Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndiger logarítimica: Uma abordagem via inclinação fraca

por

Rodrigo Marques Faustino da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Campina Grande - PB

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e FAPESQ.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndiger logarítimica: Uma abordagem via inclinação fraca

por

Rodrigo Marques Faustino da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

S586m Silva, Rodrigo Marques Faustino da.

Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndinger logarítimica: uma abordagem via inclinação fraca / Rodrigo Marques Faustino da Silva. – Campina Grande, 2022.

101 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação: Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega".

Referências.

1. Análise Matemática. 2. Equação Logarítimica de Schröndinger. 3. Inclinação Fraca. 4. Versão Simétrica do Teorema – Passo da Montanha – Funcionais Semi Contínuos Inferiormente. I. Nóbrega, Alânnio Barbosa. II. Título.

CDU 517(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndiger logarítimica: Uma abordagem via inclinação fraca

por

Rodrigo Marques Faustino da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matatemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares - UFCA

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG

Prof. Dr. Romildo do Nascimento Lima - UFCG

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro - 2022

Dedicatória

Ao Espírito Santo, à minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

"Mesmo que eu tivesse o dom da profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência; mesmo que tivesse toda a fé, a ponto de transportar montanhas, se não tiver amor, eu nada seria."I Coríntios, 13

Por isso, agradeço, ao meu amigo Espírito Santo. Por meio do sublime amor, Ele me conduziu em cada etapa dessa dissertação dando ânimo e zelo para realizar as atividades necessárias, assim como me apresentou pessoas maravilhosas e me concedeu amigos verdadeiros.

Agradeço a minha família, Jeová (pai), Paula (mãe) e Geovânia (irmã), que sempre lutaram por mim e me apoiaram diariamente. Também agradeço a uma família que amo, minha namorada Maria Clara, meus sogros, Adriana e Dedé, e ao meu cunhado, Vinícius, que também sempre me motivavam a perseverar. Aos meus familiares na fé, a todos do grupo de oração CRES, da catequese e de toda Paróquia Sagrada Família, obrigado por suas orações e pela doce fraternidade.

Também agradeço a cada um dos meus amigos da UAMat, em especial, Ismael, Luis, Siebra e Pedro Mestrado que acreditaram em mim mais do que eu mesmo acreditaria. Obrigado pelo apoio e pela fraternidade de vocês.

Agradeço a cada um dos meus professores orientadores, em ordem cronológica, a começar com Ronaebson Carvalho durante o ensino médio do IF, a passar por Marinho no treinamento das olimpíadas, depois por Rodrigo Cohen no PICME, por Daniel Cordeiro no PET, por Claudianor Oliveira Alves nas Iniciações Científicas e o primeiro ano de mestrado, Luiz Antônio no Estágio Supervisionado e Alânnio Nóbrega na dissertação. Cada um de vocês me instruíram, educaram e motivaram, sempre com muito boa vontade, a fim de que eu conseguisse dar o meu melhor. Me perdoem pelo tanto de trabalho que dei a vocês. Também agradeço a todos os professores e funcionários da família UAMat da UFCG. Especialmente, Aninha que sempre nos alegra com sua presença. Por fim, agradeço a banca por examinarem essa dissertação afim de torná-la útil para outros amantes da matemática. Muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho, estaremos interessados em estudar resultados de multiplicidade de soluções e positividade de soluções para a equação de Schröndinger cuja não linearidade é logarítmica. A não linearidade logarítmica traz muitos desafios. Por exemplo, ao fazer uma análise variacional, percebe-se que o funcional energia associado não é de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, nessa dissertação é apresentada uma Versão Simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente que é elaborada por meio do conceito de inclinação fraca (weak slope).

Palavras-chave: Equação logarítmica de Schrödinger; Inclinação fraca; Versão Simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente.

