

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Graduações na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores e suas Identidades Graduadas

por

Iranilda Tenório de Almeida e Silva[†]

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Julho - 2022

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESQ

Graduações na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores e suas Identidades Graduadas

por

Iranilda Tenório de Almeida e Silva

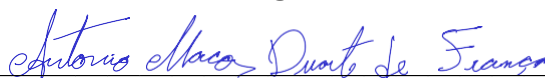
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

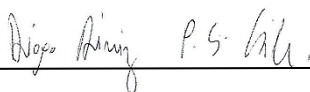
Aprovada por:



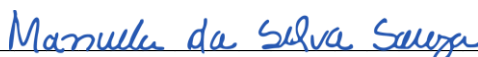
Prof. Dr. Alex Ramos Borges
UPE



Prof. Dr. Antônio Marcos Duarte de França
UnB



Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva
UFCG
Orientador



Profa. Dra. Manuela da Silva Souza
UFBA

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho - 2022

S586g Silva, Iranilda Tenório de Almeida e.
Graduações na álgebra das matrizes triangulares superiores e suas identidades graduadas / Iranilda Tenório de Almeida e Silva. – Campina Grande, 2022.
98 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.
"Orientação: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva".
Referências.

1. Álgebras Graduadas. 2. Identidades Graduadas. 3. Graduações Elementares. I. Silva, Diogo Diniz Pereira da Silva e. II. Título.

CDU 512(043)

Dedicatória

Maria Oliveira, in memoriam. Eu
não vou desistir de nós mesmo
que os céus fiquem furiosos
(Jason Mraz).

Agradecimentos

Agradecer é reconhecer que não percorremos o caminho sozinhos, que esse caminho se inicia desde cedo, poderíamos dizer que se inicia com a nossa vida. Eis aí o motivo para agradecermos inicialmente a Deus. Ele é a razão, a força, e matematicamente falando, é a base única do meu espaço, no tempo, chamado vida.

Agradeço as minhas duas famílias. Deus em sua bondade deu a Jesus como ser uma família adotiva, então eu aprendi com isso, que ser adotada na verdade é um dom que Deus dá. Assim, eu agradeço a minha família que me acolheu, em especial a Maria Oliveira (in memoriam) e Paulo Militão por terem me dado os ensinamentos primordiais da vida, por terem renunciado nosso lar no sítio e ter vindo morar na cidade, me proporcionando conforto e possibilidade para estudar em um curso de graduação. Agradeço a Antônio pela vida e por todos os livros de matemática que tenho, principalmente pelo livro de Análise Real do Elon Lages Lima, e por sempre dizer que eu estudasse. Agradeço a Cicera Tenório pela vida, e por eu ter herdado a sua bondade e sua calma. Agradeço as minhas duas famílias por tanto e por tudo, em especial, por terem me dado os melhores sobrinhos desse mundo. Nas minhas crises da Matemática e da vida, apesar de todo estresse eles sempre me enchiam de amor, cuidados e alegria, com um pouco de sapequices também, claro.

Manuel Vinícius, obrigada por me mostrar que é possível aprender Análise, que é possível passar em uma seleção de mestrado em Matemática Pura mesmo sendo da Licenciatura em Matemática, que é possível e que sobrevivemos mesmo deixando nossas famílias longe e morando com pessoas que nunca nem tínhamos visto antes, e que também é possível o amor, posso dizer que "tenho um coração geométrico porque me apaixonei por um geômetra".

Agora, quando se fala especificamente de agradecimentos em relação a nossa vida acadêmica, não posso deixar de lado nenhum dos meus professores, porque cada um deles é um motivo para que eu esteja aqui.

Agradeço a todos os meus professores da Educação Básica, em especial, a professora Célia e todos da disciplina de Matemática, excepcionalmente a José Ivan, que através dos seus ensinamentos me fez gostar da Matemática desde o Ensino Fundamental, e que ali mesmo já estava, quase que completamente decidida a "fazer faculdade em Matemática".

Agradeço a todos os meus professores do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE - Campus Juazeiro do Norte, em especial, todos aqueles que me fizeram avançar nos mistérios da Análise Real para que eu pudesse dar ingresso a um mestrado acadêmico em Matemática Pura. Mário, Leandro e Hildênio, vocês foram os meus pilares, obrigada por tudo. Leandro você ensina Análise maravilhosamente, Hildênio você foi e sempre será a minha inspiração para saberes matematicos e profissionais, me sinto honrada por cursar

o mestrado na mesma instituição que você, apesar de não ser na sua área, de Análise, sempre serei uma algebrista fascinada por essa parte da Matemática.

Agradeço ao nosso coordenador Jefferson Abrantes e a todos os meus professores do mestrado, professor Júlio Sobreira, você é luz em Análise no $\mathbb{R}^n$. Agora, em especial meu orientador Diogo Diniz. Eu sei que você sabe disso mas vou dizer: sem você nada aqui "andaria". Você é mais que fundamental nesta dissertação, que bom que existem orientadores, que bom que existe você. Obrigada por toda compreensão. Nos momentos mais difíceis você nunca me pediu para abandonar o barco, e como uma âncora você nunca me deixou a margem das minhas dificuldades e sempre me colocou para trabalhar-las, gratidão. Desejo que continue desenvolvendo a álgebra, que tanto aprecio. Admiração.

Coorientador Alex Borges, obrigada por todas as contribuições e por nos ajudar a lapidar melhor esta dissertação. Foi uma honra conhecer o autor da primeira dissertação que imprimi, que tenho guardada e que mais risquei, depois da minha, claro (risos).

Agradeço a banca avaliadora, por ter dedicado o seu tempo para leituras e correções desta dissertação, fazendo contribuições significativas neste trabalho, obrigada. Manuela Souza, é uma honra para mim ter uma mulher nessa banca, que representa a álgebra e a nossa luta feminina no mundo acadêmico, admiração. Antônio Marcos, é um contentamento ter você na banca, uma pessoa da nossa casa (UFCG), nos mostrando as possibilidades que temos com nossa formação acadêmica.

Para finalizar os agradecimentos, não posso deixar de lado, aqueles que sem eles a sala de aula, os corredores das instituições e as fofquinhas não teriam sentido.

Agradeço a todos os meus amigos, os da graduação, em especial Andreza Oliveira por ter me ajudado nos momentos mais difíceis, tanto na Matemática como também no âmbito pessoal, gratidão amiga. Agradeço a todos os meus amigos do mestrado, por poder compartilhar um com o outro momentos de aflições matemáticas, mesmo que de modo remoto (risos). Adriana, Edcarlos, Eduardo, Ismael sempre lembrarei de vocês e serei grata por todo apoio quando precisei. Também não posso esquecer do pessoal da sala da pós-graduação, muito obrigada pelo acolhimento.

Meninas da República, As "Arrupiadadas" e "Gasguitas". Obrigada por sempre ter com quem dividia as contas, as louças sujas, as limpezas de casa e o mini varal, e mais que isso, essa aventura de morar longe de casa. Grata pelas boas conversas, risadas e loucuras. Tenho certeza que logo, logo, o mundo acadêmico terá mais uma ótima mestre em Educação Matemática e uma doutora em Engenharia Elétrica.

E, por último, mas não menos importante, tenho um agradecimento especial para a FAPESQ e ao projeto "Álgebras com Estrutura Suplementar e suas Identidades Polinômiais", ao Estado da Paraíba e a UFCG, pelo acolhimento e principalmente por desenvolverem projetos com apoio financeiro, a nós estudantes. Espero que os Estados e o Governo Federal continuem investindo em projetos com apoio financeiro, pois além de está contribuindo para a educação do país, muitos de nós do mestrado, ou do doutorado, estão aqui graças as bolsas que são distribuídas, de forma justa aos nossos esforços e dedicações, que sempre buscamos o conhecimento como forma de crescimento.

Tudo bem ficar perdido às vezes.
(Nightbirde)

Resumo

Neste trabalho, apresentamos as identidades G -graduadas para a álgebra $U_n(K)$, e descrevemos algumas propriedades das suas G -gradações elementares. Descrevemos uma base das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$ -graduadas para $U_n(K)$ sobre um corpo K infinito, e como uma aplicação determinamos o crescimento assintótico da sequência de codimensões graduadas. Seja G um grupo finito, mostramos que há $|G|^{n-1}$ G -gradações elementares diferentes na álgebra $U_n(K)$, além disso, mostramos que o ideal das identidades polinomiais G -graduadas de $U_n(K)$ é gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$ onde $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ pertence ao conjunto de todas as sequências ϵ -ruins com $m \leq n$. Como consequência desse resultado obtemos que o T -ideal de $U_n(K)$ é gerado pela identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$, onde $[a, b] = ab - ba$ é o comutador usual.

Palavras chaves: Álgebras graduadas, identidades graduadas, gradações elementares.

Abstract

In this work we present the G -graded identities for the algebra $U_n(K)$, and we describe some properties of their elementary G -gradations. We describe a basis of $\mathbb{Z}_n$ -graded polynomial identities for $U_n(K)$ over an infinite field K , and as a map we determine the asymptotic growth of the sequence of graduated codimensions. Let G be a finite group, we show that there is $|G|^{n-1}$ G -gradations different elementary in the algebra $U_n(K)$, furthermore, we show that the ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ of polynomial identities G -graduated from $U_n(K)$ is generated by the multilinear polynomials $f_{\tilde{\eta}}$ where $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ belongs to the set of all ϵ -bad sequences with $m \leq n$. As a consequence of this result, we obtain that the T -ideal of $U_n(K)$ is generated by the identity $[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$, where $[a, b] = ab - ba$ is the usual switch.

Keywords: Graded algebras, graded identities, elementary grades.

Conteúdo

Introdução	11
1 Álgebras Graduadas e suas Identidades Polinomiais	14
1.1 Álgebras	14
1.1.1 Definições Iniciais	14
1.1.2 Homomorfismos de Álgebras	22
1.1.3 Álgebras Livres	24
1.1.4 Identidades Polinomiais	27
1.1.5 T -ideais e Álgebras Relativamente Livres	32
1.1.6 Radical de Jacobson	36
1.2 Álgebras Graduadas por um Grupo	40
1.2.1 Definições Iniciais	40
1.2.2 Identidades Polinomiais Graduadas	46
1.2.3 Homomorfismos de Álgebras Graduadas	50
1.2.4 Polinômios Multihomogêneos e Multilineares	54
1.2.5 Produto Tensorial	57
1.2.6 Identidades Polinomiais Y -próprias	59
2 Identidades Graduadas na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores	64
2.1 Identidades Graduadas de $U_n(K)$	64
2.2 Matrizes Genéricas e Identidades Graduadas	68
2.3 Aplicações	77
3 Graduações Elementares e Identidades Polinomiais na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores	82
3.1 Graduações Elementares para a Álgebra $U_n(K)$	82
3.2 Identidades G -graduadas para $U_n(K)$	84
3.3 Bases Explícitas de Identidades Polinomiais Graduadas de $U_n(K)$	92
Bibliografia	98

Introdução

Seja A um espaço vetorial sobre um corpo K . Ele é chamado de álgebra associativa quando é munido de uma multiplicação bilinear associativa. Se considerarmos $K\langle X \rangle$ como sendo a álgebra dos polinômios em variáveis não comutativas, em um conjunto X infinito e enumerável, podemos considerar $f \in K\langle X \rangle$ e naturalmente substituir as variáveis em f por elementos de uma álgebra A . Quando fizermos isso para quaisquer elementos de uma álgebra A se obtermos sempre zero como resultado, então dizemos que f é uma identidade polinomial para A .

A partir dessa definição vem sendo feito um movimento entre muitos algebristas importantes, que desenvolveram e desenvolvem uma teoria para descrever essas identidades polinomiais de um álgebra, a PI-teoria. As álgebras que são estudadas nessa teoria são as PI-álgebras, nome devido ao fato de terem uma identidade polinomial diferente da nula.

Historicamente se pode dizer que o interesse por identidades polinomiais começou após a publicação de um artigo de Kaplansky em 1948, onde ele sugere que satisfazer uma identidade polinomial é uma condição suficiente para concluir que um anel de divisão é de dimensão finita sobre o corpo base, veja [20].

Para o estudo dessas identidades, precisamos considerar o conjunto $Id(A)$ que é formado por todas as identidades satisfeitas por uma álgebra A . O conjunto $Id(A)$ é um T -ideal de $K\langle X \rangle$, ou seja, ele é invariante sobre todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$. Portanto, descrever as identidades de uma álgebra significa descrever seu T -ideal.

No entanto, a descrição de um T -ideal é, em geral, um problema difícil, por exemplo, podemos citar o caso do algebrista Specht, que em 1950 conjecturou que sobre um corpo de característica zero todo T -ideal de $K\langle X \rangle$ é finitamente gerado como um T -ideal, veja [31]. Mas, apenas em 1987, Kemer conseguiu a demonstração desse fato, trazendo resultados e ferramentas importantes para o estudo das identidades de uma dada álgebra, veja [21].

Mas, os desafios em relação à busca de informações sobre um T -ideal ainda existem. As identidades polinomiais de uma dada álgebra, como a álgebra das matrizes $n \times n$, para $n \geq 3$, estão longe de serem compreendidas. É bem conhecido que as identidades das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ sobre K , $U_n(K)$, estão intimamente relacionadas com o problema da descrição das subvariedades da variedade de álgebras associativas geradas por $M_2(K)$. Como este último ainda está aberto quando $char K \neq 0$, é importante obter mais informações sobre as identidades em $U_n(K)$.

Também, é verdade que, as identidades graduadas ajudam no estudo das identidades de uma álgebra, como Kemer trabalhou para resolver o problema de Specht. Para termos

uma identidade graduada, precisamos primeiro de uma álgebra graduada, então seja A uma álgebra, ela é dita G -graduada se ela pode ser obtida através de uma decomposição,

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

ou seja, como soma direta dos subespaços vetoriais A_g , tais que, para todos $g, h \in G$, $A_g A_h \subset A_{gh}$. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial G -graduada para A se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{deg(x_i)}$, onde $deg(x_i)$ denota o grau de x_i na G -gradação de $K\langle X \rangle$, com $i = 1, \dots, n$.

Assim, diante da importância da álgebra $U_n(K)$ e do estudo das identidades graduadas, fazemos um estudo sobre as identidades polinomiais graduadas de $U_n(K)$. Além disso, também faremos um estudo sobre um caso especial de graduações, as graduações elementares.

Uma graduação $M_n(K) = \bigoplus_{g \in G} A_g$ na álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K é dita elementar se existe uma n -upla $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ tal que $e_{ij} \in A_{g_i^{-1}g_j}$ para quaisquer índices $1 \leq i, j \leq n$. De modo análogo, definimos graduações elementares para a álgebra das matrizes triangulares superiores.

Temos que, se G é um grupo abeliano então, para a álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$, existem duas classes importantes de G -graduações: as graduações elementares e as graduações finas. No artigo [3], foi provado que se K é um corpo algebricamente fechado, cada G -graduação em $M_n(K)$ é um produto tensorial de uma graduação elementar por uma fina. Para a álgebra $U_n(K)$ de matrizes triangulares superiores $n \times n$, foi provado em [32] que se assumirmos ainda que $char K = 0$ então toda G -graduação finita é isomorfa a elementar.

Motivados por esses resultados, também fazemos o estudo, nesta dissertação, das graduações elementares na álgebra $U_n(K)$ de matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$.

Para o estudo das identidades de $U_n(K)$ e suas G -graduações elementares, dividimos esta dissertação em 3 capítulos, que estão detalhados nos próximos parágrafos.

No Capítulo 1 citamos os principais conceitos de álgebra, como identidades polinomiais, multilineares e próprias, homomorfismo de álgebras, álgebras relativamente livres, radical de Jacobson, tanto no caso ordinário como no graduado, sempre os enfatizando para a álgebra $U_n(K)$, mostrando que quando o corpo K é infinito, o T -ideal de $U_n(K)$ é gerado pela identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$, onde $[a, b] = ab - ba$ é o comutador usual.

No Capítulo 2, descrevemos uma base das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$ -graduadas para $U_n(K)$ sobre um corpo K infinito, e como uma aplicação determinamos o crescimento assintótico da sequência de codimensões graduadas. Para isso, iremos considerar o conjunto dos monômios de $K\langle X \rangle$ do tipo,

$$u = w_0 x_{k_1 i_1} w_1 \dots w_{t-1} x_{k_t i_t} w_t \quad (3)$$

onde $k_1 + k_2 + \dots + k_t < n$ e $w_0, \dots, w_t$ são monômios (possivelmente vazios) nas variáveis x_{0i} de grau homogêneo 0 e em cada w_i essas variáveis são escritas em ordem crescente da esquerda para a direita. Através desses monômios, obtém-se o seguinte resultado: seja K

um corpo com característica zero, então os monômios (3) multilineares de grau m são uma base do subespaço de $K\langle X \rangle$ dos polinômios multilineares de grau m módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Além disso, $Id^{gr}(U_n(K)) = \langle [x_{01}, x_{02}], x_{i1}x_{j2} | i + j \geq n \rangle_{T_n}$. Com a utilização da teoria de matrizes genéricas é possível generalizar esse resultado de forma que os monômios multilineares do tipo (3) são uma base dos polinômios de grau m módulo $Id^{gr}(U_n(K))$.

Já no Capítulo 3, similar aos monômios do tipo (3), trabalhamos com a seguinte definição: para qualquer sequência $\tilde{n} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ em G^m consideramos o polinômio

$$f_{\tilde{n}} = f_{\tilde{n},1} f_{\tilde{n},2} \dots f_{\tilde{n},m}$$

onde $f_{\tilde{n},i} = [y_{2i-1}, y_{2i}]$ se $n_i = 1$ e $f_{\tilde{n},i} = x_{n_i i}$ se $n_i \neq 1$. E obtemos o seguinte resultado: seja G um grupo e seja $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ uma G -gradação elementar na álgebra $U_n(K)$ de matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre um corpo K infinito. Então o ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ de identidades polinomiais G -graduadas de $U_n(K)$ é gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$, onde $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ pertence ao conjunto de todas as sequências ϵ -ruins com $m \leq n$, e uma base linear para os polinômios Y -próprios na álgebra graduada relativamente livre $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ consiste em 1 e dos polinômios $c_1 \dots c_m$, onde cada polinômio c_i é um comutador semistandard e a sequência $\tilde{\eta}_c = (deg_{Gc_1}, \dots, deg_{Gc_m})$ é ϵ -boa. Além disso, provamos que existem $|G|^{n-1}$ graduações elementares não isomorfas em $U_n(K)$ pelo grupo finito G , e que graduações não isomorfas produzem identidades graduadas diferentes.

Para uma boa leitura desta dissertação é necessário que o leitor tenha conhecimentos básicos de Álgebra Linear e Estruturas Algébricas, veja os livros [10], [18].

Capítulo 1

Álgebras Graduadas e suas Identidades Polinomiais

Neste capítulo, primeiramente estudamos o que é uma álgebra, aqui considerada para que possamos, adiante, apresentar os principais conceitos de álgebras graduadas. Essa teoria é necessária para o entendimento dos principais resultados desta dissertação. Para uma boa leitura, são apresentados exemplos que possam direcionar melhor o entendimento de cada conceito matemático aqui presente. Também são apresentados alguns resultados de grande importância para dar suporte a argumentos utilizados em lemas, proposições e teoremas que estão dispostos nos capítulos posteriores.

Ao longo do texto, o símbolo K será utilizado sempre para representar um corpo qualquer, a menos que haja menção ao contrário, todos os espaços vetoriais e álgebras serão considerados sobre K . Ainda destacamos que boa parte da teoria aqui desenvolvida é com base nos livros "Free Algebra and PI-Algebras" e "Polynomial Identities and Asymptotic Methods", e que a definição de álgebra aqui considerada é a mesma do livro "Introduction to Representation Theory", citados em nossa Bibliografia como [12], [16], [13], respectivamente.

1.1 Álgebras

1.1.1 Definições Iniciais

Definição 1.1.1 *Um espaço vetorial A é chamado de álgebra associativa, sobre K , se é dotado de uma operação $*$ bilinear associativa, chamada multiplicação. Além disso, dizemos que A é uma álgebra associativa com unidade se existe $1_A \in A$ tal que:*

$$a * 1_A = 1_A * a = a, \forall a \in A.$$

Alguns conceitos aqui destacados também são válidos para outros tipos de álgebras, mas nesta dissertação trabalharemos apenas com álgebras associativas com unidade (diferente do elemento nulo da álgebra, e portanto, teremos sempre que $A \neq \{0_A\}$), que denotaremos por A , e por simplicidade chamaremos apenas de álgebra.

Também podemos definir uma álgebra comutativa, como veremos a seguir, e desde já, acrescentamos que usualmente, denotamos o produto $a * b$ em A por simplesmente ab .

Definição 1.1.2 *Seja A uma álgebra, ela será comutativa se dados quaisquer elementos $a, b \in A$ obtemos que*

$$ab = ba.$$

É importante deixar claro que, apesar de estarmos considerando sempre álgebras que tem a propriedade de associatividade, existem outros tipos de álgebras que não gozam dessa propriedade, inclusive têm aquelas que são comutativas mas não são associativas. Agora, veremos alguns exemplos sobre as primeiras definições.

Exemplo 1.1.3 *O espaço vetorial dos números complexos $\mathbb{C}$, munido da multiplicação usual é uma álgebra comutativa sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$, tendo o 1 como unidade.*

De forma mais geral, temos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.4 *Seja L uma extensão do corpo K . Temos que L é uma álgebra sobre K , na qual a multiplicação bilinear associativa aqui considerada será a mesma de L , o que a torna uma álgebra comutativa sobre K , e com unidade 1_L .*

Exemplo 1.1.5 *O espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K é uma álgebra se considerarmos a multiplicação usual de matrizes. A matriz diagonal $n \times n$ tal que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1_K será a unidade da álgebra $M_n(K)$. Claramente, aqui temos um exemplo de álgebra que não é comutativa, para $n > 1$.*

Exemplo 1.1.6 *O subespaço vetorial $U_n(K)$ de $M_n(K)$, formado pelas matrizes $n \times n$ triangulares superiores, também é uma álgebra, considerando a multiplicação usual das matrizes, além disso, tem a mesma unidade de $M_n(K)$. Também é uma álgebra não comutativa para $n > 1$.*

A álgebra $U_n(K)$, vista nesse exemplo anterior, é de grande importância para esta dissertação, pois os estudos feitos nos Capítulos 2 e 3 são dedicados a ela.

Exemplo 1.1.7 *O espaço vetorial $K[x]$ dos polinômios com uma indeterminada e com coeficientes em K , utilizando a multiplicação usual de polinômios, é uma álgebra comutativa, tendo como unidade o polinômio constante 1_K .*

Exemplo 1.1.8 *O espaço vetorial $\text{End}_K(V)$ dos operadores lineares de um espaço vetorial V , considerando a multiplicação como sendo a composição dos operadores, é uma álgebra sobre K , na qual a unidade é o operador identidade de V . Observe que se $\dim V > 1$, então $\text{End}_K(V)$ não será uma álgebra comutativa.*

Vejam agora uma construção interessante de álgebra, conhecida como Álgebra de Grupo, por ser construída a partir de um grupo multiplicativo G , tendo como base, como espaço vetorial, os elementos desse grupo, considerando a multiplicação, como álgebra, a induzida pela multiplicação do grupo G .

Exemplo 1.1.9 *Sejam G um grupo multiplicativo e seu elemento neutro e , consideremos as seguintes somas formais*

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g, \quad \alpha_g \in K,$$

com $\{g \in G; \alpha_g \neq 0\}$ sendo um conjunto finito e $\sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} \beta_g g$ se, e somente se, $\alpha_g = \beta_g$ para todo $g \in G$. Denotaremos por KG o conjunto de todas as somas definidas acima e construiremos as seguintes operações:

(i) soma

$$\sum \alpha_g g + \sum \beta_g g = \sum (\alpha_g + \beta_g) g;$$

(ii) produto por escalar

$$\lambda \sum \alpha_g g = \sum (\lambda \alpha_g) g, \quad \text{com } \lambda \in K;$$

(iii) multiplicação

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) = \sum_{g, h \in G} (\alpha_g \beta_h) gh$$

com $g, h \in G$ e o produto gh o mesmo de G .

Com essas operações podemos mostrar que KG é uma álgebra, na qual a sua unidade será dada pelo elemento $1_K e$. Além disso, observe que, como a multiplicação de KG depende da multiplicação de G e pela maneira que é definida, teremos que KG é comutativa se, e somente se, G for um grupo abeliano.

Agora, prosseguimos com a definição de subálgebra e de ideal, que iremos considerar neste texto.

Definição 1.1.10 *Um subespaço S de uma álgebra A é chamado de subálgebra se é fechado para a multiplicação de A , e se contém a unidade de A .*

Exemplo 1.1.11 *A álgebra $U_n(K)$ é uma subálgebra de $M_n(K)$, pois, ao defini-la no Exemplo 1.1.6, utilizamos a multiplicação usual de matrizes, que é a mesma da álgebra $M_n(K)$, e além disso, contém a unidade de $M_n(K)$.*

Exemplo 1.1.12 *Seja A uma álgebra, definimos o seu centro como sendo $Z(A)$, da seguinte forma:*

$$Z(A) = \{x \in A; xa = ax, \forall a \in A\},$$

ou seja, um elemento pertencerá ao centro de uma álgebra se ele comuta com todos os elementos dessa álgebra. Note que podemos verificar facilmente que esse conjunto além de ser um subespaço de A é uma subálgebra.

Exemplo 1.1.13 *Seja $M_2(\mathbb{R})$ a álgebra das matrizes $n \times n$, e C um conjunto de matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ definido da seguinte forma*

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Então C é uma subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$.

É possível verificar facilmente que esse conjunto é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$, e que dadas duas matrizes em C , digamos

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix},$$

teremos que

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}.$$

Portanto, C é fechado para o produto de $M_2(\mathbb{R})$. Também pode-se verificar que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a unidade do conjunto C . Logo, acabamos de mostrar que o conjunto das matrizes C é uma subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$. Além disso, é um fato conhecido que essa subálgebra corresponde à uma representação dos números complexos como matrizes de $M_2(\mathbb{R})$, onde $a + bi$ é representado pela matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Definição 1.1.14 Um subespaço I de A é chamado de ideal à esquerda de A se $AI \subseteq I$ e será dito ideal à direita de A se $IA \subseteq I$. Quando ocorrerem essas duas inclusões simultaneamente diremos que I é um ideal bilateral de A .

Por simplicidade, sempre que nos referirmos a um ideal bilateral de uma álgebra A , mencionaremos apenas a palavra ideal, assim diremos que I é um ideal de A em vez de dizer que I é um ideal bilateral de A . Agora, veja o próximo exemplo, nele veremos um ideal à esquerda de $M_n(K)$.

Exemplo 1.1.15 O conjunto $I = \{a \in M_n(K); a_{ij} = 0 \text{ se } j > 1\}$ é um subespaço vetorial de $M_n(K)$ e um ideal à esquerda dessa álgebra.

Primeiramente, verifiquemos que esse conjunto é um subespaço vetorial de $M_n(K)$, e em seguida que é um ideal à esquerda.

(i) Sejam $a, b \in I$, tal que, $a = (a_{ij})$ e $b = (b_{ij})$. Temos que para $j > 1$, $a_{ij} = 0$ e $b_{ij} = 0$, logo, para $a + b$, teremos que $a_{ij} + b_{ij} = 0$ para $j > 1$, portanto $a + b \in I$. Além disso, com $\lambda \in K$, temos que $\lambda a_{ij} = 0$ para $j > 1$, pois $a_{ij} = 0$ para $j > 1$. Portanto, I é de fato, um subespaço vetorial de $M_n(K)$.

(ii) Sejam $a \in M_n(K)$ e $b \in I$, mostremos que $ab \in I$. Usemos a notação $ab = c = (c_{ij})$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Desde que $b_{kj}=0$ para todo $j > 1$, temos que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}0 = 0$$

e assim, $ab \in I$.

Portanto, $I = \{a \in M_n(K); a_{ij} = 0 \text{ se } j > 1\}$ é, de fato, um ideal à esquerda de $M_n(K)$.

Agora, veremos um resultado interessante sobre a álgebra $M_n(K)$ e seus ideais. Mostremos que os seus únicos ideais são os triviais, ou seja, $M_n(K)$ e $\{0_{M_n(K)}\}$, com $0_{M_n(K)}$ sendo o elemento nulo de $M_n(K)$. Álgebras em que os únicos ideais são a própria álgebra e o ideal nulo são chamadas simples, deste modo iremos provar que $M_n(K)$ é uma álgebra simples. Começemos com a definição de matrizes elementares.

Definição 1.1.16 Seja e_{ij} a matriz em $M_n(K)$ tal que a (i, j) -ésima entrada é igual a 1 e as outras entradas são iguais a zero. Iremos nos referir a essas matrizes como matrizes elementares. Observe que sempre que fizermos a multiplicação de duas matrizes elementares teremos que,

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}, \text{ com } \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

Exemplo 1.1.17 Sejam as matrizes e_{11}, e_{12} na álgebra $M_2(K)$ temos que elas serão da seguinte forma:

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que pela definição de produto de matrizes elementares temos que $e_{11}e_{12} = e_{12}$ e $e_{12}e_{11} = 0_{M_2(K)}$.

Veja que as matrizes elementares constituem uma base, como espaço vetorial, para $M_n(K)$. Agora, podemos mostrar que $M_n(K)$ é uma álgebra simples.

Proposição 1.1.18 Seja $M_n(K)$ a álgebra das matrizes de ordem $n \times n$, se $I \neq \{0_{M_n(K)}\}$ é seu ideal, então $I = M_n(K)$.

Prova. Seja $I \neq \{0_{M_n(K)}\}$ um ideal de $M_n(K)$. Temos que deve existir $a \in I$, tal que, $a \neq 0_{M_n(K)}$. Além disso, podemos escrever a matriz a da seguinte forma

$$a = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}e_{ij}.$$

Com esse somatório sendo não nulo, então devem existir índices i_0 e j_0 tais que $a_{i_0j_0}$ é diferente de zero. Como I é um ideal bilateral, temos que $e_{ii_0}ae_{j_0j} \in I$, assim, com

$$e_{ii_0}ae_{j_0j} = e_{ii_0}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}e_{ij}\right)e_{j_0j},$$

temos que a única soma da parcela que será diferente de zero é $e_{ii_0}(a_{i_0j_0}e_{i_0j_0})e_{j_0j}$, logo, teremos que

$$e_{ii_0}ae_{j_0j} = e_{ii_0}(a_{i_0j_0}e_{i_0j_0})e_{j_0j} = a_{i_0j_0}e_{ij} \in I.$$

Como $a_{i_0j_0} \in K$, então temos que deve existir $(a_{i_0j_0})^{-1} \in K$, sendo assim, obtemos que $e_{ij} \in I$, ou seja, todas as matrizes elementares que geram $M_n(K)$ pertencem a I , e portanto, concluímos que $I = M_n(K)$. ■

Assim, segue imediatamente do resultado acima que a álgebra $M_n(K)$ é simples. A seguir, vejamos que o mesmo não vale para a álgebra $U_n(K)$, ou seja, existe um ideal para essa álgebra diferente dos triviais.

Exemplo 1.1.19 *Seja $U_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$. Mostremos que o conjunto*

$$I = \{a \in U_n(K); a_{ij} = 0 \text{ se } i = j\}$$

é um ideal de $U_n(K)$.

Primeiramente, verifiquemos que esse conjunto é um subespaço vetorial de $U_n(K)$, e em seguida que é um ideal.

(i) *Sejam $a, b \in I$, tal que, $a = (a_{ij})$ e $b = (b_{ij})$, temos que para $i = j$, $a_{ij} = 0$ e $b_{ij} = 0$, logo $a_{ij} + b_{ij} = 0$, para $i = j$, portanto $a + b \in I$. Além disso, com $\lambda \in K$, temos que $\lambda a_{ij} = 0$ para $i = j$, pois $a_{ii} = 0$, então $\lambda a \in I$. Portanto I , de fato, é um subespaço vetorial de $U_n(K)$.*

(ii) *Seja $a \in U_n(K)$ e $b \in I$, mostremos que $ab \in I$. Usemos a notação $ab = c = (c_{ij})$, tal que,*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Para $i = j$ temos, $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$. Também teremos que, quando ocorre $i > k$ então temos $a_{ik} = 0$, logo $a_{ik}b_{ki} = 0$, caso contrário $i \leq k$, então temos $b_{ki} = 0$, logo $a_{ik}b_{ki} = 0$. Portanto $c_{ii} = 0$. Assim, $ab \in I$, e I é ideal à esquerda de $U_n(K)$.

(iii) *Seja $a \in I$ e $b \in U_n(K)$, mostremos que $ab \in I$. Usemos a notação $ab = c = (c_{ij})$, tal que*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Para $i = j$, temos $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$. Também teremos que, quando ocorre $i \geq k$ então temos $a_{ik} = 0$, logo, $a_{ik}b_{ki} = 0$, caso contrário $i < k$, então temos $b_{ki} = 0$, logo $a_{ik}b_{ki} = 0$. Portanto, $c_{ii} = 0$. Assim, $ab \in I$, e I é ideal à direita.

Portanto, $I = \{a \in U_n(K); a_{ij} = 0 \text{ se } i = j\}$ é de fato, um ideal de $U_n(K)$.

A seguir, iremos utilizar a definição de ideal para apresentar a próxima álgebra, chamada de Álgebra Quociente.

Exemplo 1.1.20 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A . Temos que A/I é um espaço vetorial quociente com a operação de soma $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ e o produto por escalar $\lambda(a + I) = (\lambda a) + I$, para $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Se considerarmos a multiplicação definida por $(a + I)(b + I) = ab + I$, obtemos que A/I é uma álgebra.*

A próxima proposição nos diz que, como uma álgebra é definida através de uma aplicação bilinear, então, dado um espaço vetorial A , para definir nele uma estrutura de álgebra, basta definirmos o produto para os elementos de uma base de A .

Proposição 1.1.21 *Se A é um espaço vetorial com base β e $f : \beta \times \beta \rightarrow A$ é uma função qualquer, então existe uma única função bilinear $F : A \times A \rightarrow A$ estendendo f .*

Prova. Seja $\beta = \{v_i \mid i \in I\}$, definamos $F : A \times A \rightarrow A$ da seguinte forma, para $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i, w = \sum_{j \in I} \gamma_j w_j \in V$ tomamos

$$F(v, w) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i \gamma_j f(v_i, w_j).$$

Da unicidade da expressão de um vetor como combinação linear dos elementos de uma base fixa, temos que a partir de v os λ_i estão bem definidos (e são quase todos nulos) e a partir do w os γ_i estão bem definidos (e são quase todos nulos), logo o somatório duplo do lado direito está bem definido, assim, esses fatores faz com que esta aplicação esteja bem definida. Ademais pode-se verificar facilmente que F é bilinear.

Agora, veja que para os elementos da base β podemos prosseguir da seguinte forma. Fixados $i_0 \in I$ e $j_0 \in I$, arbitrários, temos que $v_{i_0} = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ e $w_{j_0} = \sum_{j \in I} \gamma_j w_j$, onde

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = i_0 \\ 0, & \text{se } i \neq i_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j = j_0 \\ 0, & \text{se } j \neq j_0 \end{cases}.$$

Assim,

$$F(v_{i_0}, w_{j_0}) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i \gamma_j f(v_i, w_j) = f(v_{i_0}, w_{j_0}),$$

portanto, temos que de fato f é estendida por F . Por fim, verifiquemos que F é a única aplicação bilinear nestas condições.

Suponhamos que exista outra aplicação bilinear F' nessas mesmas condições, então ela também deve estender f , assim, para $v, w \in A$ e $v_i, w_i \in \beta$ obtemos que,

$$F'(v, w) = F' \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \gamma_j w_i \right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i \gamma_j F'(v_i, w_j) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i \gamma_j f(v_i, w_j) = F(v, w),$$

e, portanto, $F' = F$. ■

Em seguida, para encerrarmos essa primeira subseção, veremos que o produto tensorial de duas álgebras também é uma álgebra. Começaremos com a introdução do produto tensorial de espaços vetoriais. Para isso, utilizaremos a referência [9].

