



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**  
**CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA**

**Marcantônio Soares Figueiredo**

# **Um problema quase-linear de mínimo com fronteira livre**

Campina Grande

2021



**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Curso de Mestrado em Matemática**

# **Um problema quase-linear de mínimo com fronteira livre \***

por

**Marcantônio Soares Figueiredo**

sob orientação do

**Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Campina Grande**

**2021**

---

\*Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

F475p

Figueiredo, Marcantônio Soares.

Um problema quase-linear de mínimo com fronteira livre /  
Marcantônio Soares Figueiredo. – Campina Grande, 2021.  
128 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de  
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.  
“Orientação: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos”.  
Referências.

1. Matemática. 2.  $p$ -Laplaciano. 3. Problema de Fronteira Livre.  
4. EDP Degenerada. 5. Mínimo Local. I. Santos, Jefferson Abrantes dos.  
II. Título.

CDU 51(043)

# Um problema quase-linear de mínimo com fronteira livre

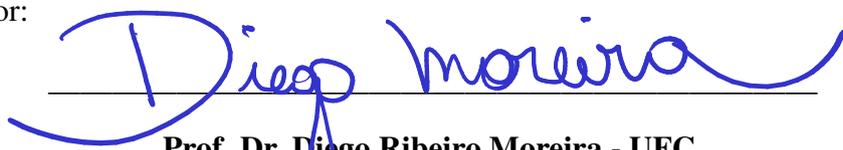
por

Marcantônio Soares Figueiredo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:



Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira - UFC



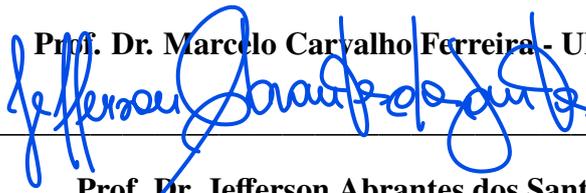
Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares - USP



Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira - UFCG



Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG



Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro de 2021



# Agradecimentos

Em primeiro lugar, a meus pais, irmãos e sobrinhos, a quem amo.

Em segundo lugar, a meu orientador, Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos, que me lecionou no PICME e apresentou-me ao tema fascinante dos problemas de fronteira livre, à banca, pela sua paciência e dedicação, e ao excelentíssimo corpo docente do PPGMat da UFCG, composto de profissionais que foram capazes de manter os cursos de pós-graduação em Matemática funcionando com máxima qualidade em tempos adversos de pandemia.

Em terceiro lugar, agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro sem o qual esta dissertação não existiria.

E em último, porém ainda extremamente importante, ao Prof. Me. José Vieira Alves, quem me lecionou no PIC-Jr. em meus anos de medalhista da OBMEP e me instigou ao prazer de estudar Matemática.

# Dedicatória

A meus pais.

*Só se é curioso na proporção de  
quanto se é instruído.*

— Jean-Jacques Rousseau

# Resumo

Um problema de fronteira livre (PFL) é um tipo de problema de valor de fronteira, o qual deve ser satisfeito em um subconjunto desconhecido a priori de um domínio dado. O PFL envolvendo o operador diferencial quase-linear degenerado  $p$ -Laplaciano, no conjunto de positividade de uma função e com condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, foi estudado variacionalmente por Danielli e Petrosyan em 2005 [11]. Neste trabalho, objetivamos detalhar os pré-requisitos e as demonstrações de dois dos principais Teoremas em Danielli-Petrosyan: um mínimo local do funcional do tipo Alt-Caffarelli associado ao  $p$ -Laplaciano é  $p$ -harmônico em seu conjunto de positividade e a fronteira de tal conjunto, chamada fronteira livre, tem dimensão de Hausdorff  $N - 1$ , respectivamente.

**Palavras-chave:**  $p$ -Laplaciano, problema de fronteira livre, EDP degenerada, mínimo local.

# Abstract

A free boundary problem is a boundary value problem satisfied in a subset, unknown a priori, of a given domain. The free boundary problem associated with the  $p$ -Laplacian operator, in the positivity set of a function and with Dirichlet and Neumann boundary conditions, was studied by Danielli and Petrosyan in 2005 [11], who applied variational methods. In this work, we prove two of the main theorems of Danielli-Petrosyan: any local minimum of the  $p$ -Laplace operator is  $p$ -harmonic in its positivity set and the boundary of such set, namely, the free boundary, has Hausdorff dimension  $N - 1$ , respectively.

**Key words:**  $p$ -Laplacian, free boundary problem, degenerate PDE, local minimum.

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	1
<b>1 EDPs quase-lineares</b>	<b>14</b>
1.1 Fundamentos de EDPs e do Cálculo das Variações . . . . .	14
1.2 O operador $p$ -Laplaciano . . . . .	18
1.3 Problema de Dirichlet $p$ -harmônico . . . . .	24
<b>2 O problema de mínimo</b>	<b>30</b>
2.1 Mínimos locais do funcional energia . . . . .	30
2.2 Invariância . . . . .	37
2.3 $\alpha$ -Hölder continuidade local . . . . .	43
2.4 $p$ -Harmonicidade fraca . . . . .	50
<b>3 Regularidade de mínimos locais</b>	<b>65</b>
3.1 Continuidade Lipschitz local . . . . .	65
3.2 Não-degenerescência . . . . .	76
<b>4 Perímetro localmente finito do conjunto de positividade</b>	<b>88</b>
4.1 A medida $\Lambda = \Delta_p u$ . . . . .	88
4.2 Teorema de representação . . . . .	99
<b>A Preliminares</b>	<b>105</b>
<b>B Teoria Geométrica da Medida</b>	<b>111</b>
<b>C Análise Funcional</b>	<b>116</b>
<b>D Teoremas de Sobolev</b>	<b>117</b>

	ii
<b>E Distância de Hausdorff</b>	<b>119</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>125</b>

# Introdução

Um problema de fronteira livre (PFL) é um problema de valor de fronteira que deve ser satisfeito num subconjunto, desconhecido a priori, de um aberto não-vazio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  dado. Um exemplo, assumindo que  $\Omega$  é conexo e  $\partial\Omega \in C^2$  (ver **Definição A.1**, no **Apêndice A**), é o problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } D \\ u = f \text{ sobre } \partial\Omega \cap \partial D \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma := \Omega \cap \partial D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g \text{ sobre } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

onde o conjunto aberto  $D \subset \Omega$  e a função  $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) \cap C(\Omega)$  são desconhecidos a priori,  $f, g \in C(\overline{\Omega})$  são funções não-negativas dadas e  $\nu$  representa o vetor unitário normal externo a  $\partial D$ . O conjunto  $\partial D$  é chamado de fronteira livre.

Note que (1) possui uma condição de fronteira a mais do que o seguinte problema de Dirichlet, o qual é bem posto para  $\Omega$  conexo (cf. [25] (2.27) e Teorema 2.9):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = f \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Isso é necessário para compensar a falta de informações a priori acerca de  $D$ , de modo que (1) também esteja bem posto,

Em alguns casos, é possível aplicar uma reparametrização dos dados de um PFL de modo a gerar um novo problema de valor de fronteira, desta vez sobre um conjunto conhecido, porém pagando o preço de perder alguma condição sobre a fronteira. O problema resultante é chamado de problema de valor de fronteira dinâmico (ver [15] para um exemplo

na absorção de sal pelas raízes de um manguezal). Em geral, nestes casos, um PFL linear torna-se uma EDP não-linear. Tal situação ilustra a dificuldade adicional no estudo de PFLs com relação a EDPs.

Nos dirigimos agora a algumas aplicações físicas. Apresentamos três exemplos clássicos.

**Problema 1. Problema de obstáculo:**

Dada uma membrana elástica cuja parte exterior é fixada numa base plana, desejamos obter sua posição de equilíbrio enquanto sobreposta a um determinado obstáculo. Estar na posição de equilíbrio significa que a tensão superficial da membrana é mínima. Isso ocorre na região da membrana que não toca o obstáculo.

Para a modelagem matemática do problema, temos:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio limitado com fronteira Lipschitz;
- $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi < 0$  sobre  $\partial\Omega$ , é a função cujo gráfico representa o obstáculo.
- $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $u \geq 0$  em  $\Omega$ ,  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , é a função cujo gráfico representa a membrana (ver Figura 1);
- $D := \{u > \varphi\}$  e  $\Gamma := \Omega \cap \partial D$ .

Note que  $D$  é a região de equilíbrio da membrana e  $\Omega \setminus D$  é a região de contato entre a membrana e o obstáculo. Ademais,  $D$  é desconhecida quando  $u$  é desconhecida.

Buscamos minimizar o funcional energia

$$u \mapsto \int_D |\nabla u|^2 dx$$

para  $u$  dentre a classe de funções admissíveis

$$\mathcal{K} = \{w \in C^1(\overline{\Omega}); w \geq \varphi \text{ e } w \geq 0 \text{ em } \Omega, w = \varphi \text{ em } \Omega \setminus D, w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

A Equação de Euler-Lagrange (ver **Definição 1.11**) deste funcional é a Equação de Laplace

$$-\Delta u = 0 \quad \text{em } D.$$

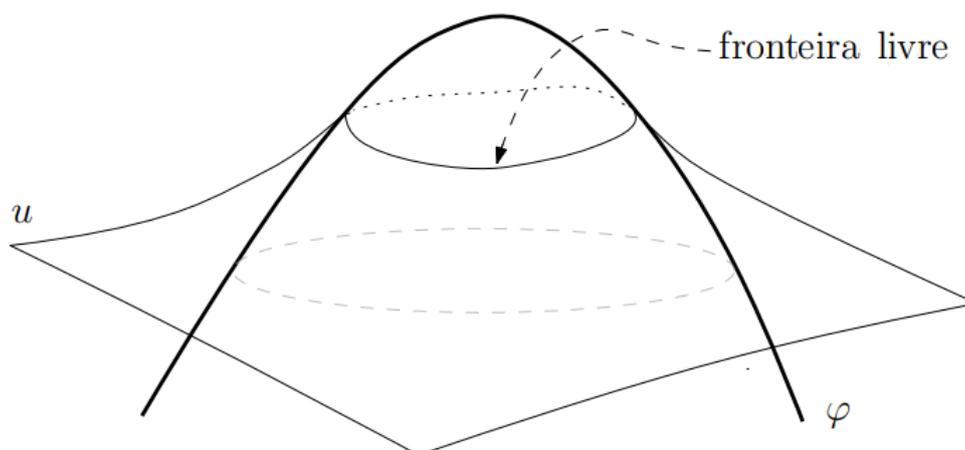


Figura 1: Problema de obstáculo. Fonte: [27]

A função  $u$  deve então satisfazer o seguinte PFL:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } D \\ u \geq \varphi \text{ e } u \geq 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \\ u = \varphi \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal externo a  $\partial\Omega$ . Mais detalhes do **Problema 1** são encontrados em [27].

No PFL acima, se assumirmos a priori que  $\Omega \setminus D$  é conexo e que  $\varphi = 1$  sobre  $\Gamma$  e denotarmos

$$g = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \geq 0 \quad \text{sobre } \Gamma,$$

então (2) é classificado como um problema de Bernoulli, isto é, um problema de fronteira livre com o formato

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \setminus \bar{U} \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \\ u = 1 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sobre } \partial U \end{cases}$$

onde  $U \subset\subset \Omega$  é conexo. Problemas de Bernoulli surgem também em “fluxos bidimensionais, fluxos de calor e usinagem eletroquímica” [11].

**Problema 2. O problema da barragem de Alt:**

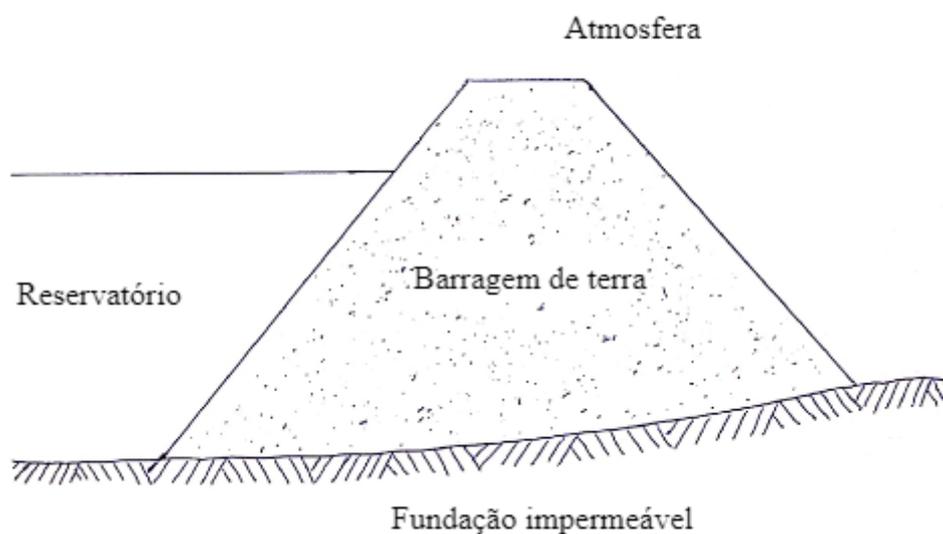


Figura 2: Esboço da barragem. Fonte: [3]

Em 1983, Alt [3] modelou matematicamente o seguinte problema: numa barragem de terra homogênea construída sobre uma fundação impermeável para represar um reservatório de água, deseja-se saber como a água penetra nas camadas do meio poroso (terra). Assume-se uma situação de equilíbrio na estrutura da barragem e que não há vazamento. Os dados matemáticos, em conformidade com [3], são os seguintes:

- $\Omega$  é um domínio limitado do  $\mathbb{R}^2$  e representa uma seção lateral da barragem (ver Figura 2);
- $\partial\Omega$  é dividida em três partes conexas:  $S_{ar}$ ,  $S_{res}$  e  $S_{imp}$ , que são as fronteiras da barragem com a atmosfera, com o reservatório de água e com a fundação impermeável, respectivamente (ver Figura 3);
- $0 < \mathcal{H}^1(S_{res}) < +\infty$  (ver **Definição B.2**, no **Apêndice B**);
- $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $u \geq 0$ , é a pressão (desconhecida a priori) da água dentro do meio poroso;
- $D := \{u > 0\}$  é a região úmida e  $\{u = 0\}$  é a região seca (ver Figura 4);
- $\Gamma := \Omega \cap \partial D$ ;
- $\mathbf{q} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$  é o fluxo de água;
- $K \in C^1(\bar{\Omega})$  é o coeficiente de permeabilidade do meio poroso;

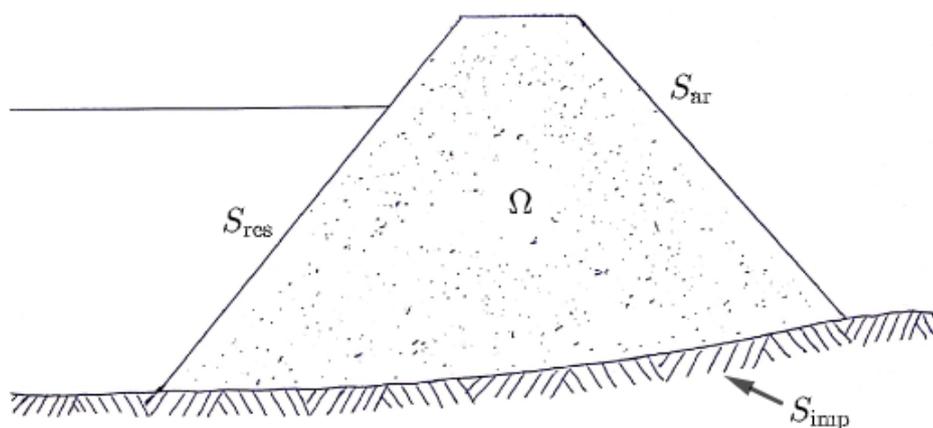


Figura 3: Dados matemáticos. Fonte: [3]

- $e = (0, 1)$  é o vetor unitário vertical canônico em  $\mathbb{R}^2$ ;
- $\nu$  será usado para denotar tanto o vetor unitário normal externo a  $\partial\{u > 0\}$  quanto o vetor unitário normal externo a  $\partial\Omega$ ;
- $f : S_{\text{res}} \cup S_{\text{ar}} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$ , denota, sobre  $S_{\text{res}}$ , a pressão da água do reservatório sobre cada ponto e, sobre  $S_{\text{ar}}$ , a pressão atmosférica.

Em  $D$ , valem a

$$\text{Lei de Darcy :} \quad \mathbf{q} = -K(\nabla u + e) \quad (3)$$

e a condição de equilíbrio

$$\text{div } \mathbf{q} = 0. \quad (4)$$

Sobre  $\partial\Omega$ , valem as condições:

- $u = f$  sobre  $S_{\text{res}}$  e  $u \leq f$  sobre  $S_{\text{ar}}$ ;
- $\mathbf{q} \cdot \nu = 0$  sobre  $S_{\text{imp}} \cup S_{\text{ar}}$  (não há vazamento).

Sobre o conjunto  $\Gamma$  o fluxo de saída é zero. Isso implica em

$$\mathbf{q} \cdot \nu = 0 \quad \text{sobre } \Gamma.$$

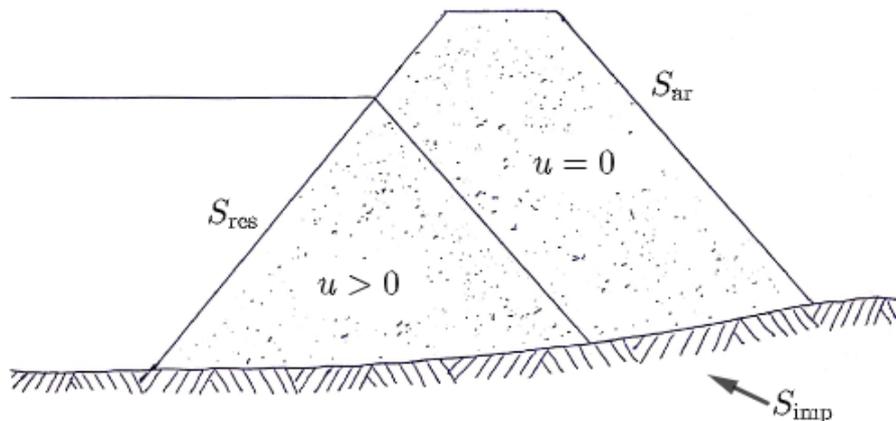


Figura 4: Infiltração de água em  $\Omega$ . Fonte: [3]

Reunindo as equações (3) e (4) e as condições acima, obtemos o seguinte problema de fronteira livre de uma fase:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(K(\nabla u + e)) = 0 \text{ em } D \\ u = f \text{ sobre } S_{\text{res}} \\ u \leq f \text{ sobre } S_{\text{ar}} \\ K(\nabla u + e) \cdot \nu = 0 \text{ sobre } S_{\text{imp}} \cup S_{\text{ar}} \cup \Gamma. \end{array} \right.$$

Considere o conjunto convexo

$$\mathcal{K} = \{u \in H^1(\Omega); u = f \text{ sobre } S_{\text{res}} \text{ e } u \leq f \text{ sobre } S_{\text{ar}}\}.$$

Então, segundo Alt [3], o sistema de equações acima, em forma fraca, equivale ao problema de minimização do funcional

$$u \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{q} \chi_{\{u>0\}} dx, \quad u \in \mathcal{K}.$$

Mais detalhes sobre o problema da barragem podem ser encontrados em [3].

### Problema 3. Condução de calor:

Em 1889, em suas pesquisas sobre a teoria da formação de gelo nos mares polares, o físico-matemático austríaco Josef Stefan [30] [31] descreveu o seguinte problema: um bloco de gelo à temperatura de  $0^\circ \text{C}$  encontra-se em isolamento térmico exceto por uma face, pela qual é exposto a uma fonte de calor uniforme com temperatura  $T_0 > 0^\circ \text{C}$ . Assume-se que a

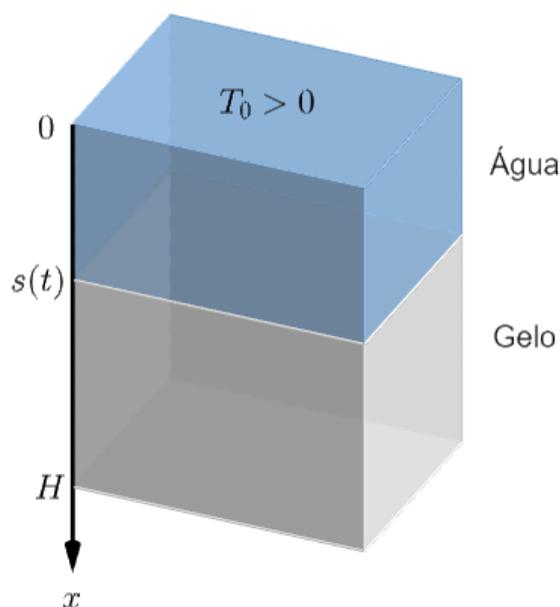


Figura 5: Sistema água-gelo no instante  $t$ . Feito no Geogebra.

água e o gelo no sistema têm a mesma densidade e que, em cada instante  $t > 0$ , a temperatura se distribui uniformemente em cada seção horizontal.

Matematicamente, temos os seguintes elementos:

- $H > 0$  é a profundidade do bloco de gelo no instante  $t = 0$ ;
- $s(t)$  é a profundidade da água no instante  $t \geq 0$ ,  $s(0)=0$ ;
- A cada instante  $t$ , o intervalo  $[0, s(t))$  denota a fase líquida e  $(s(t), H]$  denota a fase sólida (ver Figura 5);
- $\Omega = (0, H) \times (0, +\infty)$  representa o material analisado no espaço-tempo;
- $u(x, t)$  é a temperatura da água líquida na profundidade  $x$  e no tempo  $t$  (note que  $u(x, t) > 0$  para  $0 \leq x < s(t)$  e  $u(x, t) = 0$  para  $s(t) \leq x \leq h$ );
- $q : (0, H) \rightarrow \mathbb{R}$  denota o *fluxo de calor*;
- $\rho$  é a densidade da água líquida;
- $L$  é o calor latente de fusão do gelo;
- $c$  é o calor específico da água líquida;

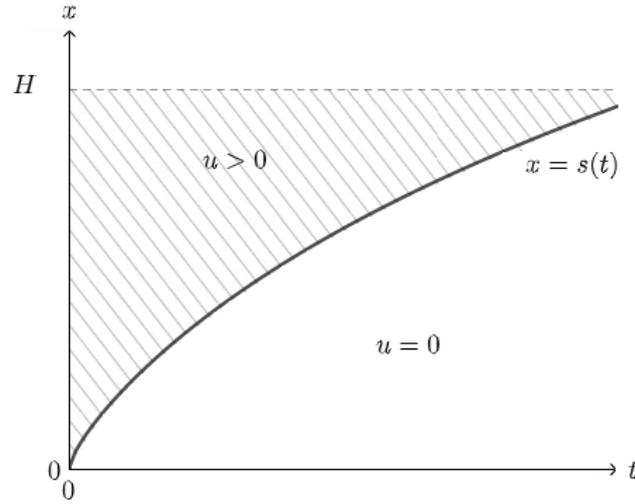


Figura 6: Fase líquida sobre o tempo (região hachurada). Feito no Geogebra.

- $k$  é a condutividade térmica da água líquida;
- $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  é a difusividade térmica da água.

Também vamos assumir, por simplicidade assim como em [2], que  $\rho$ ,  $L$ ,  $c$  e  $k$  são constantes e que a região de mudança de fase

$$\Gamma := \{(s(t), t); t > 0\} = \Omega \cap \partial\{u > 0\}$$

tem espessura desprezível, mas é não-trivial (i.e.  $\dim_H(\Gamma) = 1$  e  $\mathcal{H}^1(\Gamma) > 0$ ).

Sobre  $D := \{u > 0\}$  (ver Figura 6), aplicam-se as seguintes propriedades termodinâmicas em forma unidimensional [2]:

$$\text{Lei de Fourier : } q = -k \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$\text{Lei de Conservação de Energia : } \frac{\partial}{\partial t}(\rho c u) + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Das duas Leis anteriores obtemos, em  $D$ , a:

$$\text{Equação do Calor : } \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5)$$

As condições sobre a fronteira livre  $\partial D$  serão as seguintes:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, H], \quad (\text{temperatura inicial}) \quad (6)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad t > 0, \quad (\text{temperatura da superfície}) \quad (7)$$

$$u(s(t), t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{temperatura de mudança de fase}) \quad (8)$$

Também aplica-se, para  $(x, t)$  na interface de mudança de fase  $\Gamma$ , a seguinte equação de Stefan (cf. [2] pág. 21):

$$\rho L s'(t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (9)$$

Reunindo as equações (5)-(9) obtemos o seguinte problema de fronteira livre, conhecido como **Problema de Uma Fase de Stefan para uma laje derretendo pela esquerda** (ver Figura 6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } D, \\ \rho L s'(t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \text{ e } u(x, t) = 0 \text{ para } (x, t) \in \Gamma, \\ s(0) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, H], \\ u(0, t) = u_0, \quad t > 0. \end{array} \right.$$

Tal problema possui solução generalizada que pode ser calculada numericamente (cf. [2] pág. 36 e [28] pág. 310).

Rubinstein [28] descreve várias situações físicas que se reduzem a problemas de Stefan, tais como filtragem, cristalização de metal fundido e crescimento de uma bolha de ar em água. Isto também ocorre no caso das equações de combustão na teoria multidimensional para chamas pré-misturadas (cf. [10] pág. 151). Mais discussões sobre o problema de Stefan podem ser encontradas em [2], [9], [27] e [28].

Além dos casos apresentados, existem problemas de fronteira livre “físicos (física de plasma, solidificação), químicos (deposição de vapor químico), financeiros (opção americana), biológicos (crescimento de tecido), processos industriais como fotografia elétrica, entre outras áreas” [7]. Algumas destas e outras aplicações são estudadas em [2], [3], [7], [9], [15], [18], [24], [26], [27] e [28]. A vasta interdisciplinariedade demonstra o quão útil é a teoria de problemas de fronteira livre.

Em 1981, Alt e Caffarelli [4] trabalharam com uma forma mais geral do problema (1). Sob as seguintes condições:

- $\partial\Omega \in C^{0,1}$  (i.e. regularidade Lipschitz para a fronteira);
- $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  é fracamente derivável com  $|\nabla f| \in L^2(\Omega)$ ;

- $g \in L^2(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$ , para algum  $0 < \alpha < 1$ , onde

$$0 < \inf_{\Omega} g \leq g \leq \sup_{\Omega} g < +\infty \quad \text{q.t.p. em } \Omega;$$

- $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  é fracamente derivável com  $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$ ;
- $D = \{u > 0\}$ ;

os autores mostraram que minimizantes absolutos do funcional

$$u \mapsto \int_{\{u>0\}} |\nabla u|^2 + g^2 dx, \quad u \in H^1(\Omega), \quad u - f \in H^1_0(\Omega),$$

são *soluções fracas* — num sentido apropriado, levando em consideração a condição de Neumann para a fronteira livre conforme (4.18), no **Capítulo 4** — de (1). O artigo de Alt e Caffarelli exhibe o fato de que a relação entre mínimos de funcionais energia sobre um dado domínio  $\Omega$  e sua Equação de Euler-Lagrange (ver **Proposição 1.12**, no **Capítulo 1**) pode ser estendida, em algumas situações, para problemas de fronteira livre.

Três anos depois, Alt, Caffarelli e Friedman [5] generalizaram os resultados de Alt e Caffarelli mostrando que mínimos de funcionais do tipo

$$u \mapsto \int_{\{u>0\}} F(|\nabla u|^2) + \lambda^2 dx,$$

para  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ ,  $F \in C^2([0, +\infty))$  uma função convexa, não-negativa e estritamente crescente,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  não-negativa com  $|\nabla f| \in L^2(\Omega)$ ,  $\lambda > 0$  constante e  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  cumprindo  $u - f \in L^1(\Omega)$ ,  $F(|\nabla u|^2) \in L^1(\Omega)$  e  $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$ , são soluções fracas do PFL

$$\begin{cases} \operatorname{div} [2F'(|\nabla u|^2)\nabla u] = 0 \text{ em } \{u > 0\}, \\ u = f \text{ sobre } \partial\Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Omega \cap \partial\{u > 0\}, \\ 2 \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 F' \left( \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \right) - F' \left( \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \right) = \lambda^2 \text{ sobre } \Omega \cap \partial\{u > 0\}. \end{cases}$$

Em 2005, Danielli e Petrosyan [11] trabalharam em uma nova extensão dos estudos de Alt e Caffarelli, lidando com o funcional

$$u \mapsto \int_{\{u>0\}} |\nabla u|^p + \lambda^p dx \tag{10}$$

onde  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ ,  $1 < p < +\infty$ ,  $f_0 \in W^{1,p}(\Omega)$  é não-negativa,  $\lambda > 0$  é uma constante e  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  é tal que  $u - f_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Os autores mostraram que mínimos do funcional em (10) são soluções fracas do PFL

$$\begin{cases} \Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0 \text{ em } \{u > 0\}, \\ u = f_0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ u = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = c, \text{ sobre } \Omega \cap \partial\{u > 0\}, \end{cases} \quad (11)$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal externo a  $\partial\{u > 0\}$  e  $c = c(p, \lambda) < 0$  é uma constante. Há de se observar que o operador  $p$ -Laplaciano empregado por Danielli e Petrosyan é degenerado para  $p > 2$ , logo não é uniformemente elíptico. Martínez e Wolansky [23], em 2007, deram seguimento ao mostrar que mínimos de funcionais da forma

$$u \mapsto \int_{\{u>0\}} G(|\nabla u|) + \lambda \, dx,$$

onde  $\partial\Omega$  é suave,  $G \in C^2([0, +\infty))$  é uma função convexa, não-negativa e estritamente crescente,  $f \in L^\infty(\Omega)$  é não-negativa, fracamente derivável e é tal que  $G(|\nabla f|) \in L^1(\Omega)$ ,  $\lambda > 0$  é constante e  $u \in L^1(\Omega)$  é tal que  $u - f \in L^1(\Omega)$  e  $G(|\nabla u|) \in L^1(\Omega)$ , são soluções fracas do PFL

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left[ G'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] = 0 \text{ em } \{u > 0\}, \\ u = f \text{ sobre } \partial\Omega, \\ u = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = c, \text{ sobre } \Omega \cap \partial\{u > 0\}, \end{cases}$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal externo a  $\partial\{u > 0\}$  e  $c = c(G, \lambda) < 0$  é uma constante. Martínez e Wolansky buscaram estender os resultados de [11] para as condições da função  $G$  introduzidas por Lieberman [21], com contribuições para o estudo dos espaços de Orlicz-Sobolev. Recentemente, Velichkov [32] fez um apanhado da teoria de regularidade para problemas de fronteira livre.

Nesta dissertação, estudamos as propriedades de mínimos locais, num sentido apropriado, do funcional em (10):

$$J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \lambda^p \chi_{\{u>0\}} dx.$$

Nosso objetivo é demonstrar os três primeiros dentre os seguintes resultados:

**Teorema 0.1 (cf. [11] Teorema 2.1)** *Seja  $f_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ . Se  $J(f_0) < +\infty$ , então existe um minimizante absoluto  $u$  de  $J$  na classe*

$$\mathcal{K} := \{w \in W^{1,p}(\Omega); w - f_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\},$$

*i.e. uma função  $u \in \mathcal{K}$  tal que*

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathcal{K}.$$

*Qualquer minimizante absoluto  $u$  é não-negativo e  $\Delta_p u = 0$  fracamente em  $\{u > 0\}$ . Além disso, se assumirmos que  $u \in C^2(\{u > 0\})$ , então  $u$  satisfaz a condição de fronteira  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -|\nabla u| = c(p, \lambda)$  sobre  $\partial\Omega$  no sentido muito fraco a seguir:*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \text{ess} \int_{\Omega \cap \partial\{u > s\}} [(p-1)|\nabla u|^p - \lambda^p] \eta \cdot \nu_s d\mathcal{H}^{N-1} = 0$$

*(ver o **Apêndice A** para a definição de limite essencial) para toda função vetorial  $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , onde  $\nu_s$  é o vetor unitário normal a  $\Omega \cap \partial\{u > s\}$ , nos pontos onde estiver definido.*

Para  $1 < p < N$ , teremos:

**Teorema 0.2 (cf. [11] Corolário 4.3 e Teorema 4.4)** *Seja  $u$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$  (ver **Definição 2.2**). Para cada  $U \subset\subset \Omega$  com  $U \cap \{u > 0\} \neq \emptyset$ , existem constantes  $0 < c < C$ , com  $c \in (0, 1)$ , dependentes apenas de  $N, \|f_0\|_\infty$  (ver o **Apêndice A** para notações de normas),  $p, \lambda$  e  $U$ , tais que:*

(i)  $\|u\|_{W^{1,\infty}(U)} \leq C$ , isto é,  $u$  admite um representante Lipschitz em  $U$ .

Ademais, para todo  $r > 0$  suficientemente pequeno:

(ii) Se  $B_r(x) \subset U \cap \{u > 0\}$  é uma bola aberta que toca  $\partial\{u > 0\}$ , então

$$cr \leq u(x) \leq Cr.$$

(iii) Se  $x \in \partial\{u > 0\}$  e  $B_r(x) \subset U$ , então

$$c < \frac{|B_r(x) \cap \{u > 0\}|}{|\{u > 0\}|} < 1 - c,$$

onde  $|X| = \mathcal{L}^N(X)$  para  $X \subset \mathbb{R}^N$ .

**Teorema 0.3 (cf. [11] Teorema 5.2 e Teorema 5.6)** *Seja  $u$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$  (ver **Definição 2.2**). Então*

(i)  $\mathcal{H}^{N-1}(U \cap \partial\{u > 0\}) < +\infty$  para todo  $U \subset\subset \Omega$ .

(ii) Existe uma função de Borel  $q_u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\Delta_p u = q_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial\{u > 0\},$$

isto é, para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , tem-se

$$- \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega \cap \partial\{u > 0\}} \varphi q_u \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

(iii) Para cada  $U \subset\subset \Omega$ , existem constantes  $0 < c < C$ , dependentes apenas de  $N, \|f_0\|_\infty, p, \lambda$  e  $U$ , tais que

$$c \leq q_u(x) \leq C, \quad cr^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \partial\{u > 0\}) \leq Cr^{N-1},$$

para  $\mathcal{H}^{N-1}$ -q.t.p.  $x \in U \cap \partial\{u > 0\}$  e para todo  $r > 0$  suficientemente pequeno com  $B_r(x) \subset U$ .

**Teorema 0.4 (cf. [11] Corolário 9.2)** *Seja  $u$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Então a fronteira reduzida  $\partial_{red}\{u > 0\}$  é uma superfície analítica localmente em  $\Omega$  e o restante de  $\partial\{u > 0\}$  tem medida  $\mathcal{H}^{N-1}$  nula.*

Tais teoremas são úteis para mostrar que mínimos locais do funcional em (10) são soluções fracas de (11) (ver a **Seção 4.2**). O caso geral  $1 < p < +\infty$  admite os mesmos resultados quando consideramos mínimos absolutos.

Temos interesse em fornecer mais detalhes do que é apresentado em [11], como argumentos envolvendo a minimalidade local e constantes explícitas, onde for possível. Em algumas situações, nos remetemos às autoras Martínez e Wolansky [23] ou ao autor Velichkov [32] para melhor compreensão. A estrutura é descrita como segue.

No **Capítulo 1**, definimos operadores quase-lineares, trazemos ideias elementares do Cálculo das Variações, mostramos propriedades gerais do operador  $p$ -Laplaciano e elencamos algumas desigualdades. Em seguida, no **Capítulo 2**, definimos mínimos locais do funcional em (10) e provamos o **Teorema 0.1**.

Uma análise da regularidade de mínimos locais está presente no **Capítulo 3**, onde demonstramos o **Teorema 0.2**. Para tal, são cruciais os resultados obtidos no **Capítulo 1** e no **Capítulo 2**, como as desigualdades de Caccioppoli e Harnack, e a  $p$ -harmonicidade de mínimos locais em seus conjuntos de positividade.

Deixamos para o **Capítulo 4** a discussão sobre o **Teorema 0.3**, mostrando que  $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$  tem dimensão de Hausdorff  $N - 1$  e que  $\{u > 0\}$  tem perímetro localmente finito.

# Capítulo 1

## EDPs quase-lineares

Estabelecemos, neste Capítulo, as definições e os resultados da Teoria das Equações Diferenciais Parciais e do Cálculo das Variações que nos forem úteis. Além disso, definimos o operador  $p$ -Laplaciano e trazemos algumas de suas propriedades (nem todas com demonstração) tais como a degenerescência, as desigualdades de Caccioppoli e Harnack e a regularidade *sharp* (ou ótima)  $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}$  para funções  $p$ -harmônicas.

