos

$$t_i t_{i+1} \cdots t_{j-1} t_j = t_j t_i t_{i+1} \cdots t_{j-1} \tag{3.2}$$

o lado esquerdo das equações (3.1) e (3.2) são iguais. Igualando o lado direito vemos que $t_i t_j = t_j t_i$. ■

Assim se $A = (UT_n, *)$ está munida de uma G-graduação elementar $\mathscr{G} : A = \underset{g\in G}{\oplus} A_g$, onde G é um grupo qualquer, consideremos H como o subgrupo de G gerado por $supp\mathscr{G}$. Temos que H é um grupo abeliano e que $A = \underset{h\in H}{\oplus} A_h$ é uma H-graduação elementar para A. Note que as duas graduações têm o mesmo suporte, as mesmas codimensões graduadas e consequentemente o mesmo expoente graduado. Por isso a menos de restringir ao subgrupo gerado pelo suporte, podemos supor que G é abeliano.

Uma outra forma, mais minimalista, de definir graduações elementares, pode ser obtida pelo seguinte resultado que é uma adaptação do Lemma 6 de [28].

Proposição 3.9 *Seja $A = (UT_n, *)$ e $1 \in G$ o elemento neutro do grupo G. Uma G-graduação $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é elementar se, e somente se, cada matriz e_{ii} é homogênea para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, ou equivalentemente se $e_{ii} \in A_1$.*

Prova. Supondo $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação elementar, pela definição, temos que e_{ii} é homogêneo, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, e pela demonstração da ***Proposição 3.6*** vemos que $e_{ii} \in A_1$. Suponha agora que os elementos e_{ii}, para $i = 1, 2, \ldots, n$ sejam homogêneos, dado $1 \leq i < n$, consideremos o subespaço

$$A_i = e_{ii} * A * e_{i+1,i+1} := \{e_{ii} * a * e_{i+1,i+1} \mid a \in A\}.$$

Dados $\lambda_{kl} \in K$, $k \leq l$, temos

$$e_{ii} * \left(\sum_{k\leq l} \lambda_{kl} e_{kl} \right) * e_{i+1,i+1} = \lambda_{i,i+1} e_{i,i+1}$$

em todos os 3 casos, portanto $A_i = span_K\{e_{i,i+1}\}$ e $dim A_i = 1$. Assim dado um elemento $a \in A$ homogêneo tal que $e_{ii} a e_{i+1,i+1} \neq 0$, tal elemento deve existir pois

$dim A_i \neq 0$, devemos ter $A_i = span_K\{e_{ii}ae_{i+1,i+1}\}$. Como e_{ii}, a e $e_{i+1,i+1}$ são homogêneos temos que $e_{i,i+1}$ é um múltiplo escalar de um elemento homogêneo. Deste modo concluímos que todos os elementos $e_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, são homogêneos. Consequentemente todos os elementos e_{ij}, $i < j$, são homogêneos e a graduação é elementar. ■

Dessa forma, devido à proposição anterior também poderíamos definir uma G-graduação elementar em UT_n como uma G-graduação onde as matrizes e_{ii} são homogêneas. Uma graduação em particular do tipo elementar muito importante é a seguinte:

Definição 3.10 *[22] Seja UT_n com a multiplicação usual de matrizes, definimos a graduação $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica, como sendo a graduação elementar determinada por $(1, 2, \ldots, n) \in (\mathbb{Z}_n)^n$, i.e., a graduação elmentar tal que $deg e_{ij} = j - i \in \mathbb{Z}_n$.*

Para a graduação definida acima, em [22], os autores calcularam a codimensão graduada. Para enunciarmos tal resultado, usaremos a seguinte notação:

Definição 3.11 ([23]) *Dizemos que as funções $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tem o mesmo crescimento (ou são assintoticamente iguais) se $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$. Nesse caso denotamos $f \sim g$.*

Com tal notação temos o seguinte resultado:

Teorema 3.12 ([22]) *A m-ésima codimensão graduada da $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica em UT_n satisfaz*

$$c_m^{\mathbb{Z}_n}(UT_n) = \sum_{q=0}^{min\{m,n-1\}} \binom{m}{q} \binom{n-1}{q} q!(q+1)^{m-q}.$$

O comportamento assintótico da codimensão é $c_m^{\mathbb{Z}_n}(UT_n) \sim \frac{1}{n^{n-1}} m^{n-1} n^m$. Em particular, o expoente graduado é $exp^{\mathbb{Z}_n}(UT_n) = n$.

Para introduzirmos mais uma definição importante neste trabalho, antes precisamos definir o associador em uma álgebra.

Definição 3.13 *Seja $(A, *)$ uma álgebra, definamos o associador $(\cdot, \cdot, \cdot)$ em A como sendo*

$$(a, b, c) := (a * b) * c - a * (b * c), \quad a, b, c \in A.$$

Note que A é associativa se, e somente se, $(a, b, c) = 0$ para quaisquer $a, b, c \in A$.

Observação 3.14 *No caso de Jordan, dados $a, b, c \in UJ_n$ temos*

$$\begin{aligned}(a,b,c) &= (a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c)\\ &= (ab+ba) \circ c - a \circ (bc+cb)\\ &= abc + bac + cab + cba - abc - acb - bca - cba\\ &= +bac + cab - acb - bca\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}(a,b,c) &= +bac + cab - acb - bca\\ &= b(ac-ca) + (ca-ac)b\\ &= b(ac-ca) - (ac-ca)b\\ &= [b, ac-ca]\\ &= [b,[a,c]]\end{aligned}$$

ou $(a,b,c) = -[a,c,b]$.

Assim como em [10], definimos:

Definição 3.15 *[10] Seja $((UT_n, *), \eta)$ uma G-graduação elementar.*

(i) Uma sequência $\mu = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$ é uma sequência η-boa associativa (Lie ou Jordan) se existem matrizes elementares triangulares estritamente superiores $r_1, r_2, \ldots, r_m$ tais que G-deg$(r_i) = a_i$, para cada i, e $r_1 * r_2 * \cdots * r_m \neq 0$. Dizemos que é η-ruim se esta sequência não for η-boa.

(ii) Dados $i \in \mathbb{N}^*$ e $a \in G$ defina

$$f_i^{(a)} = \begin{cases} x_i^{(a)}, & \text{se } a \neq 1,\\ [x_{2i-1}^{(1)}, x_{2i}^{(1)}], & \text{se } a = 1 \text{ e } * \text{ não é o produto de Jordan},\\ (x_{3i-2}^{(1)}, x_{3i-1}^{(1)}, x_{3i}^{(1)}), & \text{se } a = 1 \text{ e } * = \circ \text{ é o produto de Jordan.}\end{cases}$$

(iii) Dada uma sequência $\mu = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$ definamos

$$f_\mu = f_1^{(a_1)} * f_2^{(a_2)} * \cdots * f_m^{(a_m)}.$$

A importância dos elementos descritos acima é que para $((UT_n, *), \eta)$ os polinômios f_μ, onde $\mu \in G^m$ e $m \leq n$, tem papel importante no estudo do ideal das identidades graduadas de $((UT_n, *), \eta)$.

Lema 3.16 *Dado $\mu = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$, se f_μ não for uma identidade graduada para $((UT_n, *), \eta)$, então existem índices $i_1, j_1, \ldots, i_m, j_m$, onde $i_m < j_m$, e uma substituição em f_μ que resulta em*

$$(\pm e_{i_1 j_1}) * (\pm e_{i_2 j_2}) * \cdots * (\pm e_{i_m j_m}) \neq 0.$$

Prova. Suponha que f_μ não é uma identidade graduada, então existem matrizes homogêneas $r_1, \ldots, r_t$ tais que $f_\mu(r_1, \ldots, r_t) \neq 0$. Como f_μ é multilinear e as matrizes e_{ij} são homogêneas, podemos escolher as matrizes r_i entre as e_{ij}. Se $a_k \neq 1$ então $f_k^{(a_k)} = x_k^{(a_k)}$ só poderá aceitar uma matriz e_{ij} com $i < j$ (estritamente superior), pois as matrizes e_{ii} tem grau 1, mas $a_k \neq 1$. Consideremos a possibilidade que $a_k = 1$.

Caso associativo e de Lie: Nesse caso temos $f_k^{(a_k)} = f_k^{(1)} = [x_{2k-1}^{(1)}, x_{2k}^{(1)}]$. Ao ser avaliado em matrizes e_{ij}, e_{pq}, nessa ordem, de grau 1 de forma que não se anule, devemos ter $j = p$ ou $i = q$. Ambas as coisas não podem acontecer. Caso $j = p$ e $i \neq q$ temos $[e_{ip}, e_{pq}] = e_{iq}$, como $i \neq q$, temos que $e_{iq} = f_k^{(1)}(e_{ij}, e_{pq})$ é uma matriz triangular estritamente superior de grau $a_k = 1$. Caso $j \neq p$ e $i = q$ temos $[e_{qj}, e_{pq}] = -e_{pj}$ e $p < j$, ou seja $f_k^{(1)}(e_{ij}, e_{pq}) = -e_{pj}$, é uma matriz triangular estritamente superior de grau $a_k = 1$. Portanto o produto $f_1^{(a_1)} * \cdots * f_m^{(a_m)}$ após a avaliação não nula ficará

$$(\pm e_{i_1 j_1}) * (\pm e_{i_2 j_2}) * \cdots * (\pm e_{i_m j_m}) \neq 0$$

onde $i_r < j_r$, $1 \leq r \leq m$ (ou seja, as matrizes $\pm e_{i_r j_r}$ são triangulares estritamente superiores).

Caso de Jordan: Se $a_k = 1$, então

$$\begin{aligned} f_k^{(1)} &= (x_{3k-2}^{(1)}, x_{3k-1}^{(1)}, x_{3k}^{(1)}) \\ &= x_{3k-1}^{(1)} x_{3k-2}^{(1)} x_{3k}^{(1)} + x_{3k}^{(1)} x_{3k-2}^{(1)} x_{3k-1}^{(1)} - x_{3k-2}^{(1)} x_{3k}^{(1)} x_{3k-1}^{(1)} - x_{3k-1}^{(1)} x_{3k}^{(1)} x_{3k-2}^{(1)} \end{aligned}$$

escolhendo matrizes e_{ij}, e_{rs}, e_{pq} tal que a substituição, em alguma ordem, é não nula, uma das 4 parcelas deve ser não nula. Vamos supor que nessa parcela não nula tenhamos, a menos de sinal, $e_{ij} e_{rs} e_{pq}$, então devemos ter $r = j$ e $s = p$, ou seja, as matrizes são e_{ij}, e_{jp}, e_{pq}. Inicialmente vemos que $i \neq q$, pois caso contrário os índices serão todos iguais e a substituição daria nula. Então a parcela não nula, a menos de sinal é $e_{iq} = e_{ij} e_{jp} e_{pq}$, com $i < q$, uma matriz triangular estritamente superior. Vamos mostrar que o resultado da substituição vai ser $\pm e_{iq}$. Utilizando $a = x_{3k-2}^{(1)}, b = x_{3k-1}^{(1)}$ e

$c = x_{3k}^{(1)}$, pela **Observação 3.14**, temos $(a,b,c) = bac + cab - acb - bca$. Note que as únicas matrizes que aparecem no meio de duas são a e c, então e_{jp} deve ser substituída em a ou c. Ainda pela **Observação 3.14**, temos $(a,b,c) = [b,[a,c]]$, ou seja, trocar a por c apenas altera o sinal da avaliação. Logo podemos supor que e_{jp} será substituída em a. Supondo inicialmente que $c = e_{pq}$, se tivermos $q = j$ então $j = p = q$, daí $[a,c] = [e_{jp}, e_{pq}] = [e_{jj}, e_{jj}] = 0$, não podendo ser essa a substituição não nula. Então $j < q$ e daí $[e_{jp}, e_{pq}] = e_{jq}$, donde segue que $[b,[a,c]] = [e_{ij}, e_{jq}] = e_{iq}$, já vimos que $i \neq q$. Por fim, caso $c = e_{ij}$ então $[a,c] = [e_{jp}, e_{ij}] = -e_{ip}$, pois analogamente não podemos ter $i = j$. Daí $[b,[a,c]] = [e_{pq}, -e_{ip}] = e_{iq}$. ■

Com isso estamos aptos a provar o seguinte resultado:

Proposição 3.17 (Adaptação de Proposition 2.2 de [10]) *Considere uma G-graduação elementar $((UT_n, *), \eta)$. Uma sequência $\mu = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$ é η-ruim se, e somente se, f_μ é uma identidade graduada para $((UT_n, *), \eta)$.*

Prova.

$\Rightarrow$)

Por contrapositiva, o resultado segue do ***Lema 3.16***.

$\Leftarrow$)

Vamos também fazer por contrapositiva. Suponha que $\mu = (a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ é η-boa isto é, existem $e_{i_1 j_1}, \ldots, e_{i_m j_m}$ com $G\text{-}deg(e_{i_k j_k}) = a_k$ e $i_k < j_k$ tais que

$$e_{i_1 j_1} * \cdots * e_{i_m j_m} \neq 0$$

Para mostrar que f_μ não é identidade graduada, para $a_k \neq 1$, temos $f_k^{a_k} = x_k^{a_k}$, então basta substituir $x_k^{(a_k)}$ por $e_{i_k j_k}$. Para $a_k = 1$, no caso de Lie e associativo, temos $f_k^{(1)} = [x_{2k-1}^{(1)}, x_{2k}^{(1)}]$, basta substituirmos $x_{2k-1}^{(1)}$ por $e_{i_k j_k}$ e $x_{2k}^{(1)}$ por $e_{j_k j_k}$, daí $[e_{i_k j_k}, e_{j_k j_k}] = e_{i_k j_k}$. Com essas substituições a expressão de f_μ com a substituição fica $e_{i_1 j_1} * \cdots * e_{i_m j_m} \neq 0$. Por fim para o caso de Jordan, se $a_k = 1$, temos $f_k^{(1)} = (x_{3k-2}^{(1)}, x_{3k-1}^{(1)}, x_{3k}^{(1)})$, mas já vimos que

$$(x_{3k-2}^{(1)}, x_{3k-1}^{(1)}, x_{3k}^{(1)}) = [x_{3k-1}^{(1)}, [x_{3k-2}^{(1)}, x_{3k}^{(1)}]]$$

Basta fazermos $x_{3k-2}^{(1)} = e_{i_k j_k}$, $x_{3k}^{(1)} = e_{j_k j_k}$ e $x_{3k-1}^{(1)} = e_{i_k i_k}$ pois daí (no que vem a seguir denotaremos $i_k = i$ e $j_k = j$)

$$f_k^{(1)}(e_{ij}, e_{ii}, e_{jj}) = (e_{ij}, e_{ii}, e_{jj}) = [e_{ii}, [e_{ij}, e_{jj}]] = [e_{ii}, e_{ij}] = e_{ij}.$$

Com essas substituições a avaliação em f_μ resulta em $e_{i_1j_1} * \cdots * e_{i_mj_m} \neq 0$. ■

Em um caso particular, podemos fazer uma conexão entre sequências η-boas e o conteúdo do Capítulo 2.

Proposição 3.18 (Lemma 8 de [25]) *No caso de Jordan. Considere uma G-graduação elementar (UJ_n, η). Uma sequência $\mu \in G^{n-1}$ é η-boa se, e somente se, existe $\sigma \in \mathscr{T}_{n-1}$ tal que $\mu = \sigma\eta$.*

Ainda para o caso de Jordan, uma importante propriedade que se relaciona com o Capítulo 2 é a seguinte:

Proposição 3.19 (*Corollary 10 de [25]*) *Sejam G um grupo qualquer e $\eta, \eta' \in G^{n-1}$, onde $\eta \neq \eta'$ e $\eta \neq rev\ \eta'$, então $(UJ_n, \eta) \ncong (UJ_n, \eta')$.*

Prova. Caso $(UJ_n, \eta) \cong (UJ_n, \eta')$. Então dado $\sigma \in \mathscr{T}_{n-1}$, de acordo com a proposição anterior, teríamos que $\sigma\eta$ seria uma sequência boa para (UJ_n, η) e consequentemente para (UJ_n, η'). Daí existiria $\tau \in \mathscr{T}_{n-1}$ tal que $\sigma\eta = \tau\eta'$. Analogamente, dado $\sigma' \in \mathscr{T}_{n-1}$, existe $\sigma' \in \mathscr{T}_{n-1}$ tal que $\tau'\eta' = \sigma'\eta$. Portanto η e η' são espelhadas. Pelo ***Teorema 2.34***, deveríamos ter $\eta = \eta'$ ou $\eta = rev\ \eta'$. ■

Claramente temos o análogo para o caso de Lie

Proposição 3.20 *No caso de Lie considere uma G-graduação elementar $(UT_n^{(-)}, \eta)$. Uma sequência $\mu \in G^{n-1}$ é η-boa se, e somente se, existe $\sigma \in \mathscr{T}_{n-1}$ tal que $\mu = \sigma\eta$.*

Proposição 3.21 (Corollary 2.11 de [26]) *Sejam G um grupo qualquer e $\eta, \eta' \in G^{n-1}$, onde $\eta \neq \eta'$ e $\eta \neq rev\ \eta'$, então $(UT_n^{(-)}, \eta) \ncong (UT_n^{(-)}, \eta')$.*

Prova. A demonstração é exatamente a mesma para o caso de Jordan. ■

Assim como dito em [25] e em [24], para o caso de Jordan e para o caso de Lie, pondo a relação " $\sim$ " de equivalência em G^{n-1}, dada por $\eta \sim \eta'$ se, e somente se, η e η' são espelhadas, isto é, $\eta = \eta'$ ou $\eta = rev\ \eta'$, temos uma correspondência biunívoca entre $G^{n-1}/\sim$ e as classes de isomorfismos de G-graduações elementares em UJ_n, o mesmo vale para o caso de Lie. Ademais, nesse caso, graduações não isomorfas possuem obrigatoriamente algumas identidades graduadas distintas. Por fim, para graduações do tipo elementar no caso associativo, temos:

Teorema 3.22 *[28] Uma G-graduação em UT_n (caso associativo) é, a menos de um isomorfismo G-graduado, uma G-graduação elementar.*

[10] Seja $((UT_n, \cdot), \eta)$ uma graduação elementar, para UT_n sobre um corpo infinito vista como álgebra associativa. O ideal das identidades G-graduadas de $((UT_n, \cdot), \eta)$ é gerado pelas sequências η-ruins de comprimento no máximo n.

O teorema acima mostra a relevância das graduações do tipo elementar. No caso associativo, dada uma G-graduação para UT_n, para fins de calcular o expoente graduado, como graduações isomorfas preservam o expoente graduado, podemos supor que a G-graduação é elementar.

Nos casos de Lie e de Jordan nem todas as graduações são isomorfas a graduações elementares. Porém existem, a menos de isomorfismo, dois tipos de graduações. Veremos esse outro tipo de graduação a seguir.

3.2 Graduações Mirror Pattern Type (MT)

Esta seção é dedicada a estudar propriedades sobre um caso particular de graduações nas álgebras $UT_n^{(-)}$ e UJ_n. Portanto nesta seção $* = \odot$ simbolizará apenas os produtos de Lie e de Jordan. Para definirmos que tipo de graduação é essa, precisamos dos elementos da definição a seguir.

Definição 3.23 ***[23]*** *Em UT_n, definimos*

$$e_{i:m} = e_{i,i+m} \qquad e \qquad e_{-i:m} = e_{n+1-i-m,n+1-i}$$

para todos os índices i e m em que fazem sentido as igualdades acima. Utilizando esses elementos, definimos

$$Y^+_{i:m} = e_{i:m} + e_{-i:m} \qquad e \qquad Y^-_{i:m} = e_{i:m} - e_{-i:m}$$

ou seja, $Y^{\pm}_{i:m} = e_{i,i+m} \pm e_{n+1-i-m,n+1-i}$.

Para uma melhor compreensão desses elementos $e_{i:m}$ e $Y^{\pm}_{i:m}$, considere a aplicação $\varphi_{n+1} : UT_n \to UT_n$, que associa a cada matriz x uma matriz $\varphi_{n+1}(x)$ obtida de x, refletindo x em relação a sua diagonal secundária.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2(n-1)} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{(n-1)(n-1)} & x_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{nn} & x_{(n-1)n} & \cdots & x_{2n} & x_{1n} \\ 0 & x_{(n-1)(n-1)} & \cdots & x_{2(n-1)} & x_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{22} & x_{12} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} \end{pmatrix}.$$

Temos que φ_{n+1} é uma transformação linear. Uma simples checagem mostra que $\varphi_{n+1}(e_{ij}) = e_{n+1-j,n+1-i}$. Por exemplo, para $n = 2$ temos $\varphi_3(e_{ij}) = e_{3-j,3-i}$ e para $n = 3$ temos $\varphi_4(e_{ij}) = e_{4-j,4-i}$. Note que $\varphi_{n+1}(e_{i:m}) = e_{-i:m}$, então $Y^{\pm}_{i:m} = e_{i,i+m} \pm \varphi_{n+1}(e_{i,i+m})$. Assim $e_{-i:m}$ é obtida refletindo $e_{i:m}$ em relação a sua diagonal secundária. Há uma grande semelhança entre φ_{n+1} e a função de transposição de matrizes, a diferença é que a transposição é refletindo a matriz em relação a sua diagonal principal.

Observação 3.24 *De modo análogo a transposição de matrizes, temos que a aplicação* $\varphi_{n+1} : (UT_n, \cdot) \to (UT_n, \cdot)$ *é uma involução (caso associativo). De fato, inicialmente note que* $j = p$ *se, e somente se,* $n + 1 - p = n + 1 - j$, *daí* $\delta_{jp} = \delta_{n+1-p,n+1-j}$. *Dadas* e_{ij} *e* e_{pq} *matrizes unitárias, temos*

$$\varphi_{n+1}(e_{ij}e_{pq}) = \varphi_{n+1}(\delta_{jp}e_{iq}) = \delta_{jp}e_{(n+1-q)(n+1-i)}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(e_{pq})\varphi_{n+1}(e_{ij}) &= e_{(n+1-q)(n+1-p)}e_{(n+1-j)(n+1-i)} \\ &= \delta_{(n+1-p)(n+1-j)}e_{(n+1-q)(n+1-i)} \\ &= \delta_{jp}e_{(n+1-q)(n+1-i)} \end{aligned}$$

concluímos assim que $\varphi_{n+1}(xy) = \varphi_{n+1}(y)\varphi_{n+1}(x)$ *para todos* $x, y \in UT_n$.