Abstract

In this essay, we are interested to study some results of solution multiplicity and positivity about the Schröndinger's equation which its non-linearity is logarithmic. This non-linearity brings up many issues. For instance, by doing a varational analysis, we realize that the functional energy is not in $C^1(\mathbb{R}^N)$ class. Therefore, in this Master's thesis, it is shown a version of a Simetric Mountain Pass for lower semicontinuity which is drown up trough of the concept of weak slope.

Keywords: Logarithmic Schröndinger's Equation; Weak Slope; Simetric Mountain Pass for lower semicontinuity.

Conteúdo

Introdução 6

1 A inclinação fraca **11**

1.1 Inclinação fraca 11

1.2 Relações entre a inclinação fraca e outros conceitos de derivada 26

1.3 A inclinação fraca equivariante 37

1.3.1 Conceitos básicos sobre ação de grupo e grupo de Lie 37

1.3.2 A inclinação fraca equivariante 40

2 Teorema do Passo da Montanha simétrico para funcionais semicontínuos inferiormente **44**

2.1 Conceitos básicos 44

2.2 Teorema da Deformação 45

2.3 Generalização da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para Funcionais não suaves 59

3 Equações de Schröndiger com não linearidade logarítmica **69**

3.1 Propriedades do funcional energia 69

3.2 Multiplicidade de solução, Regularidade e positividade das soluções . . 83

3.2.1 Multiplicidade de solução 83

3.2.2 Positividade 86

3.2.3 Regularidade 87

Bibliografia **90**

A Introdução à Teoria do Gênero **93**

B Resultados sobre teoria da regularidade **99**

Notações

- $B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}, \quad r > 0$;
- $\mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, ..., x_N) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., N\}$ e $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;
- $supt(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$;
- $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$ e $u^-(x) = \max\{0, -u(x)\}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável;
- Dado $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, definimos, para algum $M \in \mathbb{R}$, $[u \geq M] = \{x \in \Omega \ : \ u(x) \geq M\}$. Analogamente define-se $[u \leq M]$, $[u > M]$ e $[u < M]$;
- $\rightharpoonup$ designa convergência fraca e $\overset{\star}{\rightharpoonup}$ designa convergência fraca estrela;
- $A \hookrightarrow B$ designa que A está imerso em B;
- $C_0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é contínua com $supp(u) \subset \Omega$ compacto$\}$;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\}, p \in [1, +\infty)$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \text{ existe } c > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq c \text{ q.t.p. em } \Omega\}$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é continuamente derivável k vezes$\}$;
- $L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_A |u(x)| dx < +\infty, \text{ para qualquer } A \subset\subset \Omega \right\}$;
- X' denota o dual topológico de X;

- $||\cdot||_*$ denota a norma dos funcionais lineares contínuos, isto é, dados X um espaço de Banach e $I \in X'$

$$||I||_* = \sup\{|I(x)| \ : \ x \in X \text{ e } ||x||_X \leq 1\}.$$

- $G(f)$ denota o gráfico da função f.

Introdução

A física quântica é o estudo dos fenômenos físicos para micro-objetos como, por exemplo, átomos e moléculas. O tamanho para que um objeto seja considerado um micro-objeto é determinado pela sua magnitude comparada à constante de Planck $\hbar \cong 6,62 \cdot 10^{-}34\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$. Para os macro-objetos, a física clássica descreve bem o comportamento desses objetos.

Porém, os sentidos humanos são incapazes, geralmente, para compreender os micro fenômenos diretamente. Sendo assim, faz-se necessário um aparato intermediário tal qual o seu comportamento pode ser interpretado pela mecânica clássica. E, observando tais mudanças, pode-se concluir alterações na dimensão quântica desse aparato intermediador.

Dessa forma, para fazer um estudo profundo da mecânica quântica, o físico J. Von Neumann determinou um sistema básico de postulados. Vejamos o primeiro postulado:

Postulado 1. *Os estados de um sistema mecânico quântico são descritos por vetores não nulos de um espaço de Hilbert complexo e separável L. Dois vetores descrevem o mesmo estado se, e somente se, que são diferentes por apenas um fator complexo não-nulo. Cada estado observável corresponde unicamente a um operador autoadjunto em L.*

O espaço L é denominado por espaço de estado e os vetores desse espaço são chamados por vetores de estado. Nessa perspectiva, pode-se ver como os fenômenos da mecânica quântica podem ser estudados por meio de ferramentas sofisticadas da análise funcional tais como a Teoria Espectral.