### 1.1 Fundamentos de EDPs e do Cálculo das Variações

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto não-vazio e  $1 \leq p < +\infty$ .

**Definição 1.1 (EDP)** *Seja*

$$L : \mathbb{R}^{N^2} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

*uma função. A igualdade*

$$L(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.1}$$

*a qual deve ser satisfeita para alguma função  $u \in C^2(\Omega)$ , é chamada **Equação Diferencial Parcial (EDP)** de segunda ordem.*

**Definição 1.2 (EDP linear)** *Sejam  $a_{ij}, b_i, c$  e  $d$ , para  $i, j = 1, \dots, N$ , funções reais integráveis definidas em  $\Omega$ , com as  $a_{ij}$  não todas nulas. Quando (1.1) for da forma*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^N b_i(x) D_iu + c(x)u + d(x) = 0,$$

*diremos que (1.1) é **linear**.*

**Definição 1.3 (EDP quase-linear)** *Sejam  $a_{ij}$  e  $b$ , para  $i, j = 1, \dots, N$ , funções reais integráveis definidas em  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega$ , com as  $a_{ij}$  não todas nulas. Quando (1.1) for da forma*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(Du(x), u(x), x) D_{ij}u + b(Du(x), u(x), x) = 0, \quad (1.2)$$

*diremos que (1.1) é **quase-linear**.*

**Definição 1.4** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega$ . Uma EDP quase-linear é dita **elíptica** em  $U$  se a matriz de coeficientes  $A(\eta, s, x) = (a_{ij}(\eta, s, x))_{i,j=1}^N$  é positiva definida para todo  $(\eta, s, x) \in U$ .*

**Observação 1.5** *Isso equivale a dizer que  $\xi^T A(\eta, s, x) \xi > 0$  para todos  $(\eta, s, x) \in U$  e  $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Alternativamente, se, para cada  $(\eta, s, x) \in U$ ,  $\gamma(\eta, s, x)$  e  $\Upsilon(\eta, s, x)$  denotam, respectivamente, os mínimos e máximos autovalores de  $A(\eta, s, x)$ , então (1.2) é elíptica em  $U$  se, e somente se,*

$$0 < \gamma(\eta, s, x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\eta, s, x) \xi_i \xi_j \leq \Upsilon(\eta, s, x) |\xi|^2 \quad \forall (\eta, s, x) \in U \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

onde  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ .

**Definição 1.6** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega$ . Uma EDP quase-linear elíptica em  $U$  é dita **uniformemente elíptica** em  $U$  quando existe uma constante  $\theta > 0$  tal que*

$$\gamma(\eta, s, x) \geq \theta \quad \forall (\eta, s, x) \in U.$$

**Observação 1.7** *Uma EDP quase-linear elíptica que não é uniformemente elíptica é necessariamente degenerada.*

**Definição 1.8 (Forma divergente)** *Uma EDP quase-linear tem a **forma divergente** quando pode ser escrita como*

$$-\operatorname{div} \mathbf{a}(Du(x), u(x), x) + b(Du(x), u(x), x) = 0, \quad (1.3)$$

onde  $\mathbf{a} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  é um campo de vetores diferenciável e  $b : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável.

**Definição 1.9 (Classe de funções admissíveis)** *Sejam  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  (ver **Definição A.1**, no **Apêndice A**) e  $f \in L^p(\partial\Omega; \mathcal{H}^{N-1})$ . O conjunto*

$$\mathcal{K}(f, \Omega) := \{w \in W^{1,p}(\Omega); Tw = f\}$$

*(onde  $T$  é o operador traço, conforme o **Teorema D.1**, no **Apêndice D**) é dito uma **classe de funções admissíveis**.*

**Definição 1.10 (Solução fraca)** Para  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  e  $f \in L^p(\partial\Omega; \mathcal{H}^{N-1})$ , diremos que  $u \in \mathcal{K}(f, \Omega)$  é uma **solução fraca** do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{a}(Du(x), u(x), x) + b(Du(x), u(x), x) = 0 \text{ em } \Omega \\ u = f \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

se

$$\int_{\Omega} \mathbf{a}(Du(x), u(x), x) \cdot \nabla \varphi - b\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Caso não tenhamos informação sobre a fronteira de  $\Omega$ , vamos solicitar apenas que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  e

$$\int_B \mathbf{a}(Du(x), u(x), x) \cdot \nabla \varphi - b\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B) \quad (1.4)$$

para toda bola aberta não-vazia  $B \subset \Omega$ . Note que, neste caso, não há condições sobre  $\partial\Omega$ .

Para o que segue, vamos fixar  $f \in L^p(\partial\Omega; \mathcal{H}^{N-1})$  e denotar  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f, \Omega)$ . Seja

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\eta, s, x) &\mapsto F(\eta, s, x) \end{aligned}$$

uma função suave e convexa nas variáveis  $\eta$  e  $s$ . Para  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , denotamos  $F(u) = F(\nabla u, u, \cdot)$  em  $\Omega$  e, dada uma bola aberta não-vazia  $B \subset \Omega$ , consideramos o *funcional energia*

$$I_B(u) = \int_B F(u) dx.$$

Vamos assumir que se  $F(u)$  é somável, então  $F(u + \varphi)$  é somável para toda  $\varphi \in C_0^\infty(B)$ .

**Definição 1.11 (Variacional, Equação de Euler-Lagrange)** A EDP quase-linear na forma divergente (1.3) é dita **variacional** quando pode ser escrita como a **Equação de Euler-Lagrange**

$$-\operatorname{div}(\nabla_\eta F(u)) + \frac{\partial F}{\partial s}(u) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (1.5)$$

de um funcional energia  $I$ .

A definição acima é motivada pela seguinte proposição.

**Proposição 1.12** Seja  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ . Se  $u \in \mathcal{K}$ ,  $I(u) < +\infty$  e  $u$  é mínimo local de  $I$  (na norma  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ ) em  $\mathcal{K}$ , então  $u$  é solução fraca de (1.5) com  $u = f$  sobre  $\partial\Omega$ .

**Demonstração:** Fixe  $B \subset \Omega$  uma bola aberta não-vazia e  $\varphi \in C_0^\infty(B)$ . Pela **Proposição A.5**, no **Apêndice A**, a desigualdade

$$\frac{F(\nabla u + t\nabla\varphi, u + t\varphi, \cdot) - F(\nabla u, u, \cdot)}{t} \leq F(\nabla u + \nabla\varphi, u + \varphi, \cdot) - F(\nabla u, u, \cdot)$$

é satisfeita sobre  $B$  para todo  $t \in (0, 1)$ . Como  $F(u)$  e  $F(u + \varphi)$  são somáveis, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver **Teorema B.3**, no **Apêndice B**), que existe o limite

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_B \frac{F(u + t\varphi) - F(u)}{t} dx &= \int_B \frac{d}{dt} [F(u + t\varphi)] \Big|_{t=0} dx \\ &= \int_B \nabla_\eta F(u) \cdot \nabla\varphi + \frac{\partial F}{\partial s}(u) \varphi dx. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Assim a função

$$t \rightarrow I_B(u + t\varphi)$$

é derivável em  $t = 0$ . Logo, pela **Proposição A.3**, no **Apêndice A**, podemos calcular a primeira variação de  $I_B$ :

$$I'_B(u)\varphi := \frac{d}{dt} I_B(u + t\varphi) \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B).$$

Daí, de (1.6) e de (1.4), segue que  $u$  é solução fraca de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla_\eta F(u)) + \frac{\partial F}{\partial s}(u) \text{ em } \Omega \\ u = f \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

■

Um importante resultado de regularidade para operadores uniformemente elípticos na forma divergente é citado a seguir.

**Proposição 1.13 (Regularidade de soluções de EDPs uniformemente elípticas, cf. [13] 8.3.2)**

*Seja  $L$  um operador diferencial quase-linear de segunda ordem uniformemente elíptico na forma divergente. Seja  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  uma função não-negativa com*

$$\|u\|_\infty \leq M$$

*para uma constante  $M > 0$ . Se  $u$  é uma solução fraca da EDP*

$$Lu = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

*então  $u \in C^\infty(\Omega)$ .*

**Observação 1.14** *A demonstração presente em [13] para a proposição acima pode ser estendida de forma natural de  $H^1(\Omega)$  para  $W^{1,p}(\Omega)$ .*

## 1.2 O operador $p$ -Laplaciano

Analisaremos agora, para  $1 < p < +\infty$ , o funcional energia  $p$ -Dirichlet:

$$u \mapsto \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx, \quad u \in C^2(\Omega). \quad (1.7)$$

A função  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$F(\eta) = \frac{1}{p} |\eta|^p$$

é convexa e diferenciável com

$$\nabla_{\eta} F(\eta) = \begin{cases} |\eta|^{p-2} \eta, & \text{se } \eta \neq 0, \\ 0, & \text{se } \eta = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Pela **Definição 1.11**, a Equação de Euler-Lagrange do funcional em (1.7) é

$$-\operatorname{div}(\nabla_{\eta} F(u)) = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Deste fato, temos a motivação para a definição a seguir.

**Definição 1.15** *O operador  $p$ -Laplaciano é o operador diferencial quase-linear na forma divergente*

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad u \in C^2(\Omega).$$

**Observação 1.16** *Como consequência da **Proposição 1.12**, segue que todo mínimo local  $u$  de  $I$  numa classe  $\mathcal{K}$  é solução fraca da Equação de Euler-Lagrange*

$$-\Delta_p u = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

isto é,

$$\int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(B),$$

para toda bola aberta não-vazia  $B \subset \Omega$ . Acima, estamos denotando  $|\nabla u|^{p-2} \nabla u = 0$  onde  $\nabla u = 0$ .

**Observação 1.17** *O  $p$ -Laplaciano generaliza o operador de Laplace, isto é, dada  $u \in C^2(\Omega)$ , temos  $\Delta_2 u = \Delta u$ .*

Para obter os coeficientes da forma geral calculamos e reorganizamos repetidamente, para  $u \in C^2(\Omega)$  e  $\nabla u \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
\Delta_p u &= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla u|^{p-2} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \left[ (p-2) |\nabla u|^{p-4} \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + |\nabla u|^{p-2} \sum_{j=1}^N \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^N \left[ (p-2) |\nabla u|^{p-4} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^N \left[ (p-2) |\nabla u|^{p-4} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \delta_{ij} |\nabla u|^{p-2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned}$$

Acima,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Assim podemos escrever

$$\Delta_p u = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

onde

$$a_{ij}(\eta) = (p-2) |\eta|^{p-4} \eta_i \eta_j + \delta_{ij} |\eta|^{p-2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad \eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

e

$$a_{ij}(0) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Vemos daí que o  $p$ -Laplaciano é linear se, e somente se,  $p = 2$ .

Fixe  $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Seja  $A = A(\eta)$  a matriz quadrada de ordem  $N$  com entradas  $a_{ij}(\eta) \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . Multiplicando  $A$  por um  $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
A\xi &= \begin{bmatrix} (p-2) |\eta|^{p-4} \eta_1 \eta + |\eta|^{p-2} e_1 \\ (p-2) |\eta|^{p-4} \eta_2 \eta + |\eta|^{p-2} e_2 \\ \vdots \\ (p-2) |\eta|^{p-4} \eta_N \eta + |\eta|^{p-2} e_N \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}_{N \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} (p-2) |\eta|^{p-4} (\eta \cdot \xi) \eta_1 + |\eta|^{p-2} \xi_1 \\ (p-2) |\eta|^{p-4} (\eta \cdot \xi) \eta_2 + |\eta|^{p-2} \xi_2 \\ \vdots \\ (p-2) |\eta|^{p-4} (\eta \cdot \xi) \eta_N + |\eta|^{p-2} \xi_N \end{bmatrix}_{N \times 1} \\
&= (p-2) |\eta|^{p-4} (\eta \cdot \xi) \eta + |\eta|^{p-2} \xi.
\end{aligned}$$

Se  $\xi$  é ortogonal a  $\eta$ , então

$$A\xi = |\eta|^{p-2}\xi,$$

isto é,  $|\eta|^{p-2}$  é um autovalor de  $A$ . Por outro lado, tomando  $\xi = \eta$ , teremos

$$A\xi = (p-2)|\eta|^{p-4}|\eta|^2\eta + |\eta|^{p-2}\eta = (p-1)|\eta|^{p-2}\eta = (p-1)|\eta|^{p-2}\xi,$$

isto é,  $(p-1)|\eta|^{p-2}$  também é um autovalor de  $A$ . Ademais, dado  $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , temos

$$\xi^T A\xi = (A\xi) \cdot \xi = (p-2)|\eta|^{p-4}(\eta \cdot \xi)^2 + |\eta|^{p-2}|\xi|^2,$$

de modo que, para  $1 < p < 2$ :

$$\begin{aligned} (p-1)|\eta|^{p-2}|\xi|^2 &= (p-2)|\eta|^{p-4}|\eta|^2|\xi|^2 + |\eta|^{p-2}|\xi|^2 \\ &\leq \xi^T A\xi \\ &\leq |\eta|^{p-2}|\xi|^2 \end{aligned}$$

e, para  $p \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} |\eta|^{p-2}|\xi|^2 &\leq \xi^T A\xi \\ &\leq (p-2)|\eta|^{p-4}|\eta|^2|\xi|^2 + |\eta|^{p-2}|\xi|^2 \\ &= (p-1)|\eta|^{p-2}|\xi|^2. \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$\gamma(\eta) := \begin{cases} (p-1)|\eta|^{p-2}, & \text{para } 1 < p < 2, \\ |\eta|^{p-2}, & \text{para } p \geq 2, \end{cases}$$

e

$$\Upsilon(\eta) := \begin{cases} |\eta|^{p-2}, & \text{para } 1 < p < 2, \\ (p-1)|\eta|^{p-2}, & \text{para } p \geq 2, \end{cases}$$

obtemos que  $\gamma(\eta)$  e  $\Upsilon(\eta)$  são, respectivamente, o menor e o maior autovalores de  $A(\eta)$ . Isso nos permite concluir que:

- O operador  $\Delta_p$  é elíptico fora dos pontos críticos de  $u$ , pois  $\gamma(\eta) > 0$  para  $\eta \neq 0$ ;
- O operador  $\Delta_p$  é uniformemente elíptico em subconjuntos  $U \subset \Omega$  tais que

$$0 < \operatorname{ess\,inf}_U |\nabla u| \leq \operatorname{ess\,sup}_U |\nabla u| < +\infty.$$

Em particular, pela **Proposição 1.13**, toda função  $p$ -harmônica pertence a  $C^\infty(U)$  para  $U$  como acima.

Para  $p > 2$ , temos

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \gamma(\eta) = 0$$

e, para  $1 < p < 2$ , temos

$$\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} \gamma(\eta) = 0$$

o que significa que  $\Delta_p$  é degenerado para  $p \neq 2$ .

Tendo em vista a **Observação 1.16**, introduzimos as seguintes terminologias.

**Definição 1.18** *Seja  $U \subset \Omega$ . Diremos que  $u \in C^2(U)$  é  **$p$ -harmônica** ( **$p$ -subharmônica**) em  $U$  quando  $u$  for solução da EDP quase-linear*

$$-\Delta_p u = 0 \quad (-\Delta_p u \leq 0) \quad (1.9)$$

em  $U$ . Se  $U = \Omega$ , diremos simplesmente que  $u$  é  **$p$ -harmônica** ( **$p$ -subharmônica**).

**Definição 1.19** *Diremos que  $u \in W^{1,p}(U)$  é **fracamente  $p$ -harmônica** em  $U$  se  $u$  for solução fraca de (1.9), ou seja, se*

$$\int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B),$$

para toda bola aberta  $B \subset \Omega$ .

Correspondentemente,  $u$  é **fracamente  $p$ -subharmônica** em  $U$  se

$$\int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \leq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B), \varphi \geq 0,$$

para toda bola aberta  $B \subset \Omega$ .

Podemos elencar agora alguns dos principais resultados sobre funções fracamente  $p$ -harmônicas e fracamente  $p$ -subharmônicas utilizados no trabalho.

**Proposição 1.20** (cf. [17] **Lema 3.27**) *Seja  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  não-negativa e fracamente  $p$ -subharmônica. Dada  $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$ , tem-se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \varphi^p dx \leq p^p \int_\Omega u |\nabla \varphi|^p dx.$$

**Demonstração:** Seja  $\psi := u\varphi^p \geq 0$ . Então  $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e daí, como  $u$  é fracamente  $p$ -subharmônica em  $\Omega$  (ver **Definição 1.19**), podemos aproximar  $\psi$  por funções em  $C_0^\infty(\Omega)$  para obter

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot (-\nabla \psi) dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot (-\nabla u \varphi^p + p u \varphi^{p-1} (-\nabla \varphi)) dx \\ &\leq - \int_\Omega |\nabla u|^p \varphi^p dx + p \int_\Omega u |\nabla \varphi| |\nabla u|^{p-1} \varphi^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Observe que  $u|\nabla\varphi| \in L^p(\Omega)$  e  $|\nabla u|^{p-1}\varphi^{p-1} \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$  (pois  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ ). Assim, sendo  $p > 1$  e  $\frac{p}{p-1} > 1$  expoentes conjugados, podemos aplicar a Desigualdade de Hölder e calcular

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \varphi^p dx &\leq p \int_{\Omega} u |\nabla\varphi| |\nabla u|^{p-1} \varphi^{p-1} dx \\ &\leq p \left( \int_{\Omega} u^p |\nabla\varphi|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p \varphi^p dx \right)^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

Assumindo  $\int_{\Omega} |\nabla u|^p \varphi^p dx > 0$ , tem-se

$$\left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p \varphi^p dx \right)^{1/p} \leq p \left( \int_{\Omega} u^p |\nabla\varphi|^p dx \right)^{1/p},$$

donde

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \varphi^p dx \leq p^p \int_{\Omega} u^p |\nabla\varphi|^p dx.$$

■

A seguir, para  $r, \kappa > 0$  e  $y \in \mathbb{R}^N$  fixados, denotamos  $B = B_r(y)$  e  $\kappa B = B_{\kappa r}(y)$ .

**Proposição 1.21 (Desigualdade de Caccioppoli, cf. [17] Lema 3.32)** *Se  $u \in W^{1,p}(2B)$  é uma função não-negativa e fracamente  $p$ -subharmônica em  $2B$ , então*

$$\int_B |\nabla u|^p dx \leq \frac{p^p}{r^p} \int_{2B} u^p dx.$$

**Demonstração:** Considere a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B, \\ 1 + \frac{r-|x-y|}{r}, & \text{se } x \in 2B \setminus B. \end{cases}$$

Temos  $\varphi \in W_0^{1,p}(2B) \cap C(2B)$ ,  $\varphi \geq 0$  em  $2B$  e

$$\nabla\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in B, \\ -\frac{x-y}{r|x-y|}, & \text{se } x \in 2B \setminus \bar{B}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Logo

$$|\nabla\varphi(x)| = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in B, \\ \frac{1}{r}, & \text{se } x \in 2B \setminus \bar{B}, \end{cases} \quad (1.11)$$

donde  $\varphi \in W_0^{1,\infty}(2B)$ .

De (1.10), (1.11) e da **Proposição 1.20**, vê-se que

$$\begin{aligned}
\int_B |\nabla u|^p dx &= \int_B |\nabla u|^p \varphi^p dx \\
&\leq \int_{2B} |\nabla u|^p \varphi^p dx \\
&\leq p^p \int_{2B} u^p |\nabla \varphi|^p dx \\
&= \frac{p^p}{r^p} \int_{2B \setminus B} u^p dx \\
&\leq \frac{p^p}{r^p} \int_{2B} u^p dx.
\end{aligned}$$

■

**Proposição 1.22 (Princípio do Máximo, cf. [21] Teorema 1.2)** *Sejam  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  uma função não-negativa e essencialmente limitada,  $0 < \sigma < 1$  e  $s > 0$ . Se  $u$  é fracamente  $p$ -subharmônica, então, para qualquer bola  $B \subset \Omega$ ,*

$$\sup_{\sigma B} u \leq C \left( \int_B u^s dx \right)^{1/s},$$

para uma constante  $C = C(N, p, \sigma, s) > 0$ .

**Proposição 1.23 (Desigualdade de Harnack, cf. [21] Corolário 1.4)** *Sejam  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  uma função não-negativa e essencialmente limitada,  $0 < \sigma < 1$  e  $s > 0$ . Se  $u$  é fracamente  $u$  é fracamente  $p$ -harmônica, temos, para qualquer bola  $B \subset \Omega$ ,*

$$\sup_{\sigma B} u \leq H \inf_{\sigma B} u,$$

onde  $H = H(N, p, \sigma) > 0$  é constante.

**Proposição 1.24 (cf. [23] Lema 2.7)** *Se  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  é uma função fracamente  $p$ -harmônica e essencialmente limitada em  $\Omega$ , então, para qualquer bola aberta  $B \subset \Omega$ ,*

$$\|\nabla u\|_{\infty, \frac{1}{2}B}^p \leq \frac{Q}{r^N} \int_B |\nabla u|^p dx,$$

para  $Q = Q(N, p) > 0$  constante.

**Proposição 1.25 (Regularidade sharp para funções fracamente  $p$ -harmônicas)** *Se  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  é uma função fracamente  $p$ -harmônica com*

$$\|u\|_{\infty} \leq M$$

para alguma constante  $M > 0$ , então  $u$  admite um representante  $C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$  (ver **Definição A.2**, no **Apêndice A**) para algum  $0 < \alpha(N, M, p) < 1$  e esta regularidade é ótima (isto é, é a melhor regularidade possível em geral). Ademais, para cada  $U \subset\subset \Omega$ ,

$$\|\nabla u\|_{\alpha,U} = \sup_U |u| + \sup_U |\nabla u| + [\nabla u]_{\alpha,U} \leq C,$$

onde  $C = C(N, M, p, U) > 0$  é constante.

**Observação 1.26** A regularidade  $C_{loc}^{1,\alpha}$  de funções  $p$ -harmônicas foi mostrada por Lewis [19] para  $1 < p < 2$  e por Evans [12] para  $p \geq 2$ . O fato de tal regularidade ser ótima provém de Lewis [20] Seção 3.

### 1.3 Problema de Dirichlet $p$ -harmônico

Um das principais ferramentas utilizadas neste trabalho, quando se trata de regularidade, é a solução fraca do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 \text{ em } U \\ v = u \text{ sobre } \partial U \end{cases}$$

para  $U \subset \Omega$  aberto com  $\partial U \in C^{0,1}$  e  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  dados. Isso significa que  $v \in W^{1,p}(U)$  deve satisfazer

$$\begin{cases} \int_U |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U), \\ v - u \in W_0^{1,p}(U). \end{cases} \quad (1.12)$$

Discutiremos agora a existência e a unicidade de tal solução fraca.

**Proposição 1.27** *Sejam  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $U \subset \Omega$  um subconjunto aberto limitado com  $\partial U \in C^{0,1}(U)$ . Então existe uma função  $v \in W^{1,p}(U)$  que minimiza absolutamente o funcional*

$$I(w) = \int_U |\nabla w|^p dx$$

dentre as funções  $w \in W^{1,p}(U)$  tais que  $w - u \in W_0^{1,p}(U)$ . Consequentemente,  $v$  satisfaz (1.12).

**Demonstração:** O conjunto

$$X := \{I(w); w \in W^{1,p}(U) \text{ e } w - u \in W_0^{1,p}(U)\}$$

é limitado inferiormente, de modo que existe uma sequência de funções  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(U)$ , todas com traço  $u$  em  $\partial U$ , tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_U |\nabla w_n|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I(w_n) = \inf X.$$

Segue daí que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_U |\nabla w_n|^p dx < +\infty,$$

donde, sendo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , temos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_U |\nabla w_n - \nabla u|^p dx < +\infty.$$

Isso implica que a sequência  $(w_n - u)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada na norma do espaço  $W_0^{1,p}(U)$ , a qual é dada por

$$\|w\|_{W_0^{1,p}(U)} = \int_U |\nabla w|^p dx, \quad w \in W_0^{1,p}(U).$$

Como  $W_0^{1,p}(U)$  munido desta norma é um espaço reflexivo, o Teorema de Eberlein-Šmulian (ver **Teorema C.2**, no **Apêndice C**), nos garante a existência de uma subsequência (a qual continuaremos a indexar com  $n$ ) e de uma função  $w_0 \in W_0^{1,p}(U)$  tais que

$$(w_n - u) \rightharpoonup w_0 \quad \text{em } W_0^{1,p}(U).$$

Consequentemente,

$$w_n \rightharpoonup v := w_0 + u \quad \text{em } W^{1,p}(U).$$

Com isso,  $v \in W^{1,p}(U)$  é tal que  $v - u \in W_0^{1,p}(U)$  e, pelo **Teorema C.1**, no **Apêndice C**,

$$\|v\|_{p,U} + \|\nabla v\|_{p,U} = \|v\|_{W^{1,p}(U)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{W^{1,p}(U)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|w_n\|_{p,U} + \|\nabla w_n\|_{p,U}). \quad (1.13)$$

Por outro lado, a sequência  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $W^{1,p}(U)$  e assim, do Teorema de Rellich-Kondrachov (ver **Teorema D.3**, no **Apêndice D**), temos a imersão compacta de  $W^{1,p}(U)$  em  $L^p(U)$ , de modo que podemos passar novamente a uma subsequência (a qual manteremos mais uma vez os índices) para ver que

$$w_n \rightarrow v \quad \text{em } L^p(U),$$

donde,

$$\|v\|_{p,U} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{p,U}. \quad (1.14)$$

Por (1.13), (1.14) e por propriedade de limite inferior, segue que

$$\|\nabla v\|_{p,U} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla w_n\|_{p,U}.$$

Logo

$$I(v) = \|\nabla v\|_{p,U}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla v_n\|_{p,U}^p = \liminf_{n \rightarrow \infty} I(w_n) = \inf X.$$

Portanto  $v$  minimiza  $I$  e, pela **Observação 1.16**, concluímos que

$$\int_U |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U). \quad (1.15)$$

■

**Proposição 1.28** *Sejam  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  uma função fracamente  $p$ -subharmônica e  $U \subset \Omega$  um aberto limitado com  $\partial U \in C^{0,1}(U)$ . Então a função  $v$  em (1.15) com traço  $w = u$  em  $\partial U$  é tal que  $v \geq u$  q.t.p. em  $U$ . Ademais,  $v$  é única em  $U$  a menos de um subconjunto de medida nula.*

**Demonstração:** Pela **Proposição 1.27**, podemos escolher uma solução fraca  $v \in W^{1,p}(U)$  de

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 \text{ em } U \\ v - u \in W_0^{1,p}(U). \end{cases}$$

Sejam  $\varphi = (u - v)^- \in W_0^{1,p}(U)$  e

$$X := U \cap \{|\nabla \varphi| > 0\}.$$

Temos  $\varphi \geq 0$  em  $U$ , donde

$$\int_U |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \leq 0$$

e

$$\int_U |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_U |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_U |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx \\ &= \int_U (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot \nabla \varphi dx \\ &= \int_X (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx. \end{aligned}$$

Por consequência da desigualdade (A.6), no **Apêndice A**, tem-se

$$(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) > 0$$

em  $X$ . Logo  $X$  tem medida nula, pois caso contrário teríamos

$$0 \geq \int_X (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx > 0,$$

absurdo. Isso implica em  $\nabla\varphi = 0$  q.t.p. em  $U$ . Uma vez que  $\varphi$  tem traço 0 em  $\partial B$ , obtemos que  $\varphi = 0$  q.t.p. em  $B$  (ver **Teorema D.1**, no **Apêndice D**), isto é,

$$v \geq u \quad \text{q.t.p. em } B.$$

Tome agora uma função  $\tilde{v} \in W^{1,p}(B)$  que seja solução fraca de

$$\begin{cases} \Delta_p \tilde{v} = 0 \text{ em } B \\ \tilde{v} - u \in W_0^{1,p}(B). \end{cases}$$

Uma vez que  $v$  e  $\tilde{v}$  também são fracamente  $p$ -subharmônicas em  $B$ , podemos afirmar que

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 \text{ em } B \\ v - \tilde{v} \in W_0^{1,p}(B) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta_p \tilde{v} = 0 \text{ em } B \\ \tilde{v} - v \in W_0^{1,p}(B). \end{cases}$$

Portanto, pela primeira parte da demonstração, segue que

$$\tilde{v} = v \quad \text{q.t.p. em } B.$$

■

**Observação 1.29** Se  $N = 1$ ,  $I = (a, b)$  é um intervalo não-degenerado da reta e  $u \in W^{1,p}(I)$ , então a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 \text{ em } I \\ v = u \text{ sobre } \partial I \end{cases} \quad (1.16)$$

é a função

$$v(t) = (1-t)u(a) + tu(b), \quad t \in I.$$

Com efeito, o problema (1.16) equivale a

$$\begin{cases} (|v'|^{p-2}v')' = (p-1)|v'|^{p-2}v'' = 0 \text{ em } I, \\ v(a) = u(a) \text{ e } v(b) = u(b), \end{cases}$$

o qual admite (única) solução clássica dada pela reta passando pelos pontos  $(a, u(a))$  e  $(b, u(b))$ .

Exclusivamente para o **Lema 3.5**, o qual veremos no **Capítulo 3**, precisaremos da seguinte proposição, onde nos é fornecida uma função estritamente  $p$ -subharmônica em anéis do tipo  $0 < r_1 \leq |x| < r_2$ .

**Proposição 1.30 (cf. [23] Lema 2.9)** Para  $s > 0$ , defina a função  $v_s(x) = e^{-s|x|^2}$  para  $x \in \mathbb{R}^N$ . Dados  $0 < r_1 < r_2$ , existe  $s' = s'(N, p, r_1) > 0$  tal que

$$-\Delta_p v_{s'} < 0 \quad \text{em } B_{r_2} \setminus B_{r_1}.$$

**Demonstração:** Observe que  $v_s \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  para todo  $s > 0$ . Com isso e de posse da forma explícita do  $p$ -Laplaciano, temos

$$\Delta_p v_s = \begin{cases} |\nabla v_s|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \left[ (p-2) \frac{\partial v_s}{\partial x_i} \frac{\partial v_s}{\partial x_j} + \delta_{ij} |\nabla v_s|^2 \right] \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_i \partial x_j}, & \text{se } |\nabla v_s| \neq 0, \\ 0, & \text{se } |\nabla v_s| = 0. \end{cases}$$

Para  $i, j = 1, \dots, N$  e  $x \in \mathbb{R}^N$ , calculamos

$$\frac{\partial v_s}{\partial x_j}(x) = -2s e^{-s|x|^2} x_j; \quad \nabla v_s(x) = -2s e^{-s|x|^2} x; \quad |\nabla v_s(x)| = 2s e^{-s|x|^2} |x|;$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= -2s \frac{\partial}{\partial x_i} \left( e^{-s|x|^2} x_j \right) \\ &= (-2s x_i)(-2s x_j) e^{-s|x|^2} - 2s e^{-s|x|^2} \delta_{ij} \\ &= 2s e^{-s|x|^2} (2s x_i x_j - \delta_{ij}). \end{aligned}$$

Assim, se  $x \neq 0$ , então  $|\nabla v_s(x)| \neq 0$  e podemos utilizar as informações acima e reorganizá-las

repetidamente para obter

$$\begin{aligned}
\Delta_p v_s(x) &= |\nabla v_s|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \left[ (p-2) \frac{\partial v_s}{\partial x_i} \frac{\partial v_s}{\partial x_j} + \delta_{ij} |\nabla v_s|^2 \right] \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= (2se^{-s|x|^2} |x|)^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \left[ (p-2)(-2se^{-s|x|^2} x_i)(-2se^{-s|x|^2} x_j) \right. \\
&\quad \left. + \delta_{ij} (2se^{-s|x|^2} |x|)^2 \right] [2se^{-s|x|^2} (2sx_i x_j - \delta_{ij})] \\
&= (2se^{-s|x|^2} |x|)^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \left[ ((p-2)x_i x_j + \delta_{ij} |x|^2) (2se^{-s|x|^2}) [2se^{-s|x|^2} (2sx_i x_j - \delta_{ij})] \right] \\
&= (2se^{-s|x|^2})^{p-1} |x|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \left[ (p-2)x_i x_j + \delta_{ij} |x|^2 \right] (2sx_i x_j - \delta_{ij}) \\
&= (2se^{-s|x|^2})^{p-1} |x|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \left[ 2s(p-2)x_i^2 x_j^2 + \delta_{ij} (-(p-2)x_i x_j + 2s|x|^2 x_i x_j - |x|^2) \right] \\
&= (2se^{-s|x|^2})^{p-1} |x|^{p-4} \left[ 2s(p-2)|x|^4 + \sum_{i=1}^N (-(p-2)x_i^2 + 2s|x|^2 x_i^2 - |x|^2) \right] \\
&= (2se^{-s|x|^2})^{p-1} |x|^{p-4} \left[ 2s(p-2)|x|^4 - (p-2)|x|^2 + 2s|x|^4 - N|x|^2 \right] \\
&= (2se^{-s|x|^2})^{p-1} |x|^p \left[ 2s(p-1) - \frac{p-2+N}{|x|^2} \right].
\end{aligned}$$

Fixe  $x \in B_{r_2} \setminus B_{r_1}$ . Note que

$$|x| \geq r_1 > 0; \quad 2se^{-s|x|^2} > 0; \quad -\frac{1}{|x|^2} \geq -\frac{1}{r_1^2}.$$

Daí, se  $s > 0$  é tal que

$$2s(p-1) - \frac{p-2+N}{r_1^2} > 0,$$

então

$$\Delta_p v_s(x) > 0.$$

Portanto podemos escolher algum

$$s' > \frac{p-2+N}{2(p-1)r_1^2} > 0$$

para obter que

$$-\Delta_p v_{s'} < 0 \quad \text{em } B_{r_1} \setminus B_{r_2}.$$

■

# Capítulo 2

## O problema de mínimo

Iniciamos aqui a discussão sobre soluções do problema de mínimo em Danielli e Petrosyan [11]. Desejamos demonstrar o **Teorema 0.1** e para tal buscaremos as ferramentas necessárias, tais como: *rescalings*, estimativas para a solução do problema de Dirichlet  $p$ -harmônico com traço num mínimo local e continuidade  $\alpha$ -Hölder local, para um  $0 < \alpha < 1$ .

### 2.1 Mínimos locais do funcional energia

Considere fixados os seguintes objetos:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , um domínio limitado com  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ ;
- $p \in \mathbb{R}$ ,  $p > 1$  (vamos assumir que  $1 < p < N$  a partir da **Seção 2.3**);
- $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ ;
- $f_0 \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $f_0 \geq 0$ , uma função e  $M := \|f_0\|_\infty$ .

Dada uma função  $w \in W^{1,p}(\Omega)$  e um aberto não-vazio  $U \subset \Omega$  com  $U \in C^{0,1}$ , denotamos o funcional energia por

$$J(w; \lambda, U) := \int_U |\nabla w|^p + \lambda^p \chi_{\{w>0\}} dx.$$

Quando ocorrer  $U = \Omega$ , optaremos por simplificar a notação escrevendo apenas  $J(w)$ .

Para  $f \in W^{1,p}(U)$  qualquer, considere a seguinte classe convexa, como em (1.9):

$$\mathcal{K}(f, U) := \{w \in W^{1,p}(U); w - f \in W_0^{1,p}(U)\}.$$

Se  $f = f_0$  e  $U = \Omega$ , optaremos pela notação  $\mathcal{K}$  no lugar de  $\mathcal{K}(f_0, \Omega)$ .