Observação 3.25 *No caso de Jordan, temos que* $(UT_n, \circ)$ *é uma álgebra comutativa e portanto* φ_{n+1}, *definida pouco a cima, é um isomorfismo de álgebras. Ademais dado* $\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}) \in G^{n-1}$, *denotando* $rev\eta$ *a upla* $(g_{n-1}, g_{n-2} \ldots, g_1)$ *temos que* $\varphi_{n+1} : ((UT_n, \circ), \eta) \to ((UT_n, \circ), rev\eta)$ *é um isomorfismo de álgebras graduadas, pois* $\varphi_{n+1}(e_{i,(i+1)}) = e_{(n-i),(n-i+1)}$.

Calculemos os elementos $Y^{\pm}_{i:m}$ para $n = 2$ e $n = 3$.

Para $n = 2$, os $Y^+_{i:m}$ são

$$Y^+_{1:0} = e_{1:0} + e_{-1:0} = e_{11} + e_{22}$$
$$Y^+_{1:1} = e_{1:1} + e_{-1:1} = e_{12} + e_{12} = 2e_{12}$$
$$Y^+_{2:0} = e_{2,2} + e_{11} = e_{11} + e_{22} = Y^+_{1:0}$$

já os $Y^-_{i:m}$ são

$$Y^-_{1:0} = e_{1:0} - e_{-1:0} = e_{11} - e_{22}$$
$$Y^-_{1:1} = e_{1:1} + e_{-1:1} = e_{12} - e_{12} = 0$$
$$Y^-_{2:0} = e_{2,2} - e_{11} = -(e_{11} - e_{22}) = -Y^-_{1:0}.$$

Para $n = 3$, os $Y^+_{i:m}$ são

$$Y^+_{1:0} = e_{1:0} + e_{-1:0} = e_{11} + e_{33}$$
$$Y^+_{1:1} = e_{1:1} + e_{-1:1} = e_{12} + e_{23}$$
$$Y^+_{1:2} = e_{1:2} + e_{-1:2} = e_{13} + e_{13} = 2e_{13}$$
$$Y^+_{2:0} = e_{2:0} + e_{-2:0} = e_{22} + e_{22} = 2e_{22}$$
$$Y^+_{2:1} = e_{2:1} + e_{-2:1} = e_{23} + e_{12} = e_{12} + e_{23} = Y^+_{1:1}$$

por fim, os $Y^-_{i:m}$ são

$$Y^-_{1:0} = e_{1:0} - e_{-1:0} = e_{11} - e_{33}$$
$$Y^-_{1:1} = e_{1:1} - e_{-1:1} = e_{12} - e_{23}$$
$$Y^-_{1:2} = e_{1:2} - e_{-1:2} = e_{13} - e_{13} = 0$$
$$Y^-_{2:0} = e_{2:0} - e_{-2:0} = e_{22} - e_{22} = 0$$
$$Y^-_{2:1} = e_{2:1} - e_{-2:1} = e_{23} - e_{12} = -(e_{12} - e_{23}) = -Y^-_{1:1}.$$

Vejamos algumas propriedades a respeito dos $Y^\pm_{i:m}$.

Proposição 3.26 *Considerando os elementos $Y^\pm_{i:m}$ da **Definição 3.23**, temos*

(i) Se $n - m$ é ímpar e $i = (n - m + 1)/2$, então $e_{i:m} = e_{-i:m}$ e consequentemente $Y^+_{i:m} = 2e_{i:m} = 2e_{-i:m}$ e $Y^-_{i:m} = 0$.

(ii) Dado m, considerando índices i e k que fazem sentido as expressões $Y^{\pm}_{k:m}$ e $Y^{\pm}_{i:m}$ e que são tais que $i+k=n+1-m$, teremos $Y^{+}_{k:m}=Y^{+}_{i:m}$ e $Y^{-}_{k:m}=-Y^{-}_{i:m}$.

(iii) Supondo $i\neq\frac{n+1-m}{2}$, $i\neq\frac{n+1}{2}$ e $m>0$ então temos

(1) $[Y^{+}_{i:0},Y^{-}_{i:m}]=Y^{+}_{i:m}$ *e* $[Y^{+}_{i:0},Y^{+}_{i:m}]=Y^{-}_{i:m}$

(2) $[Y^{-}_{i:0},Y^{-}_{i:m}]=Y^{-}_{i:m}$ *e* $[Y^{-}_{i:0},Y^{+}_{i:m}]=Y^{+}_{i:m}$.

Prova.

(i) Basta notar que $n+1=2i+m$ e daí

$$e_{-i:m}=\varphi_{n+1}(e_{i,i+m})=e_{n+1-i-m,n+1-i}=e_{i,i+m}=e_{i:m}$$

portanto

$$Y^{+}_{i:m}=e_{i:m}+e_{-i:m}=2e_{i:m}=2e_{-i:m}\qquad\text{e}\qquad Y^{-}_{i:m}=0.$$

(ii) Da igualdade $i+k=n+1-m$ segue que

$$e_{-k:m}=e_{n+1-k-m,n+1-k}=e_{i,i+m}=e_{i:m},$$

analogamente $e_{-i:m}=e_{k:m}$. Portanto $Y^{+}_{k:m}=Y^{+}_{i:m}$ e $Y^{-}_{k:m}=-Y^{-}_{i:m}$.

(iii) Vamos provar (1), a prova de (2) é análoga.

$$\begin{aligned}
[Y^{+}_{i:0},Y^{-}_{i:m}] &= [e_{ii}+e_{n+1-i,n+1-i},e_{i,i+m}-e_{n+1-i-m,n+1-i}]\\
&= (e_{ii}+e_{n+1-i,n+1-i})(e_{i,i+m}-e_{n+1-i-m,n+1-i})\\
&\quad -(e_{i,i+m}-e_{n+1-i-m,n+1-i})(e_{ii}+e_{n+1-i,n+1-i})\\
&= e_{i,i+m}-0+0-0\\
&\quad -(+0+0-0-e_{n+1-i-m,n+1-i})\\
&= e_{i,i+m}+e_{n+1-i-m,n+1-i}\\
&= Y^{+}_{i:m}
\end{aligned}$$

as demais igualdades são semelhantes.

■

Uma importante propriedade computacional que os elementos $Y^{\pm}_{i:m}$ tem, no caso de Jordan, é a seguinte:

Lema 3.27 ***[25]*** *No caso de Jordan, temos* $Y^+_{i:1} \circ Y^+_{i+1:1} \circ \cdots \circ Y^+_{i+m-1:1} = \lambda Y^+_{i:m}$, *onde* $\lambda = 2^p$, $p \in \mathbb{Z}$ *e* $m \geq 1$.

Prova. Por indução em m. Caso $m = 1$ a afirmação é imediata. Suponha verdade para algum $m \geq 1$, isto é, $Y^+_{i:1} \circ \cdots \circ Y^+_{i+m-1:1} = 2^p Y^+_{i:m}$, para algum $p \in \mathbb{Z}$. Supondo inicialmente que $i = (n-m+1)/2$, então pela ***Proposição 3.26*** temos

$$\begin{aligned} Y^+_{i:1} \circ \cdots \circ Y^+_{i+m-1:1} \circ Y^+_{i+m+1-1:1} &= 2^p Y^+_{i:m} \circ Y^+_{i+m:1} \\ &= 2^p 2 e_{i:m} \circ Y^+_{i+m:1} \\ &= 2^{p+1} e_{i,i+m} \circ (e_{i+m,i+m+1} + e_{n+1-i-m-1,n+1-i-m}) \\ &= 2^{p+1} e_{i,i+m} \circ (e_{i+m,i+m+1} + e_{i-1,i}). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} e_{i,i+m} \circ (e_{i+m,i+m+1} + e_{i-1,i}) &= e_{i,i+m}(e_{i+m,i+m+1} + e_{i-1,i}) + (e_{i+m,i+m+1} + e_{i-1,i}) e_{i,i+m} \\ &= e_{i,i+m+1} + 0 + 0 + e_{i-1,i+m} \\ &= e_{i,i+m+1} + e_{i-1,i+m}, \end{aligned}$$

por outro lado

$$Y^+_{i:m+1} = e_{i,i+m+1} + e_{n+1-i-m-1,n+1-i} = e_{i,i+m+1} + e_{i-1,i+m},$$

logo

$$Y^+_{i:1} \circ \cdots \circ Y^+_{i+m-1:1} \circ Y^+_{i+m+1-1:1} = 2^{p+1} Y^+_{i:m+1}.$$

Supondo agora $i \neq (n-2m)/2$ e $i \neq (n-m+1)/2$, temos

$$Y^+_{i:1} \circ \cdots \circ Y^+_{i+m-1:1} \circ Y^+_{i+m+1-1:1} = 2^p Y^+_{i:m} \circ Y^+_{i+m:1} = 2^p (Y^+_{i:m} Y^+_{i+m:1} + Y^+_{i+m:1} Y^+_{i:m}).$$

Calculando os produtos separadamente

$$\begin{aligned} Y^+_{i:m} Y^+_{i+m:1} &= (e_{i,i+m} + e_{n+1-i-m,n+1-i})(e_{i+m,i+m+1} + e_{n-i-m,n+1-i-m}) \\ &= e_{i,i+m+1} + 0 + 0 + 0 \\ &= e_{i:m+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y^+_{i+m:1}Y^+_{i:m} &= (e_{i+m,i+m+1} + e_{n-i-m,n+1-i-m})(e_{i,i+m} + e_{n+1-i-m,n+1-i}) \\ &= 0 + 0 + 0 + e_{n-i-m,n+1-i} \\ &= e_{-i:m+1}, \end{aligned}$$

daí

$$2^p(Y^+_{i:m}Y^+_{i+m:1} + Y^+_{i+m:1}Y^+_{i:m}) = 2^p(e_{i:m+1} + e_{-i:m+1}) = 2^pY^+_{i:m+1}$$

e portanto

$$Y^+_{i:1} \circ \cdots \circ Y^+_{i+m-1:1} \circ Y^+_{i+m+1-1:1} = 2^pY^+_{i:m+1}.$$

Por fim, supondo $i = (n-2m)/2$, ou equivalentemente $n = 2i + 2m$. Note que em particular temos $i \neq (n-m+1)/2$. Continuamos com

$$Y^+_{i:1} \circ \cdots \circ Y^+_{i+m-1:1} \circ Y^+_{i+m+1-1:1} = 2^p(Y^+_{i:m}Y^+_{i+m:1} + Y^+_{i+m:1}Y^+_{i:m}).$$

Calculemos os produtos em separado novamente

$$\begin{aligned} Y^+_{i:m}Y^+_{i+m:1} &= (e_{i,i+m} + e_{n+1-i-m,n+1-i})(e_{i+m,i+m+1} + e_{n-i-m,n+1-i-m}) \\ &= (e_{i,i+m} + e_{i+m+1,i+2m+1})(e_{i+m,i+m+1} + e_{i+m,i+m+1}) \\ &= (e_{i,i+m} + e_{i+m+1,i+2m+1})(2e_{i+m,i+m+1}) \\ &= 2e_{i,i+m+1} + 0 \\ &= 2e_{i:m+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y^+_{i+m:1}Y^+_{i:m} &= (e_{i+m,i+m+1} + e_{n-i-m,n+1-i-m})(e_{i,i+m} + e_{n+1-i-m,n+1-i}) \\ &= (e_{i+m,i+m+1} + e_{i+m,i+m+1})(e_{i,i+m} + e_{i+m+1,i+2m+1}) \\ &= (2e_{i+m,i+m+1})(e_{i,i+m} + e_{i+m+1,i+2m+1}) \\ &= 0 + 2e_{i+m,i+2m+1} \\ &= 2e_{i+m,i+2m+1} \\ &= 2e_{2i+2m+1-i-m-1,2i+2m+1-i} \\ &= 2e_{n+1-i-m-1,n+1-i} \\ &= 2e_{-i:m+1}. \end{aligned}$$

Logo

$$2^p(Y^+_{i:m}Y^+_{i+m:1} + Y^+_{i+m:1}Y^+_{i:m}) = 2^p(2e_{i:m+1} + 2e_{-i:m+1}) = 2^{p+1}Y^+_{i:m+1},$$

portanto

$$Y^+_{i:1} \circ \cdots \circ Y^+_{i+m-1:1} \circ Y^+_{i+m+1-1:1} = 2^{p+1}Y^+_{i:m+1}.$$

Assim em todo caso o resultado segue por indução. ■

Note que se $(UT_n, \circ)$ está munido de uma G-graduação, onde os elementos $Y^+_{i:1}$ são homogêneos, então todos os elementos $Y^+_{i:m}$ também serão homogêneos. Agora que temos maior familiaridade com esses elementos, estamos prontos para definir o segundo tipo de graduação na álgebra $(UT_n, \odot)$.

Definição 3.28 ***[23]*** *Seja G um grupo qualquer. Dizemos que uma G-graduação em $(UT_n, \odot)$ é do tipo Mirror Pattern Type, ou do tipo **MT**, se todos os $Y^+_{i:m}$ e $Y^-_{i:m}$ são homogêneos, e G-deg$(Y^+_{i:m}) \neq G$-deg$(Y^-_{i:m})$, sempre que $Y^-_{i:m}$ seja não nulo.*

Note que os elementos $Y^+_{i:m}$ nunca são nulos. A menos de no caso especial onde K tivesse característica 2 e $i + (i + m) = n + 1$ (isto é, $e_{i:m} = e_{i,i+m}$ esteja na diagonal secundária, como no item (i) da ***Proposição 3.26***). Vejamos um exemplo de graduação do tipo ***MT***.

Exemplo 23 *Seja G um grupo qualquer, não necessariamente abeliano, tal que existam $s, h \in G$ onde $sh \neq hs$. Note que nessas condições segue que h e s são distintos e $h \neq 1 \neq s$.*

(a) *Na álgebra de Lie $UT_2^{(-)}$, consideremos os subespaços*

$$A_s = span_K\{e_{11} + e_{22}\}, \quad A_h = span_K\{e_{12}\} \quad e \quad A_1 = span_K\{e_{11} - e_{22}\}$$

por fim, ponha $A_g = \{0\}$ para $g \in G - \{1, s, h\}$. Como $\{e_{11} + e_{22}, e_{12}, e_{11} - e_{22}\}$ é base para o espaço vetorial UT_2, segue que $UT_2^{(-)} = \bigoplus_{g \in G} A_g$. Note que

$$[e_{11} + e_{22}, e_{12}] = [e_{11} + e_{22}, e_{11} - e_{22}] = 0$$

logo $A_sA_g \subseteq A_{sg}$ e $A_gA_s \subseteq A_{gs}$ para todo $g \in G$. Ademais

$$[e_{11} - e_{22}, e_{12}] = (e_{11} - e_{22})e_{12} - e_{12}(e_{11} - e_{22}) = e_{12} - 0 - 0 + e_{12} = 2e_{12}.$$

Assim $A_gA_1, A_1A_g \subseteq A_g$ para todo $g \in G$. Por fim como

$$[e_{11} - e_{22}, e_{12}] = 2e_{12} \quad e \quad [e_{12}, e_{12}] = [e_{11} + e_{22}, e_{12}] = 0$$

segue que $A_hA_g \subseteq A_{hg}$ *e* $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ *para todo* $g \in G$. *Portanto*

$$\mathscr{G} : UT_2^{(-)} = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

é uma G*-graduação. Nessa* G*-graduação temos*

$$Y_{1:0}^+ = Y_{2:0}^+ = e_{11} + e_{22} \in A_s \qquad e \qquad Y_{1:1}^+ = 2e_{12} \in A_h$$

$$Y_{1:0}^- = -Y_{2:0}^- = e_{11} - e_{22} \in A_1 \qquad e \qquad Y_{1:1}^- = 0.$$

Assim essa é uma graduação do tipo $\boldsymbol{MT}$ (*Mirror Pattern Type*).

(*b*) *Suponha agora que* $s \in G$ *tenha ordem* 2. *Na álgebra de Jordan* UJ_2 *consideremos os subespaços*

$$B_s = span_K\{e_{11} - e_{22}\}, \quad B_h = span_K\{e_{12}\} \qquad e \qquad B_1 = span_K\{e_{11} + e_{22}\},$$

por fim, ponha $B_g = \{0\}$ *para* $g \in G - \{1, s, h\}$. *Analogamente, ao caso anterior, segue que* $UJ_2 = \underset{g\in G}{\oplus} B_g$. *Veja que*

$$(e_{11} + e_{22}) \circ e_{12} = 2e_{12} \qquad (e_{11} + e_{22}) \circ (e_{11} - e_{22}) = 2(e_{11} - e_{22})$$

$$(e_{11} + e_{22}) \circ (e_{11} + e_{22}) = 2(e_{11} + e_{22})$$

logo $B_1B_g, B_gB_1 \subseteq B_g$ *para todo* $g \in G$. *Ademais*

$$e_{12} \circ (e_{11} - e_{22}) = e_{12}(e_{11} - e_{22}) + (e_{11} - e_{22})e_{12} = 0 - e_{12} + e_{12} - 0 = 0$$

$$e_{12} \circ e_{12} = 0 \qquad e \qquad (e_{11} - e_{22}) \circ (e_{11} - e_{22}) = e_{11} + e_{22}$$

assim $B_hB_g \subseteq B_{hg}$ *e* $B_gB_h \subseteq B_{gh}$ *para todo* $g \in G$. *Como* s *tem ordem* 2, *segue que* $B_sB_g \subseteq B_{sg}$ *e* $B_gB_s \subseteq B_{gs}$ *para todo* $g \in G$. *Portanto*

$$\mathscr{H} : UJ_2 = \bigoplus_{g\in G} B_g$$

é uma G*-graduação para* UJ_2. *Nessa* G*-graduação temos*

$$Y_{1:0}^+ = Y_{2:0}^+ = e_{11} + e_{22} \in B_1 \qquad e \qquad Y_{1:1}^+ = 2e_{12} \in B_h$$

$$Y_{1:0}^- = -Y_{2:0}^- = e_{11} - e_{22} \in B_s \qquad e \qquad Y_{1:1}^- = 0.$$

Logo $\mathscr{H}$ *é uma* G*-graduação do tipo* $\boldsymbol{MT}$ (*Mirror Pattern Type*).

Veja que $supp\mathscr{G} = supp\mathscr{H} = \{1, s, h\}$. *Como* $sh \neq hs$. *Temos que o subgrupo de* G *gerado pelo suporte* $\{1, s, h\}$ *da graduação não é comutativo. Ademais no caso* (*a*), G *não necessariamente tem elemento de ordem* 2.

Como vimos no exemplo acima, diferentemente das graduações elementares, existem casos onde o suporte da graduação não é comutativo. Porém para $n \geq 4$, não enfrentamos esse problema, devemos ter o suporte comutativo. Assim bem como a obrigatoriedade da existência de um elemento de ordem 2 em G.

Lema 3.29 ***[Adaptação do Lemma 14 de [25]]*** *Sejam $n \geq 4$ um inteiro e G um grupo qualquer, não necessariamente abeliano. Dada uma G-graduação do tipo $\boldsymbol{MT}$ da álgebra de Jordan $UJ_n = (UT_n, \circ)$, então*

(i) $G\text{-}degY^+_{i:0} = 1$ para cada i, e $G\text{-}degY^-_{1:0} = G\text{-}degY^-_{2:0} = \cdots = G\text{-}degY^-_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor :0} = t$ é um elemento de ordem 2.

(ii) Sendo $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então $\eta = (G\text{-}degY^+_{1:1}, G\text{-}degY^+_{2:1}, \ldots, G\text{-}degY^+_{q:1}) \in G^q$ e o elemento $t = G\text{-}degY^-_{1:0}$ definem completamente a graduação.

(iii) O suporte da graduação é comutativo.

Ademais em uma G-graduação qualquer, se os elementos $Y^{\pm}_{i:m}$ são homogêneos para cada i e $m = 0$ e $m = 1$, com $degY^+_{i:m} \neq degY^-_{i:m}$ para todo m, então a graduação é necessariamente do tipo $\boldsymbol{MT}$.

Prova.