Na mecânica quântica, segundo Berezin e Shubin ([2]), a mais importante quantidade física de qualquer sistema mecânico quântico é a energia desse sistema. De-

nominando por H um operador energia, o postulado 3 de Neumann afirma que esse operador determina a lei da evolução do sistema mecânico quântico:

Postulado 2. *Seja $\psi_0 \in L$ o estado do sistema para $t = 0$. Então, para qualquer t, o estado do sistema é representado pelo vetor $\psi(t) = U_t\psi_0$, onde U_t é um operador unitário denominado por operador evolução. A função vetorial $\psi(t)$ é diferenciável se $\psi(t) \in D_H$, onde D_H é o domínio do operador H (somente no caso $t = 0$) e, nesse caso,*

$$i\hbar\frac{d\psi(t)}{dt} = H(\psi(t)), \tag{1}$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck e $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária.

A Relação (1) é a equação base para a mecânica quântica e é denominada de Equação de Schrödinger.

Nesta dissertação, apresentaremos uma teoria dos pontos críticos para funcionais não suaves, seguindo os passos do artigo de D.Avenia, Montefusco e Squassina [11], afim de utilizá-lo para analisar soluções da seguinte equação de Schrödinger:

$$i\partial_t\phi + \Delta\phi + \phi\log|\phi|^2 = 0 \tag{2}$$

sendo $\phi : [0, \infty] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e $N \geq 3$. Observe que a Equação (2) pode ser considerada uma equação de Schrödinger, pois ao definir

$$H(\phi) = -\hbar(\Delta\phi + \phi\log|\phi|^2).$$

Podemos escrever a Equação (2) como a Equação (1). Segundo Zloshchastiev [26], as soluções dessa equação admite aplicações na mecânica quântica, ótica quântica, física nuclear, fenômenos de transporte e difusão, sistemas quânticos abertos, gravidade quântica efetiva, teoria da superfluidibilidade e a condensação de Bose-Einstein.

Considere as ondas estacionárias são funções da forma $\phi = e^{i\omega t}u(x)$, onde u é uma função que é solução do problema:

$$-\Delta u + \omega u = u\log u^2, \tag{3}$$

onde $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Essas ondas estacionárias são soluções da Equação (2). Dessa forma, para solucionar a Equação (2), basta procurar as soluções da equação diferencial parcial elíptica (3). Para fazer uma análise variacional desse problema, inspirados pela teoria dos pontos críticos, somos motivados a estudar os pontos críticos do funcional:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2 + \frac{\omega+1}{2}\int|u|^2 - \frac{1}{2}\int G(u). \tag{4}$$

onde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$G(s) = \begin{cases} s^2 \log(s^2), & se\ s \neq 0 \\ 0, & se\ s = 0. \end{cases}$$

Devido à desigualdade logarítmica de Sobolev presente no livro Analysis de Lieb-Loss ([16], Capítulo 8), temos

$$\int u^2 \log u^2 \leq \frac{a^2}{\pi} ||\nabla u||_2^2 + (\log ||u||_2^2 - n(1+a))||u||_2^2 \tag{5}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $a > 0$. Assim, $J(u) > -\infty$. Mas, existem elementos $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $\int u^2 \log u^2 = -\infty$. Por exemplo,

Exemplo 1. Considere uma função suave $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u(x) = \begin{cases} (|x|^{\frac{N}{2}} \log |x|)^{-1}, & |x| \geq 3, \\ 0, & |x| \leq 2. \end{cases}$$