**Definição 2.1** *Sejam  $U \subset \Omega$  um aberto não-vazio e  $f \in W^{1,p}(U)$ . Diremos que uma função  $u \in \mathcal{K}(f, U)$  é um **mínimo absoluto** de  $J(\cdot; \lambda, U)$  se*

$$J(u; \lambda, U) \leq J(w; \lambda, U) \quad \forall w \in \mathcal{K}(f, U).$$

**Definição 2.2** *Sejam  $U \subset \Omega$  um aberto não-vazio,  $f \in W^{1,p}(U)$ . Diremos que uma função  $u \in \mathcal{K}(f, U)$  é um **mínimo local** de  $J(\cdot; \lambda, U)$  **restrito a uma vizinhança**  $\mathcal{V}(f, U) \subset \mathcal{K}(f, U)$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$\{w \in \mathcal{K}(f, U); \|\nabla u - \nabla w\|_{p,U} + \|\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{w>0\}}\|_{1,U} < \varepsilon\} \subset \mathcal{V}(f, U)$$

e

$$J(u; \lambda, U) \leq J(w; \lambda, U) \quad \forall w \in \mathcal{V}(f, U).$$

### Observação 2.3

(i) *Em geral, entende-se um mínimo local (clássico) de  $J$  como uma função  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  para a qual existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $J(u) \leq J(w)$  para todo  $w \in W^{1,p}(\Omega)$  com*

$$\|u - w\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon.$$

*Para o que estudamos, no entanto, a expressão “mínimo local” deve ser sempre entendida conforme a **Definição 2.2**, a qual é inspirada pela definição de mínimos locais empregada em ambos artigos de Alt e Caffarelli [4] e de Danielli e Petrosyan [11].*

(ii) *Todo mínimo absoluto  $u \in \mathcal{K}(f, U)$  de  $J(\cdot; \lambda, U)$  é mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, U)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(f, U)$ . Em verdade, podemos considerar  $\varepsilon = +\infty$  para este caso específico.*

(iii) *Nas situações em que tratarmos de mínimos locais segundo a **Definição 2.2** com traço  $f_0$  em  $\Omega$ , optamos por fixar  $\varepsilon < 1$ . Dessa forma, não precisamos carregá-lo em nossas notações. Também assumimos  $M > 1$ ;*

(iv) *Tal como faremos para  $\mathcal{K}$ , quando  $f = f_0$  e  $U = \Omega$  denotaremos  $\mathcal{V}(f, U)$  simplesmente por  $\mathcal{V}$ ;*

(v) *A terminologia “vizinhança” refere-se ao fato de que a soma*

$$\|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_{p,U} + \|\chi_{\{w_1>0\}} - \chi_{\{w_2>0\}}\|_{1,U}, \quad w_1, w_2 \in \mathcal{K}(f, U)$$

*forma uma métrica em  $\mathcal{K}(f, U)$ . Desta forma,  $\mathcal{V}(f, U)$  é vizinhança de  $u \in \mathcal{K}(f, U)$  segundo a métrica acima.*

A primeira parte do **Teorema 0.1** será demonstrada a seguir.

**Teorema 2.4** *Existe um mínimo absoluto de  $J$  em  $\mathcal{K}$ .*

**Demonstração:** Considere uma sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{w \in \mathcal{K}} J(w).$$

Então

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} J(u_n) < +\infty.$$

Dessa forma, temos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx < +\infty \quad (2.1)$$

e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\{u_n > 0\}| < +\infty. \quad (2.2)$$

Segue de (2.1) e de um argumento análogo ao utilizado na demonstração da **Proposição 1.27** que, a menos de subsequência, tem-se, para uma função  $u_0 \in \mathcal{K}$  consequente da reflexividade do espaço  $W^{1,p}(\Omega)$ ,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em } W^{1,p}(\Omega), \quad (2.3)$$

donde

$$\|\nabla u_0\|_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_p. \quad (2.4)$$

Por outro lado, pelo **Teorema D.3**, no **Apêndice B**, temos a imersão compacta de  $W^{1,p}(\Omega)$  em  $L^1(\Omega)$ . Isso e (2.3) nos dão

$$u_n \rightarrow u_0 \quad \text{em } L^1(\Omega),$$

o que implica, novamente a menos de subsequência (ver **Teorema B.4**, no **Apêndice B**), em

$$u_n \rightarrow u_0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (2.5)$$

Usando agora (2.2) e a separabilidade de  $L^1(\Omega)$ , existe, pelo **Teorema C.4**, no **Apêndice C**, uma função  $g \in L^\infty(\Omega)$  (visto como dual topológico de  $L^1(\Omega)$ ) tal que, passando  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  novamente a uma subsequência e reindexando, se necessário, vale

$$\chi_{\{u_n > 0\}} \xrightarrow{*} g \quad \text{em } L^\infty(\Omega).$$

Isto equivale, pelo **Teorema C.3**, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w \chi_{\{u_n > 0\}} dx = \int_{\Omega} w g dx \quad \forall w \in L^1(\Omega). \quad (2.6)$$

Em particular, escolhendo a função  $w \equiv 1$  em  $\Omega$ , tem-se  $w \in L^1(\Omega)$  (pois  $\Omega$  é limitado) e daí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\{u_n > 0\}| = \int_{\Omega} g dx. \quad (2.7)$$

Além disso, observa-se

$$g \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (2.8)$$

Com efeito, se existe  $Z \subset \Omega$  com  $|Z| > 0$  tal que  $g < 0$  em  $Z$ , podemos escolher  $w = \chi_Z \in L^1(\Omega)$  em (2.6) e observar que

$$0 \leq \int_Z \chi_{\{u_n > 0\}} dx \rightarrow \int_Z g dx < 0,$$

um absurdo.

Seja  $D := \{u_0 > 0\}$ . Note que, para q.t.p.  $x \in D$ , (2.5) implica

$$\chi_{\{u_n > 0\}}(x) = 1 \quad \text{para todo } n \text{ suficientemente grande.}$$

Por causa disso, temos

$$\chi_{\{u_n > 0\}} \rightarrow 1 \quad \text{q.t.p. em } D,$$

de onde vemos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (**Teorema B.3**, no **Apêndice B**), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \chi_{\{u_n > 0\}} dx = \int_D dx. \quad (2.9)$$

Ora, tomando  $w = \chi_D$  em (2.6), chegamos a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \chi_{\{u_n > 0\}} dx = \int_D g dx. \quad (2.10)$$

De (2.8), (2.9) e (2.10), obtemos

$$|\{u_0 > 0\}| = |D| = \int_D g dx \leq \int_{\Omega} g dx. \quad (2.11)$$

Reunindo as informações obtidas em (2.4), (2.7) e (2.11) e lembrando que  $u_0 \in \mathcal{K}$ , calculamos

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \int_{\Omega} |\nabla u_0|^p dx + \lambda^p |\{u_0 > 0\}| \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + \lambda^p \int_{\Omega} g dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p + \lambda^p \chi_{\{u_n > 0\}} dx \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n). \end{aligned}$$

Portanto  $u_0$  é um mínimo absoluto de  $J$ . ■

O próximo passo será mostrar a  $p$ -subharmonicidade fraca e a limitação essencial de mínimos de  $J$ . Tais informações nos permitirão aplicar a Desigualdade de Caccioppoli (ver **Proposição 1.21**). Quando conveniente, denotamos o conjunto de positividade de um mínimo por  $D$ . Além disso, lembramos que o real positivo  $\varepsilon$  associado aos mínimos locais tratados na **Definição 2.2** está fixado com  $\varepsilon \in (0, 1)$  (ver **Observação 2.3**).

**Lema 2.5** *Sejam  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$  e  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $w \geq 0$ . Então*

$$|\{u - tw > 0\}| \leq |D|$$

e

$$J(u) \leq J(u - tw)$$

para todo  $t > 0$  suficientemente pequeno.

**Demonstração:** Seja  $t > 0$ . Queremos mostrar que

$$\|\nabla u - \nabla(u - tw)\|_p + \|\chi_D - \chi_{\{u-tw>0\}}\|_1 < \varepsilon$$

para  $t \approx 0$ . Observe que

$$\|\nabla u - \nabla(u - tw)\|_p = t\|\nabla w\|_p.$$

Se  $\|\nabla w\|_p = 0$ , basta analisar a norma  $L^1$  da diferença das funções características. Se, por outro lado,  $\|\nabla w\|_p \neq 0$ , devemos ter  $t < \frac{\varepsilon}{2\|\nabla w\|_p}$  para que ocorra

$$\|\nabla u - \nabla(u - tw)\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.12)$$

Por outro lado, podemos ver que

- $u - tw \in \mathcal{K}$  e
- $\{u - tw > 0\} \subset D$  (pois  $w \geq 0$ ).

Assim

$$|\{u - tw > 0\}| \leq |D|$$

e

$$0 \leq \chi_D - \chi_{\{u-tw>0\}} = \chi_{D \setminus \{u-tw>0\}} = \chi_{D \cap \{tw \geq u\}} \text{ em } \Omega. \quad (2.13)$$

Além disso, valem

- $\chi_{\{tw \geq u\}} = 1 \iff tw \geq u \iff t \geq \frac{u}{w} > 0$  em  $D \cap \{w > 0\}$ ;
- $\chi_{\{tw \geq u\}} = 0$  em  $D \cap \{w = 0\}$ .

Logo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \chi_{\{tw \geq u\}} = 0 \quad \text{em } D. \quad (2.14)$$

Ademais, (2.13) implica

$$\|\chi_D - \chi_{\{u-tw > 0\}}\|_1 = \int_D \chi_{\{tw \geq u\}} dx.$$

Passando ao limite de  $t \rightarrow 0^+$  acima e usando (2.14) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (note que  $D$  é limitado), temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\chi_D - \chi_{\{u-tw > 0\}}\|_1 = 0.$$

Consequentemente, existe  $t_0 > 0$  tal que, para todo  $t \in (0, t_0)$ , vale

$$\|\chi_D - \chi_{\{u-tw > 0\}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.15)$$

Tomando

$$t_1 = \begin{cases} t_0, & \text{se } \|\nabla w\|_p = 0, \\ \min\left(\frac{\varepsilon}{2\|\nabla w\|_p}, t_0\right), & \text{se } \|\nabla w\|_p \neq 0, \end{cases}$$

segue de (2.12) e (2.15) que

$$\|\nabla u - \nabla(u - tw)\|_p + \|\chi_D - \chi_{\{u-tw > 0\}}\|_1 < \varepsilon$$

para todo  $t \in (0, t_1)$ . ■

**Teorema 2.6** *Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Então  $u$  é fracamente  $p$ -subharmônico em  $\Omega$ , isto é, pela **Definição 1.19**,*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w dx \leq 0 \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), w \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

**Demonstração:** Para qualquer função não-negativa  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e para  $t > 0$ ,  $t \approx 0$ , temos, pelo **Lema 2.5**,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{t} (J(u - tw) - J(u)) &= \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla u - t \nabla w|^p - |\nabla u|^p dx + \frac{\lambda^p}{t} (|\{u - tw > 0\}| - |D|) \\ &\leq \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla u - t \nabla w|^p - |\nabla u|^p dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla u - t \nabla w|^p - |\nabla u|^p dx \geq 0.$$

Passando ao limite de  $t \rightarrow 0^+$  acima e usando (1.6) e (1.8), vê-se que

$$-p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w dx \geq 0,$$

donde concluímos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w dx \leq 0 \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), w \geq 0.$$

■

**Teorema 2.7** *Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Temos as estimativas*

$$0 \leq u \leq M = \|f_0\|_{\infty} \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

**Demonstração:** Seja  $v := (u - M)^+$ . Então  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $v \geq 0$ . Pelo **Teorema 2.6**, temos

$$\int_{\{u > M\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx \leq 0,$$

ou seja,

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx = \int_{\{u > M\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx \leq 0.$$

Logo  $|\nabla v| = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Sendo  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , chegamos a

$$v = 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Consequentemente,  $u \leq M$  q.t.p. em  $\Omega$ .

Para ver que  $u \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , tome  $w := u^- \geq 0$  em  $\Omega$ . Teremos, para  $t \in (0, 1)$  e  $x \in \Omega$ ,

$$u(x) + tw(x) > 0 \iff u(x) > 0,$$

donde

$$\|\nabla(u + tw) - \nabla u\|_p + \|\chi_{\{u+tw>0\}} - \chi_{\{u>0\}}\|_1 = t\|\nabla w\|_p < \varepsilon$$

para  $t > 0$  suficientemente pequeno. Assim  $u + tw \in \mathcal{V}$  e

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{t} [J(u + tw) - J(u)] \\ &= \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla(u + tw)|^p - |\nabla u|^p dx \end{aligned}$$

para  $t > 0$  suficientemente pequeno. Passando ao limite de  $t \rightarrow 0^+$  e usando (1.6) e (1.8), podemos calcular a primeira variação

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} |\nabla(u + tw)|^p dx \right] \Big|_{t=0} \\
&= p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w dx \\
&= -p \int_{\{u \leq 0\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u dx \\
&= -p \int_{\{u \leq 0\}} |\nabla u|^p dx \\
&= -p \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx \leq 0,
\end{aligned}$$

mostrando que  $\nabla w = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Sendo  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , tem-se  $w = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Concluimos que  $u \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . ■

## 2.2 Invariância

Uma das características mais importantes, para nossos cálculos, de mínimos locais de  $J$  é o fato de que tal propriedade é invariante quando o mínimo local é restrito a um subconjunto não-vazio, multiplicado por uma constante (com as devidas alterações no funcional  $J$ ) e quando o mínimo local sofre um *rescaling*, os qual definimos a seguir.

**Definição 2.8 (Rescaling)** Fixados  $x_0 \in \Omega$  e  $r > 0$ , seja

$$\Omega_r := \left\{ \frac{x - x_0}{r}; x \in \Omega \right\}$$

e considere o difeomorfismo  $\Phi = \Phi_{x_0, r} : \Omega \rightarrow \Omega_r$  dado por

$$\Phi(x) := \frac{x - x_0}{r}, \quad x \in \Omega.$$

Definimos o **rescaling de  $\Omega$  para  $\Omega_r$**  de uma função  $w \in W^{1,p}(\Omega)$  como a função

$$(w)_r := \frac{1}{r} (w \circ \Phi^{-1}) \in W^{1,p}(\Omega_r).$$

### Observação 2.9

- (i) Omitimos  $x_0$  na notação de rescalings por simplicidade, pois trabalhamos majoritariamente com rescalings de bolas abertas, cujos centros estão bem determinados;

(ii) Para cada  $y \in \Omega_r$ , temos

$$(w)_r(y) = \frac{1}{r}w(ry + x_0).$$

Além disso,  $(w)_r \in W^{1,p}(\Omega_r)$  é consequência da Fórmula de Mudança de Variáveis (ver Teorema B.13, no Apêndice B). De fato, pois sendo  $\Phi$  Lipschitz injetiva com

$$|\det D\Phi| = \left| \det \left( \frac{1}{r}I_N \right) \right| = \frac{1}{r^N}$$

( $I_N$  é a matriz identidade de ordem  $N$ ), temos

$$\int_{\Omega_r} |(w)_r|^p dy = \frac{1}{r} \int_{\Phi(\Omega)} |w \circ \Phi^{-1}|^p dy = \frac{1}{r^{N+1}} \int_{\Omega} |w|^p dx < +\infty,$$

donde  $(w)_r \in L^p(\Omega_r)$ . Dada  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} (w)_r \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy &= \frac{1}{r} \int_{\Phi(\Omega)} (w \circ \Phi^{-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \\ &= \frac{1}{r^{N+1}} \int_{\Omega} w \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \circ \Phi dx, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi \circ \Phi) &= (\nabla \varphi \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ &= (\nabla \varphi \circ \Phi) \cdot \left( \frac{1}{r}e_i \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \circ \Phi \end{aligned}$$

em  $\Omega$  para cada  $i = 1, \dots, N$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} (w)_r \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy &= \frac{1}{r^N} \int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi \circ \Phi) dx \\ &= -\frac{1}{r^N} \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(\varphi \circ \Phi) dx \\ &= -\int_{\Omega_r} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \circ \Phi^{-1} \right) \varphi dy, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Logo existem as derivadas parciais fracas

$$\frac{\partial (w)_r}{\partial y_i} = \frac{\partial w}{\partial x_i} \circ \Phi^{-1}$$

com

$$\int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial (w)_r}{\partial y_i} \right|^p dy = \int_{\Phi(\Omega)} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \circ \Phi^{-1} \right|^p dy = \frac{1}{r^N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^p dx < +\infty, \quad i = 1, \dots, N,$$

isto é,

$$\frac{\partial (w)_r}{\partial y_i} \in L^p(\Omega_r), \quad i = 1, \dots, N.$$

(iii) Note que cada função  $\tilde{w} \in W^{1,p}(\Omega_r)$  é o rescaling de  $\Omega$  para  $\Omega_r$  apenas da função  $w := r\tilde{w} \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega)$ . Isso significa que a aplicação

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{1,p}(\Omega_r) \\ w &\mapsto (w)_r \end{aligned}$$

é bijetiva.

(iv) Se  $\Omega = B_r(x_0)$ , então  $\Omega_r = B_1$  (bola aberta unitária centrada na origem).

A invariância por rescalings de mínimos locais será provada agora.

**Teorema 2.10** Se  $u \in \mathcal{K}$  é um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ , então  $(u)_r \in \mathcal{K}((f_0)_r, \Omega_r)$  é um mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, \Omega_r)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}((f_0)_r, \Omega_r)$ .

**Demonstração:** Seja  $w \in \mathcal{K}$ . Note que

$$\begin{aligned} \Phi(\{x \in \Omega; w(x) > 0\}) &= \{\Phi(x); x \in \Omega, w(x) > 0\} \\ &= \{y = \Phi(x); x \in \Omega, r(w)_r(y) > 0\} \\ &= \{y \in \Omega_r; (w)_r(y) > 0\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Daí, sendo  $\Phi$  uma aplicação bijetiva,

$$\begin{aligned} \Phi(\{x \in \Omega; w(x) > 0\} \setminus \{x \in \Omega; u(x) > 0\}) &= \Phi(\{x \in \Omega; w(x) > 0\}) \setminus \Phi(\{x \in \Omega; u(x) > 0\}) \\ &= \{y \in \Omega_r; (w)_r(y) > 0\} \setminus \{y \in \Omega_r; (u)_r(y) > 0\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, como  $\Phi$  tem Jacobiano  $\frac{1}{r^N} > 0$ , temos, por (2.16) e pela Fórmula de Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned} |\{(w)_r > 0\}| &= |\{y \in \Omega_r; (w)_r(y) > 0\}| = |\Phi(\{x \in \Omega; w(x) > 0\})| \\ &= \frac{1}{r^N} |\{x \in \Omega; w(x) > 0\}| \\ &= \frac{1}{r^N} |\{w > 0\}| \end{aligned} \quad (2.18)$$

e, por (2.17),

$$\begin{aligned} |\{(w)_r > 0\} \setminus \{(u)_r > 0\}| &= |\{y \in \Omega_r; (w)_r(y) > 0\} \setminus \{y \in \Omega_r; (u)_r(y) > 0\}| \\ &= |\Phi(\{x \in \Omega; w(x) > 0\} \setminus \{x \in \Omega; u(x) > 0\})| \\ &= \frac{1}{r^N} |\{x \in \Omega; w(x) > 0\} \setminus \{x \in \Omega; u(x) > 0\}| \\ &= \frac{1}{r^N} |\{w > 0\} \setminus \{u > 0\}|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Podemos aplicar a **Observação 2.9(ii)** e (2.18) para calcular

$$\begin{aligned}
J((w)_r; \lambda, \Omega_r) &= \int_{\Omega_r} |\nabla(w)_r|^p + \lambda^p \chi_{\{(w)_r > 0\}} dy \\
&= \int_{\Phi(\Omega)} |\nabla(w)_r(y)|^p dy + \lambda^p |\{(w)_r > 0\}| \\
&= \frac{1}{r^N} \int_{\Omega} |\nabla(w)_r \circ \Phi(x)|^p dx + \frac{\lambda^p}{r^N} |\{w > 0\}| \\
&= \frac{1}{r^N} \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^p + \lambda^p \chi_{\{w > 0\}} dx \\
&= \frac{J(w)}{r^N}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$J((u)_r; \lambda, \Omega_r) \leq J((w)_r; \lambda, \Omega_r) \iff J(u) \leq J(w),$$

de modo que, denotando

$$\mathcal{A} := \{(w)_r; w \in \mathcal{V}\},$$

temos

$$J((u)_r; \lambda, \Omega_r) \leq J(\tilde{w}; \lambda, \Omega_r) \tag{2.20}$$

para todo  $\tilde{w} \in \mathcal{A}$ .

Seja

$$\varepsilon_r := \frac{\varepsilon}{\max\{r^{(N/p)}, r^N\}}.$$

Dado  $\tilde{w} \in W^{1,p}(\Omega_r)$  com

$$\|\nabla \tilde{w} - \nabla(u)_r\|_{p, \Omega_r} + \|\chi_{\{\tilde{w} > 0\}} - \chi_{\{(u)_r > 0\}}\|_{1, \Omega_r} < \varepsilon_r,$$

escolha  $w = r(\tilde{w} \circ \Phi)$ . Temos  $\tilde{w} = (w)_r$  e podemos aplicar mais uma vez a **Observação 2.9(ii)** e usar (2.19) para chegar a

$$\begin{aligned}
\|\nabla w - \nabla u\|_p + \|\chi_{\{w > 0\}} - \chi_{\{u > 0\}}\|_1 &= \left( \int_{\Omega} |\nabla(w - u)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + |\{w > 0\} \setminus \{u > 0\}| \\
&= \left( r^N \int_{\Omega_r} |\nabla(w - u)_r|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} + r^N |\{(w)_r > 0\} \setminus \{(u)_r > 0\}| \\
&= r^{(N/p)} \|\nabla(w)_r - \nabla(u)_r\|_{p, \Omega_r} + r^N \|\chi_{\{(w)_r > 0\}} - \chi_{\{(u)_r > 0\}}\|_{1, \Omega_r} \\
&< \max\{r^{(N/p)}, r^N\} \varepsilon_r \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isso mostra que  $\tilde{w} \in \mathcal{A}$ . Por isso e por (2.20), podemos reescrever, nos termos da **Definição 2.2**,

$$\mathcal{A} = \mathcal{V}((f_0)_r, \Omega_r),$$

donde concluimos que

$$(u)_r \text{ é mínimo local de } J(\cdot; \lambda, \Omega_r) \text{ restrito a } \mathcal{V}((f_0)_r, \Omega_r).$$

■

Em alguns casos, é necessário tratar de *rescalings* como mínimos locais, porém sem multiplicá-lo pelo fator  $\frac{1}{r}$ . Para tal, precisamos da seguinte proposição.

**Proposição 2.11** *Sejam  $U \subset \Omega$  um aberto não-vazio,  $f \in W^{1,p}(U)$  e  $0 < s < 1$ . Se  $u \in \mathcal{K}$  é um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ , então  $su$  é um mínimo local de  $J(\cdot; s\lambda, \Omega)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(sf_0, \Omega)$ .*

**Demonstração:** Seja

$$\mathcal{A} = \{sw; w \in \mathcal{V}\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} J(sw; s\lambda, \Omega) &= \int_{\Omega} |\nabla sw|^p + (s\lambda)^p \chi_{\{sw>0\}} dx \\ &= s^p \int_{\Omega} |\nabla w|^p + \lambda^p \chi_{\{w>0\}} dx \\ &= s^p J(w), \quad \forall w \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Em consequência,

$$J(su; s\lambda, \Omega) = s^p J(u) \leq s^p J(w) = J(sw; s\lambda, \Omega)$$

para todo  $w \in \mathcal{V}$ . Daí

$$J(su; s\lambda, \Omega) \leq J(\bar{w}; s\lambda, \Omega) \tag{2.21}$$

para todo  $\bar{w} \in \mathcal{A}$ .

Considere agora um  $\bar{w} \in \mathcal{K}(sf_0, \Omega)$  tal que

$$\|\nabla \bar{w} - \nabla(su)\|_p + \|\chi_{\{\bar{w}>0\}} - \chi_{\{su>0\}}\|_1 < s\varepsilon.$$

Observe que, sendo  $0 < s < 1$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{s} \nabla \bar{w} - \nabla u \right\|_p + \|\chi_{\{\bar{w}/s > 0\}} - \chi_{\{u > 0\}}\|_1 &= \frac{1}{s} \|\nabla \bar{w} - \nabla(su)\|_p + \|\chi_{\{\bar{w}/s > 0\}} - \chi_{\{su > 0\}}\|_1 \\ &\leq \frac{1}{s} \left( \|\nabla \bar{w} - \nabla(su)\|_p + \|\chi_{\{\bar{w}/s > 0\}} - \chi_{\{su > 0\}}\|_1 \right) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

donde  $\bar{w} \in \mathcal{A}$ . Por isso e por (2.21), podemos renomear  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{V}(sf_0, \Omega)$  e concluir que

$su$  é um mínimo local de  $J(\cdot; s\lambda, \Omega)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(sf_0, \Omega)$ . ■

O resultado a seguir é importante quando tratamos de mínimos locais em bolas abertas  $B \subset \Omega$ .

**Proposição 2.12** *Seja  $U$  um aberto não-vazio tal que  $U \subset \Omega$ . Se  $u \in \mathcal{K}$  é um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ , então  $u \in \mathcal{K}(u, U)$  é um mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, U)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(u, U)$ . Ademais,*

$$\int_U |\nabla u|^p - |\nabla w|^p dx \leq \int_U \lambda^p \chi_{\{u=0\}} dx \quad w \in \mathcal{V}(u, U). \quad (2.22)$$

**Demonstração:** Dado  $w \in \mathcal{V}(u, U)$ , defina

$$g = w\chi_U + u\chi_{\Omega \setminus U}.$$

Note que  $g \in \mathcal{K}$  e

$$\|\nabla g - \nabla u\|_p + \|\chi_{\{g > 0\}} - \chi_{\{u > 0\}}\|_1 = \|\nabla w - \nabla u\|_{p,U} + \|\chi_{\{w > 0\}} - \chi_{\{u > 0\}}\|_{1,U} < \varepsilon,$$

donde  $g \in \mathcal{V}$ . Isso implica em  $J(u) \leq J(g)$ . Assim, como

$$\begin{aligned} \int_U |\nabla u|^p + \lambda^p \chi_{\{u > 0\}} dx + \int_{\Omega \setminus U} |\nabla u|^p + \lambda^p \chi_{\{u > 0\}} dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \lambda^p \chi_{\{u > 0\}} dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla g|^p + \lambda^p \chi_{\{g > 0\}} dx \\ &\leq \int_U |\nabla w|^p + \lambda^p dx \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus U} |\nabla u|^p + \lambda^p \chi_{\{u > 0\}} dx, \end{aligned} \quad (2.23)$$

temos

$$J(u; \lambda, U) = \int_U |\nabla u|^p + \lambda^p \chi_{\{u > 0\}} dx \leq \int_U |\nabla w|^p + \lambda^p dx = J(w; \lambda, U)$$

para todo  $w \in \mathcal{V}(u, U)$ .

Portanto  $u \in \mathcal{K}(u, U)$  é mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, U)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(u, U)$ . Além disso, por (2.23) e pelo **Teorema 2.7**,

$$\int_U |\nabla u|^p - |\nabla w|^p dx \leq \int_U \lambda^p - \lambda^p \chi_{\{u>0\}} dx = \lambda^p \int_U \chi_{\{u=0\}} dx.$$

■

## 2.3 $\alpha$ -Hölder continuidade local

A solução do problema de Dirichlet  $p$ -harmônico com traço num mínimo local satisfaz estimativas cruciais para mostrar a regularidade dos mínimos locais. Para os resultados desta seção, tentamos trazer constantes na forma mais explícita possível.

Para o que segue, lembramos que  $0 < \varepsilon < 1$  é fixado e que  $M > 1$ , conforme a **Observação 2.3(iii)**. Além disso assumiremos, até o final deste trabalho, que  $1 < p < N$ .

**Lema 2.13** *Sejam  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Existe  $\zeta = \zeta(N, M, p) \in (0, 1)$  tal que se  $0 < r < \zeta$  e  $B_{2r}(y) \subset \Omega$ , então a única solução fraca  $v$  do problema  $p$ -harmônico com traço de Dirichlet  $u$  em  $\partial B_r(y)$  (ver **Proposição 1.28**) pertence a  $\mathcal{V}(u, B_r(y))$ .*

**Demonstração:** Pela **Proposição 2.12**, temos que  $u$  é mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, B_r(y))$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(u, B_r(y))$ , para qualquer bola  $B_r(y)$  conforme descrito acima. Note que

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla v\|_{p, B_r(y)} + \|\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{v>0\}}\|_{1, B_r(y)} &\leq \|\nabla u\|_{p, B_r(y)} + \|\nabla v\|_{p, B_r(y)} + \int_{B_r(y)} |\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{v>0\}}| dx \\ &\leq \left( \int_{B_r(y)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{B_r(y)} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \omega_N r^N. \end{aligned}$$

Pela **Proposição 1.27**, isso nos dá

$$\|\nabla u - \nabla v\|_{p, B_r(y)} + \|\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{v>0\}}\|_{1, B_r(y)} \leq 2 \left( \int_{B_r(y)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \omega_N r^N. \quad (2.24)$$

Se utilizarmos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue de imediato que o membro esquerdo da desigualdade acima converge para 0 conforme  $r \rightarrow 0^+$ . No entanto, o limite neste caso não é uniforme em  $u$ . Como objetivamos um  $\zeta$  dependente apenas de  $N, M$  e de  $p$ , devemos buscar um controle superior de (2.24) que tenha por parâmetros apenas  $N, M$  e  $p$ .

Pelo **Teorema 2.7**, temos  $0 \leq u \leq M$  q.t.p. em  $\Omega$ . Como  $u$  é fracamente  $p$ -subharmônica (ver **Teorema 2.6**) e  $B_{2r}(y) \subset \Omega$ , podemos aplicar a Desigualdade de Caccioppoli (ver **Proposição 1.21**) para obter

$$\int_{B_r(y)} |\nabla u|^p dx \leq \frac{p^p}{r^p} \int_{B_{2r}(y)} u^p dx.$$

Daí

$$\int_{B_r(y)} |\nabla u|^p dx \leq p^p 2^N \omega_N M^p r^{N-p}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, usando (2.24), temos

$$\|\nabla u - \nabla v\|_{p, B_r(y)} + \|\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{v>0\}}\|_{1, B_r(y)} \leq 2pM(2^N \omega_N)^{1/p} r^{(N/p-1)} + \omega_N r^N.$$

Sendo  $1 < p < N$ , vale

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left[ 2pM(2^N \omega_N)^{1/p} r^{(N/p-1)} + \omega_N r^N \right] = 0.$$

Segue que existe uma constante  $\zeta = \zeta(N, M, p) > 0$  (lembramos que  $\varepsilon > 0$  é fixado) tal que

$$\|\nabla u - \nabla v\|_{p, B_r(y)} + \|\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{v>0\}}\|_{1, B_r(y)} < \varepsilon \quad \forall r \in (0, \zeta). \quad (2.26)$$

Portanto, se  $r \in (0, \zeta)$ , então

$$v \in \mathcal{V}(u, B).$$

■

**Observação 2.14** *O Lema 2.13 é crucial para que possamos lidar com a regularidade de mínimos locais de  $J$ . Para mínimos absolutos, contudo, o Lema não é necessário, de modo que o caso  $p \geq N$  torna-se viável.*

Dados  $t > 0$  e uma bola aberta  $B = B_r(y) \subset \Omega$ , denotamos  $tB = B_{tr}(y)$ .

**Lema 2.15** *Sejam  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ ,  $B$  uma bola aberta com raio  $0 < r < \zeta(N, M, p)$  tal que  $2B \subset \Omega$  e  $v \in \mathcal{V}(u, B)$  a única solução fraca do problema*

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 \text{ em } B \\ v - u \in W_0^{1,p}(B). \end{cases}$$

Valem as estimativas:

$$\int_B |\nabla(u - v)|^p dx \leq C_p r^N \quad (p \geq 2), \quad (2.27)$$

onde  $C_p = p2^{p-3} \omega_N \lambda^p > 0$ , e

$$\int_B |\nabla(u - v)|^p dx \leq C_p r^{[N-p(1-p/2)]} \quad (1 < p < 2), \quad (2.28)$$

onde

$$C_p = \frac{2^{[p(5-p-N)/2+N]} p^{[p(1-p/2)]}}{[p(p-1)]^{\frac{p}{2}}} \omega_N M^{[p(1-p/2)]} \lambda^{(p^2/2)}.$$

**Demonstração:** Defina

$$X = B \cap (\{|\nabla u| > 0\} \cup \{|\nabla v| > 0\}).$$

Note que o lema é imediatamente válido para  $B \setminus X$  no lugar de  $B$ .

Considere, para cada  $s \in [0, 1]$  e  $x \in X$ , a combinação convexa

$$u^{(s)}(x) = su(x) + (1-s)v(x) = s[u(x) - v(x)] + v(x). \quad (2.29)$$

Então  $u^{(0)} = v$  e  $u^{(1)} = u$  em  $X$ . Dessa forma, usando (1.8) e o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_X |\nabla u|^p - |\nabla v|^p dx &= \int_X \int_0^1 \frac{d}{ds} (|\nabla u^{(s)}|^p) ds dx \\ &= p \int_0^1 \int_X |\nabla u^{(s)}|^{p-2} \nabla u^{(s)} \cdot \nabla(u-v) dx ds. \end{aligned}$$

Pela **Proposição 1.27**, como  $u-v \in W_0^{1,p}(B)$ ,

$$\int_B |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla(u-v) dx = 0.$$

Daí

$$\int_X |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla(u-v) dx = 0$$

e assim, por (2.29),

$$\begin{aligned} \int_X |\nabla u|^p - |\nabla v|^p dx &= p \int_0^1 \int_X (|\nabla u^{(s)}|^{p-2} \nabla u^{(s)} + |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot \nabla(u-v) dx ds \\ &= p \int_0^1 \frac{1}{s} \int_X (|\nabla u^{(s)}|^{p-2} \nabla u^{(s)} + |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot \nabla(u^{(s)} - v) dx ds. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Usaremos agora a desigualdade (A.6), no **Apêndice A**:

$$\left( |\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta \right) \cdot (\xi - \eta) \geq \begin{cases} (p-1) |\xi - \eta|^2 (|\xi| + |\eta|)^{p-2}, & \text{se } 1 < p < 2, \\ \frac{1}{p2^{p-3}} |\xi - \eta|^p, & \text{se } p \geq 2, \end{cases}$$

onde  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .

Para  $p \geq 2$  obtemos, de (2.30) e novamente de (2.29),

$$\begin{aligned} \int_X |\nabla u|^p - |\nabla v|^p dx &\geq p \frac{1}{p2^{p-3}} \int_0^1 \frac{1}{s} \int_X |\nabla(u^{(s)} - v)|^p dx ds \\ &= \frac{1}{p2^{p-3}} \int_0^1 p s^{p-1} \int_X |\nabla(u-v)|^p dx ds \\ &= \frac{1}{p2^{p-3}} \int_X |\nabla(u-v)|^p dx. \end{aligned}$$

Por isso, pela definição de  $X$ , por (2.22), da **Proposição 2.12**, e pelo **Lema 2.13**, vê-se que

$$\int_B |\nabla(u - v)|^p dx \leq p2^{p-3} \lambda^p \int_B \chi_{\{u=0\}} dx. \quad (2.31)$$

Consequentemente,

$$\int_B |\nabla(u - v)|^p dx \leq p2^{p-3} \omega_N \lambda^p r^N,$$

mostrando (2.27).