(i) Inicialmente,

$$Y^+_{i:0} \circ Y^+_{i:0} = 2Y^+_{i:0}Y^+_{i:0} = 2(e_{i:0}+e_{-i:0})(e_{i:0}+e_{-i:0}) = 2(e_{ii}+e_{n+1-i,n+1-i})(e_{ii}+e_{n+1-i,n+1-i})$$

se $i \neq n+1-i$ temos

$$\begin{aligned} Y^+_{i:0} \circ Y^+_{i:0} &= 2(e_{ii} + e_{n+1-i,n+1-i})(e_{ii} + e_{n+1-i,n+1-i}) \\ &= 2(e_{ii} + 0 + 0 + e_{n+1-i,n+1-i}) \\ &= 2(e_{ii} + e_{n+1-i,n+1-i}) \\ &= 2Y^+_{i:0}. \end{aligned}$$

Se $i = n+1-i$, então $e_{n+1-i,n+1-i} = e_{ii}$ e $Y^+_{i:0} = 2e_{ii}$. Portanto

$$Y^+_{i:0} \circ Y^+_{i:0} = 2(2e_{ii})(2e_{ii}) = 8e_{ii} = 4(2e_{ii}) = 4Y^+_{i:0}.$$

Dessa forma temos $(degY^+_{i:0})^2 = degY^+_{i:0}$ em G, donde segue que $G\text{-}degY^+_{i:0} = 1$. Para a segunda afirmação note que se $i+1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então $i < \frac{n}{2}$, daí, $i \neq n-i$ e

$i \neq n+1-i$. Tomando então i tal que $i+1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ segue que

$$\begin{aligned}
Y^-_{i:0} \circ Y^+_{i:1} &= (e_{ii} - e_{n+1-i,n+1-i}) \circ (e_{i,i+1} + e_{n-i,n+1-i}) \\
&= (e_{ii} - e_{n+1-i,n+1-i})(e_{i,i+1} + e_{n-i,n+1-i}) + (e_{i,i+1} + e_{n-i,n+1-i})(e_{ii} - e_{n+1-i,n+1-i}) \\
&= e_{i,i+1} + 0 - 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - e_{n-i,n+1-i} \\
&= e_{i,i+1} - e_{n-i,n+1-i} \\
&= e_{i,i+1} - e_{n+1-i-1,n+1-i} \\
&= e_{i:1} - e_{-i:1} \\
&= Y^-_{i:1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, notando que $i+1 \neq n-i$ (pois caso contrário teríamos $i = (n-1)/2$ e consequentemente $i+1 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$), temos

$$\begin{aligned}
Y^-_{i+1:0} \circ Y^+_{i:1} &= (e_{i+1,i+1} - e_{n-i,n-i}) \circ (e_{i,i+1} + e_{n-i,n+1-i}) \\
&= (e_{i+1,i+1} - e_{n-i,n-i})(e_{i,i+1} + e_{n-i,n+1-i}) + (e_{i,i+1} + e_{n-i,n+1-i})(e_{i+1,i+1} - e_{n-i,n-i}) \\
&= 0 + 0 - 0 - e_{n-i,n+1-i} + e_{i,i+1} - 0 + 0 - 0 \\
&= -e_{n-i,n+1-i} + e_{i,i+1} \\
&= -e_{n+1-i-1,n+1-i} + e_{i,i+1} \\
&= -e_{-i:1} + e_{i:1} \\
&= Y^-_{i:1}.
\end{aligned}$$

Ademais note que $Y^-_{i:1} \neq 0$, pois caso contrário teríamos $e_{i:1} = e_{-i:1}$, daí pela igualdade do segundo índice dessas matrizes unitárias temos $i = \frac{1}{2}n$, o que contradiz $i+1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Portanto para $i+1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ temos $Y^-_{i:0} \circ Y^+_{i:1} = Y^-_{i+1:0} \circ Y^+_{i:1} \neq 0$, concluímos que $G\text{-}deg Y^-_{1:0} = G\text{-}deg Y^-_{2:0} = \cdots = G\text{-}deg Y^-_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor :0}$. Mostremos agora que $t = deg Y^-_{1:0}$ tem ordem 2. Para isso note que

$$Y^-_{1:0} \circ Y^-_{1:0} = 2Y^-_{1:0}Y^-_{1:0} = 2(e_{11} - e_{nn})(e_{11} - e_{nn}) = 2(e_{11} + e_{nn}) = 2Y^+_{1:0}$$

donde segue que $t^2 = 1$. Ademais $t = deg Y^-_{1:0} \neq deg Y^+_{1:0} = 1$. Assim t é um elemento de ordem 2.

(*ii*) Notando que $Y^+_{i:m} + Y^-_{i:m} = 2e_{i,i+m}$, e portanto os elementos $Y^{\pm}_{i:m}$ geram UJ_n como espaço vetorial, basta mostrar que podemos deduzir o grau dos demais Y's a

partir das informações dadas pelo item. Inicialmente mostremos que $Y^-_{k:0} \in A_t$. Note que para cada $Y^-_{k:0}$ com $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tomando $i = n+1-k$, devemos ter $k \geq i$, pois caso contrário

$$k < n+1-k \quad \Longrightarrow \quad \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < k < \frac{n+1}{2},$$

absurdo, não há inteiro em tal intervalo. Caso $i = k$, temos

$$Y^-_{k:0} = e_{kk} - e_{n+1-k,n+1-k} = e_{kk} - e_{kk} = 0$$

daí $Y^-_{k:0} \in A_t$. Agora caso $i < k$ devemos ter $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Pois caso $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, analogamente ao que foi feito acima, tendo em vista que $k = n+1-i$, teríamos

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i < k \quad \Longrightarrow \quad \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i < \frac{n+1}{2}$$

absurdo. Portanto de fato $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Daí

$$Y^-_{k:0} = e_{kk} - e_{n+1-k,n+1-k} = e_{n+1-i,n+1-i} - e_{ii} = -Y^-_{i:0} \in A_t.$$

Logo $Y^-_{i:0} \in A_t$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Já vimos que $deg Y^+_{i:0} = 1$. Calculemos agora o grau de $Y^+_{k:m}$ para $k, m > 0$. Para cada $Y^+_{k:m}$ com $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $m > 0$, tomemos $i = n+1-k-m$, e consequentemente $i + k = n+1-m$. Pela ***Proposição 3.26*** temos que $Y^+_{i:m} = Y^+_{k:m}$. Analogamente ao que foi visto pouco a cima, devemos ter $k \geq i+m$. Supondo $i+m = k$ temos que $2(i+m) = n+1$, e portanto

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2(i+m)-1}{2} \rfloor = \lfloor i+m-\frac{1}{2} \rfloor = i+m-1.$$

Supondo agora $i+m < k$. Analogamente ao que foi visto no início do item, devemos ter $i+m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consequentemente em todo caso conhecemos, por hipótese, os graus dos elementos $Y^+_{i:1}, Y^+_{i+1:1}, \ldots, Y^+_{i+m-1:1}$. Pelo ***Lema 3.27***, agora conhecemos o grau de $Y^+_{i:m} = Y^+_{k:m}$. Por fim, para os elementos da forma $Y^+_{k:m}$, com $m > 0$ e $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, basta mostramos que conhecemos o grau para $m = 1$, e o ***Lema 3.27*** garantirá o resultado. De fato, com $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = q$ por hipótese conhecemos os graus dos elementos $Y^+_{k:1}$. Portanto conseguimos determinar o grau de todos os elementos $Y^+_{k:m}$. Agora os elementos na forma $Y^-_{i:m}$, $m > 0$. Se $i = (n+1-m)/2$ pela ***Proposição 3.26*** temos que $Y^-_{i:m} = 0$. Suponhamos então

$i \neq (n+1-m)/2$. Por hora também vamos supor que $i \neq (n+1)/2$. Dessa forma, para $m > 0$, $i \neq (n+1)/2$ e $i \neq (n+1-m)/2$ temos

$$\begin{aligned} Y^-_{i:0} \circ Y^+_{i:m} &= (e_{ii} - e_{n+1-i,n+1-i}) \circ (e_{i,i+m} + e_{n+1-i-m,n+1-i}) \\ &= (e_{ii} - e_{n+1-i,n+1-i})(e_{i,i+m} + e_{n+1-i-m,n+1-i}) \\ &\quad + (e_{i,i+m} + e_{n+1-i-m,n+1-i})(e_{ii} - e_{n+1-i,n+1-i}) \\ &= e_{i,i+m} + 0 - 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - e_{n+1-i-m,n+1-i} \\ &= e_{i:m} - e_{-i:m} \\ &= Y^-_{i:m} \end{aligned}$$

ou seja, $Y^-_{i:m} = Y^-_{i:0} \circ Y^+_{i:m}$. Caso $i = (n+1)/2$, note que

$$i + m \leq n \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \frac{n+1}{2} - m \leq n,$$

portanto podemos considerar o índice $i' = i - m = (n+1)/2 - m \neq (n+1)/2$, e esse índice i' é tal que

$$i' = \frac{n+1}{2} - m \Longrightarrow i' + i = \frac{n+1}{2} + i - m \Longrightarrow i' + i = n + 1 - m$$

logo, pela ***Proposição 3.26***, temos $Y^-_{i:m} = -Y^-_{i':m}$, com $i' \neq (n+1)/2$. Portanto sabemos o grau de $Y^-_{i:m}$ para $m > 0$, mas já sabemos o grau de $Y^-_{i:0}$. Assim sabemos o grau de todos os $Y^-_{i:m}$.

(*iii*) Pelo item (*ii*) vemos que os elementos $t_j = degY^+_{j:1}$, para $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, e $t = degY^-_{1:0}$ geram o suporte da graduação. A demonstração que os elementos $t_1, \ldots, t_q$ comutam, com $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ usando o ***Lema 3.27*** será semelhante a demonstração da ***Proposição 3.8***. Mostremos que t comuta com cada t_j. Com efeito, como $t = degY^-_{j:0}$ e UJ_n é uma álgebra comutativa, é suficiente mostrar que $Y^-_{j:0} \circ Y^+_{j:1} \neq 0$. Note que o fato de $j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ implica em $j \neq \frac{n+1}{2}$. Caso $j \neq \frac{n}{2}$ temos $Y^-_{j:0} \circ Y^+_{j:1} = Y^-_{j:1} \neq 0$ e consequentemente $tt_j = t_j t$. Caso $j = \frac{n}{2}$, do ***Lema 3.27*** temos $Y^+_{j:1} \circ Y^+_{j+1:1} = \lambda Y^+_{j:2}$, com $\lambda \neq 0$. Note também que $(j+1) + (j-1) = n + 1 - 1$, logo, pela ***Proposição 3.26***, temos $Y^+_{j+1:1} = Y^+_{j-1:1}$. Assim concluímos que $degY^+_{j:2} = t_j t_{j-1}$. Como $j = \frac{n}{2}$, temos $j \neq (n+1)/2$ e $j \neq (n+1-2)/2$, portanto como vimos no item (*ii*), segue que $Y^-_{j:0} \circ Y^+_{j:2} = Y^-_{j:2} = e_{j,j+2} - e_{j-1,j+1} \neq 0$. Assim t comuta com $t_j t_{j-1}$, como t também comuta com t_{j-1}, concluímos que t comuta com t_j.

Para a afirmação que vem após o item (iii), inicialmente note que do ***Lema 3.27*** segue que os elementos na forma $Y^+_{i:m}$ são homogêneos para quaisquer i e m. Dos cálculos do item (ii) vemos que para $m > 0$, temos $Y^-_{i:m} = 0$, ou $Y^-_{i:m}$ é homogêneo. Por fim a graduação é **MT** pois, por hipótese, $degY^+_{i:m} \neq degY^-_{i:m}$. ■

Em recíproca ao item (ii) do ***Lema 3.29*** logo acima, supondo G abeliano, dado um elemento $t \in G$ de ordem 2 e uma sequência $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q) \in G^q$, onde $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então há uma, e apenas uma, G-graduação do tipo **MT** em UJ_n onde $G\text{-}degY^+_{i:1} = \eta_i$ e $G\text{-}degY^-_{1:0} = t$.

Notação 3.30 ***[25]*** *Denotaremos por $((UT_n, \circ), t, \eta)$ a G-graduação do tipo **MT** definida por t e η.*

Provaremos as afirmação feitas acima posteriormente. Por ora, temos dois lemas para o caso de Lie semelhantes aos dois lemas anteriores apresentados para o caso de Jordan.

Lema 3.31 ***[24]*** *Sejam $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ e $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, defina a sequência*

$$(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = (Y^-_{1:1}, Y^-_{2:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{q:1}, Y^-_{q-1:1}, Y^-_{q-2:1}, \ldots, Y^-_{1:1})$$

que é equivalente a

- *se $n-1$ é ímpar, $(X_1, \ldots, X_{n-1}) = (Y^-_{1:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p+1:1}, Y^-_{p:1}, \ldots, Y^-_{1:1})$*
- *se $n-1$ é par, $(X_1, \ldots, X_{n-1}) = (Y^-_{1:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p:1}, Y^-_{p-1:1}, \ldots, Y^-_{1:1})$.*

Segue que para $i \leq j$, $m = j - i + 1$, $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ e $t = min\{i, n-j\}$ temos $[X_i, X_{i+1}, \ldots, X_j]$ é igual a $\lambda Y^+_{t:m}$, se $i \leq p+1 \leq j$ e $\lambda Y^-_{t:m}$ caso contrário, onde $\lambda \neq 0$.

Prova. Supondo inicialmente que $i \leq j < p+1$. Dessa forma obtemos a seguinte igualdade $(X_i, X_{i+1}, \ldots, X_j) = (Y^-_{i:1}, Y^-_{i+1:1}, \ldots, Y^-_{j:1})$, como $j = m + i - 1$, temos a expressão

$$[X_i, X_{i+1}, \ldots, X_j] = [Y^-_{i:1}, Y^-_{i+1:1}, \ldots, Y^-_{i+m-1:1}].$$

Note também que se $n-1$ for ímpar então

$$p + 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

Caso $n-1$ seja par temos

$$p + 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

portanto se k é um inteiro tal que $k < p+1$, então $k < \frac{n}{2}$. Em particular, temos $j = m + i - 1 < \frac{n}{2}$. Logo

$$j < p+1 \implies j < \frac{n}{2} \implies n - \frac{n}{2} < n - j \implies i < \frac{n}{2} < n - j.$$

Dessa forma temos $t = \min\{i, n-j\} = i$, onde nossa expressão resulta em

$$[Y^-_{i:1}, Y^-_{i+1:1}, \ldots, Y^-_{i+m-1:1}] = Y^-_{i:m}.$$

Façamos indução em m. Para $m = 1$ a igualdade acima é imediata. Suponha que a igualdade acima é verdadeira para algum $k \geq 1$, isto é

$$[Y^-_{i:1}, Y^-_{i+1:1}, \ldots, Y^-_{i+k-1:1}] = Y^-_{i:k}$$

daí, verificando a igualdade para $k+1$ temos

$$\begin{aligned}[Y^-_{i:1}, Y^-_{i+1:1}, \ldots, Y^-_{i+k-1:1}, Y^-_{i+k:1}] &= [[Y^-_{i:1}, Y^-_{i+1:1}, \ldots, Y^-_{i+k-1:1}], Y^-_{i+k:1}] \\ &= [Y^-_{i:k}, Y^-_{i+k:1}].\end{aligned}$$

Para calcularmos $[Y^-_{i:k}, Y^-_{i+k:1}]$, observemos que $i+k \neq n-i-k$, pois como $k+i-1 < \frac{n}{2}$, temos $k < \frac{n}{2}$, e como também temos $i < \frac{n}{2}$. Segue que

$$i + k = n - i - k \implies 2(i+k) = n \implies 2(\frac{n}{2} + \frac{n}{2}) < n \implies n < n,$$

assim $i + k \neq n - i - k$. Também devemos ter $n + 1 - i \neq i + k$, pois caso contrário teríamos

$$n + 1 - i = i + k \implies n = i + (i + k - 1) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n,$$

absurdo. Com essas informações calculemos $[Y^-_{i:k}, Y^-_{i+k:1}]$,

$$\begin{aligned}[Y^-_{i:k}, Y^-_{i+k:1}] &= [e_{i,i+k} - e_{n+1-i-k,n+1-i}, e_{i+k,i+k+1} - e_{n-i-k,n+1-i-k}] \\ &= (e_{i,i+k} - e_{n+1-i-k,n+1-i})(e_{i+k,i+k+1} - e_{n-i-k,n+1-i-k}) \\ &\quad - (e_{i+k,i+k+1} - e_{n-i-k,n+1-i-k})(e_{i,i+k} - e_{n+1-i-k,n+1-i}) \\ &= e_{i,i+k+1} - 0 - 0 + 0 \\ &\quad - (+0 - 0 - 0 + e_{n-i-k,n+1-i}) \\ &= e_{i,i+k+1} - e_{n+1-(i+k+1),n+1-i} \\ &= Y^-_{i:k+1}.\end{aligned}$$

Supomos agora que $p+1 < i \leq j$. Inicialmente note que nessa situação, existem s e z tais que

$$(X_i, X_{i+1}, \ldots, X_j) = (Y^-_{s:1}, Y^-_{s-1:1}, \ldots, Y^-_{z+1:}, Y^-_{z:1}),$$

determinemos s e z. Caso $n-1$ seja ímpar então

$$(X_1, \ldots, X_{n-1}) = (Y^-_{1:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p+1:1}, Y^-_{p:1}, \ldots, Y^-_{1:1}).$$

Como vimos no início da demonstração, se $n-1$ é ímpar, temos $p+1 = \frac{n}{2}$. Note que s deve satisfazer

$$\underbrace{Y^-_{1:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p+1:1}, Y^-_{p:1}, \ldots, Y^-_{s:1}}_{i \text{ elementos}},$$

assim o valor $i-(p+1)$ deve ser subtraído de p e acrescido 1, resultando em s, isto é,

$$s = p - (i - (p+1)) + 1 = p - i + p + 1 + 1 = 2(p+1) - i = n - i.$$

Caso $n-1$ seja par então

$$(X_1, \ldots, X_{n-1}) = (Y^-_{1:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p:1}, Y^-_{p-1:1}, \ldots, Y^-_{1:1}).$$

Como vimos no início, se $n-1$ for par, temos $p+1 = \frac{n+1}{2}$. Note que s deve satisfazer

$$\underbrace{Y^-_{1:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p:1}, Y^-_{p-1:1}, \ldots, Y^-_{s:1}}_{i \text{ elementos}}$$

em $Y^-_{1:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p:1}$ temos $p+1$ elementos. Assim o valor $i-(p+1)$ deve ser subtraído de $p-1$ e acrescido 1 resultando em s, isto é

$$s = p-1-(i-(p+1))+1 = p-i+(p+1) = 2p+1-i = 2(p+1)-1-i = n+1-1-i = n-i,$$

em todo caso temos $s = n-i$. Para acharmos z note que devemos ter

$$\underbrace{Y^-_{n-i:1}, Y^-_{n-i-1:1}, \ldots, Y^-_{z+1:}, Y^-_{z:1}}_{j-i+1 \text{ elementos}}.$$

Como $n-i = s > z$ temos $n-i-z+1$ elementos na sequência, assim

$$j - i + 1 = n - i - z + 1 \implies z = n - j = n - m - i + 1.$$

Calculemos agora $t = \min\{i, n-j\}$, como por hipótese temos $i, j > p+1$, e que $p+1 = \frac{n}{2}$ ou $p+1 = \frac{n+1}{2}$, temos $i, j > \frac{n}{2}$, daí

$$i + j > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \implies i > n - j,$$

portanto $t = \min\{i, n-j\} = n-j = n-m-i+1$. Devemos então provar que

$$[Y^-_{n-i:1}, Y^-_{n-i-1:1}, \ldots, Y^-_{n-i-m+1:1}] = \pm Y^-_{n-i-m+1:m}$$

por indução em m, para $m = 1$ o resultado é imediato. Supondo que a igualdade é verdadeira para $m = k \geq 1$, verifiquemos para $k+1$,

$$\begin{aligned}[Y^-_{n-i:1}, Y^-_{n-i-1:1}, \ldots, Y^-_{n-i-k+1:1}, Y^-_{n-i-k:1}] &= [[Y^-_{n-i:1}, Y^-_{n-i-1:1}, \ldots, Y^-_{n-i-k+1:1}], Y^-_{n-i-k:1}] \\ &= \pm[Y^-_{n-i-k+1:k}, Y^-_{n-i-k:1}].\end{aligned}$$

Calculemos $[Y^-_{n-i-k+1:k}, Y^-_{n-i-k:1}]$, para isso note que $n-i+1 \neq i+k$, pois caso contrário teríamos

$$n-i+1 = i+k \implies n+1 = 2i+k > 2\frac{n}{2}+k \implies 1 > k,$$

absurdo. Também devemos ter $i+k \neq n-i-k$, pois como $i+k-1 > \frac{n}{2}$ temos $n \neq 2(i+k) > n+2$. De modo análogo ao que já foi visto, devemos ter $n-i-k+1 \neq i$, pois caso contrário

$$n-i-k+1 = i \implies n = i+(i+k-1) > \frac{n}{2}+\frac{n}{2} = n,$$

absurdo. Com isso em vista, calculemos $[Y^-_{n-i-k+1:k}, Y^-_{n-i-k:1}]$,

$$\begin{aligned}[Y^-_{n-i-k+1:k}, Y^-_{n-i-k:1}] &= [e_{n-i-k+1,n-i+1} - e_{i,i+k}, e_{n-i-k,n-i-k+1} - e_{i+k,i+k+1}] \\ &= (e_{n-i-k+1,n-i+1} - e_{i,i+k})(e_{n-i-k,n-i-k+1} - e_{i+k,i+k+1}) \\ &\quad - (e_{n-i-k,n-i-k+1} - e_{i+k,i+k+1})(e_{n-i-k+1,n-i+1} - e_{i,i+k}) \\ &= 0 - 0 - 0 + e_{i,i+k+1} \\ &\quad - (e_{n-i-k,n-i+1} - 0 - 0 + 0) \\ &= e_{i,i+k+1} - e_{n-i-k,n-i+1} \\ &= -(e_{n-i-k,n-i-k+k+1} - e_{n+1-(n-i-k+k+1),n+1-(n-i-k)}) \\ &= -Y^-_{n-i-(k+1)+1:k+1}.\end{aligned}$$