Definição 1.1.22 *Sejam V e W espaços vetoriais. Denotamos por $V * W$ o espaço vetorial com base $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$. O produto tensorial $V \otimes W$ de V por W é o quociente de $V * W$ pelo subespaço $\mathcal{S}$ gerado por:*

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), \quad (2)$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2),$$

$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w),$$

$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w),$$

com $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ e $\lambda \in K$. Denotamos por $v \otimes w$ a imagem de (v, w) pela aplicação quociente $V * W \rightarrow (V * W)/\mathcal{S}$.

Proposição 1.1.23 *Sejam V, W, Z espaços vetoriais e $\beta : V \times W \rightarrow Z$ uma aplicação bilinear, então existe uma transformação linear $\bar{\beta} : V \otimes W \rightarrow Z$, tal que $\beta(v, w) = \bar{\beta}(v \otimes w)$ para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.*

Prova. Seja a transformação linear

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} : V * W &\rightarrow Z \\ (v, w) &\rightarrow \beta(v, w). \end{aligned}$$

Como β é uma aplicação bilinear, segue que os elementos em (2) pertencem a $\ker \tilde{\beta}$, e portanto, o subespaço N gerado por esses elementos está contido em $\ker \tilde{\beta}$. Deste modo, podemos definir a transformação linear

$$\begin{aligned} \bar{\beta} : (V * W)/N &= V \otimes W \rightarrow Z \\ (x + N) &\rightarrow \tilde{\beta}(x), \end{aligned}$$

onde $x \in V * W$. Além disso, como $v \otimes w$ é a imagem de (v, w) pela aplicação quociente $V * W \rightarrow (V * W)/N$ então

$$\bar{\beta}(v \otimes w) = \bar{\beta}((v, w) + N) = \tilde{\beta}(v, w) = \beta(v, w),$$

portanto, $\bar{\beta}(v \otimes w) = \beta(v, w)$. ■

Sejam $f : V \rightarrow V'$ e $g : W \rightarrow W'$ transformações lineares. A aplicação

$$\begin{aligned} V \times W &\rightarrow V' \otimes W' \\ (v, w) &\rightarrow f(v) \otimes g(w) \end{aligned}$$

é bilinear, e portanto, pela Proposição 1.1.23, existe uma transformação linear $V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$. Denotaremos essa transformação linear por $f \otimes g$.

Proposição 1.1.24 *Sejam A e B duas álgebras, então $A \otimes B$ é uma álgebra com a multiplicação dada por*

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

para quaisquer $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$.

Prova. Dado $x \in A$, denotaremos por R_x a aplicação

$$\begin{aligned} R_x : A &\rightarrow A \\ y &\rightarrow yx. \end{aligned}$$

Dados $a' \in A$ e $b' \in B$, consideremos a aplicação $R_{a'} \otimes R_{b'}$ na qual

$$R_{a'} : A \rightarrow A \quad R_{b'} : B \rightarrow B$$

$$x' \rightarrow x'a' \qquad y' \rightarrow y'b'.$$

Então, a aplicação

$$\begin{aligned} A \times B &\rightarrow \text{End}(A \otimes B) \\ (a', b') &\rightarrow R_{a'} \otimes R_{b'} \end{aligned}$$

é bilinear. Assim, pela Proposição 1.1.23, existe uma transformação linear tal que

$$\begin{aligned} \alpha : A \otimes B &\rightarrow \text{End}(A \otimes B) \\ a' \otimes b' &\rightarrow R_{a'} \otimes R_{b'}. \end{aligned}$$

Dados $r, s \in A \otimes B$ definimos rs como

$$rs := \alpha(s)(r).$$

É claro que a aplicação

$$(r, s) \rightarrow rs$$

é bilinear e, além disso, dados $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, temos

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = \alpha(a' \otimes b')(a \otimes b) = (R_{a'} \otimes R_{b'})(a \otimes b) = aa' \otimes bb'.$$

Por fim, dados $a, a', a'' \in A$ e $b, b', b'' \in B$, temos

$$((a \otimes b)(a' \otimes b'))(a'' \otimes b'') = aa'a'' \otimes bb'b'' = (a \otimes b)((a' \otimes b')(a'' \otimes b'')),$$

e portanto, a multiplicação em $A \otimes B$ é associativa, além disso $1_A \otimes 1_B$ é a unidade de $A \otimes B$. Deste modo, concluímos que $A \otimes B$ é uma álgebra com esta multiplicação. ■

1.1.2 Homomorfismos de Álgebras

Definição 1.1.25 *Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\Psi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras se $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$ e $\Psi(1_A) = 1_B$ para quaisquer $a, b \in A$.*

Apesar de não ficar evidente quais as multiplicações utilizadas quando escrevemos, por simplicidade, $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$, é válido destacar que geralmente as álgebras A e B tem multiplicações distintas. A seguir veja um exemplo clássico na teoria de homomorfismos de álgebras.

Exemplo 1.1.26 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A . A aplicação*

$$\begin{aligned} \Psi : A &\rightarrow A/I \\ a &\rightarrow a + I \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetor de álgebras, chamado de projeção canônica.

Veja que, dados $a, b \in A$, temos que

$$\Psi(ab) = (ab) + I = (a + I)(b + I) = \Psi(a)\Psi(b)$$

e, além disso, note que $1_A + I$ é a unidade de A/I e

$$\Psi(1_A) = 1_A + I,$$

portanto, de fato, Ψ é um homomorfismo de álgebras. Também veja que, dado $b + I \in A/I$ temos que $b + I = \Psi(b)$, onde $b \in A$. Assim, concluímos que Ψ é um homomorfismo sobrejetor de álgebras.

Também podemos definir isomorfismos de álgebras, que serão homomorfismos bijetivos. Vejamos a próxima definição, e adiante, alguns exemplos de isomorfismos.

Definição 1.1.27 *Sejam A e B duas álgebras e $\Psi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Dizemos que o conjunto $\ker(\Psi) = \{a \in A \mid \Psi(a) = 0_B\}$ é o núcleo do homomorfismo Ψ , e que, $\text{Im}(\Psi) = \{\Psi(a) \in B \mid a \in A\}$ é a imagem de Ψ .*

Observe que Ψ será injetiva se, e somente se, $\ker(\Psi) = \{0_A\}$ e que $\ker(\Psi)$ é um ideal da álgebra A , e além disso, $\text{Im}(\Psi)$ é uma subálgebra de B .

Exemplo 1.1.28 *Se considerarmos a subálgebra C e a álgebra $\mathbb{C}$ dos números complexos vistas no Exemplo 1.1.13, obtemos o isomorfismo de álgebras $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow C$ tal que*

$$\Psi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Note que Ψ é uma transformação linear bijetiva. Verifiquemos apenas que, de fato, Ψ é um homomorfismo de álgebras. Veja que

$$\begin{aligned} \Psi((a + bi)(c + di)) &= \Psi((ac - bd) + (bc + ad)i) \\ &= \begin{bmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \Psi(a + bi)\Psi(c + di). \end{aligned}$$

Além disso, $1 + 0i$ é a unidade de $\mathbb{C}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a unidade de C , e temos claramente que

$$\Psi(1 + 0i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1.29 *A álgebra $K[x_1, \dots, x_m]$ é isomorfa a $K[x_1, \dots, x_{m-1}] \otimes K[x_m]$.*

Sejam as álgebras $K[x_1, \dots, x_{m-1}]$ e $K[x_m]$ com bases $\beta_1 = \{x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \mid \alpha_i \geq 0\}$ e $\beta_2 = \{x_m^{\alpha_m} \mid \alpha_m \geq 0\}$, respectivamente, então $K[x_1, \dots, x_{m-1}] \otimes K[x_m]$ terá como base $\beta = \{x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \otimes x_m^{\alpha_m} \mid x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \in \beta_1, x_m^{\alpha_m} \in \beta_2\}$. Assim, podemos definir uma transformação linear Ψ , de maneira única, escolhendo as imagens para os elementos da base β , da seguinte forma:

$$\Psi : K[x_1, \dots, x_{m-1}] \otimes K[x_m] \rightarrow K[x_1, \dots, x_m]$$

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \otimes x_m^{\alpha_m} \rightarrow x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} x_m^{\alpha_m}.$$

Como toda transformação linear que leva base em base é bijetiva, resta mostrarmos que Ψ é um homomorfismo de álgebras. Sejam $x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \otimes x_m^{\alpha_m}$, $x_1^{\beta_1} \dots x_{m-1}^{\beta_{m-1}} \otimes x_m^{\beta_m}$ elementos em $K[x_1, \dots, x_{m-1}] \otimes K[x_m]$, temos que

$$\begin{aligned} & \Psi((x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \otimes x_m^{\alpha_m})(x_1^{\beta_1} \dots x_{m-1}^{\beta_{m-1}} \otimes x_m^{\beta_m})) \\ &= \Psi(x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} x_1^{\beta_1} \dots x_{m-1}^{\beta_{m-1}} \otimes x_m^{\alpha_m} x_m^{\beta_m}) \\ &= \Psi(x_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}+\beta_{m-1}} \otimes x_m^{\alpha_m+\beta_m}) \\ &= x_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots x_m^{\alpha_m+\beta_m} = (x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m})(x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m}) \\ &= \Psi(x_1^{\alpha_1} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \otimes x_m^{\alpha_m}) \Psi(x_1^{\beta_1} \dots x_{m-1}^{\beta_{m-1}} \otimes x_m^{\beta_m}). \end{aligned}$$

Além disso, podemos verificar facilmente que Ψ leva unidade em unidade de álgebras. Portanto, temos que, Ψ é um homomorfismo, assim, concluímos que Ψ é um isomorfismo de álgebras.

Quando existe um isomorfismo entre duas álgebras dizemos que elas são isomorfas. Ainda, sobre isomorfismos, iremos enunciar o próximo teorema, bastante importante e clássico nas teorias de grupos e anéis. A sua demonstração será omitida, por se tratar de uma adaptação, mas que será feita na seção de Álgebras Graduadas, Teorema 1.2.39. Também podemos considerar o próximo teorema como um caso específico do Teorema 1.2.39, pelo fato de que, quando consideramos o grupo $G = \{e\}$, saímos do caso graduado para o caso ordinário.

Teorema 1.1.30 *Seja $\phi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Então, existe um isomorfismo de álgebras $\Psi : A/\ker(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi)$, sendo $\Psi(a + \ker(\phi)) = \phi(a)$.*

1.1.3 Álgebras Livres

Inicialmente faremos a definição de um alfabeto e sua estrutura para que possamos, assim, definir uma álgebra livre. Para essa definição utilizarei a referência [15], que foi a primeira dissertação, que me recorde de ter lido, e que me fez entender esse conceito apresentado a seguir.

Definição 1.1.31 *Seja X um conjunto não vazio, iremos considerar seus elementos como sendo letras e o chamaremos de alfabeto. Faremos as seguintes definições:*

1. *Uma sequência finita de letras de X será chamada de palavra.*
2. *Denotaremos por X^* o conjunto de todas as palavras em X .*
3. *O número de letras em cada palavra em X^* será considerado o seu comprimento, e quando a palavra tiver comprimento zero, será dita uma palavra vazia, denotada por 1.*
4. *Sejam $v = a_1 \dots a_n$ e $w = b_1 \dots b_m$ duas palavras, então podemos definir a seguinte multiplicação,*

$$vw = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m,$$

conhecida como justaposição.

Definição 1.1.32 *Seja X um conjunto não vazio, consideremos $K\langle X \rangle$ o espaço vetorial com base o conjunto das palavras*

$$x_{i_1} \dots x_{i_n}, \quad x_{i_j} \in X, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e com a multiplicação dada pela justaposição. Definimos os seus elementos a seguir:

- (i) *A soma $p(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m$, onde $\alpha_i \in K$ e $w_i = x_1 \dots x_n \in X^*$ é chamada polinômio. No caso em que $m = 1$, p é um monômio. Cada x_j é dito uma indeterminada de p .*
- (ii) *O grau de um monômio αw com $0 \neq \alpha \in K$ e $w \in X^*$, que denotaremos por $gr(\alpha w)$, é o comprimento da palavra w . O grau de um polinômio será o grau máximo de seus monômios.*
- (iii) *Diremos que um monômio αw , com $0 \neq \alpha \in K$ e $w \in X^*$ é do tipo $(n_1, \dots, n_k)$ se a palavra w contém x_i exatamente n_i vezes. Diremos que o número n_i é o grau do monômio αw em x_i .*

Definição 1.1.33 *Sejam $\mathcal{V}$ uma classe de álgebras e $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra gerada pelo conjunto X . A álgebra A é chamada de álgebra livre na classe $\mathcal{V}$, livremente gerada por X , se para toda álgebra $R \in \mathcal{V}$, a aplicação $\phi : X \rightarrow R$ pode ser estendida a um homomorfismo $\Psi : A \rightarrow R$.*

Observe que $K\langle X \rangle$ é uma álgebra com a multiplicação de justaposição, e assim, podemos fazer o seguinte enunciado.

Proposição 1.1.34 *A álgebra $K\langle X \rangle$ é livre na classe das álgebras (associativas com unidade).*

Prova. Seja A uma álgebra e $\phi : X \rightarrow A$ uma aplicação qualquer. Para cada $i \in \mathbb{N}$ denotaremos por a_i a imagem de x_i por ϕ . Consideremos agora a aplicação linear $\Psi_\phi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ tal que $\Psi_\phi(1) = 1_A$ e $\Psi_\phi(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}) = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$. Primeiramente observe que essa aplicação é uma extensão de ϕ , pois dado $x_i \in X$ temos que $\Psi_\phi(x_i) = a_i = \phi(x_i)$. Também é um homomorfismo de álgebras, para verificarmos isso, pela Proposição 1.1.21, basta verificarmos que esta aplicação é compatível com o produto para os elementos da base. Então, sejam $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}, x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_n}$ monômios em $K\langle X \rangle$, teremos que

$$\begin{aligned} \Psi_\phi(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_n}) &= a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} a'_{i_1} a'_{i_2} \dots a'_{i_n} \\ &= \Psi_\phi(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}) \Psi_\phi(x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_n}). \end{aligned}$$

Além disso, é única pois, se considerarmos Ψ , tal que, $\Psi|_X = \phi$ teríamos que, $\Psi_\phi(x_i) = \phi(x_i) = \Psi(x_i)$ e obteríamos que dado $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \in K\langle X \rangle$, $\Psi_\phi(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}) = \Psi(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n})$, o que torna $\Psi_\phi = \Psi$. Portanto, temos que Ψ_ϕ é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\Psi_\phi|_X = \phi$. ■

Veja que o próximo exemplo traz um resultado semelhante da proposição anterior para $K[X]$, mas em relação as álgebras comutativas.

Exemplo 1.1.35 Para qualquer alfabeto X a álgebra polinomial $K[X]$ é livre na classe das álgebras comutativas.

Seja A uma álgebra comutativa e $\phi : X \rightarrow A$ uma aplicação qualquer. Para cada $i \in \mathbb{N}$ denotaremos por a_i a imagem de x_i por ϕ . Consideremos agora a aplicação linear $\Psi_\phi : K[X] \rightarrow A$ tal que $\Psi_\phi(1) = 1_A$ e $\Psi_\phi(x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_n}^{k_n}) = a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \dots a_{i_n}^{k_n}$. Primeiramente observe que essa aplicação é uma extensão de ϕ , pois dado $x_i \in X$ temos que $\Psi_\phi(x_i) = a_i = \phi(x_i)$. Também é um homomorfismo de álgebras, dados $x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_n}^{k_n}, x_{i_{n+1}}^{k_{n+1}} x_{i_{n+2}}^{k_{n+2}} \dots x_{i_m}^{k_m} \in K[X]$, teremos que

$$\begin{aligned} \Psi_\phi(x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_n}^{k_n} x_{i_{n+1}}^{k_{n+1}} x_{i_{n+2}}^{k_{n+2}} \dots x_{i_m}^{k_m}) &= a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \dots a_{i_n}^{k_n} a_{i_{n+1}}^{k_{n+1}} a_{i_{n+2}}^{k_{n+2}} \dots a_{i_m}^{k_m} \\ &= \Psi_\phi(x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_n}^{k_n}) \Psi_\phi(x_{i_{n+1}}^{k_{n+1}} x_{i_{n+2}}^{k_{n+2}} \dots x_{i_m}^{k_m}). \end{aligned}$$

Além disso, é única pois, se considerarmos Ψ , tal que, $\Psi|_X = \phi$ teríamos que, $\Psi_\phi(x_i) = \phi(x_i) = \Psi(x_i)$ no qual obteríamos que dado $x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_n}^{k_n} \in K[X]$, $\Psi_\phi(x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_n}^{k_n}) = \Psi(x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_n}^{k_n})$, o que torna $\Psi_\phi = \Psi$. Portanto, temos que Ψ_ϕ é um homomorfismo de álgebras comutativas e é o único satisfazendo $\Psi_\phi|_X = \phi$.

Com as definições feitas nessa subseção podemos entender o próximo exemplo. Também utilizaremos a Definição 1.2.41 para o caso ordinário e como referência o livro [6].

Exemplo 1.1.36 A álgebra de Grassmann sobre um corpo K com $\text{char}(K) \neq 2$ é definida como

$$E := K\langle X \rangle / I,$$

onde $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e I é o ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por $\{x_i^2, x_i x_j + x_j x_i = 0, i, j \in \mathbb{N}\}$. Primeiro note que $x_1 x_2 x_1 = -x_1^2 x_2 = 0$ e em geral, $x_i E x_i = 0$. Observe também que todo produto de diferentes x_i 's pode ser escrito como mais ou menos

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n, \quad (1)$$

pela propriedade $x_i x_j + x_j x_i = 0$. Assim, esses elementos, juntamente com 1, geram E como espaço vetorial.

Vamos mostrar que cada um deles é diferente de zero. Para isso, basta mostrar que $x_1 x_2 \dots x_n \neq 0$. Suponhamos que $x_1 x_2 \dots x_n = 0$. Então $\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n$ estaria contido no ideal de $K\langle \epsilon_1, \epsilon_2, \dots \rangle$ gerado por $R = \{\epsilon_i^2, \epsilon_i \epsilon_j + \epsilon_j \epsilon_i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$. Então podemos escrever $\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n$ como uma soma de termos da forma $m \epsilon_i^2 m'$ e $p(\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon_j \epsilon_i) p'$, onde m, m', p, p' são monômios. Desde que o espaço linear gerado por todos os monômios multilineares, ou seja, o espaço de todos os polinômios multilineares tem interseção trivial com o subespaço gerado pelos monômios que não são multilineares. Daí segue que $\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n$ é uma combinação linear de polinômios

$$\epsilon_{\theta(1)} \dots \epsilon_{\theta(j-1)} (\epsilon_{\theta(j)} \epsilon_{\theta(j+1)} + \epsilon_{\theta(j+1)} \epsilon_{\theta(j)}) \epsilon_{\theta(j+2)} \dots \epsilon_{\theta(n)}$$

onde $\theta \in S_n$. Tal combinação linear é um polinômio multilinear com a propriedade que a soma de seus coeficientes correspondentes as permutações pares coincide com a soma

de seus coeficientes correspondendo as permutações ímpares. Como $\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n$ não tem essa propriedade, chegamos a uma contradição. Assim, os elementos de (1) são de fato diferentes de zero.

Agora vamos mostrar que 1 e os elementos de (1) são linearmente independentes. Suponhamos que $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$, onde $\lambda_i \in K - \{0\}$ e cada b_i é 1 ou é como em (1). Podemos supor que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que x_k aparece em b_n , mas não em b_1 . Por isso $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i b_i x_k = 0$ e $b_1 x_k \neq 0$. Continuando este procedimento chegamos em uma contradição que um dos λ_i é zero. Assim, os elementos da forma (1), juntamente com 1, formam uma base de E .

Nesse último exemplo, essa álgebra recebe esse nome devido ao matemático Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877) que a desenvolveu em 1844. Essa álgebra é de importância fundamental em muitas áreas da Matemática e da Física, veja [26].

1.1.4 Identidades Polinomiais

As identidades polinomiais fazem parte dos principais conceitos estudados de uma álgebra, pois é de grande interesse saber quais são as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra dada.

Definição 1.1.37 *Sejam $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ e A uma álgebra, f será uma identidade polinomial para A , se*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todos } a_1, \dots, a_n \in A,$$

e denotamos por $f \equiv 0$. Se A satisfaz uma identidade polinomial diferente de $f = 0$ (polinômio nulo), então chamaremos A de PI-álgebra.

Temos um caso interessante de álgebra que não é uma PI-álgebra, veja o próximo exemplo.

Exemplo 1.1.38 *A álgebra $K\langle X \rangle$ não é uma PI-álgebra.*

Suponhamos por absurdo que $f(x_1, \dots, x_n)$ seja uma identidade não nula de $K\langle X \rangle$. Então, dados quaisquer $f_1, \dots, f_n$ elementos de $K\langle X \rangle$, devemos obter que

$$f(f_1, \dots, f_n) = 0.$$

Em particular, podemos escolher $f_1 = x_1, \dots, f_n = x_n$, logo, teremos que

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

ou seja, $f(x_1, \dots, x_n)$ seria igual ao polinômio nulo, o que contrária nossa hipótese. Portanto, $K\langle X \rangle$ não é uma PI-álgebra.

Agora, veremos exemplos diversos de PI-álgebras, começando pelas álgebras que são comutativas.

Exemplo 1.1.39 A álgebra A é comutativa se, e somente se, satisfaz a identidade polinomial

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1 \equiv 0,$$

chamado de comutador de dois elementos, ou simplesmente de comutador.

Exemplo 1.1.40 A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade polinomial de Hall dada por

$$[[x_1, x_2]^2, x_3] \equiv 0.$$

Usaremos o Teorema de Cayley-Hamilton que diz que se K é um corpo e $a \in M_2(K)$, então o polinômio característico de a anula a . Denotaremos o polinômio característico da matriz a por $P_a(\lambda)$. Agora, veja que, dada $a = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$, temos que

$$P_a(\lambda) = \det \begin{bmatrix} x - \lambda & y \\ w & z - \lambda \end{bmatrix} = (x - \lambda)(z - \lambda) - wy = \lambda^2 - \lambda x - \lambda z + xz - wy.$$

Note que, $xz - wy = \det(a)$ e $\lambda(-x - z) = -\lambda \text{Tr}(a)$, logo, pelo Teorema de Cayley-Hamilton obtemos que

$$a^2 - \text{Tr}(a)a + \det(a)I_2 = 0,$$

com I_2 sendo a matriz identidade de ordem 2.

Agora, consideremos $a = [b, c]$, onde b e c são matrizes 2×2 e mostremos que $\text{Tr}(a) = 0$. Dadas $a, b, c \in M_2(K)$, temos que

$$a = [b, c] = bc - cb$$

assim,

$$\text{Tr}(a) = \text{Tr}(bc - cb) = \text{Tr}(bc) - \text{Tr}(cb) = 0.$$

Logo, $a^2 - \text{Tr}(a)a + \det(a)I_d = a^2 + \det(a)I_2 = 0$, assim, $a^2 = -\det(a)I_2$, e obtemos que,

$$a^2 = [b, c]^2 = \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \text{ com } \delta \in K.$$

Portanto,

$$[[b, c]^2, d] = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

como $[b, c]^2$ é uma matriz escalar, então ela comuta com as de mais, e portanto a igualdade acima é igual a matriz nula. E de fato, concluímos que $M_2(K)$ satisfaz a identidade de Hall.

Nesse último exemplo, essa identidade polinomial recebe esse nome devido ao matemático Marshal Hall. Continuaremos com os exemplos de PI -álgebras, com a definição de um novo polinômio, que é bastante importante para o estudo das identidades polinomiais da álgebra $M_2(K)$.

Definição 1.1.41 Seja S_n o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, definimos o polinômio standard de grau n como sendo

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign} \sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

em que $\text{sign} \sigma$ é o sinal da permutação σ .

Exemplo 1.1.42 A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade standard $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$.

Para demonstrar esse fato, utilizaremos a seguinte igualdade, que pode ser verificada com alguns cálculos,

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3],$$

na qual dados dois elementos x, y quaisquer, temos que $x \circ y = xy + yx$. Depois, fixemos a base de $M_2(K)$ como sendo

$$\{e_{11} + e_{22}, e_{11}, e_{12}, e_{21}\},$$

e usando a igualdade acima, teremos que $s_4(e_{11} + e_{22}, e_{11}, e_{12}, e_{21}) = 0$, pois o fato de $I_2 = e_{11} + e_{22}$ fazer parte dos comutadores em cada uma das parcelas da soma, faz com que zere todos os comutadores que o contém e assim obtemos essa igualdade. De modo geral, qualquer substituição por elementos da base se anula pois se uma variável for substituída por I_2 o resultado é zero pela igualdade acima em que s_4 é escrito em termos de comutadores, por outro lado o polinômio é alternado e em qualquer substituição das 4 variáveis pelos outros 3 elementos da base haverá variáveis distintas substituídas pelo mesmo elemento, assim o resultado também é zero. Note que verificamos que o resultado dá zero apenas para os elementos da base de $M_2(K)$, mas como dado quaisquer elementos em $M_2(K)$ eles serão uma combinação linear dessa base, então continua sendo válido o resultado acima para quaisquer elementos de $M_2(K)$.

Exemplo 1.1.43 Seja $U_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ então ela satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0.$$

Primeiro analisaremos cada comutador de forma geral. Seja $[x_l, x_r] = x_l x_r - x_r x_l$, iremos mostrar que, sendo a_l e a_r matrizes triangulares superiores, teremos que a diagonal principal de $a_l a_r$ é igual a diagonal principal de $a_r a_l$.

Sejam $a_l = (a_{ij})$, $a_r = (b_{ij})$, $a_l a_r = (c_{ij})$ e $a_r a_l = (d_{ij})$. Para a diagonal principal de $a_l a_r$ temos

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \text{ com } \begin{cases} a_{ik} = 0, & \text{se } i > k \\ b_{ik} = 0, & \text{se } k > i \end{cases},$$

ou seja, para $i > k$ temos que $a_{ik} b_{ki} = 0$ e para $k > i$ teremos $a_{ik} b_{ki} = 0$, logo, resta que,

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = a_{ii} b_{ii}.$$

Para a diagonal principal de $a_r a_l$ temos

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} \text{ com } \begin{cases} b_{ik} = 0, & \text{se } i > k \\ a_{ki} = 0, & \text{se } k > i \end{cases},$$

ou seja, para $i > k$ temos $b_{ik} a_{ki} = 0$ e para $k > i$ teremos $b_{ik} a_{ki} = 0$, logo resta que,

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = b_{ii} a_{ii}.$$

Como b_{ii} e a_{ii} são elementos de K , então $b_{ii} a_{ii} = a_{ii} b_{ii}$, e portanto, as matrizes $a_l a_r$ e $a_r a_l$ tem as mesmas diagonais principais, assim, $[a_l, a_r] = a_l a_r - a_r a_l$ é uma matriz triangular estritamente superior, ou seja, para $i \geq j$ o elemento da linha i e da coluna j de $[a_l, a_r]$ será igual a zero.

Agora mostraremos que o produto de n matrizes triangulares estritamente superiores de ordem n dá zero. Utilizaremos indução em relação a n . Para $n = 1$ temos que isso se verifica facilmente, agora vejamos:

1. Para $n = 2$,

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

2. Para $n = 3$,

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3. Agora, suponhamos que seja válido para $n - 1$ e mostremos que é válido para n . Observe o produto de n matrizes de ordem n cada uma,

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \cdots \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

note que em cada matriz de ordem $n \times n$ podemos considerar o bloco $(n - 1) \times (n - 1)$ que consiste das $(n - 1)$ primeiras entradas de cada uma das $(n - 1)$ primeiras linhas e que cada matriz consiste desse bloco incluindo a última linha igualmente nula, pois as matrizes são triangulares estritamente superiores e, uma coluna com $(n-1)$ elementos possivelmente diferentes de zero. Por consequência disso, ao realizarmos o produto acima até a penúltima matriz, teremos que pelo

menos, o bloco $(n-1) \times (n-1)$ do resultado desse produto terá todos os elementos nulos, ficando

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

onde $c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{n-1,n}$ são escalares. O produto das duas matrizes acima é 0 e assim, fica demonstrado o que queríamos.

Portanto, a álgebra $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ satisfaz a identidade $[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$.

A identidade $[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ é bastante importante para a álgebra $U_n(K)$. Veremos que, em certo sentido, todas as outras identidades desta álgebra são obtidas a partir dessa identidade.

Agora, com a próxima observação, conseguiremos obter um resultado interessante que relaciona as identidades polinomiais de um álgebra A e os núcleos dos homomorfismos de $K\langle X \rangle$ em A .

Observação 1.1.44 Dado $f \in K\langle X \rangle$, temos que $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$, onde $\alpha_i \in K$ e $w_i = x_{i_1} \dots x_{i_l}$. Daí, ao considerarmos ϕ um homomorfismo de $K\langle X \rangle \rightarrow A$, obtemos que

$$\begin{aligned} \phi(f(x_1, \dots, x_n)) &= \phi(\alpha_1 x_{11} \dots x_{1l_1} + \dots + \alpha_m x_{m1} \dots x_{ml_2}) \\ &= \alpha_1 \phi(x_{11}) \dots \phi(x_{1l_1}) + \dots + \alpha_m \phi(x_{m1}) \dots \phi(x_{ml_2}) \\ &= f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)), \end{aligned}$$

e portanto,

$$\phi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)).$$

Proposição 1.1.45 O polinômio $f \in K\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial para A se, e somente se, f está no núcleo de todo homomorfismo $\phi : K\langle X \rangle \rightarrow A$.

Prova. Seja $\phi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ um homomorfismo. Devemos mostrar que $\phi(f) = 0$. Da Observação 1.1.44 temos que

$$\phi(f) = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)).$$

Como f é uma identidade polinomial de A , e $\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)$ pertencem a A , então temos que

$$\phi(f) = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) = 0$$

logo $\phi(f) = 0$, e então $f \in \ker \phi$.

Dados $a_1, \dots, a_n \in A$, tomemos $\alpha : X \rightarrow A$ uma aplicação tal que $\alpha(x_i) = a_i$. Agora, tomemos $\phi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ o homomorfismo que estende α . Por hipótese, temos que $\phi(f) = 0$, então

$$f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) = 0,$$

como ϕ é extensão de α , temos que a restrição de ϕ a X é igual a α , logo

$$f(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = 0.$$

Como $\alpha(x_i) = a_i$, obtemos que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, sendo $a_1, \dots, a_n$ uma sequência qualquer de elementos de A , logo, temos que f é uma identidade polinomial de A . ■

1.1.5 T -ideais e Álgebras Relativamente Livres

Nesta subseção faremos uma introdução ao estudo do conjunto de identidades polinomiais de uma álgebra. Entenderemos que esse conjunto pode ser gerado por identidades específicas, mas que nem sempre é um trabalho fácil encontrar essas identidades geradoras.

Definição 1.1.46 *Seja A uma álgebra, definimos $Id(A) = \{f \in K\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$ como sendo o conjunto das identidades polinomiais de A .*

Proposição 1.1.47 *Seja A uma álgebra, o conjunto $Id(A)$ de todas as identidades polinomiais de A é um ideal de $K\langle X \rangle$.*

Prova. Claramente $Id(A)$ é um subespaço vetorial de $K\langle X \rangle$. Sejam f em $Id(A) = \{f \in K\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$ e g em $K\langle X \rangle$ mostraremos que o produto fg ainda pertence a $Id(A)$. Observe que dados quaisquer elementos $a_1, \dots, a_n \in A$, teremos que

$$f(a_1, \dots, a_n)g(a_1, \dots, a_n) = 0g(a_1, \dots, a_n) = 0$$

portanto, $fg \in Id(A)$. De modo análogo podemos mostrar que $gf \in Id(A)$, para quaisquer $g \in K\langle X \rangle$ e $f \in Id(A)$, e assim, teremos que, $Id(A)$ é um ideal de $K\langle X \rangle$. ■

Definição 1.1.48 *Seja I um ideal de $K\langle X \rangle$. Se I for invariante sobre todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$, ou seja, $\Psi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismos Ψ de $K\langle X \rangle$, então ele é chamado de T -ideal.*

Observe que a definição acima é equivalente a dizer que se tivermos um endomorfismo $\Psi : K\langle X \rangle \rightarrow K\langle X \rangle$, e f uma identidade de A , então $\Psi(f)$ ainda é identidade para a álgebra A .

Proposição 1.1.49 *Seja A uma álgebra, então $Id(A)$ é um T -ideal de $K\langle X \rangle$.*

Prova. De fato, consideremos $\phi : K\langle X \rangle \rightarrow K\langle X \rangle$ e $\Psi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ homomorfismos de álgebras. Seja $f \in Id(A)$, se Ψ é um homomorfismo qualquer, então temos que,

$$\Psi(\phi(f)) = \Psi \circ \phi(f) = 0$$

pois $\Psi \circ \phi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras e $f \in Id(A)$. Logo, $\phi(f) \in \ker(\Psi)$, e portanto, pela Proposição 1.1.45, temos que $\phi(f) \in Id(A)$. ■

Dizemos que $Id(A)$ é o T -ideal da álgebra A . A próxima proposição relaciona o T -ideal das identidades polinomiais da álgebra quociente $K\langle X \rangle/I$ e o T -ideal I .

Proposição 1.1.50 *Seja I um T -ideal de $K\langle X \rangle$, temos então que $I = Id(K\langle X \rangle/I)$.*

Prova. Primeiramente mostremos que $I \subset Id(K\langle X \rangle/I)$. Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in I$, dados $g_1 + I, \dots, g_n + I \in K\langle X \rangle/I$ quaisquer. Temos que

$$f(g_1 + I, \dots, g_n + I) = f(g_1, \dots, g_n) + I = \bar{0}$$

pois, como I é um T -ideal, temos que $f(g_1, \dots, g_n) \in I$, e portando, $f \in Id(K\langle X \rangle/I)$, e assim, obtemos que $I \subset Id(K\langle X \rangle/I)$.

Agora mostremos que $Id(K\langle X \rangle/I) \subset I$. Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in Id(K\langle X \rangle/I)$, com $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in K\langle X \rangle/I$, então

$$\bar{0} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)},$$

portanto, como $\overline{f(x_1, \dots, x_n)} = \bar{0} \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in I$, logo, $f \in I$, assim, $Id(K\langle X \rangle/I) \subset I$, e concluímos que $I = Id(K\langle X \rangle/I)$. ■

Daqui em diante, nesta subseção, iremos trabalhar com um dos principais problemas na teoria de PI -álgebras, encontrar uma base para as identidades de uma dada álgebra.

Definição 1.1.51 *Dado um conjunto $S \subset K\langle X \rangle$, o T -ideal gerado por S é a interseção de todos os T -ideais de $K\langle X \rangle$ que contém S e será denotado por $\langle S \rangle$. Seja A uma álgebra, se $S \subset Id(A)$ é tal que $Id(A) = \langle S \rangle$, dizemos que S é uma base das identidades polinomiais da álgebra A . Os elementos de $Id(A)$ são chamados consequências das identidades polinomiais de S .*

Existem resultados devidos à Specht em 1950, publicados em [31], que são úteis para se determinar bases para as identidades de certas álgebras. Entretanto, determinar tais conjuntos geradores (não triviais) não é tarefa simples e permanece em aberto para a maioria das álgebras. Por exemplo, não se conhece base para as identidades de $M_n(K)$ se $n \geq 3$ e K é um corpo infinito. Specht conjecturou que em característica zero toda álgebra tem base finita para suas identidades e, apenas 1978, Kemer demonstrou que esta conjectura é verdadeira, veja [21].

Exemplo 1.1.52 *Seja A uma álgebra comutativa então $Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle$.*

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada na referência [9].