Se, por outro lado,  $1 < p < 2$ , temos

$$\int_X |\nabla u|^p - |\nabla v|^p dx \geq p(p-1) \int_0^1 \frac{1}{s} \int_X |\nabla(u^{(s)} - v)|^2 (|\nabla u^{(s)}| + |\nabla v|)^{p-2} dx ds.$$

Observando que

$$|\nabla u^{(s)}| + |\nabla v| \leq s|\nabla u| + (1-s)|\nabla v| + |\nabla v| \leq 2(|\nabla u| + |\nabla v|) \quad \forall s \in [0, 1],$$

e que a função  $t \mapsto t^{p-2}$  é decrescente para  $t > 0$ , verificamos

$$\begin{aligned} \int_X |\nabla u|^p - |\nabla v|^p dx &\geq p(p-1)2^{p-2} \int_0^1 s \int_X |\nabla(u - v)|^2 (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} dx ds \\ &= p(p-1)2^{p-3} \int_X |\nabla(u - v)|^2 (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} dx, \end{aligned} \quad (2.32)$$

Além disso, como

$$|\nabla u - \nabla v|^p = \left[ |\nabla(u - v)|^p (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(p-2)}{2}} \right] (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(2-p)}{2}}$$

em  $X$ , podemos aplicar a Desigualdade de Hölder para os expoentes conjugados  $\frac{2}{p}$  e  $\frac{2}{2-p}$  no produto acima e obter

$$\int_X |\nabla(u - v)|^p dx \leq \left[ \int_X |\nabla(u - v)|^{\frac{2p}{p}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(p-2)}{2} \frac{2}{p}} dx \right]^{\frac{p}{2}} \left[ \int_X (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(2-p)}{2} \frac{2}{2-p}} dx \right]^{\frac{2-p}{2}}.$$

O fato da função  $t \mapsto t^{1-\frac{p}{2}}$  ser crescente para  $t > 0$  nos dá

$$\begin{aligned} \int_X |\nabla(u - v)|^p dx &\leq \left[ \int_X |\nabla(u - v)|^2 (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} dx \right]^{\frac{p}{2}} \left[ \int_X (|\nabla u| + |\nabla v|)^p dx \right]^{1-\frac{p}{2}} \\ &\leq \left[ \int_X |\nabla(u - v)|^2 (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} dx \right]^{\frac{p}{2}} \left[ 2^{p-1} \int_X |\nabla u|^p + |\nabla v|^p dx \right]^{1-\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

A desigualdade acima e (2.32) implicam

$$\int_X |\nabla(u - v)|^p dx \leq \left[ \frac{1}{p(p-1)2^{p-3}} \int_X |\nabla u|^p - |\nabla v|^p dx \right]^{\frac{p}{2}} \left[ 2^{p-1} \int_X |\nabla u|^p + |\nabla v|^p dx \right]^{1-\frac{p}{2}}.$$

Daí, da definição de  $X$ , de (2.22), na **Proposição 2.12**, e da **Proposição 1.27**, temos

$$\begin{aligned}
\int_B |\nabla(u-v)|^p dx &\leq \frac{1}{[p(p-1)2^{p-3}]^{\frac{p}{2}}} \left( \int_B |\nabla u|^p - |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{p}{2}} \left( 2^p \int_B |\nabla u|^p dx \right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&= \frac{2^{[p(1-p/2)]}}{[p(p-1)]^{\frac{p}{2}} 2^{[(p-3)p/2]}} \left( \int_B |\nabla u|^p - |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{p}{2}} \left( \int_B |\nabla u|^p dx \right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leq \frac{2^{[p(5-2p)/2]}}{[p(p-1)]^{\frac{p}{2}}} \left( \lambda^p \int_B \chi_{\{u=0\}} dx \right)^{\frac{p}{2}} \left( \int_B |\nabla u|^p dx \right)^{1-\frac{p}{2}} \quad (2.33) \\
&\leq \frac{2^{[p(5-2p)/2]}}{[p(p-1)]^{\frac{p}{2}}} \lambda^{(p^2/2)} (\omega_N r^N)^{\frac{p}{2}} \left( \int_B |\nabla u|^p dx \right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&= \frac{2^{[p(5-2p)/2]}}{[p(p-1)]^{\frac{p}{2}}} (\omega_N)^{\frac{p}{2}} \lambda^{(p^2/2)} r^{(Np/2)} \left( \int_B |\nabla u|^p dx \right)^{1-\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Sendo  $u$   $p$ -subharmônica (ver **Teorema 2.6**) e  $0 \leq u \leq M$  q.t.p. em  $\Omega$  (ver **Teorema 2.7**), podemos aplicar a Desigualdade de Caccioppoli (ver **Proposição 1.21**) e obter

$$\begin{aligned}
\int_B |\nabla(u-v)|^p dx &\leq \frac{2^{[p(5-2p)/2]}}{[p(p-1)]^{\frac{p}{2}}} (\omega_N)^{\frac{p}{2}} \lambda^{(p^2/2)} r^{(Np/2)} \left( \frac{p^p}{r^p} \int_{2B} u^p dx \right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leq \frac{2^{[p(5-2p)/2]}}{[p(p-1)]^{\frac{p}{2}}} (\omega_N)^{\frac{p}{2}} \lambda^{(p^2/2)} r^{(Np/2)} (p^p 2^N \omega_N r^{(N-p)} M^p)^{1-\frac{p}{2}} \\
&= \frac{2^{[p(5-p-N)/2+N]} p^{[p(1-p/2)]}}{[p(p-1)]^{\frac{p}{2}}} \omega_N M^{[p(1-p/2)]} \lambda^{(p^2/2)} r^{[N-p(1-p/2)]},
\end{aligned}$$

mostrando (2.28). ■

De posse do Teorema a seguir, será possível demonstrar o **Teorema 0.1**.

**Teorema 2.16** *Se  $u \in \mathcal{K}$  é um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ , então, para algum  $\alpha = \alpha(N, p) \in (0, 1)$ , tem-se, a menos de representante,*

$$u \in C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\Omega).$$

e, para cada  $U \subset\subset \Omega$  e toda bola aberta não-vazia  $B \subset U$ ,

$$\|u\|_{\alpha,B} = \sup_B |u| + [u]_{\alpha,B} \leq C,$$

onde  $C = C(N, M, p, \lambda, U) > 0$  é constante.

**Demonstração:** Seja  $U \subset\subset \Omega$  aberto não-vazio e denote  $d := \text{dist}(U, \partial\Omega) > 0$ . Fixe  $y \in U$ ,

$$0 < r < \min \left\{ \frac{d}{2}, \zeta(N, M, p) \right\}$$

e denote  $B = B_r(y)$ .

Pelo **Teorema 2.7**, temos  $0 \leq u \leq M$  q.t.p. em  $\Omega$ . Como  $u$  é fracamente  $p$ -subharmônica (ver **Teorema 2.6**) e  $2B \subset \Omega$ , podemos aplicar a Desigualdade de Caccioppoli (ver **Proposição 1.21**) e obter

$$\int_B |\nabla u|^p dx \leq \frac{p^p}{r^p} \int_{2B} u^p dx \leq p^p 2^N \omega_N M^p r^{(N-p)}. \quad (2.34)$$

Seja  $v \in \mathcal{V}(u, B)$  a única solução de

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 \text{ em } B \\ v - u \in W_0^{1,p}(B). \end{cases}$$

Pela **Proposição 1.24**, existe  $Q = Q(N, p) > 0$  constante tal que

$$\sup_{\frac{1}{2}B} |\nabla v|^p \leq \frac{Q}{r^N} \int_B |\nabla v|^p dx \leq \frac{Q}{r^N} \int_B |\nabla u|^p dx.$$

Assim, por (2.34),

$$\begin{aligned} \sup_{\frac{1}{2}B} |\nabla v| &\leq \left( \frac{Q}{r^N} \int_B |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Q^{(1/p)} r^{(-N/p)} \left( p^p 2^N \omega_N M^p r^{(N-p)} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Denotando

$$a = a(N, M, p) := p 2^{N/p} M Q^{1/p} (\omega_N)^{1/p} > 0,$$

temos

$$\sup_{\frac{1}{2}B} |\nabla v| \leq a r^{(-N/p + N/p - 1)} = \frac{a}{r}. \quad (2.35)$$

Tomaremos agora um  $\theta > 0$  suficientemente pequeno (a ser estabelecido mais adiante)

e

$$0 < r < r_0 := \min \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \frac{d}{2}, \zeta(N, M, p) \right\}.$$

Desse modo,  $r^{(1+\theta)} < \frac{r}{2} < \frac{1}{2}$ . Consequentemente, pelo **Lema 2.15** e por (2.35),

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{p, B_r^{(1+\theta)}(y)} &\leq \|\nabla(u - v)\|_{p, B_r^{(1+\theta)}(y)} + \|\nabla v\|_{p, B_r^{(1+\theta)}(y)} \\ &\leq \|\nabla(u - v)\|_{p, B_r(y)} + (\omega_N)^{(1/p)} r^{[(1+\theta)N/p]} \|\nabla v\|_{\infty, B_{r/2}(y)} \\ &\leq \begin{cases} (C_p)^{(1/p)} r^{[N/p - (1-p/2)]} + a(\omega_N)^{1/p} r^{[(1+\theta)N/p - 1]}, & \text{se } 1 < p < 2, \\ (C_p)^{(1/p)} r^{[N/p]} + a(\omega_N)^{1/p} r^{[(1+\theta)N/p - 1]}, & \text{se } p \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Dessa forma, se

$$c = c(N, M, p, \lambda) := \max\{(C_p)^{(1/p)}, a(\omega_N)^{1/p}\},$$

então

$$\|\nabla u\|_{p, B_r(1+\theta)(y)} \leq \begin{cases} c \left( r^{[N/p - (1-p/2)]} + r^{[(1+\theta)N/p - 1]} \right) & \text{se } 1 < p < 2, \\ c \left( r^{(N/p)} + r^{[(1+\theta)N/p - 1]} \right) & \text{se } p \geq 2. \end{cases}$$

Como  $0 < r < 1$ , temos, para  $p \geq 2$ ,

$$r^{(N/p)} \leq r^{[(1+\theta)N/p - 1]} \iff \frac{p}{N} \geq \theta.$$

Se, por outro lado,  $1 < p < 2$ , então

$$r^{[N/p - (1-p/2)]} \leq r^{[(1+\theta)N/p - 1]} \iff \frac{p^2}{2N} \geq \theta.$$

Escolhamos  $\theta = \theta(N, p) > 0$  de modo que as implicações acima sejam satisfeitas.

Seja  $\tau = r^{(1+\theta)} < 1$ . Temos, para  $1 < p < N$ ,

$$\|\nabla u\|_{p, B_\tau(y)} \leq 2c\tau^{[N/p - 1/(1+\theta)]}.$$

Observe que se  $\alpha = \alpha(N, p) \in \left(0, 1 - \frac{1}{1+\theta}\right)$ , então

$$\tau^{[-1/(1+\theta)]} \leq \tau^{(-1+\alpha)}.$$

Logo

$$\|\nabla u\|_{p, B_\tau(y)} \leq 2c\tau^{(N/p - 1 + \alpha)}.$$

Portanto, pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{1, B_\tau(y)} &\leq \|\nabla u\|_{p, B_\tau(y)} (\tau^N \omega_N)^{1-1/p} \\ &\leq 2c(\omega_N)^{1-1/p} \tau^{(N-1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Por construção, a desigualdade acima vale para todo  $0 < \tau < r_1 := (r_0)^{(1+\theta)} < r_0 \leq \frac{d}{2}$ . Note que  $c$  independe de  $\tau$ .

Considere agora

$$t \geq r_1$$

tomado de forma que  $B_t(y) \subset U$  (lembramos que  $y \in U$  foi fixado no início da demonstração).

Seja  $k = k(N, r_1, \text{diam}(U))$  o menor inteiro tal que o compacto  $\bar{U}$  pode ser coberto por  $k$  bolas

abertas centradas em  $U$  e com raio  $\tau_0 := \frac{r_1}{2} > 0$ . Sejam  $\{y_1, \dots, y_k\}$  os centros de tais bolas. Observe que  $\tau_0 < r_1$ . Com isso, calculamos

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{1, B_t(y)} &\leq \sum_{i=1}^k \int_{B_{\tau_0}(y_i)} |\nabla u| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^k 2c(\omega_N)^{1-1/p} \tau_0^{(N-1+\alpha)} \\ &= 2ck(\omega_N)^{1-1/p} \tau_0^{(N-1+\alpha)} \\ &< ht^{(N-1+\alpha)}, \end{aligned}$$

onde  $h := 2ck(\omega_N)^{1-1/p} > 0$  é independente de  $t$  e de  $y$ .

Aplicando o Teorema de Morrey (ver **Teorema D.2**), obtemos que

$$u \in C^{0,\alpha}(U) \quad \forall U \subset\subset \Omega$$

e, para toda bola aberta não-vazia  $B \subset U$ , tem-se

$$[u]_{\alpha, B} \leq C,$$

para uma constante  $C = C(N, M, p, U)$ , donde concluímos a demonstração. ■

**Observação 2.17** O Teorema 2.16 nos fornece regularidade  $C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$  apenas para

$$\alpha \in \left(0, 1 - \frac{1}{1+\theta}\right),$$

isto é, num subconjunto próprio de  $(0, 1)$ . Martínez e Wolansky, por sua vez, foram capazes de mostrar (cf. [23] Teorema 4.1) que mínimos absolutos de  $J$  pertencem a  $C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$  para todo  $0 < \alpha < 1$ .

## 2.4 $p$ -Harmonicidade fraca

A continuidade de um mínimo de  $J$  implica no fato de seu conjunto de positividade ser aberto. A  $p$ -harmonicidade em tal conjunto é consequência disso, conforme o Teorema a seguir.

**Teorema 2.18** *Se  $u \in \mathcal{K}$  é um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ , então  $u$  é fracamente  $p$ -harmônica em  $D := \{u > 0\}$ , isto é, dada qualquer bola aberta não-vazia  $B \subset D$ ,*

$$\int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B).$$

**Demonstração:** Pelo **Teorema 2.16**,  $u$  admite um representante contínuo em  $\Omega$  (o qual também denotaremos por  $u$ ). Pelo **Teorema 2.7**, temos  $u \geq 0$  em  $\Omega$ . Assim  $D$  é aberto. Fixe  $B \subset D$  uma bola aberta não-vazia e  $\varphi \in C_0^\infty(B)$  e defina  $X := \text{supp } \varphi \subset\subset B$  e

$$d = \text{dist}(X, \partial B) > 0.$$

Considere uma cobertura finita

$$\{B_i\}_{i=1}^k$$

de  $X$  por meio de bolas abertas de raio  $\frac{d}{2}$  e com centros em  $X$ . Se definirmos

$$Y := \overline{\left( \bigcup_{i=1}^k B_i \right)},$$

então teremos  $Y$  compacto com  $Y \subset B$ .

Assumindo  $\varphi \not\equiv 0$  em  $B$ , note que

$$m_1 := \min_{x \in Y} u(x) > 0$$

e

$$m_2 := \max_{x \in Y} |\varphi(x)| > 0.$$

Definindo  $\delta = \frac{m_1}{m_2} > 0$ , observamos que

$$|t\varphi| < u \quad \text{em } Y \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

Daí, para cada  $t \in (-\delta, \delta)$ , vale

$$u + t\varphi > 0 \quad \text{em } B,$$

isto é,

$$B \cap \{u + t\varphi > 0\} = B. \tag{2.36}$$

Segue então que

$$\|\nabla(u + t\varphi) - \nabla u\|_{p,B} + \|\chi_{\{u+t\varphi>0\}} - \chi_{\{u>0\}}\|_{1,B} = t\|\nabla\varphi\|_{p,B}.$$

Sabemos, pela **Proposição 2.12**, que  $u \in \mathcal{K}(u, B)$  é um mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, B)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(u, B)$ . Observe que  $u + t\varphi \in \mathcal{K}(u, B)$ . Como  $\varphi$  é suave, mas não constante em  $B$ , temos  $0 < \|\nabla\varphi\|_{p,B} < +\infty$ . Tomando agora

$$|t| < \delta_1 := \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{\|\nabla\varphi\|_{p,B}} \right\}$$

( $\varepsilon > 0$  provém da minimalidade local de  $u$ , conforme a **Definição 2.2**), vemos que  $u + t\varphi \in \mathcal{V}(u, B)$  para todo  $t \in (-\delta_1, \delta_1)$ . Logo

$$J(u; \lambda, B) \leq J(u + t\varphi; \lambda, B) \quad \forall t \in (-\delta_1, \delta_1). \quad (2.37)$$

Por (2.36),

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}[J(u + t\varphi; \lambda, B) - J(u; \lambda, B)] &= \frac{1}{t} \int_B |\nabla u + t\nabla\varphi|^p - |\nabla u|^p dx + \frac{\lambda^p}{t} \int_B \chi_{\{u+t\varphi>0\}} - \chi_D dx \\ &= \frac{1}{t} \int_B |\nabla u + t\nabla\varphi|^p - |\nabla u|^p dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, por (1.6), existe a derivada

$$\left. \frac{d}{dt} J(u + t\varphi; \lambda, B) \right|_{t=0} = \int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx. \quad (2.38)$$

De (2.37), (2.38) e da **Proposição A.3**, no **Apêndice A**, concluímos que

$$\int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B).$$

■

**Corolário 2.19** *Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Então  $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\{u > 0\})$  para algum  $0 < \alpha(N, M, p) < 1$ . Ademais, para cada  $U \subset\subset D = \{u > 0\}$ ,*

$$\|\nabla u\|_{\alpha,U} = \sup_U |u| + \sup_U |\nabla u| + [\nabla u]_{\alpha,U} \leq C,$$

onde  $C = C(N, M, p, U) > 0$  é constante.

**Demonstração:** Basta aplicar o **Teorema 2.7**, o **Teorema 2.18** e a **Proposição 1.25**.

■

De posse do lema a seguir, poderemos concluir a demonstração do **Teorema 0.1**.

**Lema 2.20 (Primeira variação do funcional energia, ver [32] Lema 9.5)** *Sejam  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$  e  $\eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ . Para  $t \in \mathbb{R}$  com  $|t|$  suficientemente pequeno, a aplicação*

$$\begin{aligned} \Psi_t : \Omega &\rightarrow \Omega \\ x &\mapsto \Psi_t(x) := x + t\eta(x). \end{aligned}$$

está bem definida.

- (i) Para  $|t|$  suficientemente pequeno,  $\Psi_t$  é um difeomorfismo de  $\Omega$  em  $\Omega$  com  $\Psi_t^{-1} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

(ii) Para  $|t|$  suficientemente pequeno, a função  $u_t := u \circ (\Psi_t)^{-1}$  pertence a  $\mathcal{V}$ .

(iii) A função

$$t \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u_t|^p dx$$

é derivável em  $t = 0$  e

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^p dx \Big|_{t=0} = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} (-p \nabla u D\eta \nabla u + |\nabla u|^2 \operatorname{div} \eta) dx.$$

(iv) A função

$$t \mapsto \int_{\Omega} \chi_{\{u_t > 0\}} dx = |\{u_t > 0\}|$$

é derivável em  $t = 0$  e

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \chi_{\{u_t > 0\}} dx \Big|_{t=0} = \int_D \operatorname{div} \eta dx,$$

onde  $D = \{u > 0\}$ .

**Demonstração:** Vamos assumir  $\eta \neq 0$ . Pelo **Corolário 2.19**,  $u \in C^1(D)$  (a menos de um representante). Denote

$$X := \operatorname{supp} \eta = \overline{\{x \in \Omega; \eta(x) \neq 0\}}.$$

Temos  $X \subset \Omega$  compacto,  $d := \operatorname{dist}(X, \partial\Omega) > 0$  e  $m := \max_X |\eta| > 0$ . Escolhendo  $|t| < \frac{d}{m}$ , temos

$$|\Psi_t(x) - x| = |t\eta(x)| < \frac{d}{m} m = d,$$

donde  $\Psi_t(x) \subset B_d(x) \subset \Omega$  para todo  $x \in X$ . Como  $\Psi_t(x) = x$  para todo  $x \in \Omega \setminus X$ , segue que a aplicação  $\Psi_t$  está bem definida com contradomínio  $\Omega$ .

(i) Note que  $\Psi_t \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  e  $\eta \in C_0^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ . Dados  $x_1, x_2 \in \Omega$ , temos

$$\begin{aligned} |\Psi_t(x_1) - \Psi_t(x_2)| &= |(x_1 - x_2) + t[\eta(x_1) - \eta(x_2)]| \\ &\geq |x_1 - x_2| - |t| \operatorname{Lip}(\eta) |x_1 - x_2| \\ &= [1 - |t| \operatorname{Lip}(\eta)] |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

onde  $\operatorname{Lip}(\eta)$  é a melhor constante de Lipschitz para  $\eta$ . Tomando agora  $|t| < \delta_1 := \min \left\{ \frac{d}{m}, \frac{1}{\operatorname{Lip}(\eta)} \right\}$ , obtemos que  $\Psi_t$  é injetiva em  $\Omega$ .

Considere agora a função

$$h(x, t) := \det D\Psi_t(x) = \det [I_N + tD\eta(x)], \quad (x, t) \in \Omega \times (-\delta_1, \delta_1).$$

onde  $I_N$  é a matriz identidade de ordem  $N$ . Observe que  $h$  é contínua. Sendo  $X \subset \Omega$  compacto,  $h$  é uniformemente contínua em  $X \times \left[-\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_1}{2}\right]$ . Consequentemente, existe  $0 < \delta_2 < \frac{\delta_1}{2}$  tal que, para  $(x, t) \in X \times \left[-\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_1}{2}\right]$ ,

$$|(x, 0) - (x, t)| < \delta_2 \Rightarrow |h(x, 0) - h(x, t)| < \frac{1}{2},$$

ou seja, para  $x \in X$ ,

$$|t| < \delta_2 \Rightarrow |1 - h(x, t)| < \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, temos  $h(x, t) > \frac{1}{2} > 0$  para todos  $x \in X$  e  $|t| < \delta_2$ . Além disso,  $D\Psi_t = I_N$  em  $\Omega \setminus X$ . Logo  $\Psi_t$  tem determinante Jacobiano não-nulo em  $\Omega$  para todo  $t \in (-\delta_2, \delta_2)$ .

Fixe  $t \in (-\delta_2, \delta_2)$ . Pelo Teorema da Função Inversa,  $\Psi_t$  é um difeomorfismo local de  $\Omega$  em  $\Psi_t(\Omega) \subset \Omega$  cujas funções inversas, definidas localmente, são de classe  $C^1$ . Como  $\Psi_t$  é injetiva, tem-se que  $\Psi_t$  é difeomorfismo de  $\Omega$  em  $\Psi_t(\Omega)$ . Para ver que  $\Psi_t$  é, de fato, um difeomorfismo de  $\Omega$  em  $\Omega$ , precisamos mostrar que  $\Psi_t$  é sobrejetiva. Suponha, por contradição, que isso não ocorre. Então

$$\Omega \setminus \Psi_t(\Omega) \neq \emptyset.$$

Uma vez que  $(\Omega \setminus \{|\eta| > 0\}) = \Psi_t(\Omega \setminus \{|\eta| > 0\})$  e

$$\Psi_t(\Omega) = \Psi_t(\Omega \setminus \{|\eta| > 0\}) \cup \Psi_t(X),$$

devemos ter, por De Morgan,

$$\begin{aligned} \Omega \setminus \Psi_t(\Omega) &= [\Omega \setminus \Psi_t(\Omega \setminus \{|\eta| > 0\})] \cap [\Omega \setminus \Psi_t(X)] \\ &= [\Omega \setminus (\Omega \setminus \{|\eta| > 0\})] \cap [\Omega \setminus \Psi_t(X)] \\ &= (\Omega \cap \{|\eta| > 0\}) \cap [\Omega \setminus \Psi_t(X)] \\ &= (\Omega \cap \{|\eta| > 0\}) \setminus \Psi_t(X). \end{aligned}$$

Como  $X$  é compacto e  $\Psi_t$  é contínua, temos que  $\Psi_t(X)$  é compacto. Sendo  $\Omega \cap \{|\eta| > 0\}$  aberto (pois  $\eta$  é contínua), obtemos que o conjunto

$$(\Omega \cap \{|\eta| > 0\}) \setminus \Psi_t(\Omega),$$

não-vazio por hipótese de contradição, é um aberto. Por outro lado, o Teorema da Função Inversa também nos dá que  $\Psi_t(\Omega)$  é um aberto, de modo que  $\Psi_t(\Omega)$  e  $\Omega \setminus \Psi_t(\Omega)$  formam uma cisão não-trivial para o conexo  $\Omega$ , um absurdo.

Portanto  $\Psi_t$  é difeomorfismo de  $\Omega$  em  $\Omega$  com  $\Psi^{-1} \in C^1(\Omega)$  para todo  $t \in (-\delta_2, \delta_2)$ .

(ii) Para  $t \in (-\delta_2, \delta_2)$  fixado, defina a função

$$u_t(x) := u \circ \Psi_t^{-1}(x), \quad x \in \Omega.$$

Então

$$u_t(\Psi_t(x)) = u(x) \quad \forall x \in \Omega$$

e, pela Fórmula de Mudança de Variáveis (pois  $\Psi_t$  é Lipschitz e injetiva, ver **Teorema B.13**, no **Apêndice B**),

$$\int_{\Omega} |u_t|^p dx = \int_{\Psi_t(\Omega)} |u \circ \Psi_t^{-1}|^p dx = \int_{\Omega} |u|^p |\det D\Psi_t| dx \leq C(t, \eta) \int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty,$$

donde  $u_t \in L^p(\Omega)$ .

Usando aproximações e a Fórmula de Mudança de Variáveis, mostra-se que

$$[\nabla u_t] = [\nabla u \circ \Psi_t^{-1}]^T [D\Psi_t^{-1}] \quad (2.39)$$

(notação matricial). Dessa forma, para cada  $i = 1, \dots, N$ , temos a derivada parcial fraca

$$\frac{\partial u_t}{\partial x_i} = (\nabla u \circ \Psi_t^{-1}) \cdot \frac{\partial \Psi_t^{-1}}{\partial x_i},$$

a qual cumpre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_i} \right|^p dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \circ \Psi_t^{-1}|^p \left| \frac{\partial \Psi_t^{-1}}{\partial x_i} \right|^p dx \\ &\leq C(p, t, \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Logo  $u_t \in W^{1,p}(\Omega)$ . Sendo  $\Psi_t^{-1} = I_N$  em  $\Omega \setminus X$  com  $X \subset\subset \Omega$ , também temos

$$u_t = u \quad \text{em } \Omega \setminus X.$$

Portanto  $u_t - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e assim  $u_t \in \mathcal{K}$ .

Por outro lado, para cada  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_t}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} (\nabla u \circ \Psi_t^{-1}) \cdot \frac{\partial \Psi_t^{-1}}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \left( \frac{\partial \Psi_t^{-1}}{\partial x_i} \circ \Psi_t \right) |\det D\Psi_t| dx. \quad (2.40)$$

Pelo Teorema da Função Inversa,

$$\left[ \frac{\partial \Psi_t^{-1}}{\partial x_i} \circ \Psi_t \right]_{i=1}^N = [D\Psi_t^{-1} \circ \Psi_t] = [D\Psi_t]^{-1} \quad \text{em } \Omega. \quad (2.41)$$

Além disso, dado que

$$D\Psi_t = I_N + tD\eta, \quad (2.42)$$

temos

$$\begin{aligned} I_N &= [D\Psi_t]^{-1}[D\Psi_t] \\ &= [D\Psi_t]^{-1}[I_N + tD\eta] \\ &= [D\Psi_t]^{-1} + t[D\Psi_t]^{-1}[D\eta], \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde

$$|[D\Psi_t]^{-1} - I_N| \leq |t| |[D\Psi_t]^{-1}| |D\eta|.$$

Usando (2.42) e o fato que  $D\eta$  é uma função contínua com suporte compacto em  $\Omega$ , vemos que a matriz  $D\Psi_t$  é uniformemente limitada em  $\Omega$  para  $t \in (-\delta_2, \delta_2)$ . Conseqüentemente, sua inversa  $[D\Psi_t]^{-1}$  também é uniformemente limitada em  $\Omega$  para  $t \in (-\delta_2, \delta_2)$ . Logo existe uma constante  $C > 0$ , dependendo apenas de  $\eta$ , tal que

$$|[D\Psi_t]^{-1} - I_N| \leq Ct \quad \text{em } \Omega.$$

Por causa disso,

$$[D\Psi_t]^{-1} \rightarrow I_N \quad \text{uniformemente em } \Omega \quad (t \rightarrow 0). \quad (2.44)$$

Aplicando (2.44) em (2.41), segue que

$$\frac{\partial \Psi_t^{-1}}{\partial x_i} \circ \Psi_t \rightarrow e_i \quad \text{uniformemente em } \Omega$$

para cada  $i = 1, \dots, N$ . Dado que

$$|\det D\Psi_t| \rightarrow 1 \quad \text{uniformemente em } \Omega,$$

pois  $|\det D\Psi_t|$  é contínua com suporte no compacto  $X$  para todo  $t \in (-\delta_2, \delta_2)$ , concluímos que

$$\left( \frac{\partial \Psi_t^{-1}}{\partial x_i} \circ \Psi_t \right) |\det D\Psi_t| \rightarrow e_i \quad \text{uniformemente em } \Omega. \quad (2.45)$$

Por (2.40) e (2.45),

$$\frac{\partial u_t}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{em } L^p(\Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Assim

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\nabla u_t - \nabla u\|_p = 0. \quad (2.46)$$

Também temos, para  $x \in \Omega$  e  $t \in (-\delta_2, \delta_2)$ ,

$$\chi_{\{u_t > 0\}}(x) = 1 \iff u \circ \Psi_t^{-1}(x) = u_t(x) > 0 \iff \chi_{\{u > 0\}} \circ \Psi_t^{-1}(x) = 1,$$

donde

$$\chi_{\{u_t > 0\}} = \chi_{\{u > 0\}} \circ (\Psi_t)^{-1} \quad \text{em } \Omega.$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\{u_t > 0\}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\{u > 0\}} \circ (\Psi_t)^{-1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\{u > 0\}} |\det D\Psi_t| dx \\ &= \int_{\Omega} \chi_{\{u > 0\}} dx. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\chi_{\{u_t > 0\}} \rightarrow \chi_{\{u > 0\}} \quad \text{em } L^1(\Omega).$$

Isso e (2.46) implicam em

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\|\nabla u_t - \nabla u\|_p + \|\chi_{\{u_t > 0\}} - \chi_{\{u > 0\}}\|_1) = 0.$$

Daí existe  $0 < \delta \leq \delta_2$  tal que

$$\|\nabla u_t - \nabla u\|_p + \|\chi_{\{u_t > 0\}} - \chi_{\{u > 0\}}\|_1 < \varepsilon \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

Portanto

$$J(u) \leq J(u_t) \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

(iii) Precisaremos de aproximações, via Teorema de Taylor, para as funções:

$$x \mapsto [D\Psi_t(x)]^{-1}, \quad x \in \Omega,$$

e

$$x \mapsto \det D\Psi_t(x), \quad x \in \Omega.$$

Para ver a primeira, observe que dado  $t \in (-\delta, \delta)$ , tem-se  $\Psi_t^{-1} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  (pelo item (i)) e, por (2.43),

$$[D\Psi_t]^{-1} = I_N - t[D\Psi_t]^{-1}[D\eta].$$

Por (2.44),  $[D\Psi_t]^{-1} \rightarrow I_N$  uniformemente em  $\Omega$ . Definindo  $A_t := I_N - [D\Psi_t]^{-1}$ , vemos que  $A_t$  é uma matriz limitada com

$$[D\Psi_t]^{-1} = I_N - A_t \tag{2.47}$$

e

$$A_t \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } \Omega.$$

Assim, por (2.42) e (2.47),

$$\begin{aligned} I_N = [D\Psi_t]^{-1}[D\Psi_t] &\Rightarrow I_N = [I_N - A_t][I_N + tD\eta] \\ &\Rightarrow 0 = tD\eta - A_t - tA_tD\eta \\ &\Rightarrow A_t = tD\eta - tA_tD\eta \end{aligned} \quad (2.48)$$

com

$$A_t D\eta \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } \Omega. \quad (2.49)$$

Usando (2.47), (2.48), (2.49) e a notação *little-oh* (ver o **Apêndice A**), escrevemos

$$[D\Psi_t]^{-1} = I_N - tD\eta + o(t) \quad \text{uniformemente em } \Omega \quad (t \rightarrow 0).$$

Em particular, para todo  $x \in \Omega$ , temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} [D\Psi_t(x)]^{-1} \right|_{t=0} = -D\eta(x) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.50)$$

o que nos mostra que a função  $t \mapsto [D\Psi_t(x)]^{-1}$  é suave em  $t = 0$  para todo  $x \in \Omega$ .

Para ver a segunda aproximação, envolvendo o determinante, observe que, da **Proposição A.7**, no **Apêndice A**, existe uma função  $g(x, s)$  polinomial em  $s$  de ordem no máximo  $N - 2$  tal que

$$\begin{aligned} \det D\Psi_t(x) &= \det [I_N + tD\eta(x)] \\ &= t^N \det [D\eta(x) + t^{-1}I_N] \\ &= t^N \left[ (t^{-1})^N + (\text{tr } D\eta(x))(t^{-1})^{N-1} + g(x, t^{-1}) \right] \\ &= 1 + t \text{div } \eta(x) + t^N g(x, t^{-1}) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t \in (-\delta, \delta), t \neq 0. \end{aligned}$$

Dado que

$$\frac{t^N g(\cdot, t^{-1})}{t} \rightarrow 0 \quad \text{em } \Omega$$

e

$$\frac{t^N g(\cdot, t^{-1})}{t} = \frac{\det D\Psi_t - 1}{t} - \text{div } \eta = 0 \quad \text{em } \Omega \setminus X,$$

temos

$$\frac{t^N g(\cdot, t^{-1})}{t} \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } \Omega$$

(lembre-se que  $X \subset\subset \Omega$ ). Usando novamente a notação *little-oh*, podemos escrever

$$\det D\Psi_t = 1 + t \operatorname{div} \eta + o(t) \quad \text{uniformemente em } \Omega \quad (t \rightarrow 0). \quad (2.51)$$

Observe agora que a função

$$\begin{aligned} f : \Omega \times (-\delta, \delta) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) := |[\nabla u(x)]^T [D\Psi_t(x)]^{-1}|^p \end{aligned}$$

(onde estamos utilizando produto de matrizes) é suave em  $t$ , de modo que o Teorema de Taylor, (2.39) e (2.50) nos fornecem

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(x, 0) + t \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \Big|_{t=0} + o(t) \quad (t \rightarrow 0) \\ &= |\nabla u(x)|^p + tp |[\nabla u(x)]^T [D\Psi_0(x)]^{-1}|^{p-2} [\nabla u(x)]^T [D\Psi_0(x)]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( |[\nabla u(x)]^T [D\Psi_t(x)]^{-1}| \right) \Big|_{t=0} \\ &\quad + o(t) \\ &= |\nabla u(x)|^p + tp |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot ([\nabla u(x)]^T [-D\eta(x)]) + o(t) \\ &= |\nabla u(x)|^p - tp |\nabla u(x)|^{p-2} [\nabla u(x)]^T [D\eta(x)] \cdot \nabla u(x) + o(t), \end{aligned}$$

para cada  $x \in \Omega$ . Simplificamos a notação escrevendo

$$f(x, t) = |\nabla u(x)|^p - tp |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) D\eta(x) \nabla u(x) + o(t), \quad x \in \Omega.$$

Ora, a aproximação acima é uniforme em  $\Omega$ , pois

$$\frac{f(x, t) - |\nabla u(x)|^p}{t} + p |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) D\eta(x) \nabla u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus X,$$

para todo  $t \approx 0$ , com  $X \subset\subset \Omega$ . A partir disso, a Fórmula de Mudança de Variáveis, o Teorema da Função Inversa e (2.51) implicam, para  $t \approx 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_t(x)|^p dx &= \int_{\Psi_t(\Omega)} |[\nabla u \circ \Psi_t^{-1}(x)] [D\Psi_t(x)]|^p dx \\ &= \int_{\Omega} |[\nabla u \circ \Psi_t^{-1} \circ \Psi_t(y)] [D\Psi_t^{-1} \circ \Psi_t(y)]|^p |\det D\Psi_t(y)| dy \\ &= \int_{\Omega} |[\nabla u] [D\Psi_t]^{-1}|^p (1 + t \operatorname{div} \eta + o(t)) dy \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^p - tp |\nabla u|^{p-2} \nabla u D\eta \nabla u + o(t)) (1 + t \operatorname{div} \eta + o(t)) dy \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p dy + t \int_{\Omega} -p |\nabla u|^{p-2} \nabla u D\eta \nabla u + |\nabla u|^p \operatorname{div} \eta dy + o(t) \end{aligned}$$

(onde foi possível escrever  $o(t)$  fora da integral pois todas as aproximações são uniformes). Isso conclui (iii).

(iv) Lembrando que  $\chi_{\{u_t > 0\}} = \chi_{\{u > 0\}} \circ \Psi_t^{-1}$ , calculamos, para  $t \approx 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi_{\{u_t > 0\}}(x) dx &= \int_{\Psi_t(\Omega)} \chi_{\{u > 0\}} \circ \Psi_t^{-1}(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \chi_{\{u > 0\}}(y) |\det D\Psi_t(y)| dy \\ &= \int_{\Omega} \chi_{\{u > 0\}}(1 + t \operatorname{div} \eta + o(t)) dy \\ &= \int_{\Omega} \chi_{\{u > 0\}} dy + t \int_{\Omega} \chi_{\{u > 0\}} \operatorname{div} \eta dy + o(t). \end{aligned}$$

Isso mostra (iv). ■

**Lema 2.21** *Se  $F \in C^1(D, \mathbb{R}^N)$  tem suporte compacto em  $\Omega$ , então*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \operatorname{ess} \int_{\Omega \cap \partial\{u > s\}} F \cdot \nu_s d\mathcal{H}^{N-1} = \int_D \operatorname{div} F dx,$$

onde  $\nu_s = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  é o vetor unitário normal externo a  $\Omega \cap \partial\{u > s\}$ , nos pontos onde está definido.