Então, $\int u^2 \log u^2 = -\infty$. Provemos que, para $N = 1$, temos $\int_{\mathbb{R}} u^2 \log u^2 = -\infty$. Observemos que, sendo u uma função contínua, temos

$$\left| \int_{-2}^{2} u^2 \log u^2 dx \right| < \infty.$$

Como u é uma função par, segue que podemos ater a nossa atenção a integral:

$$\int_3^\infty u^2 \log u^2 dx.$$

Substituindo o valor de u e usando propriedades do logaritmo, obtemos que

$$\int_3^\infty u^2 \log u^2 dx = \int_3^\infty \frac{\log x + 2 \cdot \log(\log x)}{x(\log x)^2} dx.$$

Fazendo a substituição de variável $y = \log x$, obtemos que $dy = \frac{1}{x} dx$. Portanto,

$$\int_3^\infty u^2 \log u^2 dx = -\int_{\log(3)}^\infty \frac{y + 2 \cdot \log(y)}{y^2} dy = -\left(\int_{\log(3)}^\infty \frac{1}{y} dy + \int_{\log(3)}^\infty \frac{2 \cdot \log(y)}{y^2} dy \right),$$

onde a segunda integral é finita e a primeira é infinita. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 \log u^2 dx = -\infty.$$

Então, em geral, J não é C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Devido a perca de suavidade, no estudo da existência de soluções para a Equação (3), segundo D'Avenia, Montefusco e Squassina [11], há outros trabalhos cuja abordagem é indireta. Por um lado, no artigo de Cazenave [8], a ideia é trabalhar com o espaço de Banach:

$$W = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \; ; \; \int u^2 |\log u^2| < \infty \right\}.$$

com norma:

$$||u||_W = ||u||_{H^1} + \inf \left\{ \gamma > 0 \; ; \; \int A\left(\frac{|u|}{\gamma}\right) \leq 1 \right\},$$

onde $A(s) = -s^2 \log s^2$ em $[0, \epsilon^{-3}]$ e $A(s) = 3s^2 + 4e^{-3}s - e^{-6}$ em $[e^{-3}, \infty)$. Sendo assim, nessa estrutura, $J : W \to \mathbb{R}$ está bem definida e é C^1. Por outro lado, no artigo de Guerrero, López e Nieto [15], é penalizada a não linearidade em torno da origem afim de obter estimativas a priori afim de encontro soluções não triviais como limite. Nessa dissertação, será apresentada uma abordagem direta, realizada por D'Avenia, Montefusco e Squassina, para determinar múltiplas soluções da Equação 3 por meio do estudo da inclinação fraca.

Inicialmente, afim de evitar a má definição da expressão

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2; \;\; \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

consideraremos apenas as funções testes v de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que são essencialmente limitadas e possuem suporte compactos, pois, nos asseguraremos que

$$\int uv \log u^2 dx < \infty$$

e fica bem definida a expressão:

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2; \;\; \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Sabendo que o funcional J tem uma perca de suavidade, no capítulo 1 é desenvolvido o conceito de inclinação fraca. O conceito de inclinação fraca procura dar um sentido de inclinação de uma derivada para funções semicontínuas inferiormente. Na seção 2 do capítulo 1 é mostrada relações entre o conceito de inclinação fraca e outros conceitos de derivadas, a saber, a inclinação forte [14], o gradiente generalizado de Clark ([9],[10],[19] e [23]) e a derivada clássica. Na seção 3 é apresentada a inclinação

fraca equivariante juntamente com os conceitos balizares como ação de grupo e grupo de Lie [21].

Na primeira seção do capítulo 2, são apresentados os conceitos de sequência Palais-Smale e a condição Palais-Smale para funcionais não-suaves. Na segunda seção é provado um teorema da deformação para funções apenas contínuas e, ainda mais, a deformação é equivariante em relação a ação de grupo em questão. Já na seção 3, inspirados pela versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha presente no trabalho do Rabinowitz [22], é mostrada uma versão desse teorema para funcionais que são apenas semicontínuos inferiormente.

Por fim, no capítulo 3, é mostrado que a Equação (3) possui uma infinidade de soluções cuja energias converge para mais infinto. Ademais, é discutida a positividade dessas soluções e é provado que tais soluções são funções $C^2(\mathbb{R}^N)$.