Exemplo 1.1.53 *Seja K , com $char K = 0$. Se considerarmos A como sendo a álgebra das matrizes $M_2(K)$, temos que*

$$Id(A) = \langle [[x_1, x_2]^2, x_3], s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle.$$

Razmyslov obteve uma base das identidades da álgebra $M_2(K)$, com 9 identidades, para $char K = 0$, em [28]. Mas Drensky provou que estas duas identidades acima são suficientes para a base das identidades de $M_2(K)$, veja [11].

Teorema 1.1.54 *Seja K um corpo com $char K = 0$, se considerarmos E como sendo a álgebra de Grassmann, teremos que*

$$Id(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle.$$

Prova. Veja [12]. ■

Teorema 1.1.55 *Seja K um corpo infinito, se considerarmos $U_n(K)$ como sendo a álgebra das matrizes triangulares superiores, teremos que*

$$Id(A) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle.$$

Esses dois últimos resultados, Teorema 1.1.54 e Teorema 1.1.55, podem ser encontrados em uma de nossas referências, no livro [12].

Com o objetivo de determinar uma base finita para as identidades polinomiais de uma álgebra dada, geralmente é utilizado a teoria de álgebras relativamente livres. Por isso, iremos defini-las e por último, faremos uso delas para mostrar que vale a igualdade $Id(U_2(K)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$.

Definição 1.1.56 *Seja $\{f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in K\langle X \rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra livre $K\langle X \rangle$. Então a classe $\mathcal{V}$ de todas as álgebras que satisfazem as identidades polinomiais $f_i = 0$, $i \in I$, é chamada de variedade, determinada pelo sistema de identidades polinomiais $\{f_i \mid i \in I\}$. A variedade $\mathcal{W}$ é chamada de subvariedade de $\mathcal{V}$, se $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.*

Exemplo 1.1.57 *A classe de todas as álgebras comutativas é a variedade definida pela identidade $[x_1, x_2] = 0$.*

No próximo teorema temos uma caracterização para as variedades em termos de subálgebras, imagens homomórficas e produtos diretos.

Teorema 1.1.58 (Birkhoff) *Uma classe $\mathcal{V}$ não vazia de álgebras é uma variedade se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $A \in \mathcal{V}$ e $B \rightarrow A$ é um monomorfismo, então $B \in \mathcal{V}$;*
2. *Se $A \in \mathcal{V}$ e $A \rightarrow B$ é um epimorfismo, então $B \in \mathcal{V}$;*
3. *Se $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família de álgebras e $A_\gamma \in \mathcal{V}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{V}$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [9]. Também podemos definir um T -ideal de uma variedade, ou seja, o conjunto das identidades satisfeitas por todas as álgebras de uma variedade $\mathcal{V}$ é um T -ideal de $K\langle X \rangle$ e é denotado por $Id(\mathcal{V})$.

Definição 1.1.59 *Seja Y um conjunto, a álgebra $F_Y(\mathcal{V})$ na variedade $\mathcal{V}$ é chamada de relativamente livre em $\mathcal{V}$ se é livre na classe $\mathcal{V}$ e livremente gerada por Y .*

Proposição 1.1.60 *Seja $\mathcal{V}$ a variedade definida por $\{f_i \mid i \in I\}$, seja Y qualquer conjunto e J o ideal de $K\langle Y \rangle$ gerado por*

$$\{f_i(g_1, \dots, g_n) \mid g_i \in K\langle X \rangle, i \in I\}.$$

Então a álgebra $F = K\langle Y \rangle / J$ é uma álgebra relativamente livre na variedade $\mathcal{V}$ com o conjunto gerador livre $\bar{Y} = \{y + J \mid y \in Y\}$.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada na nossa referência [12]. Além da teoria citada acima, para mostrar que $Id(U_2(K)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$, precisamos dos polinômios conhecidos como polinômios próprios, mas, iremos apenas apresentar a sua definição para o caso ordinário, e o restante dos resultados seguem do caso geral, para álgebras graduadas, descritos na Subseção 1.2.6.

Definição 1.1.61 *O polinômio $f \in K\langle X \rangle$ é chamado de polinômio próprio, se for uma combinação linear de produto de comutadores*

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum \alpha_{i_1, \dots, j} [x_{i_1}, \dots, x_{i_p}] \dots [x_{j_1}, \dots, x_{j_q}], \quad \alpha_{i_1, \dots, j} \in K.$$

Assumimos que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores. Denotamos por B o conjunto de todos os polinômios próprios em $K\langle X \rangle$.

Proposição 1.1.62 *Seja K um corpo infinito, se considerarmos A como sendo a álgebra das matrizes 2×2 triangulares superiores teremos que*

$$Id(A) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle.$$

Prova. Iremos apresentar aqui a demonstração desse resultado que pode ser encontrada na referência [12].

De fato, pelo Exemplo 1.1.43, temos que o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade para a álgebra $U_2(K)$, logo o ideal $\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle \subset Id(U_2(K))$. Agora resta mostrar que todas as identidades polinomiais para $U_2(K)$ seguem da identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.

Seja $\mathcal{V}$ a variedade definida pelo polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$, pela Proposição 1.1.60, temos que $K\langle X \rangle / \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$ é a álgebra relativamente livre na variedade $\mathcal{V}$. Trabalharemos módulo o T-ideal $Id(\mathcal{V}) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$.

Note que, pela Proposição 1.1.50, o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é identidade para a álgebra $K\langle X \rangle / \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$. Agora, consideremos $B(\mathcal{V})$ o espaço gerado por 1 e por todos os comutadores

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}], \quad n \geq 2.$$

Usando a identidade

$$\begin{aligned} 0 &= [x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_3, x_4][x_1, x_2] = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \\ &= [x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3], \end{aligned}$$

vemos em $K\langle X \rangle / \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$

$$[y_1, y_2, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}] = [y_1, y_2, x_1, \dots, x_p], \quad \sigma \in S_p,$$

e com isso podemos ordenar os índices a partir do terceiro elemento de cada comutador.

Além disso, a identidade de Jacobi e a anticomutatividade permitem alterar os lugares das variáveis nas três primeiras posições:

$$[x_1, x_2] = -[x_2, x_1], \quad [x_3, x_2, x_1] = [x_3, x_1, x_2] - [x_2, x_1, x_3].$$

Desta forma, podemos assumir que $B(\mathcal{V})$ é gerado por 1 e

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_n}], \quad i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_n.$$

Mostraremos que esses elementos são linearmente independentes modulo o T -ideal de $U_2(K)$. Seja

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_i \alpha_i [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}] = 0, \quad i_1 > i_2 \leq \dots \leq i_n, \quad \alpha_i \in K,$$

seja uma identidade polinomial não trivial para $U_2(K)$. Fixamos i_1 maximal com a propriedade $\alpha_i \neq 0$ e considere os elementos

$$\bar{x}_{i_1} = e_{12} + \xi_{i_1} e_{22}, \quad \bar{x}_j = \xi_j e_{22}, \quad j \neq i_1, \quad \xi_{i_1}, \xi_j \in K.$$

Cálculos concretos mostram que

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = \left(\sum_{i_1 \text{ fixo}} \alpha_i \xi_{i_2} \dots \xi_{i_n} \right) e_{12}$$

que pode ser escolhido diferente de 0 porque o corpo de base K é infinito. Portanto todos os coeficientes α_i são iguais a 0 e isso completa a prova. ■

1.1.6 Radical de Jacobson

É comum o estudo de radicais, tanto na teoria de anéis, como também para álgebras, inclusive quando não se trata de álgebras associativas. Nesta subseção escolhemos fazer uma pequena introdução ao Radical de Jacobson. Esse nome é devido ao matemático Nathan Jacobson, considerado um dos principais algebristas da sua geração, fazendo estudos com polinômios não comutativos, como a sua dissertação intitulada "Noncommutative Polynomials and Cyclic Algebras", veja [19].

A escolha desse tema para esta subseção foi devido a necessidade que surge ao estudarmos o artigo "Gradings on the Algebra of Upper Triangular Matrices and Their Graded Identities", referência [24], ao qual é dedicado o terceiro capítulo desta dissertação. Para isso utilizaremos como base o livro "A First Course in Noncommutative Rings", que se encontra em [25].

Definição 1.1.63 *Sejam A uma álgebra e I um ideal próprio de A , então ele é dito ideal maximal à esquerda de A , se $I \neq A$ e não existe um ideal J à esquerda de A próprio, tal que, I esteja contido propriamente em J , ou seja, se $I \subset J \subset A$ então ou $J = A$ ou $J = I$.*

Exemplo 1.1.64 *Seja $M_2(K)$ a álgebra das matrizes 2×2 . O ideal à esquerda $I = \{a \in M_2(K); a_{ij} = 0 \text{ se } j > 1\}$ de $M_2(K)$ visto no Exemplo 1.1.15 é um ideal maximal à esquerda de $M_2(K)$.*

Seja J um ideal à esquerda de $M_2(K)$ tal que $I \subsetneq J$, consideremos $a \in J - I$, teremos 12 possibilidades para a , ao qual se dividem em 3 casos, com $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \neq 0$ sempre que aparecerem nas matrizes:

(i) 1º caso:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Se a for igual a uma dessas matrizes temos que o seu determinante será diferente de zero, e portanto, a será invertível, ou seja, $J = M_2(K)$.

(ii) 2º caso:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Se a for igual a uma dessas matrizes, por J ser um subespaço vetorial, temos que, considerando $b \in I$, tal que

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix} \text{ com } b_{11}, b_{21} \neq 0,$$

temos que $a + b \in J$, e o determinante de $a + b$ é diferente de zero, e portanto, também temos uma matriz invertível em J , obtendo novamente que $J = M_2(K)$.

(iii) 3º caso:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Se a for igual a uma dessas matrizes, escolhemos a matriz b tal que

$$b = \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I,$$

assim, $a + b$ será uma matriz do primeiro caso, e temos novamente que $J = M_2(K)$.

Logo, I é de fato um ideal maximal à esquerda de $M_2(K)$.

Definição 1.1.65 Seja A uma álgebra definimos o radical de Jacobson como sendo a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de A , e o denotaremos por $\text{rad}A$.

O teorema a seguir contém um famoso resultado devido ao algebrista Heinrich Maschke, em 1898.

Teorema 1.1.66 Se G é um grupo finito e F um corpo de característica zero, então o radical de Jacobson da álgebra de grupo FG é nulo.

Para a demonstração desse teorema acima é recomendável a referência [25]. Quando uma álgebra tem o seu radical de Jacobson nulo dizemos que ela é uma álgebra semissimples. Observe que a definição de radical de Jacobson é possível, pela garantia da existência dos ideais maximais à esquerda que segue do Lema de Zorn. Enunciaremos a seguir o lema, e em sequência demonstraremos esse resultado.

Lema 1.1.67 (Lema de Zorn) Seja S um conjunto não vazio parcialmente ordenado. Se toda cadeia em S tem uma cota superior em S , então S tem um elemento maximal.

Teorema 1.1.68 *Seja A uma álgebra, então ela tem pelo menos um ideal maximal à esquerda.*

Prova. Seja Γ o conjunto de todos os ideais à esquerda de A diferentes de A . Ordenemos Γ pela inclusão de conjuntos. Note que Γ é diferente do vazio pois $0 \in \Gamma$.

Para aplicar o Lema de Zorn devemos mostrar que toda cadeia em Γ tem uma cota superior em Γ . Seja então (I_α) ser uma cadeia de ideais em Γ , então para cada par de índices α, β nós temos $I_\alpha \subseteq I_\beta$ ou $I_\beta \subseteq I_\alpha$.

Seja $I = \cup_\alpha I_\alpha$. Então I é um ideal à esquerda de A e $1 \notin I$ já que $1 \notin I_\alpha$, para todo α . Portanto, $I \in \Gamma$, e I é uma cota superior da cadeia. Portanto, pelo Lema de Zorn Γ tem o elemento maximal, ou seja, A tem um ideal maximal à esquerda. ■

Definição 1.1.69 *Sejam M um espaço vetorial e A uma álgebra. M é um A -módulo à esquerda, se para cada $a \in A$ e a cada $m \in M$, está associado um elemento $am \in M$, de modo que as seguintes condições são satisfeitas:*

- i. $(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m$;
- ii. $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$;
- iii. $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$;
- iv. $\lambda(am) = a(\lambda m) = (\lambda a)m$;
- v. $1m = m$

para todo $m, m_1, m_2 \in M$, $a, a_1, a_2 \in A$, $\lambda, 1 \in K$.

Definição 1.1.70 *Um submódulo N de M é um subespaço vetorial de M tal que $an \in N$ para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$.*

Em seguida provamos um lema que caracteriza os elementos de $radA$ em termos dos elementos invertíveis à esquerda de A , e em termos dos módulos A simples à esquerda. Vejamos a definição de A -módulo simples.

Definição 1.1.71 *Seja M um A -módulo à esquerda. Diremos que M é um A -módulo simples se admitir apenas M e 0 como submódulos.*

Lema 1.1.72 *Para $y \in A$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $y \in radA$;
- (2) $1 - xy$ é invertível à esquerda para todo $x \in A$;
- (3) $yM = 0$ para todo A -módulo M simples à esquerda.

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que $y \in \text{rad}A$. Se para algum x , $1 - xy$ não for invertível à esquerda, então $A(1 - xy) \subsetneq A$ é um ideal à esquerda de A , portanto está contido em algum ideal J maximal à esquerda de A . Mas $1 - xy \in J$ e como $y \in \text{rad}A$ então $y \in J$, logo $xy \in J$, assim, pelo fato de J ser um subespaço vetorial temos que

$$1 - xy + xy = 1 \in J,$$

uma contradição.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponhamos que $ym \neq 0$ para algum $m \in M$. Então Aym é um submódulo à esquerda de M e diferente de 0. Logo, como M é simples devemos ter $Aym = M$. Em particular, $m = xym$ para algum $x \in A$, e $(1 - xy)$ tem inverso à esquerda por (2), assim, obtemos que $m = 0$, uma contradição.

(3) $\Rightarrow$ (1) Para qualquer ideal J maximal à esquerda, A/J é um A -módulo simples, por (3), $yA/J = 0$ o que implica que $y \in J$. Por definição, nós obtemos que $y \in \text{rad}A$. ■

Agora, vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 1.1.73 Sendo $U_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre um corpo K , então

$$\text{rad}U_n(K) = \{a \in U_n(K) \mid a \text{ tem a diagonal nula}\}.$$

Sejam $I = \{b \in U_n(K) \mid b \text{ tem diagonal nula}\}$, $b \in I$ e $a \in U_n(K)$. Do Exemplo 1.1.19 temos que ab tem a diagonal nula, portanto $\det(\text{Id} - ab) = 1$, logo $\text{Id} - ab$ é uma matriz invertível para qualquer matriz $a \in U_n(K)$, portanto, pelo Lema 1.1.72 temos que $b \in \text{rad}U_n(K)$, portanto, $I \subset \text{rad}U_n(K)$.

Agora, suponhamos que $\text{rad}U_n(K) \subsetneq I$ e $c \in \text{rad}U_n(K)$ mas $c \notin I$. Então para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ temos que $c_{ii} \neq 0$. Seja b a matriz diagonal tal que as entradas não nulas são os elementos c_{ii}^{-1} , sempre que $c_{ii} \neq 0$. Assim, $\det(\text{Id} - ab) = 0$, logo $\text{Id} - ab$ não será invertível à esquerda, o que contraria o Lema 1.1.72, portanto $\text{rad}U_n(K) \subset I$, e concluímos que $\text{rad}U_n(K) = I$.

Em seguida, faremos as próximas definições para enunciarmos o último resultado desta subseção.

Definição 1.1.74 Sejam A uma álgebra e I um ideal de A . Dizemos que I é um ideal nilpotente de índice de nilpotência n , se n é o menor natural tal que $a_1 \dots a_n = 0_A$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in I$. Utilizamos a notação $I^n = 0_A$ para indicar que o produto de quaisquer n elementos de I é zero.

Exemplo 1.1.75 O ideal $\text{rad}U_n(K) = \{a \in U_n(K) \mid a \text{ tem a diagonal nula}\}$ é nilpotente de índice de nilpotência n . É possível perceber isso no Exemplo 1.1.43.

Definição 1.1.76 Uma álgebra A é artiniana à esquerda se toda cadeia descendente de ideais à esquerda de A é estacionária.

Teorema 1.1.77 Seja A uma álgebra artiniana à esquerda. Então $\text{rad}A$ é o maior ideal à esquerda nilpotente, e também é o maior ideal à direita nilpotente.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada na referência [25].

1.2 Álgebras Graduadas por um Grupo

1.2.1 Definições Iniciais

Definição 1.2.1 *Um conjunto com uma operação associativa é chamado de semigrupo.*

Podemos fazer a definição de uma álgebra G -graduada considerando G , apenas, como sendo um semigrupo.

Definição 1.2.2 *A álgebra A é G -graduada se ela pode ser obtida através de uma decomposição,*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

ou seja, como soma direta dos subespaços vetoriais A_g , tal que, para todos $g, h \in G$, $A_g A_h \subset A_{gh}$.

De agora em diante, consideraremos apenas um caso específico de semigrupo, quando G é um grupo. Vejamos a próxima observação e em seguida exemplos de graduações.

Observação 1.2.3 *Destacamos que:*

(i) *A partir da definição é claro que qualquer $a \in A$ pode ser escrito unicamente como uma soma finita*

$$a = \sum_{g \in G} a_g ; a_g \in A_g.$$

(ii) *Os subespaços A_g são chamados de componentes homogêneas de A e diremos que o elemento a é homogêneo se $a \in \cup_{g \in G} A_g$. Quando a for diferente do elemento nulo da álgebra A , existe um único $g \in G$ tal que $a \in A_g$ pois a soma na graduação de A é direta. Assim, podemos definir o conceito de grau da seguinte forma, $\deg(a) = g$ se $a \in A_g$. Perceba que para o elemento nulo não faz sentido essa definição, pois ele sempre pertence a A_g para todo $g \in G$.*

(iii) *Um subespaço $B \subseteq A$ é graduado se $B = \bigoplus_{g \in G} (B \cap A_g)$. Em outras palavras, B é graduado se, para qualquer $b \in B$, $b = \sum_{g \in G} b_g$ temos que $b_g \in B$ para todo $g \in G$. De modo análogo, definimos subálgebras graduadas, ideais graduados, etc.*

(iv) *Note que se H é um subgrupo de G , então $A' = \bigoplus_{h \in H} A_h$ é uma subálgebra de A , e, além disso, mostraremos que é graduada. De fato, se g não pertence a H , então, $A_g \cap A' = \{0\}$ e se g pertence a H , então, $A_g \cap A' = A_g$. Portanto, $A' = \bigoplus_{g \in G} (A' \cap A_g)$. Em particular, se e é a unidade de G , A_e é uma subálgebra de A , pois $\{e\}$ é subgrupo de G .*

(v) *Quando o grupo G é o trivial, o conceito de álgebra G -graduada reduz-se ao conceito de álgebra ordinária.*

Exemplo 1.2.4 Qualquer álgebra A pode ser graduada por qualquer grupo G da seguinte forma, $A = A_e$ e $A_g = 0$ para qualquer $g \neq e$. Essa é a chamada graduação trivial. Note que dessa forma A é igual a soma dos subespaços A_g para todo $g \in G$, e além disso, é soma direta. Também temos que $A_g A_h \subset A_{gh}$ pois se $g = h = e$ temos $A_g A_h = A_e A_e = A$ por outro lado $A_{gh} = A_{ee} = A_e = A$, e se $g \neq e$ ou $h \neq e$ temos que $A_g A_h = 0$, logo $A_g A_h \subset A_{gh}$ para quaisquer $g, h \in G$.

Exemplo 1.2.5 Seja $A = M_2(K)$ com A_0 e A_1 definidos da seguinte forma,

$$A_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}; a_{11}, a_{22} \in K \right\}, \quad A_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}; a_{12}, a_{21} \in K \right\}$$

obtemos que A é $\mathbb{Z}_2$ -graduada.

De fato, seja $a \in A$, temos que,

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

onde, nessa soma, a primeira matriz pertence a A_0 e a segunda matriz pertence a A_1 , ou seja, $A \subset A_0 + A_1$. Claramente temos a inclusão contrária. Logo, temos a igualdade que precisamos, $A = A_0 + A_1$. O próximo passo, é verificarmos se essa soma é direta, para isso, verifiquemos que $A_0 \cap A_1 = \{0\}$. Seja $b = (b_{ij}), i, j \in \{1, 2\}$, tal que, $b \in A_0 \cap A_1$, então temos que $b \in A_0$, logo, $b_{12} = b_{21} = 0$, também temos que $b \in A_1$, logo, $b_{11} = b_{22} = 0$, portanto, concluímos que b é identicamente nula.

Agora, para finalizarmos o processo de verificação de que a decomposição acima é uma graduação, note que é possível verificar diretamente a inclusão $A_g A_h \subset A_{gh}$. Vejamos para o caso, $g = h = 1$, temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a'_{12} \\ a'_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}a'_{21} & 0 \\ 0 & a_{21}a'_{12} \end{bmatrix} \in A_0$$

portanto, $A_1 A_1 \subset A_{1+1} = A_0$.

A próxima proposição traz uma maneira de verificarmos se uma decomposição de uma álgebra é uma graduação.

Proposição 1.2.6 Sejam G um conjunto não vazio e A um espaço vetorial. Sejam β_g , onde $g \in G$, subconjuntos de A tais que $\cup_{g \in G} \beta_g$ é uma base de A e $\beta_g \cap \beta_h = \emptyset$ sempre que $g \neq h$. Então $A = \oplus_{g \in G} A_g$, onde A_g é o subespaço de A gerado por β_g . Além disso, se G é um grupo e $b_g b_h \in A_{gh}$ sempre que $b_g \in \beta_g$ e $b_h \in \beta_h$ então a decomposição $A = \oplus_{g \in G} A_g$ é uma G -graduação em A .

Prova. Inicialmente, provaremos que A é a soma dos subespaços A_g . Consideremos $\cup_{g \in G} \beta_g$ a base de A . Seja $a \in A$, podemos escrever esse elemento como uma combinação linear dos elementos dessa base. Sem perda de generalidade suponhamos que

$$a = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n$$

onde $c_i \in \beta_{g_i}$ e $\lambda_i \in K$. Então $\lambda_i c_i \in A_{g_i}$, assim teremos que a pertence a soma dos subespaços A_g , portanto A também estará contido na soma desses subespaços. Por outro lado, temos que a soma dos subespaços A_g está contida em A , logo A é a soma dos subespaços A_g .

Agora mostraremos que essa soma dos subespaços é direta. Suponhamos que exista um elemento $a \in A_h \cap \bigoplus_{g \in G - \{h\}} A_g$, então podemos escrever a como combinação linear em relação a duas perspectivas, ou seja, para $a \in A_h$ podemos escrever a como combinação linear de elementos de β_h , considerando $\alpha_i \in K$ e $b_i \in \beta_h$ temos,

$$a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n,$$

para $a \in \bigoplus_{g \in G - \{h\}} A_g$, considerando $\psi_j \in K$, e $d_j \in \beta_g$, com $g \neq h$, temos

$$a = \psi_1 d_1 + \psi_2 d_2 + \cdots + \psi_k d_k.$$

Deste modo concluímos que,

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n - \psi_1 d_1 - \psi_2 d_2 - \cdots - \psi_k d_k = 0$$

note que, nos conjuntos $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ e $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ os elementos são dois a dois distintos, e como $\beta_g \cap \beta_h = \emptyset$ sempre que $g \neq h$, também temos que os b_i são distintos dos d_j , dessa forma, a soma acima será composta por elementos da base de A dois a dois distintos, portanto cada escalar em K terá que ser nulo, e assim, concluímos que $a = 0$.

Para concluirmos mostremos a seguinte inclusão $A_g A_h \subset A_{gh}$ para todo $g, h \in G$. Seja $a_g \in A_g$ e $a_h \in A_h$, então existem elementos $b'_i \in \beta_g$, $d'_j \in \beta_h$ e escalares $\alpha'_i, \psi'_j \in K$, tais que,

$$a_g = \alpha'_1 b'_1 + \alpha'_2 b'_2 + \cdots + \alpha'_n b'_n$$

$$a_h = \psi'_1 d'_1 + \psi'_2 d'_2 + \cdots + \psi'_k d'_k$$

$$a_g a_h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \alpha'_i \psi'_j (b'_i d'_j)$$

com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$. Se $b_g b_h \in A_{gh}$ sempre que $b_g \in \beta_g$ e $b_h \in \beta_h$, então teremos que cada parcela da soma acima pertence a A_{gh} , assim, $a_g a_h \in A_{gh}$, portanto $A_g A_h \subset A_{gh}$. ■

Observe aplicações dessa proposição nos próximos exemplos, veja como ela é útil para provar que certas decomposições são graduações para álgebras.

Exemplo 1.2.7 A álgebra associativa livre $A = K\langle X \rangle$ tem a $\mathbb{Z}$ -gradação natural dada pela seguinte forma $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$, onde $A_n = 0$ se $n < 0$, e A_n é o subespaço vetorial que tem como base todos os monômios de grau n , no caso em que $n \geq 0$. Consideremos β_n o conjunto formado pelos elementos da base de A_n . É claro que $\beta_n \cap \beta_m = \emptyset$, também temos que, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n$ é uma base de A . Como o grau do produto de dois polinômios não nulos em $K\langle X \rangle$ é a soma dos graus de cada parcela temos que se $b \in \beta_n$ e $c \in \beta_m$, então $bc \in A_{n+h}$. Pela Proposição 1.2.6 a decomposição acima é uma $\mathbb{Z}$ -gradação.

Exemplo 1.2.8 A álgebra de grupo $A = FG$ é naturalmente graduada por G , tomando os subespaços da seguinte forma, $A_g = \text{Span}_F(g)$. Observe que A_g tem como base $\beta_g = \{g\}$ e que $\beta_g \cap \beta_h = \emptyset$ sempre que $g \neq h$, além disso $\cup_{g \in G} \beta_g = G$ que é a base de A . Sendo G um grupo, e com $A_{gh} = \text{Span}_F(gh)$, logo, dado $b_g \in \beta_g$, $b_g = g$ e $b_h \in \beta_h$, $b_h = h$ então $b_g b_h \in A_{gh}$. Portanto, podemos aplicar a Proposição 1.2.6 e que com isso obtemos que de fato $A = \oplus_{g \in G} A_g$ é uma G -graduação.

Exemplo 1.2.9 Sejam K um corpo com $\text{char} K \neq 2$, $A = M_2(K)$ e seja $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ sendo o produto direto de dois grupos cíclicos de ordem dois. Então defina

$$A_e = \text{Span}_F \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad A_a = \text{Span}_F \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$A_b = \text{Span}_F \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad A_{ab} = \text{Span}_F \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vamos mostrar que $A = \oplus_{g \in G} A_g$ e $A_g A_h = A_{gh}$, para todo $g, h \in G$.

Sejam

$$\beta_e = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \beta_a = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}, \beta_b = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ e } \beta_{ab} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

note que as matrizes desses subespaços são distintas entre si, logo teremos que $\beta_g \cap \beta_h = \emptyset$ sempre que $g \neq h$, com $g, h \in G$. Além disso, são linearmente independentes e geram $M_2(K)$, portanto $\cup_{g \in G} \beta_g$ é uma base para $M_2(K)$. Assim, pela Proposição 1.2.6 temos que $M_2(K) = \oplus_{g \in G} A_g$.

Agora, sejam as matrizes m_e, m_a, m_b, m_{ab} as geradoras dos respectivos subespaços $\beta_e, \beta_a, \beta_b, \beta_{ab}$. Analisando, obtemos as seguintes relações,

$$m_{ab} = m_a m_b, \quad m_a m_b = -m_b m_a, \quad m_a^2 = m_b^2 = m_e,$$

daí segue que $m_g m_h \in A_{gh}$ para quaisquer $g, h \in G$. Portanto, utilizando novamente a Proposição 1.2.6, obtemos que a decomposição $M_2(K) = \oplus_{g \in G} A_g$ é uma G -graduação em $M_2(K)$. Além disso, observe que, pelas igualdades acima temos que $A_g A_h = A_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$.

Observação 1.2.10 Se $\text{char} K = 2$ temos que $1 = -1$, então

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in A_e, A_a,$$

portanto, a soma dos subespaços acima não seria direta.

Exemplo 1.2.11 Sejam $A = M_n(K)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre K e G um grupo arbitrário. Dada qualquer n -upla $(g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n$, podemos definir a G -gradação de A da seguinte forma,

$$A_g = \text{Span}_K\{e_{ij} | g_i^{-1}g_j = g\}$$

onde e_{ij} são elementos da base canônica de A . Observe que A_g é o subespaço que tem como base $\beta_g = \{e_{ij} | g_i^{-1}g_j = g\}$ e que $\beta_g \cap \beta_h = \emptyset$ sempre que $g \neq h$, além disso $\cup_{g \in G} \beta_g$ é uma base de A . Se $e_{ij} \in \beta_g$ então $g_i^{-1}g_j = g$, e se $e_{kl} \in \beta_h$ então $g_k^{-1}g_l = h$, ao calcularmos $e_{ij}e_{kl}$, obtemos 0 como resultado sempre que $j \neq k$, caso contrário, obtemos e_{il} . Observe que em ambos os casos temos que estão contidos em A_{gh} , pois 0 pertence a todos os subespaços, e sendo $j = k$ temos $gh = g_i^{-1}g_k g_k^{-1}g_l = g_i^{-1}g_l$, ou seja, $e_{il} \in A_{gh}$. Portanto, podemos aplicar o resultado da Proposição 1.2.6, sendo de fato $A = \oplus_{g \in G} A_g$ uma G -gradação. Essa graduação é conhecida na literatura como graduação elementar de $M_n(K)$.

Exemplo 1.2.12 Seja E a álgebra de Grassmann (Exemplo 1.1.36), e sejam E_0 e E_1 os subespaços vetoriais da álgebra E gerados pelos conjuntos $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_m} | m \text{ par}\}$, e $\{e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k} | k \text{ ímpar}\}$ respectivamente. Vamos mostrar agora que $E = E_0 \oplus E_1$ é uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação. Se considerarmos $\beta_0 = \{1, e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_m} | m \text{ par}\}$ e $\beta_1 = \{e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k} | k \text{ ímpar}\}$ temos que $\beta_0 \cap \beta_1 = \emptyset$, e além disso, $\beta_0 \cup \beta_1$ é uma base para E . É imediato, que para quaisquer $g, h \in \mathbb{Z}_2$ e quaisquer $b_g \in \beta_g$ e $b_h \in \beta_h$ temos que $b_g b_h \in E_{g+h}$. E assim, pela Proposição 1.2.6 mostramos a que esta decomposição é de fato uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação.

O próximo exemplo contém a $\mathbb{Z}_n$ -gradação para a álgebra das matrizes triangulares superiores que usaremos no Capítulo 2.

Exemplo 1.2.13 A álgebra $U_n(K)$ das matrizes $n \times n$ triangulares superiores tem uma $\mathbb{Z}_n$ -gradação natural dada por, $U_n(K) = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_{n-1}$, onde

$$V_i = \{a_{1,i+1}e_{1,i+1} + a_{2,i+2}e_{2,i+2} + \dots + a_{n-i,n}e_{n-i,n} \mid a_{r,s} \in K\}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Mostremos que de fato, essa decomposição citada acima é uma $\mathbb{Z}_n$ -gradação. Inicialmente, provaremos que $U_n(K)$ é a soma dos subespaços $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$. Seja a matriz elementar e_{ij} com $j \geq i$ temos $e_{ij} \in V_k$, onde $k = j - i$, então os elementos da base de $U_n(K)$ pertencem a algum V_k . Portanto $U_n(K) = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$. Agora mostraremos que essa soma dos subespaços é direta. Se considerarmos a seguinte soma, na qual cada elemento v_i pertence a V_i , e 0 é o elemento nulo de $U_n(K)$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-2} + v_n = 0,$$

temos como resultado a seguinte igualdade,

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde os $a_{r,s}$, com $1 \leq r \leq s \leq n$, são os escalares tais que

$$v_i = a_{1,i+1}e_{1,i+1} + a_{2,i+2}e_{2,i+2} + \cdots + a_{n-i,n}e_{n-i,n},$$

$i = 0, \dots, n-1$. Assim, todos os $a_{r,s}$ na primeira matriz são elementos nulos, portanto,

$$v_0 = v_1 = v_3 = \cdots = v_{n-2} = v_n = 0.$$

Para concluirmos mostremos a seguinte inclusão $V_i V_j \subset V_{i+j}$, onde i e j pertencem ao conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ e a soma $i+j$ é modulo n . Note que $e_{ij} \in V_k$ se, e somente se $j-i = k$, e além disso, para provar a inclusão basta considerarmos os elementos da base. Seja $e_{lw'} \in V_i$ e $e_{wm} \in V_j$, se $w' \neq w$ então $e_{lw'}e_{wm} = 0$, e assim, $e_{lw'}e_{wm} \in V_{i+j}$. Se $w' = w$ então $e_{lw'}e_{wm} = e_{lm}$, como $e_{lw} \in V_i$ temos $w-l = i$ e $e_{wm} \in V_j$ temos $m-w = k$, logo, $m-l = i+j$, e assim, $e_{lm} \in V_{i+j}$. Portanto, $V_i V_j \subset V_{i+j}$.

Observação 1.2.14 Para essa graduação ainda é possível notar que:

1. O subespaço V_0 consiste de todas as matrizes diagonais.

2. $V_i V_j = 0$ se $i+j > n$.

Seja $e_{rs} \in V_i$ temos que $s-r = i$, assim, $s = r+i$ e $e_{tu} \in V_j$ temos que $u-t = j$, resultando que, $u = j+t$. Se $s = t$ temos $e_{rs}e_{tu} = e_{ru}$, mas $u = j+s = j+r+i$, como $i+j > n$, temos que $u > n$, absurdo, pois $u \in \{1, 2, \dots, n\}$. Então devemos ter $s \neq t$, e assim, $e_{rs}e_{tu} = 0$. Portanto, $V_i V_j = 0$ se $i+j > n$.

Para finalizarmos essa subseção veja a próxima proposição e um exemplo.

Proposição 1.2.15 Sejam A uma álgebra G -graduada e 1_A a sua unidade, então 1_A pertence a A_e , com e sendo o elemento neutro de G .

Prova. De fato, considerando a G -graduação de A , temos que, como $1_A \in A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, então teremos que

$$1_A = a_e + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$$

com $a_i \in A_{g_i}$ para quaisquer $g_i \in G$, além disso esses elementos do grupo são dois a dois distintos. Agora, consideremos $h \in G$ e $a_h \in A_h$, obtemos que

$$a_h 1_A = a_h(a_e + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n})$$

$$a_h = a_h a_e + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}.$$

Assim, temos que o $\deg(a_h) = h$, como $\deg(a_h a_{g_i}) = h g_i$, segue que se $h g_i \neq h$ então $a_h a_{g_i} = 0$, assim, resta apenas um caso para $h g_i = h$, quando $g_i = e$. Logo, $a_h = a_h a_e$, de modo análogo $a_e a_h = a_h$, portanto, $a_e a = a a_e = a$ e daí segue que $1_A = a_e$, ou seja, $1_A \in A_e$. ■

Exemplo 1.2.16 Sejam $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma G -graduação e $a \in A$ um elemento homogêneo, com $a \neq 0$. Se a é idempotente, isto é, $a^2 = a$, tem-se que $a \in A_e$.

Note que, como a é um elemento homogêneo então temos que existe $g \in G$ tal que $a \in A_g$, assim, para a^2 teremos que $a^2 \in A_{g^2}$, mas como $a^2 = a$, logo $g^2 = g$, e portanto, $g = e$.

1.2.2 Identidades Polinomiais Graduadas

Primeiramente, para definirmos o conceito de identidades polinomiais G -graduadas faremos a construção da álgebra livre $K\langle X \rangle$ G -graduada.