**Demonstração:** Defina os conjuntos

$$\Gamma_s := \Omega \cap \partial\{u > s\}, \quad s > 0,$$

e

$$E := \{s \in \mathbb{R}; \mathcal{H}^{N-1}(\{|\nabla u| = 0\} \cap \{u = s\}) = 0\}.$$

Então, pelo **Corolário B.12**, no **Apêndice B**,  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \setminus E) = 0$ . Fixado  $s \in E$ ,  $s > 0$ , temos

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_s \cap \{|\nabla u| = 0\}) \leq \mathcal{H}^{N-1}(\{u = s\} \cap \{|\nabla u| = 0\}) = 0.$$

Nosso objetivo é mostrar que, para cada  $s \in E$  suficientemente pequeno, o conjunto  $\Gamma_s$  é elegível para o Teorema de Gauss-Green para fronteira quase-Lipschitz (ver **Teorema B.14**, no **Apêndice B**). Fixe  $s \in E$  com  $0 < s < M$ . Então  $\Gamma_s$  é não-vazio. Seja

$$S := \Gamma_s \setminus \{|\nabla u| = 0\}.$$

Note que

$$\Gamma_s \setminus S = \Gamma_s \cap \{|\nabla u| = 0\}$$

é fechado com

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_s \setminus S) = 0.$$

Resta mostrar que  $S \in C^{0,1}$  em  $\partial\{u > s\}$  (ver **Definição A.1**, no **Apêndice A**). Fixado  $y \in S$ , temos  $|\nabla u(y)| \neq 0$  e o Teorema da Função Implícita nos fornece  $r > 0$  tal que

$$B_r(y) \subset D$$

e  $B_r(y) \cap \{u = s\}$  pode ser representado, após uma translação e uma rotação, se necessário, como o gráfico de uma função real não-constante

$$f : U \rightarrow \mathbb{R},$$

onde  $U$  é um aberto em  $\mathbb{R}^{N-1}$  contendo  $0 \in \mathbb{R}^{N-1}$  e  $f \in C^1(U)$ . Escolhendo  $0 < \delta < \frac{r}{2}$  e  $V \subset U$  aberto com  $0 \in V$  convenientes, podemos afirmar que

$$\{x = (x', x_N) \in V \times (-\delta, \delta); x_N > f(x')\} = (V \times (-\delta, \delta)) \cap \{u > s\},$$

pois  $y \in \partial\{u > s\}$ . Logo  $S \in C^{0,1}$  em  $\partial\{u > s\}$ . Além disso, como  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ , temos que

$$\partial\Omega \cap \partial\{u > s\} \in C^{0,1} \text{ em } \partial\{u > s\}.$$

Assim, denotando

$$S_0 := \Gamma_s \setminus S,$$

segue que  $\partial\{u > s\} \setminus S_0 \in C^{0,1}$  em  $\partial\{u > s\}$  com  $S_0$  fechado e

$$\mathcal{H}^{N-1}(S_0) = 0.$$

Então o Teorema de Gauss-Green (ver **Corolário B.14**) nos garante que

$$\int_{\Omega \cap \partial\{u > s\}} F \cdot \nu_s d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\{u > s\}} \operatorname{div} F dx \quad \forall F \in C^1(D),$$

onde

$$\nu_s(x) = -\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \quad \forall x \in \partial\{u > s\} \setminus S_0$$

está bem definido  $\mathcal{H}^{N-1}$ -q.t.p. em  $\partial\{u > s\}$ . Com isso, temos

$$\int_{\Omega \cap \partial\{u > s\}} F \cdot \nu_s d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\{u > s\}} \operatorname{div} F dx \quad \forall s \in E \cap (0, M),$$

onde podemos passar ao limite de  $s \rightarrow 0$ ,  $s \in E$ , para obter

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \operatorname{ess} \int_{\Omega \cap \partial\{u > s\}} F \cdot \nu_s d\mathcal{H}^{N-1} = \int_D \operatorname{div} F dx \quad \forall F \in C^1(D).$$

■

Conseguimos coletar informações suficientes para mostrar uma forma bastante fraca da condição de fronteira de Neumann sobre  $\Gamma$ .

**Teorema 2.22** (ver [4] **Teorema 2.5**) *Se  $u \in \mathcal{K} \cap C^2(D)$  é um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ , então*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \operatorname{ess} \int_{\Omega \cap \partial\{u>s\}} [(p-1)|\nabla u|^p - \lambda^p] \eta \cdot \nu_s d\mathcal{H}^{N-1} = 0,$$

para toda função vetorial  $\eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , onde  $\nu_s$  é o vetor unitário normal externo a  $\Omega \cap \partial\{u > s\}$ , nos pontos onde está definido.

**Demonstração:** Nos termos do **Lema 2.20** temos, para  $t \approx 0$ ,

$$\frac{1}{t}[J(u_t) - J(u)] = \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^p - |\nabla u|^p + \lambda^p(\chi_{\{u_t>0\}} - \chi_{\{u>0\}}) dx.$$

Usando (iii) e (iv), do **Lema 2.20**, podemos passar ao limite de  $t \rightarrow 0$  e calcular, pela **Proposição A.3**, no **Apêndice A**, e pelo fato de  $\nabla u = 0$  q.t.p. em  $\{u = 0\}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} J(u_t) \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} (|\nabla u|^2 \operatorname{div} \eta - p \nabla u D\eta \nabla u) + \lambda^p \operatorname{div} \eta \chi_{\{u>0\}} dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + \lambda^p \chi_{\{u>0\}}) \operatorname{div} \eta dx - \int_{\Omega} p |\nabla u|^{p-2} \nabla u D\eta \nabla u dx \\ &= \int_D (|\nabla u|^p + \lambda^p) \operatorname{div} \eta dx - \int_D p |\nabla u|^{p-2} \nabla u D\eta \nabla u dx. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Por outro lado, como  $u \in C^2(D)$  (por hipótese) e  $\eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , vê-se que, para cada  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\nabla u \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla u \cdot \eta) - \frac{\partial(\nabla u)}{\partial x_i} \cdot \eta$$

em  $D$ , de modo que

$$[\nabla u]^T [D\eta] = \left[ \nabla u \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right]_{i=1}^N = \nabla (\nabla u \cdot \eta) - \left[ \frac{\partial(\nabla u)}{\partial x_i} \cdot \eta \right]_{i=1}^N$$

e assim

$$\begin{aligned} \nabla u D\eta \nabla u &= \nabla (\nabla u \cdot \eta) \cdot \nabla u - \left[ \frac{\partial(\nabla u)}{\partial x_i} \cdot \eta \right]_{i=1}^N \cdot \nabla u \\ &= \nabla u \cdot \nabla (\nabla u \cdot \eta) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial(\nabla u)}{\partial x_i} \cdot \eta \\ &= \nabla u \cdot \nabla (\nabla u \cdot \eta) - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \eta_j \end{aligned}$$

em  $D$ , onde estamos denotando  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ . Isso nos fornece

$$p |\nabla u|^{p-2} \nabla u D\eta \nabla u = p |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\nabla u \cdot \eta) - p |\nabla u|^{p-2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \eta_j \quad \text{em } D. \quad (2.53)$$

Usando (A.1), da demonstração da **Proposição A.4**, no **Apêndice A**, temos

$$|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\nabla u \cdot \eta) = \operatorname{div} [(\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u] - (\nabla u \cdot \eta) \Delta_p u \quad \text{em } D.$$

Ora,  $u$  é fracamente  $p$ -harmônica em  $D$  (ver **Teorema 2.18**) e, por hipótese,  $u \in C^2(D)$ . Logo  $u$  é  $p$ -harmônica em  $D$ , ou seja,

$$\Delta_p u = 0 \quad \text{em } D.$$

Dessa forma,

$$|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\nabla u \cdot \eta) = \operatorname{div} [(\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \quad \text{em } D. \quad (2.54)$$

Por outro lado temos, para cada  $j = 1, \dots, N$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} |\nabla u|^p = p |\nabla u|^{p-2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{em } D,$$

donde

$$p |\nabla u|^{p-2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \eta_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} |\nabla u|^p \eta_j = \nabla (|\nabla u|^p) \cdot \eta. \quad (2.55)$$

Combinando (2.53)-(2.55), encontramos

$$p |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\nabla u \cdot \eta) = p \operatorname{div} [(\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u] - \nabla (|\nabla u|^p) \cdot \eta.$$

Retornando a (2.52) e aplicando novamente (A.1), vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D (|\nabla u|^p + \lambda^p) \operatorname{div} \eta - p |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx \\ &= \int_D (|\nabla u|^p + \lambda^p) \operatorname{div} \eta + \nabla (|\nabla u|^p) \cdot \eta - p \operatorname{div} [(\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \, dx \\ &= \int_D \operatorname{div} [(|\nabla u|^p + \lambda^p) \eta] - p \operatorname{div} [(\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \, dx \\ &= \int_D \operatorname{div} [(|\nabla u|^p + \lambda^p) \eta - p (\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \, dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Fazendo agora

$$F = (|\nabla u|^p + \lambda^p) \eta - p (\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \in C^1(D),$$

segue do **Lema 2.21** e de (2.56) que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \operatorname{ess} \int_{\Omega \cap \partial\{u>s\}} [(|\nabla u|^p + \lambda^p) \eta - p (\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \cdot \nu_s \, d\mathcal{H}^{N-1} &= \int_D \operatorname{div} [(|\nabla u|^p + \lambda^p) \eta \\ &\quad - p (\nabla u \cdot \eta) |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \, dx \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde tem-se, para  $\mathcal{L}^1$ -q.t.p.  $s \in (0, M)$  e  $\mathcal{H}^{N-1}$  - q.t.p.  $x \in \Omega \cap \partial\{u > s\}$ ,

$$v_s(x) = -\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}.$$

Isso nos traz, fixados  $s$  e  $x$ ,

$$\nabla u(x) \cdot \eta(x) = -|\nabla u(x)|v_s(x) \cdot \eta(x).$$

Assim

$$\begin{aligned} [ (|\nabla u|^p + \lambda^p)\eta - p(\nabla u \cdot \eta)|\nabla u|^{p-2}\nabla u ] \cdot v_s &= (|\nabla u|^p + \lambda^p)(\eta \cdot v_s) \\ &\quad + p|\nabla u|(\eta \cdot v_s)|\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot v_s) \\ &= (|\nabla u|^p + \lambda^p - p|\nabla u||\nabla u|^{p-2}|\nabla u|)(\eta \cdot v_s) \\ &= (\lambda^p - (p-1)|\nabla u|^p)\eta \cdot v_s \end{aligned} \quad (2.58)$$

$\mathcal{H}^{N-1}$  - q.t.p. em  $\Omega \cap \partial\{u > s\}$ .

Portanto (2.57) implica

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \text{ess} \int_{\Omega \cap \partial\{u > s\}} [(\lambda^p - (p-1)|\nabla u|^p)\eta] \cdot v_s d\mathcal{H}^{N-1} = 0 \quad \forall \eta \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

■

# Capítulo 3

## Regularidade de mínimos locais

Até aqui, obtemos as seguintes informações com respeito à regularidade de um dado mínimo local  $u$  de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ :

- $u \in C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\Omega)$ , para algum  $0 < \alpha < 1$  (ver **Teorema 2.16**);
- $u \in C_{\text{loc}}^{1,\beta}(D)$ , para algum  $0 < \beta < 1$  (ver **Corolário 2.19**);
- $u$  é infinitamente diferenciável em  $\{u = 0\}^\circ$  (interior de  $\{u = 0\}$ ).

Neste Capítulo, nos empenharemos em buscar uma melhor regularidade de  $u$  sobre o conjunto  $\Gamma := \Omega \cap \partial D$ , a saber: continuidade Lipschitz local e não-degenerescência, conforme o **Teorema 0.2**.

### 3.1 Continuidade Lipschitz local

O lema a seguir é devido a Danielli e Petrosyan [11].

**Lema 3.1** *Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Então, para toda bola aberta  $B_r \subset \Omega$  de raio  $0 < r < \zeta(N, M, p)$  (nos termos do **Lema 2.13**) centrada num ponto de  $\{u = 0\}$ , tem-se*

$$\|u\|_{\infty, \frac{1}{4}B_r} \leq Cr,$$

onde  $C = C(N, p, \lambda) > 0$  é constante e usamos a notação  $sB_r = B_{sr}$ .

**Demonstração:** Suponha, por contradição, que a desigualdade acima é inválida. Para cada  $n$  natural, existem:

- Um mínimo local  $u_n \in \mathcal{K}$  de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}_n$ ;
- Uma bola aberta  $B_{r_n} \subset \Omega$  com raio  $0 < r_n < \zeta(N, M, p)$  centrada em um ponto de  $\{u = 0\}$ ;

tais que

$$\|u_n\|_{\infty, \frac{1}{4}B_{r_n}} > nr_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Pelo **Teorema 2.7** e pelo **Teorema 2.16**, temos

- $u_n \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ ;
- $u_n$  é contínua em  $\Omega$  (a menos de representante).

Também, pela **Proposição 2.12**,

$u_n$  é um mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, B_{r_n})$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(u_n, B_{r_n})$ .

Pelo **Lema 2.13**, para uma bola aberta não-vazia  $B_\tau \subset B_{r_n}$  (não necessariamente concêntrica), a qual especificaremos mais adiante, a solução  $v_\tau \in W^{1,p}(B_\tau)$  do problema

$$\begin{cases} \Delta_p v_\tau = 0 \text{ em } B_\tau \\ v_\tau - u_n \in W_0^{1,p}(B_\tau) \end{cases} \quad (3.2)$$

pertence a  $\mathcal{V}(u_n, B_\tau)$ .

Considere agora um *rescaling* de  $B_{r_n}$  para  $B_1 = B_1(0)$ . Pelo **Teorema 2.10**,

$(u_n)_{r_n}$  é um mínimo local do funcional  $J(\cdot; \lambda, B_1)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}((u_n)_{r_n}, B_1)$ .

Por (3.1) e pela continuidade de  $u_n$ ,

$$\max_{\overline{B_{1/4}}} (u_n)_{r_n} = \frac{1}{r_n} \max_{\frac{1}{4}\overline{B_{r_n}}} u_n > n,$$

onde  $B_{1/4} := \frac{1}{4}B_1$ . Daqui em diante, por simplicidade, denotamos o *rescaling*  $(u_n)_{r_n}$  por  $u_n$ . Dessa forma, escrevemos

$$\max_{B_{1/4}} u_n > n. \quad (3.3)$$

Sejam

$$d_n(x) = \text{dist}(x, B_1 \cap \{u_n = 0\}), \quad x \in \overline{B_1}$$

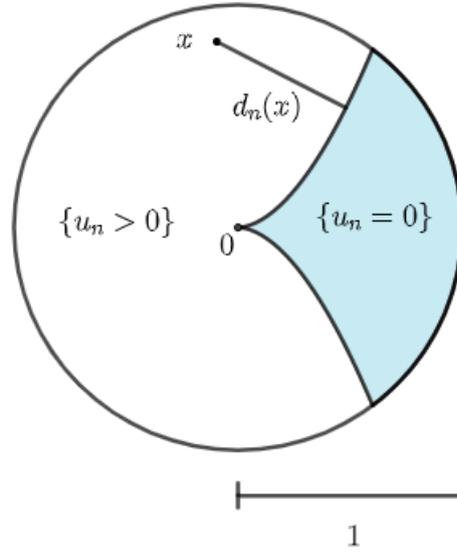


Figura 3.1: Função  $d_n$ . Feito no Geogebra.

(ver Figura 3.1) e o fechado

$$\mathcal{O}_n = \left\{ x \in \bar{B}_1; d_n(x) \leq \frac{1 - |x|}{3} \right\}$$

(ver Figura 3.2). Note que  $\bar{B}_{1/4} \subset \mathcal{O}_n$ , pois  $u_n(0) = 0$  e assim

$$d_n(x) \leq |x| \leq \frac{1}{4} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{3} \leq \frac{1 - |x|}{3} \quad \forall x \in \bar{B}_{1/4}.$$

Daí

$$\sigma_n := \sup_{\mathcal{O}_n} [(1 - |x|)u_n(x)] \geq \frac{3}{4} \max_{\bar{B}_{1/4}} u_n(x) > \frac{3}{4}n. \quad (3.4)$$

Como a função  $u_n$  é limitada em  $B_1$ , temos

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} (1 - |x|)u_n(x) = 0.$$

Uma vez que  $\mathcal{O}_n$  é compacto,  $\sigma_n$  será atingido em algum ponto  $x_n \in \mathcal{O}_n$ :

$$(1 - |x_n|)u_n(x_n) = \max_{\mathcal{O}_n} (1 - |x|)u_n(x) = \sigma_n. \quad (3.5)$$

Consequentemente, sendo  $\sigma_n > 0$ , tem-se  $|x_n| < 1$ . Observe que, de (3.4) e (3.5),

$$u_n(x_n) = \frac{\sigma_n}{1 - |x_n|} \geq \sigma_n > \frac{3}{4}n > 0. \quad (3.6)$$

Além disso, dado que  $x_n \in \mathcal{O}_n$ , teremos, pela definição de  $\mathcal{O}_n$ ,

$$\delta_n := d_n(x_n) \leq \frac{1 - |x_n|}{3}. \quad (3.7)$$

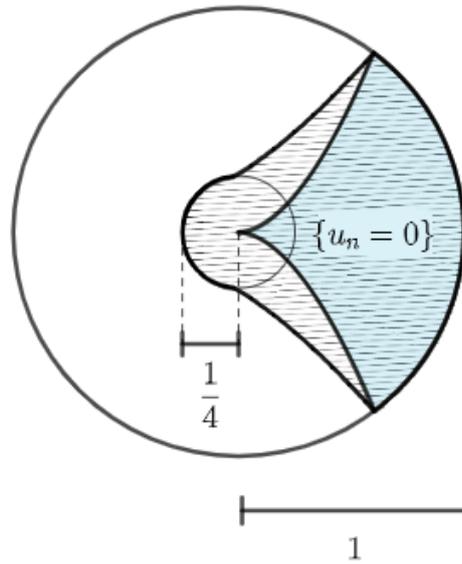


Figura 3.2: Conjunto  $\mathcal{O}_n$  (hachurado). Feito no Geogebra.

Seja  $y_n \in \overline{B}_1 \cap \partial\{u_n > 0\}$  tal que

$$|y_n - x_n| = \delta_n > 0 \quad (3.8)$$

(por (3.6)). Então (3.7) e (3.8) implicam nas inclusões a seguir.

(a)  $B_{2\delta_n}(y_n) \subset B_1$ : Com efeito, dado  $z \in B_{2\delta_n}(y_n)$ , temos

$$|z| - |x_n| - \delta_n \leq |z - x_n| - |x_n - y_n| \leq |z - y_n| < 2\delta_n,$$

donde

$$|z| - |x_n| < 3\delta_n \leq 1 - |x_n|,$$

isto é,

$$|z| < 1;$$

(b)  $B_{\delta_n/2}(y_n) \subset \mathcal{O}_n$ : Se  $z \in B_{\delta_n/2}(y_n)$ , então, de modo semelhante ao caso acima,

$$|z| - |x_n| - \delta_n \leq |z - x_n| - |x_n - y_n| \leq |z - y_n| < \frac{\delta_n}{2},$$

implicando em

$$|z - x_n| < \frac{3\delta_n}{2} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned}
 |z| &\leq \frac{3\delta_n}{2} + |x_n| \\
 &\leq \frac{1 - |x_n|}{2} + |x_n| \\
 &= \frac{1 + |x_n|}{2} \\
 &= 1 - \frac{1 - |x_n|}{2} \\
 &\leq 1 - \frac{3\delta_n}{2} \\
 &= 3\left(\frac{1}{3} - \frac{\delta_n}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{|z|}{3} < \frac{1}{3} - \frac{\delta_n}{2}$$

o que nos dá

$$\frac{\delta_n}{2} < \frac{1 - |z|}{3}.$$

Por isso, temos

$$\begin{aligned}
 d_n(z) &= \text{dist}(z, \{u_n = 0\}) \\
 &\leq |z - y_n| \\
 &< \frac{1}{2}\delta_n \\
 &< \frac{1 - |z|}{3},
 \end{aligned}$$

mostrando que  $z \in \mathcal{O}_n$ .

Fixe  $z \in B_{\delta_n/2}(y_n)$ . Temos, de (3.9) e (3.7),

$$1 - |z| \geq 1 - |x_n| - |x_n - z| > 1 - |x_n| - \frac{3}{2}\delta_n \geq \frac{1 - |x_n|}{2}.$$

Com isso, segue que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 - |z|}{1 - |x_n|}. \quad (3.10)$$

Além disso, podemos ver por (3.5) e por (b) que

$$(1 - |z|)u_n(z) \leq (1 - |x_n|)u_n(x_n).$$

Juntando essa informação a (3.10), chegamos a

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 - |z|}{1 - |x_n|} \leq \frac{u_n(x_n)}{u_n(z)},$$

donde

$$\max_{\overline{B}_{\delta_n/2}(y_n)} u_n \leq 2u_n(x_n). \quad (3.11)$$

Em seguida, como, pelo item (a),

$$B_{\delta_n}(x_n) \subset B_{2\delta_n}(y_n) \subset B_1$$

e, pela definição de  $\delta_n$ ,

$$B_{\delta_n}(x_n) \cap B_1 \cap \{u_n = 0\} = \emptyset,$$

temos que

$$B_{\delta_n}(x_n) \subset B_1 \cap \{u_n > 0\}.$$

Isso nos dá que  $u_n$  satisfaz, na forma fraca,  $\Delta_p u_n = 0$  em  $B_{\delta_n}(x_n)$  (ver **Teorema 2.18**). Tomando  $\sigma = \frac{7}{8}$  na Desigualdade de Harnack (ver **Proposição 1.23**), existe uma constante  $H = H(N, p) > 0$  tal que

$$\min_{\overline{B}_{7\delta_n/8}(x_n)} u_n \geq H \max_{\overline{B}_{7\delta_n/8}(x_n)} u_n \geq H u_n(x_n),$$

de sorte que, sendo  $\overline{B}_{7\delta_n/8}(x_n) \cap \overline{B}_{\delta_n/4}(y_n) \neq \emptyset$ , temos

$$\max_{\overline{B}_{\delta_n/4}(y_n)} u_n \geq H u_n(x_n). \quad (3.12)$$

Pela **Proposição 2.12** e pelo **Teorema 2.10**, segue que o *rescaling* de  $B_{\frac{\delta_n}{2}}(y_n)$  para  $B_1$

$$(u_n)_{\frac{\delta_n}{2}}(x) := \frac{2}{\delta_n} u_n\left(y_n + \frac{\delta_n}{2}x\right), \quad x \in B_1,$$

é um mínimo local do funcional  $J(\cdot; \lambda, B_1)$  restrito a uma vizinhança

$$\mathcal{V}\left((u_n)_{\frac{\delta_n}{2}}, B_1\right).$$

Mais uma vez pela **Proposição 2.12**, temos que  $(u_n)_{\frac{\delta_n}{2}} : B_{3/4} \rightarrow \mathbb{R}$  é um mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, B_{3/4})$  restrito a uma vizinhança

$$\mathcal{V}\left((u_n)_{\frac{\delta_n}{2}}, B_{3/4}\right).$$

Podemos esquematizar nossas ações sobre as funções  $u_n$  como segue:

$$\Omega \xrightarrow{\text{restrição}} B_{r_n} \xrightarrow{\text{rescaling}} B_1 \xrightarrow{\text{restrição}} B_{\delta_n/2}(y_n) \xrightarrow{\text{rescaling}} B_1 \xrightarrow{\text{restrição}} B_{3/4}$$

Sejam  $\Phi_1 : B_1 \rightarrow B_{r_n}$  e  $\Phi_2 : B_1 \rightarrow B_{\delta_n/2}(y_n) \subset B_1$  os difeomorfismos correspondentes aos *rescalings* que aplicamos às  $u_n$ , nos termos da **Definição 2.8**. Então ambas  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  levam bolas abertas em bolas abertas. Consequentemente, o difeomorfismo

$$\Phi_3 := \Phi_1 \circ \Phi_2 : B_1 \rightarrow \Phi_3(B_1)$$

leva bolas abertas em bolas abertas. Definindo

$$B_\tau = \Phi_3(B_{3/4}) \subset B_{r_n},$$

podemos usar (3.2) e obter a função  $v_\tau$  fracamente  $p$ -harmônica em  $B_\tau$  correspondente. Aplicando os *rescalings* que esquematizamos acima, na mesma ordem, à função  $v_\tau$ , obtemos que a solução em  $W^{1,p}(B_{3/4}) \cap C^1(B_{3/4})$  (ver **Proposição 1.25**) do problema

$$\begin{cases} \Delta_p v_n^* = 0 \text{ em } B_{3/4} \\ v_n^* - (u_n)_{\frac{\delta_n}{2}} \in W_0^{1,p}(B_{3/4}) \end{cases} \quad (3.13)$$

pertence a  $\mathcal{V}\left((u_n)_{\frac{\delta_n}{2}}, B_{3/4}\right)$ . De fato, nas demonstrações de invariância de mínimos locais por *rescalings* (ver **Teorema 2.10**) e por multiplicação por um escalar positivo (ver **Proposição 2.11**), foi mostrado que, dados  $0 < r, s < 1$ :

$$[w \in \mathcal{V}] \Rightarrow [(w)_r \in \mathcal{V}((f_0)_r, \Omega_r) \text{ e } sw \in \mathcal{V}(sf_0, \Omega)].$$

Seja  $c_n := \frac{\delta_n}{2u_n(x_n)} > 0$ . Note que, por (3.6) e (3.7),

$$c_n < \frac{2\delta_n}{3n} < 1.$$

Defina a função

$$w_n(x) = \frac{u_n\left(\frac{\delta_n}{2}x + y_n\right)}{u_n(x_n)}, \quad x \in B_1,$$

e a constante  $\lambda_n := c_n \lambda > 0$ . Então  $w_n = c_n(u_n)_{\frac{\delta_n}{2}}$  e assim, pela **Proposição 2.11**,

$w_n$  é mínimo local de  $J(\cdot; \lambda_n, B_1)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(w_n, B_1)$ .

Ademais,  $w_n(0) = 0$  e, por (3.11) e (3.12),

$$\max_{\overline{B_1}} w_n \leq 2 \quad \text{e} \quad \max_{\overline{B_{1/2}}} w_n \geq H > 0. \quad (3.14)$$

Seja  $v_n := c_n v_n^* \in W^{1,p}(B_{3/4}) \cap C^1(B_{3/4})$ . Então  $v_n$  é a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_p v_n = 0 \text{ em } B_{3/4} \\ v_n - w_n \in W_0^{1,p}(B_{3/4}). \end{cases} \quad (3.15)$$

Por (3.13), também temos  $v_n \in \mathcal{V}(w_n, B_{3/4})$ . Ademais, por (3.14), (3.15) e por um argumento análogo ao utilizado na demonstração do **Teorema 2.7**, tem-se

$$\|v_n\|_{\infty, B_{3/4}} \leq \max_{\bar{B}_{3/4}} w_n \leq 2. \quad (3.16)$$

Usando agora o **Lema 2.15**, substituindo  $M$  por 2 (ver (3.16)), obtemos uma constante  $C = C(N, p) > 0$  tal que

$$\|\nabla(w_n - v_n)\|_{p, B_{3/4}} \leq \begin{cases} C(\lambda_n)^{(p^2/2)}, & \text{se } 1 < p < 2, \\ C(\lambda_n)^p, & \text{se } p \geq 2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Por (3.6), (3.7) e pela definição de  $\lambda_n$ , temos

$$\lambda_n = \frac{\delta_n \lambda}{2u_n(x_n)} < \frac{\lambda}{n}.$$

Consequentemente, por (3.17), teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla w_n - \nabla v_n\|_{p, B_{3/4}} = 0. \quad (3.18)$$

Pelo **Teorema 2.16**, a sequência  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente  $\alpha$ -Hölder contínua em  $U := \bar{B}_{5/8} \subset B_{3/4}$ , para algum  $0 < \alpha < 1$ . Já pela **Proposição 1.25**, a sequência  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente Lipschitz em  $U$  (pela limitação uniforme de suas normas em  $W^{1,\infty}(U)$ , ver **Teorema D.4**, no **Apêndice D**). Ademais, de (3.14) e (3.16), as sequências  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são equilimitadas em  $U$ . Nestas condições, o Teorema de Arzelà-Ascoli nos permite extrair subsequências (cujos termos continuaremos a denotar por  $w_n$  e  $v_n$ ) e funções  $w_0 \in C^{0,\alpha}(U)$  e  $v_0 \in C^{0,1}(U)$  tais que

$$w_n \rightarrow w_0 \quad \text{e} \quad v_n \rightarrow v_0$$

uniformemente em  $U$ . Pela **Proposição 1.25**, temos também que a sequência  $(\nabla v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é equicontínua e equilimitada em  $U$ . Então, passando novamente a uma subsequência e reindeixando, se necessário, também podemos afirmar que

$$\nabla v_n \rightarrow \nabla v_0$$

uniformemente em  $U$ . Como  $v_0, |\nabla v_0| \in L^\infty(U)$  e  $U$  é limitado, temos  $v_0, |\nabla v_0| \in L^p(U)$ . Dessa forma, as convergências uniformes nos dão as seguintes informações:

$$v_n \rightarrow v_0 \quad \text{em } L^p(U)$$

e

$$\nabla v_n \rightarrow \nabla v_0 \quad \text{em } L^p(U, \mathbb{R}^N),$$

donde

$$v_n \rightarrow v_0 \quad \text{em } W^{1,p}(U). \quad (3.19)$$

Pela Desigualdade de Poincaré e por (3.18), temos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n - v_n\|_{W^{1,p}(U)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - v_n\|_{W^{1,p}(B_{3/4})} \\ &\leq C(N, p) \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla w_n - \nabla v_n\|_{W^{1,p}(B_{3/4})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dáí e de (3.19),

$$w_n \rightarrow v_0 \quad \text{em } W^{1,p}(U).$$

Consequentemente, usando a imersão compacta de  $W^{1,p}(U)$  em  $L^1(U)$  (Teorema de Rellich-Kondrachov, ver **Teorema D.3**, no **Apêndice D**) e a **Proposição B.4**, no **Apêndice B**, temos, a menos de subsequência, que

$$w_n \rightarrow v_0 \quad \text{q.t.p. em } U.$$

Isso, a convergência uniforme de  $w_n$  para  $w_0$  em  $U$  e a continuidade de  $w_0$  e de  $v_0$  nos informam que

$$w_0 = v_0 \quad \text{em } U.$$

Dáí

$$\Delta_p w_0 = 0 \quad \text{fracamente em } U.$$

Pela Desigualdade de Harnack, uma vez que  $w_0 \geq 0$  e  $w_0(0) = 0$ , teremos  $w_0 = 0$  em  $U$ . Ora,  $B_{1/2} \subset U$  e (3.14) implicam em

$$\max_{B_{1/2}} w_0 \geq H > 0,$$

uma contradição. ■

**Observação 3.2** Na demonstração acima, os argumentos e cálculos (e por consequência a contradição) não seriam alterados caso considerássemos no início, para cada  $n$  natural, um traço  $f_n \in W^{1,p}(\Omega)$  com  $0 \leq f_n \leq M_n$  q.t.p. em  $\Omega$ , onde  $M_n > 1$  é qualquer, no lugar de um único traço  $f_0$ . Isso significa que o valor  $M = \|f_0\|_\infty$  não é relevante para a constante  $C$ .

Mostramos agora o item (i) do **Teorema 0.2**.

**Teorema 3.3** Se  $u \in \mathcal{K}$  é um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ , então, a menos de representante, tem-se

$$u \in C_{\text{loc}}^{0,1}(\Omega).$$

Ademais, para todo  $U_0 \subset\subset \Omega$  tal que  $U_0 \cap \Gamma \neq \emptyset$ , tem-se

$$\|\nabla u\|_{\infty, U_0} \leq C, \quad (3.20)$$

onde  $C = C(N, M, p, \lambda, U_0) > 0$  é constante.

**Demonstração:** Pelo **Teorema 2.16**,  $u$  admite um representante contínuo em  $\Omega$  (o qual também denotaremos por  $u$ ) e, pelo **Teorema 2.7**,  $u \geq 0$  em  $\Omega$ . Mostraremos que  $u \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\Omega)$ .

Podemos assumir que  $U_0$  é aberto e conexo. Usando a notação

$$d(x) = d(x, \{u = 0\}), \quad x \in U_0,$$

podemos definir os conjuntos

$$U := \{x \in U_0; d(x) \leq \zeta(N, M, p)\}, \quad U_1 := U_0 \setminus U,$$

$$V := \{x \in U; 5d(x) < \text{dist}(x, \partial\Omega)\} \quad \text{e} \quad W := U \setminus V.$$

Em vista do **Corolário 2.19**, temos que

$$\|\nabla u\|_{\infty, U_1} \leq C(N, M, p, U_1).$$

Ademais, definindo

$$E := (U \setminus D) = \{x \in U; u(x) = 0\} \subset V,$$

tem-se

$$\|\nabla u\|_{\infty, E} = 0.$$

Por outro lado, para  $x \in V$  fixado com  $d_0 := d(x) > 0$ , temos

$$\overline{B}_{d_0}(x) \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Tomando  $y$  na interseção acima, a bola aberta

$$B_{4d_0}(y) \subset \Omega$$

cumpra as hipóteses do **Lema 3.1**. Logo, existe uma constante  $C = C(N, p, \lambda) > 0$  tal que

$$\|u\|_{\infty, B_{d_0}(y)} \leq Cd_0. \quad (3.21)$$

Observe que

$$B_{d_0}(x) \subset D,$$

donde, pelo **Teorema 2.18**,  $\Delta_p u = 0$  em  $B_{d_0}(x)$  fracamente, e pelo **Corolário 2.19**,  $u \in C^1(B_{d_0}(x))$ . Usando um argumento análogo ao usado em (2.35), na **Proposição 2.12**, ao trocar  $M$  por  $\|u\|_{\infty, \frac{2}{3}B_{d_0}(x)}$ , temos

$$|\nabla u(x)| \leq \max_{\frac{1}{3}B_{d_0}(x)} |\nabla u| \leq \frac{C(N, p)}{d_0} \|u\|_{\infty, \frac{2}{3}B_{d_0}(x)}. \quad (3.22)$$

Tome  $y' := \frac{x+y}{2} \in B_{d_0}(y) \cap \frac{2}{3}B_{d_0}(x)$ . Aplicando a Desigualdade de Harnack para  $u$  em  $B_{d_0}(x)$  com  $\sigma = \frac{2}{3}$ , obtemos, por (3.22),

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C(N, p)}{d_0} \|u\|_{\infty, \frac{2}{3}B_{d_0}(x)} \leq \frac{CH}{d_0} |u(y')|.$$

onde  $H = H(N, p) > 0$  é constante. Aplicando (3.21), chegamos a

$$|\nabla u(x)| \leq C(N, p, \lambda) \quad \forall x \in V. \quad (3.23)$$

Defina agora  $d_1 := \text{dist}(U_0, \partial\Omega) > 0$  e o conjunto

$$U' := \left\{ x \in \Omega; \text{dist}(x, U) < \frac{d_1}{2} \right\}.$$

Então os dados de  $U'$  são controlados pelos de  $U_0$ . Dado  $x \in W$ , temos  $\frac{d_1}{5} \leq d(x)$  e daí

$$B_{\frac{d_1}{5}}(x) \subset D \cap U'.$$

Assim, novamente pelo **Corolário 2.19** e por (2.35)

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C(N, p)}{d_1} \max_{B_{\frac{d_1}{5}}(x)} |u| \leq C(N, M, p, U_0) \quad \forall x \in W. \quad (3.24)$$

Por (3.20) e (3.24), concluímos que  $u \in W^{1,p}(U_0)$ , mostrando que  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ , donde, pelo **Teorema D.4**, no **Apêndice B**,  $u$  admite um representante localmente Lipschitz em  $\Omega$ .

■

## 3.2 Não-degenerescência

Outra propriedade relevante dos mínimos de  $J$  é a não-degenerescência na proximidade do subconjunto  $\Gamma$  da fronteira livre  $\partial D$ . Geometricamente, isto significa que, em bolas abertas centradas em  $\Gamma$ , os gráficos de mínimos locais de  $J$  localizam-se no interior de um cone com eixo vertical com abertura para cima (ao passo que ser Lipschitz significa que o gráfico encontra-se no exterior de um cone desse tipo). Tal resultado está expresso matematicamente no **Corolário 3.7**.

**Proposição 3.4** *Para todo  $U \subset\subset \Omega$ , existe uma constante  $C = C(N, M, p, \lambda, U) > 0$  tal que para qualquer mínimo local  $u$  de  $J$  (conforme a **Definição 2.2**),*

$$\frac{1}{r} \int_{\partial B} u d\mathcal{H}^{N-1} > C \Rightarrow u > 0 \text{ em } B,$$

para toda bola aberta  $B \subset U$  de raio  $r > 0$ .