Capítulo 1

A inclinação fraca

Neste capítulo apresentaremos uma generalização do conceito de derivada para funcionais que não são deriváveis no sentido clássico.

A teoria apresentada a seguir define o conceito de inclinação fraca (weak slope) que tem muita semelhança e relação com a norma da diferencial de um funcional. Na Seção 1.1, veremos como tal teoria é construída para funções contínuas e, em seguida, estendida para funções semicontínuas inferiormente (s.c.i.).

Vale ressaltar que há diversas generalizações do conceito de derivada. Por exemplo, o gradiente generalizado de Clarke (vide [9],[10],[19] e [23]), a subdiferencial e a inclinação forte (vide [14). Na Seção 1.2, veremos algumas relações entre esses conceitos de derivada e provaremos algumas relações desses conceitos com o conceito de inclinação fraca.

Por fim, na Seção 1.3, veremos o conceito de inclinação fraca equivariante que é uma generalização do conceito de inclinação fraca para funções que possuem certas simetrias e discutiremos algumas de suas propriedades e implicações.

1.1 Inclinação fraca

Ao longo dessa seção, consideraremos X como um espaço métrico munido com a métrica d.

Definição 1.1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $u \in X$. Denotaremos por

$|df|(u)$ como o supremo dos $\sigma \in [0, +\infty]$ tal que existe $\delta > 0$ e uma aplicação contínua

$$H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to X$$

tal que

a) $d(H(v,t), v) \leq t$,

b) $f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$.

O número real estendido $|df|(u)$ é chamada inclinação fraca de f em u.

Exemplo 2. Sejam (X, d) um espaço métrico e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz com constante de Lipschitz k, então $|dg|(x) \leq k$.

De fato, seja $\sigma \geq 0$ tal que exista uma aplicação contínua

$$H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to X$$

tal que

(i) $d(H(v,t), v) \leq t$,

(ii) $g(H(v,t)) \leq g(v) - \sigma t$.

Observemos que

$$\begin{aligned} \sigma t &\leq g(v) - g(H(v,t)) \\ \Rightarrow \sigma &\leq \frac{g(v) - g(H(v,t))}{t} \leq \frac{k \cdot d(v, H(v,t))}{t} \\ \Rightarrow \sigma &\leq \frac{k \cdot t}{t} = k. \end{aligned}$$

Logo, o k é uma cota superior para esses σ. Como $|dg|(x)$ é o supremo de tais σ, segue que

$$|dg|(x) \leq k.$$

Observe que tal propriedade é visível geometricamente, visto que toda função lipschitz está entre duas funções afins com inclinação k. Portanto, faz sentido que a inclinação fraca seja majorada por essa constante k (vide Figura 1.1).

Exemplo 3. Consideremos agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = |x|$. Então

$$|df|(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0. \end{cases}$$

De fato, vejamos, primeiramente, para o caso em que x_0 é positivo. Observemos que, pelo Exemplo (2), temos $|df|(x_0) \leq 1$. Falta então provar que $|df|(x_0) \geq 1$.

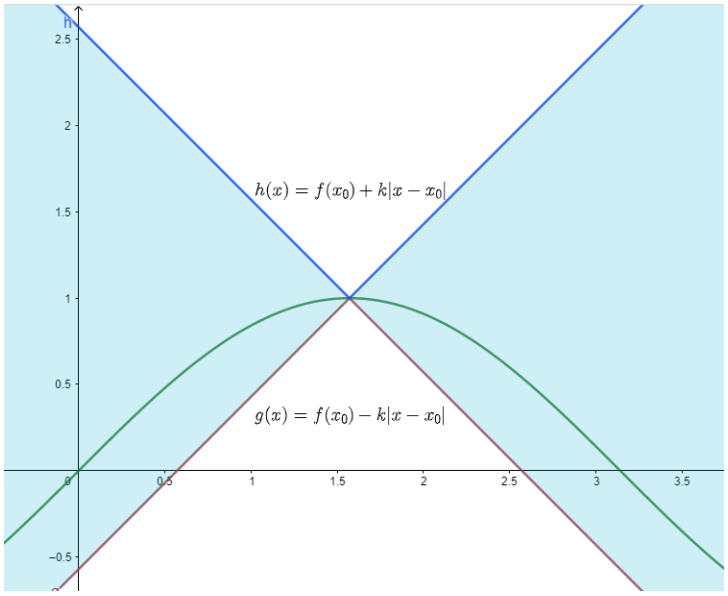


Figura 1.1: Função Lipschitz delimitada por funções lineares com inclinação k.