Definição 1.2.17 *Seja $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Considere $X = \cup_{g \in G} X_g$ a álgebra livre $K\langle X \rangle$, na qual,*

$$\deg(1) = e \text{ e } \deg(x_1 x_2 \dots x_m) = \deg(x_1) \deg(x_2) \dots \deg(x_m)$$

sendo $\deg(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$, assim, para m um monômio de $K\langle X \rangle$, dizemos que $\deg(m)$ é o G -grau de m . Agora, note que, seja $g \in G$, se considerarmos

$$K\langle X \rangle_g = \langle m \mid m \text{ é o monômio de } K\langle X \rangle, \deg(m) = g \rangle$$

obtemos que

$$K\langle X \rangle = \oplus_{g \in G} K\langle X \rangle_g \text{ e } K\langle X \rangle_g K\langle X \rangle_h \subseteq K\langle X \rangle_{g+h}, \forall g, h \in G.$$

Assim, $K\langle X \rangle$ é uma álgebra G -graduada, chamada de álgebra livre G -graduada.

De modo semelhante ao que temos em álgebras, temos que para toda álgebra G -graduada A , toda função $\alpha : \cup_{g \in G} X_g \rightarrow A$ tal que $\alpha(X_g) \subseteq A_g$, para todo $g \in G$ pode ser estendida a um único homomorfismo de álgebras graduadas (Definição 1.2.32).

Definição 1.2.18 *Seja A uma álgebra G -graduada dizemos que um polinômio*

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$$

é uma identidade polinomial G -graduada para A se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\deg(x_i)}$ com $i = 1, \dots, n$.

Em outras palavras, f torna-se zero quando substituirmos suas variáveis por elementos homogêneos de A com o mesmo grau que as respectivas variáveis. É importante notar que, quando estamos trabalhando com identidades graduadas para A , a álgebra $K\langle X \rangle$ também tem sua graduação através do mesmo grupo de A . Agora vejamos alguns exemplos de identidades graduadas.

Exemplo 1.2.19 *Seja $A = \sum_{g \in G} \bigoplus A_g$ uma álgebra G -graduada com a graduação trivial, definida como, $A_e = A$ e $A_g = 0$ para qualquer $g \neq e$. Se $\deg(x_1) \in G - \{e\}$, então o polinômio x_1 é uma identidade G -graduada de A , pois, com $\deg(x_1) \in G - \{e\}$ teremos que $A_{\deg(x_1)} = 0$, assim $a_1 = 0$ sempre que $a_1 \in A_{\deg(x_1)}$.*

Exemplo 1.2.20 *Seja $A = M_2(K)$ com a $\mathbb{Z}_2$ -graduação do Exemplo 1.2.5,*

$$A_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}; a, d \in K \right\} \quad A_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}; b, c \in K \right\}.$$

Então $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$ -graduada de $M_2(K)$ se

$$\deg(x_1) = \deg(x_2) = 0$$

.

Exemplo 1.2.21 *Seja E a álgebra de Grassmann com a $\mathbb{Z}_2$ -gradação do Exemplo 1.2.12. Como $ab = -ba$ para quaisquer elementos $a, b \in E_1$, temos que $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2x_1 \in K\langle X \rangle$ onde $K\langle X \rangle$ é a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$ -graduada, com $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 1$, é uma identidade $\mathbb{Z}_2$ -graduada de G .*

Semelhante ao caso ordinário, também existe a necessidade e a preocupação de termos conhecimento sobre o conjunto das identidades graduadas de uma álgebra. Veja a sua definição e alguns resultados.

Definição 1.2.22 *Seja A uma álgebra G -graduada, definimos o conjunto*

$$Id^{gr}(A) = \{f \in K\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

das identidades polinomiais G -graduadas de A .

Assim como no caso ordinário, temos que dada uma álgebra A o conjunto de todas as suas identidades polinomiais G -graduadas é um ideal de $K\langle X \rangle$.

Exemplo 1.2.23 *Seja $K\langle X \rangle$ com uma G -gradação, então o ideal $Id^{gr}(A)$ é G -graduado.*

Pelo item (iii) da Observação 1.2.3, temos que mostrar que dada uma identidade $f(x_1, \dots, x_n) \in Id^{gr}(A)$ tal que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{g \in G} f_g(x_1, \dots, x_n)$$

então $f_g(x_1, \dots, x_n) \in Id^{gr}(A)$. Desse modo, seja $f(x_1, \dots, x_n) \in Id^{gr}$, temos que, para os elementos $a_1, \dots, a_n \in A$ tal que $a_i \in A_{\deg(x_i)}$,

$$0 = f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{g \in G} f_g(a_1, \dots, a_n),$$

como $f_g(a_1, \dots, a_n) \in A_g$ e a álgebra A é soma direta dos subespaços A_g obtemos que $f_g(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$, tais que, $a_i \in A_{\deg(x_i)}$. Assim, concluímos que $f_g \in Id^{gr}(A)$, e portanto, $Id^{gr}(A)$ é G -graduado.

A G -gradação de um ideal é importante para que possamos ter uma G -gradação na álgebra quociente, vejamos agora como é possível obter isso, através da próxima proposição.

Proposição 1.2.24 *Se I é um ideal G -graduado de uma álgebra G -graduada A então A/I é uma álgebra G -graduada, considerando $(A/I)_g = \{a + I \mid a \in A_g\}$.*

Prova. Primeiramente vejamos que $A/I = \sum_{g \in G} (A/I)_g$. Dado um elemento em A/I temos que ele é da forma $a + I$, com $a \in A$, como $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é graduada, então obtemos que,

$$a + I = \left(\sum_{g \in G} a_g \right) + I = \sum_{g \in G} (a_g + I)$$

assim, $a + I \in \sum_{g \in G} (A/I)_g$. Agora, verifiquemos que essa soma é direta. Suponhamos que $\sum_{g \in G} (a_g + I) = 0$, assim, $\sum_{g \in G} a_g \in I$, com I sendo G -graduado, então, $a_g \in I$,

portanto, $a_g + I = 0$, logo, podemos concluir que, $A/I = \bigoplus_{g \in G} (A/I)_g$.

Resta mostrarmos que $(A/I)_g(A/I)_g \subset (A/I)_{gh}$. Dado um elemento $a_g + I \in (A/I)_g$ e um elemento $a_h + I \in (A/I)_h$, então temos que,

$$(a_g + I)(a_h + I) = (a_g a_h) + I$$

como A é graduada, então temos que $a_g a_h \in A_{gh}$, logo, $(a_g a_h) + I \in (A/I)_{gh}$. ■

Definição 1.2.25 *Seja $K\langle X \rangle$ a álgebra livre G -graduada. Um ideal I de $K\langle X \rangle$ é dito ser um T_G -ideal se $\Psi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G -graduado Ψ de $K\langle X \rangle$.*

Análogo ao caso ordinário, temos que o ideal $Id^{gr}(A)$ é um T_G -ideal, e assim como vimos no caso ordinário, existe uma noção de base para as identidades polinomiais graduadas.

Definição 1.2.26 *Dado um conjunto $S \subset K\langle X \rangle$, o T_G -ideal gerado por S é a interseção de todos os T_G -ideais de $K\langle X \rangle$ que contém S . Seja A uma álgebra G -graduada e $S \subset Id^{gr}(A)$ tal que $Id^{gr}(A) = \langle S \rangle^{gr}$, dizemos que S é uma base das identidades polinomiais graduadas da álgebra A . Os elementos de $\langle S \rangle^{gr}$ são chamados consequências dos polinômios de S .*

No Capítulo 2 discutiremos sobre as identidades graduadas para a álgebra $U_n(K)$ com a $\mathbb{Z}_n$ -gradação natural e iremos exibir uma base finita para o $T_{\mathbb{Z}_n}$ -ideal das identidades graduadas, já no Capítulo 3 fazemos, de modo mais geral, uma discussão sobre as identidades de $U_n(K)$ para uma graduação elementar qualquer por um grupo arbitrário. A seguir apresentamos alguns exemplos de bases para as identidades graduadas de certas álgebras.

Exemplo 1.2.27 *Sejam $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra G -graduada com a graduação trivial e S um subconjunto de $K\langle X \rangle$. Se*

$$Id(A) = \langle f(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \in S \rangle$$

então

$$Id^{gr}(A) = \langle f(y_1, \dots, y_n), u \mid \deg(y_i) = e, f(x_1, \dots, x_n) \in S, \deg(u) \in G - \{e\} \rangle,$$

com u sendo uma variável qualquer, desde que $\deg(u) \in G - \{e\}$.

Exemplo 1.2.28 *Seja a álgebra $M_2(K)$ munida da $\mathbb{Z}_2$ -gradação descrita no Exemplo 1.2.5. Di Vincenzo [7] provou que $Id^{gr}(M_2(K)) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1 \rangle$, no caso em que K é um corpo de característica zero, Koshluskov e Azevedo [22], no caso em que K é um corpo infinito de característica qualquer, aqui $y_1, y_2 \in X_0$ e $z_1, z_2, z_3 \in X_1$.*

Também temos a noção de variedades para álgebras graduadas, essa noção será importante quando formos trabalhar com a álgebra graduada relativamente livre no Capítulo 2, ambas serão definidas agora.

Definição 1.2.29 Dado um conjunto não vazio $S \subseteq K\langle X \rangle$, a classe de todas as álgebras G -graduadas tais que $f \equiv 0$ para todo $f \in S$ é chamada de variedade $\mathcal{V}$ determinada por S . O conjunto das identidades satisfeitas por todas as álgebras de uma variedade $\mathcal{V}$ é um T_G -ideal de $K\langle X \rangle$ e é denotado por $Id^{gr}(\mathcal{V})$. Se $\mathcal{V}$ é uma variedade e A é uma álgebra G -graduada tal que $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(\mathcal{V})$ dizemos que $\mathcal{V}$ é a variedade gerada por A , denotada por $\mathcal{V}(A)$. Seja Y um conjunto, a álgebra $F_Y(\mathcal{V})$ na variedade $\mathcal{V}$ é chamada de álgebra graduada relativamente livre em $\mathcal{V}$ se é livre na classe $\mathcal{V}$ e livremente gerada por Y .

A seguir, veja alguns resultados interessantes de $Id^{gr}(A)$.

Proposição 1.2.30 Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G , e seja $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ uma subálgebra G -graduada de A . Então

$$Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B).$$

Prova. Como B é uma subálgebra G -graduada de A , temos

$$B_g \subseteq A_g \text{ para todo } g \in G.$$

Considere um polinômio $f(x_{g_1 i_1}, x_{g_2 i_2}, \dots, x_{g_r i_r}) \in Id^{gr}(A)$. Temos que

$$f(b_{g_1 i_1}, b_{g_2 i_2}, \dots, b_{g_r i_r}) = 0$$

para todo $b_{g_1 i_1} \in B_{g_1}, \dots, b_{g_r i_r} \in B_{g_r}$, pois $b_{g_1 i_1} \in A_{g_1}, \dots, b_{g_r i_r} \in A_{g_r}$. Portanto $f(x_{g_1 i_1}, x_{g_2 i_2}, \dots, x_{g_r i_r}) \in Id^{gr}(B)$. ■

Proposição 1.2.31 Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G -graduação tais que $Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B)$, então $Id(A) \subseteq Id(B)$. Em particular, se $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(B)$, então $Id(A) = Id(B)$.

Prova. Note que da Observação 1.2.3, segue que qualquer $b \in B$ pode ser escrito unicamente como uma soma finita

$$b = \sum_{g \in G} b_g ; b_g \in B_g.$$

Agora, consideremos a álgebra livre $K\langle X \rangle$, com $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto enumerável e mostremos que dado $f(x_1, \dots, x_n) \in Id(A)$, então $f \in Id(B)$. Sejam $b_1, \dots, b_n$ elementos de B , escrevemos $b_i = \sum_{g \in G'} b_{ig}$. Para cada $i = 1, \dots, n$, escolhemos $x_{ig} \in X_g$ tal que $g \in G'$, sendo G' o conjunto dos elementos g de G tais que b_{ig} é diferente de zero para algum i , e definimos o polinômio

$$h = f\left(\sum_{g \in G'} x_{1g}, \dots, \sum_{g \in G'} x_{ng}\right).$$

Substituímos x_{ig} por $a_{ig} \in A_g$ no polinômio h , e sendo $\bar{h}$ o resultado temos que

$$\bar{h} = f\left(\sum_{g \in G'} a_{1g}, \dots, \sum_{g \in G'} a_{ng}\right) = 0,$$

e portanto, $h \in Id^{gr}(A)$. Logo, $h \in Id^{gr}(B)$. Fazendo então as substituições $x_{ig} = b_{ig}$, para $i = 1, \dots, n$ e $g \in G'$, temos

$$0 = f_1\left(\sum_{g \in G'} b_{1g}, \dots, \sum_{g \in G'} b_{ng}\right) = f(b_1, \dots, b_n).$$

Portanto, $f(b_1, \dots, b_n) \in Id(B)$. Se $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(B)$, então $Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B)$ e $Id^{gr}(B) \subseteq Id^{gr}(A)$, logo temos que $Id(A) = Id(B)$. ■

1.2.3 Homomorfismos de Álgebras Graduadas

Definição 1.2.32 *Sejam A e B álgebras G -graduadas. Uma aplicação $\Psi : A \rightarrow B$ é dita ser um homomorfismo de álgebras graduadas, se Ψ é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $\Psi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$. De modo análogo, definimos endomorfismos, automorfismos e isomorfismos G -graduados.*

Exemplo 1.2.33 *Consideremos na álgebra $M_3(K)$ as $\mathbb{Z}_2$ -gradações $M_3(K) = A_0 + A_1$, onde*

$$A_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{bmatrix} \mid a, c, e, g, i \in K \right\} \text{ e } A_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{bmatrix} \mid b, d, f, h \in K \right\}$$

e $M_3(K) = B_0 + B_1$, onde,

$$B_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \mid a, b, d, e, i \in K \right\} \text{ e } B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ g & h & 0 \end{bmatrix} \mid c, f, g, h \in K \right\}.$$

Temos que a aplicação $\Psi : M_3(K) \rightarrow M_3(K)$ definida por

$$\Psi \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_7 & x_9 & x_8 \\ x_4 & x_6 & x_5 \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo de álgebras $\mathbb{Z}_2$ -graduado. Basta vermos que

$$\begin{aligned} & \Psi \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & y_5 & y_6 \\ y_7 & y_8 & y_9 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} x_1y_1 + x_2y_4 + x_3y_7 & x_1y_3 + x_2y_6 + x_3y_9 & x_1y_2 + x_2y_5 + x_3y_8 \\ x_7y_1 + x_8y_4 + x_9y_7 & x_7y_3 + x_8y_6 + x_9y_9 & x_7y_2 + x_8y_5 + x_9y_8 \\ x_4y_1 + x_5y_4 + x_6y_7 & x_4y_3 + x_5y_6 + x_6y_9 & x_4y_2 + x_5y_5 + x_6y_8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_7 & x_9 & x_8 \\ x_4 & x_6 & x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_3 & y_2 \\ y_7 & y_9 & y_8 \\ y_4 & y_6 & y_5 \end{bmatrix} = \Psi \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \right) \Psi \left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & y_5 & y_6 \\ y_7 & y_8 & y_9 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\Psi \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analisando o fato de $\Psi(A_i) \subset B_i$, para $i = 0, 1$, temos:

$$\Psi \left(\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ g & i & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \in B_0$$

$$\Psi \left(\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & h \\ d & f & 0 \end{bmatrix} \in B_1.$$

Exemplo 1.2.34 Seja $M_n(K)$ com a G -gradação elementar induzida pela n -upla $g = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ vista no Exemplo 1.2.11 e considere $\Psi : M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ definido por

$$\Psi(X) = CXC^{-1}$$

onde C é uma matriz invertível fixada. Se o grupo G é abeliano e a matriz C é homogênea, então Ψ é um isomorfismo de álgebras graduadas.

Claramente Ψ é uma transformação linear, além disso,

$$\Psi(X)\Psi(Y) = CXC^{-1}CYC^{-1} = CXYC^{-1} = \Psi(XY),$$

$$\Psi(Id) = CI_dC^{-1} = CC^{-1} = Id,$$

portanto Ψ é um homomorfismo de álgebras. Mostremos que é um homomorfismo de álgebras graduadas, ou seja, $\Psi(M_n(K)_g) \subseteq M_n(K)_g$. Então, seja $X_g \in M_n(K)_g$, temos que $\Psi(X_g) = CXC^{-1}$, como C é homogêneo, logo $C \in M_n(K)_h$, assim, $\deg(C) = h$, e consequentemente $C^{-1} \in M_n(K)_{h^{-1}}$, assim teremos que

$$CXC^{-1} \in A_{hgh^{-1}}$$

como G é um grupo abeliano temos que $hgh^{-1} = g$, portanto, podemos concluir que $\Psi(M_n(K)_g) \subset M_n(K)_g$, ou seja, Ψ é um homomorfismo de álgebras graduadas. Agora, sejam $X, Y \in M_n(K)$, temos que, se $\Psi(X) = \Psi(Y)$, logo $CXC^{-1} = CYC^{-1}$, assim

$$C^{-1}CXC^{-1}C = C^{-1}CYC^{-1}C \Rightarrow X = Y$$

portanto Ψ é injetiva, além disso, dado $X \in M_n(K)$ temos que $\Psi(C^{-1}XC) = X$, portanto, Ψ também é sobrejetiva. Assim, temos que Ψ é um isomorfismo de álgebras graduadas.

Exemplo 1.2.35 Para $n \geq 2$, seja R_j a subálgebra G -graduada de $U_n(K)$ consistindo em matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ com zero nas entradas da j -ésima linha e na j -ésima coluna, $1 \leq j \leq n$. Então R_j é isomorfa à álgebra graduada $U_{n-1}(K)$ com respeito à G -gradação elementar $\tilde{\epsilon}_j = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_n) \in G^{n-1}$.

Observe que as matrizes de R_j são da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & 0 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{j-1j-1} & 0 & a_{j-1j+1} & \dots & a_{j-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{j+1j+1} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

enquanto que eliminamos a j -ésima linha e a j -ésima coluna das matrizes de R_j ficamos com

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{j-1j-1} & a_{j-1j+1} & \dots & a_{j-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{j+1j+1} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Disso podemos observar que R_j é gerada pelas matrizes elementares e_{ij} com i, j variando de 1 a n , retirando as matrizes e_{ij} que tenham linha j e coluna j , ou seja, e_{ij} com $i \leq j$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n\}$. E para $U_{n-1}(K)$ a base é formada por e_{ij} com $i \leq j$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Seja τ a bijeção dos índices das matrizes da base de R_j com os índices da base de $U_{n-1}(K)$, que preserva a ordem, ou seja, se $i < j$ então $\tau(i) < \tau(j)$ e se $i = j$ então $\tau(i) = \tau(j)$. Agora, seja $\Psi : R_j \rightarrow U_{n-1}(K)$ uma transformação linear tal que $\Psi(e_{ij}) = e_{\tau(i)\tau(j)}$, como τ é uma bijeção Ψ manda a base de R_j na base de $U_{n-1}(K)$.

Por último, verifiquemos que de fato Ψ é um homomorfismo de álgebras graduadas. Veja que

$$\Psi(e_{ij})\Psi(e_{rs}) = e_{\tau(i)\tau(j)}e_{\tau(r)\tau(s)}$$

e $\tau(j) = \tau(r)$ se, e somente se, $j = r$, por τ ser uma bijeção, logo obtemos que

$$\Psi(e_{ij})\Psi(e_{rs}) = e_{\tau(i)\tau(j)}e_{\tau(r)\tau(s)} = e_{\tau(i)\tau(s)} = \Psi(e_{is}) = \Psi(e_{ij}e_{rs}).$$

Por outro lado, $\tau(j) \neq \tau(r)$ se, e somente se, $j \neq r$, por τ ser uma bijeção, logo,

$$\Psi(e_{ij})\Psi(e_{rs}) = e_{\tau(i)\tau(j)}e_{\tau(r)\tau(s)} = 0 = \Psi(0) = \Psi(e_{ij}e_{rs}).$$

Portanto, de fato, Ψ é um homomorfismo de álgebras, não é difícil mostrar que $\Psi(R)_g \subseteq U_{n-1}(K)_g$, logo, Ψ é um isomorfismo de álgebras graduadas.

A partir de agora veremos alguns resultados fundamentais de homomorfismos de álgebras graduadas.

Proposição 1.2.36 *Sejam A e B duas álgebras, com $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ G -graduada, e $\Psi : A \rightarrow B$ um isomorfismo de álgebras, então a decomposição $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$, onde $B_g = \Psi(A_g)$, é uma graduação em B . Além disso, essa é a única graduação em B tal que Ψ é um isomorfismo de álgebras graduadas.*

Prova. Observe que pela sobrejetividade de Ψ , dado um elemento $b \in B$, temos que existe $a \in A$, tal que, $b = \Psi(a)$, e utilizando a graduação de A , obtemos

$$b = \Psi(a) = \Psi(a_{g_1} + \dots + a_{g_l}) = \Psi(a_{g_1}) + \dots + \Psi(a_{g_l})$$

com $a_{g_i} \in A_{g_i}$. Assim, claramente, B está contida na soma dos B_g , e como já temos a inclusão contrária, temos que B é igual a soma dos subespaços B_g .

Agora, verifiquemos que essa soma é direta. Note que, dado $b \in B_g \cap (\sum_{h \in G \setminus \{g\}} B_h)$, temos que $b = b_g$ e $b = b_{h_1} + \dots + b_{h_k}$, no qual, $b_g \in B_g$ e $b_{h_i} \in B_{h_i}$. Da primeira igualdade segue que

$$b = b_g = \Psi(a_g) \text{ com } a_g \in A_g,$$

e da segunda igualdade resulta que

$$b = b_{h_1} + \dots + b_{h_k} = \Psi(a_{h_1}) + \dots + \Psi(a_{h_k}) = \Psi(a_{h_1} + \dots + a_{h_k}) \text{ com } a_{h_i} \in A_{h_i},$$

logo, obtemos que, $\Psi(a_g) = \Psi(a_{h_1} + \dots + a_{h_k})$, como Ψ é injetiva, temos que

$$a_g = a_{h_1} + \dots + a_{h_k}$$

ou seja, $a_g \in A_g \cap (\sum_{h \in G \setminus \{g\}} A_h)$. Mas, com A sendo G -graduada, temos que essa interseção é igual a zero, e portanto $a_g = 0$, conseqüentemente $b = 0$, assim, podemos concluir que $B = \oplus_{g \in G} B_g$.

Seja $b_g \in B_g$ e $b_h \in B_h$, então temos que,

$$b_g b_h = \Psi(a_g) \Psi(a_h) = \Psi(a_g a_h) \text{ com } a_g \in A_g, a_h \in A_h,$$

como $a_g a_h \in A_{gh}$, então $b_g b_h \in B_{gh}$, portanto, $B_g B_h \subset B_{gh}$. Assim, concluimos que $B = \oplus_{g \in G} \Psi(A_g)$ é uma G -gradação.

Suponhamos que haja outra graduação para B , $B = \oplus_{g \in G} B'_g$, como Ψ é um isomorfismo de álgebras graduadas, então $B'_g = \Psi(A_g) = B_g$, daí segue a unicidade. ■

Proposição 1.2.37 *Sejam A e B duas álgebras G -graduadas isomorfas, então $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(B)$.*

Prova. Sejam $A = \oplus_{g \in G} A_g$ e $B = \oplus_{g \in G} B_g$ álgebras graduadas isomorfas, então existe um isomorfismo $\Psi : A \rightarrow B$ de álgebras graduadas, temos que $\Psi(A_g) = B_g$, para todo $g \in G$. Agora, consideremos um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in Id^{gr}(A)$. Sejam $b_i \in B_{deg(x_i)}$ e $a_i \in A_{deg(x_i)}$ tais que $\Psi(a_i) = b_i, i = 1, \dots, n$. Então temos

$$f(b_1, \dots, b_n) = f(\Psi(a_1), \dots, \Psi(a_n)) = \Psi(f(a_1, \dots, a_n)) = \Psi(0) = 0$$

portanto, $f \in Id^{gr}(B)$.

Agora, consideremos um polinômio $g(x_1, \dots, x_m) \in Id^{gr}(B)$. Como Ψ é um isomorfismo, usemos a inversa, Ψ^{-1} , e obtemos que

$$g(a_1, \dots, a_n) = g(\Psi^{-1}(b_1), \dots, \Psi^{-1}(b_n)) = \Psi^{-1}(g(b_1, \dots, b_n)) = \Psi^{-1}(0) = 0$$

portanto, $g \in Id^{gr}(A)$. E assim, concluimos que $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(B)$. ■

O próximo teorema é clássico no estudo de estruturas em Álgebra, aqui veremos a versão para álgebras graduadas, o Teorema Fundamental dos Homomorfismos. Para isso, também precisamos demonstrar o seguinte fato:

Proposição 1.2.38 *Sejam A e B álgebras G -graduadas e $\Psi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras graduadas. Então $\ker(\Psi)$ é um ideal G -graduado.*

Prova. Pelo item (iii) da Observação 1.2.3, temos que mostrar que para qualquer $a \in \ker(\Psi)$, com $a = \sum_{g \in G} a_g$, segue que $a_g \in \ker(\Psi)$ para todo $g \in G$. Assim, seja $a \in \ker(\Psi)$, então temos que $\Psi(a) = 0$, logo,

$$0 = \Psi(a) = \Psi\left(\sum_{g \in G} a_g\right) = \sum_{g \in G} \Psi(a_g)$$

assim,

$$0 = \sum_{g \in G} \Psi(a_g).$$

Como Ψ é um homomorfismo de álgebras graduadas, considerando $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ uma gradação de B , temos que $\Psi(a_g) \in B_g$, como B é soma direta de subespaços B_g , então obtemos que $\Psi(a_g) = 0$ para todo $g \in G$. Portanto, $a_g \in \ker(\Psi)$ e concluímos que $\ker(\Psi)$ é G -graduado. ■

Teorema 1.2.39 *Sejam A e B álgebras G -graduadas e $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras graduadas. Então, existe um isomorfismo $\Psi : A/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ de álgebras graduadas.*

Prova. Seja Ψ uma transformação linear dada por:

$$\Psi : A/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$$

$$a + \ker(f) \rightarrow f(a).$$

Sejam $x + \ker(f), y + \ker(f) \in A/\ker(f)$, temos

$$\begin{aligned} \Psi((x + \ker(f))(y + \ker(f))) &= \psi(xy + \ker(f)) = f(xy) = f(x)f(y) \\ &= \Psi(x + \ker(f))\Psi(y + \ker(f)). \end{aligned}$$

Vamos verificar que Ψ é um isomorfismo. Em relação a sobrejetividade temos que, dado $y \in \text{Im}(f)$ temos que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Assim,

$$\Psi(x + \ker(f)) = f(x) = y,$$

portanto Ψ é sobrejetiva. Agora verifiquemos a injetividade. Se $\Psi(x + \ker(f)) = 0$ então $f(x) = 0$ e $x \in \ker(f)$, logo $x + \ker(f) = 0$, portanto Ψ é injetiva.

Dado um elemento em $(A/\ker(f))_g$ ele é da forma $a_g + \ker(f)$, com $a_g \in A_g$. Aplicando o isomorfismo Ψ , obtemos que

$$\Psi(a_g + \ker(f)) = f(a_g)$$

como f é um homomorfismo de álgebras graduadas, temos que $f(a_g) \in B_g$, por outro lado, $f(a_g) \in \text{Im}(f)$, logo $f(a_g) \in B_g \cap \text{Im}(f)$, assim, obtemos que $\Psi((A/\ker(f))_g) \subseteq \text{Im}(f)_g$. ■

1.2.4 Polinômios Multihomogêneos e Multilineares

Os conceitos de polinômios multihomogêneos e multilineares descritos nesta seção para o caso graduado, também são válidos para o caso ordinário quando consideramos a gradação trivial.

Definição 1.2.40 Um polinômio G -graduado $f \in K\langle X \rangle$ é dito homogêneo na variável $x_i \in X$, se x_i aparece o mesmo número de vezes em todos os monômios de f . Se f é homogêneo em todas as variáveis, então diremos que f é multihomogêneo.

Definição 1.2.41 Um polinômio G -graduado $f \in K\langle X \rangle$ é linear na variável $x_i \in X$, se x_i aparece apenas uma vez em cada monômio de f . Se f é linear em todas as suas variáveis, diremos que f é multilinear G -graduado.

Proposição 1.2.42 Se a álgebra A G -graduada satisfaz uma identidade de grau k , então ela satisfaz uma identidade multilinear de grau $\leq k$.

A demonstração dessa proposição é uma adaptação do caso ordinário para o caso graduado, descrita na referência [29]. Ela é importante, pois em seu percurso contém o processo de multilinearização, a partir do qual obtemos uma identidade multilinear para uma p.i. álgebra a partir de uma identidade qualquer. Vejamos o próximo exemplo, que usa o processo de multilinearização.

Exemplo 1.2.43 Considere polinômio $f(x_1, x_2) = x_2 x_1^2 x_2 \in K\langle X \rangle$ e multilinearizemos.

$$\begin{aligned} h_1(y_1, y_2, x_2) &= x_2(y_1 + y_2)^2 x_2 - x_2 y_1^2 x_2 - x_2 y_2^2 x_2 \\ &= x_2 y_1^2 x_2 + x_2 y_1 y_2 x_2 + x_2 y_2 y_1 x_2 + x_2 y_2^2 x_2 - x_2 y_1^2 x_2 - x_2 y_2^2 x_2 \\ &= x_2 y_1 y_2 x_2 + x_2 y_2 y_1 x_2. \end{aligned}$$

Agora linearizando h_1 em relação a variável x_2 temos,

$$\begin{aligned} h_2(y_1, y_2, z_1, z_2) &= (z_1 + z_2) y_1 y_2 (z_1 + z_2) - h_1(y_1, y_2, z_1) \\ &\quad + (z_1 + z_2) y_2 y_1 (z_1 + z_2) - h_1(y_1, y_2, z_2) \\ h_2(y_1, y_2, z_1, z_2) &= z_1 y_1 y_2 z_2 + z_2 y_2 y_1 z_1 + z_2 y_1 y_2 z_1 + z_1 y_2 y_1 z_2, \end{aligned}$$

portanto, obtemos o polinômio multilinear $h_2(y_1, y_2, z_1, z_2) = z_1 y_1 y_2 z_2 + z_2 y_2 y_1 z_1 + z_2 y_1 y_2 z_1 + z_1 y_2 y_1 z_2$ através do polinômio $f(x_1, x_2) = x_2 x_1^2 x_2$, que não é multilinear.

Agora vejamos um importante resultado que tem como consequência que o $Id^{gr}(A)$ de uma álgebra A é gerado por as suas identidades multihomogêneas quando K é infinito, e que o $Id^{gr}(A)$ é gerado por as suas identidades multilineares quando $char K = 0$. Utilizaremos a notação $gr_{x_i} f$ para representa o grau da variável x_i no polinômio f no sentido ordinário, isto é, este é o maior número de vezes que x_i aparece em algum monômio de f .

Teorema 1.2.44 Seja $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=0}^n f_j(x_1, \dots, x_m) \in K\langle X \rangle$ onde f_j é a componente homogênea de f com grau j em x_i .

(i) Se o corpo K contém mais que n elementos então $f_j(x_1, \dots, x_m) \in \langle f \rangle^{gr}$ para $j = 1, \dots, n$.

(ii) Se a característica do corpo é zero então $\langle f \rangle^{gr}$ admite uma base composta por uma família finita de polinômios multilineares.

Prova. (i) Seja $I = \langle f \rangle^{gr}$ o T -ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por f . Escolhemos $n + 1$ elementos distintos $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$. Como I é um T_G -ideal, obtemos que

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^n \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \in I; \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear com incógnitas f_i para $i = 0, 1, \dots, n$. Sendo o determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^n \end{bmatrix} = \prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

sendo o determinante de Vandermonde e diferente de 0, obtemos que cada $f_i(x_1, \dots, x_m)$ também pertence a I , ou seja, as identidades polinomiais $f_i \equiv 0$ são consequências de $f \equiv 0$.

(ii) Por (i), podemos assumir que $f(x_1, \dots, x_m)$ é multihomogêneo. Seja $d = gr_{x_1} f$. Escrevemos $f_i(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) \in I$ com $y_1, y_2 \in X_{deg(x_1)}$ sob a forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^k f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1 . Logo, $f_i \in I$ para $i = 0, 1, \dots, d$. Como $gr_{y_j} f_i < d$; $i = 1, 2, \dots, d - 1$; $j = 1, 2$, podemos aplicar argumentos indutivos e obtemos um conjunto de consequências multilineares de f . Para ver que estas identidades multilineares são uma base para $\langle f \rangle^{gr}$ é suficiente observarmos que

$$f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_m) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_m),$$

e que o coeficiente binomial é diferente de 0, pois temos por hipótese que $char K = 0$ ou $char K \geq d$. ■

Corolário 1.2.45 *Seja A uma álgebra G -graduada sobre um corpo K . Então,*

- (i) *Se o corpo K é infinito então todas as identidades polinomiais graduadas de A seguem de suas identidades graduadas multihomogêneas;*
- (ii) *Se o corpo K tem característica zero então todas as identidades polinomiais graduadas de A seguem de suas identidades multilineares graduadas.*

Observe que quando $char K \neq 0$ pode ocorrer que as identidades multilineares graduadas de uma álgebra não gerem o T_G -ideal da álgebra dada.

Agora, faremos algumas definições acerca de polinômios multilineares para entendermos o que é uma codimensão G -graduada.

Definição 1.2.46 *O espaço vetorial $P_n^g = \{x_{g_{\theta(1)}, \theta(1)} \dots x_{g_{\theta(n)}, \theta(n)} \mid \theta \in S_n\}$ representa todos os polinômios em $K\langle X \rangle$ graduados multilineares, no qual o grau de cada variável x_i está atrelado ao seu índice $\theta(i)$ e $g = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$.*

Observe que na definição acima estamos utilizando dois índices nas variáveis, o primeiro índice é o $\deg(x_{g_{\theta(i)}, \theta_i})$ e o segundo é um número natural. Futuramente será necessário essa notação.

Observe que, dada uma álgebra A , podemos considerar $P_n^g \cap Id^{gr}(A)$ e obter o seguinte quociente dos espaços vetoriais

$$P_n^g(A) = \frac{P_n^g}{P_n^g \cap Id^{gr}(A)}.$$

Definição 1.2.47 Denotamos por $P_n^{gr} = \{x_{g_1, \theta_{(1)}} \dots x_{g_n, \theta_{(n)}} \mid \theta \in S_n, g_1, \dots, g_n \in G\}$, o espaço vetorial que representa a soma dos P_n^g para todas as n -uplas $g \in G^n$.

A diferença entre a Definição 1.2.46 e a Definição 1.2.47 é que na primeira a variável de índice i tem grau g_i , enquanto que na segunda definição pode ter variáveis de mesmo índice $i \in \mathbb{N}$, mas graus diferentes no grupo G .

Também podemos obter o espaço quociente $P_n^{gr}(A) = \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)}$ e através dele temos a próxima definição.

Definição 1.2.48 Definimos a n -ésima codimensão G -graduada C_n^{gr} de A da seguinte maneira

$$C_n^{gr}(A) = \dim \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)}.$$

Além disso, a sequência $(C_n^{gr}(A))_{n \in \mathbb{N}}$ é chamada de sequência de codimensões graduadas de A .

Note que $P_n^{gr} = \bigoplus_{g \in G^n} P_n^g$, e com isso, de modo mais geral, temos que, sendo A uma álgebra G -graduada, a seguinte igualdade é válida

$$P_n^{gr}(A) = \bigoplus_{g \in G^n} P_n^g(A).$$

No Capítulo 2 iremos trabalhar com a codimensão graduada da álgebra $U_n(K)$ utilizando a decomposição acima.

1.2.5 Produto Tensorial

Nesta subseção são destacados os resultados mais importantes sobre produto tensorial que serão utilizados no capítulos posteriores.