Supondo agora $i \leq p+1 = j$. Temos $i \leq n-j$, portanto $t = \min\{i, n-j\} = i$. Calculemos $[X_i, \ldots, X_j]$. Como $i \leq j-1 < p+1$ sabemos que

$$[X_i, \ldots, X_{j-1}] = [Y^-_{i:1}, \ldots, Y^-_{j-1:1}] = Y^-_{i:j-i}.$$

Assim temos

$$[X_i, \ldots, X_j] = [[X_i, \ldots, X_{j-1}], X_j] = [Y^-_{i:j-i}, X_j].$$

Supondo inicialmente $n-1$ ímpar, temos $X_j = Y^+_{p+1:1} = Y^+_{\frac{n}{2}:1} = 2e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}$. Observando que devemos ter $n+1-i \neq \frac{n}{2}$ (que é equivalente a $\frac{n}{2}+1 \neq i$), já que $i < j = \frac{n}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
[Y^-_{i:j-i}, X_j] &= [Y^-_{i:\frac{n}{2}-i}, Y^+_{\frac{n}{2}:1}] \\
&= [e_{i,\frac{n}{2}} - e_{\frac{n}{2}+1,n+1-i}, 2e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}] \\
&= (e_{i,\frac{n}{2}} - e_{\frac{n}{2}+1,n+1-i})(2e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}) \\
&\quad - (2e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1})(e_{i,\frac{n}{2}} - e_{\frac{n}{2}+1,n+1-i}) \\
&= 2e_{i,\frac{n}{2}+1} - 0 \\
&\quad - (0 - 2e_{\frac{n}{2},n+1-i}) \\
&= 2(e_{i,\frac{n}{2}+1} + e_{\frac{n}{2},n+1-i}) \\
&= 2Y^+_{i:\frac{n}{2}-i+1} = 2Y^+_{t:m},
\end{aligned}$$

lembrando que $t = i$ e $m = j - i + 1 = \frac{n}{2} - i + 1$. Supondo agora $n-1$ par, temos

$$[X_i, \ldots, X_j] = [Y^-_{i:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p:1}],$$

como $p = \frac{n-1}{2}$ e consequentemente $j = p + 1 = \frac{n+1}{2}$, temos

$$[X_i, \ldots, X_j] = [Y^-_{i:j-i}, Y^+_{\frac{n-1}{2}:1}] = [Y^-_{i:\frac{n+1}{2}-i}, Y^+_{\frac{n-1}{2}:1}].$$

Calculando o comutador, tendo em vista que $n+1-i \neq \frac{n-1}{2}$ e $n+1-i \neq \frac{n+1}{2}$ pois $i < \frac{n+1}{2} < \frac{n+3}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
[Y^-_{i:\frac{n+1}{2}-i}, Y^+_{\frac{n-1}{2}:1}] &= [e_{i,\frac{n+1}{2}} - e_{\frac{n+1}{2},n+1-i}, e_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}} + e_{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}}] \\
&= (e_{i,\frac{n+1}{2}} - e_{\frac{n+1}{2},n+1-i})(e_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}} + e_{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}}) \\
&\quad - (e_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}} + e_{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}})(e_{i,\frac{n+1}{2}} - e_{\frac{n+1}{2},n+1-i}) \\
&= 0 + e_{i,\frac{n+3}{2}} - 0 - 0 \\
&\quad - (0 - e_{\frac{n-1}{2},n+1-i} + 0 + 0) \\
&= e_{i,\frac{n+3}{2}} + e_{\frac{n-1}{2},n+1-i} \\
&= e_{i,i+(j+1-i)} + e_{n+1-(i+(j+1-i)),n+1-i} \\
&= Y^+_{i:j-i+1} = Y^+_{t:m}.
\end{aligned}$$

Supondo agora $i = p + 1 < j$ temos

$$i = \frac{n}{2} < j \Longrightarrow n - j < \frac{n}{2} = i,$$

portanto $t = n - j = n - i + 1 - m$. Se $n - 1$ for ímpar, então $t = \frac{n}{2} + 1 - m$,

$$[X_i, \ldots, X_j] = [Y^+_{\frac{n}{2}:1}, Y^-_{\frac{n}{2}-1:1}, \ldots, Y^-_{\frac{n}{2}-m+1:1}],$$

para $m = 2$, temos $t = \frac{n}{2} - 1$ e

$$\begin{aligned}
[Y^+_{\frac{n}{2}:1}, Y^-_{\frac{n}{2}-1:1}] &= [2e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}, e_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}} - e_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}] \\
&= (2e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1})(e_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}} - e_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}) - (e_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}} - e_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2})(2e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}) \\
&= 0 - 2e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2} - (2e_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1} - 0) \\
&= -2(e_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1} + e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}) = -2Y^+_{t:2}.
\end{aligned}$$

Supondo o resultado válido para algum $k \geq 2$, isto é

$$[Y^+_{\frac{n}{2}:1}, Y^-_{\frac{n}{2}-1:1}, \ldots, Y^-_{\frac{n}{2}-k+1:1}] = \lambda Y^+_{\frac{n}{2}+1-k:k}$$

onde $\lambda \neq 0$, temos para $k + 1$ que

$$[Y^+_{\frac{n}{2}:1}, Y^-_{\frac{n}{2}-1:1}, \ldots, Y^-_{\frac{n}{2}-k+1:1}, Y^-_{\frac{n}{2}-k:1}] = \lambda[Y^+_{\frac{n}{2}+1-k:k}, Y^-_{\frac{n}{2}-k:1}].$$

Calculando o comutador temos

$$\begin{aligned}
[Y^+_{\frac{n}{2}+1-k:k}, Y^-_{\frac{n}{2}-k:1}] &= [e_{\frac{n}{2}+1-k:\frac{n}{2}+1} + e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k}, e_{\frac{n}{2}-k,\frac{n}{2}-k+1} - e_{\frac{n}{2}+k,\frac{n}{2}+k+1}] \\
&= (e_{\frac{n}{2}+1-k:\frac{n}{2}+1} + e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k})(e_{\frac{n}{2}-k,\frac{n}{2}-k+1} - e_{\frac{n}{2}+k,\frac{n}{2}+k+1}) \\
&\quad - (e_{\frac{n}{2}-k,\frac{n}{2}-k+1} - e_{\frac{n}{2}+k,\frac{n}{2}+k+1})(e_{\frac{n}{2}+1-k,\frac{n}{2}+1} + e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k}) \\
&= 0 - 0 + 0 - e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k+1} - (e_{\frac{n}{2}-k,\frac{n}{2}+1} + 0 - 0 - 0) \\
&= -(e_{\frac{n}{2}-k,\frac{n}{2}+1} + e_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k+1}) \\
&= -Y^+_{\frac{n}{2}-k,k+1}.
\end{aligned}$$

Caso $n - 1$ seja par, então $p = \frac{n-1}{2}$ e $i = \frac{n+1}{2}$, daí $t = n - j = n - i - m + 1 = \frac{n+1}{2} - m$. Uma verificação direta mostra que para $m = 2$ segue que

$$[X_i, X_{i+1}] = [Y^+_{p:1}, Y^-_{p-1:1}] = [Y^+_{\frac{n-1}{2}:1}, Y^-_{\frac{n-3}{2}:1}] = -Y^+_{\frac{n-3}{2}:2} = -Y^+_{t:m}.$$

Também com uma verificação direta vemos que $[Y^+_{\frac{n+1}{2}-k:k}, Y^-_{\frac{n+1}{2}-k-1:1}] = -Y_{\frac{n+1}{2}-k-1:k+1}$.

Supondo agora $i < p+1 < j$. Se $n-1$ for ímpar, existe $s \leq p$, tal que

$$\underbrace{Y^-_{i:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p+1:1}, Y^-_{p:1}, \ldots, Y^-_{s:1}}_{j-i+1=m \text{ elementos}},$$

assim temos

$$j - i + 1 = p + 1 - i + 1 + p - s + 1 \Longrightarrow s = 2(p+1) - j = n - j,$$

façamos indução em j. Inicialmente note que para termos $i < n-j$, $i = n-j$ e $i > n-j$ devemos ter respectivamente $j < n-i$, $j = n-i$ e $j = n-i$. O primeiro valor para j em que a indução faz sentido é o j que satisfaz $s = p$, isto é $j = n - p = \frac{n+2}{2}$, sabemos que

$$[Y^-_{i:1}, Y^-_{i+1:1}, \ldots, Y^-_{p:1}, Y^+_{p+1:1}] = 2Y^+_{i:\frac{n}{2}-i+1}.$$

Assim para $j = \frac{n+2}{2}$, e consequentemente $s = p = \frac{n-2}{2}$, temos $t = i$ e

$$[X_i, \ldots, X_j] = 2[Y^+_{i:\frac{n}{2}-i+1}, Y^-_{\frac{n-2}{2}:1}].$$

Para o cálculo do comutador na direita da equação acima, em relação os índices que aparecem nas operações com as matrizes unitárias, note que $n+1-i \neq \frac{n-2}{2}$ e $n+1-i = \frac{n+2}{2}$, pois $i < p+1 = \frac{n}{2}$, assim

$$\begin{aligned}
[Y^+_{i:\frac{n}{2}-i+1}, Y^-_{\frac{n-2}{2}:1}] &= [e_{i,\frac{n+2}{2}} + e_{\frac{n}{2},n+1-i}, e_{\frac{n-2}{2},\frac{n}{2}} - e_{\frac{n+2}{2},\frac{n+4}{2}}] \\
&= (e_{i,\frac{n+2}{2}} + e_{\frac{n}{2},n+1-i})(e_{\frac{n-2}{2},\frac{n}{2}} - e_{\frac{n+2}{2},\frac{n+4}{2}}) \\
&\quad - (e_{\frac{n-2}{2},\frac{n}{2}} - e_{\frac{n+2}{2},\frac{n+4}{2}})(e_{i,\frac{n+2}{2}} + e_{\frac{n}{2},n+1-i}) \\
&= 0 - e_{i,\frac{n+4}{2}} + 0 - 0 \\
&\quad - (0 + e_{\frac{n-2}{2},n+1-i} - 0 - 0) \\
&= -(e_{i,i+(\frac{n+2}{2}-i+1)} + e_{n+1-\frac{n+4}{2},n+1-i}) = -Y^+_{t:m},
\end{aligned}$$

notemos que para $j = \frac{n+2}{2}$ temos $m = j - i + 1 = \frac{n+2}{2} - i + 1$ e $t = i$. Supondo que

$$[X_i, \ldots, X_j] = \lambda Y^+_{i:j-i+1}$$

para algum $\frac{n+2}{2} \leq j \leq n-i-1$, com $\lambda \neq 0$, para $j+1$ temos

$$[X_i, \ldots, X_j, X_{j+1}] = \lambda[Y^+_{i:j-i+1}, Y^-_{n-j-1:1}].$$

Para o cálculo do comutador na direita da equação acima, em relação aos índices das matrizes elementares, observe que $j+1 \neq n-j-1$, pois $j \geq \frac{n+2}{2} > \frac{n-2}{2}$, e que $n+1-i = n-j-1$ pois caso contrário teríamos $j-i+1 = -1$, e também que $n+1-i \neq j+1$ e $n-j \neq i$ pois $j < n-i$, assim

$$\begin{aligned}
[Y^+_{i:j-i+1}, Y^-_{n-j-1:1}] &= [e_{i,j+1} + e_{n-j,n+1-i}, e_{n-j-1,n-j} - e_{j+1,j+2}] \\
&= (e_{i,j+1} + e_{n-j,n+1-i})(e_{n-j-1,n-j} - e_{j+1,j+2}) \\
&\quad - (e_{n-j-1,n-j} - e_{j+1,j+2})(e_{i,j+1} + e_{n-j,n+1-i}) \\
&= 0 - e_{i,j+2} + 0 - 0 \\
&\quad - (0 + e_{n-j-1,n+1-i} - 0 - 0) \\
&= -(e_{i,i+(j-i+2)} + e_{n+1-(j+2),n+1-i}) \\
&= -Y^+_{i:j+1-i+1},
\end{aligned}$$

portanto $[X_i, \ldots, X_k] = \lambda Y_{t:m}$, onde $\lambda \neq 0$, $t = \min\{i, n-k\} = i$ e $m = k-i+1$ para $\frac{n+2}{2} \leq k \leq n-i$. Consideremos agora a possibilidade $j > n-i$, nesse caso temos $t = \min\{i, n-j\} = n-j$. Especificamente em $j = n-i+1$ e consequentemente $t = n-j = i-1$ e $m = j-i+1 = n-2i+2$ temos

$$[X_i, \ldots, X_{n-i}, X_{n-i+1}] = \lambda [Y^+_{i:n-2i+1}, Y^-_{i-1:1}].$$

Calculando o comutador da direita, observando que $n-i+1 \neq i-1$ pois $i < p+1 = \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned}
[Y^+_{i:n-2i+1}, Y^-_{i-1:1}] &= [e_{i,n-i+1} + e_{i,n+1-i}, e_{i-1,i} - e_{n+1-i,n+2-i}] \\
&= [2e_{i,n-i+1}, e_{i-1,i} - e_{n+1-i,n+2-i}] \\
&= (2e_{i,n-i+1})(e_{i-1,i} - e_{n+1-i,n+2-i}) - (e_{i-1,i} - e_{n+1-i,n+2-i})(2e_{i,n-i+1}) \\
&= 0 - 2e_{i,n+2-i} - (2e_{i-1,n-i+1} - 0) \\
&= -2(e_{i-1,n+1-i} + e_{i,n+2-i}) = -2Y^+_{i-1:n-2i+2},
\end{aligned}$$

supondo então que $[X_i, \ldots, X_j] = \lambda Y^+_{n-j:j-i+1}$ para algum $j \geq n-i+1$, temos

$$[X_i, \ldots, X_j, X_{j+1}] = \lambda [Y^+_{n-j:j-i+1}, Y^-_{n-j-1:1}].$$

Calculando o comutador da direita

$$\begin{aligned}[Y^+_{n-j:j-i+1}, Y^-_{n-j-1:1}] &= [e_{n-j,n-i+1} + e_{i,j+1}, e_{n-j-1,n-j} - e_{j+1,j+2}] \\ &= (e_{n-j,n-i+1} + e_{i,j+1})(e_{n-j-1,n-j} - e_{j+1,j+2}) \\ &\quad - (e_{n-j-1,n-j} - e_{j+1,j+2})(e_{n-j,n-i+1} + e_{i,j+1}) \\ &= 0 - 0 + 0 - e_{i,j+2} \\ &\quad - (e_{n-j-1,n-i+1} + 0 - 0 - 0) \\ &= -(e_{n-j-1,n-i+1} + e_{i,j+2}) = -Y_{n-j-1:j-i+2}\end{aligned}$$

o que conclui a indução. Para o caso $n-1$ par a demonstração é análoga. ■

Lema 3.32 ([24]) *Sejam $n \geq 4$ um inteiro e G um grupo qualquer, não necessariamente abeliano. Dada uma G-graduação do tipo **MT** para álgebra de Lie $UT_n^{(-)} = (UT_n, [,])$, com G não necessariamente abeliano, então*

(*i*) *Para cada $i = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ temos $G\text{-}degY^-_{i:0} = 1$ e $G\text{-}degY^+_{i:0} = g$ é um elemento de ordem 2.*

(*ii*) *Sendo $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, então $\eta = (G\text{-}degY^-_{1:1}, G\text{-}degY^-_{2:1}, \ldots, G\text{-}degY^-_{p:1}) \in G^p$, se n for ímpar, ou $\eta = (G\text{-}degY^-_{1:1}, G\text{-}degY^-_{2:1}, \ldots, G\text{-}degY^-_{p:1}, G\text{-}degY^+_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor:1})$ se n for par, e o elemento $g = G\text{-}degY^+_{1:0}$ definem completamente a graduação.*

(*iii*) *O suporte da graduação é comutativo.*

*Ademais, em uma G-graduação qualquer, se os elementos $Y^{\pm}_{i:m}$ são homogêneos para cada i e $m = 0$ e $m = 1$, com $degY^+_{i:m} \neq degY^-_{i:m}$ para todo m, então a graduação é necessariamente do tipo **MT**.*

Prova.

(*i*) Dado i com $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, note inicialmente que $i \neq \frac{n+1}{2} > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Tomando $m > 0$ de tal forma que $i \neq \frac{n+1-m}{2}$, pelo item (2) de (*iii*) da ***Proposição 3.26*** temos $[Y^-_{i:0}, Y^-_{i:m}] = Y^-_{i:m} \neq 0$, portanto $G\text{-}degY^-_{i:0} = 1$. Para mostrar que $g = G\text{-}degY^+_{i:0}$, $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tomemos $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, daí $i \neq \frac{n-1}{2}$ e $i \neq \frac{n}{2}$, portanto

$$\begin{aligned}[Y^-_{i:1}, Y^+_{i+1:0}] &= [e_{i,i+1} - e_{n-i,n+1-i}, e_{i+1,i+1} + e_{n-i,n-i}] \\ &= (e_{i,i+1} - e_{n-i,n+1-i})(e_{i+1,i+1} + e_{n-i,n-i}) \\ &\quad - (e_{i+1,i+1} + e_{n-i,n-i})(e_{i,i+1} - e_{n-i,n+1-i}) \\ &= e_{i,i+1} + 0 - 0 - 0 - (0 - 0 + 0 - e_{n-i,n+1-i}) \\ &= e_{i,i+1} + e_{n-i,n+1-i} = Y^+_{i:1}.\end{aligned}$$

Por outro lado, de (1) do item (iii) da ***Proposição 3.26*** temos $Y^+_{i:1} = -[Y^-_{i:1}, Y^+_{i:0}]$, portanto $[Y^-_{i:1}, Y^+_{i+1:0}] = -[Y^-_{i:1}, Y^+_{i:0}] \neq 0$. Deste modo concluímos que $G\text{-}degY^+_{1:0} = G\text{-}degY^+_{2:0} = \cdots = G\text{-}degY^+_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor :0} = g$. Para mostrar que g tem ordem 2, para cada $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ tomemos $m > 0$ tal que $i \neq \frac{n+1-m}{2}$ e computemos $[Y^+_{i:0}, [Y^+_{i:0}, Y^+_{i:m}]]$, com efeito, por (1) do item (iii) da ***Proposição 3.26*** temos

$$[Y^+_{i:0}, [Y^+_{i:0}, Y^+_{i:m}]] = [Y^+_{i:0}, Y^-_{i:m}] = Y^+_{i:m},$$

portanto $[Y^+_{i:0}, [Y^+_{i:0}, Y^+_{i:m}]] = Y^+_{i:m} \neq 0$ e daí $g^2 = 1$. Ademais como $[Y^+_{i:0}, Y^-_{i:m}] = Y^+_{i:m}$ e por definição de graduação do tipo **MT** temos $G\text{-}degY^-_{i:m} \neq G\text{-}degY^+_{i:m}$ segue que $g \neq 1$.

(ii) Mostremos que podemos deduzir o grau dos demais elementos $Y^\pm_{i:m}$ a partir dos dados fornecidos. A demonstração do item (i) mostra que na verdade temos $G\text{-}degY^-_{i:0} = 1$ para todo $i \neq \frac{n+1}{2}$. Como $Y^-_{\frac{n+1}{2}:0} = 0$ caso n seja ímpar, sabemos o grau de todos os $Y^-_{i:0}$. Se $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então $g = G\text{-}degY^+_{i:0}$, daí caso $i' > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, fazendo $i = n + 1 - i'$ temos $Y^+_{i':m} = Y^+_{i:m}$ e $i < \frac{n}{2}$, assim sabemos o grau de todos os elementos $Y^+_{i:0}$. Calculemos agora o grau dos elementos $Y^\pm_{i:m}$, com $m = 1$. Dado $Y^-_{k:1}$, se $k \leq p$ já conhecemos o grau de $Y^-_{k:1}$. Suponha $k \geq p$. Para $k = \frac{n}{2}$, temos $Y^-_{\frac{n}{2}:1} = 0$ e não há o que ser feito. Caso $k > \frac{n}{2}$, definindo k' de tal forma que $k' + k + 1 = n + 1$, temos $Y^-_{k:1} = -Y^-_{k':1}$, assim segue que

$$k' = n - k < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \Longrightarrow k' \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = p,$$

portanto conhecemos o grau de $Y^-_{k':1}$ e consequentemente o grau de $Y^-_{k:1}$, logo sabemos o grau de todos elementos não nulos $Y^-_{k:1}$. Se $i \neq \frac{n+1-m}{2}$ e $i \neq \frac{n+1}{2}$ temos $[Y^+_{i:0}, Y^-_{i:m}] = Y^+_{i:m}$, portanto para $m = 1$ sabemos o grau de $Y^+_{k:1}$ para $k \neq \frac{n}{2}$ e $k \neq \frac{n+1}{2}$. Para $k = \frac{n+1}{2}$, pondo $k' = n + 1 - 1 - k = n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2}$, temos $Y^+_{k':1} = Y^+_{k:1}$, mas já sabemos o grau de $Y^+_{k':1}$. Para $k = \frac{n}{2}$, sabemos o grau o grau de $Y^+_{k:1}$ por hipótese.

Assim já sabemos o grau de todos os elementos $Y^\pm_{i:m}$ para $m = 0, 1$. Calculemos agora o grau dos elementos $Y^\pm_{i:m}$ para $m \geq 2$. Supondo inicialmente que $i = \frac{n+1-m}{2}$, temos $Y^-_{i:m} = 0$, note que nesse caso $i = \frac{n+1}{2} - \frac{m}{2} \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$. Pondo $j = i + m - 1$ temos $j = \frac{n-1}{2} + \frac{m}{2} \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ e $n - j = \frac{n+1-m}{2} = i$, ou seja,

$t = \min\{i, n-j\} = i$. Utilizando o ***Lema 3.31***, obtemos o grau de $Y^+_{i:m}$. Caso $i = \frac{n+1}{2}$, pondo $i' + i = n + 1 - m$ temos $G\text{-}deg Y^{\pm}_{i:m} = G\text{-}deg Y^{\pm}_{i':m}$ e $i' \neq \frac{n+1}{2}$, portanto podemos supor $i \neq \frac{n+1}{2}$. Note que supondo $i \neq \frac{n+1-m}{2}$, $m > 0$, e $i \neq \frac{n+1}{2}$, como vimos no item (i), temos $[Y^+_{i:0}, Y^+_{i:m}] = Y^-_{i:m}$ (no item (i) esse cálculo em questão só importava que $i \neq \frac{n+1}{2}$), portanto, para $i \neq \frac{n+1-m}{2}$ e $i \neq \frac{n+1}{2}$ com $m > 0$ temos $G\text{-}deg Y^+_{i:m} = g \cdot G\text{-}deg Y^-_{i:m}$. Assim dados i, m tais que $m \geq 2$, $i \neq \frac{n+1-m}{2}$ e $i \neq \frac{n+1}{2}$ basta descobrirmos o grau de $Y^+_{i:m}$ ou $Y^-_{i:m}$. Com efeito, dados i e m nas condições ditas logo atrás, definamos $j = i + m - 1$ e $t = \min\{i, n-j\}$. Considere a expressão $2i + m - 1$, caso $n > 2i + m - 1$ temos $n - j = n - i - m + 1 > i$, daí $t = i$ e pelo ***Lema 3.31*** sabemos o grau de $Y^+_{i:m}$ ou o grau de $Y^-_{i:m}$. Caso $n \leq 2i + m - 1$, pondo $i' + i = n + 1 - m$ temos $i = n + 1 - m - i'$ e daí

$$n \leq 2i + m - 1 \Longrightarrow n \leq 2(n + 1 - m - i') + m - 1 \Longrightarrow 2i' + m - 1 \leq n.$$

Pondo $j' = i' + m - 1$ temos $t = \min\{i', n - j'\} = i'$ e portanto pelo ***Lema 3.31*** sabemos o grau de $Y^+_{i':m}$ ou grau de $Y^-_{i':m}$.