Consideremos $\delta = \frac{x_0}{8}$, $H : B(x_0, \delta) \times [0, \delta] \to \mathbb{R}$ onde $H(y, t) = y - t$. Notemos que H é contínua e que

$$d(H(y,t), y) = |y - t - y| = |t| = t$$

para todo $y \in B(x_0, \delta)$.

Mostremos agora que H goza da propriedade (b) presente na Definição (1.1). Seja $y \in B(x_0, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Observemos que podemos escrever $y = x_0 + \epsilon$ ou $y = x_0 - \epsilon$, onde $\epsilon \in [0, \delta]$. Ora, se $y = x_0 + \epsilon$, então

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{|x_0 + \epsilon| - |x_0 + \epsilon - t|}{t}.$$

Como $t < \delta = \frac{x_0}{8}$, segue que

$$x_0 - t \geq 0.$$

Logo,

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{x_0 + \epsilon - (x_0 + \epsilon - t)}{t} = \frac{t}{t} \geq 1.$$

Por outro lado, se $y = x_0 - \epsilon$ e, ao observarmos que $\epsilon, t \in [0, \frac{x_0}{8}]$, temos $x_0 - \epsilon - t \geq 0$. Logo,

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{x_0 - \epsilon - (x_0 - \epsilon - t)}{t} = \frac{t}{t} \geq 1.$$

Tendo em vista que, em ambos os casos, temos

$$1 \leq \frac{f(y) - f(H(y,t))}{t}$$

para todo $y \in B(x, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Daí, por meio de manipulações algébricas, segue que

$$f(H(y,t)) \leq f(y) - 1 \cdot t.$$

Dessa forma, por definição, devemos ter $|df|(x_0) \geq 1$. Portanto, $|df|(x_0) = 1$ para $x_0 > 0$.

Analogamente, mostra-se que $|df|(x_0) = 1$ para x_0 negativo. Observe que, nessas regiões, a função módulo é derivável e, ainda mais,

$$|f'(x)| = 1 = |df|(x)$$

para $x \neq 0$.

Tal igualdade não é uma mera coincidência, no Corolário 1.21, é afirmado que, para funções deriváveis, a inclinação fraca coincide com a norma da diferencial da função em questão.

Vejamos agora o caso em que x é nulo. Para isso, consideremos $\sigma \geq 0$ e uma aplicação H associada a σ conforme a Definição (1.1). Observemos que, ao aplicarmos $v = 0$ na propriedade (b) de H, temos

$$\begin{aligned} f(H(0,t)) &\leq f(0) - \sigma \cdot t \Rightarrow \\ \sigma &\leq \frac{f(0) - f(H(0,t))}{t} \Rightarrow \\ \sigma &\leq \frac{|0| - |H(0,t)|}{t} \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\sigma = 0$. Sendo assim, $|df|(0) = \sup \sigma = 0$.

Observemos que, nesse último exemplo, vimos que a inclinação fraca da função módulo no 0 é o 0. Perceba que 0 é um mínimo global da função módulo. A próxima proposição mostra que a inclinação fraca é nula em mínimos locais.