**Demonstração:** Seja  $U \subset\subset \Omega$  e suponha, por contradição, que este lema seja falso. Então, dada qualquer constante  $s > 0$ , existem um mínimo local  $u = u_s \in \mathcal{K}$  de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$  e uma bola  $B \subset U$  de raio  $r > 0$  tais que

$$\frac{1}{r} \int_{\partial B} u d\mathcal{H}^{N-1} > s$$

e

$$B \cap \{u = 0\} \neq \emptyset.$$

Observe que  $\{u > 0\} \cap \partial B \neq \emptyset$  (onde lembramos que  $u$  é contínua e não-negativa, pelo **Teorema 2.16** e pelo **Teorema 2.7**) e, como  $\{u > 0\}$  é aberto, o conjunto  $B \cap \{u > 0\}$  é não-vazio. Consequentemente,

$$B \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Tome  $y$  na interseção acima. Pelo **Teorema 3.3**, existe uma constante  $C = C(N, M, p, \lambda, U) > 0$  tal que

$$\max_{\bar{B}} u = \max_{x \in \bar{B}} |u(x) - u(y)| \leq Cr.$$

Daí

$$\max_{\partial B} u \leq Cr.$$

Logo

$$\frac{1}{r} \int_{\partial B} u d\mathcal{H}^{N-1} \leq C,$$

para uma constante  $C > 0$  independente de  $u$ ,  $B$  e de  $s$ . Escolhendo  $s = C$ , chegamos a uma contradição. ■

O lema a seguir é fundamental para caracterizar a não-degenerescência do mínimo  $u$ .

**Lema 3.5** *Para todos  $\gamma > 0$  e  $0 < \kappa < 1$ , existe uma constante  $c = c(N, p, \lambda, \gamma, \kappa)$  com  $0 < c < 1$  tal que, para cada mínimo local  $u \in \mathcal{K}$  de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$  e, para toda bola aberta  $B_r \subset \Omega$  de raio  $r > 0$  suficientemente pequeno,*

$$\frac{1}{r} \left( \int_{B_r} u^\gamma dx \right)^{1/\gamma} < c \Rightarrow u = 0 \text{ em } \kappa B_r.$$

**Demonstração:** Sejam  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$  e  $B_r \subset \Omega$  com

$$0 < r < \zeta^*$$

e

$$\frac{1}{r} \left( \int_{B_r} u^\gamma dx \right)^{1/\gamma} < c,$$

onde  $\zeta^* = \zeta^*(N, M, p, \lambda, \gamma, \kappa) > 0$  e  $c = c(N, p, \lambda, \gamma, \kappa) \in (0, 1)$  serão estabelecidos no decorrer da demonstração. Precisamos mostrar que

$$u = 0 \quad \text{em } \kappa B_r.$$

Como o caso  $u = 0$  em  $B_r$  é trivial, assumimos que  $u \not\equiv 0$  em  $B_r$ . Tome  $\tilde{u} = (u)_r \in \mathcal{K}((u)_r, B_1)$  (o *rescaling* de  $B_r$  para  $B_1$ ). Então  $\tilde{u} \not\equiv 0$  em  $B_1$  e, além disso, pelo **Teorema 2.10**, podemos afirmar que  $\tilde{u}$  é um mínimo local de  $J(\cdot, \lambda, B_1)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(\tilde{u}, B_1)$ .

Seja

$$m_r := \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \max_{\bar{B}_{\sqrt{\kappa}}} \tilde{u} > 0.$$

Utilizando o Princípio do Máximo para  $\sigma = \sqrt{\kappa}$  (ver **Proposição 1.22**) e a continuidade de  $u$ , temos

$$m_r = \frac{1}{r \sqrt{\kappa}} \max_{\partial B_{r\sqrt{\kappa}}} u \leq \frac{C(N, p, \gamma, \kappa)}{r} \left( \int_{B_r} u^\gamma dx \right)^{1/\gamma} < C(N, p, \gamma, \kappa)c, \quad (3.25)$$

onde podemos assumir que  $C(N, p, \gamma, \kappa) > 1$ .

Considere uma função  $v_{s'}(x) = e^{-s'|x|^2}$ , assim como na **Proposição 1.30**, no **Capítulo 1**, com  $s' = s'(N, p, \kappa) > 0$  tal que  $v_{s'}$  seja uma solução de

$$-\Delta_p v_{s'} < 0 \quad \text{em } B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa.$$

Sendo  $v_{s'}$  uma função radial e  $v_{s'}(0) = 1$ , podemos escolher uma constante  $C_1 = C_1(s', \kappa) < 0$  tal que a função  $\tilde{v} \in W^{1,p}(B_{\sqrt{\kappa}})$  dada por

$$\tilde{v}(x) := \begin{cases} C_1 m_r \sqrt{\kappa} (e^{-s'|x|^2} - e^{-s'\kappa^2}) & \text{em } B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa, \\ 0 & \text{em } B_\kappa, \end{cases}$$

seja uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p \tilde{v} > 0 & \text{em } B_{\sqrt{\kappa}} \setminus \overline{B}_\kappa, \\ \tilde{v} = \max_{\overline{B}_{\sqrt{\kappa}}} \tilde{u} & \text{sobre } \partial B_{\sqrt{\kappa}}, \\ \tilde{v} = 0 & \text{em } \overline{B}_\kappa. \end{cases} \quad (3.26)$$

Com isso,  $\tilde{w} := \min(\tilde{u}, \tilde{v}) \in W^{1,p}(B_{\sqrt{\kappa}})$  é uma função admissível (i.e.  $\tilde{w} \in \mathcal{K}(\tilde{u}, B_{\sqrt{\kappa}})$ ).

Resta mostrar que

$$\tilde{w} \in \mathcal{V}(\tilde{u}, B_{\sqrt{\kappa}}).$$

Para tal, tome as funções  $v, w \in W^{1,p}(\sqrt{\kappa}B_r)$  correspondentes às funções  $\tilde{v}, \tilde{w} \in W^{1,p}(B_{\sqrt{\kappa}})$ , respectivamente, pelo *rescaling* de  $B_r$  para  $B_1$ . Seja  $x_0$  o centro de  $B_r$ . Então  $w = \min(u, v)$  com

$$u(x) = r\tilde{u}\left(\frac{x-x_0}{r}\right) \quad \forall x \in \sqrt{\kappa}B_r$$

e

$$v(x) = r\tilde{v}\left(\frac{x-x_0}{r}\right) \quad \forall x \in \sqrt{\kappa}B_r,$$

donde

$$|\nabla u(x)| = \left| \nabla \tilde{u}\left(\frac{x-x_0}{r}\right) \right| \quad \forall x \in \sqrt{\kappa}B_r,$$

e, por (3.25), dado  $x \in \sqrt{\kappa}B_r \setminus \kappa B_r$ ,

$$\begin{aligned} |\nabla v(x)| &= \left| \nabla \tilde{v}\left(\frac{x-x_0}{r}\right) \right| \\ &= 2s'|C_1|m_r \sqrt{\kappa} e^{(-s'|x-x_0|^2/r^2)} \left| \frac{x-x_0}{r} \right| \\ &\leq 2s'|C_1|m_r \kappa \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\leq 2s'|C_1|C(N, p, \gamma, \kappa)c\kappa. \quad (3.28)$$

Assumindo que  $2B_r \subset \Omega$  e  $r < 1$ , podemos usar a Fórmula de Mudança de Variáveis e

a Desigualdade de Caccioppoli para calcular

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{\kappa}B_r} |\nabla u|^p dx &= \int_{(x_0+rB_{\sqrt{\kappa}})} \left| \nabla \tilde{u} \left( \frac{x-x_0}{r} \right) \right|^p dx \\ &= \int_{B_\kappa} |\nabla \tilde{u}|^p r^N dy \\ &\leq 2^N p^p M^p \omega_N (\sqrt{\kappa})^{(N/2)} r^{(N/2)} r^N. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla w\|_{p, \sqrt{\kappa}B_r} + \|\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{w>0\}}\|_{1, \sqrt{\kappa}B_r} &\leq \|\nabla u\|_{p, \sqrt{\kappa}B_r} + \|\nabla w\|_{p, \sqrt{\kappa}B_r} + |\sqrt{\kappa}B_r| \\ &\leq 2^{(N/p)} p M (\omega_N)^{1/p} (\sqrt{\kappa})^{[N/(2p)]} r^{[3N/(2p)]} \\ &\quad + (\sqrt{\kappa})^N \omega_N r^N + \|\nabla w\|_{p, \sqrt{\kappa}B_r}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Também temos

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{\kappa}B_r} |\nabla w|^p dx &= \int_{\sqrt{\kappa}B_r \cap \{u \leq v\}} |\nabla u|^p dx + \int_{\sqrt{\kappa}B_r \cap \{u > v\}} |\nabla v|^p dx \\ &\leq \int_{\sqrt{\kappa}B_r} |\nabla u|^p dx + \int_{\sqrt{\kappa}B_r} |\nabla v|^p dx \\ &\leq 2^N p^p M^p \omega_N (\sqrt{\kappa})^{(N/2)} r^{(3N/2)} + \int_{\sqrt{\kappa}B_r} |\nabla v|^p dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

e, por (3.28),

$$\int_{\sqrt{\kappa}B_r} |\nabla v|^p dx \leq (2s' |C_1| C c \kappa)^p (r\sqrt{\kappa})^N \omega_N. \quad (3.31)$$

Combinando as desigualdades (3.29)-(3.31) obteremos, uma vez que  $c$  esteja estabelecido, que existe  $\zeta^* = \zeta^*(N, M, p, \lambda, \gamma, \kappa) \in (0, 1)$  tal que  $0 < r < \zeta^*$  e  $2B \subset \Omega$  implicam

$$\|\nabla u - \nabla w\|_{p, \sqrt{\kappa}B_r} + \|\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{w>0\}}\|_{1, \sqrt{\kappa}B_r} < \varepsilon,$$

isto é,  $w \in \mathcal{V}(u, \sqrt{\kappa}B_r)$ . Logo  $\tilde{w} \in \mathcal{V}(u, B_{\sqrt{\kappa}})$ . Dessa forma,

$$J(\tilde{u}; \lambda, B_1) \leq J(\tilde{w}; \lambda, B_1),$$

ou, equivalentemente, sendo  $\tilde{w} = 0$  em  $B_\kappa$ ,

$$\int_{B_{\sqrt{\kappa}}} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx \leq \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} |\nabla \tilde{w}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{w}>0\}} dx.$$

Daí, sendo  $B_\kappa \subset B_{\sqrt{\kappa}}$  e  $\{\tilde{w} > 0\} \subset \{\tilde{u} > 0\}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{B_\kappa} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx &\leq \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} |\nabla \tilde{w}|^p - |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p (\chi_{\{\tilde{w}>0\}} - \chi_{\{\tilde{u}>0\}}) dx \\ &\leq \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} |\nabla \tilde{w}|^p - |\nabla \tilde{u}|^p dx. \end{aligned}$$

Se  $F(\eta) = |\eta|^p$  para  $\eta \in \mathbb{R}^N$ , então  $F$  é convexa e daí

$$F(\eta) - F(\xi) \leq \nabla F(\eta) \cdot (\eta - \xi) \quad \forall \eta, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{B_\kappa} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u} > 0\}} dx &\leq p \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} |\nabla \tilde{w}|^{p-2} \nabla \tilde{w} \cdot \nabla (\tilde{w} - \tilde{u}) dx \\ &= p \int_{(B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa) \cap \{\tilde{u} > \tilde{v}\}} |\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla (\tilde{v} - \tilde{u}) dx \\ &= -p \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} |\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla (\tilde{u} - \tilde{v})^+ dx. \end{aligned}$$

Lembrando que  $-\Delta_p \tilde{v} > 0$  em  $B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa$  (por (3.26)), segue da **Proposição A.4**, no **Apêndice A**, e do Teorema de Gauss-Green (ver **Teorema B.14**, no **Apêndice B**), que

$$\begin{aligned} \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} |\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla (\tilde{u} - \tilde{v})^+ dx &= \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} \operatorname{div} [(\tilde{u} - \tilde{v})^+ |\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v}] dx \\ &\quad - \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} (\tilde{u} - \tilde{v})^+ \operatorname{div} (|\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v}) dx \\ &= \int_{\partial(B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa)} (\tilde{u} - \tilde{v})^+ |\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v} \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\quad - \int_{B_{\sqrt{\kappa}} \setminus B_\kappa} (\tilde{u} - \tilde{v})^+ \Delta_p \tilde{v} dx \\ &\geq - \int_{\partial B_\kappa} (\tilde{u} - \tilde{v})^+ |\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v} \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= - \int_{\partial B_\kappa} \tilde{u} |\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v} \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

onde  $\nu$  sempre denota o vetor unitário normal externo ao domínio de integração correspondente. Logo

$$\int_{B_\kappa} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u} > 0\}} dx \leq p \int_{\partial B_\kappa} \tilde{u} |\nabla \tilde{v}|^{p-2} \nabla \tilde{v} \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Por (3.27), também temos

$$\max_{\partial B_\kappa} |\nabla \tilde{v}| = \max_{\partial B_{\kappa r}} |\nabla v| \leq C_2 m_r,$$

para uma constante positiva  $C_2 = C_2(C_1, s', \kappa) > 0$ . Disso, chegamos a

$$\int_{B_\kappa} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u} > 0\}} dx \leq p(C_2)^{p-1} (m_r)^{p-1} \int_{\partial B_\kappa} \tilde{u} d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (3.32)$$

Por outro lado, pelo Teorema do Traço (ver **Teorema D.1**, no **Apêndice D**), existe uma constante  $C_3 = C_3(N, \kappa) > 0$  tal que

$$\int_{\partial B_\kappa} \tilde{u} d\mathcal{H}^{N-1} \leq C_3 \left( \int_{B_\kappa} \tilde{u} dx + \int_{B_\kappa} |\nabla \tilde{u}| dx \right).$$

Observe que

$$\int_{B_k} \tilde{u} dx = \frac{\sqrt{k}}{\lambda^p} \int_{B_k} \frac{\lambda^p}{\sqrt{k}} \tilde{u} \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx \leq \frac{\sqrt{k}}{\lambda^p} \int_{B_k} m_r \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx$$

e, pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \int_{B_k} |\nabla \tilde{u}| dx &\leq \int_{B_k} \frac{|\nabla \tilde{u}|^p}{p} + \frac{\chi_{\{\tilde{u}>0\}}}{p/(p-1)} dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{B_k} |\nabla \tilde{u}|^p dx + \frac{p-1}{p\lambda^p} \int_{B_k} \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx. \end{aligned}$$

Desse modo, denotando

$$C_4 := \max \left\{ \frac{1}{p}, \frac{p-1}{p\lambda^p} \right\} \quad \text{e} \quad C_5 := \max \left\{ \frac{C_3 \sqrt{k}}{\lambda^p}, C_3 C_4 \right\},$$

calculamos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_k} \tilde{u} d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \frac{C_3 \sqrt{k}}{\lambda^p} \int_{B_k} m_r \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx + C_3 C_4 \left( \int_{B_k} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx \right) \\ &\leq C_5 \left( \int_{B_k} m_r \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx + \int_{B_k} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx \right) \\ &= C_5 \left( \int_{B_k} (1 + m_r) \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx + \int_{B_k} |\nabla \tilde{u}|^p dx \right) \\ &\leq C_5 (1 + m_r) \int_{B_k} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u}>0\}} dx. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Por (3.32) e (3.33), temos

$$J(\tilde{u}; \lambda, B_k) \leq p(C_2)^{p-1} (m_r)^{p-1} C_5 (1 + m_r) J(\tilde{u}; \lambda, B_k). \tag{3.34}$$

Escolhendo

$$c(N, p, \lambda, \gamma, \kappa) := \min \left\{ \frac{(2pC_5)^{[-1/(p-1)]}}{CC_2}, \frac{1}{C} \right\} \in (0, 1),$$

vê-se, por (3.25), que

$$m_r < Cc \leq 1 \tag{3.35}$$

e

$$m_r < Cc \leq \frac{(2pC_5)^{[-1/(p-1)]}}{C_2}.$$

Dáí e de (3.35),

$$\begin{aligned} p(C_2)^{p-1} (m_r)^{p-1} C_5 (1 + m_r) &< 2pC_5 (C_2)^{p-1} \left( \frac{(2pC_5)^{[-1/(p-1)]}}{C_2} \right)^{p-1} \\ &= 2pC_5 (C_2)^{p-1} \frac{1}{2pC_5 (C_2)^{p-1}} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Supondo agora, por contradição, que  $J(\tilde{u}; \lambda, B_\kappa) > 0$ , segue, por (3.34) e (3.36), que

$$J(\tilde{u}; \lambda, B_\kappa) < J(\tilde{u}; \lambda, B_\kappa),$$

um absurdo. Logo

$$J(\tilde{u}; \lambda, B_\kappa) = \int_{B_\kappa} |\nabla \tilde{u}|^p + \lambda^p \chi_{\{\tilde{u} > 0\}} dx = 0.$$

Portanto  $\tilde{u} = 0$  em  $B_\kappa$ , o que nos dá

$$u = 0 \quad \text{em } \kappa B_r.$$

■

**Corolário 3.6** *Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Dados  $U \subset\subset \Omega$  com  $U \cap \Gamma \neq \emptyset$ ,  $y \in U \cap \Gamma$ ,  $0 < r < \zeta^*(N, M, p, \lambda, 1, \frac{1}{2})$  (ver **Lema 3.5**) e  $B_r(y) \subset \Omega$ , tem-se*

$$\sup_{B_r(y)} u \geq cr,$$

onde  $c > 0$  é a constante do **Lema 3.5** correspondente a  $\kappa = \frac{1}{2}$  e  $\gamma = 1$ .

Os itens (ii) e (iii) do **Teorema 0.2** serão demonstrados a seguir.

**Corolário 3.7** *Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Dado  $U \subset\subset \Omega$  com  $U \cap \Gamma \neq \emptyset$ , existem constantes  $c = c(N, p, \lambda) > 0$  e  $C = C(N, M, p, \lambda, U) > 0$  tais que se uma bola  $B_r(x) \subset U \cap \{u > 0\}$  toca  $\Gamma$  com  $0 < r < \zeta^*(N, M, p, \lambda, 1, \frac{1}{2})$ , então*

$$cr \leq u(x) \leq Cr.$$

**Demonstração:** Segue do **Teorema 3.3** que, para  $y \in \partial B_r(x) \cap \Gamma$ ,

$$u(x) = |u(x) - u(y)| \leq C(N, M, p, \lambda, U)|x - y| = C(N, M, p, \lambda, U)r.$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Harnack e pelo **Lema 3.5** para  $\kappa = \frac{1}{2}$  e  $\gamma = 1$ ,

$$u(x) \geq H(N, p) \sup_{B_{r/2}} u(x) \geq H(N, p)c(N, p, \lambda)r,$$

pois  $B_{r/2}(x) \cap \{u = 0\} = \emptyset$ . ■

O Teorema a seguir nos fornece um controle de densidade sobre  $\Gamma$  dos conjuntos de positividade de mínimos locais de  $J$ . Precisamos dele para a demonstração do **Teorema 0.3**.

**Teorema 3.8** Dado  $U \subset\subset \Omega$  com  $U \cap \Gamma \neq \emptyset$ , existe uma constante  $c = c(N, M, p, \lambda, U)$  com  $0 < c < 1$  tal que para todo mínimo local  $u \in \mathcal{K}$  de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$  e para toda bola  $B_r(x) \subset U$  com  $x \in \Gamma$  e raio

$$0 < r < \zeta_1 = \zeta_1(N, M, p, \lambda) := \min \left\{ \zeta(N, M, p), \zeta^* \left( N, M, p, \lambda, 1, \frac{1}{2} \right) \right\},$$

verifica-se

$$c < \frac{|B_r(x) \cap \{u > 0\}|}{|B_r(x)|} < 1 - c.$$

**Demonstração:** Seja  $U \subset\subset \Omega$  conexo. Aplicando **Corolário 3.6** para  $\frac{r}{2}$ , obtemos  $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$  tal que

$$u(y) > \frac{cr}{3} > 0,$$

onde  $c = c(N, p, \lambda) \in (0, 1)$ . Pela continuidade Lipschitz de  $u$  em  $U$  (ver **Teorema 3.3**), existe  $h = h(N, M, p, \lambda, U) > 1$  de sorte que

$$|u(z) - u(y)| \leq h|z - y| \quad \forall z \in U.$$

Escolhendo  $\kappa = \frac{c}{3h} \in (0, 1)$ , vê-se que

$$B_{\kappa r}(y) \subset B_r(x)$$

e, dado  $z \in B_{\kappa r}(y)$ ,

$$u(z) \geq u(y) - |u(z) - u(y)| > \frac{cr}{3} - h\kappa r = 0.$$

Daí

$$\frac{|B_r(x) \cap \{u > 0\}|}{|B_r(x)|} \geq \frac{|B_{\kappa r}(y)|}{|B_r(x)|} = \kappa^N \in (0, 1) \quad \forall 0 < r < \zeta_1. \quad (3.37)$$

Suponha, por contradição, que a segunda desigualdade do Teorema (a estimativa por cima) é falsa. Então, de modo semelhante à demonstração do **Lema 3.1**, existem, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

- um mínimo local  $u_n \in \mathcal{K}$  de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}_n$ ;
- uma bola aberta  $B_{r_n} \subset U$  centrada em um ponto de  $\Omega \cap \partial\{u_n > 0\}$  e com raio  $r_n \in (0, \zeta_1)$ ;

tais que, pela **Proposição 2.12**,  $u_n \in \mathcal{K}(u_n, B_{r_n})$  é mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, B_{r_n})$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(u_n, B_{r_n})$  e, pelo **Lema 2.13**, sendo  $\zeta_1 \leq \zeta$ , a solução  $v_n \in W^{1,p}(B_{r_n})$  do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_p v_n = 0 \text{ em } B_{r_n} \\ v_n - u_n = 0 \text{ em } \partial B_{r_n} \end{cases}$$

pertence a  $\mathcal{V}(u_n, B_{r_n})$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_{r_n} \cap \{u_n > 0\}|}{|B_{r_n}|} = 1. \quad (3.38)$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , aplicamos *rescalings* de  $B_{r_n}$  para  $B_1 = B_1(0)$  às funções  $u_n$  e  $v_n$ , obtendo novas funções  $\tilde{u}_n$  e  $\tilde{v}_n$ , respectivamente, que satisfazem

$$\tilde{u}_n(0) = 0 \quad (3.39)$$

e

$$\begin{cases} \Delta_p \tilde{v}_n = 0 \text{ em } B_1 \\ \tilde{v}_n - \tilde{u}_n = 0 \text{ em } \partial B_1 \\ \tilde{v}_n \in \mathcal{V}(\tilde{u}_n, B_1). \end{cases}$$

Sejam  $\Phi_{r_n}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , os difeomorfismos associados aos *rescalings* acima. Dado  $x \in B_1$ , temos

$$\tilde{u}_n(x) > 0 \iff u_n \circ (\Phi_{r_n})^{-1}(x) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de sorte que

$$\chi_{\{\tilde{u}_n > 0\}} = \chi_{\{u_n > 0\}} \circ (\Phi_{r_n})^{-1} \quad \text{em } B_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela Fórmula de Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned} |B_1 \cap \{\tilde{u}_n > 0\}| &= \int_{B_1} \chi_{\{\tilde{u}_n > 0\}} dx \\ &= \int_{\Phi_{r_n}(B_{r_n})} \chi_{\{u_n > 0\}} \circ (\Phi_{r_n})^{-1} dx \\ &= \int_{B_{r_n}} \chi_{\{u_n > 0\}} \frac{1}{r_n^N} dy \\ &= \frac{|B_{r_n} \cap \{u_n > 0\}|}{r_n^N} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_1 \cap \{\tilde{u}_n > 0\}|}{|B_1|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_{r_n} \cap \{u_n > 0\}|}{r_n^N |B_1|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_{r_n} \cap \{u_n > 0\}|}{|B_{r_n}|} = 1,$$

por (3.38).

Denote

$$m_n := |B_1 \cap \{\tilde{u}_n = 0\}|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por consequência do que foi discutido acima, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 0.$$

De (2.31), (2.33) (ver a demonstração do **Lema 2.15**) e **Teorema 3.3** (para a limitação do gradiente), obtemos

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} |\nabla \tilde{v}_n - \nabla \tilde{u}_n|^p dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C(N, M, p, \lambda, U) m_n = 0. \quad (3.40)$$

O **Teorema 3.3** garante que a sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente Lipschitz em  $U$  com uma constante de Lipschitz  $C = C(N, M, p, \lambda, U) > 0$ ). Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $y, z \in B_1$ ,

$$|\tilde{u}_n(y) - \tilde{u}_n(z)| = \frac{1}{r_n} |u_n(r_n y + x_n) - u_n(r_n z + x_n)| \leq \frac{C r_n |y - z|}{r_n} = C |y - z|,$$

donde a sequência de *rescalings*  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente Lipschitz em  $B_1$ . Como  $\tilde{u}_n(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é equilimitada em  $B_1$ . Pela **Proposição 1.25**, vê-se que as sequências

$$(\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad (|\nabla \tilde{v}_n|)_{n \in \mathbb{N}}$$

são equilimitadas e equicontínuas em  $\overline{B}_{1/2}$ . Dessa forma, podemos afirmar, via Teorema de Arzelà-Ascoli, que existem funções  $\tilde{u}_0 \in C^{0,1}(\overline{B}_{1/2})$  e  $\tilde{v}_0 \in C^1(\overline{B}_{1/2})$  tais que

$$\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0, \quad \tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_0 \quad (3.41)$$

e

$$\nabla \tilde{v}_n \rightarrow \nabla \tilde{v}_0 \quad (3.42)$$

uniformemente em  $\overline{B}_{1/2}$ , a menos de uma subsequência. Sendo

$$\Delta_p \tilde{v}_n = 0 \quad \text{em } B_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

fracamente e  $B_{1/2} \subset\subset B_1$ , temos

$$\Delta_p \tilde{v}_0 = 0 \quad \text{em } B_{1/2} \quad (3.43)$$

fracamente. Logo  $\tilde{v}_0 \in C^1(\overline{B}_{1/2})$ .

Pela Desigualdade de Poincaré e por (3.40),

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_n - \tilde{u}_n\|_{W^{1,p}(B_{1/2})} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_n - \tilde{u}_n\|_{W^{1,p}(B_1)} \\ &\leq C(N, p) \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \tilde{v}_n - \nabla \tilde{u}_n\|_{p, B_1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dai

$$(\tilde{v}_n - \tilde{u}_n) \rightarrow 0 \quad \text{em } W^{1,p}(B_{1/2}). \quad (3.44)$$

Por (3.41) e (3.42),

$$\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_0 \quad \text{em } W^{1,p}(B_{1/2}). \quad (3.45)$$

Consequentemente, por (3.44) e (3.45),

$$\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{v}_0 \quad \text{em } W^{1,p}(B_{1/2}).$$

Uma vez que  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$  em  $L^p(B_{1/2})$  (por (3.41)), segue do Teorema de Rellich-Kondrachov que, a menos de subsequência,

$$\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{v}_0 \quad \text{em } L^p(B_{1/2}),$$

Logo

$$\tilde{u}_0 = \tilde{v}_0 \quad \text{em } B_{1/2},$$

donde

$$\Delta_p \tilde{u}_0 = 0 \quad \text{em } B_{1/2}$$

fracamente. Como  $\tilde{u}_n(0) = 0$  (por (3.39)) e  $\tilde{u}_n \geq 0$  em  $B_{1/2} \forall n \in \mathbb{N}$ , temos  $\tilde{u}_0(0) = 0$  e  $\tilde{u}_0 \geq 0$  em  $B_{1/2}$ . Por estes fatos e pela Desigualdade de Harnack para funções fracamente  $p$ -harmônicas,

$$\tilde{u}_0 = 0 \quad \text{em } B_{1/2}. \quad (3.46)$$

Por outro lado, o **Corolário 3.6** nos dá

$$\sup_{B_{1/2}} \tilde{u}_n \geq \frac{c(N, p, \lambda)}{2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$\sup_{B_{1/2}} \tilde{u}_0 \geq \frac{c(N, p, \lambda)}{2} > 0,$$

o que contradiz (3.46).

Portanto existe  $s = s(N, M, p, \lambda, U) > 0$  tal que, dados  $0 < r < \zeta_1$  e um mínimo local  $u \in \mathcal{K}$  de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ , tem-se, para  $\kappa = \kappa(N, M, p, \lambda, U) \in (0, 1)$  como em (3.37),

$$\kappa^N < \frac{|B_r(x) \cap \{u > 0\}|}{|B_r(x)|} < 1 - s,$$

para toda bola  $B_r(x) \subset U$  com  $x \in U \cap \Gamma$ . Escolhendo  $c := \min\{\kappa^N, s\} \in (0, 1)$ , concluímos a demonstração. ■

**Corolário 3.9** *Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Então o conjunto  $\Gamma = \Omega \cap \partial D$  tem medida de Lebesgue  $N$ -dimensional nula.*

**Demonstração:** Suponha, por contradição, que  $|\Gamma| > 0$ . Então existe um aberto  $U \subset\subset \Omega$  com  $|U \cap \Gamma| > 0$ . Pelo **Teorema 3.8**, existe uma constante  $c \in (0, 1)$  tal que, dados  $x \in \Gamma$  e  $0 < r < \zeta_1$  com  $B_r(x) \subset U$  temos,

$$c < \frac{|B_r(x) \cap D|}{|B_r(x)|} = 1 - \frac{|B_r(x) \cap \{u = 0\}|}{|B_r(x)|},$$

donde

$$\frac{|B_r(x) \cap \Gamma|}{|B_r(x)|} \leq \frac{|B_r(x) \cap \{u = 0\}|}{|B_r(x)|} < 1 - c.$$

Passando ao limite superior de  $r \rightarrow 0^+$  obtemos, para cada  $x \in U \cap \Gamma$ ,

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{|B_r(x) \cap \Gamma|}{|B_r(x)|} \leq 1 - c < 1,$$

contradizendo o **Teorema B.7**, no **Apêndice B**. ■

**Corolário 3.10**  $\Gamma \subset \partial_* D$  (ver **Definição B.17**, no **Apêndice B**).

# Capítulo 4

## Perímetro localmente finito do conjunto de positividade

Para cumprir o propósito que nos propomos, ainda falta demonstrar o **Teorema 0.3**. Como antes,  $\varepsilon \in (0, 1)$  e  $M > 1$  são fixados e, quando conveniente, denotamos o conjunto de positividade de um mínimo local por  $D$ . Recordamos que  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  e  $\Gamma = \Omega \cap \partial D$ .

### 4.1 A medida $\Lambda = \Delta_p u$

Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Então  $D$  é aberto e, pelo **Teorema 2.6**,  $u$  é fracamente  $p$ -subharmônica em  $\Omega$ , ou seja,

$$-\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Defina  $L_u : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  pondo

$$\langle L_u, \varphi \rangle := -\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.1)$$

Observe que  $L_u$  é um funcional linear e não-negativo, de modo que podemos aplicar o Teorema de Representação de Riesz (ver **Teorema B.8**, no **Apêndice B**), para encontrar uma medida exterior de Radon  $\Lambda$  em  $\mathbb{R}^N$  (conhecida como medida de variação de  $L_u$ ) dada por

$$\Lambda(V) := \sup \{ \langle L_u, \varphi \rangle; \varphi \in C_0^\infty(\Omega), |\varphi| \leq 1 \text{ e } \text{supp } \varphi \subset V \},$$

onde  $V \subset \Omega$  é um aberto qualquer, tal que

$$\langle L_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi d\Lambda \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tendo isso em vista, identificamos

$$\Lambda = \Delta_p u$$

quando nos referirmos ao  $p$ -Laplaciano como uma medida. Se  $V \subset \Omega \setminus \Gamma$  é aberto e  $\varphi \in C_0^\infty(V)$  é tal que  $|\varphi| \leq 1$ , então  $\varphi|_D \in C_0^\infty(D)$  e assim

$$\begin{aligned} \langle L_u, \varphi \rangle &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\ &= - \int_D |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi|_D dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\Lambda(V) = 0 \quad \forall V \subset \Omega \setminus \Gamma.$$

Isso significa que  $\Delta_p u$  é uma medida com suporte em  $\Gamma$ .

O lema a seguir contém informações geométricas úteis para outros resultados neste Capítulo. A ideia é obter propriedades dos *rescalings* de mínimos locais de  $J$  em bolas abertas, mas o resultado também pode ser aplicado a uma sequência *blow-up*.

**Lema 4.1** *Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in W^{1,p}(B_1)$  uma sequência de funções não-negativas e equilimitadas em  $L^\infty(B_1)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $u_n \in \mathcal{K}(f_n, B_1)$  um mínimo local de  $J(\cdot; \lambda, B_1)$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}(u_n, B_1)$ . Assuma que existe  $u_0 \in C^{0,1}(\bar{B}_1)$  tal que*

$$u_n \rightarrow u_0 \quad \text{uniformemente em } \bar{B}_1.$$

Então:

- (i)  $\partial\{u_n > 0\} \rightarrow \partial\{u_0 > 0\}$  em distância de Hausdorff (ver o **Apêndice E**);
- (ii)  $\chi_{\{u_n > 0\}} \rightarrow \chi_{\{u_0 > 0\}}$  em  $L^1(B_1)$ ;
- (iii) Se  $0 \in \partial\{u_n > 0\} \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $0 \in \partial\{u_0 > 0\}$ .

**Demonstração:** (i): Utilizaremos a caracterização de convergência em distância de Hausdorff presente na **Proposição E.4**, no **Apêndice E**. Note que  $\partial\{u_0 > 0\}$  e  $\partial\{u_n > 0\}$  são subconjuntos fechados de  $\bar{B}_1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de modo que são conjuntos compactos uniformemente limitados. Além disso, a convergência uniforme

$$u_n \rightarrow u_0$$

em  $\overline{B}_1$  implica que

$$u_0 \geq 0 \quad \text{em } \overline{B}_1.$$

Seja  $B_r \subset B_1$  uma bola aberta não-vazia (não necessariamente centrada na origem). Suponha que  $B_r$  não intersecta  $\partial\{u_0 > 0\}$ . Se  $u_0 > 0$  em  $B_r$ , então, da convergência uniforme  $u_n \rightarrow u_0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$u_n > \frac{1}{2} \min_{\overline{B}_{r/2}} u_0 > 0 \quad \text{em } B_{r/2} \quad \forall n \geq n_1. \quad (4.2)$$

Se, por outro lado,  $u_0 = 0$  em  $B_r$ , então existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que

$$u_n < cr \quad \text{em } B_r \quad \forall n \geq n_2,$$

onde  $c = c(N, p, \lambda) > 0$  é a constante do **Lema 3.5** para  $\gamma = 1$  e  $\kappa = \frac{1}{2}$ , o que implica

$$\frac{1}{r} \int_{B_r} u_n dx < \frac{cr}{r} = c \quad \forall n \geq n_2.$$

Pelo **Lema 3.5**, temos

$$u_n = 0 \quad \text{em } B_{r/2} \quad \forall n \geq n_2 \quad (4.3)$$

e daí

$$B_{r/2} \cap \partial\{u_n > 0\} = \emptyset \quad \forall n \geq n_2.$$

Fazendo  $n'' = n_1$  ou  $n'' = n_2$ , conforme o caso concreto, obtemos (E.2), da **Proposição E.4**.