(iii) Pelo item (ii) vemos que os elementos $t_i = G\text{-}deg Y^-_{i:1}$, para $i = 1, 2, \ldots, p$, e $g = G\text{-}deg Y^+_{1:0}$, além do elemento $t_{p+1} = Y^+_{\frac{n}{2}:1}$, caso n seja par, geram o suporte da graduação. Mostremos que os elementos $t_1, \ldots, t_p, t_{p+1}, g$ comutam dois a dois. Inicialmente usando o ***Lema 3.31*** e a ideia da demonstração da ***Proposição 3.8***, que foi a mesma usada no caso de Jordan, vemos que $t_1, \ldots, t_p, t_{p+1}$ comutam dois a dois. Mostremos que t_i comuta com g, como $i \neq \frac{n+1}{2}$ e $i \neq \frac{n+1-1}{2}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, p$, temos $[Y^+_{i:0}, Y^-_{i:1}] = Y^+_{i:1} \neq 0$, assim g comuta com t_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, p$. Caso n seja par, devemos verificar que g comuta com t_{p+1}. Para isso note que $G\text{-}deg(Y^-_{\frac{n}{2}-1:1}) = t_p$, $G\text{-}deg(Y^+_{\frac{n}{2}:1}) = t_{p+1}$ e $G\text{-}deg(Y^+_{\frac{n}{2}:0}) = g$. Uma simples verificação direta nos mostra que

$$[[Y^+_{\frac{n}{2}:1}, Y^-_{\frac{n}{2}-1:1}], Y^+_{\frac{n}{2}:0}] = e_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2} - e_{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1} \neq 0.$$

Logo g comuta com $t_{p+1}t_p$, consequentemente g comuta com t_{p+1}. Concluímos assim, que o suporte da graduação é comutativo.

■

Observação 3.33 *Note que no item (ii) do lema acima poderíamos ter posto* $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *e enunciarmos* η *da seguinte forma,*

$$\eta = (G\text{-}degY^{-}_{1:1}, G\text{-}degY^{-}_{2:1}, \ldots, G\text{-}degY^{-}_{q-1:1}, G\text{-}degY^{-}_{q:1})$$

se n *for ímpar e*

$$\eta = (G\text{-}degY^{-}_{1:1}, G\text{-}degY^{-}_{2:1}, \ldots, G\text{-}degY^{-}_{q-1:1}, G\text{-}degY^{+}_{q:1})$$

se n *for par.*

Análogo ao caso de Jordan, também há uma recíproca ao item (ii) do **Lema 3.32**. Supondo G abeliano, dado um elemento $g \in G$ de ordem 2 e uma sequência $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q) \in G^q$, onde $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então há uma G-graduação do tipo **MT** em $UT_n^{(-)}$ tal que $G\text{-}degY^{+}_{i:0} = g$ para $i = 1, 2, \ldots, q$. Além de haver a coincidência

$$\eta = (G\text{-}degY^{-}_{1:1}, G\text{-}degY^{-}_{2:1}, \ldots, G\text{-}degY^{-}_{q-1:1}, G\text{-}degY^{\pm}_{q:1})$$

onde o sinal do super índice da última entra é " $-$ " se n for ímpar e " $+$ " se n for par. Nesse contexto, chamamos tal G-graduação de G-graduação definida por g e η. Denotaremos por $((UT_n, [,]), g, \eta)$ a G-graduação do tipo **MT** definida por g e η.

Para provarmos a recíproca do item (ii) do ***Lema 3.29*** e do ***Lema 3.32***, provemos alguns resultados.

Lema 3.34 *Sejam* H *um grupo abeliano e* $A = \bigoplus_{h \in H} A_h$ *uma álgebra associativa* H*-graduada, com uma involução graduada* $\varphi : A \longrightarrow A$*, isto é,* $\varphi(A_h) = A_h$ *para todo* $h \in H$*. Segue que:*

(i) A álgebra de Jordan $A^+ = (A, \circ)$ *admite uma* $H \times \mathbb{Z}_2$*-graduação tal que se* $a \in A$ *é um elemento homogêneo de grau* h *na* H*-graduação, então* $a + \varphi(a)$ *e* $a - \varphi(a)$ *são elementos homogêneos da* $H \times \mathbb{Z}_2$*-graduação de* A^+ *de graus respectivamente* $(h, 0)$ *e* $(h, 1)$*.*

(ii) A álgebra de Lie $A^{(-)} = (A, [,])$ *admite uma* $H \times \mathbb{Z}_2$*-graduação tal que se* $a \in A$ *é um elemento homogêneo de grau* h *na* H*-graduação, então* $a + \varphi(a)$ *e* $a - \varphi(a)$ *são elementos homogêneos da* $H \times \mathbb{Z}_2$*-graduação de* $A^{(-)}$ *de graus respectivamente* $(h, 1)$ *e* $(h, 0)$*.*

Prova. Como φ é uma transformação linear tal que $\varphi^2 = 1$, então φ possui autovalores 1 e -1, e A admite uma decomposição

$$A = \{x \in A \mid \varphi(x) = x\} \oplus \{x \in A \mid \varphi(x) = -x\}.$$

Para $i \in \mathbb{Z}_2$ podemos denotar $W_i = \{x \in A \mid \varphi(x) = (-1)^i x\}$, daí $A = W_0 \oplus W_1$. Mostremos que W_1 e W_0 são subespaços graduados na H-graduação de A. Inicialmente, como φ é graduado, segue que se $a \in A_h$, então $a \pm \varphi(a) \in A_h$. Dado $w \in W_i$, então $\varphi(w) = (-1)^i w$ e existem $a_h \in A$, onde $h \in H$, tais que $w = \sum_{h\in H} a_h$. Daí

$$(-1)^i w = \varphi(w) = \sum_{h\in H} \varphi(a_h),$$

por outro lado

$$(-1)^i w = \sum_{h\in H} (-1)^i a_h.$$

Portanto

$$\sum_{h\in H} \varphi(a_h) = \sum_{h\in H} (-1)^i a_h \quad \Longrightarrow \quad \sum_{h\in H} \big(\varphi(a_h) - (-1)^i a_h\big) = 0,$$

daí $\varphi(a_h) = (-1)^i a_h$ e consequentemente $a_h \in A_h \cap W_i$. Logo $w \in \underset{h\in H}{\oplus} A_h \cap W_i$ e $W_i = \underset{h\in H}{\oplus} A_h \cap W_i$. Desta forma segue que

$$A = W_0 \oplus W_1 = \left(\bigoplus_{h\in H} A_h \cap W_0\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{h\in H} A_h \cap W_1\right) = \bigoplus_{(h,i)\in H\times\mathbb{Z}_2} (A_h \cap W_i).$$

Demonstremos o item (i). Para cada $(h, i) \in H \times \mathbb{Z}_2$ definamos

$$A^+_{(h,i)} = A_h \cap W_i.$$

Desta forma, como vimos pouco mais acima, temos $A^+ = \underset{g\in H\times\mathbb{Z}_2}{\oplus} A^+_g$. Mostremos que tal decomposição é uma graduação. Dados $(h_1, i), (h_2, j) \in H \times \mathbb{Z}_2$, tomemos $x \in A^+_{(h_1,i)}$ e $y \in A^+_{(h_2,j)}$. Em particular temos $x \in A_{h_1}$ e $y \in A_{h_2}$, daí $xy \in A_{h_1h_2}$ e $yx \in A_{h_2h_1}$. Como H é abeliano, temos $xy, yx \in A_{h_1h_2}$ e portanto $x \circ y \in A_{h_1h_2}$. Ademais, $x \in W_i$ e $y \in W_j$ daí $\varphi(x) = (-1)^i x$ e $\varphi(y) = (-1)^j y$. Logo

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(xy) + \varphi(yx) = \varphi(y)\varphi(x) + \varphi(x)\varphi(y) = (-1)^{i+j}(yx + xy) = (-1)^{i+j} x \circ y$$

donde segue que $x \circ y \in W_{i+j}$. Portanto $x \circ y \in A_{h_1h_2} \cap W_{i+j}$, isto é, $x \circ y \in A^+_{(h_1h_2,i+j)}$. Concluímos que $\mathscr{G} : A^+ = \underset{g\in H\times\mathbb{Z}_2}{\oplus} A^+_g$ é uma $H \times \mathbb{Z}_2$-graduação para a álgebra de Jordan A^+. Por fim, para concluir o item (i), dado $a \in A_h$, $h \in H$, note que $x = a + \varphi(a)$ é tal que $x \in A_h$ e $\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi^2(a) = \varphi(a) + a = x$, donde segue que $x \in W_0$ e portanto $x \in A^+_{(h,0)}$. Definindo $y = a - \varphi(a)$, temos $y \in A_h$ e $\varphi(y) = \varphi(a) - \varphi^2(a) = \varphi(a) - a = -y$, donde segue que $y \in W_1$ e portanto $y \in A^+_{(h,1)}$.

Provemos o item (ii). Para cada $(h,i) \in H \times \mathbb{Z}_2$ definamos

$$A^{(-)}_{(h,i)} = A_h \cap W_{i+1}.$$

Desta forma, temos $A^{(-)} = \bigoplus_{g \in H \times \mathbb{Z}_2} A^{(-)}_g$. Provemos que tal decomposição é uma $H \times \mathbb{Z}_2$-graduação. Dados $(h_1,i),(h_2,j) \in H \times \mathbb{Z}_2$. Tomemos $x \in A^{(-)}_{(h_1,i)}$ e $y \in A^{(-)}_{(h_2,j)}$, analogamente ao item (i), temos $x \in A_{h_1}$ e $y \in A_{h_2}$, e como H é abeliano segue que $[x,y] \in A_{h_1h_2}$. Ademais, temos $x \in W_{i+1}$ e $y \in W_{j+1}$, daí $\varphi(x) = (-1)^{i+1}x$ e $\varphi(y) = (-1)^{j+1}y$. Logo

$$\varphi([x,y]) = \varphi(xy) - \varphi(yx) = \varphi(y)\varphi(x) - \varphi(x)\varphi(y) = (-1)^{i+j+2}(yx - xy) = (-1)^{i+j+1}[x,y],$$

donde segue que $[x,y] \in W_{i+j+1}$ e portanto $[x,y] \in A_{h_1h_2} \cap W_{i+j+1} = A^{(-)}_{(h_1h_2,i+j)}$. Por fim, dado $a \in A_h$, tomando $x = a + \varphi(a)$, segue que $x \in A_h$ e $\varphi(x) = x$, logo $x \in W_0$. Portanto $x \in A^{(-)}_{(h,1)}$. Pondo $y = a - \varphi(a)$, temos $y \in A_h$ e $\varphi(y) = -y$, logo $y \in W_1$. Portanto $y \in A^{(-)}_{(h,0)}$. ■

Provemos as recíprocas dos itens (ii) do ***Lema 3.29*** e do ***Lema 3.32***.

Teorema 3.35 *Sejam G um grupo abeliano, que tenha algum elemento de ordem 2, e $n \geq 4$ um inteiro. Pondo $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, dado $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q) \in G^q$ e $t \in G$ um elemento de ordem 2, existe uma única graduação do tipo **MT** em UJ_n tal que $G\text{-}deg Y^+_{i:1} = \eta_i$ e $G\text{-}deg Y^-_{i:0} = t$ para $1 \leq i \leq q$.*

Prova. Usemos ***Lema 3.34*** , pondo $A = UT_n$. Consideremos H sendo o grupo abeliano livre de posto q com geradores livres $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_q\}$. Tomamos a H-graduação elementar em UT_n, caso associativo, definida por

- se $q = \frac{n}{2}$, $\varepsilon = (\ell_1, \ldots, \ell_{q-1}, \ell_q, \ell_{q-1}, \ldots, \ell_1) \in H^{n-1}$,
- se $q = \frac{n-1}{2}$, $\varepsilon = (\ell_1, \ldots, \ell_{q-1}, \ell_q, \ell_q, \ell_{q-1}, \ldots, \ell_1) \in H^{n-1}$,

como na ***Proposição 3.6***. Note que $\varepsilon = rev\ \varepsilon$. Seja $\varphi = \varphi_{n+1}$ como na ***Observação 3.24***, definida por $\varphi(e_{i:m}) = e_{-i:m}$, assim temos que φ é uma involução. Mostremos que φ é uma involução graduada. Inicialmente temos $H\text{-}deg(e_{i:0}) = H\text{-}deg(e_{-i:0})$, supondo $i < j$, como vimos na ***Observação 3.25*** temos $H\text{-}deg(e_{k:1}) = H\text{-}deg(e_{-k:1})$, pois $\varepsilon = rev\varepsilon$. Como $e_{ij} = e_{i:1}e_{i+1:1}\cdots e_{j-2:1}e_{j-1:1}$, segue que

$$\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{j-1:1})\varphi(e_{j-2:1})\cdots\varphi(e_{i+1:1})\varphi(e_{i:1}).$$

Daí

$$deg\varphi(e_{ij}) = deg\varphi(e_{j-1:1})deg\varphi(e_{j-2:1})\cdots deg\varphi(e_{i+1:1})deg\varphi(e_{i:1}).$$

Como H é abeliano, temos

$$\begin{aligned} deg\varphi(e_{ij}) &= deg\varphi(e_{j-1:1})deg\varphi(e_{j-2:1})\cdots deg\varphi(e_{i+1:1})deg\varphi(e_{i:1}) \\ &= deg\varphi(e_{i:1})deg\varphi(e_{i+1:1})\cdots deg\varphi(e_{j-2:1})deg\varphi(e_{j-1:1}) \\ &= dege_{ij}, \end{aligned}$$

portanto φ é uma involução graduada. Estamos nas hipóteses do ***Lema 3.34***. Usando o item (i) do ***Lema 3.34*** temos uma $H \times \mathbb{Z}_2$-graduação em UJ_n, tal que os elementos $Y^{\pm}_{i:m} = e_{i:m} \pm \varphi(e_{i:m})$ são homogêneos e satisfazem

$$H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y^{+}_{i:m}) = (H\text{-}deg(e_{i:m}), 0) \qquad \text{e} \qquad H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y^{-}_{i:m}) = (H\text{-}deg(e_{i:m}), 1).$$

Dado $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q) \in G^q$ e $t \in G$ um elemento de ordem 2, a aplicação $\ell_i \mapsto \eta_i$ estende de forma única um homomorfismo de grupos $f : H \mapsto G$ tal que $f(\ell_i) = \eta_i$. Consideremos o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \psi : H \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow G \\ (h, j) &\mapsto \psi(h, j) = f(h)t^j. \end{aligned}$$

Sendo $\mathscr{G} : UJ_n = A^+ = \bigoplus_{(h,j)\in H\times\mathbb{Z}_2} A^+_{(h,j)}$, tomemos a G-graduação ${}^{\psi}\mathscr{G}$ obtida de $\mathscr{G}$ e induzida por ψ em UJ_n como na ***Definição 1.43***. Em ${}^{\psi}\mathscr{G}$, os elementos $Y^{\pm}_{i:m}$ continuam homogêneos. Ademais os elementos homogêneos em $\mathscr{G}$, que tenham grau x, agora tem grau $\psi(x)$ em ${}^{\psi}\mathscr{G}$. donde segue que

$$G\text{-}deg(Y^{+}_{i:m}) = \psi(H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y^{+}_{i:m})) = \psi(H\text{-}deg(e_{i:m}), 0)) = f(H\text{-}deg(e_{i:m})),$$

por outro lado

$$G\text{-}deg(Y^{-}_{i:m}) = \psi(H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y^{-}_{i:m})) = \psi(H\text{-}deg(e_{i:m}), 1)) = f(H\text{-}deg(e_{i:m}))t.$$

Portanto $G\text{-}deg(Y^{+}_{i:m}) \neq G\text{-}deg(Y^{-}_{i:m})$, e assim a graduação é do tipo $\mathbf{MT}$. Por fim, para $1 \leq i \leq q$, temos

$$G\text{-}deg(Y^{+}_{i:1}) = \psi(H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y^{+}_{i:1})) = \psi(H\text{-}deg(e_{i:1}), 0) = \psi(\ell_i, 0) = f(\ell_i)t^0 = \eta_i,$$

e

$$G\text{-}deg(Y^-_{i:0}) = \psi(H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y^-_{i:0})) = \psi(H\text{-}deg(e_{i:0}), 1) = \psi(1,1) = f(1)t^1 = t.$$

A unicidade da graduação decorre do item (ii) do ***Lema 3.29***. ■

Agora para o caso de Lie.

Teorema 3.36 *Sejam G um grupo abeliano, que tenha algum elemento de ordem 2, e $n \geq 4$ um inteiro. Pondo $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, dado $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q) \in G^q$ e $g \in G$ um elemento de ordem 2, existe uma única graduação do tipo **MT** em $UT_n^{(-)}$ tal que*

$$\eta = (G\text{-}degY^-_{1:1}, G\text{-}degY^-_{2:1}, \ldots, G\text{-}degY^-_{q-1:1}, G\text{-}degY^{\pm}_{q:1})$$

onde o sinal da última entrada de η depende da paridade de n, " $-$ " se n for ímpar e " $+$ " se n for par. Além de satisfazer $G\text{-}degY^+_{i:0} = g$ para $1 \leq i \leq q$.

Prova. Usando o ***Lema 3.34***, pondo $A = UT_n$. Consideremos H sendo o grupo abeliano livre de posto q com geradores livres $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_q\}$. Tomando a H-graduação elementar em UT_n, caso associativo, definida por

- se $q = \frac{n}{2}$, $\varepsilon = (\ell_1, \ldots, \ell_{q-1}, \ell_q, \ell_{q-1}, \ldots, \ell_1) \in H^{n-1}$,
- se $q = \frac{n-1}{2}$, $\varepsilon = (\ell_1, \ldots, \ell_{q-1}, \ell_q, \ell_q, \ell_{q-1}, \ldots, \ell_1) \in H^{n-1}$,

como na ***Proposição 3.6***. Note que $\varepsilon = rev\ \varepsilon$, daí definindo φ, por $\varphi(e_{i:m}) = e_{-i:m}$, temos que φ é uma involução graduada. Assim pelo item (ii) do ***Lema 3.34*** temos uma $H \times \mathbb{Z}_2$-graduação $\mathscr{G}$ em $A^{(-)} = UT_n^{(-)}$, onde os elementos $Y^{\pm}_{i:m} = e_{i:m} \pm \varphi(e_{i:m})$ são homogêneos, cujo grau satisfaz

$$H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y^+_{i:m}) = (H\text{-}deg(e_{i:m}), 1) \quad \text{e} \quad H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y^-_{i:m}) = (H\text{-}deg(e_{i:m}), 0).$$

Sendo η e g como no enunciado do teorema. Caso n seja ímpar, consideremos os homomorfismos de grupos $f : H \longrightarrow G$, tal que $f(\ell_i) = \eta_i$, e

$$\begin{aligned} \psi : H \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow G \\ (h, i) &\mapsto \psi(h, i) = f(h)g^i. \end{aligned}$$

Consideremos a G-graduação ${}^{\psi}\mathscr{G}$ obtida de $\mathscr{G}$ e induzida por ψ em $UT_n^{(-)}$. De modo análogo ao que foi feito no teorema anterior, vemos ${}^{\psi}\mathscr{G}$ é uma G-graduação do tipo **MT**

onde $G\text{-}deg(Y_{i:1}^{-}) = \eta_i$ e $G\text{-}deg(Y_{i:0}^{+}) = g$ para $1 \leq i \leq q$. Caso n seja par, modificaremos a f pondo $f(\ell_q) = \eta_q g$, e continuaremos com $f(\ell_i) = \eta_i$ para $1 \leq i \leq q-1$, e

$$\begin{aligned} \psi : H \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow G \\ (h, i) &\mapsto \psi(h, i) = f(h)g^i. \end{aligned}$$

Assim a G-graduação ${}^{\psi}\mathscr{G}$ obtida de $\mathscr{G}$ e induzida por ψ em $UT_n^{(-)}$, é do tipo **MT** e satisfaz

$$G\text{-}degY_{q:1}^{+} = \psi(H \times \mathbb{Z}_2\text{-}deg(Y_{q:1}^{+})) = \psi(H\text{-}deg(e_{q:1}), 1) = f(\ell_q)g^1 = \eta_q gg = \eta_q,$$

os demais detalhes também são análogos a demonstração do ***Teorema 3.35*** e a unicidade da graduação segue do item (ii) do ***Lemma 3.32***. ■

Para fins de coerência, daqui pra frente, a menos que dito ao contrário, suponha $n \geq 4$. A importância desse tipo de graduação, é que se G é um grupo abeliano então uma G-graduação elementar em $(UT_n, \odot)$ nunca é isomorfa uma G-graduação do tipo **MT** em $(UT_n, \odot)$. Ademais, dada uma G-graduação em $(UT_n, \odot)$ ou ela é isomorfa a uma graduação elementar, ou é isomorfa a uma do tipo **MT**.

Teorema 3.37 (Teorema 24 de [25]) *Sejam G um grupo qualquer e $n \geq 4$ um inteiro. Toda G-graduação em UJ_n tem suporte comutativo e é ou isomorfa uma G-graduação elementar ou uma G-graduação do tipo **MT**.*

A seguir apresentamos os conceitos de suporte relevante é álgebras praticamente isomorfas para poder enunciar o próximo resultado.