Proposição 1.2.49 Seja U um espaço vetorial, dados dois subespaços vetoriais de U , V e W , tal que $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, então $V \otimes W = \bigoplus_{i \in I} (V_i \otimes W)$.

Prova. Consideremos β_i uma base de V_i , assim, $\beta = \bigcup_{i \in I} \beta_i$ é uma base de V . Agora observe que, se considerarmos uma base β' para W , temos que, $V \otimes W$ terá como base o conjunto $\{b \otimes b' \mid b \in \beta, b' \in \beta'\}$. Ainda, podemos considerar $\beta'_i = \{b_i \otimes b' \mid b_i \in \beta_i, b' \in \beta'\}$ e teremos que $\bigcup_{i \in I} \beta'_i$ é uma base para $V \otimes W$. Sendo $\beta'_i \cap \beta'_j = \emptyset$ pelo fato de $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, então $V_i \otimes W$ sendo gerado por β'_i , chegamos que, $V \otimes W = \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes W$. ■

Proposição 1.2.50 Sejam $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra G -graduada e C uma álgebra, então $A \otimes C = \bigoplus_{g \in G} A_g \otimes C$ é uma G -gradação.

Prova. Pela Proposição 1.2.49, dada $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e C uma álgebra, temos que $A \otimes C = \bigoplus_{g \in G} A_g \otimes C$. Agora vejamos que dados $a_g \otimes c_1 \in A_g \otimes C$ e $a_h \otimes c_2 \in A_h \otimes C$, temos,

$$(a_g \otimes c_1)(a_h \otimes c_2) = (a_g a_h) \otimes (c_1 c_2)$$

como A é graduada então $a_g a_h \in A_{gh}$, logo, $(a_g a_h) \otimes (c_1 c_2) \in A_{gh} \otimes C$, portanto $A \otimes C = \bigoplus_{g \in G} A_g \otimes C$ é uma G -graduação. ■

Definição 1.2.51 *Seja A uma álgebra G -graduada e $f \in \text{Id}^{gr}(A)$. Dizemos que f é uma identidade graduada estável de A , se para cada álgebra comutativa C , f ainda é identidade de $A \otimes C$.*

Antes da próxima proposição, faremos um exemplo.

Exemplo 1.2.52 *Sejam $\bar{A} = \bigoplus_{g \in G} A_g \otimes C$ uma álgebra G -graduada com C sendo uma álgebra comutativa e considere $f(x_1, x_2) = x_1 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_1$ um polinômio multihomogeneo de multigrau $(2, 1)$, apliquemos em elementos de $\bar{A}$.*

Sejam $\bar{a}_1 = a_1 \otimes c_1, \bar{a}_2 = a_2 \otimes c_2$ teremos o seguinte

$$\begin{aligned} f(\bar{a}_1, \bar{a}_2) &= f(a_1 \otimes c_1, a_2 \otimes c_2) = (a_1 \otimes c_1)(a_1 \otimes c_1)(a_2 \otimes c_2) + (a_1 \otimes c_1)(a_2 \otimes c_2)(a_1 \otimes c_1) \\ &= (a_1 a_1 a_2) \otimes (c_1 c_1 c_2) + (a_1 a_2 a_1) \otimes (c_1 c_2 c_1) \end{aligned}$$

como C é um álgebra comutativa temos que

$$= (a_1 a_1 a_2) \otimes (c_1^2 c_2) + (a_1 a_2 a_1) \otimes (c_1^2 c_2) = (a_1 a_1 a_2 + a_1 a_2 a_1) \otimes (c_1^2 c_2) = f(a_1, a_2) \otimes (c_1^2 c_2)$$

observe que as potências de c_1 e c_2 são respectivamente, igual ao grau que x_1 e x_2 tem em f . Ademais, sejam $\bar{a}_1 = a_1 \otimes c_1, \dots, \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$ e f um polinômio multihomogeneo de multigrau $(m_1, \dots, m_n)$, então

$$f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes c_1^{m_1} \dots c_n^{m_n}.$$

Proposição 1.2.53 *Se $f(x_1, \dots, x_n)$ é uma identidade multilinear para a álgebra A , então f é uma identidade estável para A .*

De fato, basta verificar que $f(a_1 \otimes c_1, \dots, a_n \otimes c_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$ e $c_1, \dots, c_n \in C$. Seja

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\theta \in S_n} \lambda_\theta x_{\theta(1)} \dots x_{\theta(n)},$$

temos que

$$\begin{aligned} f(a_1 \otimes c_1, \dots, a_n \otimes c_n) &= \sum_{\theta \in S_n} \lambda_\theta (a_{\theta(1)} \otimes c_{\theta(1)}) \dots (a_{\theta(n)} \otimes c_{\theta(n)}) \\ &= \sum_{\theta \in S_n} \lambda_\theta a_{\theta(1)} \dots a_{\theta(n)} \otimes c_{\theta(1)} \dots c_{\theta(n)} \\ &= f(a_1, \dots, a_n) \otimes c_1 \dots c_n = 0, \end{aligned}$$

portanto $f \in \text{Id}(A \otimes C)$.

Nem sempre obtemos que uma identidade de uma álgebra A é estável, na nossa referência [9] vemos um exemplo disso. O nosso próximo resultado mostra quais são as condições necessárias para que toda identidade polinomial de uma álgebra A seja estável e utilizaremos a igualdade $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes c_1^{m_1} \dots c_n^{m_n}$ vista no Exemplo 1.2.52.

Proposição 1.2.54 *Se K é um corpo infinito e A é uma álgebra G -graduada, então toda identidade polinomial graduada de A é estável.*

Prova. Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra graduada e C uma álgebra comutativa, temos da Proposição 1.2.50 que podemos considerar a graduação de $\bar{A} = A \otimes C$ dada por $\bar{A} = \bigoplus_{g \in G} \bar{A}_g$, sendo $\bar{A}_g = A_g \otimes C$. E seja $f(x_1, \dots, x_n)$ uma identidade polinomial graduada de A , com K infinito, podemos assumir que f é multihomogêneo de multigrado $(m_1, \dots, m_n)$.

Agora, para $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ com $\bar{a}_i \in \bar{A}_{deg(x_i)}$ devemos provar que $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$. Suponhamos primeiramente que $\bar{a}_1 = a_1 \otimes c_1, \dots, \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$, então

$$f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes c_1^{m_1} \dots c_n^{m_n} = 0$$

e fica demonstrada a igualdade neste caso.

Agora sendo $\bar{a}_1 = b_1 \otimes d_1 + b_2 \otimes d_2, \bar{a}_2 = a_2 \otimes c_2, \dots, \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$, então

$$\begin{aligned} f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) &= f(b_1 \otimes d_1, a_2 \otimes c_2, \dots, a_n \otimes c_n) + f(b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \dots, a_n \otimes c_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(b_1 \otimes d_1, b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \dots, a_n \otimes c_n) \end{aligned}$$

onde

$$f(x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(x_1, y_1, x_2, \dots, x_n)$$

e $deg_{x_1} f_i = i$. Como todo polinômio f_i é consequência multihomogênea de f , segue do argumento anterior que $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$.

Generalizando este argumento para $\bar{a}_1 = \sum a_{1j} \otimes c_{1j}, \dots, \bar{a}_n = \sum a_{nj} \otimes c_{nj} \in \bar{A}$ e $c_{ij} \in C$ arbitrários escrevemos $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ como uma soma de expressões da forma:

$$\bar{g} = g(a_{i_1 j_1} \otimes c_{i_1 j_1}, \dots, a_{i_k j_k} \otimes c_{i_k j_k})$$

onde $g = g(x_1, \dots, x_k)$ é multihomogêneo e consequência de f . Novamente pelo primeiro argumento obtemos $\bar{g} = 0$. ■

1.2.6 Identidades Polinomiais Y-próprias

Nesta subseção abordaremos os conceitos de identidades polinomiais Y -próprias para álgebras graduadas, que é uma generalização das identidades polinomiais próprias no caso de álgebras ordinárias.

Lembremos que dada uma álgebra L , não necessariamente associativa, ela é chamada álgebra de Lie, se vale a anticomutatividade e a identidade de Jacobi, ou seja, $a * a = 0$, e

$(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$, para quaisquer $a, b, c \in L$. Além disso, se A é uma álgebra (associativa) então com a multiplicação $[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1$ o espaço vetorial de A é uma álgebra de Lie, denotada por $A^{(-)}$.

Definição 1.2.55 *Se A é uma álgebra e L uma álgebra de Lie isomorfa a uma subálgebra de Lie $A^{(-)}$, então dizemos que A é uma álgebra envolvente de L . A álgebra $U = U(L)$ é uma álgebra envolvente universal da álgebra de Lie L , se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U tem a seguinte propriedade universal: para toda álgebra A e todo homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L \rightarrow A^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras $\Psi : U \rightarrow A$ que estende ϕ .*

Teorema 1.2.56 *(Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt) Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra universal envolvente $U(L)$. Se L tem base $\{e_i \mid i \in I\}$, e o conjunto de índices é ordenado, então $U(L)$ tem uma base formada pelos seguintes elementos*

$$e_{i_1} \dots e_{i_p}, \quad i_1 \leq \dots \leq i_p, \quad i_k \in I, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Esse teorema recebe esse nome devido as contribuições dos matemáticos, Henri Poincaré, em 1899, Garrett Birkhoff e Ernst Witt, em 1937. Existem relatos históricos que Birkhoff, Witt e Poincaré trabalharam nesse resultado separadamente, e que nem sempre esse resultado carregou o nome desses três matemáticos. Essa denominação passou a ser utilizada a partir do grupo de matemáticos Bourbaki, que a usou em seu livro em 1960. Na referência [17] pode-se encontrar mais detalhes sobre esse teorema e sua história.

Teorema 1.2.57 *(Witt) A subálgebra de Lie $L(X)$ de $K\langle X \rangle^{(-)}$ gerada por X é isomorfa a álgebra livre com X sendo o seu conjunto gerador livre; $U(L(X)) = K\langle X \rangle$.*

As demonstrações dos Teorema 1.2.56 e o Teorema 1.2.57 podem ser vistas na referência [12], ambos são necessários para o Teorema 1.2.61.

Na próxima definição, diremos o que é um polinômio Y -próprio, nela surge uma diferença do caso ordinário. Quando estamos no caso ordinário, trabalhamos apenas com variáveis de grau e , e no caso graduado temos variáveis de outros graus, então surge a necessidade de incluir essas variáveis nessa definição de polinômios Y -próprios. Além disso, como o caso ordinário é um caso específico do graduado, então tem a necessidade de que as variáveis de grau e apareçam apenas em comutadores.

Definição 1.2.58 *Um polinômio $f \in K\langle X \rangle$ é chamado polinômio Y -próprio, se as variáveis de grau e aparecem em comutadores apenas, ou seja,*

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum \alpha_{i, \dots, j} z_1^{a_1} \dots z_m^{a_m} [x_{i_1}, \dots, x_{i_p}] \dots [x_{j_1}, \dots, x_{j_q}]; \quad \alpha_{i, \dots, j} \in K,$$

com as variáveis z de grau diferente de e , enquanto que as variáveis x tem grau qualquer. Consideramos 1 como sendo o produto de um conjunto vazio de comutadores e o conjunto $B_G(X)$ representará todos os polinômios Y -próprios de $K\langle X \rangle$.

Exemplo 1.2.59 *O polinômio $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_2 x_1$ é Y -próprio, pois na verdade, ele é igual ao comutador $[x_1, x_2]$.*

Exemplo 1.2.60 Considere os polinômios a seguir, com y 's de grau e

$$f(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^2 z_3^5 [z_2, y_1]^3 + [z_3, y_1, y_2]^2 [z_4, y_2, y_2]^4$$

$$g(y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, z_4) = [y_1, y_2] + y_1^3 z_4 [z_1, z_2]^7 [z_2, y_3, z_3]^2.$$

Temos que f é Y -próprio, mas g não será pois temos variáveis de grau e que não estão em comutadores.

O exemplo acima está na referência [14].

Teorema 1.2.61 Se escolhermos uma base ordenada da álgebra de Lie livre $L(X)$

$$x_1, x_2, \dots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \dots$$

consistente de variáveis $x_1, x_2, \dots$ e comutadores, com as variáveis precedendo os comutadores. Então o espaço vetorial $K\langle X \rangle$ tem a base

$$x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \dots [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]^c$$

onde $a_1, \dots, a_m, b, \dots, c \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \dots < [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]$ na ordenação da base de $L(X)$. Os elementos da base de $K\langle X \rangle$ com $a_i = 0$ sempre que $\deg(x_i) = e$, com $1 \leq i \leq m$, forma a base do espaço vetorial $B_G(X)$ dos polinômios Y -próprios.

Prova. Pelo Teorema de Witt temos que $U(L(X)) = K\langle X \rangle$ e pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt temos que a base de $U(L(X)) = K\langle X \rangle$ é formada por produto dos elementos da base de $L(X)$, portanto, obtemos que a base de $K\langle X \rangle$ é formada pelos elementos da forma

$$x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \dots [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]^c$$

onde $a_1, \dots, a_m, b, \dots, c \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \dots < [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]$ na ordenação da base de $L(X)$.

Como $K\langle X \rangle$ tem essa base, claramente os elementos de $B_G(X)$ também são gerados por eles, porém pela própria definição de conjunto de $B_G(X)$ deveremos ter $a_i = 0$ sempre que $\deg(x_i) = e$, com $1 \leq i \leq m$. ■

O próximo teorema é o resultado mais importante dessa subseção de identidades graduadas Y -próprias, utilizaremos como referência [8].

Teorema 1.2.62 Se A é uma PI -álgebra sobre o corpo K infinito, então todas as identidades polinomiais graduadas de A seguem das suas identidades Y -próprias (isto é, daquelas em $Id^{gr}(A) \cap B_G(X)$). Se $\text{char} K = 0$, então as identidades polinomiais graduadas de A seguem das identidades próprias multilineares.

Prova. Seja $f(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \in K\langle X \rangle$. Pelo Teorema 1.2.61 podemos escrever f como

$$f = \sum \alpha_a y_1^{a_1} \dots y_m^{a_m} z_{m+1}^{a_{m+1}} \dots z_n^{a_n} w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n), \quad \alpha_a \in K,$$

onde $w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \in B_G(X)$ e a soma é feita sobre as m -uplas $a = (a_1, \dots, a_n)$ tais que $a_i \leq gr_{y_i}(f)$, $1 \leq i \leq m$ e $a_i \leq gr_{z_i}(f)$, $m+1 \leq i \leq n$. Para cada f dessa forma definimos o conjunto

$$M(f) = \{M_1, M_2, \dots, M_l\}$$

$$= \{a_1 \mid a_1 \text{ é o primeiro termo da } n\text{-upla } a = (a_1, \dots, a_n) \text{ e } \alpha_a \neq 0\},$$

onde $M_1 > M_2 > \dots > M_l > 0$.

Afirmamos que se $f \in Id^{gr}(A)$ e f é homogêneo em y_1 , então

$$g_j = \sum_{a_1=M_j} \alpha_a y_2^{a_2} \dots y_m^{a_m} z_{m+1}^{a_{m+1}} \dots z_n^{a_n} w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \in Id^{gr}(A),$$

onde $j = 1, 2, \dots, l$. A demonstração deste teorema segue desta afirmação juntamente com o Lema 1.2.44, pois se f é multihomogêneo então ele é consequência das identidades $\{w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \mid \alpha_a \neq 0\}$, que são multilineares se f é multilinear.

É claro que

$$w_a(1 + y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) = w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n).$$

Como $deg(1) = e$ segue que $f(1 + y_1, y_2, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n)$ também é identidade polinomial graduada de A e concluímos que

$$\begin{aligned} f(1 + y_1, y_2, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) = \\ \sum \alpha_a (1 + y_1)^{a_1} y_2^{a_2} \dots z_n^{a_n} w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \in Id^{gr}(A), \end{aligned}$$

utilizando o binômio de Newton obtemos

$$\begin{aligned} f(1 + y_1, y_2, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) = \\ \sum \alpha_a \sum_{i=0}^{a_1} \binom{a_1}{i} y_1^i y_2^{a_2} \dots z_n^{a_n} w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \in Id^{gr}(A). \end{aligned}$$

Como f é multihomogênea $a_1 + gr_{y_1}(w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n)) = gr_{y_1}(f)$, assim a componente homogênea com menor grau possível em relação a y_1 se obtém quando $a_1 = M_1$ e é dada por

$$\sum_{a_1=M_1} \alpha_a y_2^{a_2} \dots y_m^{a_m} z_{m+1}^{a_{m+1}} \dots z_n^{a_n} w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n), \quad (1.1)$$

onde o subíndice $a_1 = M_1$ no somatório significa que a soma é feita sobre os $a = (a_1, \dots, a_n)$ tais que $a_1 = M_1$. Como K é infinito, teremos pelo Lema 1.2.44 que (1.1) pertence a $Id^{gr}(A)$.

Agora, suponhamos que a afirmação seja válida para $j = 1, 2, \dots, k$, onde k é um número natural menor que l .

Temos que $y_1^{M_1} g_1 + y_1^{M_2} g_2 + \dots + y_1^{M_k} g_k$ pertence a $Id(A)^{gr}$ e subtraindo este polinômio de $f(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n)$ obtemos

$$\begin{aligned} h(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) = \\ \sum_{a_1 < M_k} \alpha_a y_1^{a_1} \dots y_m^{a_m} z_{m+1}^{a_{m+1}} \dots z_n^{a_n} w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \in Id^{gr}(A). \end{aligned}$$

É claro que $M(h) = \{M_{k+1}, \dots, M_l\}$ e aplicando os argumentos anteriores ao polinômio h concluímos que

$$\sum_{a_1=M_{k+1}} \alpha_a y_2^{a_2} \dots y_m^{a_m} z_{m+1}^{a_{m+1}} \dots z_n^{a_n} w_a(y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n), \in Id^{gr}(A),$$

e a afirmação está provada. ■

Capítulo 2

Identidades Graduadas na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores

Este capítulo contém o estudo do artigo "Graded identities for the algebra of $n \times n$ upper triangular matrices over an infinite field", referência [23] desta dissertação. Aqui consideramos a $\mathbb{Z}_n$ -gradação de $U_n(K)$ apresentada no capítulo anterior no Exemplo 1.2.13, para descrevermos uma base das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$ -graduadas para $U_n(K)$, sobre um corpo de característica zero, e depois, de forma mais geral, sobre um corpo infinito qualquer. Como aplicação, determinamos o crescimento assintótico da sequência de codimensões graduadas da álgebra $U_n(K)$. Por simplicidade usaremos os elementos de $\mathbb{Z}_n$ sem barra e utilizaremos as variáveis com dois índices, o primeiro é o grau da variável na graduação e o segundo um numero natural.

2.1 Identidades Graduadas de $U_n(K)$

Inicialmente, relembremos a $\mathbb{Z}_n$ -gradação da álgebra $U_n(K)$ vista no Exemplo 1.2.13. Seja $U_n(K)$, temos que

$$U_n(K) = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_{n-1},$$

com

$$V_i = \{a_{1,i+1}e_{1,i+1} + a_{2,i+2}e_{2,i+2} + \dots + a_{n-i,n}e_{n-i,n} \mid a_{r,s} \in K\}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Ao longo deste capítulo trabalharemos sempre com essa $\mathbb{Z}_n$ -gradação da álgebra $U_n(K)$. Veja a seguir duas identidades $\mathbb{Z}_n$ -graduadas muito importantes para a álgebra $U_n(K)$.

Lema 2.1.1 *A álgebra $U_n(K)$ satisfaz as identidades graduadas*

$$x_{01}x_{02} - x_{02}x_{01} = 0 \quad (1)$$

$$x_{i_1 1}x_{i_2 2} = 0 \quad (2)$$

sempre que $i_1 + i_2 \geq n$.

Prova. De fato:

- (1) Sejam a_{01}, a_{02} matrizes em V_0 , logo são matrizes diagonais. Como as matrizes diagonais comutam, temos que de fato,

$$a_{01}a_{02} - a_{02}a_{01} = 0.$$

- (2) Para $x_{i_1}x_{i_2}$ temos que $\deg(x_{i_1}x_{i_2}) = i_1 + i_2$. Sabemos da Observação 1.2.14 que se $i_1 + i_2 \geq n$ então $V_{i_1}V_{i_2} = 0$, logo o produto de quaisquer elementos de V_{i_1} por elementos de V_{i_2} terá 0 como resultado. Portanto,

$$a_{i_1}a_{i_2} = 0 \text{ para todo } a_{i_1} \in V_{i_1} \text{ e } a_{i_2} \in V_{i_2}.$$

■

Proposição 2.1.2 *Se $i_1 + i_2 + \dots + i_k \geq n$ então $V_{i_1}V_{i_2} \dots V_{i_k} = 0$.*

Prova. Consideremos o produto dos subespaços $V_{i_2}V_{i_3} \dots V_{i_k}$ e observe que esse produto está contido em V_j , com $j = i_2 + i_3 + \dots + i_k$, assim, o produto $V_{i_1}V_{i_2} \dots V_{i_k}$ está contido em V_{i_1+j} , dessa forma,

$$i_1 + j = i_1 + i_2 + \dots + i_k \geq n$$

e pela Observação 1.2.14 temos que $V_{i_1}V_{i_2} \dots V_{i_k} = 0$. ■

Claramente, como consequência dessa proposição anterior, temos que o polinômio $f = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_k}$ é uma identidade graduada de $U_n(K)$ sempre que $i_1 + \dots + i_k \geq n$. Agora, para fazermos a demonstração do resultado principal deste capítulo, para característica zero, faremos algumas definições necessárias.

Definição 2.1.3 *Sejam V um espaço vetorial, W um subespaço vetorial de V e $v_1, \dots, v_n$ elementos de V . Dizemos que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes módulo W se dada qualquer combinação linear desses vetores em V , ela pertencerá a W se, e somente se, todos os escalares da combinação linear forem iguais a zero.*

Exemplo 2.1.4 *Sejam V um espaço vetorial, W um subespaço vetorial de V e $v_1, \dots, v_n$ elementos de V . Se $W = \{0\}$, então os vetores $v_1, \dots, v_n$ serão linearmente independentes módulo W se, e somente se, são linearmente independentes em V .*

Exemplo 2.1.5 *Sejam V um espaço vetorial, W um subespaço vetorial de V e v um elemento de V . Se v não pertence ao subespaço vetorial W , então ele é linearmente independente módulo W .*

Definição 2.1.6 *Sejam V um espaço vetorial, W um subespaço vetorial de V e $v_1, \dots, v_n$ elementos de V . Dizemos que os elementos de V são uma combinação linear de elementos $v_1, \dots, v_n$ módulo W , se para qualquer elemento v em V mostrarmos que ele é congruente a uma combinação linear dos elementos $v_1, \dots, v_n$, ou seja,*

$$v \equiv (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \text{ mod } W,$$

o que significa o mesmo que $v - (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \in W$.

Às vezes, por questão de simplificação de notação usaremos $v \equiv_W \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ em vez de $v \equiv (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \pmod{W}$.

Exemplo 2.1.7 *Sejam a álgebra $M_2(K)$, e seu subespaço vetorial $W = \langle e_{11}, e_{21} \rangle$. Temos que qualquer elemento de $M_2(K)$ é uma combinação linear de e_{12}, e_{22} módulo W .*

Seja $a \in M_2(K)$ devemos verificar que $a \equiv_W \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{22}$. Isto é, com $a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

portanto, dado $a \in M_2(K)$ temos que $a - a_{12}e_{12} - a_{22}e_{22} \in W$, logo, a é uma combinação linear de e_{12}, e_{22} módulo W .

De forma mais geral, sempre que tivermos um espaço vetorial V com base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$, podemos considerar um subespaço W que é gerado por uma parte dessa base, digamos $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$, e teremos que qualquer elemento do espaço vetorial V é uma combinação linear do restante da base, ou seja, de $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$, módulo W .

Por fim, considere o conjunto dos monômios de $K\langle X \rangle$ do tipo

$$u = w_0 x_{k_1 i_1} w_1 \cdots w_{t-1} x_{k_t i_t} w_t \quad (3)$$

onde $k_1 + k_2 + \cdots + k_t < n$ e $w_0, \dots, w_t$ são monômios (possivelmente vazios) nas variáveis x_{0i} de grau homogêneo 0 e em cada w_i essas variáveis são escritas em ordem crescente da esquerda para a direita em relação ao segundo índice i .

Agora, faremos a demonstração do teorema principal, para característica zero. Esse teorema dá a estrutura multilinear da álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_n$ -graduada da variedade determinada por $U_n(K)$ e, como consequência, uma base das identidades $\mathbb{Z}_n$ -graduadas de $U_n(K)$. Consideremos $I = Id^{gr}(U_n(K))$ e J o ideal gerado pelas identidades (1) e (2), mostraremos que $I = J$.

Teorema 2.1.8 *Seja K um corpo com característica zero, então os monômios (3) multilineares de grau m são uma base do subespaço de $K\langle X \rangle$ dos polinômios multilineares de grau m módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Além disso, $Id^{gr}(U_n(K)) = \langle [x_{01}, x_{02}], x_{i1}x_{j2} \mid i + j \geq n \rangle$.*

Prova. Lembremos que J é o ideal gerado por as identidades (1) e (2). Primeiramente verifiquemos que, módulo J , todo elemento de $K\langle X \rangle$ pode ser escrito como uma combinação linear de monômios do tipo (3). Para isso, basta mostrar que cada monômio de $K\langle X \rangle$ é congruente a um monômio do tipo (3).

Seja $m \in K\langle X \rangle$ um monômio, podemos claramente, denotar o monômio m destacando as variáveis de grau zero das variáveis que não tem grau zero, ficando

$$m = w'_0 x'_{k_1 i_1} w'_1 \cdots w'_{t-1} x'_{k_t i_t} w'_t,$$

com w'_i sendo os monômios nas variáveis de grau zero. Agora precisamos verificar que, módulo J , em w'_i as variáveis x_{0i} podem ser escritas com os índices i em ordem crescente

da esquerda para a direita.

Para ordenar as variáveis de grau zero em w'_i podemos utilizar a identidade $[x_{01}, x_{02}]$, assim, temos,

$$w'_i = x_{0j_1}x_{0j_2} \cdots x_{0j_u}x_{0j_{u+1}} \cdots x_{0j_s} \equiv_J x_{0j_1}x_{0j_2} \cdots x_{0j_{u+1}}x_{0j_u} \cdots x_{0j_s},$$

então temos

$$\begin{aligned} m = w'_0 x'_{k_1 i_1} w'_1 \cdots w'_i \cdots w'_{t-1} x'_{k_t i_t} w'_t \equiv_J \\ w'_0 x'_{k_1 i_1} w'_1 \cdots x_{0j_1} x_{0j_2} \cdots x_{0j_{u+1}} x_{0j_u} \cdots x_{0j_s} \cdots w'_{t-1} x'_{k_t i_t} w'_t. \end{aligned}$$

Repetindo esse processo quantas vezes forem necessárias podemos reordenar as variáveis de qualquer w'_i em m . Sendo assim, se $k_1 + k_2 + \cdots + k_t < n$ então m é do tipo (3), caso contrário, $k_1 + k_2 + \cdots + k_t \geq n$ então m é consequência da identidade $f = x'_{k_1 i_1} \cdots x'_{k_t i_t}$, ou seja, $m \in J$, então m será congruente a 0 módulo J , que pode ser escrito como combinação linear dos monômios do tipo (3).

Verifiquemos que os monômios (3) multilineares nas mesmas variáveis são linearmente independentes módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Seja

$$f = \sum \alpha_i u_i \in Id^{gr}(U_n(K))$$

para $\alpha_i \in K$ (com quase todo α_i nulo), onde os monômios u_i são do tipo (3), tais que as mesmas variáveis aparecem em cada monômio u_i apenas uma vez.

Fixemos um índice i e seja

$$u_i = w_0 x_{k_1 i_1} w_1 \cdots w_{t-1} x_{k_t i_t} w_t,$$

avaliemos f em $U_n(K)$ da seguinte forma, substituindo as variáveis em w_0 por e_{11} , a variável $x_{k_1 i_1}$ por e_{1, k_1+1} , cada variável aparecendo em w_1 em e_{k_1+1, k_1+1} , a variável $x_{k_2 i_2}$ em $e_{k_1+1, k_1+k_2+1}, \dots$, e a variável $x_{k_t i_t}$ em $e_{k_1+\dots+k_{t-1}, k_1+\dots+k_t+1}$ e cada variável de grau w_t em e_{jj} , onde $j = k_1 + \cdots + k_t + 1$.

Afirmamos que se $a_1, \dots, a_r$ são matrizes elementares, tais que, $a_1 \cdots a_r \neq 0$ e se σ é uma permutação em S_r , tal que, $a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(r)} \neq 0$, então, $a_{\sigma(1)} = a_1, \dots, a_{\sigma(r)} = a_r$. De fato, se $a_1 = e_{i_1 j_1}, \dots, a_r = e_{i_r j_r}$, como $a_1 \cdots a_r \neq 0$ precisamos que

$$j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{r-1} = i_r$$

além disso, nas matrizes triangulares superiores do tipo e_{lm} temos que $l \leq m$, daí segue que, os índices das matrizes ficam ordenados em ordem não decrescente,

$$i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r \quad j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_r,$$

de modo análogo, os índices nas matrizes $a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(r)}$ também ficam ordenados em ordem não decrescente, assim, $a_{\sigma(1)} = e_{i_1 j_1}, \dots, a_{\sigma(r)} = e_{i_r j_r}$.

Essa afirmação, juntamente com a ordenação dos índices que é exigida nos monômios do tipo (3), garante que a única ordem em que o produto das matrizes elementares que escolhemos acima para substituir as variáveis de u_i dará diferente de zero, é a que aparece quando fazemos a substituição em u_i , que terá como resultado e_{1j} , e para os outros

monômios, pela observação anterior, temos que obterá resultado zero. Ainda, como f é uma identidade polinomial graduada de $U_n(K)$, temos que ao aplicá-la a elementos de $U_n(K)$ dará zero, logo

$$\alpha_i e_{1j} = 0$$

assim obtemos que $\alpha_i = 0$, como escolhemos o i de forma arbitrária, podemos concluir que todos os α_i são nulos.

Agora, para concluirmos a demonstração do teorema, verifiquemos que

$$Id^{gr}(U_n(K)) = \langle [x_{01}, x_{02}], x_{i1}x_{j2} | i + j \geq n \rangle.$$

Pelo Lema 2.1.1 temos que $J \subset Id^{gr}(U_n(K))$, resta mostrarmos a inclusão contrária. Se $f \in Id^{gr}(U_n(K))$, devemos provar que f é congruente a 0, modulo J , como o corpo é de característica zero, basta mostrarmos que toda identidade multilinear pertence a J , assim, assumiremos que f é multilinear.

Seja $f \in Id^{gr}(U_n(K))$ uma identidade multilinear, ela vai ser escrita, módulo J , como combinação linear dos monômios do tipo (3), ou seja,

$$f \equiv_J \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

com u_i do tipo (3) e $\alpha_i \in K$. Assim, temos que,

$$f - (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \in J$$

como $J \subset Id^{gr}(U_n(K))$, deve existir $g \in Id^{gr}(U_n(K))$, tal que,

$$f - (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = g.$$

Logo, obtemos que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = f - g$$

assim, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ é identidade para $U_n(K)$. Logo, como os monômios do tipo (3) são linearmente independente modulo $Id^{gr}(U_n(K))$, obtemos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, e consequentemente $f \equiv_J 0$, ou seja, $f \in J$. ■

2.2 Matrizes Genéricas e Identidades Graduadas

Agora, o nosso objetivo principal é mostrar o resultado do Teorema 2.1.8 para corpos infinitos, sem necessitar de restrições sobre a característica do corpo K , para isso, as matrizes genéricas desempenham um papel fundamental, pois os resultados que são obtidos nesta seção serão utilizados na generalização desse teorema.

Sejam y_{ijk} com k não negativo e com $0 < i \leq j$, variáveis comutativas, e considere a álgebra polinomial $K[y_{ijk}]$ nessas variáveis.

Na referência [9] tem mais detalhes sobre a construção dessa álgebra.

Proposição 2.2.1 *O produto tensorial $U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]$ é canonicamente isomorfo a álgebra $U_n(K[y_{ijk}])$.*

Prova. Seja $\{e_{lm} \mid l \leq m\}$ a base canônica de $U_n(K)$ e $\{p_s \mid s \in I\}$ a base canônica de $K[y_{ijk}]$, assim, $U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]$ terá como base $\{e_{lm} \otimes_K p_s \mid l \leq m \text{ e } s \in I\}$. Lembre-se que $(e_{lm} \otimes_K p_s)(e_{l'm'} \otimes_K p_{s'}) = (e_{lm}e_{l'm'}) \otimes_K (p_s p_{s'})$. Definamos a transformação linear

$$\alpha : U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}] \rightarrow U_n(K[y_{ijk}])$$

$$e_{lm} \otimes_K p_s \rightarrow e_{lm}(p_s)$$

no qual $e_{lm}(p_s)$ são elementos da base de $U_n(K[y_{ijk}])$ com entrada p_s na linha l e coluna m e zero nas demais entradas. Como essa transformação linear leva base em base, temos que ela é bijetora. Agora, resta mostrarmos que α é um homomorfismo, para assim, obtermos o isomorfismo de álgebras. Para isso, mostremos que

$$\alpha((e_{lm} \otimes_K p_s)(e_{l'm'} \otimes_K p_{s'})) = \alpha(e_{lm} \otimes_K p_s)\alpha(e_{l'm'} \otimes_K p_{s'}).$$

Para o primeiro lado da igualdade temos o seguinte

$$\begin{aligned} \alpha((e_{lm} \otimes_K p_s)(e_{l'm'} \otimes_K p_{s'})) &= \alpha((e_{lm}e_{l'm'}) \otimes (p_s p_{s'})) = \alpha((\delta_{ml'}e_{lm'}) \otimes (p_s p_{s'})) = \\ &= \delta_{ml'}\alpha(e_{lm'} \otimes (p_s p_{s'})) = \delta_{ml'}e_{lm'}(p_s p_{s'}) \end{aligned}$$

e, no outro lado da igualdade obtemos que

$$\alpha(e_{lm} \otimes_K p_s)\alpha(e_{l'm'} \otimes_K p_{s'}) = e_{lm}(p_s)e_{l'm'}(p_{s'}) = \delta_{ml'}e_{lm'}(p_s p_{s'}),$$

daí segue que, $\alpha((e_{lm} \otimes_K p_s)(e_{l'm'} \otimes_K p_{s'})) = \alpha(e_{lm} \otimes_K p_s)\alpha(e_{l'm'} \otimes_K p_{s'})$. Como α é uma transformação linear, estendemos esse resultado para quaisquer elementos das álgebras, e além disso, temos que

$$\begin{aligned} \alpha(Id \otimes 1_s) &= \alpha((e_{11} + \cdots + e_{nn}) \otimes 1_s) = \alpha(e_{11} \otimes 1_s + \cdots + e_{nn} \otimes 1_s) \\ &= \alpha(e_{11} \otimes 1_s) + \cdots + \alpha(e_{nn} \otimes 1_s) = e_{11}(1_s) + \cdots + e_{nn}(1_s) = I_n(1_s). \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que α é um isomorfismo de álgebras. ■

Observe que se p é um polinômio e $u = (u_{ij})$ uma matriz com entradas nos polinômios, então $pu = (pu_{ij})$.

Exemplo 2.2.2 A decomposição $U_n(K[y_{ijk}]) = \oplus_{l \in \mathbb{Z}_n} V_l$, onde

$$V_l = \{\lambda_{1,l+1}e_{1,l+1} + \lambda_{2,l+2}e_{2,l+2} + \cdots + \lambda_{n-l,n}e_{n-l,n} \mid \lambda_{rs} \in K[y_{ijk}]\},$$

é uma $\mathbb{Z}_n$ -graduação para a álgebra $U_n(K[y_{ijk}])$.