Assuma agora que existe uma subsequência  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$B_r \cap \partial\{u_{n_k} > 0\} = \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Então, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n_k} > 0 \quad \text{em } B_r$$

ou

$$u_{n_k} = 0 \quad \text{em } B_r,$$

o que implica, na forma fraca (ver **Teorema 2.18**), que

$$\Delta_p u_{n_k} = 0 \quad \text{em } B_r \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Observe que, dado  $\sigma \in (0, 1)$ , as sequências  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(\nabla u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  são equilimitadas e equicontínuas  $B_{\sigma r}$  (ver **Corolário 2.19** e **Teorema 2.16**). Aplicando o Teorema de Arzelà-Ascoli,

segue que podemos passar a uma subsequência e reindexar, se necessário, e obter uma função  $w_\sigma \in C^{1,\alpha}(B_{\sigma r})$  tal que

$$u_{n_k} \rightarrow w_\sigma$$

e

$$\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla w_\sigma$$

uniformemente em  $B_{\sigma r}$ . Isso implica em  $u_0 = w_\sigma$  em  $B_{\sigma r}$  para cada  $\sigma \in (0, 1)$ . Em particular,  $u_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(B_r)$  e

$$\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u_0 \tag{4.4}$$

uniformemente em  $B_{\sigma r}$ . Consequentemente temos, novamente na forma fraca,

$$\Delta_p u_0 = 0 \quad \text{em } B_{\sigma r} \quad \forall \sigma \in (0, 1),$$

donde

$$\Delta_p u_0 = 0 \quad \text{em } B_r$$

fracamente. Logo, pela Desigualdade de Harnack,

$$u_0 = 0 \quad \text{em } B_r$$

ou

$$u_0 > 0 \quad \text{em } B_r.$$

Com isso, obtemos

$$\partial\{u_0 > 0\} \cap B_r = \emptyset.$$

Isso nos dá (E.1), da **Proposição E.4**. Portanto

$$\partial\{u_n > 0\} \rightarrow \partial\{u_0 > 0\} \quad \text{em distância de Hausdorff.}$$

(ii): Sejam  $x \in B_1 \cap \partial\{u_0 > 0\}$  e  $0 < r < \zeta^* = \zeta^*(N, M, p, \lambda)$ , conforme o **Lema 3.5** para  $\gamma = 1$  e  $\kappa = \frac{1}{2}$ , tais que  $B_r(x) \subset B_1$ . Temos

$$B_r(x) \cap \partial\{u_0 > 0\} \neq \emptyset$$

e daí, pelo item (i) e pela **Proposição E.4**, no **Apêndice E**, existe  $n' \in \mathbb{N}$  tal que

$$B_r(x) \cap \partial\{u_n > 0\} \neq \emptyset \quad \forall n \geq n'.$$

Sendo cada  $u_n$  um mínimo local de  $J$ , a contrapositiva do **Lema 3.5** é válida para  $u_n$ . Neste caso, o fato de

$$u_n \neq 0 \quad \text{em } B_{r/2}(x) \quad \forall n \geq n'$$

implica em

$$\int_{B_r(x)} u_n dx \geq c(N, p, \lambda, 1, 1/2)r \quad \forall n \geq n'.$$

Usando a convergência uniforme  $u_n \rightarrow u_0$  em  $B_r(x)$ , obtemos

$$\int_{B_r(x)} u_0 dx \geq cr.$$

Isso nos dá

$$\sup_{B_r(x)} u_0 \geq cr. \quad (4.5)$$

Ora, na demonstração da estimativa inferior no **Teorema 3.8** foram necessários apenas uma desigualdade do tipo (4.5) e a continuidade Lipschitz local do mínimo. Como a função  $u_0$  é Lipschitz em  $B_1$  por hipótese, segue que a estimativa por baixo do **Teorema 3.8**, e, conseqüentemente, o **Corolário 3.9**, também são válidos para  $u_0$ . Assim

$$|\partial\{u_0 > 0\}| = 0. \quad (4.6)$$

Note agora que, dado  $x_0 \in B_1 \setminus \partial\{u_0 > 0\}$ , podemos tomar

$$d := \text{dist}(x_0, \partial(B_1 \cap \{u_0 > 0\})) > 0$$

para obter

$$B_d(x_0) \subset B_1 \setminus \partial\{u_0 > 0\}.$$

Escolhendo

$$0 < r < \min\{d, \zeta^*\},$$

segue que

$$B_r(x_0) \subset B_1 \setminus \partial\{u_0 > 0\},$$

tal como no item (i). Se  $u_0 > 0$  em  $B_r(x_0)$ , então podemos repetir os cálculos em (4.2) e obter  $n''_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$B_{r/2}(x_0) \subset B_1 \cap \{u_n > 0\} \quad \forall n \geq n''_1.$$

Se, por outro lado,  $u_0 = 0$  em  $B_r(x_0)$ , os mesmos argumentos que foram utilizados para alcançar (4.3) vão nos fornecer  $n''_2 \in \mathbb{N}$  tal que

$$B_{r/2}(x_0) \subset B_1 \cap \{u_n = 0\} \quad \forall n \geq n''_2.$$

Em qualquer situação, existe um  $n'' \in \mathbb{N}$  ( $n'_1$  ou  $n'_2$ , conforme o caso concreto) de sorte que

$$\chi_{\{u_0 > 0\}}(x_0) = \chi_{\{u_n > 0\}}(x_0) \quad \forall n \geq n''.$$

Logo, sendo  $x_0$  um ponto arbitrário,

$$\chi_{\{u_n > 0\}} \rightarrow \chi_{\{u_0 > 0\}} \quad \text{em } B_1 \setminus \partial\{u_0 > 0\},$$

ou seja, por (4.6),

$$\chi_{\{u_n > 0\}} \rightarrow \chi_{\{u_0 > 0\}} \quad \text{q.t.p. em } B_1.$$

Como  $|\Omega| < +\infty$  e

$$\int_{B_1} \chi_{\{u_n > 0\}} dx \leq \omega_N < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos fornece

$$\chi_{\{u_n > 0\}} \rightarrow \chi_{\{u_0 > 0\}} \quad \text{em } L^1(B_1).$$

(iii): Segue diretamente do item (i) e da **Proposição E.5(ii)**, no **Apêndice E**. ■

Já sabemos que a medida  $\Delta_p u$  tem suporte em  $\Gamma$ . O Teorema a seguir nos informa que tal medida enxerga bolas abertas em  $\mathbb{R}^N$  centradas em  $\Gamma$  como se fossem objetos  $(N - 1)$ -dimensionais.

**Teorema 4.2** *Para cada  $U \subset\subset \Omega$  aberto com  $U \cap \Gamma \neq \emptyset$  existem constantes  $c, C > 0$ , ambas dependentes apenas de  $N, M, p, \lambda$  e de  $U$ , tais que, para todo mínimo local  $u \in \mathcal{K}$  de  $J$  restrito a  $\mathcal{V}$ ,*

$$cr^{N-1} \leq \int_{B_r} d\Lambda \leq Cr^{N-1}$$

para toda bola  $B_r = B_r(x) \subset U$  com  $x \in \Gamma$  e  $0 < r < \zeta_1 = \zeta_1(N, M, p, \lambda)$  (ver **Teorema 3.8**).

**Demonstração:** Considere, para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, a função  $\varphi_n \in W_0^{1,p}(B_r) \cap C(B_r)$  não-negativa dada por

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in B_{r-\frac{1}{n}}(x), \\ nr - n|y - x|, & \text{se } y \in B_r(x) \setminus B_{r-\frac{1}{n}}(x). \end{cases}$$

Então

$$\nabla \varphi_n(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \in B_{r-\frac{1}{n}}(x), \\ -n \frac{y-x}{|y-x|}, & \text{se } y \in B_r(x) \setminus \overline{B_{r-\frac{1}{n}}(x)} \end{cases}$$

e daí

$$|\nabla\varphi_n(y)| = \begin{cases} 0, & \text{se } y \in B_{r-\frac{1}{n}}(x), \\ n, & \text{se } y \in B_r(x) \setminus \overline{B_{r-\frac{1}{n}}}(x). \end{cases}$$

Observe que  $\varphi_n \rightarrow \chi_{B_r}$  pontualmente em  $B_r$  com  $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$  e assim, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n d\Lambda = \int_{B_r} d\Lambda.$$

Por outro lado, para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande,

$$\int_{\Omega} \varphi_n d\Lambda = - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi_n dx,$$

de modo que, pelo **Teorema 3.3**, existe uma constante  $C = C(N, M, p, \lambda, U) > 0$  tal que, para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_n d\Lambda &\leq Cn \left| B_r(x) \setminus \overline{B_{r-\frac{1}{n}}}(x) \right| \\ &= Cn \left[ r^N - \left( r - \frac{1}{n} \right)^N \right] \\ &= Cn \left[ N(r_n^*)^{N-1} \frac{1}{n} \right] \\ &= C(r_n^*)^{N-1}, \end{aligned}$$

onde  $r_n^* \in (r - 1/n, r)$ , pelo Teorema do Valor Médio, e a dimensão  $N$  foi incorporada à constante  $C$ . Passando ao limite de  $n \rightarrow \infty$  acima, concluímos que

$$\int_{B_r} d\Lambda \leq Cr^{N-1}.$$

Suponha agora, por contradição, que a estimativa por baixo não é satisfeita. Então, assim como em demonstrações anteriores, existem, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

- um mínimo local  $u_n \in \mathcal{K}$  de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}_n$ ;
- uma medida de Radon  $\Lambda_n = \Delta_p u_n$ ;
- uma bola aberta  $B_{r_n}(x_n) \subset U$  com centro  $x_n \in \Omega \cap \partial\{u_n > 0\}$  e raio  $0 < r_n < \zeta_1$ ;

tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n^{N-1}} \int_{B_{r_n}} d\Lambda_n = 0. \quad (4.7)$$

Sejam

$$\Phi_n(y) := \frac{y - x_n}{r_n}, \quad y \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N},$$

e

$$\Omega_n := \Phi_n(\Omega), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi_n$  é um difeomorfismo de  $\Omega$  em  $\Omega_n$ . Tomando os *rescalings* de  $\Omega$  para  $\Omega_n$

$$(u_n)_{r_n} = \frac{1}{r_n} u_n \circ (\Phi_n)^{-1} \quad \text{em } \Omega, \quad n \in \mathbb{N},$$

vê-se que

$$(u_n)_{r_n}(0) = \frac{1}{r_n} u_n(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

e obtemos as medidas de Radon

$$\Lambda'_n = \Delta_p(u_n)_{r_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definimos, para  $n, k \in \mathbb{N}$  com  $k$  suficientemente grande, a função não-negativa  $\varphi_k^{(n)} \in W_0^{1,p}(B_{r_n}(x_n)) \cap C(B_{r_n}(x_n))$  por

$$\varphi_k^{(n)}(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in B_{r_n - \frac{1}{k}}(x_n), \\ kr_n - k|y - x_n|, & \text{se } y \in B_{r_n}(x_n) \setminus B_{r_n - \frac{1}{k}}(x_n). \end{cases}$$

Observe que, como antes,

$$\nabla \varphi_k^{(n)}(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \in B_{r_n - \frac{1}{k}}(x_n), \\ -k \frac{y - x_n}{|y - x_n|}, & \text{se } y \in B_{r_n}(x_n) \setminus \overline{B_{r_n - \frac{1}{k}}}(x_n). \end{cases}$$

e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\varphi_k^{(n)} \rightarrow \chi_{B_{r_n}(x_n)} \quad \text{em } \Omega \quad (k \rightarrow \infty)$$

pontualmente em  $B_{r_n}(x_n)$  com  $0 \leq \varphi_k^{(n)} \leq \varphi_{k+1}^{(n)}$  para todos  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, donde o Teorema da Convergência Monótona implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_k^{(n)} d\Lambda_n = \int_{B_{r_n}(x_n)} d\Lambda_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fixe  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Note que, pela **Observação 2.9(ii)**,

$$\nabla(u_n)_{r_n} = (\nabla u_n) \circ \Phi_n^{-1},$$

e podemos calcular, para cada  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i}(\varphi_k^{(n)} \circ \Phi_n^{-1}) &= ((\nabla \varphi_k^{(n)}) \circ \Phi_n^{-1}) \cdot \frac{\partial \Phi_n^{-1}}{\partial z_i} \\ &= ((\nabla \varphi_k^{(n)}) \circ \Phi_n^{-1}) \cdot (r_n e_i) \\ &= r_n \frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial y_i} \circ \Phi_n^{-1}. \end{aligned}$$

Assim

$$(\nabla \varphi_k^{(n)}) \circ \Phi_n^{-1} = \frac{1}{r_n} \nabla(\varphi_k^{(n)} \circ \Phi_n^{-1})$$

e daí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_k^{(n)} d\Lambda_n &= - \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_k^{(n)} dy \\ &= - \int_{\Phi_n^{-1}(\Omega_n)} |(\nabla(u_n)_{r_n}) \circ \Phi_n|^{p-2} (\nabla(u_n)_{r_n} \circ \Phi_n) \cdot \nabla \varphi_k^{(n)} dy \end{aligned}$$

Aplicando a Fórmula de Mudança de Variáveis, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_k^{(n)} d\Lambda_n &= -r_n^N \int_{\Omega_n} |\nabla(u_n)_{r_n}|^{p-2} \nabla(u_n)_{r_n} \cdot ((\nabla_y \varphi_k^{(n)}) \circ \Phi_n^{-1}) dz \\ &= -r_n^{N-1} \int_{\Omega_n} |\nabla(u_n)_{r_n}|^{p-2} \nabla(u_n)_{r_n} \cdot \nabla(\varphi_k^{(n)} \circ \Phi_n^{-1}) dz \\ &= r_n^{N-1} \int_{\Omega_n} \varphi_k^{(n)} \circ \Phi_n^{-1} d\Lambda'_n. \end{aligned}$$

Passando ao limite de  $k \rightarrow \infty$  e usando mais uma vez o Teorema da Convergência Monótona, alcançamos

$$\int_{B_{r_n}(x_n)} d\Lambda_n = r_n^{N-1} \int_{\Omega_n} \chi_{B_{r_n}(x_n)} \circ \Phi_n^{-1} d\Lambda'_n = r_n^{N-1} \int_{B_1} d\Lambda'_n$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Usando (4.7), vê-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} d\Lambda'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n^{N-1}} \int_{B_{r_n}(x_n)} d\Lambda_n = 0. \quad (4.9)$$

A sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente Lipschitz em  $U$  com uma constante de Lipschitz  $C = C(N, M, p, \lambda, U) > 0$  (ver **Teorema 3.3**). Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $y, z \in U$ ,

$$|(u_n)_{r_n}(y) - (u_n)_{r_n}(z)| = \frac{1}{r_n} |u_n(r_n y + x_n) - u_n(r_n z + x_n)| \leq \frac{C r_n |y - z|}{r_n} = C |y - z|,$$

donde a sequência de *rescalings*  $((u_n)_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente Lipschitz em  $\bar{B}_1$ . Usando (4.8), também temos que  $((u_n)_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$  é equilimitada em  $\bar{B}_1$ . Logo, denotando  $\tilde{u}_n := (u_n)_{r_n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma função  $\tilde{u}_0 \in C^{0,1}(\bar{B}_1)$  tal que, a menos de subsequência,

$$\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0 \quad \text{uniformemente em } \bar{B}_1.$$

Considere agora a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^\infty(B_1, \mathbb{R}^N)$  dada por

$$g_n := |\nabla \tilde{u}_n|^{p-2} \nabla \tilde{u}_n.$$

Então  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é equilimitada em  $L^\infty(B_1, \mathbb{R}^N) = (L^1(B_1, \mathbb{R}^N))'$  e assim, usando o **Teorema C.4**, no **Apêndice C**, podemos extrair uma subsequência (que ainda denotaremos por  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) tal que

$$g_n \xrightarrow{*} g_0 \quad \text{em } L^\infty(B_1, \mathbb{R}^N) \quad (4.10)$$

para alguma função  $g_0 \in L^\infty(B_1, \mathbb{R}^N)$ . Como  $\tilde{u}_0 \in C^{0,1}(\bar{B}_1)$ , temos  $\tilde{u}_0 \in W^{1,\infty}(B_1)$  (ver **Teorema D.4**, no **Apêndice D**). Afirmamos que

$$g_0 = |\nabla \tilde{u}_0|^{p-2} \nabla \tilde{u}_0 \quad \text{q.t.p. em } B_1.$$

Ora, podemos aplicar o **Lema 4.1** à sequência  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e à função  $\tilde{u}_0$ , restritas a  $\bar{B}_1$ . Isso nos dá, em particular, o mesmo resultado de (4.6):

$$|\partial\{\tilde{u}_0 > 0\}| = 0. \quad (4.11)$$

Sendo o conjunto

$$B_1 \setminus \partial\{\tilde{u}_0 > 0\} = B_1 \cap (\{\tilde{u}_0 > 0\} \cup \{\tilde{u}_0 = 0\}^\circ)$$

aberto, considere uma bola aberta  $B_\rho = B_\rho(y)$  com

$$B_\rho \subset B_1 \setminus \partial\{\tilde{u}_0 > 0\}.$$

Fazendo um cálculo análogo ao de (4.2) e (4.3) (ver a demonstração do **Lema 4.1(i)**), podemos fixar  $\sigma \in (0, 1)$  e definir

$$\sigma' := \frac{1 + \sigma}{2} \in (\sigma, 1)$$

para obter um  $n''_\sigma \in \mathbb{N}$  tal que valem as implicações:

$$[B_\rho \subset \{\tilde{u}_0 > 0\}] \Rightarrow [B_{\sigma'\rho}(x_0) \subset B_1 \cap \{\tilde{u}_n > 0\} \quad \forall n \geq n''_\sigma]$$

e

$$[B_\rho \subset \{\tilde{u}_0 = 0\}] \Rightarrow [B_{\sigma'\rho}(x_0) \subset B_1 \cap \{\tilde{u}_n = 0\} \quad \forall n \geq n''_\sigma].$$

Note que  $B_\rho$  deve estar contido em exatamente um dos conjuntos  $\{\tilde{u}_0 > 0\}$  e  $\{\tilde{u}_0 = 0\}$ . Por (4.4), novamente usando a ideia da demonstração do **Lema 4.1(i)**, multiplicando o raio  $\sigma'\rho$  por  $\frac{\sigma}{\sigma'} \in (0, 1)$ , chegamos ao fato de que, a menos de subsequência,

$$\nabla \tilde{u}_n \rightarrow \nabla \tilde{u}_0 \quad \text{uniformemente em } B_{\sigma\rho},$$

donde

$$g_n \rightarrow |\nabla \tilde{u}_0|^{p-2} \nabla \tilde{u}_0 \quad \text{uniformemente em } B_{\sigma\rho}. \quad (4.12)$$

Denote agora, para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , as componentes

$$g_n^{(j)} := |\nabla \tilde{u}_n|^{p-2} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Fixe  $j$  e note que, dada  $w \in L^1(B_{\sigma\rho})$  estendida como 0 para  $B_1$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{\sigma\rho}} g_n^{(j)} w dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_n, w e_j \rangle \\ &= \langle g_0, w e_j \rangle \\ &= \int_{B_{\sigma\rho}} g_0^{(j)} w dx, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$g_n^{(j)} \xrightarrow{*} g_0^{(j)} \quad \text{em } L^\infty(B_{\sigma\rho}). \quad (4.13)$$

Por outro lado, a convergência uniforme em (4.12) nos fornece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{\sigma\rho}} g_n^{(j)} w dx = \int_{B_{\sigma\rho}} |\tilde{u}_0|^{p-2} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_j} w dx \quad \forall w \in L^1(B_{\sigma\rho}),$$

isto é,

$$g_n^{(j)} \xrightarrow{*} |\tilde{u}_0|^{p-2} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_j} \quad \text{em } L^\infty(B_{\sigma\rho}). \quad (4.14)$$

Por (4.13), (4.14) e pela unicidade do limite fraco-\* tem-se

$$g_0^{(j)} = |\tilde{u}_0|^{p-2} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_j} \quad \text{q.t.p. em } B_{\sigma\rho}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.15)$$

Logo, sendo  $\sigma \in (0, 1)$  tomado arbitrariamente, temos

$$g_0 = (g_0^{(1)}, \dots, g_0^{(N)}) = |\nabla \tilde{u}_0|^{p-2} \nabla \tilde{u}_0 \quad \text{q.t.p. em } B_\rho$$

para toda bola aberta  $B_\rho \subset B_1 \setminus \partial\{\tilde{u}_0 > 0\}$ . Vendo o aberto  $B_1 \setminus \partial\{\tilde{u}_0 > 0\}$  como uma reunião enumerável de suas bolas abertas e usando (4.11), concluímos que

$$|\nabla \tilde{u}_n|^{p-2} \nabla \tilde{u}_n \xrightarrow{*} |\nabla \tilde{u}_0|^{p-2} \nabla \tilde{u}_0 \quad \text{em } L^\infty(B_1, \mathbb{R}^N).$$

Fixada  $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$ , temos  $\nabla \varphi \in C_0^\infty(B_1, \mathbb{R}^N) \subset L^1(B_1, \mathbb{R}^N)$  e, dessa forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} |\nabla \tilde{u}_n|^{p-2} \nabla \tilde{u}_n \cdot \nabla \varphi dx = \int_{B_1} |\nabla \tilde{u}_0|^{p-2} \nabla \tilde{u}_0 \cdot \nabla \varphi dx.$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} \varphi d\Lambda'_n = \int_{B_1} |\nabla \tilde{u}_0|^{p-2} \nabla \tilde{u}_0 \cdot \nabla \varphi dx.$$

Sendo, por (4.9),

$$0 \leq \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} |\varphi| d\Lambda'_n \right| \leq \left( \max_{B_1} |\varphi| \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} d\Lambda'_n = 0,$$

temos que  $\tilde{u}_0$  é fracamente  $p$ -harmônica em  $B_1$ . Como  $\tilde{u}_0$  é contínua e não-negativa em  $B_1$  e  $\tilde{u}_0(0) = 0$  (por (4.8) e pela convergência uniforme), segue, pela Desigualdade de Harnack, que

$$\tilde{u}_0 = 0 \quad \text{em } B_1. \quad (4.16)$$

Por outro lado, como  $0 \in \{\tilde{u}_n > 0\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (por hipótese de contradição), o

**Lema 4.1(iii)** também nos garante que

$$0 \in \partial\{\tilde{u}_0 > 0\},$$

contradizendo (4.16), pois  $0$  é ponto interior de  $B_1$ . Segue daí que vale a estimativa por baixo. ■

## 4.2 Teorema de representação

Recorde que, no **Teorema 2.22**, foi mostrada, num sentido muito fraco, a condição de fronteira

$$\frac{\partial u}{\partial \nu^-} = -\lambda' = -\frac{\lambda}{(p-1)^{1/p}} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.17)$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal a  $\Gamma$  externo a  $D$  e  $\frac{\partial u}{\partial \nu^-}$  denota a derivada à Gateaux lateral de  $u$  na direção de  $\nu$  por dentro de  $D$ . Esta condição é expressa, via Fórmula de Taylor, no desenvolvimento assintótico

$$u(x) = -\lambda'(x - x_0) \cdot \nu(x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \in D \text{ com } x \rightarrow x_0, \quad (4.18)$$

para  $x_0 \in \Gamma$ . Note, no entanto, que  $u \notin C^1(\Omega)$  (ver **Corolário 3.7**, no **Capítulo 3**).

Neste momento, para que a condição de Neumann (4.17) seja alcançada de maneira significativa (ainda que continue no sentido muito fraco), é necessário mostrar que  $\Gamma$  admite um subconjunto regular que o “preencha” significativamente. Com este propósito, usando

o fato que  $\dim_{\mathcal{H}}(\Gamma) = N - 1$  (ver **Teorema 4.3**), Martínez e Wolansky provaram (cf. [23] Teorema 1.2) que (4.18) é satisfeito para todo  $x_0 \in \Omega \cap \partial_{\text{red}}D \subset \Gamma$ , onde podemos entender a *fronteira reduzida*  $\partial_{\text{red}}D$  como um subconjunto de  $\partial D$  onde está definida uma generalização dos vetores unitários normais a  $\partial D$ . A importância deste resultado é o fato de que, se  $D$  tem perímetro localmente finito em  $\Omega$  (ver **Definição B.16**, no **Apêndice B**), então

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma \setminus \partial_{\text{red}}D) = 0$$

(ver **Corolário 4.5**). Ademais, o **Teorema 0.4**, resultado final do artigo de Danielli e Petrosyan (cf. [11] Corolário 9.2), mostra que  $\partial D$  é analítica em  $X = \Omega \cap \partial_{\text{red}}D \subset \Gamma$ , o que conclui (4.17).

Pelo **Teorema B.20**, no **Apêndice B**,  $D$  terá perímetro localmente finito em  $\Omega$  desde que sejamos capazes de garantir que

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap \Gamma) < +\infty \quad \forall K \subset \Omega \text{ compacto.} \quad (4.19)$$

Provaremos (4.19) no Teorema a seguir, além de uma representação, via Teorema de Radon-Nikodym, que relaciona as medidas de Radon  $\Lambda$  e  $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \Gamma$ . No entanto, o **Teorema 0.4** e o limite assintótico (4.18) de Martínez e Wolansky para pontos da fronteira reduzida não serão demonstrados neste trabalho.

**Teorema 4.3** *Seja  $u \in \mathcal{K}$  um mínimo local de  $J$  restrito a uma vizinhança  $\mathcal{V}$ . Então:*

(i)  $\mathcal{H}^{N-1}(U \cap \Gamma) < +\infty$  para todo  $U \subset\subset \Omega$ . Consequentemente,  $\Gamma$  tem dimensão de Hausdorff  $N - 1$ .

(ii) Existe uma função de Borel  $q_u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\Delta_p u = q_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \Gamma,$$

isto é, para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

$$-\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Gamma} \varphi q_u d\mathcal{H}^{N-1}.$$

(iii) Para cada  $U \subset\subset \Omega$ , existem constantes  $c', C' > 0$ , dependentes apenas de  $N, M, p, \lambda$  e de  $U$ , tais que

$$c' \leq q_u(x) \leq C', \quad c' r^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma) \leq C' r^{N-1}$$

para  $\mathcal{H}^{N-1}$ -q.t.p.  $x \in U \cap \Gamma$  e para todo  $0 < r < \zeta_1 = \zeta_1(N, M, p, \lambda)$  tais que  $B_r(x) \subset U$ .

**Demonstração:** Sejam  $U \subset\subset \Omega$  com  $U \cap \Gamma \neq \emptyset$  e

$$U' := \left\{ x \in \Omega; \text{dist}(x, U) < \frac{\text{dist}(U, \partial\Omega)}{2} \right\}.$$

(i): Denote  $K := \overline{U} \cap \Gamma$ . Então  $K$  é compacto. Considere uma cobertura finita

$$\{B_r(x_i)\}_{i=1}^n$$

de  $K$  por bolas abertas centradas em pontos de  $K$  com  $0 < r < \zeta_1$  e  $B_r(x_i) \subset U'$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Aplicando o Teorema de Cobertura de Vitali (ver **Teorema B.5**, no **Apêndice B**), obtemos  $m \leq n$  e um subconjunto  $\{y_1, \dots, y_m\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$  tal que a coleção  $\{B_r(y_j)\}_{j=1}^m$  é disjunta e

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i) \subset \bigcup_{j=1}^m B_{5r}(y_j).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{5r}^{N-1}(K) &\leq \sum_{j=1}^m \omega_{N-1} \left( \frac{\text{diam}(B_{5r}(y_j))}{2} \right)^{N-1} \\ &= \omega_{N-1} \sum_{j=1}^m (5r)^{N-1} \\ &= \omega_{N-1} 5^{N-1} \sum_{j=1}^m r^{N-1}. \end{aligned}$$

Segue do **Teorema 4.2** que existe uma constante  $c = c(N, M, p, \lambda, U') > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{5r}^{N-1}(K) &\leq \frac{\omega_{N-1} 5^{N-1}}{c} \sum_{j=1}^m \Lambda(B_r(y_j)) \\ &\leq c_1 \Lambda(K_r), \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde  $c_1 := \frac{\omega_{N-1} 5^{N-1}}{c} > 0$  é constante e

$$K_r := \{x \in \mathbb{R}^N; \text{dist}(x, K) < r\}.$$

Aplicando (4.20) a  $r = \frac{1}{k}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , podemos passar ao limite de  $k \rightarrow +\infty$  e obter, pelo fato de  $\Lambda$  ser uma medida de Radon,

$$\mathcal{H}^{N-1}(K) \leq c_1 \Lambda(K) < +\infty.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{H}^{N-1}(U \cap \Gamma) < +\infty \quad \forall U \subset\subset \Omega.$$

(ii): Precisamos mostrar que  $\Lambda$  é absolutamente contínua com relação a  $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \Gamma$ . Para tal, sejam  $X \subset \Omega$  e  $Y := X \cap U$ . Note que

$$\Lambda(Y) = \Lambda(Y \cap \Gamma).$$

Vamos assumir que  $Y \cap \Gamma \neq \emptyset$ .

Fixado

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\text{dist}(U, \partial\Omega)}{2}, \zeta_1 \right\},$$

considere uma cobertura arbitrária

$$(Y \cap \Gamma) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$$

com

$$\text{diam}(Y_i) \leq \delta \quad \text{e} \quad Y_i \cap (Y \cap \Gamma) \neq \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tome  $x_i \in Y_i \cap (Y \cap \Gamma) \subset U$ . Então a bola aberta  $B_i := B_{\text{diam}(Y_i)}(x_i) \subset U'$  e temos

$$(Y \cap \Gamma) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Pelo **Teorema 4.2**, obtemos uma constante  $C = C(N, M, p, \lambda, U') > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \Lambda(Y \cap \Gamma) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda(B_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} C(\text{diam}(Y_i))^{N-1} \\ &= C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{N-1} \left( \frac{\text{diam}(Y_i)}{2} \right)^{N-1}, \end{aligned}$$

onde

$$C_1 := \frac{C2^{N-1}}{\omega_{N-1}} > 0$$

é constante. Como a cobertura  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  de  $(Y \cap \Gamma)$  foi tomada arbitrária com diâmetro no máximo  $\delta$ , segue que

$$\Lambda(Y) = \Lambda(Y \cap \Gamma) \leq C_1 \mathcal{H}_\delta^{N-1}(Y \cap \Gamma).$$

Passando ao limite de  $\delta \rightarrow 0^+$ , vê-se que

$$\Lambda(X \cap U) \leq C_1 \mathcal{H}^{N-1}((X \cap U) \cap \Gamma). \quad (4.21)$$

Logo, pelo Teorema de Radon-Nikodym (ver o **Teorema B.6**, no **Apêndice B**), existe uma função  $\mathcal{H}^{N-1}$ -mensurável  $q_u \geq 0$  em  $\Gamma$  (única, a menos de um subconjunto de  $\Gamma$  com medida  $\mathcal{H}^{N-1}$  nula) tal que

$$\Lambda(X) = \int_{X \cap \Gamma} q_u d\mathcal{H}^{N-1}$$

para todo conjunto  $X \subset \Omega$  ( $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \Gamma$ )-mensurável. Isso implica em

$$-\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Gamma} \varphi q_u d\mathcal{H}^{N-1} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

o que denotamos por

$$\Delta_p u = q_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \Gamma.$$

(iii): A função  $q_u$  acima pode ser expressa, pelo **Teorema B.6**, como

$$q_u(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Lambda(B_r(x))}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma)} < +\infty \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. } x \in \Gamma. \quad (4.22)$$

Pelo **Teorema 4.2**, existem constantes  $0 < c < C$  tais que

$$cr^{N-1} \leq \Lambda(B_r(x)) \leq Cr^{N-1} \quad (4.23)$$

para toda bola aberta  $B_r(x) \subset U$  com  $x \in \Gamma$  e  $0 < r < \zeta_1$ . Isso e (4.21) nos dão

$$\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma) > 0$$

Assim (4.23) implica

$$c \frac{r^{N-1}}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma)} \leq \frac{\Lambda(B_r(x))}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma)} \leq C \frac{r^{N-1}}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma)}$$

Passando ao limite inferior de  $r \rightarrow 0^+$  acima temos, de (4.22), que

$$c \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^{N-1}}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma)} \leq q_u(x) \leq C \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^{N-1}}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma)} \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. } x \in \Gamma.$$

Utilizando o **Teorema B.9**, no **Apêndice B**, e propriedades de limite inferior e de limite superior, segue que

$$\frac{c}{\omega_{N-1}} \leq q_u(x) \leq \frac{C2^{N-1}}{\omega_{N-1}} \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. } x \in \Gamma. \quad (4.24)$$

Integrando esta desigualdade na medida  $\mathcal{H}^{N-1}$  sobre o conjunto  $B_r(x) \cap \Gamma$  e usando (ii), obtemos

$$\frac{c}{\omega_{N-1}} \mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma) \leq \Lambda(B_r(x)) \leq \frac{C2^{N-1}}{\omega_{N-1}} \mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma)$$

para toda bola aberta  $B_r(x) \subset U$  com  $x \in \Gamma$  e  $0 < r < \zeta_1$ . Logo, por (4.23),

$$\frac{c\omega_{N-1}}{C2^{N-1}}r^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(B_r(x) \cap \Gamma) \leq \frac{C\omega_{N-1}}{c}r^{N-1} \quad (4.25)$$

Tomando

$$c' := \min \left\{ \frac{c}{\omega_{N-1}}, \frac{c\omega_{N-1}}{C2^{N-1}} \right\}$$

e

$$C' := \max \left\{ \frac{C2^{N-1}}{\omega_{N-1}}, \frac{C\omega_{N-1}}{c} \right\}$$

e usando (4.24) e (4.25), concluímos a demonstração. ■

**Observação 4.4** Em [11] é mostrado que

$$q_u = \lambda' \quad \mathcal{H}^{N-1} - q.t.p. \text{ em } \partial_{red}D.$$

**Corolário 4.5**  $D$  tem perímetro localmente finito em  $\Omega$ . Consequentemente,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma \setminus \partial_{red}D) = 0.$$

**Demonstração:** Segue do **Teorema 4.3(i)** e do **Teorema B.20**, no **Apêndice B**, que  $D$  tem perímetro localmente finito em  $\Omega$ . Pelo **Corolário 3.10**, temos

$$\Gamma = \Omega \cap \partial_*D,$$

donde o **Teorema B.19**, no **Apêndice B**, nos leva ao fato de que

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma \setminus \partial_{red}D) = 0. \quad \blacksquare$$

# Apêndice A

## Preliminares

Neste Apêndice, guardamos conceitos, notações e resultados gerais que sejam úteis ao trabalho.

### A.1 Notações e definições

- $\mathbb{R}^N$  é o espaço euclidiano  $N$ -dimensional,  $|x|$  é a norma de  $x \in \mathbb{R}^N$ ;
- $x \cdot y$  é o produto escalar entre  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{R}^N$ ;
- $\text{diam}(X) = \sup\{|x - y|; x, y \in X\}$  é o diâmetro de  $X \subset \mathbb{R}^N$ ;
- $|X|$  é a medida de Lebesgue  $N$ -dimensional de  $X \subset \mathbb{R}^N$ ;
- $X^\circ$  e  $\bar{X}$  são, respectivamente, o interior e o fecho de  $X \subset \mathbb{R}^N$ ;
- $B_r(x)$  é a bola aberta de raio  $r > 0$  e centro em  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $B_1 = B_1(0)$ ;
- $\omega_N = |B_1|$ ;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio (aberto conexo) em  $\mathbb{R}^N$ ;
- $U \subset\subset \Omega$  denota que  $U$  é tal que  $\bar{U} \subset \Omega$ ;
- $u^+ = \max(u, 0)$ ,  $u^- = \max(-u, 0)$ ;

- $\{u > 0\} = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$  é o conjunto de positividade de  $u$ ,  $\{u > v\} = \{x \in \Omega; u(x) > v(x)\}$ ,  $\{u = 0\} = \{x \in \Omega; u(x) = 0\}$ ;
- $\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$  é o suporte de  $u$ ;
- $\|\cdot\|_E$  é a norma usual num espaço de Banach real  $E$ ;
- $C(\cdot, \cdot, \dots)$  é uma constante que depende dos valores entre parêntesis, a dependência de  $\Omega$  deixada implícita;
- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ,  $C^{k,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , são espaços de Hölder ( $\alpha < 1$ ) e de Lipschitz ( $\alpha = 1$ ) em  $\Omega$ ;
- $[u]_{\alpha,U} = \sup \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}; x, y \in \Omega, x \neq y \right\}$ , para  $u \in C^{0,\alpha}(U)$ ,  $[u]_\alpha = [u]_{\alpha,\Omega}$ ;
- $L^p(\Omega)$ ,  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , são os espaços de Lebesgue em  $\Omega$ ,  $\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)}$ ,  $\|u\|_{p,U} = \|u\|_{L^p(U)}$ ;
- $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , são espaços de Sobolev em  $\Omega$ ,  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ;
- $W_0^{k,p}(\Omega)$ ,  $W_0^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , são espaços de Sobolev em  $\Omega$  com traço zero em  $\partial\Omega$ ,  $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ ;;
- $u_n \rightarrow u_0$  significa que uma sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  converge para  $u_0 \in E$  na norma do espaço de Banach de funções  $E$ ;
- $f(t) = o(g)(t \rightarrow a)$  é a notação *little-oh*, onde  $f, g$  são uma funções reais,  $a \in \mathbb{R}$ , e significa que
 
$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 0;$$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} \text{ess } f(t) = c$  significa que o limite usual é válido para  $t$  tomado fora de um conjunto de medida nula.

**Definição A.1** *Sejam  $S$  um subconjunto não-vazio de  $\partial\Omega$  e  $\mathcal{C}$  uma classe de funções de Schauder (como  $C^{0,1}$  ou  $C^2$ , por exemplo). Diremos que  $S \in \mathcal{C}$  em  $\partial\Omega$  ( $\partial\Omega \in \mathcal{C}$ , quando  $S = \partial\Omega$ ) se  $\partial\Omega$  pode ser vista localmente como gráfico de uma função de classe  $\mathcal{C}$  em pontos de  $S$ : dado  $x \in S$ , existem:  $r > 0$ ; uma vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$  de  $0 \in \mathbb{R}^{N-1}$ ; uma função real  $f \in \mathcal{C}(U)$ ; tais que, denotando  $V := U \times (-r, r)$ , temos:*

- $x = (0, f(0)) \in V_x$ ;
- $V \cap \Omega = \{(y', y_N) \in V; y_N > f(y')\}$ .