Definição 3.38 *Seja $A = \oplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. O suporte relevante da graduação é*

$$r - \operatorname{supp} A = \{g \in G | A_g \not\subseteq Ann(A)\}.$$

Aqui $\operatorname{Ann}(A) = \{a \in A | ab = ba = 0, b \in A\}$ *é o anulador de A.*

Antes de definir quando duas álgebras de Lie são praticamente isomorfas iremos precisar da noção de graduações praticamente iguais.

Definição 3.39 *Sejam L_1 e L_2 duas graduações na mesma álgebra de Lie L, pelo mesmo grupo G. As G-graduações L_1 e L_2 são praticamente iguais se $L_1/z(L) = L_2/z(L)$, (aqui a igualdade é de álgebras G-graduadas), denotaremos isto por $L_1 \overset{G}{=} L_2$.*

Definição 3.40 *Sejam L_1 e L_2 álgebras de Lie G-graduadas. Então L_1 e L_2 são praticamente isomorfas como álgerbas G-graduadas se existe uma G-graduação L_1' na álgebra de Lie L_2 tal que $L_1 \cong L_1'$ (isomorfismo de álgebras G-graduadas) e $L_1' \overset{G}{=} L_2$.*

Teorema 3.41 (Teorema 21 de [24]) *Sejam G um grupo qualquer e $n \geq 4$ um inteiro. Toda G-graduação em $UT_n^{(-)}$ tem suporte relevante comutativo e é praticamente isomorfa uma G-graduação elementar ou uma G-graduação do tipo $\boldsymbol{MT}$.*

Dessa forma para cálculos do expoente graduado, nos casos de Lie e de Jordan, se $n \geq 4$ podemos supor G abeliano e que a graduação é do tipo elementar ou do tipo **MT**.

De uma forma mais geral, no intuito de se calcular o expoente graduado de uma álgebra $(A, \mathscr{G})$ G-graduada, é útil achar valores que majoram e minoram o valor $c_m^G(A)$ para cada $m \in \mathbb{N}^*$. Ilustrativamente, suponha que $f, g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ são tais que $f(m) \leq c_m^G(A) \leq g(m)$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$ e que os limites $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{f(m)}$ e $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{g(m)}$ existam e coincidam, iguais a um valor α, então pelo teorema do confronto temos que

$$exp^G(A) = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m^G(A)} = \alpha.$$

Seja $(A, \mathscr{G})$ uma álgebra associativa G-graduada. Pela ***Proposição 1.81***, temos que

$$c_m(A) \leq c_m^G(A) \leq \mid G \mid^m c_m(A).$$

A desigualdade da direita faz sentido apenas para grupos finitos. Uma pergunta natural é se essas desigualdades são as melhores possíveis. Em outras palavras, há álgebras G graduadas que as codimensões são iguais a cota inferior, e álgebras G-graduadas que alcançam a cota superior? Logicamente a G-graduação trivial nos dá a cota inferior. Em [1] e [2] é provado que para um tipo particular de álgebras chamadas de álgebra de Grassmann, sob certas graduações, atinge a cota superior. Portanto, para grupos finitos, as desigualdades são as melhores possíveis.

Como nesse trabalho não estamos exigindo nada a respeito da cardinalidade de G, para nossas graduações em $(UT_n, *)$, devemos procurar uma cota superior que não dependa da quantidade de elementos de G.

Começaremos com as graduações elementares em UT_n. Provaremos uma desigualdade similar, que não depende da cardinalidade do grupo, e daí poderemos considerar grupos infinitos.

Capítulo 4

Comportamento assintótico das codimensões graduadas em $UT_n, UT_n^{(-)}$ e UJ_n

Nesse capítulo iremos abordar técnicas e resultados para se obter o expoente graduado de UT_n, nos 3 casos: associativo, de Lie e de Jordan. Como vimos no capítulo anterior, podemos supor que a G-graduação é do tipo elementar ou do tipo $\boldsymbol{MT}$. Nesse capítulo, no caso associativo consideremos F como sendo o grupo livre de posto $n-1$ e nos casos de Lie e Jordan, consideremos F como sendo o grupo abeliano livre de posto $n-1$, isto é, $F = \mathbb{Z}^{n-1}$ (***Seção 1.9***). Assuma também que $L = \{l_1, \ldots, l_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores livres para F.

4.1 Graduação elementar universal

Iniciamos definindo uma graduação pelo grupo F que será importante no restante do capítulo e cujo nome dá o título a esta seção.

Definição 4.1 *A F-graduação elementar universal de UT_n é a graduação elementar definida por $\eta_F = (l_1, \ldots, l_{n-1})$ (**Notação 3.7**), isto é, F-deg$e_{i,i+1} = l_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

As identidades polinomiais graduadas seguem das sequências η_F-ruins, veja [10]. Começaremos computando as codimensões F-graduadas de UT_n. Suponha UT_n munida

de uma G-graduação elementar, onde G é um grupo arbitrário. Nos casos de Lie e Jordan, consideraremos que G é abeliano. Assumiremos que G é gerado pelo suporte da graduação, isto é, que os elementos $G\text{-}dege_{12}, \ldots, G\text{-}dege_{n-1,n}$ geram G. A aplicação $\overline{\psi} : L \to G$ dada por $\overline{\psi}(l_i) = G\text{-}dege_{i,i+1}$ pode ser estendida de forma única como um homomorfismo de grupos $\psi : F \to G$. Note que ψ deve ser sobrejetiva. Assim identificaremos $G = \psi(F) = F/Ker\psi$.

Lema 4.2 *A $\psi(F)$-graduação em UT_n, induzida pela F-graduação elementar e pelo homomorfismo ψ, coincide com a G-graduação inicial.*

Prova. O lema segue desde que $\psi(F)\text{-}dege_{i,i+1} = G\text{-}dege_{i,i+1}$, para todo i. ■

Consideremos a álgebra livre $K\langle X'\rangle$ livremente gerada pelo conjunto $X' = \{x_i^{(l)} \mid i \in \mathbb{N}^*, l \in F\}$, F-graduada. Faremos a seguinte identificação, inicialmente denotemos por $Supp\ \eta_F$ o suporte da F-graduação elementar universal em UT_n e para cada $t \in G$ e $i \in \mathbb{N}^*$ definiremos

$$y_i^{(t)} = \begin{cases} \sum\limits_{l \in Supp\ \eta_F \cap \psi^{-1}(t)} x_i^{(l)}, & \text{se } Supp\ \eta_F \cap \psi^{-1}(t) \neq \emptyset, \\ x_i^{(l)}, & \text{para uma escolha de } l \text{ com } \psi(l) = t, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

A álgebra gerada por $X = \{y_i^{(t)} \mid i \in \mathbb{N}, t \in G\}$ é isomorfa a álgebra livre G-graduada e iremos identificar essas duas álgebras. Logo $K\langle X\rangle$ é subálgebra de $K\langle X'\rangle$. Note que UT_n possui um ideal de identidades polinomiais graduadas em $K\langle X\rangle$, referente a G-graduação elementar e um ideal de identidades polinomiais em $K\langle X'\rangle$ referente a F-graduação elementar η_F. Denotemos respectivamente esses ideais por $Id_G(UT_n)$ e $Id_F(UT_n)$. Veja que $Id_G(UT_n) \subseteq Id_F(UT_n)$. Ademais $T(A) \subseteq Id_G(A)$, onde $T(A)$ é o ideal das identidades polinomiais ordinárias de $A = UT_n$ (nas variáveis $y_i \approx y_i^{(1)}$, que são as identidades graduadas da graduação trivial). Como em [3] é provada a desigualdade $c_m^G(UT_n) \leq c_m^F(UT_n)$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.3 *Seja G um grupo qualquer, tomando uma G-graduação elementar em UT_n, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos a seguinte desigualdade:*

$$c_m(UT_n) \leq c_m^G(UT_n) \leq c_m^F(UT_n).$$

Desigualdades similares podem ser obtidas para o caso de Lie e de Jordan. Veremos que no caso associativo $c_m(UT_n)$ e $c_m^F(UT_n)$ são assintoticamente iguais e usaremos

essas desigualdades para obter o comportamento assintótico de $c_m^G(UT_n)$ seja qual for a G-graduação em UT_n.

4.2 O caso associativo

Foquemos no caso associativo. Nesse caso toda G-graduação pode ser considerada elementar. Continuaremos com as notações estabelecidas até aqui nesse capítulo.

Lema 4.4 *Seja $\mu = (t_1, t_2, \ldots, t_c)$ uma sequência η_F-boa, defina $z_i = x_i^{(t_i)}$, $x_j = x_j^{(0)}$, para $1 \leq i \leq c$, $1 \leq j \leq c'$. Considere os monômios*

$$x_{i_{01}} x_{i_{02}} \cdots x_{i_{0l_0}} z_1 x_{i_{11}} x_{i_{12}} \cdots x_{i_{1l_1}} z_2 \cdots z_c x_{i_{c1}} x_{i_{c2}} \cdots x_{i_{cl_c}} \tag{4.1}$$

onde para cada $0 \leq m \leq c$, temos $l_m \geq 0$ e $i_{m1} < i_{m2} < \cdots < i_{ml_m}$. Então esses monômios são linearmente independentes modulo $Id_F(UT_n)$.

Prova. Como $\mu = (t_1, t_2, \ldots, t_c)$ é η_F-boa, existem matrizes elementares estritamente superiores $r_1, r_2, \ldots, r_c$ com $deg(r_i) = t_i$ para cada i, que satisfazem $r_1 r_2 \cdots r_c \neq 0$. Assim existem $u_1, u_2, \ldots, u_{c+1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ com $u_1 < u_2 < \cdots < u_{c+1}$ tais que $r_1 = e_{u_1 u_2}, r_2 = e_{u_2 u_3}, \ldots, r_c = e_{u_c u_{c+1}}$. Tomando $\{\xi_m^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}^*, m = 1, 2, \ldots, n\}$ variáveis comutativas, consideremos a substituição $x_h = \sum_{l=1}^n \xi_l^{(h)} e_{ll}$ e $z_i = r_i$. Fixado m, onde $0 \leq m \leq c$, dado j com $1 \leq j < l_m$ denotando $p = i_{mj}$ e $q = i_{m(j+1)}$, temos

$$x_p = \sum_{k=1}^n \xi_k^{(p)} e_{kk} \qquad \text{e} \qquad x_q = \sum_{s=1}^n \xi_s^{(q)} e_{ss}$$

daí

$$x_p x_q = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{(p)} e_{kk} \right) \left(\sum_{s=1}^n \xi_s^{(q)} e_{ss} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \xi_k^{(p)} \xi_s^{(q)} e_{kk} e_{ss} = \sum_{l=1}^n \xi_l^{(p)} \xi_l^{(q)} e_{ll},$$

portanto

$$x_{i_{m1}} x_{i_{m2}} \cdots x_{i_{ml_m}} = \sum_{l=1}^n \xi_l^{(i_{m1})} \xi_l^{(i_{m2})} \cdots \xi_l^{(i_{ml_m})} e_{ll}.$$

Note que

$$\begin{aligned} z_m x_{i_{m1}} x_{i_{m2}} \cdots x_{i_{ml_m}} &= e_{u_m u_{m+1}} \left(\sum_{l=1}^n \xi_l^{(i_{m1})} \xi_l^{(i_{m2})} \cdots \xi_l^{(i_{ml_m})} e_{ll} \right) \\ &= \xi_{u_{m+1}}^{(i_{m1})} \xi_{u_{m+1}}^{(i_{m2})} \cdots \xi_{u_{m+1}}^{(i_{ml_m})} e_{u_m u_{m+1}}, \end{aligned}$$

então o monômio em (4.1) após a substituição ficará

$$\xi_{u_1}^{i_{01}} \cdots \xi_{u_1}^{i_{0l_0}} \xi_{u_2}^{i_{11}} \cdots \xi_{u_2}^{i_{1l_1}} \cdots \xi_{u_{c+1}}^{l_{c1}} \cdots \xi_{u_{c+1}}^{i_{cl_c}} e_{u_1 u_{c+1}}.$$

Estes valores acima estão em bijeção com os monômios de (4.1). De fato, dado um monômio como em (4.1), destacando o menor u_i que aparece, os índices superiores determinam as variáveis no primeiro bloco, e pela substituição boa, as variáveis z's tem que estar na ordem $z_1, z_2, \ldots, z_c$. Assim atribuindo valores em $\{0,1\}$ para as variáveis ξ_u^i mostramos que os monômios em (4.1) são L.I. Outra forma, para leitores que conhecem o termo *ordem deg-lexográfica* para monômios em $K\langle X_0\rangle$, é a seguinte, ordenando os monômios de (4.1) em ordem lexicográfica em relação ao primeiro bloco de letras $x_{i_{01}} \cdots, x_{i_0 l_0}$ e em seguida pela ordem lexicográfica do segundo bloco de letras $x_{i_{11}} \cdots x_{i_1 l_1}$ e assim por diante, supondo uma combinação linear dos monômios em (4.1) tal que a combinação pertença a $Id_F(UT_n)$, fazendo os elementos $\xi_{u_1}^{i_{01}}, \ldots, \xi_{u_1}^{i_{0l_0}}, \xi_{u_2}^{i_{11}}, \ldots, \xi_{u_2}^{i_{1l_1}}, \ldots, \xi_{u_{c+1}}^{l_{c1}}, \ldots, \xi_{u_{c+1}}^{i_{cl_c}}$ iguais a 1 e os demais $\xi_j^{(h)}$ iguais a 0, de forma adequada, conseguimos mostrar, do monômio de menor posição até o monômio de maior posição, que o coeficiente que acompanha o monômio deve ser nulo. ■

Segundo o lema acima os polinômios em (4.1) geram como espaço vetorial o quociente $(P_m^G + Id_F)/Id_F(UT_n)$. Assim podemos computar $c_m^F(UT_n)$ contando o número de monômios deste tipo.

Lema 4.5 *Temos* $c_m^F(UT_n) = 1 + \sum_{i=1}^{min\{n-1,m\}} \binom{n}{i+1}\binom{m}{i} i!(i+1)^{m-i}$.

Prova. Tomando $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in F^m$, formemos a subsequência $\mu_a = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_i})$ obtida de a depois de remover todos os a_j triviais (mantendo a ordem original das entradas remanescentes). Computemos $dimP_m^a(UT_n)$. Se $\sigma\mu_a$ é uma sequência η-ruim para todo $\sigma \in S_i$ então $dimP_m^a(UT_n) = 0$. (Lembre que η_F representa a F-graduação elementar universal em UT_n.) Ademais se $\mu_a = \emptyset$, isto é $a = (1, 1, \ldots, 1)$, então $dimP_m^a(UT_n) = 1$. Assim assumiremos $\mu \neq \emptyset$.

Afirmação 1. $dimP_m^a(UT_n) = (i+1)^{m-i}$.

Nos monômios de $P_m^a(UT_n)$ as variáveis de grau não trivial podem ser ordenadas de forma única, e as variáveis de grau trivial aparecem em algum lugar entre as variáveis de grau não trivial. Variáveis de grau trivial consecutivas podem ser ordenadas. Daí

$dimP_m^a(UT_n)$ coincide com o número de maneiras que podemos por $m-i$ variáveis diferentes em $i+1$ locais.

Afirmação 2. Há $\binom{m}{i}$ sequências $a' \in F^m$ tais que $\mu_{a'} = \mu_a$.

Há $\binom{m}{m-i} = \binom{m}{i}$ maneiras de por $m-i$ elementos todos iguais a 1 na sequência μ_a e obter diferentes sequências de tamanho m.

Afirmação 3. Há $\binom{n}{i+1}$ boas sequências de comprimento i.

Note que á uma correspondência 1-1 entre as sequências boas e os produtos não nulos $e_{i_1j_1}e_{i_2j_2}\cdots e_{i_ij_i}$. Esse produto é não nulo se, e somente se, $1 \leq i_1 < j_1 = i_2 < j_2 = i_3 < \cdots < j_{i-1} = i_i < j_i \leq n$. Assim há tantos produtos não nulos quanto há formas de escolher um $i+1$ elementos em um conjunto de n elementos, $\{i_1, j_1, j_2, \ldots, j_i\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Isso é igual a $\binom{n}{i+1}$.

Afirmação 4. Dada $a' \in G^m$ tal que $\sigma\mu_{a'} = \mu_a$ para algum $\sigma \in S_i$. Então $dimP_m^{a'}(UT_n) = dimP_m^a(UT_n)$. Em particular, nós podemos permutar os elementos $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_i}$ assim obtendo o fator $i!$.

As afirmações acima concluem a prova. ■

Como temos um o valor de $c_m^F(UT_n)$ de forma explícita, em função de m, podemos encontrar uma expressão que seja assintoticamente igual a $c_m^F(UT_n)$.

Corolário 4.6 $c_m^F(UT_n) \sim \dfrac{1}{n^{n-1}} m^{n-1}n^m = m^{n-1}n^{m-n+1}$.

Prova. A prova é a mesma que em [22] Corollary 4.1. ■

Usando a classificação das graduações em UT_n, e os bem conhecidos comportamentos assintóticos das codimensões de UT_n no caso associativo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.7 *Supondo $charK = 0$, consideremos uma G-graduação em UT_n, onde G é um grupo arbitrário. Então $c_m^G(UT_n) \sim \dfrac{1}{n^{n-1}} m^{n-1}n^m$. Em particular temos que $exp^G(UT_n) = n$.*

4.3 O caso de Lie: Graduação elementar

Agora no caso de Lie, temos $F = \mathbb{Z}^{n-1}$. Nessa seção η denotará a $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduação universal em $UT_n^{(-)}$. Escrevendo $UT_n^{(-)} = \bigoplus_{g \in \mathbb{Z}^{n-1}} (UT_n^{(-)})_g$, uma base para as identidades

graduadas das graduações elementares em $UT_n^{(-)}$ não é conhecida. Portanto, primeiramente determinemos as identidades graduadas para $(UT_n^{(-)}, \eta)$, e então iremos calcular as codimensões graduadas.

Definição 4.8 *Uma variável $x_i^{(g)}$ é uma variável nula se $(UT_n^{(-)})_g = 0$.*

Observação 4.9 *Sendo ℓ_i a $(n-1)$-upla onde a i-ésima entrada é 1 e as demais são zero, e $\ell_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, temos $\mathbb{Z}^{n-1}$-deg$(e_{i,i+1}) = \ell_i$. Como $\mathbb{Z}^{n-1}$-deg$(e_{i,i}) = \ell_0$ e*

$$\mathbb{Z}^{n-1}\text{-}deg(e_{i,j}) = \mathbb{Z}^{n-1}\text{-}deg([e_{i,i+1}, e_{i+1,i+2}, \ldots, e_{j-2,j-1}, e_{j-1,j}]) = \ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_{j-1}.$$

Portanto $(UT_n^{(-)})_g \neq 0$ se, e somente se, $g \in \mathbb{Z}^{n-1}$ é da forma

$$g = \sum_{l=i}^{j-1} \ell_l = (0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 1, \ldots, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$$

para algum $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e $i < j \leq n$. Consequentemente $x_i^{(g)}$ não é uma variável nula se, e somente se, g for da forma descrita acima.

Lema 4.10 *Seja $\mu \in (\mathbb{Z}^{n-1})^c$ uma sequência η-ruim. Então f_μ segue de algumas variáveis nulas e de $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] = 0$.*

Prova. Denotando $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_c)$, caso $\mu_i = 0$ para algum i, o resultado segue. Caso $(UT_n^{(-)})_{\mu_i} = 0$ também. Suponha que nenhum desses casos ocorra, então pela ***Observação 4.9***, usando a notação da ***Observação 4.9*** coloquemos $g_{ij} = G\text{-}deg(e_{ij}) = \sum_{l=i}^{j-1} \ell_l$. Para cada k devemos ter $\mu_k = g_{i_k j_k}$. Nesse caso o grau de f_μ é $g_{i_1 j_1} + \cdots + g_{i_c j_c}$. Caso o grau g de f_μ seja tal que $x_i^{(g)}$ é uma variável nula, o resultado segue. Caso contrário, teríamos que $g = g_{i_1 j_1} + \cdots + g_{i_c j_c}$ deve ser da forma descrita na ***Observação 4.9***. Daí μ_1, que é um bloco de 1's, quando somado com μ_2 que também é um bloco de 1's, deve resultar em um bloco de $1's$, bloco esse maior que o de μ_1 e μ_2. Isso significa que o bloco de 1's de μ_1 tem que acabar uma posição antes do bloco de 1's de μ_2 começar, ou o bloco de 1's de μ_1 tem que começar uma posição depois da de μ_2 começar. Isto é, $j_1 = i_2$ ou $j_2 = i_1$. Analogamente, o bloco de 1's de μ_3 tem que começar um depois do bloco de 1's de $\mu_1 + \mu_2$, ou terminar uma posição antes do bloco de 1's de $\mu_1 = \mu_2$. Assim prosseguimos. Desta forma a menos de mudar a ordem dos μ_i por uma permutação $\sigma \in \mathscr{T}_c$, podemos supor que $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \ldots, j_{c-1} = i_c$. Porém como $g_{i_k j_k} = G\text{-}deg(e_{i_k j_k})$, temos que μ é η- boa. Absurdo. ■

Relembremos que, se $\mu \in (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in (\mathbb{Z}^{n-1})^m$ é uma sequência η-boa no caso associativo, então as únicas sequências η-boas usando os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ são da forma $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$, para alguns $1 \leq i \leq j \leq m$.

Qualquer sequência $\mu \in (\mathbb{Z}^{n-1})^c$ com repetições é uma sequência η-ruim, desde que para formar um produto não nulo nós usamos apenas matrizes elementares triangulares estritamente superiores. Denotemos por T, o $T_{\mathbb{Z}^{n-1}}$-ideal gerado pelas variáveis nulas e por $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$.