Proposição 1.2. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $U \subset X$ um subconjunto aberto. Se $u \in U$ é um ponto de mínimo local de f, então $|df|(u) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $|df|(u) > 0$. Consideremos $\sigma \in (0, |df|(0))$ e uma aplicação $H : U \times [0, \delta] \to \mathbb{R}$ como na Definição (1.1). Sendo assim,

a) $d(x, H(x,t)) \leq t$

b) $f(H(x,t)) \leq f(x) - \sigma t$

para todo $x \in U$ e $t \in [0, \delta]$. Note que, da propriedade (a), temos

$$H(x,t) \to x, \quad \text{quando } \ t \to 0.$$

Sendo $x = u$ um ponto de mínimo, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$f(u) \leq f(H(u,t)), \quad \forall t \in [0, \delta_1],$$

visto que u é um ponto de mínimo local de f. Dessa forma, observemos agora que, de (b), temos

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t}$$

aplicando $x = u$, temos

$$\sigma \leq \frac{f(u) - f(H(u,t))}{t} \leq 0, \quad \forall t \in [0, \delta_1].$$

Assim, o 0 é uma cota superior de tais σ, portanto

$$|df|(u) \leq 0 \Rightarrow |df|(u) = 0.$$

■

A seguir, definiremos dois importantes conjuntos que serão o alicerce para a construção do conceito de inclinação fraca para funções semicontínuas inferiormente:

Definição 1.3. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferiormente. Denominamos de domínio efetivo de f o conjunto

$$D(f) = \{x \in X : f(u) < \infty\}$$

e de epigráfico de f o conjunto

$$epi(f) = \{(u, \xi) \in X \times \mathbb{R}; f(u) \leq \xi\}.$$

onde o epigráfico é munido com a métrica

$$d((u,\xi),(v,\mu)) = (d(u,v))^2 + |\xi - \mu|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação: 1.4. Se f é semicontínua inferiormente, então o $epi(f)$ é fechado em $X \times \mathbb{R}$. De fato, seja $(u, \xi) \in \overline{epi(f)}$. Logo, existe uma sequência $((u_n, \xi_n))$ de elementos de $\in epi(f)$ tal que

$$(u_n, \xi_n) \to (u, \xi),$$

segundo a métrica do $epi(f)$. Sendo assim,

$$d((u_n, \xi_n), (u, \xi)) \to 0.$$

Como $0 \leq d(u_n, u) \leq d((u_n, \xi_n), (u, \xi))$ e $0 \leq |\xi_n - \xi| \leq d((u_n, \xi_n), (u, \xi))$, segue que $(d(u_n, u))$ e $(|\xi_n - \xi|)$ convergem para 0. Portanto,

$$u_n \to u \ \ em \ \ X \quad e \quad \xi_n \to \xi \ \ em \ \ \mathbb{R}.$$

Como $(u_n, \xi_n) \in epi(f)$, temos

$$f(u_n) \leq \xi_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dessa maneira, podemos fazer $n \to \infty$ e ao observar que f é s.c.i., temos

$$f(u) \leq \liminf f(u_n) \leq \liminf \xi_n = \xi.$$

Portanto, $(u, \xi) \in epi(f)$. Dessa forma, $epi(f)$ é fechado.

Definição 1.5. Seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função *s.c.i.*. Definamos a função $\mathcal{G}_f : epi(f) \to \mathbb{R}$ onde

$$\mathcal{G}_f(u, \xi) = \xi.$$

Proposição 1.6. *A função $\mathcal{G}_f$ é uma função lipschitz.*

Demonstração. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_f(u,\xi) - \mathcal{G}_f(v,\mu)| &= |\xi - \mu| \\ &\leq 1 \cdot d((u,\xi),(v,\mu)). \end{aligned}$$

■

Observação: 1.7. Como a função $\mathcal{G}_f$ é Lipschitz de constante 1, segue, do Exemplo 2, que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) \leq 1$$

para todo $(u, \xi) \in epi(f)$.