**Definição A.2** *Sejam  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $0 < \alpha \leq 1$ . Diremos que uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tem um representante  $C^{k,\alpha}(\Omega)$  se existe uma função  $\tilde{u} \in C^{k,\alpha}(\Omega)$  tal que*

$$u = \tilde{u} \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

## A.2 Resultados

**Proposição A.3** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável num ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Se  $f$  é mínimo local em  $a$ , então  $f'(a) = 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(a) \leq f(a+t) \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Então, como  $f$  é derivável em  $a$ ,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \leq 0,$$

isto é,  $f'(a) = 0$ . ■

**Proposição A.4** *Sejam  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $F \in W^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , onde  $p' = (p-1)/p$ . Então*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} u F \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1},$$

onde  $\nu$  denota o vetor unitário normal externo a  $\partial\Omega$ .

**Demonstração:** Sejam:

- $\varphi \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ ;
- $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

Começaremos mostrando que

$$\operatorname{div}(\varphi\Phi) = \nabla\varphi \cdot \Phi + \varphi \operatorname{div} \Phi.$$

Seja  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ . Então

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\Phi_i) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Phi_i + \varphi \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Somando em  $i$ ,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\varphi\Phi) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\Phi_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\Phi_i + \varphi \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_i} \\
 &= \nabla\varphi \cdot \Phi + \varphi \operatorname{div}\Phi.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Pelo Teorema de Gauss-Green (ver **Teorema B.14**, no **Apêndice B**), se  $\nu$  é o vetor unitário normal externo a  $\partial\Omega$ , onde está definido, então

$$\int_{\partial\Omega} \varphi\Phi \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \Phi + \varphi \operatorname{div}\Phi dx.$$

Aproximando  $u$  e  $F$  por funções  $\varphi$  e  $\Phi$ , respectivamente, e recordando que o traço é um operador contínuo, concluímos a demonstração. ■

**Proposição A.5** *Seja  $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^N$  e  $0 < t < 1$ , tem-se*

$$\frac{\rho(x + ty) - \rho(x)}{t} \leq \rho(x + y) - \rho(x).$$

**Demonstração:** Dados  $x, y \in \Omega$  e  $0 < t < 1$ , temos

$$\begin{aligned}
 \rho(x + ty) - \rho(x) &= \rho((1 - t)x + t(x + y)) - \rho(x) \\
 &\leq (1 - t)\rho(x) + t\rho(x + y) - \rho(x) \\
 &= t[\rho(x + y) - \rho(x)].
 \end{aligned}$$

■

**Proposição A.6** (cf. [29] **Lema B.1**) *Seja  $1 < p < +\infty$ . Se  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , então*

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta) \cdot (\xi - \eta) \geq \begin{cases} (p-1)|\xi - \eta|^2(|\xi| + |\eta|)^{p-2}, & \text{se } 1 < p < 2, \\ \frac{1}{p2^{p-3}}|\xi - \eta|^p, & \text{se } p \geq 2. \end{cases}$$

**Proposição A.7** *Sejam  $I_N$  e  $A$  matrizes quadradas de ordem  $N$ ,  $I_N$  sendo a matriz identidade. Se  $N \geq 2$ , então existem constantes  $c_i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , tais que, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$\det(A + tI_N) = t^N + (\operatorname{tr} A)t^{N-1} + \sum_{i=2}^{N-1} c_i t^{N-i} + \det A. \tag{A.2}$$

**Demonstração:** Faremos indução em  $N$ . Para  $N = 2$  e  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , calculamos

$$\begin{vmatrix} a+t & b \\ c & d+t \end{vmatrix} = (a+t)(d+t) - bc = t^2 + (a+d)t + ad - bc = t^2 + (\operatorname{tr} A)t + \det A.$$

Suponha agora, por hipótese de indução, que existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , tal que (A.2) vale para todo  $2 \leq N \leq k$ . Sejam  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $k+1$  e  $a_1, \dots, a_{k+1}$  as entradas da primeira linha de  $A$ . Para cada  $i = 1, \dots, k+1$ , considere  $S_i(t)$  a matriz quadrada de ordem  $k$  formada pela exclusão da primeira linha e pela  $i$ -ésima coluna de  $A + tI_{k+1}$ . O Teorema de Laplace nos dá:

$$\det(A + tI_{k+1}) = (a_1 + t) \det S_1(t) + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{1+i} \det S_i(t). \quad (\text{A.3})$$

Ora, para  $i \geq 2$ , cada uma das matrizes  $S_i(t)$  possui  $t$  em apenas  $k-1$  entradas de sua diagonal principal. Com efeito, há  $k+1$  entradas com  $t$  em  $A + tI_{k+1}$  e em  $S_i(t)$  foram excluídas a primeira linha e a  $i$ -ésima coluna de  $A + tI_{k+1}$ , ambas contendo exatamente uma entrada com  $t$ . Dessa forma,  $\det S_i(t)$  é um polinômio com grau  $k-1$ . Daí

$$f(t) := \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{1+i} \det S_i(t) \quad (\text{A.4})$$

é um polinômio com grau, no máximo,  $k-1$ .

Por outro lado,  $t$  aparece na matriz  $S_1(t)$  em todas as entradas de sua diagonal principal, de modo que  $S_1(t) = A_1 + tI_k$ , onde  $A_1$  é a matriz quadrada de ordem  $k$  formada pela exclusão das primeira linha e primeira coluna de  $A$ . Por hipótese de indução, temos

$$\det S_1(t) = \det(A_1 + tI_k) = t^k + (\operatorname{tr} A_1)t^{k-1} + g(t), \quad (\text{A.5})$$

onde  $g(t)$  é um polinômio com grau, no máximo,  $k-2$ . Logo, por (A.3), (A.4) e (A.5),

$$\begin{aligned} \det(A + tI_{k+1}) &= (a_1 + t) \det S_1(t) + f(t) \\ &= (a_1 + t) \left[ t^k + (\operatorname{tr} A_1)t^{k-1} + g(t) \right] + f(t) \\ &= t^{k+1} + (\operatorname{tr} A_1)t^k + a_1 t^k + t g(t) + a_1 (\operatorname{tr} A_1)t^{k-1} + a_1 g(t) + f(t) \\ &= t^{k+1} + (\operatorname{tr} A)t^k + h(t), \end{aligned}$$

onde  $h(t)$  é um polinômio com grau, no máximo,  $k-1$ .

Observando que

$$\det(A + 0I_{k+1}) = \det A,$$

vê-se que o termo independente é  $\det A$ , donde concluimos a indução. ■

# Apêndice B

## Teoria Geométrica da Medida

Anotamos, neste Apêndice, os conceitos e resultados relacionados à Teoria Geométrica da Medida utilizados ao longo do texto principal. Nos referimos a Evans e Gariepy [14] para as demonstrações.  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  é o conjunto das partes de  $\mathbb{R}^N$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto não-vazio.

### B.1 Teoria da Medida e Integração

**Definição B.1** (cf. [22] Seção 1.1) *Dado  $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ , a medida de Lebesgue  $N$ -dimensional de  $X$  é*

$$\mathcal{L}^N(X) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n)^N; K_n \text{ é um } N\text{-cubo de aresta } \ell(K_n) > 0 \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \right\}.$$

**Definição B.2** (cf. [14] Definição 2.1) *Para cada  $s > 0$ , considere*

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s/2} dt}$$

*e defina  $\omega_0 := 1$ . Dados  $\delta > 0$  e  $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ , seja*

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(X) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_s \left( \frac{\text{diam } X_n}{2} \right)^s; (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é uma cobertura qualquer de } X \text{ com } \text{diam } X_n \leq \delta \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

*A medida de Hausdorff  $s$ -dimensional de  $X$  é*

$$\mathcal{H}^s(X) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(X)$$

*e a dimensão de Hausdorff de  $X$  é dada por*

$$\dim_H(X) := \inf \{s \geq 0; \mathcal{H}^s(X) = 0\}.$$

**Teorema B.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, cf. [14] Teorema 1.19)** Sejam  $1 \leq p < +\infty$  e  $g, (f_n)_{k=1}^{\infty}$  funções em  $L^p(\mathbb{R}^N)$  com  $g \geq 0$  e seja  $f$  uma função integrável em  $\mathbb{R}^N$ . Suponha que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e que

$$|f_n| \leq g \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  e

$$f_n \rightarrow f \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

**Demonstração:** O caso  $p = 1$  é demonstrado na referência citada acima. Para o caso  $p > 1$ , basta notar que, pelo Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|^p dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |g|^p dx < +\infty,$$

de modo que  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ . Além disso,

$$|f_n - f|^p \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f_n - f|^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p |g|^p,$$

donde o caso  $p = 1$  implica em

$$|f_n - f|^p \rightarrow 0 \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto

$$f_n \rightarrow f \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

■

**Teorema B.4 (cf. [14] Teorema 1.20)** Sejam  $f, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  funções em  $L^1(\mathbb{R}^N)$  tais que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}^N).$$

Então, passando a uma subsequência e reindexando, se necessário, obtemos que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

**Teorema B.5 (Teorema de Cobertura de Vitali, cf. [14] Teorema 1.24)** Seja  $\mathcal{F}$  uma coleção não-vazia de bolas fechadas não-degeneradas em  $\mathbb{R}^N$ . Assuma que

$$\sup\{\text{diam } B; B \in \mathcal{F}\} < +\infty.$$

Então existe uma subcoleção enumerável disjunta  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  tal que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B,$$

onde  $5B$  é a bola concêntrica a  $B$  com 5 vezes seu raio.

**Teorema B.6 (Teorema de Radon-Nikodym, cf. [14] Teorema 1.29 e Teorema 1.30)** *Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  medidas de Radon em  $\mathbb{R}^N$  tais que, para  $X \subset \mathbb{R}^N$ ,*

$$\mu_1(X) = 0 \Rightarrow \mu_2(X) = 0.$$

Então existe uma função  $f$  não-negativa e  $\mu_1$ -mensurável tal que

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu_2(B_r(x))}{\mu_1(B_r(x))} < +\infty \quad \mu_1 - q.t.p. \quad x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\mu_2(E) = \int_E f d\mu_1$$

para todo conjunto  $\mu_1$ -mensurável  $E$ .

**Teorema B.7 (Pontos de densidade 1 e densidade 0, cf. [14] Teorema 1.35)** *Seja  $E \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto mensurável. Então*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|B_r(x) \cap E|}{|B_r(x)|} = 1 \quad q.t.p. \quad x \in E$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|B_r(x) \cap E|}{|B_r(x)|} = 0 \quad q.t.p. \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus E.$$

**Teorema B.8 (Teorema de Representação de Riesz, cf. [14] Teorema 1.39)** *Seja*

$$L : C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$$

um funcional linear não-negativo, isto é, tal que

$$\langle L, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \varphi \geq 0.$$

Então existe uma medida de Radon  $\mu$  em  $\mathbb{R}^N$  dada por

$$\mu(U) := \sup\{\langle L, \varphi \rangle; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1, \text{supp } \varphi \subset U\}, \quad U \text{ aberto em } \mathbb{R}^N,$$

tal que

$$\langle L, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

**Teorema B.9 (Estimativas de densidade para a medida de Hausdorff, cf. [14] Teorema 2.7)** *Sejam  $s \geq 0$  e  $E \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto  $\mathcal{H}^s$ -mensurável com  $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ . Então*

$$\frac{1}{2^s} \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^s(B_r(x) \cap E)}{\omega_s r^s} \leq 1$$

para  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p.  $x \in E$ .

## B.2 Fórmulas da Coárea e de Mudança de Variáveis

**Teorema B.10 (Fórmula da Coárea, cf. [14] Teorema 3.10)** *Seja  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lipschitziana. Então, para todo conjunto mensurável  $E \subset \mathbb{R}^N$ ,*

$$\int_E |\nabla f| dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(E \cap f^{-1}\{y\}) dy.$$

**Observação B.11** *Pelo Teorema de Rademacher, toda função Lipschitz é diferenciável q.t.p.*

**Corolário B.12** *Seja  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lipschitziana. Então*

$$\mathcal{H}^{N-1}(\{|\nabla f| = 0\} \cap f^{-1}\{y\}) = 0$$

para  $\mathcal{L}^1$ -q.t.p.  $y \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Basta aplicar a Fórmula da Coárea no conjunto

$$E = \{|\nabla f| = 0\}$$

e obter

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(E \cap f^{-1}\{y\}) dy.$$

■

**Teorema B.13 (Fórmula de Mudança de Variáveis, cf. [14] Teorema 3.11 e [22] Teorema 7.2)** *Seja  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  uma função Lipschitziana e injetiva. Então, para toda função  $g \in L^1(\Omega)$ ,*

$$\int_{\Omega} g |\det D\Phi| dx = \int_{\Phi(\Omega)} g \circ \Phi^{-1} dy.$$

## B.3 Teorema de Gauss-Green

**Teorema B.14 (Teorema de Gauss-Green para fronteira quase-Lipschitz, cf. [22] Teorema 9.6)**

*Seja  $E \subset \mathbb{R}^N$  um aberto tal que existe  $S \subset \partial E$  com  $\partial E \setminus S$  fechado,  $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E \setminus S) = 0$  e  $S \in C^{0,1}$  em  $\partial E$ . Então, para toda função  $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ ,*

$$\int_E \nabla \varphi dx = \int_S \varphi v d\mathcal{H}^{N-1},$$

onde  $v$  é o vetor unitário normal a  $S$  externo a  $E$ .

**Observação B.15** *O Teorema 9.6 presente em [22] é enunciado para fronteira quase- $C^1$ , porém é demonstrado utilizando apenas regularidade Lipschitz da fronteira de  $E$ .*

O espaço  $BV(\Omega)$  das funções com variação limitada em  $\Omega$  generaliza os espaços de Sobolev e é extensivamente analisado em [13].

**Definição B.16** (cf. [13] **Definição 5.1 e Definição 5.2**) *Seja  $E \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto mensurável. Dizemos que  $E$  tem **perímetro finito** em  $\Omega$  ou **perímetro localmente finito** em  $\Omega$  se  $\chi_E \in BV(\Omega)$  ou  $\chi_E \in BV_{loc}(\Omega)$ , respectivamente.*

O leitor pode conferir [13], Seção 5.7, para a definição da *fronteira reduzida*  $\partial_{\text{red}}E$ .

**Definição B.17** (cf. [13] **Definição 5.7**) *Sejam  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $E \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto mensurável. Dizemos que  $x \in \partial_*E$ , conjunto chamado de **measure theoretic boundary of  $E$** , se*

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{|B_r(x) \cap E|}{r^N} > 0$$

e

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{|B_r(x) \setminus E|}{r^N} > 0.$$

**Observação B.18** *Pela Definição B.17, vê-se que, como*

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{|B_r(x) \cap E|}{r^N} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{E}$$

e

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{|B_r(x) \setminus E|}{r^N} = 0 \quad \forall x \in E^\circ,$$

tem-se  $\partial_*E \subset \partial E$ .

**Teorema B.19** (cf. [13] **Lema 5.5**) *Seja  $E \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto com perímetro localmente finito em  $\mathbb{R}^N$ . Então*

(i)  $\partial_{\text{red}}E \subset \partial_*E$ , e

(ii)  $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_*E \setminus \partial_{\text{red}}E) = 0$ .

**Teorema B.20 (Critério para perímetro finito)** *Seja  $E \subset \mathbb{R}^N$  mensurável. Então  $E$  tem perímetro localmente finito em  $\mathbb{R}^N$  se, e somente se,*

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap \partial_*E) < +\infty$$

para todo compacto  $K \subset \mathbb{R}^N$ .

# Apêndice C

## Análise Funcional

Coletamos, neste Apêndice, resultados de Análise Funcional que nos sejam úteis.

**Teorema C.1 (cf. [8] Proposição 3.5(iii))** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ ,  $v \in E$ , tais que*

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em } E.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, v_n \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall f \in E',$$

a sequência  $(\|v_n\|_E)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada e

$$\|v\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_E.$$

**Teorema C.2 (Eberlein-Šmulian, cf. [8] Teorema 3.18)** *Sejam  $E$  um espaço de Banach. Então  $E$  é reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  admite uma subsequência que converge fracamente para algum  $x \in E$ .*

**Teorema C.3 (cf. [8] Proposição 3.13)** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $E'$  seu dual topológico,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ ,  $f \in E'$ , tais que*

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad \text{em } E'.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in E,$$

a sequência  $(\|f_n\|_{E'})_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada e

$$\|f\|_{E'} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{E'}.$$

**Teorema C.4 (cf. [8] Corolário 3.30)** *Sejam  $E$  um espaço de Banach separável e  $E'$  seu dual topológico. Então toda sequência limitada  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$  admite uma subsequência que converge fracamente  $*$  para algum  $f \in E'$ .*

# Apêndice D

## Teoremas de Sobolev

Colecionamos, neste Apêndice, alguns Teoremas envolvendo imersões de espaços de Sobolev. Assumimos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto não-vazio e que  $1 \leq p < +\infty$ .

**Teorema D.1 (Traços de Funções de Sobolev, cf. [14] Teorema 4.6)** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto limitado com  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  e  $1 \leq p < +\infty$ , então:*

(i) *Existe um funcional linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega; \mathcal{H}^{N-1}),$$

*o operador traço sobre  $\partial\Omega$ , tal que*

$$Tf = f \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

*para toda  $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .*

(ii) *Ademais, para todos  $\eta \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  e  $f \in W^{1,p}(\Omega)$ ,*

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \eta \, dx = - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \eta \, dx + \int_{\partial\Omega} \eta \cdot \nu(Tf) \mathcal{H}^{N-1},$$

*onde  $\nu$  denota o vetor unitário normal externo a  $\partial\Omega$ .*

**Teorema D.2 (Teorema de Morrey, cf. [16] Teorema 7.19)** *Sejam  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  e  $0 < \alpha \leq 1$ . Suponha que existe uma constante positiva  $h$  tal que*

$$\int_B |\nabla u| \, dx \leq hr^{N-1+\alpha}$$

*para toda bola  $B = B_r(y) \subset \Omega$ . Então  $u$  admite um representante em  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  e, para uma constante  $C = C(N, \alpha, h) > 0$ ,*

$$[u]_{\alpha,B} \leq C,$$

*para toda bola  $B = B_r(y) \subset \Omega$ .*

**Teorema D.3 (Teorema de Rellich-Kondrachov, cf. [1] Teorema 6.3 e Observações 6.4)**

Assuma que  $\Omega$  é limitado com  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ . Então as seguintes imersões são compactas:

(i)  $W^{1,p}(\Omega)$  em  $L^q(\Omega)$ , para  $p \in [1, N)$  e  $q \in \left[1, \frac{Np}{N-p}\right)$ . Em particular, podemos tomar  $q = p$ .

(ii)  $W^{1,N}(\Omega)$  em  $L^q(\Omega)$ , para  $q \in [1, +\infty)$ . Em particular, podemos tomar  $q = N$ .

(iii)  $W^{1,p}(\Omega)$  em  $L^q(\Omega)$ , para  $p > N$  e  $q \in [1, +\infty]$ . Em particular, podemos tomar  $q = p$ .

**Teorema D.4 (Continuidade Lipschitz e  $W^{1,\infty}$ , cf. [14] Teorema 4.5)** Uma função real integrável  $u$  pertence a  $W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$  ou  $W^{1,\infty}(\Omega)$  se, e somente se, admite um representante em  $C_{loc}^{0,1}(\Omega)$  ou  $C^{0,1}(\Omega)$ , respectivamente.

# Apêndice E

## Distância de Hausdorff

Apresentamos aqui a noção de distância de Hausdorff e mostraremos que esta nos fornece uma métrica na família de compactos em  $\mathbb{R}^N$ .  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  é o conjunto das partes de  $\mathbb{R}^N$ .

**Definição E.1** A aplicação

$$d_H : (\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow [0, +\infty]$$
$$(X, Y) \mapsto d_H(X, Y) := \max \left\{ \sup_{x \in X} \text{dist}(x, Y), \sup_{y \in Y} \text{dist}(y, X) \right\}$$

é chamada **distância de Hausdorff**.

**Proposição E.2** Dados  $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \{\emptyset\}$ , tem-se

$$d_H(X, Y) \leq d_H(X, Z) + d_H(Y, Z).$$

**Demonstração:** Dados  $x \in X, y \in Y$  e  $z \in Z$ , temos

$$\text{dist}(x, Y) \leq |x - y| \leq |x - z| + |y - z|.$$

Assim, tomando, sucessivamente, os ínfimos em  $y$  e  $z$  e o supremo em  $x$ ,

$$\begin{aligned} & \text{dist}(x, Y) - |x - z| \leq |y - z| \quad \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall z \in Z \\ \Rightarrow & \text{dist}(x, Y) - |x - z| \leq \text{dist}(z, Y) \leq d_H(Y, Z) \quad \forall x \in X, \forall z \in Z \\ \Rightarrow & \text{dist}(x, Y) - d_H(Y, Z) \leq |x - z| \quad \forall x \in X, \forall z \in Z \\ \Rightarrow & \text{dist}(x, Y) - d_H(Y, Z) \leq \text{dist}(x, Z) \leq d_H(X, Z) \quad \forall x \in X \\ \Rightarrow & \text{dist}(x, Y) \leq d_H(X, Z) + d_H(Y, Z) \quad \forall x \in X \\ \Rightarrow & \sup_{x \in X} \text{dist}(x, Y) \leq d_H(X, Z) + d_H(Y, Z). \end{aligned}$$

De modo análogo, vê-se que

$$\sup_{y \in Y} \text{dist}(y, X) \leq d_H(X, Z) + d_H(Y, Z),$$

donde

$$d_H(X, Y) \leq d_H(X, Z) + d_H(Y, Z).$$

■

**Proposição E.3** *Seja  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \{\emptyset\}$  a coleção dos compactos em  $\mathbb{R}^N$ . Então  $d_H|_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}}$  é uma métrica em  $\mathcal{F}$ .*

**Demonstração:** A desigualdade triangular verifica-se pela proposição anterior e a simetria de  $d_H$  segue por definição. Observe que, se  $X, Y \in \mathcal{F}$ , então

$$d_H(X, Y) < +\infty,$$

de modo que a restrição  $d_H|_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}}$  é uma aplicação de  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  em  $[0, +\infty)$ . Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} d_H(X, Y) = 0 &\iff \sup_{x \in X} \text{dist}(x, Y) = \sup_{y \in Y} \text{dist}(y, X) = 0 \\ &\iff \text{dist}(x, Y) = \text{dist}(y, X) = 0 \quad \forall x \in X \forall y \in Y \\ &\iff X = Y, \end{aligned}$$

pois  $X$  e  $Y$  são fechados. Com isso, concluímos que  $d_H$  é uma métrica quando restrita a  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ .

■

**Proposição E.4** *Sejam  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  e  $X \in \mathcal{F}$  conjuntos uniformemente limitados em  $\mathbb{R}^N$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $X_n \rightarrow X$  em  $(\mathcal{F}, d_H)$ .

(ii) Para qualquer bola aberta  $B_r \subset \mathbb{R}^N$  com  $r > 0$ , valem as implicações:

$$[X \cap B_r \neq \emptyset] \Rightarrow [\exists n' \in \mathbb{N}; X_n \cap B_r \neq \emptyset \forall n \geq n'] \quad (\text{E.1})$$

e

$$[X \cap B_r = \emptyset] \Rightarrow [\exists n'' \in \mathbb{N}; X_n \cap B_{r/2} = \emptyset \forall n \geq n'']. \quad (\text{E.2})$$

**Demonstração:** (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Seja  $B_r \subset \mathbb{R}^N$  uma bola aberta não vazia. Começaremos mostrando (E.1). Suponha que  $X \cap B_r \neq \emptyset$  e escolha  $x_0 \in X \cap B_r$  e  $s > 0$  tais que

$$B_s(x_0) \subset B_r.$$

Seja  $n' \in \mathbb{N}$  tal que

$$d_H(X_n, X) < s \quad \forall n \geq n'.$$

Note que

$$\text{dist}(x_0, X_n) \leq d_H(X_n, X) < s \quad \forall n \geq n',$$

e daí, sendo cada  $X_n$  um conjunto fechado, obtemos

$$X_n \cap B_r \supset X_n \cap B_s(x_0) \neq \emptyset \quad \forall n \geq n'.$$

Suponha agora, por contrapositividade, que a tese de (E.2) é falsa para  $B_r$ . Isso implica na existência de uma subcoleção  $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$X_{n_k} \cap B_{r/2} \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Seja  $n'' \in \mathbb{N}$  tal que

$$d_H(X_n, X) < \frac{r}{2} \quad \forall n \geq n''.$$

Escolha  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq n''$  e tome  $y_k \in X_{n_k} \cap B_{r/2}$ . Então

$$\text{dist}(y_k, X) < \frac{r}{2}.$$

Portanto

$$X \cap B_r \neq \emptyset.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Fixado  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $\{B_{1/k}(x_n^k)\}_{n=1}^{\infty}$  uma cobertura de  $X$  por meio de bolas abertas centradas em pontos  $x_n^k \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  é compacto, existe um subconjunto finito

$$\{y_1^k, \dots, y_{m_k}^k\} \subset \{x_1^k, x_2^k, \dots\}$$

tal que

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} B_{1/k}(y_j^k).$$

Por (E.1), existe  $n'_k \in \mathbb{N}$  tal que

$$X_n \cap B_{1/k}(y_j^k) \neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, m_k, \quad n \geq n'_k.$$

Dado  $x \in X$ , existe  $j \in \{1, \dots, m_k\}$  tal que

$$|x - y_j^k| < \frac{1}{k}.$$

Para  $n \geq n'_k$ , podemos escolher um  $x_n \in X_n \cap B_{1/k}(y_j^k)$  e assim obter que

$$\text{dist}(x, X_n) \leq |x - x_n| < \frac{2}{k}.$$

Daí

$$\sup_{x \in X} \text{dist}(x, X_n) \leq \frac{2}{k} \quad \forall n \geq n'_k,$$

o que implica em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \text{dist}(x, X_n) = 0. \quad (\text{E.3})$$

Suponha agora, por contradição, que a sequência cujo  $n$ -ésimo termo é

$$\sup_{y \in X_n} \text{dist}(y, X)$$

não converge para 0. Isso nos dá um  $\delta > 0$  e uma subcoleção infinita  $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tais que

$$\sup_{y \in X_{n_k}} \text{dist}(y, X) \geq \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado  $k \in \mathbb{N}$  vê-se que, como  $X_{n_k}$  e  $X$  são compactos, existe  $y_k \in X_{n_k}$  tal que

$$\text{dist}(y_k, X) \geq \delta.$$

Assim

$$X \cap B_\delta(y_k) = \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (\text{E.4})$$

Por hipótese, temos que  $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  é uniformemente limitada, donde a sequência  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge para algum  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Seja  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|y_k - y_0| < \frac{\delta}{2} \quad \forall k \geq k_0.$$

Então  $B_{\delta/2}(y_0) \subset B_\delta(y_k) \forall k \geq k_0$ . De (E.4), temos

$$X \cap B_{\delta/2}(y_0) = \emptyset$$

e (E.2) implica na existência de  $n'' \in \mathbb{N}$  tal que

$$X_n \cap B_{\delta/4}(y_0) = \emptyset \quad \forall n \geq n''.$$

Seja  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$y_k \in B_{\delta/4}(y_0) \quad \forall k \geq k_1.$$

Dado  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq n''$  e  $k \geq k_1$ , obtém-se

$$y_k \in X_{n_k} \cap B_{\delta/4}(y_0),$$

um absurdo. Logo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(y, X) = 0. \quad (\text{E.5})$$

Por (E.3) e (E.5), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(X_n, X) = 0.$$

■

**Proposição E.5** *Sejam  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  e  $X \in \mathcal{F}$  conjuntos uniformemente limitados em  $\mathbb{R}^N$  tais que*

$$X_n \rightarrow X \quad \text{em } (\mathcal{F}, d_H).$$

Então:

(i) *Dado  $x \in X$ , existem  $x_n \in X_n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , tais que*

$$x_n \rightarrow x.$$

(ii) *Para toda seqüência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$  convergente com*

$$y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}^N,$$

*tem-se  $y \in X$ .*

**Demonstração:** (i): Seja  $x \in X$ . Por (E.1), dado  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n'_k \in \mathbb{N}$  tal que

$$X_n \cap B_{1/k}(x) \neq \emptyset \quad \forall n \geq n'_k.$$

Seja  $m_k = \max\{k, n'_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Então

$$X_{m_k} \cap B_{1/k}(x) \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Escolhemos:

- $x_{m_k} \in X_{m_k} \cap B_{1/k}(x)$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ ;

- $x_n \in X_n$  qualquer, para cada  $1 \leq n < m_1$ ;
- $x_n \in X_n \cap B_{1/k}(x)$ , para cada  $m_k < n < m_{k+1}$  e  $k \in \mathbb{N}$ .

Dessa forma, a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é tal que  $x_n \in X_n \forall n \in \mathbb{N}$  e

$$x_n \rightarrow x.$$

(ii): Considere agora  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$  e  $y \in \mathbb{R}^N$  tais que

$$y_n \rightarrow y.$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $n_k'' \in \mathbb{N}$  tal que

$$|y_n - y| < \frac{1}{2k} \quad \forall n \geq n_k''.$$

Temos

$$X_n \cap B_{1/(2k)}(y) \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_k'' \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donde a contrapositiva de (E.2) nos dá

$$X \cap B_{1/k}(y) \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Daí

$$X \cap \bar{B}_{1/k}(y) \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e assim, sendo cada  $X \cap \bar{B}_{1/k}(y)$  um conjunto compacto,

$$X \cap \{y\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} (X \cap \bar{B}_{1/k}(y)) \neq \emptyset,$$

isto é,  $y \in X$ .

■

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F. **Sobolev spaces**. 2 ed. Academic Press. ISBN 9780120441433. Nova York. 2003. 305 pp. (Pure and Applied Mathematics, v. 140)
- [2] Alexiades, V.; Solomon, A. D. **Mathematical modeling of melting and freezing Processes**. Taylor & Francis. ISBN 1-56032-125-3. Washington. 1993. 323 pp.
- [3] Alt, H. W. The dam problem. **Free boundary problems: theory and applications**. v. 1. p 52-68. University of Florence. ISBN 0-273-08589-1. Londres. 1983.
- [4] Alt, H. W.; Caffarelli, L.A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Journal für die reine und angewandte Mathematik*. v. 325. p 105-144. de Gruyter. Berlim. 1981.
- [5] Alt, H. W.; Caffarelli, L.A.; Friedman, A. A free boundary problem for quasilinear elliptic equations. In: **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa**. v. 11. n. 4. p 1-44. Pisa. 1984. Disponível em:  
<[http://www.numdam.org/item/?id=ASNSP\\_1984\\_4\\_11\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item/?id=ASNSP_1984_4_11_1_1_0)>. Acesso em 22 mar. 2021.
- [6] Av. R. B. et al. **Energy minimization in CPn: some numerical and analytical results**. [S.l.: s.n.]. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1810.04640>>. Acesso em: 5 abr. 2021.
- [7] Bazarganzadeh, M. **Free boundary problems of obstacle type, a numerical and theoretical study**. Tese de Doutorado. Uppsala University. ISBN 978-91-506-2316-1. Uppsala. 2012. 67 pp. Disponível em:  
<<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:562616/FULLTEXT01.pdf>>. Acesso em: 5 mar. 2021.

- [8] Brezis, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer. ISBN 978-0-387-70913-0. 2<sup>a</sup> ed. Nova York. 2011. 599 pp.
- [9] Briozzo, A. C.; Tarzia, D. A. Existence, uniqueness and an explicit solution for a one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation. **International Series of Numerical Mathematics**. v. 154. p 117-124. Birkhäuser Verlag. ISBN 978-3-7643-7718-2. Basel. 2006.
- [10] Buckmaster, J. D.; Ludford, G. S. S. **Theory of laminar flames**. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-23929-5. Cambridge. 1982. 266 pp.
- [11] Danielli, D.; Petrosyan, A. A minimum problem with free boundary for a degenerate quasilinear operator. **Calculus of Variations**. v. 23. p 97-124. Springer-Verlag. [S.l.] 2005. Disponível em: <<http://cvgmt.sns.it/paper/1098/>>. Acesso em: 6 mar. 2021.
- [12] Evans, L. C. A new proof of local  $C^{1,\alpha}$  regularity for solutions of certain degenerate elliptic P.D.E. **Journal of Differential Equations**. v. 45. n. 3. p 356-373. Elsevier. ISSN 0022-0396. [S.l.] 1982. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002203968290033X>>. Acesso em: 02 ago. 2021.
- [13] \_\_\_\_\_. **Partial differential equations**. American Mathematical Society. ISBN-13 978-0-8218-0772-9. Berkeley. 1998. 662 pp. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19)
- [14] Evans, L. C.; Gariepy, R. F. **Measure theory and fine properties of functions**. CRC Press. ISBN-13 978-1-4822-4238-6. Boca Raton. 2015. 296 pp.
- [15] Galiano, G.; Velasco, J. A dynamic boundary value problem arising in the ecology of mangroves. **International Series of Numerical Mathematics**. v. 154. p 179-188. Birkhäuser Verlag. ISBN 978-3-7643-7718-2. Basel. 2006.
- [16] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Springer. ISBN 3-540-41160-7. Reprint of the 1998 ed. Berlin. 2001. 394 pp. (Classics in mathematics)

- [17] Heinonen, J.; Kilpeläinen, T.; Martio, O. **Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations**. Dover Publications. ISBN 0-486-45050-3. Nova York. 1993. 404 pp.
- [18] Kinderlehrer, D.; Stampachia, G. **An introduction to variational inequalities and their applications**. Academic Press. ISBN 0-12-407350-6. Nova York. 1980. 313 pp.
- [19] Lewis, J. L. Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations. **Indiana University Mathematics Journal**. v. 32. n. 6. p 849-858. Indiana University Mathematics Department. Indiana. 1983. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/24893388>>. Acesso em: 02 ago. 2021.
- [20] Lewis, J. L. Smoothness of certain degenerate elliptic equations. **Proceedings of the American Mathematical Society**. v. 80. n. 2. p 259-265. American Mathematical Society. ISSN 0002-9939. Providence. 1980. Disponível em: <<https://www.ams.org/journals/proc/1980-080-02/>>. Acesso em: 02 ago. 2021.
- [21] Lieberman, G. M. The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations. **Communications in Partial Differential Equations**. v. 16. n. 2&3. p 311-361. Taylor & Francis. Londres. 1991.
- [22] Maggi, F. **Sets of finite perimeter and geometric variational problems**. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-02103-7. Cambridge. 2012. 454 pp. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 135)
- [23] Martínez, S.; Wolansky, N. A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces. **Advances in Mathematics**. v. 218. n. 6. p 1914-1971. Elsevier. Princeton. 2008. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870808000984>>. Acesso em: 02 ago. 2021.
- [24] Pascucci, A. Free boundary and optimal stopping problems for american asian options. **Finance and Stochastics**. n. 12. p 21-41. Springer. Heidelberg. 2008. Disponível em: <[http://amsacta.unibo.it/2322/1/28\\_American.pdf](http://amsacta.unibo.it/2322/1/28_American.pdf)>. Acesso em: 6 mar. 2021.

- [25] Ponce, A. C. Métodos clássicos em teoria do potencial. *In: II ESCOLA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. Anais...* Rio De Janeiro. 2006. Disponível em: <[https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM\\_24.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM_24.pdf)>. Acesso em: 24 set. 2021.
- [26] Rapuch, G. American options and the free boundary exercise region: a PDE approach. **Interfaces and Free Boundaries**. v. 7. n. 1. p 79-98. European Mathematical Society. Zurique. 2005.
- [27] Ros-Oton, X. Obstacle problems and free boundaries: an overview. **SeMA**. n. 75. p 399-419. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1707.00992>>. Acesso em: 6 mar. 2021.
- [28] Rubinstein, L. I. **The Stefan problem**. Translated from the russian by Solomon, A. D. American Mathematical Society. ISBN 0-8218-1577-6. Providence. 1971. 419 pp.
- [29] Silva, J. B. **O método das sub e supersoluções para um sistema do tipo  $(p, q)$ -Laplaciano**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande. 2013. 105 pp. Disponível em: <<http://www.mat.ufcg.edu.br/PPGMat/DissertacaoPDF/JoseBrito.pdf>>. Acesso em: 14 maio 2021.
- [30] Stefan, J. Über einige probleme der theorie der wärmeleitung. **Mathematik Kollektion**. v. 98. p. 473-484. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 1889.
- [31] \_\_\_\_\_. Über die theorie der eisbildung, insbesondere über die eisbildung in polarmeere. **Annalen der Physik und Chemie**. v. 42. p. 269-286. Akademie der Wissenschaften in Wien. Viena. 1891.
- [32] Velichkov, B. **Regularity of the one-phase free boundaries**. Lecture Notes. [S.l.] 2019. 147 pp. Disponível em: <<http://cvgmt.sns.it/paper/4367/>>. Acesso em: 25 fev. 2021.