Dado $f_\mu = [z_1, z_2, \ldots, z_m]$ (veja a **Definição 3.15**), e uma permutação $\sigma \in S_m$, denotaremos $f_\mu^{(\sigma)} = [z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(m)}]$. Relembrando a definição de $\mathscr{T}_m$ e $\tau_m = (m\ m-1 \cdots\ 2\ 1)$, temos o seguinte lema:

Lema 4.11 *Seja $\mu \in (\mathbb{Z}^{n-1})^m$ uma sequência η-boa no caso associativo. Considerando f_μ no caso de Lie, temos $f_\mu \equiv (-1)^{m+1} f_\mu^{(\tau_m)}$ $(mod\ T)$*

Prova. Escrevendo $f_\mu = [z_1, z_2, \ldots, z_m]$, e considerando todas as igualdades módulo T. Faremos indução em m. Para $m = 2$, a igualdade segue da propriedade antissimétrica do comutador. Supondo válido para $m-1$, temos

$$f_\mu^{(\tau_m)} = [z_m, z_{m-1}, \ldots, z_1] = [[z_m, z_{m-1}, \ldots, z_2], z_1] = [(-1)^{m-1+1}[z_2, z_3, \ldots, z_m], z_1]$$
$$= (-1)^m [z_2, z_3, \ldots, z_m, z_1].$$

Pondo $Z = [z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}]$ e usando a identidade de Jacobi

$$[z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}, z_m, z_1] = [[Z, z_m], z_1] = -[[z_1, Z], z_m] - [[z_m, z_1], Z]$$
$$= [[Z, z_1], z_m] - [[z_m, z_1], Z]$$
$$= [z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}, z_1, z_m] - [[z_m, z_1], Z],$$

como $[z_m, z_1] = 0$, temos $[z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}, z_m, z_1] = [z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}, z_1, z_m]$. Usando a identidade de Jacobi e o fato de que $[z_j, z_1] = 0$ para $3 \leq j \leq m$ temos

$$[z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}, z_m, z_1] = [z_2, z_1, z_3, \ldots, z_{m-1}, z_m] = -[z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}, z_m]$$

portanto segue que

$$f_\mu^{(\tau_m)} = (-1)^m [z_2, z_3, \ldots, z_m, z_1] = (-1)^{m+1} [z_1, z_2, \ldots, z_m] = (-1)^{m+1} f_\mu.$$

Donde segue que $f_\mu \equiv (-1)^{m+1} f_\mu^{(\tau_m)}$ $(mod\ T)$. ■

O lema anterior juntamente com o ***Lema 2.8*** implicam no seguinte corolário.

Corolário 4.12 *Se $\mu \in (\mathbb{Z}^{n-1})^m$ é uma sequência η-boa no caso associativo, então f_μ no caso de Lie satisfaz $f_\mu \equiv \pm f_\mu^{(\sigma)}$ $(mod\ T)$ para qualquer $\sigma \in \mathscr{T}_m$. Ademais $f_\mu^{(\sigma)} \equiv 0$ $(mod\ T)$ para qualquer $\sigma \in S_m \setminus \mathscr{T}_m$.*

Prova. Dado $\mu \in (\mathbb{Z}^{n-1})^m$, consideremos $f_\mu = [z_1, z_2, \ldots, z_m]$, note para cada $\sigma \in S_m$ temos

$$\begin{aligned}(-f_\mu)^\sigma &= (-[z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_m])^\sigma \\ &= ([z_2, z_1, z_3, z_4, \ldots, z_m])^\sigma \\ &= [z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(3)}, z_{\sigma^{-1}(4)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(m)}] \\ &= -[z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}, z_{\sigma^{-1}(4)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(m)}] \\ &= -f_\mu^\sigma\end{aligned}$$

ou seja, $(-f_\mu)^\sigma = -f_\mu^\sigma$ para todo $\sigma \in S_m$. Usando esse fato, o **Lema 2.8** e o **Lema 4.11** temos $f_\mu \equiv \pm f_\mu^\sigma$ $(mod\ T)$, para qualquer $\sigma \in \mathscr{T}_m$. Por fim, $f_\mu^\sigma \equiv 0$ $(mod\ T)$, para $\sigma \in S_m/\mathscr{T}_m$ segue do **Lema 2.5**. ■

Definição 4.13 ([23]) *Um monômio de Lie g é adequado se $g = [g_1, g_2, \ldots, g_c]$ onde*

(i) $g_i = [x_1^{(t_i)}, x_{j_{i1}}^{(0)}, x_{j_{i2}}^{(0)}, \ldots, x_{j_{is_i}}^{(0)}]$, para algum $s_i \geq 0$ e $j_{i1} \leq j_{i2} \leq \cdots \leq j_{is_i}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, c$.

(ii) a sequência $(deg(g_1), deg(g_2), \ldots, deg(g_c))$ é uma sequência η-boa no caso associativo.

Lema 4.14 *[Lemma 20 de [23]] Os monômios adequados geram o espaço vetorial $L\langle X'\rangle$ módulo T.*

Prova. É suficiente provar que $g' = [x_{j_1}^{(i_1)}, x_{j_2}^{(i_2)}, \ldots, x_{j_{c'}}^{(i_{c'})}]$ é uma combinação linear de monômios adequados. Aplicando a Identidade de Jacobi e a identidade graduada $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$, que está em T, concluímos que g' é uma combinação linear de $g = [g_1, g_2, \ldots, g_c]$, onde cada g_i são da forma descrita em (i) da **Definição 4.13** acima. Portando g' é uma combinação de elementos $g = [g_1, g_2, \ldots, g_c]$, com cada g_i como descrito em (i) da **Definição 4.13**, modulo T. Vamos denotar $\mu = (\mathbb{Z}^{n-1}\text{-}deg_1, \mathbb{Z}^{n-1}\text{-}deg_2, \ldots, \mathbb{Z}^{n-1}\text{-}deg_c)$. Se μ for uma sequência η-ruim do caso de Lie, então o g correspondente será nulo módulo T. Caso contrário, pelo ***Lema 2.5*** e pelo ***Corolário 4.12*** vemos que $g = \pm g^\sigma$ $(mod\ T)$, para algum $\sigma \in \mathscr{T}_c$ onde $\sigma\mu = (\mu_{\sigma^{-1}(1)}, \mu_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, \mu_{\sigma^{-1}(c)})$ é uma sequência η-boa do caso associativo. ■

Corolário 4.15 *Os monômios adequados formam uma base para o espaço $L\langle X'\rangle$ módulo T.*

Prova. Pelo **Lema 4.14**, vemos que eles formam um conjunto gerador para $L\langle X'\rangle$ módulo T. Mostremos que eles são L.I. módulo T. Dado $v \in \mathbb{N}^*$, tomemos $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(v)}$ monômios adequados. Para cada $k = 1, 2, \ldots, v$, temos $g^{(k)} = [g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, \ldots, g_{c_k}^{(k)}]$, onde

(i) $g_i^{(k)} = [x_1^{(t_{i,k})}, x_{j_{i_1,k}}^{(0)}, x_{j_{i_2,k}}^{(0)}, \ldots, x_{j_{s_{i,k}}}^{(0)}]$, onde $s_{i,k} \geq 0$ e $j_{i_1,k} \leq j_{i_2,k} \leq \cdots \leq j_{s_{i,k}}$,

(ii) a sequência $(deg(g_1^{(k)}), deg(g_2^{(k)}), \ldots, deg(g_{c_k}^{(k)})) = (t_{1,k}, t_{2,k}, \ldots, t_{c_k,k})$ é η-boa no caso associativo.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_v \in K$ escalares tais que $\sum_{k=1}^{v} \lambda_k g^{(k)} \in T$. Para cada k, como a sequência $(t_{1,k}, t_{2,k}, \ldots, t_{c_k,k})$ é η-boa no caso associativo, existem matrizes unitárias $r_{1,k}, r_{2,k}, \ldots, r_{c_k,k}$ triangulares estritamente superiores onde $deg(r_{i,k}) = t_{i,k}$ e $r_{1,k}r_{2,k}\cdots r_{c_k,k} \neq 0$. Cada matriz $r_{i,k}$ é da forma $e_{p_{i,k}q_{i,k}}$ onde $p_{i,k} < q_{i,k}$ e $p_{i,k}, q_{i,k} \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $r_{1,k}r_{2,k}\cdots r_{c_k,k} \neq 0$ temos $q_{1,k} = p_{2,k}, q_{2,k} = p_{3,k}, \ldots, q_{c_k-1,k} = p_{c_k,k}$, assim temos $r_{i,k} = e_{p_{i,k}p_{i+1,k}}$ para $i = 1, 2, \ldots, c_k - 1$, por conveniência denotemos $q_{c_k,k} = p_{c_k+1,k}$. Consideremos $\{\xi_m^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \ldots, n\}$ variáveis comutativas. Façamos a substituição

$$x_1^{(t_{i,k})} = r_{i,k} = e_{p_{i,k}p_{i+1,k}} \qquad \text{e} \qquad x_{j_l}^{(0)} = \sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell^{(j_l)} e_{\ell\ell}.$$

Após a substituição teremos

$$\begin{aligned}
[x_1^{(t_{i,k})}, x_{j_{i_1,k}}^{(0)}] &= [e_{p_{i,k}p_{i+1,k}}, \sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell^{(j_{i_1,k})} e_{\ell\ell}] \\
&= (e_{p_{i,k}p_{i+1,k}}) \left(\sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell^{(j_{i_1,k})} e_{\ell\ell} \right) - \left(\sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell^{(j_{i_1,k})} e_{\ell\ell} \right) (e_{p_{i,k}p_{i+1,k}}) \\
&= \xi_{p_{i+1,k}}^{(j_{i_1,k})} e_{p_{i,k}p_{i+1,k}} - \xi_{p_{i,k}}^{(j_{i_1,k})} e_{p_{i,k}p_{i+1,k}} \\
&= (\xi_{p_{i+1,k}}^{(j_{i_1,k})} - \xi_{p_{i,k}}^{(j_{i_1,k})}) e_{p_{i,k}p_{i+1,k}}.
\end{aligned}$$

Vemos que após a substituição teremos

$$\begin{aligned}
g_i^{(k)} &= [x_1^{(t_{i,k})}, x_{j_{i_1,k}}^{(0)}, x_{j_{i_2,k}}^{(0)}, \ldots, x_{j_{s_{i,k}}}^{(0)}] \\
&= (\xi_{p_{i+1,k}}^{(j_{i_1,k})} - \xi_{p_{i,k}}^{(j_{i_1,k})})(\xi_{p_{i+1,k}}^{(j_{i_2,k})} - \xi_{p_{i,k}}^{(j_{i_2,k})}) \cdots (\xi_{p_{i+1,k}}^{(j_{s_{i,k}})} - \xi_{p_{i,k}}^{(j_{s_{i,k}})}) e_{p_{i,k}p_{i+1,k}} \\
&= \prod_{l=1}^{s_{i,k}} (\xi_{p_{i+1,k}}^{(j_{i_l,k})} - \xi_{p_{i,k}}^{(j_{i_l,k})}) e_{p_{i,k}p_{i+1,k}}.
\end{aligned}$$

Note que teremos $g^{(k)} = \lambda[r_{1,k}, r_{2,k}, \ldots, r_{c_k,k}]$, onde λ é um elemento do anel formado por $\{\xi_m^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \ldots, n\}$, e que $[r_{1,k}, r_{2,k}, \ldots, r_{c_k,k}] \neq 0$. Note que a substituição pelos $r_{i,k}$ determina os graus das variáveis iniciais de cada g_i, que tem como resultado uma substituição não nula, e o $g^{(k)}$ determina os índices das variáveis de grau 0 que estão no $g_i^{(k)}$. Isso tudo é suficiente para determinar o monômio e assim podemos escolher valores convenientes para as variáveis ξ_p^j. ■

Dessa forma, provamos o seguinte teorema:

Teorema 4.16 *As identidades $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduadas de $(UT_n^{(-)}, \eta)$ seguem de*

$$[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] = 0, \qquad x_1^{(g)} = 0, \qquad (UT_n^{(-)})_g = 0.$$

Consequentemente temos o corolário abaixo:

Corolário 4.17 (Corollary 23 de [23]) *As codimensões graduadas da graduação elementar universal satisfazem*

$$c_m^{\mathbb{Z}^{n-1}}(UT_n^{(-)}) = \sum_{i=1}^{min\{n-1,m\}} \binom{n}{i+1}\binom{m}{i} i^{m-i} i!.$$

Em particular, $exp^{\mathbb{Z}^{n-1}}(UT_n^{(-)}) = n - 1$.

Prova. A prova não difere do caso associativo. ■

Como uma consequência dos resultados acima obtemos o expoente graduado de qualquer graduação elementar em $UT_n^{(-)}$.

Teorema 4.18 (Theorem 24 de [23]) *Suponha $charK = 0$. Para qualquer grupo abeliano G e qualquer G-graduação elementar na álgebra de Lie $UT_n^{(-)}$, temos*

$$m^{n-1}(n-1)^{m-n} \leq c_m^G(UT_n^{(-)}) \leq m^{n-1}(n-1)^{m-n+1}.$$

Em particular, $exp^G(UT_n^{(-)}) = n - 1$.

Prova. O lado esquerdo é o comportamento assintótico de $c_m(UT^{(-)})$. Já o termo da direita é obtida do comportamento assintótico de $c_m^{\mathbb{Z}^{n-1}}(UT_n^{(-)})$. Pois em,

$$c_m^{\mathbb{Z}^{n-1}}(UT_n^{(-)}) = \sum_{i=1}^{\min\{n-1,m\}} \binom{n}{i+1}\binom{m}{i} i^{m-i} i!$$

para m suficientemente grande, temos que i varia entre 1 e $n-1$. Em $\binom{n}{i+1}\binom{m}{i}i^{m-i}i!$, façamos $i=n-1$, então

$$\binom{n}{n}\binom{m}{n-1}(n-1)^{m-n+1}(n-1)! = \frac{m!}{(m-n+1)!}(n-1)^{m-n+1}.$$

Logo é possível constatar que $c_m^{\mathbb{Z}^{n-1}}(UT_n^{(-)}) \sim m^{n-1}(n-1)^{m-n+1}$. Ademais

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m^{n-1}(n-1)^{m-n}} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m^{n-1}(n-1)^{m-n+1}} = n-1.$$

Portanto $exp^G(UT_n^{(-)}) = n-1$.

■

4.4 Graduações MT e Graduações elementares em UJ_n

Nesta seção obteremos uma cota superior para as codimensões de UJ_n com graduações elementares, e para as graduações do tipo **MT** nos casos de Lie e de Jordan.

Seja η a $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduação elementar universal em UJ_n.

Lema 4.19 *Considere A uma álgebra, não necessariamente associativa, graduada por um grupo abeliano G, $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$. Dado $\mu \in G^m$, consideremos os elementos $g_k \in G$ que aparecem $n_k > 0$ vezes em μ, $1 \le k \le l$, e tomemos $g_\mu = g_1^{n_1}g_2^{n_2}\cdots g_l^{n_l}$. Denotemos por P_m^μ os polinômios multilineares G-graduados em m variáveis que os graus respeitam a sequência μ. Então*

$$dim\ P_m^\mu(A) \le (dim\ A_{g_1})^{n_1}(dim\ A_{g_2})^{n_2}\cdots(dim\ A_{g_l})^{n_l}(dim\ A_{g_\mu}).$$

Prova. Consideremos o seguinte produto direto de espaços vetoriais,

$$V = \underbrace{A_{g_1}\times A_{g_1}\times\cdots\times A_{g_1}}_{n_1 \text{ vezes}} \times \underbrace{A_{g_2}\times\cdots\times A_{g_1}}_{n_2 \text{ vezes}} \times\cdots\times \underbrace{A_{g_l}\times\cdots\times A_{g_l}}_{n_l \text{ vezes}}$$
$$\simeq A_{g_1}^{n_1}\times A_{g_2}^{n_2}\times\cdots\times A_{g_l}^{n_l}.$$

Dado um elemento $f = f(x_{i_1}^{(g_1)},\ldots,x_{i_m}^{(g_l)}) \in P_m^\mu$, para cada $v = (v_1,\ldots,v_m) \in V$, denotemos por $f(v)$ o resultado em A dado pela substituição $x_{i_1}^{(g_1)} = v_1,\ldots,x_{i_m}^{(g_{n_l})} = v_m$. Dessa forma devemos ter $f(v) \in A_{g_\mu}$, para todo $v \in V$. Definamos então

$$T_f : V \longrightarrow A_{g_\mu}$$
$$v \mapsto T_f(v) = f(v).$$

Denotamos por $\mathscr{ML}(V, A_{g_\mu})$ o espaço vetorial formado pelas transformações multilineares do espaço produto V em A_{g_μ}. Como f é multilinear, segue que $T_f \in \mathscr{ML}(V, A_{g_\mu})$, isto é, T_f é uma transformação multilinear de V em A_{g_μ}. Tomemos $f, f' \in P_m^\mu$ tais que $f - f'$ seja uma identidade graduada para A, teremos $(f - f')(v) = 0$ para todo $v \in V$, concluindo que $f(v) = f'(v)$ e consequentemente $T_f = T_{f'}$. Portanto, para cada $\overline{f} \in P_m^\mu(A)$ fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : P_m^\mu(A) &\longrightarrow \mathscr{ML}(V, A_{g_\mu}) \\ \overline{f} &\mapsto \Phi(\overline{f}) = T_f. \end{aligned}$$

É fácil ver que Φ é uma transformação linear. Ademais, para cada $f \in P_m^\mu$ temos

$$T_f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ é uma identidade graduada} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{f} = 0.$$

Concluímos que Φ é injetora e portanto

$$dim P_m^\mu(A) \leq dim \mathscr{ML}(V, A_{g_\mu}) = (\dim A_{g_1})^{n_1} (\dim A_{g_2})^{n_2} \cdots (\dim A_{g_l})^{n_l} (\dim A_{g_\mu})$$

concluindo a demonstração. ■

Lema 4.20 *Na notação do lema anterior, seja* $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ *uma álgebra de Lie* G*-graduada e* $\overline{L} = L/Z(L)$ *o quociente pelo seu centro. Seja* $\overline{L} = \bigoplus_{g \in G} \overline{L}_g$ *a* G*-graduação em* $\overline{L}$ *induzida pela graduação em* L*. Então*

$$dim\ P_m^\mu(L) \leq (dim\ \overline{L}_{g_1})^{n_1} (dim\ \overline{L}_{g_2})^{n_2} \cdots (dim\ \overline{L}_{g_l})^{n_l} (dim\ L_{g_\mu}).$$

Prova. Para $m = 1$ o resultado é imediato. Supondo $m \geq 2$, consideremos os espaços produtos

$$\begin{aligned} V &= \underbrace{L_{g_1} \times L_{g_1} \times \cdots \times L_{g_1}}_{n_1 \text{ vezes}} \times \underbrace{L_{g_2} \times \cdots \times L_{g_1}}_{n_2 \text{ vezes}} \times \cdots \times \underbrace{L_{g_l} \times \cdots \times L_{g_l}}_{n_l \text{ vezes}} \\ &\simeq L_{g_1}^{n_1} \times L_{g_2}^{n_2} \times \cdots \times L_{g_l}^{n_l} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \underbrace{\overline{L}_{g_1} \times \overline{L}_{g_1} \times \cdots \times \overline{L}_{g_1}}_{n_1 \text{ vezes}} \times \underbrace{\overline{L}_{g_2} \times \cdots \times \overline{L}_{g_1}}_{n_2 \text{ vezes}} \times \cdots \times \underbrace{\overline{L}_{g_l} \times \cdots \times \overline{L}_{g_l}}_{n_l \text{ vezes}} \\ &\simeq \overline{L}_{g_1}^{n_1} \times \overline{L}_{g_2}^{n_2} \times \cdots \times \overline{L}_{g_l}^{n_l} \end{aligned}$$

Para cada $v=(v_1,\ldots,v_m)\in V$ denotemos por $\overline{v}=(\overline{v_1},\ldots,\overline{v_m})$ algum vetor em $\overline{V}$ tal que $\overline{v_i}=v_i+Z(L)$ e reciprocamente dado $w\in\overline{V}$ existe $v\in V$ tal que $w=\overline{v}$. Fixado $f\in P_m^\mu$, dado $v=(v_1,\ldots,v_m)\in V$, usando a notação $f(v)$ definida no lema anterior, suponha que $v_1'\in V$ é tal que $\overline{v_1}=\overline{v_1'}$. Temos que $v_1=v_1'+z_1$, onde $z_1\in Z(L)$, como $m\geq 2$ temos $f(Z(L))=0$ e daí

$$\begin{aligned}f(v_1,v_2,\ldots,v_m)=f(v_1'+z_1,v_2,\ldots,v_m)&=f(v_1',v_2,\ldots,v_m)+f(z_1,v_2,\ldots,v_m)\\&=f(v_1',v_2,\ldots,v_m).\end{aligned}$$

Portanto dados $v,v'\in V$ tais que $\overline{v}=\overline{v'}$, temos $f(v)=f(v')$. Ademais note que $f(v)\in L_{g_\mu}$ para todo $v\in V$. Com tudo isso em vista, fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned}T_f:\overline{V}&\longrightarrow L_{g_\mu}\\\overline{v}&\mapsto T_f(\overline{v})=f(v).\end{aligned}$$

Como f é multilinear, temos $T_f\in\mathscr{ML}(\overline{V},L_{g_\mu})$, isto é, T_f é uma transformação multilinear de $\overline{V}$ em L_{g_μ}. Ademais, dados $f,f'\in P_m^\mu$ tais que $f-f'$ seja uma identidade graduada, temos $T_f=T_{f'}$. Portanto fica bem definida a aplicação.

$$\begin{aligned}\Phi:P_m^\mu(L)&\longrightarrow\mathscr{ML}(\overline{V},L_{g_\mu})\\\overline{f}&\mapsto\Phi(\overline{f})=T_f.\end{aligned}$$

É fácil ver que Φ é uma transformação linear. Ademais

$$T_f=0\quad\Longleftrightarrow\quad f\text{ é uma identidade graduada}\quad\Longleftrightarrow\quad\overline{f}=0.$$

Portanto Φ é injetora. Daí

$$dimP_m^\mu(L)\leq dim\mathscr{ML}(\overline{V},L_{g_\mu})=(dim\overline{L}_{g_1})^{n_1}(dim\overline{L}_{g_2})^{n_2}\cdots(dim\overline{L}_{g_l})^{n_l}(dimL_{g_\mu}).$$

■

Para a graduação elementar universal temos $\dim(UJ_n)_0=n$ e $\dim(UJ_n)_l\leq 1$ para qualquer $0\neq l\in\mathbb{Z}^{n-1}$. Como consequência do ***Lema 4.19*** obtemos o seguinte resultado

Lema 4.21 ([23]) *A codimensão $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduada satisfaz*

$$c_m^{\mathbb{Z}^{n-1}}(UJ_n)\leq\sum_{j=0}^{min\{n-1,m\}}\binom{m}{j}n^{m-j}\binom{n}{j+1}j!.$$

Prova. Usando a notação do ***Lema 4.19*** onde $A = UJ_n$ e $G = \mathbb{Z}^{n-1}$, sendo j a quantidade de elementos não triviais em μ, devemos ter $\dim P_m^\mu \leq n^{m-j}$. De fato, note que se $\dim A_s = 0$ para algum $s \in \{g_1, \ldots, g_l, g_\mu\}$ então $\dim P_m^\mu = 0$. Caso contrário, supondo $j < m$, e supondo que $g_1 = 0$, caso $j > 0$, temos $n_2 + n_3 + \cdots + n_l = j$ e portanto $n_1 = m - j$. Note que nesse caso $g_2, \ldots, g_l$ tem suas entradas não nulas iguais a 1 e portanto $g_\mu \neq 0$, donde $\dim A_{g_\mu} = 1$, ademais $\dim A_{g_k} = 1$ para $k = 2, 3, \ldots, l$. Daí segue que

$$dim\ P_m^\mu(UJ_n) \leq n^{n_1} \cdot 1^{n_2} \cdots 1^{n_l} \cdot 1 = n^{n_1} = n^{m-j}.$$

O resto dos fatores são análogos aos que foram computados no caso associativo, veja o ***Lema 4.5***. Ademais $\dim P_m^\mu = 1$ onde $\mu = (0, 0, \ldots, 0)$. ■

Usando argumentos similares obtemos uma cota superior para as graduações do tipo **MT**, no caso de Lie e no caso de Jordan. Primeiro consideremos o caso de Jordan, a álgebra UJ_n.