Pela Proposição 1.2.50 temos que $U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}] = \oplus_{l \in \mathbb{Z}_n} V_l \otimes_K K[y_{ijk}]$ é uma $\mathbb{Z}_n$ -graduação, e além disso, como $U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]$ é isomorfa a $U_n(K[y_{ijk}])$, então pela Proposição 1.2.36 $U_n(K[y_{ijk}]) = \oplus_{l \in \mathbb{Z}_n} \alpha(V_l \otimes K[y_{ijk}])$ é uma $\mathbb{Z}_n$ -graduação, como $V_l = \alpha(V_l \otimes K[y_{ijk}])$ a afirmação está provada.

Definição 2.2.3 Seja

$$Y_{ik} = y_{1,i+1,k}e_{1,i+1} + y_{2,i+2,k}e_{2,i+2} + \cdots + y_{n-i,n,k}e_{n-i,n}$$

com $0 \leq i \leq n-1$, $k = 1, 2, \dots$, G_n é a subálgebra de $U_n(K[y_{ijk}])$ gerada pelas matrizes Y_{ik} , $0 \leq i \leq n-1$, $k = 1, 2, \dots$.

Lembremos que uma álgebra A é gerada, como álgebra, por um subconjunto $S = \{s_i\}_{i \in I} \subseteq A$ se todo elemento de $a \in A$ pode ser escrito como uma combinação linear sobre K de produtos da forma $s_{i_1} \dots s_{i_l}$, onde $s_{i_l} \in S$ para $l = 1, \dots, t$.

Exemplo 2.2.4 A subálgebra G_n de $U_n(K[y_{ijk}])$ é $\mathbb{Z}_n$ -graduada.

Observe que, dado um elemento $g \in G_n$, ele é escrito da seguinte forma

$$g = \zeta_1 Y_{i_1 k_1} Y_{i_2 k_2} \dots Y_{i_{m_1} k_{m_1}} + \dots + \zeta_n Y_{l_1 r_1} Y_{l_2 r_2} \dots Y_{l_{m_w} r_{m_w}}.$$

Note que a componente homogênea de grau i de g é formada pela soma das parcelas que tem grau total i , e essa soma é formada por uma combinação linear de produtos de Y 's que são geradores de G_n . Portanto, cada componente homogênea ainda pertence a G_n , daí, segue que G_n é uma subálgebra graduada de $U_n(K[y_{ijk}])$.

Exemplo 2.2.5 A subálgebra G_n satisfaz todas as identidades graduadas de $U_n(K)$.

De fato, devemos verificar que $Id^{gr}(U_n(K)) \subseteq Id^{gr}(G_n)$. De fato, como $U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]$ e $U_n(K[y_{ijk}])$ são isomorfas, temos pela Proposição 1.2.37 que

$$Id^{gr}(U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]) = Id^{gr}(U_n(K[y_{ijk}])),$$

e com K infinito, pela Proposição 1.2.54, toda identidade polinomial graduada de $U_n(K)$ é também identidade para $U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]$, ou seja,

$$Id^{gr}(U_n(K)) \subset Id^{gr}(U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]).$$

Por outro lado, como $K[y_{ijk}]$ tem unidade, então $U_n(K)$ é isomorfa a uma subálgebra de $U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]$, daí, segue que

$$Id^{gr}(U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]) \subset Id^{gr}(U_n(K)).$$

Portanto, $Id^{gr}(U_n(K) \otimes_K K[y_{ijk}]) = Id^{gr}(U_n(K))$. Assim, $Id^{gr}(U_n(K)) = Id^{gr}(U_n(K[y_{ijk}])),$ e como G_n é subálgebra de $U_n(K[y_{ijk}])$, então ela satisfaz todas as identidades de $U_n(K[y_{ijk}])$, ou seja, G_n satisfaz todas as identidades de $U_n(K)$.

Lema 2.2.6 A álgebra G_n é isomorfa como álgebra graduada a álgebra relativamente livre $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K))$ da variedade de álgebras $\mathbb{Z}_n$ -graduadas $\mathcal{V}(U_n(K))$.

Prova. Consideremos a aplicação $\beta_0 : x_{ij} \rightarrow Y_{ij}$, com G_n sendo uma álgebra (associativa com unidade), temos pela Proposição 1.1.34 que $K\langle X \rangle$ é livre na classe das álgebras (associativas com unidade), assim β_0 pode ser estendida a um homomorfismo $\beta : K\langle X \rangle \rightarrow G_n$ de álgebras graduadas. Note que os geradores de G_n estão na imagem de β , e isso faz dele, um homomorfismo sobrejetor. Agora, nosso próximo objetivo é determinar o núcleo de β , mostrando que $\ker(\beta) = Id^{gr}(U_n(K))$, e com isso, utilizarmos o Teorema Fundamental dos Homomorfismos 1.2.39 para concluirmos que as álgebras graduadas G_n e $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K))$ são isomorfas.

Primeiro mostremos que, se $f \in \ker(\beta)$, então f é identidade polinomial para $U_n(K)$, ou seja, $f \in Id^{gr}(U_n(K))$. Considere $f \in K\langle X \rangle$, se $f \in \ker(\beta)$, então temos que

$$\beta(f(x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_mj_m})) = 0_{G_n}$$

assim, como

$$\begin{aligned} 0_{G_n} &= \beta(f(x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_mj_m})) = f(\beta(x_{i_1j_1}), \beta(x_{i_2j_2}), \dots, \beta(x_{i_mj_m})) \\ &= f(Y_{i_1j_1}, Y_{i_2j_2}, \dots, Y_{i_mj_m}) \end{aligned}$$

obtemos que

$$f(Y_{i_1j_1}, Y_{i_2j_2}, \dots, Y_{i_mj_m}) = 0_{G_n}.$$

Agora iremos considerar $r_1, \dots, r_m$ elementos arbitrários de $U_n(K)$, sendo

$$r_k = r_{1,i+1,k}e_{1,i+1} + r_{2,i+2,k}e_{2,i+2} + \dots + r_{n-i,n,k}e_{n-i,n}$$

com $r_{ijk} \in K$. Consideremos a aplicação

$$y_{ijk} \rightarrow r_{ijk}, \text{ se } 1 \leq k \leq m$$

$$y_{ijk} \rightarrow 0_K, \text{ se } k > m$$

usando o fato de $K[y_{ijk}]$ ser uma álgebra comutativa livre para construir o homomorfismo que estende a aplicação acima

$$\Phi : K[y_{ijk}] \rightarrow K,$$

e assim, obtemos um homomorfismo

$$U_n(K[y_{ijk}]) \rightarrow U_n(K)$$

tal que a imagem de

$$z_{1,i+1,k}e_{1,i+1} + z_{2,i+2,k}e_{2,i+2} + \dots + z_{n-i,n,k}e_{n-i,n}$$

é igual a

$$\Phi(z_{1,i+1,k})e_{1,i+1} + \Phi(z_{2,i+2,k})e_{2,i+2} + \dots + \Phi(z_{n-i,n,k})e_{n-i,n}.$$

Como G_n é subálgebra de $U_n(K[y_{ijk}])$, então podemos restringir o homomorfismo acima a um homomorfismo

$$\phi : G_n \rightarrow U_n(K)$$

$$\begin{aligned} \phi(Y_{ik}) &= \phi(y_{1,i+1,k}e_{1,i+1} + y_{2,i+2,k}e_{2,i+2} + \dots + y_{n-i,n,k}e_{n-i,n}) \\ &= \Phi(y_{1,i+1,k})e_{1,i+1} + \Phi(y_{2,i+2,k})e_{2,i+2} + \dots + \Phi(y_{n-i,n,k})e_{n-i,n}. \end{aligned}$$

Note que se $1 \leq k \leq m$, então temos que

$$\begin{aligned} &\Phi(y_{1,i+1,k})e_{1,i+1} + \Phi(y_{2,i+2,k})e_{2,i+2} + \dots + \Phi(y_{n-i,n,k})e_{n-i,n} \\ &= r_{1,i+1,k}e_{1,i+1} + r_{2,i+2,k}e_{2,i+2} + \dots + r_{n-i,n,k}e_{n-i,n} \\ &= r_k, \end{aligned}$$

portanto, podemos concluir que, $\phi(Y_{ik}) = r_k$.

Agora que temos o homomorfismo ϕ , podemos aplicá-lo da seguinte forma

$$\phi(f(Y_{i_1j_1}, Y_{i_2j_2}, \dots, Y_{i_mj_m})) = \phi(0_{G_m}) = 0_{U_n(K)},$$

daí segue que

$$f(\phi(Y_{i_1j_1}), \phi(Y_{i_2j_2}), \dots, \phi(Y_{i_mj_m})) = 0_{U_n(K)}$$

logo, $f(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0_{U_n(K)}$. Assim, f é identidade polinomial graduada para $U_n(K)$, ou seja, $f \in Id^{gr}(U_n(K))$ e, obtemos que $\ker(\beta) \subset Id^{gr}(U_n(K))$.

Agora, mostremos a inclusão contrária, ou seja, $Id^{gr}(U_n(K)) \subset \ker(\beta)$, para isso mostremos que dado f em $Id^{gr}(U_n(K))$ então $f \in \ker(\beta)$. Com efeito, suponhamos por absurdo que

$$f(x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_mj_m}) \in Id^{gr}(U_n(K)),$$

mas

$$f(Y_{i_1j_1}, Y_{i_2j_2}, \dots, Y_{i_mj_m}) \neq 0,$$

afinal, isso é equivalente a f não pertencer a $\ker(\beta)$.

Assim, como $f(Y_{i_1j_1}, Y_{i_2j_2}, \dots, Y_{i_mj_m}) \in G_n$, logo

$$0 \neq f(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_mj_m}) = \mu_{1,i+1,k}e_{1,i+1} + \mu_{2,i+2,k}e_{2,i+2} + \dots + \mu_{n-i,n,k}e_{n-i,n},$$

com $\mu_{ijk} \in K[y_{ijk}]$. Como o resultado dessa soma acima é uma matriz não nula, então existem i_0, j_0 com $\mu_{i_0j_0k} \neq 0$ nas variáveis comutativas y_{ijk} , com coeficientes no corpo infinito K . Se o corpo é infinito e temos um polinômio não nulo, então podemos substituir as variáveis por elementos do corpo, de tal maneira, que o resultado seja diferente de zero, ou seja, existe um homomorfismo $\Phi' : K[y_{ijk}] \rightarrow K$, tal que, $\Phi'(\mu_{i_0j_0k}) \neq 0$. Seja $\phi' : G_n \rightarrow U_n(K)$ um homomorfismo, obtido através de Φ' , da mesma maneira que o ϕ é obtido de Φ , então teremos

$$\phi'(f(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_nj_n})) = \phi'(\mu_{1,i+1,k}e_{1,i+1} + \mu_{2,i+2,k}e_{2,i+2} + \dots + \mu_{n-i,n,k}e_{n-i,n}) \quad (1)$$

por um lado

$$\phi'(f(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_nj_n})) = f(\phi'(Y_{i_1j_1}), \dots, \phi'(Y_{i_nj_n})) = f(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$$

onde $s_{in} = \phi'(Y_{i_nj_n})$. Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \phi'(f(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_nj_n})) &= \phi'(\mu_{1,i+1,k}e_{1,i+1} + \mu_{2,i+2,k}e_{2,i+2} + \dots + \mu_{n-i,n,k}e_{n-i,n}) \\ &= \Phi(\mu_{1,i+1,k})e_{1,i+1} + \Phi(\mu_{2,i+2,k})e_{2,i+2} + \dots + \Phi(\mu_{n-i,n,k})e_{n-i,n} \end{aligned}$$

logo, temos que essa última igualdade acima é diferente de zero, pelo fato de $\Phi(\mu_{i_0j_0k}) \neq 0$. Além do mais, pela igualdade (1) obtemos que $f(s_{i_1}, \dots, s_{i_n}) \neq 0$, o que é um absurdo, pois temos como hipótese que f é identidade polinomial para $U_n(K)$. Portanto, se $f \in Id^{gr}(U_n(K))$ então $f \in \ker(\beta)$, ou seja, $Id^{gr}(U_n(K)) \subset \ker(\beta)$.

Por fim, chegamos no resultado que $Id^{gr}(U_n(K)) = \ker(\beta)$, e assim, pelo Teorema Fundamental do Homomorfismo 1.2.39, temos que, a partir de β existe um isomorfismo de $K\langle X \rangle / \ker(\beta) \rightarrow Im\beta$, como β é sobrejetiva e diante do resultado que acabamos de obter temos que esse isomorfismo é da seguinte forma, $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K)) \rightarrow G_n$, e por fim, chegamos no resultado desejado, G_n e $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K))$ são isomorfas. ■

Vamos trabalhar na álgebra G_n em vez da álgebra $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K))$, usando algumas ideias de [2]. No próximo lema utilizamos a mesma ideia trabalhada em [5].

Lema 2.2.7 *Sejam $m_s = m_s(x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_kj_k})$, $s = 1, 2$, dois monômios em $K\langle X \rangle$. Suponha que as matrizes*

$$M_1 = m_1(Y_{i_1j_1}, Y_{i_2j_2}, \dots, Y_{i_kj_k}) \text{ e } M_2 = m_2(Y_{i_1j_1}, Y_{i_2j_2}, \dots, Y_{i_kj_k})$$

em G_n tem as mesmas entradas diferentes de zero nas mesmas posições em suas primeiras linhas. (Em outras palavras, $M_1 - M_2$ tem zeros em sua primeira linha.) Então $M_1 = M_2$.

Prova. Primeiramente mostraremos o seguinte fato: Seja

$$m(x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}) = x_{r_1s_1} \dots x_{r_qs_q},$$

onde $x_{r_ls_l} \in \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}\}$, um monômio não nulo em $K\langle X \rangle$ tal que seu grau total seja q e $r_1 + \dots + r_q < n$. Então

$$m(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_kj_k}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & w_t \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

onde $t = n - (r_1 + \dots + r_q)$ e $w_k = y_{k,r_1+k,s_1} y_{r_1+k,r_1+r_2+k,s_2} \dots y_{r_1+\dots+r_{q-1}+k,r_1+\dots+r_q+k,s_q}$ são monômios em $K[y_{ijk}]$.

Provaremos o fato acima por indução sobre q . Para $q = 1$ não há nada a se demonstrar, pois $m(Y_{i_1j_1}) = Y_{i_1s_1}$. Agora, suponha $q > 1$. Então tomemos $n(x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}) = x_{r_1s_1} \dots x_{r_{q-1}s_{q-1}}$ e obtemos $m(x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}) = n(x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}) x_{r_qs_q}$, onde o grau total de $n(x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k})$ é $q - 1$ e por hipótese de indução, temos que

$$n(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_kj_k}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & w'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & w'_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & w'_{t'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

onde $t' = n - (r_1 + \dots + r_{q-1})$ e $w'_k = y_{k,r_1+k,s_1} y_{r_1+k,r_1+r_2+k,s_2} \dots y_{r_1+\dots+r_{q-2}+k,r_1+\dots+r_{q-1}+k,s_{q-1}}$. Daí, note que $m(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_kj_k}) = n(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_kj_k}) Y_{r_qs_q}$, assim,

$$m(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_kj_k}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & w'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & w'_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & w'_{t'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & y_{t''} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

sendo $y_k = y_{k,r_q+k,s_q}$ e $t'' = n - r_q$.

Como $r_1 + \dots + r_q < n$, logo teremos que $r_1 + \dots + r_{q-1} + 1 \leq n - r_q$. Consideremos $q' = r_1 + \dots + r_{q-1}$, assim, o produto $n(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_kj_k}) Y_{r_qs_q}$ é igual a

$$(w'_1 e_{1,q'+1} + w'_2 e_{2,q'+2} + \dots + w'_{n-q'} e_{n-q',n})(y_1 e_{1,r_q+1} + y_2 e_{2,r_q+2} + \dots + y_{n-r_q} e_{n-r_q,n}) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-q'} \sum_{p=1}^{n-r_q} w'_l y_p e_{l,q'+l} e_{p,r_q+p}.$$

Como $q' + 1 \leq n - r_q$, então tem a possibilidade de existir algum valor para p , tal que, $p = q' + l$, para algum valor de l e assim obtemos que $e_{l,q'+l} e_{p,r_q+p} \neq 0$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{n-q'} \sum_{p=1}^{n-r_q} w'_l y_p e_{l,q'+l} e_{p,r_q+p} \\ &= w'_1 y_{q'+1} e_{1,r_q+q'+1} + w'_2 y_{q'+2} e_{2,q'+r_q+2} + \cdots + w'_{n-q'-r_q} y_{n-r_q} e_{n-q'-r_q,n}, \end{aligned}$$

daí segue que $m(Y_{i_1 j_1}, \dots, Y_{i_k j_k})$ será da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & w_t \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, concluímos a demonstração do fato citado acima e podemos utilizá-lo para obtemos o resultado desejado no lema.

Sejam M_1 e M_2 as matrizes da hipótese do lema, do fato demonstrado acima segue que,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & z_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & z'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & z'_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & z'_{l'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

como M_1 e M_2 tem a mesma entrada diferente de zero na mesma posição, na primeira linha, então, pela estrutura das duas matrizes exibidas acima, teremos que as outras entradas diferentes de zero nas próximas linhas ocupam posições iguais em ambas as matrizes, e além disso, os índices de $z_2, \dots, z_l$ serão determinados através do índice de z_1 , o mesmo ocorre para $z'_2, \dots, z'_{l'}$, através de z'_1 , como $z_1 = z'_1$, então, pela maneira de definir os índices de cada entrada, teremos $M_1 = M_2$. ■

Corolário 2.2.8 *Sob as hipóteses e na notação do lema anterior, temos que $m_1 - m_2 \in Id^{gr}(U_n(K))$.*

Prova. Aqui utilizaremos a definição de $\beta : K\langle X \rangle \rightarrow G_n$ vista no Lema 2.2.6, lembramos que $\ker(\beta) = Id^{gr}(U_n(K))$. Assim, teremos que $\beta(m_1) = M_1$ e $\beta(m_2) = M_2$, logo, como $M_1 = M_2$ pelo resultado do lema visto anteriormente, obtemos que

$$\beta(m_1 - m_2) = M_1 - M_2 = 0,$$

ou seja, $m_1 - m_2 \in \ker(\beta) = Id^{gr}(U_n(K))$, portanto, chegamos no resultado. ■

Proposição 2.2.9 *Sejam $m_1(x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}) = x_{r_1s_1} \dots x_{r_qs_q}$ com $x_{r_qs_q} \in \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}\}$ e $m_2(x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}) = x_{r'_1s'_1} \dots x_{r'_ps'_p}$ com $x_{r'_ps'_p} \in \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_kj_k}\}$ monômios do tipo (3) tais que $m_1 - m_2 \in Id^{gr}(U_n(K))$, então $m_1 = m_2$.*

Prova. Se $m_1 - m_2 \in Id^{gr}(U_n(K))$, então temos que

$$m_1(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_kj_k}) = m_2(Y_{i_1j_1}, \dots, Y_{i_kj_k}).$$

Considerando w_1 o elemento não nulo da primeira linha do lado direito e w'_1 do lado esquerdo da igualdade acima, teremos que, como m_1 e m_2 são do tipo (3), então $r_1 + \dots + r_q < n$ e $r'_1 + \dots + r'_p < n$, assim, pelo que foi feito na prova do Lema 2.2.7,

$$w_1 = y_{1,r_1+1,s_1} y_{r_1+1,r_1+r_2+1,s_2} \dots y_{r_1+\dots+r_{q-1}+1,r_1+\dots+r_q+1,s_q}$$

e

$$w'_1 = y_{1,r'_1+1,s'_1} y_{r'_1+1,r'_1+r'_2+1,s'_2} \dots y_{r'_1+\dots+r'_{p-1}+1,r'_1+\dots+r'_p+1,s'_p}.$$

Agora observe que, o grau total de w_1 é q e o de w'_1 é p , como $w_1 = w'_1$, daí, segue que $p = q$. Além disso, os primeiros índices de cada variável de w_1 e w'_1 estão organizados de forma não decrescente, e podemos obter r_i como sendo a diferença entre o segundo e o primeiro índices da i -ésima variável. De modo análogo, podemos determinar os r'_i , assim, como $w_1 = w'_1$, então $r_i = r'_i$, para $i = 1, \dots, p$.

Por fim, analisemos se $s_i = s'_i$. Para isso, suponhamos por absurdo que, $s_1 \neq s'_1$, o que significa que, $y_{1,r_1+1,s_1} \neq y_{1,r'_1+1,s'_1}$, então, como $w_1 = w'_1$, sem perda de generalidade, y_{1,r_1+1,s_1} deve ocupar uma posição $t > 1$ em w'_1 , ou seja,

$$y_{1,r_1+1,s_1} = y_{r'_1+r'_2+\dots+r'_{t-1}+1,r'_1+\dots+r'_t+1,s'_t}$$

assim, obtemos as seguintes igualdades

$$1 = r'_1 + r'_2 + \dots + r'_{t-1} + 1, \quad r_1 + 1 = r'_1 + \dots + r'_t + 1, \quad \text{e} \quad s_1 = s'_t$$

como $r_i = r'_i$, daí segue que, $r_1 = r_2 = \dots = r_{t-1} = r_t = 0$. Assim, teremos em w_1 um bloco de variáveis de grau zero que terá pelo menos as t primeiras variáveis de w_1 . Como $r_i = r'_i$, então, também teremos em w'_1 um bloco de variáveis de grau zero que terá pelo menos as t primeiras variáveis de w'_1 . Observe que, nesse primeiro bloco de variáveis em w_1 e em w'_1 , ele contém todas as variáveis de grau zero que têm seu primeiro índice igual a 1, assim, como $w_1 = w'_1$ teremos que os s' correspondentes as variáveis desse bloco de w_1 formam uma permutação dos s que estão distribuídos no bloco de w_1 . Como m_1 e m_2 são do tipo (3), então esses s e os s' estão organizados da esquerda para a direita de forma crescente, portanto, como nesses blocos teremos a mesma quantidade de variáveis, e analisando a ordenação desses índices, concluímos que $s_i = s'_i$, $i = 1, \dots, t$, o que nos permite concluir que $s_1 = s'_1$, contrariando a nossa suposição. Logo, $y_{1,r_1+1,s_1} = y_{1,r'_1+1,s'_1}$.

Para concluímos, podemos utilizar o fato de que $w_1 = w'_1$ e eliminar o primeiro elemento em ambos os monômios, e assim podemos aplicar novamente esse processo para o primeiro elemento do restante dos monômios w_1 e w'_1 . Assim, sempre ocorrerá que $s_i = s'_i$, para $i = 1, \dots, p$. ■

A próxima demonstração é uma generalização do Teorema 2.1.8, utilizando o fato da subálgebra G_n e a álgebra graduada relativamente livre da variedade determinada por $U_n(K)$ serem isomorfas e os resultados obtidos anteriormente sobre matrizes genéricas.

Teorema 2.2.10 *Seja K um corpo infinito, então os monômios (3) são uma base de $K\langle X \rangle$ módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Além disso, $Id^{gr}(U_n(K)) = \langle [x_{01}, x_{02}], x_{i1}x_{j2} | i + j \geq n \rangle$.*

Prova. Seja J o $T_{\mathbb{Z}_n}$ -ideal gerado pelos polinômios (1) e (2) e seja $I = Id^{gr}(U_n(K))$. Primeiramente, note que, podemos verificar que, módulo J , todo elemento de $K\langle X \rangle$ pode ser escrito como uma combinação linear de monômios do tipo (3), da mesma maneira que foi feito no Teorema 2.1.8.

Provemos que $I = J$. Desde que $J \subset I$ é suficiente mostrar que $I \subset J$. Suponha, ao contrário, que exista um polinômio multihomogêneo $f \in I$ mas $f \notin J$. Trabalhamos na álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_n$ -graduada $K\langle X \rangle/I$ isomorfa a G_n , e escolhemos $f \in G_n$ de grau mínimo, e entre estes f , escolha aquele que é expresso na forma $f = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_s m_s$ para m_t sendo monômios distintos do tipo (3) em G_n , todo $\alpha_t \neq 0$, $\alpha_t \in K$ e s é o menor possível. Portanto, $s \geq 1$.

Suponha $m_t = m_t(x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \dots, x_{i_k j_k})$. Então, como f também é identidade para G_n , obtemos

$$m_1(Y_{i_1 j_1}, Y_{i_2 j_2}, \dots, Y_{i_k j_k}) = \sum_{z=2}^s \beta_z m_z(Y_{i_1 j_1}, Y_{i_2 j_2}, \dots, Y_{i_k j_k})$$

onde $\beta_z = -\alpha_z/\alpha_1 \neq 0$, $z = 2, 3, \dots, s$.

Por outro lado, temos que $m_1(Y_{i_1 j_1}, Y_{i_2 j_2}, \dots, Y_{i_k j_k}) \neq 0$ e na primeira linha desta matriz haverá alguma entrada diferente de zero. Esta entrada diferente de zero aparece no lado direito também. Digamos que vem do monômio m_2 . Mas então os monômios m_1 e m_2 têm a mesma entrada diferente de zero na mesma posição em suas primeiras linhas e, portanto, $m_1 - m_2 \in I$, de acordo com o Corolário 2.2.8. Logo, pela Proposição 2.2.9 $m_1 = m_2$, e reduzimos f para $s - 1$ monômios que contradiz a escolha de s . Portanto, $s = 0$ e $I = J$.

Agora verifiquemos que os monômios (3) são linearmente independentes, módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Suponha que

$$\sum_{i=1}^t \alpha_i m_i \in Id^{gr}(U_n(K)),$$

onde m_i são monômios distintos do tipo (3) para $0 \neq \alpha_i \in K$. Uma vez que K é infinito, podemos assumir que os monômios m_i são todos multihomogêneos e do mesmo multigrado. Esse somatório acima também é identidade para G_n , então se substituir as variáveis por matrizes graduadas genéricas, teremos que o resultado será igual a zero, e portanto, pode-se expressar m_1 aplicado nas matrizes genéricas da seguinte maneira

$$m_1 = - \sum_{i=2}^t \beta_i m_i$$

a primeira linha de m_1 irá conter alguma entrada diferente de zero, caso contrário, m_1 pertenceria a $Id^{gr}(U_n(K))$. A mesma entrada diferente de zero deve aparecer em algum dos monômios do lado direito, digamos em m_2 . Portanto, $m_1 - m_2 \in Id^{gr}(U_n(K))$, logo pela Proposição 2.2.9, $m_1 = m_2$, e assim, reduzimos nossa combinação linear para $t - 1$ termos. Finalmente, obtemos um único monômio, digamos que seja $\alpha_l m_l$, mas não pode ser uma identidade graduada para $U_n(K)$, uma vez que é de grau menor que n , e conterà

em sua primeira linha algum valor diferente de zero quando avaliado em G_n . Portanto, restamos que $\alpha_l = 0$, como escolhemos a constante de forma arbitrária, temos que será válido para qualquer α , e finalmente, obtemos que os monômios do tipo (3) são linearmente independentes, módulo I. ■

Observe que a demonstração do teorema acima não utiliza argumentos em relação a característica do corpo K , ou seja, ele é válido independentemente da sua característica, portanto, é uma generalização do Teorema 2.1.8.

2.3 Aplicações

Nesta seção de aplicações utilizaremos alguns conceitos e resultados vistos anteriormente para calcular a n -ésima codimensão (Definição 1.2.48) $\mathbb{Z}_n$ -graduada de $U_n(K)$. Começaremos citando alguns teoremas importantes para a obtenção dos resultados desta seção.

Teorema 2.3.1 (*Teorema Multinomial*). *Dados inteiros não negativos $n_1, n_2, \dots, n_k$ tais que $n_1 + \dots + n_k = n$, o coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ no desenvolvimento de $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ é igual a*

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Desse teorema também segue o próximo resultado, que também será utilizado na demonstração da Proposição 2.3.4. Se fixados inteiros positivos n e k , se somarmos os valores de $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ sobre todas as k -uplas ordenadas de $(n_1, \dots, n_k)$ de inteiros não negativos $n_1, \dots, n_k$ tais que $n_1 + \dots + n_k = n$, o resultado obtido é igual a k^n , ou seja,

$$\sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} = k^n.$$

Teorema 2.3.2 (*Teorema das Colunas*) *Dados inteiros não negativos w e p , a soma dos $p + 1$ primeiros números da coluna w do Triângulo de Pascal é*

$$\binom{w}{w} + \binom{w+1}{w} + \dots + \binom{w+p}{w} = \binom{w+p+1}{w}.$$

As demonstrações de ambos os teoremas acima podem ser consultadas na nossa referência [4].

Teorema 2.3.3 *Seja $c(m, n)$ o número de composições de n com exatamente m partes, então temos que*

$$c(m, n) = \binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}.$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [1].

Agora, iniciamos com os resultados desta seção.

Proposição 2.3.4 *Sejam m um inteiro positivo fixado e $x_{0j_1}, x_{0j_2}, \dots, x_{0j_s}$ fixadas. Suponha que $x_{z_1, r_1}, x_{z_2, r_2}, \dots, x_{z_g, r_g}$, $g = m - s$, sejam fixadas, $1 \leq z_i \leq n - 1$ para todo i e $z_1 + z_2 + \dots + z_g \leq n - 1$. Então, o espaço gerado por todos os monômios multilineares nestas variáveis em $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K))$ tem dimensão $(m - s)!(m - s + 1)^s$.*

Prova. Primeiramente, note que, a dimensão do espaço gerado por todos os monômios multilineares módulo $Id^{gr}(U_n(K))$ nas variáveis citadas no enunciado acima será a quantidade desses monômios que também são linearmente independentes módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Se considerarmos o seguinte monômio diferente de zero, sendo multilinear na álgebra $\mathbb{Z}_n$ -graduada $K\langle X \rangle$,

$$w_0 x_{z_1, r_1} w_1 \dots w_{g-1} x_{z_g, r_g} w_g$$

fazendo w_i depender das variáveis x_{0j} de grau 0. Em relação as variáveis x_{zj} , $1 \leq z \leq n - 1$, temos que $z_1 + z_2 + \dots + z_g < n$, e além disso, como $[x_{01}, x_{02}] \in Id^{gr}(U_n(K))$, utilizando o mesmo argumento que no Teorema 2.1.8, que os índices de cada g_i estão organizados em ordem crescente, da esquerda para a direita. Assim, esse monômio é do tipo (3), e portanto, será linearmente independente módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Portanto, a dimensão do espaço gerado por todos os monômios multilineares nas variáveis x_{0j} e x_{zj} em $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K))$ será a quantidade de monômios desse tipo nessas variáveis. Então, calculemos.

Supondo que o número de variáveis x_{0j} é s , e o de x_{zj} é $m - s$. Se w_u depende de t_u variáveis, $1 \leq u \leq g + 1$, se fixamos essas variáveis obtemos $(m - s)!$ monômios do tipo desejado, permutando apenas as variáveis x_{zj} . Agora dividindo as variáveis x_{0j} em grupos, t_i em i -ésimo grupo, podemos considerar cada w_u , utilizando combinação temos que, se no primeiro bloco tivermos t_1 variáveis para serem escolhidas entre as s teremos que ficará

$$\binom{s}{t_1}$$

para o segundo bloco, se tivermos t_2 variáveis, então serão escolhidas entre as $s - t_1$ variáveis e ficaremos com

$$\binom{s - t_1}{t_2}$$

e assim, sucessivamente. Assim, obtemos

$$\binom{s}{t_1} \binom{s - t_1}{t_2} \binom{s - t_1 - t_2}{t_3} \dots \binom{s - t_1 - t_2 - t_3 - \dots - t_g}{t_{g+1}} = \frac{s!}{t_1! t_2! \dots t_{g+1}!}.$$

Agora, somando todas essas divisões de x_{0j} em grupos k (alguns deles podem estar vazio) obtém-se

$$\sum_{t_1 + t_2 + \dots + t_{g+1} = s} \binom{s}{t_1, \dots, t_{g+1}} = (g + 1)^s$$

além disso, pela maneira que definimos o monômio temos que ele tem exatamente g variáveis do tipo x_{zq} , que ficou definido como sendo a quantidade de variáveis totais menos a quantidade de variáveis de grau zero, ou seja, $g = m - s$, portanto, o espaço gerado por todos os monômios multilineares nestas variáveis em $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K))$ tem dimensão $(m - s)!(m - s + 1)^s$. ■

No resultado acima consideramos os monômios multilineares num conjunto fixo de variáveis que são da forma

$$x_{i_1, j_1} x_{i_2, j_2} \dots x_{i_m, j_m} \quad (4)$$

onde $\{j_1, j_2, \dots, j_m\} = \{1, 2, \dots, m\}$ e $0 \leq i_t \leq n - 1$. Ou seja, não admitimos repetições dos segundos índices nas variáveis. Em seguida, calculamos a codimensão graduada $C_m^{gr}(U_n(K))$.

Teorema 2.3.5 *A codimensão $C_m^{gr}(U_n(K))$ é igual a*

$$C_m^{gr}(U_n(K)) = \sum_{q=0}^M \binom{m}{q} \binom{n-1}{q} q!(q+1)^{m-q},$$

onde $M = \min\{m, n-1\}$.

Prova. Seja $f = g_1 y_1 g_2 y_2 \dots g_q y_q g_{q+1} \in P_m^{gr}(U_n(K))$ um monômio multilinear diferente de zero nas variáveis $x_{ij}, 0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m$ onde para $l = 1, \dots, q+1$, os g_l 's são monômios (possivelmente vazios) nas variáveis x_{0j} apenas, e para $r = 1, \dots, q$, $y_r = x_{a_r, b_r}$, com $1 \leq a_r \leq n-1, 1 \leq b_r \leq m$. Desde que $f \in P_m^{gr}(U_n(K))$, temos que impor $a_1 + a_2 + \dots + a_q \leq n-1$. Observe então que $q \leq \min\{m, n-1\}$.

Denote por $A_{n-1}(q)$ o número de q -uplas de inteiros positivos $a_1, a_2, \dots, a_q$ tais que $a_1 + a_2 + \dots + a_q \leq n-1$, e $B_{n-1}(q)$ é o número de tais q -uplas com $a_1 + a_2 + \dots + a_q = n-1$. Então obtemos $A_{n-1}(q) = B_{n-1}(q) + B_{n-2}(q) + \dots + B_q(q)$. Por outro lado, pelo Teorema 2.3.3, temos que $B_r(q) = \binom{r-1}{q-1}$ é o número de composições de r em partes q . Portanto, usando o Teorema 2.3.2 em coeficientes binomiais, obtemos

$$\begin{aligned} A_{n-1}(q) &= \sum_{r=q}^{n-1} B_r(q) = B_q(q) + B_{q+1}(q) + \dots + B_{n-1}(q) \\ &= \binom{q-1}{q-1} + \binom{q}{q-1} + \dots + \binom{n-2}{q-1} = \binom{n-1}{q}. \end{aligned}$$

Agora, para os índices b_r de $y_r = x_{a_r, b_r}$, temos $m!/(m-q)! = q! \binom{m}{q}$ escolhas (sem repetição). Portanto, existem

$$q! \binom{m}{q} \binom{n-1}{q}$$

possibilidades para $y_1, \dots, y_q$.

Agora, fixemos $q \in \{0, \dots, M\}$ e as variáveis y . Utilizando mesmo processo feito para as variáveis de grau zero na Proposição 2.3.4 concluímos que existem $(q+1)^{m-q}$ possibilidades de posicionamento das variáveis de grau zero nesse caso. Assim, para um $q \in \{0, \dots, M\}$ fixo, obtemos

$$q! \binom{m}{q} \binom{n-1}{q} (q+1)^{m-q}.$$

Observe que o coeficiente binomial $\binom{n-1}{q}$ é igual a 0 sempre que $q > n-1$. Logo, chegamos ao resultado

$$C_m^{gr}(U_n(K)) = \sum_{q=0}^M \binom{m}{q} \binom{n-1}{q} q!(q+1)^{m-q}$$

com $M = \min\{m, n - 1\}$. ■

Como consequência do Teorema 2.3.5, podemos agora calcular o comportamento assintótico da sequência de codimensões graduadas $C_m^{gr}(U_n(K))$.