Definição 4.22 ([23]) *Sejam $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^q$. A M-graduação **MT** universal em UJ_n é definida pelos elementos $(1, 0) \in M$ e pela sequência $(l_1, l_2, \ldots, l_q) \in M^q$. Aqui $l_i = (0, l_i)$ e $\{l_1, l_2, \ldots, l_q\}$ é uma base para o grupo livre abeliano $\mathbb{Z}^q$.*

O lema a seguir mostra a importância da definição acima.

Lema 4.23 *Dado um grupo G abeliano e uma G-graduação do tipo **MT**, (UJ_n, t, η'), existe um homomorfismo de grupos $\psi : M \to G$ tal que a graduação induzida em UJ_n, por ψ e pela M-graduação universal, coincide com a G-graduação (UJ_n, t, η').*

Prova. Sejam $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^q$. Considere

$$\mathscr{G} : UJ_n = A = \bigoplus_{x \in M} A_x$$

a M-graduação **MT** universal em UJ_n, ***Definição 4.22***. Dado $\eta' = (\eta'_1, \ldots, \eta'_q) \in G^q$ e $t \in G$ um elemento de ordem 2, consideremos a G-graduação (UJ_n, t, η') do tipo **MT** definida por η' e t. Sendo $L = \{l_1, \ldots, l_q\}$ a base de $\mathbb{Z}^q$ usada, definamos

$$f : L \longrightarrow G$$
$$l_i \mapsto f(l_i) = \eta'_i.$$

Temos que f pode ser estendida a um homomorfismo de grupos $f : \mathbb{Z}^q \longrightarrow G$. Definamos então

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^q &\longrightarrow G \\ (i, l) &\mapsto \psi(i, l) = t^i f(l). \end{aligned}$$

Como G é abeliano temos que ψ é um homomorfismo de grupos. Consideremos então a G-graduação ${}^{\psi}\mathscr{G}$ em UJ_n. Mostremos que a graduação (UJ_n, t, η') coincide com ${}^{\psi}\mathscr{G}$. Como cada $Y^{\pm}_{i:m}$ é homogêneo em $\mathscr{G}$, também será homogêneo em ${}^{\psi}\mathscr{G}$, e para cada $i = 1, 2, \ldots, q$, os graus de $Y^{+}_{i:1}$ em $\mathscr{G}$ e ${}^{\psi}\mathscr{G}$ são relacionados por

$$G\text{-}deg(Y^{+}_{i:1}) = \psi(M\text{-}deg(Y^{+}_{i:1})) = \psi(0, l_i) = t^0 f(l_i) = \eta'_i.$$

Ademais

$$G\text{-}deg(Y^{-}_{1:0}) = \psi(M\text{-}deg(Y^{+}_{i:1})) = \psi(1, 0) = t^1 f(0) = t \cdot 1 = t$$

portanto usando o ***Teorema 3.35***, ${}^{\psi}\mathscr{G}$ e (UJ_n, t, η') coincidem. ■

Daí, tendo em vista o ***Lema 4.23***, podemos aplicar um resultado análogo ao ***Teorema 4.3***, isto é, a codimensão graduada da graduação **MT** universal dá uma cota superior para as codimensões graduadas de qualquer graduação do tipo **MT**.

Prosseguiremos com uma construção análoga ao caso elementar.

Definição 4.24 *Uma sequência $\mu = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in M^m$ é uma sequência de Jordan MT-boa se existem $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \{Y^{\pm}_{j:l} \mid l > 0\}$ tais que $r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_m \neq 0$ e $deg(r_i) = a_i$.*

Seja $N \subset UJ_n$ a subálgebra das matrizes triangulares estritamente superiores. Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ consideremos $\Lambda^{(m)}_{i,j}$ o conjunto das sequências $a = (a_1, \ldots, a_m) \in M^m$ tais que $i = \sharp\{k \mid a_k \notin \{(0,0),(1,0)\}\}$ e $j = \sharp\{k \mid a_k = (1,0)\}$. A definição desse conjunto é motivada pelo fato de que $deg Y^{\pm}_{j:0} \in \{(0,0),(1,0)\}$, enquanto o grau dos elementos $Y^{\pm}_{j;l}$, onde $l > 0$ estão em $M \setminus \{(0,0),(1,0)\}$. Quando os elementos $Y^{\pm}_{j:l}$, $l > 0$ são substituídos em $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_m$, ficamos com somas de produtos de elementos $e_{j,j+l} \in N$. Da ***Proposição 1.70*** só precisamos considerar $i = 1, 2, \ldots, \min\{n-1, m\}$. Assim

$$c^M_m(UJ_n) = \sum_{a \in M^m} \dim c^a_m((UJ_n)) = \sum_{i=0}^{\min\{n-1,m\}} \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{a \in \Lambda^{(m)}_{i,j}} \dim c^a_m(UJ_n).$$

Fixado $a \in \Lambda_{i,j}^{(m)}$, note que $\dim c_m^a(UJ_n) \leq n^{m-i}$. Estimemos a cardinalidade de $\Lambda_{i,j}^{(m)}$. Inicialmente note que não há mais do que n^2 elementos $Y_{j:t}^{\pm}$, chamemos tal quantidade de $p(n)$, assim $p(n) \leq n^2$. Para construir um elemento $a \in \Lambda_{i,j}^{(m)}$ cuja dimensão $\dim c_m^a(UJ_n)$ possa ser não nula, primeiro devemos escolher i entradas dentre as m, isso nos dá $\binom{m}{i}$ possibilidades. Nessas entradas fixadas, devemos por os graus dos elementos $Y_{j:l}^{\pm}$, que não são mais do que $p(n)$ possibilidades de escolha de graus para cada entrada. Logo não há mais do que $p(n)^i$ possibilidades. Finalmente, para as demais $m-i$ entradas restantes devemos escolher as j posições de $(1,0)$, que nos dá $\binom{m-i}{j}$ possibilidades, adicionando um fator $i!$ para ordenar as i entradas distintas de $(0,0)$ e $(1,0)$ concluímos que a quantidade de a's que buscamos é não superior a

$$i!\binom{m}{i}\binom{m-i}{j}p(n)^i.$$

Note que se $a \in \Lambda_{i,j}^{(m)}$ então $c_m^a(UJ_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^j \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{m-i-j}$, deste modo concluímos que

$$\begin{aligned} c_m^M(UJ_n) = & \sum_{i=0}^{\min\{m,n-1\}} \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{a \in \Lambda_{i,j}^{(m)}} \dim c_m^a(UJ_n) \leq \\ & \sum_{i=0}^{\min\{m,n-1\}} i!\binom{m}{i}p(n)^i \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^j \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{m-i-j} \leq \\ & \sum_{i=0}^{\min\{m,n-1\}} i!\binom{m}{i}n^{2i}n^{m-i} = \sum_{i=0}^{\min\{m,n-1\}} i!\binom{m}{i}n^{m+i}. \end{aligned}$$

Se $m \geq n-1$ então segue das desigualdades acima que

$$c_m^M(UJ_n) \leq n^{m+n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i!\binom{m}{i}\right).$$

Note que o somatório $q(m) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} i!\binom{m}{i}\right)$ é um polinômio em m e portanto $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{q(m)} = 1$, assim temos que

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m^M(UJ_n)} \leq \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{n^{m+n-1}q(m)} = n.$$

Consequentemente $exp^G(UJ_n) \leq n$, quando a G-graduação em UJ_n for do tipo $\mathbf{MT}$. Analogamente para o caso de Lie encontramos $exp^G(UT^{(-)}) \leq (n-1)$.

Em [23] é feita uma outra aproximação, da seguinte forma. Inicialmente vemos que N é uma subálgebra graduada. Consideremos a graduação induzida em N e tome qualquer ordenação total em $H = \text{Supp } N$. Então valem os seguintes resultados:

Lema 4.25 (Lemma 30 de [23]) *Existem no máximo* $2^i\binom{n}{i+1}$ *sequências de Jordan MT-boa ordenadas de* i *elementos de* H.

Lema 4.26 (Lemma 31 de [23]) $c_m^M(UJ_n) \leq \sum_{i=0}^{min\{n-1,m\}} 2^i\binom{n}{i+1}(i!)^2\binom{m}{i}n^{m-i}$.

Em [23] são definidas sequências MT-boas no caso de Lie de forma semelhante à definição dada no caso de Jordan. Ademais é enunciado o seguinte resultado.

Lema 4.27 (Lemma 32 de [23]) *Para toda sequência* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *MT-boa no caso de Lie, existe uma sequência* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *MT-boa no caso de Jordan tal que para todo* $i = 1, 2, \ldots, m$, *temos* $b_i = a_i$ *ou* $b_i = a_i + (1, 0)$.

Consequentemente é deduzido que:

Lema 4.28 (Lemma 33 de [23]) *As codimensões graduadas no caso de Lie para a MT-graduação universal em* $UT^{(-)}$ *satisfazem*

$$c_m^M(UT_n^{(-)}) \leq \sum_{i=0}^{min\{n-1,m\}} 2^{2i}\binom{n}{i+1}(i!)^2(n-1)^{m-i}.$$

Adaptando o **Teorema 4.3**, nós obtemos que o expoente graduado de qualquer MT-graduação em $UT_n^{(-)}$ coincide com o caso ordinário e com cada uma das graduações elementares.

Teorema 4.29 (Theorem 34 de [23]) *Supondo* $chaK = 0$, *dado* G *um grupo abeliano qualquer, e considerando qualquer* G*-graduação do tipo* $\boldsymbol{MT}$ *em* $UT_n^{(-)}$. *Então* $exp^G(UT_n^{(-)}) = n - 1$.

Voltando para nossas estimativas a respeito do caso de Jordan, encontramos $exp^G(UJ_n) \leq n$. Para achar um limitante inferior, podemos estimar $c_m(UJ_n)$ e assim teremos $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m(UJ_n)} \leq exp^G(UJ_n) \leq n$.

4.5 Cota inferior para o caso de Jordan, codimensão ordinária

Como observado no final da seção anterior, procuraremos uma aproximação de $c_m(UJ_n)$, que nos proporcionará uma cota inferior para $exp^G(UJ_n)$. Aqui aplicaremos técnicas baseadas em matrizes genéricas. As identidades ordinárias para essa álgebra de

Jordan não são conhecidas, a não ser dos casos particulares $n = 1$ e 2. Não precisamos de uma cota inferior tão precisa pois estamos interessados em seu comportamento assintótico.

Suponha $m > n$ e considere o conjunto formado pelos monômios

$$x_{\sigma(1)} \circ x_{\sigma(2)} \circ \cdots \circ x_{\sigma(m)} \tag{4.2}$$

tais que $1 = \sigma^{-1}(n) < \sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(2) < \cdots < \sigma^{-1}(n-1)$ e com a condição que as variáveis que precedem x_1 estão ordenadas; as varáveis entre x_i e x_{i+1}, para $i = 1, 2, \ldots, n-2$, estão ordenadas; as variáveis que sucedem x_{n-1} também estão ordenadas. Fixemos a seguinte notação:

Definição 4.30 *Sejam $k, k_1, \ldots, k_c \geq 0$ inteiros, definimos*

$$\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_c} := \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_c!}.$$

Com essa notação, podemos estabelecer o seguinte resultado:

Lema 4.31 *Existem*

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=m-n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n \geq 0}} \binom{m-n}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$$

monômios em (4.2).

Prova. Para a construção de um monômio como em (4.2), denotemos por k_1 a quantidade de variáveis que aparecem entre x_n e x_1, k_2 a quantidade de variáveis que aparecem entre x_1 e x_2, e assim por diante, isto é k_i é a quantidade de variáveis que aparecem entre x_{i-1} e x_i para $i = 2, \ldots, n-1$, e k_n a quantidade de variáveis que aparecem depois de x_{n-1}. Temos $k_1, \ldots, k_n \geq 0$ e $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m - n$. Temos $\binom{m-n}{k_1}$ possibilidades para escolher quais variáveis serão ordenadas entre x_n e x_1. Após essa escolha teremos $\binom{m-n-k_1}{k_2}$ possibilidade para escolher quais variáveis serão ordenadas entre x_1 e x_2, e assim por diante, teremos $\binom{m-n-k_1-\cdots-k_{i-1}}{k_i}$ possibilidades para escolher quais variáveis estarão ordenadas entre x_{i-1} e x_i, e $\binom{m-n-k_1-\cdots-k_{n-1}}{k_n}$ possibilidades para as variáveis que serão ordenadas após x_{n-1}. Assim há um total de

$$\frac{(m-n)!}{k_1!(m-n-k_1)!} \cdot \frac{(m-n-k_1)!}{k_2!(m-n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(m-n-k_1-k_2)!}{k_3!(m-n-k_1-k_2-k_3)!} \cdots$$

monômios nessas condições, que resulta em

$$\frac{(m-n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} = \binom{m-n}{k_1, k_2, \ldots, k_n}.$$

Portanto para cada escolha de inteiros $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0$ onde $k_1+k_2+\cdots+k_n = m-n$ temos $\binom{m-n}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ monômios como em (4.2), onde k_i representa a quantidade de variáveis entre x_{i-1} e x_i para $i = 2, 3, \ldots, n-1$ e k_1 representa a quantidade de variáveis entre x_n e x_1, e k_n representa a quantidade de variáveis depois de x_{n-1}. Concluímos que o total de monômios é

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=m-n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n\geq 0}} \binom{m-n}{k_1, k_2, \ldots, k_n}.$$

■

Agora que sabemos quantos são esses monômios, mostremos que eles são L.I. módulo $T(UJ_n)$.

Lema 4.32 *Os monômios definidos acima são L.I. módulo $T(UJ_n)$.*

Prova. Considere variáveis comutativas $\{\xi_j^{(i)} \mid i \in \mathbb{N} \text{ e } j = 1, 2, \ldots, n\}$, faremos a seguinte avaliação por matrizes genéricas:

$$x_1 = e_{12}, x_2 = e_{23}, \ldots, x_{n-1} = e_{n-1,n},$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(i)} e_{jj}, \quad i = n, n+1, \ldots, m.$$

Daí agiremos de forma semelhante ao ***Corolário 4.15***. ■

Finalmente temos uma cota inferior para $c_m(UJ_n)$:

Lema 4.33 *As codimensões ordinárias da álgebra de Jordan UJ_n satisfazem, para $m > n$,*

$$c_m(UJ_n) \geq \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=m-n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n\geq 0}} \binom{m-n}{k_1, k_2, \ldots, k_n}.$$

Prova. Como os monômios em (4.2) são L.I. módulo $T(UJ_n)$, e o lado direito da inequação acima conta quantos monômios são da forma dada em (4.2), segue o resultado.

■

O somatório que surgiu acima tem uma aparência conhecida, que é a seguinte:

Lema 4.34 *Para $s \in \mathbb{N}^*$, tem-se*

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=s \\ k_1,k_2,\ldots,k_n\geq 0}} \binom{s}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = n^s.$$

Prova. Note que $n^s = (1+1+\cdots+1)^s$ e o lado esquerdo é a expansão de $(1+1+\cdots+1)^s$. Portanto segue o resultado. ■

Assim, para $s = m - n$ no lema anterior conseguimos a seguinte cota inferior, $c_m(UJ_n) \geq n^{m-n}$. Como $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m(UJ_n)} \geq n$ segue que $exp^G(UJ_n) = n$ para qualquer G-graduação do tipo **MT** em UJ_n para G abeliano e $n \geq 4$.

Usando a cota superior mais precisa vista anteriormente, a classificação de graduações em UJ_n e um análogo ao **Teorema 4.3**, finalmente obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.35 (Adaptação de Theorem 36 de [23]) *Sejam G um grupo abeliano, e $n \geq 4$ um inteiro, considerando a álgebra de Jordan UJ_n munida com uma G-graduação elementar ou do tipo **MT** (Mirror pattern Type). O expoente graduado satisfaz*

$$exp^G(UJ_n) = n.$$

O teorema acima também pode ser obtido de forma direta. De acordo com [16], $\exp(UJ_n) = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m(UJ_n)} = n$. Então obtemos lim inf $\sqrt[m]{c_m^G(UJ_n)} \geq n$ para qualquer G-graduação em UJ_n, e o teorema acima segue.

Bibliografia

[1] N. Anisimov, *$\mathbb{Z}_p$-codimensions of $\mathbb{Z}_p$-identities of Grassmann algebra*, Comm. Algebra **29** (2001), 4211-4230.

[2] N. Anisimov, *Codimensions of identities of the Grassmann algebra involution*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **3** (2001), 25-29.

[3] Yu. Bahturin, A. Giambruni and D. M. Riley, *Group-gradedd algebras with polynomial identity*, Israel J. Math. **104** (1998), 145-155.

[4] Yu. A. Bahturin, S. K. Seghgal and M. V. Zaicev, *Group Gradings on Associative Algebras*, J. Algebra **241** (2001), 677-698

[5] Yu. A. Bahturin, I. Shestakov and M. V. Zaicev, *Gradings of Simple Jordan Algebras and Lie Algebras*, J. Algebra **283** (2005), 849-868

[6] A. Berele, *Magnum P.I.*, Israel J. Math. **104** (1998), 145-155

[7] J. Bergen and M. Cohen. *Actions of commutative Hopf algebras*, Bull. London Math. Soc. **18**(2) (1986), 159-164

[8] M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra*, Springer International Publishing Switzerland, 2014

[9] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme*, Math. Ann. **85** (1922), 184-194

[10] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov and A. Valenti, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*, J. Algebra **275** (2004), 550-566.

[11] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras,* Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000

[12] V. Drensky and E. Formanek, *Polynomial Identitiy Rings*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[13] A. Elduque and M. Kochetov, *Gradings on simple Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol 189, American Mathematical Society, Providence, RI; Atlantic Association for Research in the Mathematical Sciences (AARMS), Halifax, NS, 2013.

[14] J. B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1967.

[15] A. Giambruno and M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Mathematical Surveys and Monographs 122, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[16] A. Giambruno and M. Zaicev, *Lie, Jordan and proper codimensions of associative algebras*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **57** (2008), 161-171

[17] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall Mathematics Series Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1961.

[18] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1968.

[19] N. Jacobson, *PI Algebras. An introduction,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **441**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975

[20] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity,* Bull. Amer. Math. Soc **54** (1948), 575-580

[21] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations of Mathematics Monographs, Vol 87, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1991

[22] P. Koshlukov and A. Valenti, *Graded identities for the algebra $n \times n$ upper triangular matrices over an infinite field*, Internat. J. Algebra Comput. **13** (2003), 517-526.

[23] P. Koshlukov and F. Yasumura, *Asymptotics of graded codimension of upper triangular matrices,* Israel J. of Math. **223** (2018), 423-439

[24] P. Koshlukov and F. Yasumura, *Group gradings on the Lie algebra of upper triangular matrices*, J. Algebra **477** (2017), 294-311

[25] P. Koshlukov and F. Yasumura, *Group gradings on the Jordan algebra of upper triangular matrices*, Linear Algebra and its Applications **543** (2007), 1-12

[26] P. Koshlukov and F. Yasumura, *Elementary gradings on the Lie algebra* $UT^{(-)}$, J. Algebra **473** (2007), 66-79

[27] A. Regev, *Existence of identities in* $A \otimes B$, Israel J. Math **11** (1972), 131-152.

[28] A. Valenti, M. V. Zaicev, *Group gradins on upper triangular matrices*, Arch. Math. (Basel) 89 (2007), 33-40.

[29] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme*, Alemanha, Math. Ann **113**, 528-567 (1936)

[30] F. Yasumura and E. A. Hitomi, *On the combinatorics of commutators of Lie algebras*, Journal of Algebra and its Applications **10** (2020), 2015119, 14 pp.