Lembre-se de que se $f(n)$ e $g(n)$ são duas funções de um número natural, então $f(n)$ e $g(n)$ são assintoticamente iguais, e escrevemos $f(n) \simeq g(n)$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Corolário 2.3.6 *Para todo m nos naturais:*

$$C_m^{gr}(U_n(K)) \simeq \frac{1}{n^{n-1}} m^{n-1} n^m.$$

Prova. Mostraremos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m^{gr}(U_n(K))}{\frac{1}{n^{n-1}} m^{n-1} n^m} = 1.$$

Com $M = \min\{m, n - 1\}$, para $m \leq n - 1$, temos que $M = n - 1$, assim

$$C_m^{gr}(U_n(K)) = \sum_{q=0}^{n-1} \binom{m}{q} \binom{n-1}{q} q!(q+1)^{m-q}.$$

Agora, mostremos que

$$C_m^{gr}(U_n(K)) \simeq \binom{m}{n-1} (n-1)! n^{m-n+1}.$$

Para isso, iremos dividir em dois casos, quando $q = n - 1$ e quando $0 \leq q \leq n - 2$. No primeiro caso, obtemos que

$$\frac{\binom{m}{q} \binom{n-1}{q} q!(q+1)^{m-q}}{\binom{m}{q} q! n^{m-n+1}} = \frac{(q+1)^{m-q}}{n^{m-n+1}}$$

como $q = n - 1$, logo $q + 1 = n$, e além disso, $-q = -n + 1$

$$\frac{n^{m-q}}{n^{m-n+1}} = 1.$$

Agora, para o caso $0 \leq q \leq n - 2$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\binom{m}{q} \binom{n-1}{q} q!(q+1)^{m-q}}{\binom{m}{n-1} (n-1)! n^{m-n+1}} &= \frac{\frac{(n-1)!}{q!(n-q-1)!} q!(q+1)^{m-q}}{(n-1)! n^{m-n+1}} \frac{\binom{m}{q}}{\frac{m!}{(m-n+1)!}} \\ &= \frac{\frac{(n-1)!}{(n-q-1)!} (q+1)^{m-q}}{n^{m-n+1}} \frac{\binom{m}{q}}{\frac{m!}{(m-n+1)!}}. \end{aligned}$$

Note que, ambos os fatores do produto acima tendem a zero quando $m \rightarrow \infty$. Portanto, obtemos o seguinte resultado

$$C_m^{gr}(U_n(K)) \simeq \binom{m}{n-1} (n-1)! n^{m-n+1}.$$

Como $m(m-1)\dots(m-n+2) = m^{n-1} + f(m)$ onde $f(m)$ é um polinômio em m de grau $n-2$, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{m^{n-1}} = 1,$$

e assim,

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{(n-1)!} (n-1)! n^{m-n+1} \simeq m^{n-1} n^{m-n+1} = \frac{1}{n^{n-1}} m^{n-1} n^m.$$

■

Capítulo 3

Graduações Elementares e Identidades Polinomiais na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores

Neste capítulo incluímos o estudo do artigo "Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities", referência [24]. Começamos com uma descrição das graduações elementares para a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$, por um grupo G , mostrando que se G é finito, então há $|G|^{n-1}$ G -graduações elementares diferentes na álgebra $U_n(K)$, podendo distinguir as graduações elementares por suas identidades graduadas. Além disso, encontramos geradores para as identidades polinomiais G -graduadas de $U_n(K)$, para uma G -graduação elementar, e uma base linear para os polinômios Y -próprios na álgebra graduada relativamente livre $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$.

Aqui consideramos K um corpo infinito e denotaremos o elemento neutro do grupo G por 1.

3.1 Graduações Elementares para a Álgebra $U_n(K)$

Iniciamos esta seção com a definição de graduações elementares para a álgebra das matrizes.

Definição 3.1.1 *A graduação $M_n(K) = \bigoplus_{g \in G} A_g$ na álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K é dita elementar se, existe uma n -upla $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ tal que $e_{ij} \in A_{g_i^{-1}g_j}$ para quaisquer índices $1 \leq i, j \leq n$.*

De modo análogo definimos a seguir graduações elementares para álgebras de matrizes triangulares superiores.

Definição 3.1.2 *A graduação $U_n(K) = \bigoplus_{g \in G} A_g$ na álgebra das matrizes $n \times n$ triangulares superiores sobre um corpo K é dita elementar se, existe uma n -upla $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ tal que $e_{ij} \in A_{g_i^{-1}g_j}$, para quaisquer índices $1 \leq i \leq j \leq n$.*

No próximo exemplo mostramos que a $\mathbb{Z}_n$ -graduação de $U_n(K)$ utilizada no Capítulo 2 é elementar.

Exemplo 3.1.3 *Seja a $\mathbb{Z}_n$ -graduação para a álgebra $U_n(K)$ vista no Exemplo 1.2.13, então ela é elementar.*

Usaremos a Definição 3.1.2. Consideremos $\mathbb{Z}_n = \langle g \rangle$, com $g^n = 1$, de modo que $\mathbb{Z}_n = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ e seja $(U_n(K))_{g^k}$ o subespaço de todas as matrizes elementares e_{ij} com $j - i = k$. Note que,

$$\deg(e_{ij}) = g^k = g^{-i}g^j = g^{-(i-1)}g^{j-1},$$

logo, o grau homogêneo da matriz elementar e_{ij} é o inverso do elemento da posição i operado com o elemento da posição j , assim, a $\mathbb{Z}_n$ -graduação é elementar e induzida por $\bar{g} = (1, g, g^2, \dots, g^{n-1})$.

Recorde que as identidades graduadas para a $\mathbb{Z}_n$ -graduação em $U_n(K)$ do Exemplo 3.1.3 foram descritas no Capítulo 2. E quando $n = 2$ e K é de característica 0, a graduação acima é a única $\mathbb{Z}_2$ -graduação elementar não trivial que $U_2(K)$ admite.

Lema 3.1.4 *Seja $U_n(K)$ com uma G -graduação elementar. Então, toda matriz elementar idempotente e_{ii} pertence a componente homogênea de grau 1.*

Prova. Como a G -graduação é elementar, temos que $e_{ij} \in A_{g_i^{-1}g_j}$, para $i \leq j$, ou seja, cada e_{ij} é homogêneo, e para $j = i$ temos que $g_i^{-1}g_i = 1$, logo, $e_{ii} \in A_1$. ■

Nem todas as graduações de $M_n(K)$ são elementares, no Exemplo 1.2.9, é possível perceber que a G -graduação para $M_2(K)$ não é elementar, isso devido ao fato de que a $\dim(A_e) = 1$, e pelo Exemplo 1.2.16, temos que $e_{ii} \in A_e$, logo, $\dim(A_e) \geq 2$, o que não ocorre. Mas existe uma condição suficiente para que uma graduação de $M_n(K)$ seja elementar, além disso, essa mesma condição é suficiente para uma graduação de $U_n(K)$ também ser elementar. Enunciaremos e a demonstraremos para a álgebra $U_n(K)$ no próximo teorema, usando a referência [33].

Teorema 3.1.5 *Seja G um grupo e seja $U_n(K)$ graduada por G . A graduação é elementar se, e somente se, todas as matrizes elementares e_{ij} são homogêneas.*

Prova. Claramente, se tivermos uma graduação elementar, segue da definição que as matrizes elementares e_{ij} são homogêneas. Agora, suponha que todas as matrizes elementares são homogêneas. Primeiro provemos que existem $g_1, \dots, g_n \in G$ tais que,

$$\deg(e_{i,i+1}) = g_i^{-1}g_{i+1} \quad (2)$$

para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Sejam $g_1 = 1$ e $g_2 = \deg(e_{12})$, então (2) vale para $i = 1$, pois $\deg(e_{12}) = g_2 = g_1^{-1}g_2$. Agora, suponhamos por hipótese de indução que (2) é válido para $i = 1, \dots, k-1$, em particular

$$\deg(e_{k-1,k}) = g_{k-1}^{-1}g_k.$$

Então, se considerarmos que $\deg(e_{k,k+1}) = h$ e tomarmos $g_{k+1} = g_k h$, claramente $\deg(e_{k,k+1}) = g_k^{-1}g_{k+1}$ e (2) vale para $i = k$.

Finalmente, o grau de e_{ij} para todo $1 \leq i < j \leq n$ é igual a

$$\begin{aligned} \deg(e_{ij}) &= \deg(e_{i,i+1})\deg(e_{i+1,i+2}) \dots \deg(e_{j-1,j}) \\ &= g_i^{-1}g_{i+1}g_{i+1}^{-1}g_{i+2} \dots g_{j-1}^{-1}g_j = g_i^{-1}g_j, \end{aligned}$$

e portanto, temos a prova do teorema completa. ■

Proposição 3.1.6 *Cada G -graduação elementar na álgebra $U_n(K)$ é determinada unicamente pelos graus homogêneos das matrizes elementares $e_{1,i}$, $i = 1, \dots, n$.*

Prova. Sejam $U_n(K) = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $e_{1r} \in A_{g_r}$. Temos que todas as matrizes elementares e_{ii} pertencem a A_1 , a componente neutra. Suponha que $e_{ij} \in A_g$ para algum $g \in G$ e $i < j$. Então, desde que $e_{1i}e_{ij} = e_{1j}$, obtemos que $g_i g = g_j$ e, portanto, $g = g_i^{-1}g_j$ é unicamente determinado. ■

Proposição 3.1.7 *Cada G -graduação elementar na álgebra $U_n(K)$ é determinada unicamente pelos graus homogêneos das matrizes elementares $e_{12}, e_{23}, \dots, e_{n-1,n}$ do radical de Jacobson de $U_n(K)$.*

Prova. Pela Proposição 3.1.6 é suficiente descrever os graus homogêneos dos elementos e_{1j} . Seja $U_n(K) = \bigoplus_{g \in G} A_g$, e seja $e_{r,r+1} \in A_{g_r}$. Temos que e_{11} pertence a A_1 , a componente neutra. Suponha que $e_{1j} \in A_g$ para algum $g \in G$ e $1 < j$. Então, desde que $e_{1j} = e_{12}e_{23} \dots e_{j-1,j}$, obtemos que $g = g_1g_2 \dots g_{j-1}$ e, portanto, g é determinado de forma única. ■

3.2 Identidades G -graduadas para $U_n(K)$

Ao longo desta seção iremos considerar a álgebra $U_n(K)$ com uma G -graduação elementar induzida pela n -upla $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in G^n$ e denotaremos $Y = X_1$ e $Z = \bigcup_{g \neq 1} X_g$. Usaremos as letras y_i para as variáveis cujo grau homogêneo é 1 e z_i para as variáveis em Z . Diremos que y_i é uma variável par e z_i é uma variável ímpar. Assim, vale ressaltar que, para um polinômio Y -próprio qualquer em $K\langle X \rangle$, cada variável y_i participa apenas de comutadores.

Definição 3.2.1 *Seja $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ um elemento de G^m . Dizemos que $\tilde{\eta}$ é uma sequência boa com relação à G -graduação elementar ϵ se houver uma sequência de m matrizes elementares $(r_1, \dots, r_m)$ no radical de Jacobson de $U_n(K)$ de modo que o produto $r_1 \dots r_m$ não é zero e também o grau homogêneo de r_i é η_i para todo $i = 1, \dots, m$. Caso contrário $\tilde{\eta}$ é chamada de sequência ϵ -ruim.*

Observe que como o radical de Jacobson de $U_n(K)$ é nilpotente de índice n e pela definição de sequência ϵ -boa, sempre que tivermos uma sequência $(\eta_1, \dots, \eta_{n'})$ com $n' \geq n$ ela será uma sequência ϵ -ruim.

Exemplo 3.2.2 *Seja a $\mathbb{Z}_3$ -graduação elementar de $U_3(K)$ induzida por $\epsilon = (1, g, g^2)$. A sequência $\tilde{\eta}_1 = (1, g, g^2)$ é ϵ -ruim, enquanto que $\tilde{\eta}_2 = (1, g)$ é ϵ -boa.*

De fato, como o $\text{rad}U_3(K)$ tem índice de nilpotência 3, então não devem existir matrizes elementares r_1, r_2, r_3 em $\text{rad}U_3(K)$, tal que $r_1r_2r_3 \neq 0$, logo $\tilde{\eta}_1$ é ϵ -ruim. Por outro lado, temos que $\deg(e_{12}) = g$, $\deg(e_{23}) = 1$ e $e_{12}e_{23} = e_{13}$, portanto, $\tilde{\eta}_2$ é ϵ -boa.

Definição 3.2.3 Seja $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ uma sequência em G^m . Consideramos o polinômio

$$f_{\tilde{\eta}} = f_{\tilde{\eta},1} f_{\tilde{\eta},2} \dots f_{\tilde{\eta},m}$$

no qual $f_{\tilde{\eta},i} = [y_{2i-1}, y_{2i}]$ se, $\eta_i = 1$ e $f_{\tilde{\eta},i} = x_{\eta_i,i}$ se, $\eta_i \neq 1$.

Exemplo 3.2.4 Se considerarmos as sequências $\tilde{\eta}_1 = (1, g, g^2)$ e $\tilde{\eta}_2 = (1, g)$, teremos $f_{\tilde{\eta}_1} = [y_1, y_2]x_{g,2}x_{g^2,3}$ e $f_{\tilde{\eta}_2} = [y_1, y_2]x_{g,2}$.

Proposição 3.2.5 O polinômio multilinear $f_{\tilde{\eta}}$ é uma identidade graduada para $U_n(K)$ se, e somente se, a sequência $\tilde{\eta}$ é ϵ -ruim.

Prova. Suponha primeiro que f não é uma identidade graduada para $U_n(K)$. Então existem elementos homogêneos $r_1, \dots, r_t \in U_n(K)$ tais que $f_{\tilde{\eta}}(r_1, \dots, r_t) \neq 0$. Como $f_{\tilde{\eta}}$ é multilinear e as matrizes elementares e_{ij} são homogêneas na G -graduação fixa, então podemos escolher r_i entre as matrizes elementares.

Observe que se $\eta_i \neq 1$, então $f_{\tilde{\eta},i} = x_{\eta_i,i}$, ou seja, sua avaliação em matrizes elementares dá um elemento e_{a_i,b_i} do radical de Jacobson de $U_n(K)$; da mesma forma se $\eta_i = 1$, então $f_{\tilde{\eta},i} = [y_{2i-1}, y_{2i}]$ e qualquer avaliação diferente de zero de $f_{\tilde{\eta},i}$ em matrizes elementares dá um elemento $[e_{a_{2i-1},b_{2i-1}}, e_{a_{2i},b_{2i}}]$ que é, também, uma matriz elementar no radical de Jacobson de $U_n(K)$. Conclui-se que $\tilde{\eta}$ é uma sequência ϵ -boa.

Agora, com a sequência $\tilde{\eta}$ sendo ϵ -boa, então existe uma sequência de m matrizes elementares $(e_{a_1,a_2}, e_{a_2,a_3}, \dots, e_{a_{m-1},a_m}, e_{a_m,a_{m+1}})$ no radical de Jacobson de $U_n(K)$ tal que o grau homogêneo $\epsilon_{a_i}^{-1} \epsilon_{a_{i+1}}$ de $e_{a_i,a_{i+1}}$ é η_i para todo $i = 1, \dots, m$. Observe que se $\eta_i = 1$, então $e_{a_i,a_{i+1}}$ é de G -grau 1 e podemos avaliar os polinômios $f_{\tilde{\eta},i} = [y_{2i-1}, y_{2i}]$ nas matrizes $e_{a_i,a_{i+1}}$ e $e_{a_{i+1},a_{i+2}}$ que são elementos pares de $U_n(K)$ e o resultado é $e_{a_i,a_{i+1}}e_{a_{i+1},a_{i+2}}$. Claro, se $\eta_j \neq 1$ então $f_{\tilde{\eta},j} = x_{\eta_j,j}$ e o resultado da avaliação neste polinômio é a matriz $e_{a_j,a_{j+1}}$ que é elemento homogêneo de $U_n(K)$ do G -grau η_j . Deste modo segue que o resultado da avaliação de $f_{\tilde{\eta}} = f_{\tilde{\eta},1} \dots f_{\tilde{\eta},m}$ nestes elementos homogêneo não se anula. ■

Como consequência, temos o próximo teorema, mas veremos as seguintes proposições antes.

Proposição 3.2.6 Sejam $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ e $(1, g_1^{-1}g_2, \dots, g_1^{-1}g_n)$ duas n -uplas em G^n . Então elas dão origem a mesma graduação elementar em $U_n(K)$.

Prova. Considere a graduação elementar em $U_n(K)$ induzida pela n -upla $(g_1, g_2, \dots, g_n)$, então temos que, dada uma matriz elementar e_{ij} em $U_n(K)$ vale a igualdade $\deg(e_{ij}) = g_i^{-1}g_j$. Por outro lado, a n -upla $(1, g_1^{-1}g_2, \dots, g_1^{-1}g_n)$ também induz uma graduação elementar em $U_n(K)$ teremos que dada e_{ij} em $U_n(K)$, então $\deg(e_{ij}) = (g_1^{-1}g_i)^{-1}(g_1^{-1}g_j) = g_i^{-1}g_1g_1^{-1}g_j = g_i^{-1}g_j$. Portanto, as matrizes elementares e_{ij} em ambas as graduações estão no mesmo subespaço vetorial correspondente ao grau $g_i^{-1}g_j$, assim, as graduações elementares induzidas pelas duas n -uplas coincidem. ■

Proposição 3.2.7 Sejam duas n -uplas $g = (1, g_2, \dots, g_n)$ e $g' = (1, h_2, \dots, h_n)$ com $g \neq g'$, então essas duas n -uplas induzem graduações elementares distintas para $U_n(K)$.

Prova. Sejam duas n -uplas g e g' que induzem graduações elementares para $U_n(K)$. Note que essas n -uplas descrevem os graus homogêneos das matrizes elementares e_{1j} , com $j = 1, \dots, n$.

Com $g \neq g'$, temos que para algum j , o grau de e_{1j} em relação a g vai ser distinto do grau de e_{1j} em relação a g' . Assim, como existe pelo menos uma matriz elementar para a qual o grau homogêneo não coincide em relação as duas graduações elementares induzidas por g e g' , então, as graduações elementares para $U_n(K)$ induzidas por g e g' são distintas. ■

Teorema 3.2.8 *Seja G um grupo finito, então há $|G|^{n-1}$ G -graduações elementares diferentes na álgebra $U_n(K)$. Além disso, duas graduações elementares diferentes satisfazem identidades polinomiais graduadas diferentes.*

Prova. Como as duas n -uplas $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ e $(1, g_1^{-1}g_2, \dots, g_1^{-1}g_n)$ dão origem à mesma graduação elementar em $U_n(K)$ e, além disso, pela Proposição 3.2.7, temos que duas n -uplas com primeira entrada 1 diferentes induzem graduações elementares distintas para $U_n(K)$, então a quantidade de graduações elementares em $U_n(K)$ será a mesma quantidade de n -uplas do tipo $(1, g_1^{-1}g_2, \dots, g_1^{-1}g_n)$. Assim, concluímos a primeira afirmação do teorema verificando quantas n -uplas desse tipo existem para G finito. Como o primeiro elemento nas n -uplas $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ sempre será 1, enquanto que os outros elementos ϵ pode ser qualquer elemento de G , então teremos que, se G é finito, existem $|G|^{n-1}$ n -uplas diferentes $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ com $\epsilon_1 = 1$.

Agora vamos lidar com a segunda afirmação do teorema. Primeiro, observamos que no radical de Jacobson de $U_n(K)$, existe uma sequência única de $n - 1$ matrizes elementares $(r_1, \dots, r_{n-1})$ tal que o produto $r_1 \dots r_{n-1}$ é diferente de zero, a saber $(e_{12}, e_{23}, \dots, e_{n-1n})$. Portanto, se $\tilde{g} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ é alguma graduação fixa, então a sequência $d(\tilde{g}) = (\epsilon_1^{-1}\epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}^{-1}\epsilon_n)$ é a única sequência $\tilde{g}$ -boa de comprimento $n - 1$. Observe que essa sequência descreve os G -graus das matrizes elementares $e_{12}, e_{23}, \dots, e_{n-1n}$ no radical Jacobson de $U_n(K)$. Pela Proposição 3.1.7, duas graduações diferentes $\tilde{g}$ e $\tilde{g}'$ determinam sequências diagonais diferentes $d(\tilde{g})$ e $d(\tilde{g}')$. Portanto, o polinômio multilinear $f_{d(\tilde{g})}$ é uma identidade polinomial graduada de $U_n(K)$ com relação à graduação elementar $\tilde{g}$, mas não é uma identidade com respeito a graduação $\tilde{g}$. ■

Uma vez que as graduações isomorfas satisfazem as mesmas identidades graduadas, obtemos o seguinte.

Corolário 3.2.9 *Seja G um grupo finito, então existem $|G|^{n-1}$ G -graduações elementares não isomorfas em $U_n(K)$.*

Agora seja $I(\epsilon)$ o T_G -ideal da álgebra livre $K\langle X \rangle$ gerada pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$, onde $\tilde{\eta}$ pertence ao conjunto de todas as sequências ϵ -ruins. Iremos provar que $I(\epsilon)$ é o ideal de identidades polinomiais G -graduadas de $U_n(K)$ em relação à G -graduação elementar ϵ . Para isso, demonstraremos alguns resultados, começando por a seguinte descrição dos polinômios Y -próprios de $K\langle X \rangle$.

Lema 3.2.10 *Cada polinômio Y -próprio de grau positivo é uma combinação linear de produtos de Y -comutadores de Z -grau no máximo 1. Além disso, se a variável z participar em um Y -comutador c , podemos assumir que z é a primeira variável de c . Ou seja, $c = z$ ou $c = [z, y_{i_1}, \dots, y_{i_t}]$ para algum $t \geq 1$.*

Prova. É suficiente provar a afirmação para comutadores $[x_1, \dots, x_n]$ em que cada variável é homogênea. Fazemos isso por indução em n , o caso $n = 2$ sendo trivial. Suponha que o lema seja válido para comutadores de comprimento $n - 1$, e seja $c = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Primeiro, observamos que a comutação com um elemento fixo é uma derivação, ou seja, $[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]$. Então, por indução em r , obtemos que

$$[u_1 u_2 \dots u_r, w] = \sum_i u_1 \dots u_{i-1} [u_i, w] u_{i+1} \dots u_r.$$

Se $x_n \in Y$, então $c' = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ é de comprimento $n - 1$ e pela hipótese de indução, podemos representá-lo como uma combinação linear de produtos de comutadores com propriedades necessárias. Em seguida, aplicando a observação acima para $w = x_n$, obtemos uma combinação de produtos de comutadores Y -próprios em que ainda satisfazem as propriedades exigidas. Finalmente, se $x_n \in Z$, terminamos por indução usando a igualdade

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]x_n - x_n[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$$

uma vez que ambas as parcelas da diferença acima são polinômios Y -próprios. ■

Ao longo deste capítulo, chamamos de normal qualquer comutador de Z -grau no máximo 1, que satisfaz a condição do lema anterior. Observe que, para um comutador normal c de Z -grau 1 tem $\deg_G c = \deg_G z$, onde z é a única variável ímpar em c . Agora, vamos considerar um produto $c = c_1 \dots c_m$ de comutadores normais e seja $\tilde{\eta}_c = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in G^m$ a sequência definida por $\eta_i = \deg_G c_i$, para todo $i = 1, \dots, m$, obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.2.11 *Se a sequência $\tilde{\eta}_c$ é ϵ -ruim, então o produto $c = c_1 \dots c_m$ é uma identidade polinomial G -graduada de $U_n(K)$.*

Prova. Primeiro mostraremos que c_i é consequência de $f_{\tilde{\eta}_c, i}$. Seja $c = c_1 \dots c_m$, dado um c_i em c , temos que c_i é comutador normal, portanto, teremos dois casos:

1. Seja $c_i = [y_1, \dots, y_m]$, logo, $\eta_i = \deg(c_i) = 1$, portanto, $f_{\tilde{\eta}_c, i} = [y'_{2i-1}, y'_{2i}]$. Podemos considerar

$$c_i = [[y_1, \dots, y_{m-1}], y_m],$$

assim, se considerarmos $y'_{2i-1} = [y_1, \dots, y_{m-1}]$ e $y'_{2i} = y_m$, temos que c_i é consequência de $f_{\tilde{\eta}_c, i}$.

2. Seja $c_i = [z_1, y_1, \dots, y_{m-1}]$, logo, $\eta_i = \deg(c_i) \neq 1$, portanto, $f_{\tilde{\eta}_c, i} = x_{\eta_i, i}$, assim, como $\deg(c_i) = \eta_i$, então podemos substituir $x_{\eta_i, i}$ por c_i , e portanto, c_i é consequência de $f_{\tilde{\eta}_c, i}$.

Como podemos fazer esse processo para qualquer c_i , então temos que c é consequência de $f_{\tilde{\eta}_c}$, ou seja, c pertence ao T_G -ideal de $K\langle X \rangle$ gerado pelo polinômio $f_{\tilde{\eta}_c}$. E, por último, por $\tilde{\eta}_c$ ser ϵ -ruim, então temos pela Proposição 3.2.5 que $f_{\tilde{\eta}_c}$ é uma identidade polinomial para $U_n(K)$, daí, segue que c também é identidade para $U_n(K)$. ■

Seja ϵ uma G -gradação elementar fixa de $U_n(K)$ e seja $W(\epsilon)$ o subespaço vetorial dos polinômios Y -próprios na álgebra graduada relativamente livre $K\langle X \rangle / I(\epsilon)$. Para poder descrever uma base linear de $W(\epsilon)$ dizemos que:

1. um comutador normal $[y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_p}]$ de Z -grau 0 é semistandard se os índices $j_1, j_2, \dots, j_p$ satisfazem as desigualdades $j_1 > j_2 \leq j_3 \leq \dots \leq j_p$.

2. um comutador normal $[z_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_p}]$ de Z -grau 1 e comprimento $p \geq 1$ é semistandard se $j_2, \dots, j_p$ satisfaz $j_2 \leq j_3 \leq \dots \leq j_p$.

Lema 3.2.12 *Na álgebra livre $K\langle X \rangle$ G -graduada, todo polinômio Y -próprio de grau positivo é uma combinação linear, módulo $I(\epsilon)$, de produtos do tipo $c'_1 \dots c'_m$, onde cada c'_i é um comutador semistandard e a sequência $\tilde{\eta} = (\deg_G c'_1, \dots, \deg_G c'_m)$ é ϵ -boa.*

Prova. Já sabemos pelo Lema 3.2.10 que todo polinômio Y -próprio de grau positivo é uma combinação linear de produtos de comutadores normais, logo, podemos considerar um produto $c = c_1 \dots c_m$ de m comutadores normais e basta mostrar que esse produto é, módulo $I(\epsilon)$, uma combinação linear de produtos de comutadores c'_i semistandard, ou seja, que é congruente, módulo $I(\epsilon)$, a uma combinação linear de produtos de comutadores c'_i semistandard.

Primeiramente, observe que o polinômio c pertence ao T_G -ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por $f_{\tilde{\eta}_c}$. Provamos isto de modo semelhante ao processo que fizemos no Lema 3.2.11. Além disso, uma vez que o radical de Jacobson de $U_n(K)$ é nilpotente de índice n , pelo Exemplo 1.1.43, então qualquer sequência de comprimento $m \geq n$ é ϵ -ruim. Neste caso, o polinômio multilinear $f_{\tilde{\eta}_c}$ pertence a $I(\epsilon)$ e a mesma conclusão vale para c . Claramente, para $m \geq n$ e com $c \in I(\epsilon)$, podemos considerar 0 como uma combinação linear de produtos de comutadores $c'_1 \dots c'_m$, com c'_i semistandard, e portanto vale a afirmação neste caso.

Para $m < n$, usaremos um processo de indução reversa, mostrando que se o resultado vale para sequências de comprimento $> m$, então vale para sequências de comprimento m . Assumiremos que para algum m fixo, que o resultado é válido para todos produtos de pelo menos $m + 1$ comutadores normais e iremos provar que vale para produtos de m também.

Agora, seja $c_i = [z, y_{j_1}, \dots, y_{j_q}]$ um comutador normal de Z -grau 1. Iremos provar que para cada permutação $\theta \in S_q$ existe um polinômio g_θ que é uma combinação linear de produtos de dois comutadores, de modo que

$$[z, y_{j_1}, \dots, y_{j_q}] = [z, y_{j_{\theta(1)}}, \dots, y_{j_{\theta(q)}}] + g_\theta.$$

Podemos assumir que $\theta = (t, t+1)$, pois S_q é gerado pelas transposições. Podemos escrever $c_i = [c', y_{j_t}, y_{j_{t+1}}, \dots, y_{j_q}]$, onde $c' = [z, y_{j_1}, \dots, y_{j_{t-1}}]$. A identidade de Jacobi nos permite mudar as posições dos elementos nas três primeiras posições. Mais precisamente,

$$c_i = [y_{j_{t+1}}, y_{j_t}, c', \dots, y_{j_q}] + [c', y_{j_{t+1}}, y_{j_t}, \dots, y_{j_q}].$$

Neste caso, $g_\theta = [[y_{j_{t+1}}, y_{j_t}]c', \dots, y_{j_q}] - [c'[y_{j_{t+1}}, y_{j_t}], \dots, y_{j_q}]$. Na verdade, desde que a comutação com um elemento fixo é uma derivação, então, por indução em r , obtemos que $[ab, x_1, x_2, \dots, x_r]$ é igual a uma combinação linear de produtos de dois comutadores da forma $[a, \dots][b, \dots]$, e a afirmação está provada.

Agora, seja $c_i = [y_a, y_b, y_{j_1}, \dots, y_{j_q}]$ um comutador normal de Z -grau 0. Podemos provar de forma semelhante que para qualquer permutação $\theta \in S_q$ existe um polinômio h_θ que é uma combinação linear de produtos de dois comutadores de Z -grau 0 e tais que

$$[y_a, y_b, y_{j_1}, \dots, y_{j_q}] = [y_a, y_b, y_{j_{\theta(1)}}, \dots, y_{j_{\theta(q)}}] + h_\theta.$$

Juntos, esses dois cálculos mostram que para cada comutador normal c_i existe um comutador semistandard c'_i e um polinômio g_c , que é uma combinação linear de produtos de

dois comutadores normais, de modo que $c_i = c'_i + g_i$.

Finalmente, seja $c = c_1 \dots c_m$ um produto de m comutadores normais. Então pelos argumentos anteriores, existem m comutadores semistandard $c'_1, \dots, c'_m$ e $g_1, \dots, g_m$ polinômios que são combinação de produtos de dois comutadores normais, tais que $c_i = c'_i + g_i$, logo

$$c = (c'_1 + g_1)(c'_2 + g_2) \dots (c'_m + g_m) = c'_1 \dots c'_m + f.$$

Note que f é composto por uma combinação linear de produtos de c'_i e g_j com pelo menos um dos fatores entre os g_j . Assim, podemos afirmar que f é uma combinação linear de produtos de pelo menos $m + 1$ comutadores normais. Logo, recaímos na hipótese de indução, e f é uma combinação linear, módulo $I(\epsilon)$, de produtos do tipo $c'_1 \dots c'_m$ com c'_i semistandard para $i = 1, \dots, m$. ■

Por último, iremos demonstrar o próximo lema (referência [14]), que é necessário para a demonstração do teorema principal deste capítulo, onde provaremos que $Id^{gr}(U_n(K)) = I(\epsilon)$. Observe que, pelo Lema 3.2.12, temos que $W(\epsilon) = \text{span}\{f + I(\epsilon) \mid f \in \beta\}$ com β sendo o conjunto formado por 1 e por produtos de comutadores $c_1 \dots c_m$ com cada c_i semistandard.

Lema 3.2.13 *Sejam W e U subespaços vetoriais de V . Seja β um subconjunto de V tal que*

$$V/W = \text{span}\{f + W \mid f \in \beta\}.$$

Se $W \subseteq U$ e $\{f + U, \mid f \in \beta\}$ é linearmente independente no quociente V/U , então $W = U$.

Prova. Suponhamos que $W \neq U$. Logo deve existir $g \in U - W$. Então existem $\alpha_f \in K$ não todos nulos tais que

$$g + W = \sum_{f \in \beta} \alpha_f f + W.$$

Logo, existe $w \in W$ tal que $g = \sum_{f \in \beta} \alpha_f f + w$, como $w \in W \subseteq U$

$$0 + U = g + U = \sum_{f \in \beta} \alpha_f f + w + U = \sum_{f \in \beta} \alpha_f f + U = \sum_{f \in \beta} \alpha_f f + U,$$

isto é um absurdo pois $\{f + U \mid f \in \beta\}$ é linearmente independente no quociente V/U , e portanto, todos os coeficientes α_f deveriam ser todos nulos, logo, $W = U$. ■

Para aplicação do lema acima no próximo teorema usaremos:

$$W = I(\epsilon) \cap B_G(X), \quad U = Id^{gr}(U_n(K), \epsilon) \cap B_G(X), \quad V = B_G(X),$$

$$\beta = \{c_1 \dots c_m \mid c_i \text{ semistandard e } \tilde{\eta}_c = (\deg_G c_1, \dots, \deg_G c_m) \text{ } \epsilon\text{-boa}\}.$$

Por o Lema 3.2.12, temos que V/W é gerado por β e os resultados que obteremos no teorema a seguir nos faz ter a igualdade $W = U$, ou seja, os polinômios próprios de $I(\epsilon)$ e $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ coincidem, e pelo Teorema 1.2.62, temos que na verdade $I(\epsilon) = Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$.

Teorema 3.2.14 *Sejam G um grupo e K um corpo infinito. Seja $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ uma n -upla de elementos de G que induz uma G -graduação elementar na álgebra $U_n(K)$ de matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em K . Então*

1. O ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ de identidades polinomiais G -graduadas de $U_n(K)$ é gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$, onde $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ pertence ao conjunto de todas as sequências ϵ -ruins e $m \leq n$.
2. Uma base linear para os polinômios Y -próprios na álgebra graduada relativamente livre $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ consiste em 1 e dos polinômios $c = c_1 \dots c_m$ onde cada polinômio c_i é um comutador semistandard e a sequência $\tilde{\eta}_c = (deg_{Gc_1}, \dots, deg_{Gc_m})$ é ϵ -boa.

Prova. Seja o T_G -ideal $I(\epsilon)$ de $K\langle X \rangle$ gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$, onde $\tilde{\eta}$ pertence ao conjunto de todas as sequências ϵ -ruins. Observe que se considerarmos a subsequência $\eta' = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ de $\tilde{\eta}$ com $n \leq m$, ela também é ϵ -ruim, pois o produto de n matrizes no radical de Jacobson é igual a zero. Além disso,

$$f_{\tilde{\eta}} = f_{\tilde{\eta},1} f_{\tilde{\eta},2} \dots f_{\tilde{\eta},m} \text{ e } f_{\eta'} = f_{\tilde{\eta},1} f_{\tilde{\eta},2} \dots f_{\tilde{\eta},n},$$

logo $f_{\tilde{\eta}} = f_{\eta'} f_{\tilde{\eta},n+1} \dots f_{\tilde{\eta},m}$, ou seja, $f_{\tilde{\eta}}$ pertence ao ideal gerado por $f_{\eta'}$. Portanto, como $I(\epsilon)$ é gerado pelos $f_{\tilde{\eta}}$, temos que $I(\epsilon)$ está contido no ideal gerado por $f_{\eta'}$, deste modo $I(\epsilon)$ é gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\gamma}}$ correspondendo às sequências $\tilde{\gamma}$ ϵ -ruins de comprimento $m \leq n$.

Agora, observe que o restante da demonstração desse teorema se resume em mostrarmos a igualdade $I(\epsilon) = Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$. Disso concluímos a demonstração do item 1, e com essa igualdade e pelo Lema 3.2.12 obtemos o resultado do item 2. Para demonstrarmos que $I(\epsilon) = Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ usaremos o Lema 3.2.13.

Pela Proposição 3.2.5, os polinômios $f_{\tilde{\eta}}$ são identidades polinomiais para a álgebra $U_n(K)$, e assim, $I(\epsilon)$ está contido em $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$. E, pelo Teorema 1.2.61 é suficiente considerarmos polinômios Y -próprios, e já sabemos pelo Lema 3.2.12, que os elementos do espaço dos polinômios Y -próprios é gerado, módulo $I(\epsilon)$, por 1 e pelos produtos $c = c_1 \dots c_m$ de comutadores semistandard tais que a sequência $\tilde{\eta}_c = (deg_{Gc_1}, \dots, deg_{Gc_m})$ é ϵ -boa. Portanto, pelo Lema 3.2.13, é suficiente mostrar que esses polinômios são linearmente independentes módulo $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ para obtermos que $I(\epsilon) = Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$.

Seja $f = \alpha 1 + \sum_c \alpha_c c$ uma combinação linear desses polinômios e assumamos que $f \in Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$. Devemos provar que todo coeficiente é zero.

Nossa prova é por indução em n . Para $n = 1$, temos $U_1(K) = K$, assim, o radical de Jacobson de U_1 terá apenas a matriz nula, portanto, qualquer sequência é ϵ -ruim, assim, não teremos um produto de comutadores $c_1 \dots c_m$ relacionado a sequência $\tilde{\eta}$ ϵ -boa e $f = \alpha 1$, com f em $Id^{gr}(U_1, \epsilon)$ implica que $\alpha = 0$.

Para $n \geq 2$, seja R_j a subálgebra G -graduada de $U_n(K)$ consistindo em matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ com zero nas entradas da j -ésima linha e na j -ésima coluna, $1 \leq j \leq n$. Então R_j é isomorfa à álgebra graduada $U_{n-1}(K)$ com respeito à G -gradação elementar $\tilde{\epsilon}_j = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_n)$ (Exemplo 1.2.35). Portanto, para todo $j = 1, \dots, n$, temos que

$$f \in Id^{gr}(U_n(K), \epsilon) \subseteq Id^{gr}(U_{n-1}(K), \tilde{\epsilon}_j), \quad (1)$$

já que $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon) \subseteq Id^{gr}(R_j, \tilde{\epsilon}_j)$ pelo fato de R_j ser subálgebra de $U_n(K)$ e $Id^{gr}(R_j, \tilde{\epsilon}_j) = Id^{gr}(U_{n-1}(K))$ pelo fato de R_j e $U_{n-1}(K)$ serem isomorfas.

Seja $c = c_1 \dots c_m$ uma parcela da soma de f e suponha que $m \leq n - 2$. Como a sequência associada $\tilde{\eta}_c = (\deg_G c_1, \dots, \deg_G c_m)$ é ϵ -boa existe uma sequência de m matrizes elementares $(e_{a_1, a_2}, e_{a_2, a_3}, \dots, e_{a_{m-1}, a_m}, e_{a_m, a_{m+1}})$ no radical de Jacobson de $U_n(K)$ tal que o grau homogêneo $\epsilon_{a_i}^{-1} \epsilon_{a_{i+1}}$ de $e_{a_i, a_{i+1}}$ é η_i para todo $i = 1, \dots, m$. Já que $m + 1 \leq n - 1$ existe um inteiro positivo $1 \leq j \leq n$ tal que essas matrizes estão todas na subálgebra G -graduada R_j . Logo, $\tilde{\eta}_c$ é uma boa sequência com respeito a $\tilde{\epsilon}_j$ -gradação de $U_{n-1}(K)$. Seja $f_j = \sum_c \alpha_c c$ a componente de f dada pelo somatório dos $\alpha_c c$ tais que a sequência correspondente $\tilde{\eta}_c$ é $\tilde{\epsilon}_j$ -boa e consideremos f' como sendo a soma do restante das parcelas $\alpha_c c$ de f tais que $\tilde{\eta}_c$ é ϵ_j -ruim. Assim temos que

$$f = \alpha_1 + f_j + f',$$

como $f \in Id^{gr}(U_{n-1}(K), \tilde{\epsilon}_j)$ substituindo as variáveis por elementos homogêneos de $U_{n-1}(K)$ o resultado (que indicamos como o polinômio com uma barra acima) é igual a zero, i.e., $\overline{\alpha_1 + f_j + f'} = 0$. Segue do Lema 3.2.11 que f' é uma identidade para $U_{n-1}(K)$, logo, $\overline{\alpha_1 + f_j} = 0$, ou seja,

$$\alpha_1 + f_j \in Id^{gr}(U_{n-1}(K), \tilde{\epsilon}_j).$$

A hipótese de indução implica que $\alpha = \alpha_c = 0$ para todo c tal que $\tilde{\eta}_c$ é $\tilde{\epsilon}_j$ -boa para algum j . Assim podemos considerar f como uma combinação linear de produtos $c = c_1 \dots c_{n-1}$ de $n - 1$ comutadores semistandard tais que $\tilde{\eta}_c$ é ϵ -boa. Como na prova do Teorema 3.2.8, existe uma única sequência ϵ -boa $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ de comprimento $n - 1$, ou seja, temos $\eta_i = \epsilon_i^{-1} \epsilon_{i+1} = \deg_G(e_{i, i+1})$. Portanto, para qualquer produto de comutadores $c = c_1 \dots c_{n-1}$ que aparece em f tem-se que $\deg_G c_i = \eta_i$.

Como o corpo K é infinito, podemos assumir que $f = f(x_1, \dots, x_r)$ é multihomogêneo. Além disso, se Ω é um conjunto de variáveis comutativas, f é uma identidade polinomial G -graduada de $U_n(K[\Omega])$ com respeito à graduação elementar induzida por ϵ , onde $K[\Omega]$ representa a álgebra polinomial usual que é comutativa.

Seja $c = c_1 \dots c_{n-1}$ um produto de comutadores semistandard que aparece em f com escalar não nulo e considere o monômio $m_c = x_{j_1} \dots x_{j_{n-1}} \in K\langle X \rangle$, onde x_{j_t} é a variável na primeira posição do comutador semistandard c_t . Então x_{j_t} é par ou ímpar de acordo com o Z -grau de c_t . Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}$ um monômio máximo no conjunto $M_f = \{m_c \mid c \text{ é uma parcela diferente de zero de } f\}$ com respeito à ordem lexicográfica da esquerda para a direita. Seja $c = [x_{i_1}, \dots] \dots [x_{i_{n-1}}, \dots]$ a parcela correspondente de f . Observe que as variáveis ímpares em c estão apenas na primeira posição de alguns (possivelmente nenhum) dos comutadores semistandard $c_1, \dots, c_{n-1}$. Como o polinômio $f = f(x_1, \dots, x_r)$ é multihomogêneo, o conjunto de variáveis ímpares é o mesmo para qualquer c' que aparece em f com escalar diferente de zero.

Dizemos que $t, s \in \{1, \dots, n - 1\}$ são equivalentes se $x_{i_t} = x_{i_s}$ e denotamos por Γ_t a classe de equivalência de t . Considere os seguintes elementos homogêneos $\xi_1, \dots, \xi_r$ de $U_n(K[\Omega])$, definidos da seguinte forma:

1. Se x_{i_t} é uma variável par, então $\bar{\xi}_{i_t} = \sum_{j \in \Gamma_t} e_{j, j+1} + \sum_s \xi_{i_t, s} e_{s, s}$, onde $\xi_{i_t, s} \in \Omega$ para todo i_t, s .
2. Se x_{i_t} é uma variável ímpar, então $\bar{\xi}_{i_t} = \sum_{j \in \Gamma_t} e_{j, j+1}$.
3. Se $l \neq i_1, \dots, i_{n-1}$, então $\bar{\xi}_l = \sum_s \xi_{l, s} e_{s, s}$, onde, mais uma vez, $\xi_{l, s}$ são variáveis comutativas.

Cálculos concretos mostram que $f(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r) = \sum_{c'} \alpha_{c'} g_{c'} e_{1,n}$. Aqui o elemento c' pertence ao conjunto de todas as parcelas não nulos de f com monômio associado $m_{c'} = x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}}$. Isto é, c' é um polinômio do seguinte tipo:

$$c' = [x_{i_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_p}][x_{i_2}, x_{b_2}, \dots, x_{b_q}] \cdots [x_{i_{n-1}}, x_{c_2}, \dots, x_{c_s}]$$

e $g_{c'}$ é o polinômio (nas variáveis comutativas $\xi_{l,s}$) dado por:

$$g_{c'} = (\xi_{a_2,2} - \xi_{a_2,1}) \cdots (\xi_{a_p,2} - \xi_{a_p,1}) \cdots (\xi_{c_2,n} - \xi_{c_2,n-1}) \cdots (\xi_{c_s,n} - \xi_{c_s,n-1}).$$

Portanto, $f(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r) \neq 0$ e o resultado está provado. ■

Note que se $G = \{1\}$ então qualquer identidade polinomial G -graduada é ordinária e todas as sequências de tamanho $m \leq n - 1$ são boas. Consequentemente, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.2.15 *Na álgebra livre $K\langle X \rangle$, uma base das identidades polinomiais ordinárias de $U_n(K)$ é dada pelo polinômio*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Essa base das identidades polinomiais de $U_n(K)$ foi descoberta por Maltsev no caso de característica 0 e por vários outros autores no caso geral. Veja as referências [27], [30] e [34].

3.3 Bases Explícitas de Identidades Polinomiais Graduadas de $U_n(K)$

O teorema principal deste capítulo nos permite escrever explicitamente uma base das identidades polinomiais graduadas de $U_n(K)$ para uma G -graduação elementar dada por uma n -upla ϵ fixa. Mais precisamente, dado $m \leq n$, podemos escrever o conjunto Γ_m de todas as sequências ϵ -boas de comprimento m . O conjunto formado pelos polinômios $f_{\bar{\eta}}$, onde $\bar{\eta} \in G^m \setminus \Gamma_m$ gera $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ como T_G -ideal. Nesta seção, vamos explicar esse método calculando as bases em vários casos "típicos". Vamos começar com alguns resultados gerais. O primeiro é uma descrição do conjunto Γ_m de todas as sequências ϵ -boas com respeito a uma G -graduação elementar de $U_n(K)$ determinada por uma n -upla ϵ .

Definição 3.3.1 *Sejam $U_n(K)$ com a G -graduação elementar determinada pela n -upla $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in G^n$. A sequência $d(\epsilon)$ com $n - 1$ elementos, onde $d(\epsilon) = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$, e $\eta_i = \epsilon_i^{-1} \epsilon_{i+1}$, ou seja, $\eta_i = \deg_{Ge_i, i+1}$, será chamada de sequência diagonal associada a ϵ .*

Observe que com essa definição a sequência diagonal $d(\epsilon)$ é ϵ -boa. De fato, as matrizes em $(e_{1,2}, e_{2,3}, e_{3,4}, \dots, e_{n-1,n})$ pertencem ao radical de Jacobson de $U_n(K)$ e o grau de $e_{i,i+1}$ é η_i , a i -ésima entrada de $d(\epsilon)$, ademais o produto $e_{1,2}e_{2,3}e_{3,4} \cdots e_{n-1,n} = e_{1,n}$ é não nulo.

Note que somando essas matrizes elementares obtemos uma matriz com 1's na diagonal acima da diagonal principal,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daí vem esse termo sequência diagonal. Além disso, essa é a única sequência de $n - 1$ matrizes elementares no radical de Jacobson de $U_n(K)$ cujo produto é diferente de zero.

Proposição 3.3.2 *Seja $d(\epsilon) = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ a sequência diagonal associada a graduação elementar em $U_n(K)$ determinada por ϵ . Seja $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in G^m$ uma sequência de comprimento m , então $\tilde{\gamma}$ é ϵ -boa se, e somente se, existem $m + 1$ inteiros positivos $1 \leq t_1 < \dots < t_{m+1} \leq n$ tais que*

$$\gamma_i = \eta_{t_i} \eta_{t_i+1} \cdots \eta_{t_{i+1}-1}$$

para todo $i = 1, \dots, m$.

Prova. Seja $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in G^m$ uma sequência de comprimento m , sendo ϵ -boa, logo existem $m + 1$ inteiros positivos $1 \leq t_1 < \dots < t_{m+1} \leq n$ tais que as matrizes elementares $e_{t_1, t_2}, e_{t_2, t_3}, \dots, e_{t_{m-1}, t_m}, e_{t_m, t_{m+1}}$ estão no radical de Jacobson de $U_n(K)$ e de modo que $\deg(e_{t_i, t_{i+1}}) = \gamma_i$ para todo $i = 1, \dots, m$. Como $\deg(e_{t_i, t_{i+1}}) = \eta_{t_i}$ e $e_{t_i, t_{i+1}} = e_{t_i, t_i+1} e_{t_i+1, t_i+2} \cdots e_{t_{i+1}-1, t_{i+1}}$, logo

$$\deg(e_{t_i, t_{i+1}}) = \eta_{t_i} \eta_{t_i+1} \cdots \eta_{t_{i+1}-1},$$

portanto, $\gamma_i = \eta_{t_i} \eta_{t_i+1} \cdots \eta_{t_{i+1}-1}$.

Como $d(\epsilon)$ é uma sequência ϵ -boa, logo existem $n - 1$ matrizes elementares no radical de Jacobson tais que $e_{t_1, t_2} \cdots e_{t_m, t_{m+1}} \cdots e_{t_n, t_{n+1}} \neq 0$ e o grau da i -ésima matriz é η_i , além disso, devem existir m matrizes elementares no radical de Jacobson tais que $e_{t_1, t_2} \cdots e_{t_{m-1}, t_m} e_{t_m, t_{m+1}} \neq 0$. Agora, com $\deg(e_{t_i, t_{i+1}}) = \eta_{t_i}$ e como

$$e_{t_i, t_{i+1}} = e_{t_i, t_i+1} e_{t_i+1, t_i+2} \cdots e_{t_{i+1}-1, t_{i+1}},$$

e, por hipótese, $\gamma_i = \eta_{t_i} \eta_{t_i+1} \cdots \eta_{t_{i+1}-1}$, então, $\deg(e_{t_i, t_{i+1}}) = \gamma_i$. ■

Definição 3.3.3 *Dada a G -graduação $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, dizemos que há uma variação na posição i se $\epsilon_i \neq \epsilon_{i+1}$.*

Note que ao dizer que há uma variação na posição i para ϵ é equivalente a dizer que na sequência diagonal $d(\epsilon) = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ temos $\eta_i \neq 1$, pois, se $\epsilon_i \neq \epsilon_{i+1}$ e como $\eta_i = \epsilon_i^{-1} \epsilon_{i+1}$, claramente teremos que $\eta_i = \epsilon_i^{-1} \epsilon_{i+1} \neq 1$.

Proposição 3.3.4 *Seja t o número de variações em ϵ e seja $\tilde{\gamma} \in G^m$ qualquer sequência de comprimento m . Se o polinômio correspondente $f_{\tilde{\gamma}}$ tiver Z -grau pelo menos $t + 1$ então f é uma identidade polinomial graduada de $U_n(K)$.*

Prova. Na sequência diagonal $d(\epsilon)$ existem exatamente t elementos que são diferentes de 1. Pela Proposição 3.3.2, em cada sequência ϵ -boa existem no máximo t elementos diferentes de 1. Portanto, se o Z -grau de $f_{\tilde{\gamma}}$ for pelo menos $t + 1$, então a sequência $\tilde{\gamma}$ é ruim e, pela Proposição 3.2.5, $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma identidade polinomial para $U_n(K)$. ■

Assim, a fim de incluir o polinômio multilinear $f_{\tilde{\gamma}}$ na lista de geradores das identidades graduadas, é conveniente calcular antecipadamente seu Z -grau. O caso mais simples é quando este Z -grau é zero, ou seja consideramos um polinômio f em variáveis pares apenas. Nesse caso, f é uma identidade graduada de $U_n(K)$ se, e somente se, for uma identidade polinomial da componente neutra. Na próxima afirmação, descrevemos a estrutura dessa componente da álgebra $U_n(K)$.

Proposição 3.3.5 *Suponha que $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in G^n$ e sejam $h_1, \dots, h_s$ os elementos distintos de G que aparecem em ϵ . Suponha que para $i = 1, \dots, s$, o elemento h_i aparece m_i vezes. Então temos o seguinte isomorfismo de K -álgebras*

$$(U_n(K))_1 \cong U_{m_1}(K) \oplus U_{m_2}(K) \oplus \dots \oplus U_{m_s}(K).$$

Prova. Sejam $j_1 < j_2 < \dots < j_{m_i}$ as posições na sequência ϵ que são iguais a h_i : $\epsilon_{j_1} = \epsilon_{j_2} = \dots = \epsilon_{j_{m_i}}$. Então

$$\epsilon_{j_p}^{-1} \epsilon_{j_q} = h_i^{-1} h_i = 1 \in G$$

e as matrizes elementares $e_{j_p j_q} \in (U_n(K))_1$ são homogêneas para todos os $1 \leq p \leq q \leq m_i$. Considere $A_1^{h_i}$ o K -subespaço gerado matrizes elementares $e_{j_p j_q}$ para $1 \leq p \leq q \leq m_i$. Então, obviamente, $A_1^{h_i} \cong U_{m_i}(K)$ como álgebras. Além disso, temos a igualdade $(U_n(K))_1 = A_1^{h_1} \oplus A_1^{h_2} \oplus \dots \oplus A_1^{h_s}$, observe que a soma é direta já que os h_i são elementos distintos de G . Assim, temos o isomorfismo de álgebras

$$(U_n(K))_1 \cong U_{m_1}(K) \oplus U_{m_2}(K) \oplus \dots \oplus U_{m_s}(K).$$

■

Com a notação da proposição anterior, seja $m = \max\{m_1, \dots, m_s\}$.

Corolário 3.3.6 *O polinômio $f(y_1, \dots, y_r)$ é uma identidade polinomial graduada de $U_n(K)$ se, e somente se, for uma consequência de*

$$[y_1, y_2] \dots [y_{2m-1}, y_{2m}].$$

Prova. Uma vez que f é um polinômio apenas em variáveis pares, é uma identidade graduada de $U_n(K)$ se, e somente se, ele se anular para cada substituição das variáveis por elementos da componente neutra $(U_n(K))_1$. O resultado segue aplicando a proposição anterior e o Corolário 3.2.15. ■

Agora começamos com o primeiro exemplo. Mais precisamente, voltamos nossa atenção para o caso quando $G \cong \mathbb{Z}_2$ é cíclico de ordem dois. As graduações correspondentes são chamadas de $\mathbb{Z}_2$ -graduações. Escreva $G = \{1, -1\}$ para $\mathbb{Z}_2$. Neste caso, as variáveis ímpares z são de G -grau homogêneo -1 .

Considere a G -graduação elementar induzida por $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\epsilon_1 = 1$. Nos próximos dois teoremas, consideramos graduações induzidas pela n -upla $\epsilon = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ onde as primeiras k entradas são 1 's e as últimas $n - k$ entradas são -1 's. Primeiro, lidamos com o caso $k > n - k$.

Teorema 3.3.7 *Suponha que na notação acima, $k > n - k$, e considere a graduação elementar em $U_n(K)$ induzida por ϵ . Então*

- (1) *O ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ de identidades $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para $U_n(K)$ é gerado pelos polinômios*

$$z_1 z_2, [y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}], z[y_1, y_2] \cdots [y_{2(n-k)-1}, y_{2(n-k)}].$$

- (2) *Uma base linear para o espaço dos polinômios Y -próprios na álgebra graduada relativamente livre $K\langle X \rangle / Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ consiste de 1 e dos polinômios*

$$[y_{i_1,1}, y_{i_2,1}, \dots, y_{i_{p_1},1}] \cdots [y_{i_1,r}, \dots, y_{i_{p_r},r}][z, y_{l_2}, \dots, y_{l_t}] \\ \times [y_{j_1,1}, \dots, y_{j_{q_1},1}] \cdots [y_{j_1,s}, \dots, y_{j_{q_s},s}]$$

onde $0 \leq r \leq k - 1$, $0 \leq s \leq n - k - 1$, $1 \leq t$, e

$$[y_{i_1,1}, y_{i_2,1}, \dots, y_{i_{p_1},1}] \cdots [y_{i_1,r}, \dots, y_{i_{p_r},r}]$$

para $0 \leq r \leq k - 1$. Para ambos os tipos de polinômios, os comutadores são semistandard. Ou seja, em $[y_{h_1}, y_{h_2}, \dots, y_{h_u}]$ os índices satisfazem as desigualdades

$$h_1 > h_2 \leq h_3 \leq \cdots \leq h_u$$

enquanto em $[z, y_{l_2}, \dots, y_{l_t}]$ temos $l_2 \leq \cdots \leq l_t$.

Prova. Lembramos que o ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ das identidades polinomiais G -graduadas de $U_n(K)$ é gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$ de modo que a sequência $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ pertence ao conjunto de todas as sequências ϵ -ruins e $m \leq n$. A sequência diagonal $d(\epsilon) = (\epsilon^{-1}\epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}^{-1}\epsilon_n)$ é $(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$ onde -1 ocorre na k -ésima posição. Pela Proposição 3.3.2, o conjunto Γ de todas as ϵ -boas sequências consiste em:

- i) $(1, \dots, 1)$ de comprimento $m \leq k - 1$,

- ii) $(\overbrace{1, \dots, 1}^r, -1, \overbrace{1, \dots, 1}^s)$ onde $r \leq k - 1$ e $s \leq n - k - 1$.

Portanto, a segunda afirmação do teorema segue da segunda parte do Teorema 3.2.14. Agora, seja $\tilde{\gamma}$ uma sequência ruim de comprimento $m \leq n$. Então, ou existe pelo menos dois -1 's em $\tilde{\gamma}$, ou $\tilde{\gamma} = (1, \dots, 1)$ e $k \leq m$, ou $\tilde{\gamma} = (1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$ com $k \leq r$ ou $n - k \leq s$, consideramos r e s como no item ii) acima.

No primeiro caso, o polinômio multilinear $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma consequência de $z_1 z_2$. No segundo caso $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma consequência de $[y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}]$. No terceiro caso, ou $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma consequência de $[y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}]z_1$ ou $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma consequência de

$$z_1[y_1, y_2] \cdots [y_{2(n-k)-1}, y_{2(n-k)}].$$

Assim, a prova está completa. ■

De maneira semelhante, examinamos o caso quando $k \leq n - k$. A prova é bastante semelhante a do teorema anterior.

Teorema 3.3.8 *Suponha que, na notação do teorema anterior, $k \leq n - k$.*

(1) Se $k < n - k$, então o ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ é gerado por os polinômios

$$z_1 z_2, [y_1, y_2] \dots [y_{2(n-k)-1}, y_{2(n-k)}], [y_1, y_2] \dots [y_{2k-1}, y_{2k}] z.$$

(2) Se $k = n - k$, então o ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ é gerado por os polinômios

$$z_1 z_2, [y_1, y_2] \dots [y_{2k-1}, y_{2k}].$$

Agora, consideramos o caso em que a $\mathbb{Z}_2$ -gradação elementar é induzida por uma sequência ϵ com $n - 1$ variações, ou seja, $\epsilon = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$. Neste caso, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.9 *Seja $\epsilon = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ e considere a $\mathbb{Z}_n$ -gradação em $U_n(K)$ induzido por ϵ . Então o ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ é gerado pelos polinômios multilineares*

$$f_{\tilde{p}_q, q} = w_{p_0} z_1 w_{p_1} z_2 \dots w_{p_{q-1}} z_q w_{p_q},$$

onde $q = 0, 1, \dots, n$, $0 \leq p_i$, $\sum p_i = [(n - q + 1)/2]$ (a parte inteira). Além disso, os polinômios w_{p_i} são produtos de comutadores p_i de comprimento 2 nas variáveis pares y 's, isto é,

$$w_{p_i} = [y_{1,i}, y_{2,i}] \dots [y_{2p_i-1,i}, y_{2p_i,i}].$$

Prova. Nesse caso, a sequência diagonal $d(\epsilon)$ é $(-1, \dots, -1)$ e seu comprimento é $n - 1$. Considere uma sequência $\tilde{\gamma} \in G_m$ com l as entradas de $\tilde{\gamma}$ iguais a 1 e as entradas q restantes de $\tilde{\gamma}$ iguais a -1 .

$$\tilde{\gamma} = (1^{l_0}, -1, 1^{l_1}, -1, \dots, 1^{l_{q-1}}, -1, 1^{l_q}),$$

onde $l_i \geq 0$ e $l = \sum l_i$. Aqui 1^{l_i} representa a sequência $(1, 1, \dots, 1)$ de comprimento l_i . Então pela Proposição 3.3.2, a sequência $\tilde{\gamma} \in G^m$ é ϵ -boa se, e somente se, $2l + q \leq n - 1$. Daí, os polinômios $f_{\tilde{p}_q, q}$ são identidades graduadas porque correspondem às sequências ruins

$$\tilde{p}_q = (1^{p_0}, -1, 1^{p_1}, -1, \dots, 1^{p_{q-1}}, -1, 1^{p_q}).$$

Além disso, seja $\tilde{\gamma} = (1^{l_0}, -1, \dots, -1, 1^{l_q})$ uma sequência ruim de comprimento $m \leq n$ com q entradas ímpares e $l = m - q$ entradas pares. Então, $n \leq q$ ou $q \leq n - 1$ e $n \leq 2l + q$. No primeiro caso, $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma consequência de $f_{\tilde{0}_n, n} = z_1 \dots z_n$. No segundo caso, $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma consequência de $f_{\tilde{p}_q, q}$, para alguma sequência $\tilde{p}_q = (1^{p_0}, -1, \dots, -1, 1^{p_q})$, onde q entradas são ímpares, $p = \sum p_i$ entradas são pares, $p_i \leq l_i$ e $\sum p_i = [(n - q + 1)/2]$. ■

Nosso último exemplo diz respeito ao caso em que $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ é o grupo cíclico de ordem n e a graduação elementar de $U_n(K)$ é induzida por $\epsilon = (1, g, g^2, \dots, g^{n-1})$. Neste caso denotaremos as variáveis ímpares de G -grau g^i pelas letras z_i , para $i = 1, \dots, n - 1$. Lembre-se que uma base das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$ -graduadas foi determinada no Capítulo 2.

Teorema 3.3.10 *Seja $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ um grupo cíclico de ordem n . Considere a G -gradação elementar induzida por $\epsilon = (1, g, g^2, \dots, g^{n-1})$. Então o ideal $Id^{gr}(U_n(K), \epsilon)$ é gerado pelos polinômios*

$$[y_1, y_2], z_{i1} z_{j2}, \quad n \leq i + j.$$

Prova. Neste caso, a sequência diagonal $d(\epsilon)$ é $(g, g, \dots, g)$ de comprimento $n - 1$. Portanto, pela Proposição 3.3.2, uma sequência $\tilde{\gamma} \in G^m$ de comprimento $m \leq n$ é ϵ -ruim se, e somente se, existe pelo menos uma entrada par ou $\tilde{\gamma} = (g^{i_1}, \dots, g^{i_m}) \in G^m$ onde $1 \leq i_t \leq n - 1$ e $n \leq i_1 + \dots + i_m$. No primeiro caso, o polinômio $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma consequência de $[y_1, y_2]$. No segundo caso, o polinômio $f_{\tilde{\gamma}} = z_{i_1} \dots z_{i_m}$ é uma consequência de $z_{r_1} z_{s_2}$ onde $r = i_1 + \dots + i_t$, $s = i_{t+1} + \dots + i_m$ e $t + 1 \leq m$ é o menor índice tal que $n \leq (i_1 + \dots + i_t + i_{t+1})$. ■

Concluimos essa dissertação com duas caracterizações da $\mathbb{Z}_n$ -graduação anterior em termos das dimensões das componentes homogêneas de $U_n(K)$.

Proposição 3.3.11 *Seja $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ o grupo cíclico de ordem n e suponha que $\tilde{g} = (g^{i_1}, g^{i_2}, \dots, g^{i_n}), g^{i_1} = 1$, induz uma G -graduação elementar em $U_n(K)$, onde os elementos $g^{i_1}, g^{i_2}, \dots, g^{i_n}$ são dois a dois distintos. Se $\dim_K(U_n(K))_{g^{i_k}} = 1$ para algum k então a graduação é induzida por $(1, g^{i_2}, g^{2i_2}, \dots, g^{(n-1)i_2})$.*

Prova. A graduação é elementar, portanto, $e_{1,r}$ pertence a componente homogênea indexado por $g^{-i_1} g^{i_r}$. Assim, as matrizes elementares $e_{1,j}, j = 1, 2, \dots, n$, pertencem componentes homogêneas duas a duas distintas. O mesmo é verdade para as matrizes elementares $e_{i,n}, i = 1, 2, \dots, n$. Conclui-se daí que $i_k \equiv i_n \pmod{n}$. Os graus homogêneos das matrizes elementares $e_{23}, e_{24}, \dots, e_{2n}$ são, respectivamente, $g^{i_3-i_2}, g^{i_4-i_2}, \dots, g^{i_n-i_2}$, e estes devem ser diferentes do g^{i_n} . Portanto, $i_r - i_2 \not\equiv i_n \pmod{n}$ para todo $r \geq 3$. Agora observe que $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ é uma permutação de $(1, 2, \dots, n)$ e $i_2 + i_n \not\equiv i_2 \pmod{n}$ uma vez que $i_n \not\equiv 0 \pmod{n}$. Desta maneira, concluimos que $i_2 + i_n \equiv i_1 \equiv 0 \pmod{n}$ e $i_n \equiv -i_2 \pmod{n}$.

Repetindo o mesmo argumento para as matrizes elementares $e_{3,r}$, obtemos que $i_r - i_3 \not\equiv i_n \equiv -i_2 \pmod{n}, r \geq 4$. Segue-se que $i_3 - i_2$ não é congruente com $i_r, r \geq 4$. Portanto, segue que $i_3 - i_2 \equiv 0, i_2, i_3 \pmod{n}$. Uma vez que nenhum dos i_2 e i_3 é congruente com $0 \pmod{n}$, temos que $i_3 \equiv 2i_2 \pmod{n}$. De maneira semelhante, segue-se por indução que $i_r \equiv (r - 1)i_2 \pmod{n}$ para todo r . ■

Proposição 3.3.12 *Suponha que a graduação elementar em $U_n(K)$ seja induzida por $\tilde{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n, g_1 = 1$, onde os elementos $g_1, g_2, \dots, g_n$ são dois a dois distintos. Se $\dim_K(U_n(K))_{g_i} = n - 1$, para algum i com $2 \leq i \leq n$, então a graduação é induzida por $(1, g_2, g_2^2, \dots, g_2^{n-1})$.*

Prova. Se $1 \leq p \leq n$, então entre as matrizes elementares $e_{pp}, e_{p,p+1}, \dots, e_{pn}$ no máximo uma tem grau g_i . O mesmo acontece se considerarmos as matrizes elementares $e_{1p}, e_{2p}, \dots, e_{pp}$. Defina $U_n(K) = A$. Uma vez que $\dim A_{g_i} = n - 1$, segue-se que A_{g_i} é o espaço das matrizes elementares $e_{12}, e_{23}, \dots, e_{n-1,n}$. Portanto, $g_2 = g_2^{-1} g_3 = g_3^{-1} g_4 = \dots = g_{n-1}^{-1} g_n$ e, assim, $g_3 = g_2^2, g_4 = g_3 g_2^{-1} g_3 = g_2^3, \dots, g_n = g_{n-1} g_{n-2}^{-1} g_{n-1} = g_2^{n-1}$ por indução em n . ■

Bibliografia

- [1] Andrews, G. E., *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press (1984).
- [2] Azevedo, S. S., *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra **30** (12) (2002), 5849–5860.
- [3] Bahturin, Y., Sehgal, S.K. Zaicev, M., *Groups gradings on associative algebras*, J. Algebra **241** (2001), 677–698.
- [4] Benevides, F. S. *Módulo Binômio de Newton e Triângulo de Pascal*, Portal da Matemática, OBMEP.
- [5] Borges, A. R., *Identidades Polinomiais Graduadas de Matrizes Triangulares*, Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, 2012.
- [6] Bresar, M., *Introduction to Noncommutative Algebra*, New York: Springer, 2014.
- [7] Di Vincenzo, O. M., *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$* , Israel J. Math. **80** (1992), 323–335.
- [8] Diniz, D., *Álgebras Graduadas e Identidades Polinomiais Graduadas*, Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2007.
- [9] Diniz, D., *Introdução às Álgebras com Identidades Polinomiais*, Campina Grande-PB, 2022.
- [10] Domingues, H., Iezzi, G., *Álgebra Moderna*, 4 ed reform, São Paulo: atual, 2003.
- [11] Drensky, V. *A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*. Algebra and Logic. **20** (3), (1981), 188-194.
- [12] Drensky, V., *Free Algebras and PI-Algebras*, Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.
- [13] Etingof, et al., *Introduction to Representation Theory*, Student Mathematical Library, 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [14] Ferreira, L., C., S., *Graduações e identidades polinomiais graduadas para a álgebra de matrizes triangulares superiores*, Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, 2020.
- [15] Galvão, A. T., *PI-Álgebras*, Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- [16] Giambruno, A., Zaicev, M., *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys Monographs 122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

- [17] Grivel, P. P., *Une histoire du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt*, Expo. Matemática **22** (2) (2004), 145–184.
- [18] Hoffman, K., Kunze, R., *Linear Algebra*. 2nd ed, New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1971.
- [19] Jacobson, N., *Non-commutative polynomials and cyclic algebras*, Annals of Mathematics **35** (1934), 197–208.
- [20] Kaplansky, I., *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 575–580.
- [21] Kemer, A. R., *Solution of the problem as to whether associative algebras have a finite basis of identities*, Russian, Dokl. Akad. Nauk SSSR **298** (1988), no. 2, 273–277; translation in Soviet Math. Dokl. **37** (1988), no. 1, 60–64.
- [22] Koshlukov, P., Azevedo, S.S., *Graded identities for T -prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel Journal of Mathematics **128** (2002), 157–176.
- [23] Koshlukov, P., Valenti, A., *Graded identities for the algebra of $n \times n$ upper triangular matrices over an infinite field*, Internat. J. Algebra Comput. **13** (2003), 517–526.
- [24] Koshlukov, P., Valenti, A., Di Vincenzo, O. M., *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*, Journal of Algebra **275** (2004), 550–566.
- [25] Lam, T. Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 131, 2nd ed. Berlin, Springer.
- [26] Mundim, K. C., Mundim, M. S. P., *Álgebra de Grassmann e a Teoria Quântica*. Revista Brasileira de Ensino de Física **19** (1997), 209–233.
- [27] Polin, S. V., *Identities of an algebra of triangular matrices*. Sibirsk. Math. Zh. **21** (1980), 206–215.
- [28] Razmyslov, P.Yu., *Finite basing of the identities of a matrix algebra second order over a field of characteristic zero*. Algebra and Logic **12** (1973), 47–63.
- [29] Santos, R. B., Vieira, A. C., *PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria*, Rio de Janeiro: IMPA, 2021.
- [30] Siderov, P. N., *A basis for the identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field*. Pliska Stud. Math. Bulgar. **2** (1981), 143–152.
- [31] Specht, W., *Gesetze in ringen I*, Math. Z. **52** (1950), 557–589.
- [32] Valenti, A., Zaicev, M., *Abelian gradings on upper-triangular matrices*, Arch. Math. **80** (2003), 12–17.
- [33] Valenti, A., Zaicev, M., *Group gradings on upper triangular matrices*, Arch. Math. **89** (2007), 33–40.
- [34] Vovsi, S. M., *Triangular Products of Group Representations and Their Applications*. Progr. Math., vol. **17**, Birkhäuser, Boston, 1981.