A seguinte proposição mostrará uma relação entre $|d\mathcal{G}_f|(u,\xi)$ e $|df|(u)$ quando f é uma função contínua. Vejamos:

Proposição 1.8. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $u \in X$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Então*

a)

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = \begin{cases} \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}}, & se\ |df|(u) < \infty \\ 1, & se\ |df|(u) = +\infty \end{cases}$$

b) $|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) = 1$, *se* $f(u) < \xi$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \begin{cases} \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}}, & se\ |df|(u) < \infty \\ 1, & se\ |df|(u) = +\infty \end{cases} \tag{1.1}$$

Se $|df(u)| = 0$, então a desigualdade é verdadeira. Por outro lado, seja $0 < \sigma < |df|(u)$ e consideremos $H : B(u,\delta) \times [0,\delta] \to X$ uma aplicação contínua como na Definição (1.1). Considere $K : (B((u, f(u)), \delta) \cap epi(f)) \times [0, \delta] \to epi(f)$ dada por

$$K((v,\mu),t) = \left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right), \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} t \right).$$

Notemos que K está bem definida pois, ao aplicar a propriedade (b) de H presente na Definição (1.1), temos

$$\begin{aligned} f\left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)\right) &\leq f(v) - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t \\ &\leq \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t, \end{aligned}$$

visto que $(v,\mu) \in epi(f)$. Assim, $K((v,\mu),t) \in epi(f)$. Vejamos que K goza das propriedades (a) e (b) da Definição (1.1).

Propriedade (a):

Observemos que, ao aplicarmos a propriedade (a) de H, temos

$$\begin{aligned} d(K((v,\mu),t),(v,\mu)) &= \left(d\left(H\left(v,\frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right),v\right)^2+\left(\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t-\mu\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{t^2}{1+\sigma^2}+\frac{\sigma^2t^2}{1+\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}=t. \end{aligned}$$

Propriedade (b): Notemos que

$$\mathcal{G}_f\left(K((v,\mu),t)\right)=\mu-\frac{\sigma t}{\sqrt{1+\sigma^2}}=\mathcal{G}_f(v,\mu)-\frac{\sigma t}{\sqrt{1+\sigma^2}}.$$

Dessa forma, por definição de inclinação fraca, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}. \tag{1.2}$$

Consideremos uma sequência maximizante (σ_n) tal que

$$\sigma_n \to |df|(u).$$

Vejamos agora dois casos:

Caso 1: $|df|(u) < \infty$.

Assim, obtemos que

$$\sigma_n \to |df|(u).$$

Como a função $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

é contínua e, por (1.2), temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) \geq \frac{\sigma_n}{\sqrt{1+\sigma_n^2}}.$$

Fazendo $n \to \infty$, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) \geq \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+|df(u)^2}}. \tag{1.3}$$

Caso 2: $|df|(u) = \infty$

Dessa forma, $\sigma_n \to \infty$. Observemos agora que

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)=1.$$

Logo, aplicando σ_n em (1.2) e fazendo $n \to \infty$, segue

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq 1.$$

Provando, assim,que a Desigualdade (1.1) é verdadeira. Mostremos agora que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \leq \frac{|df|(u)}{\sqrt{1 + (|df|(u))^2}}.$$

Caso $|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = 0$, segue que a desigualdade é verdadeira. Caso contrário, podemos considerar $0 < \sigma < |d\mathcal{G}_f|(u, f(u))$ e uma aplicação contínua

$$K : B((u, f(u)), \delta) \times [0, \delta] \to epi(f)$$

com as propriedades presentes na Definição (1.1). Pela continuidade de f, existe $\delta' > 0$ tal que $\delta' \leq \delta\sqrt{1 - \delta^2}$ e

$$d(v, u)^2 + |f(v) - f(u)|^2 < \delta^2, \quad \forall v \in B(u, \delta').$$

Definamos $H : B(u, \delta') \times [0, \delta'] \to X$ onde

$$H(v, t) = K_1\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right),$$

sendo K_1 a primeira componente de K. Devido a escolha de $\delta' > 0$, note que H está bem definida. Ainda mais, note que H é contínua visto que K_1 também é contínua. Provemos agora que H goza das propriedades (a) e (b) da Definição 1.1:

Propriedade (a): Vejamos que

$$\begin{aligned} d\left(K\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), (v, f(v))\right)^2 &= d\left(K_1\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), v\right)^2 \\ &+ \left|K_2\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right) - f(v)\right|^2. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} d(H(v, t), v)^2 &= d\left(K_1\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), v\right)^2 \\ &= d\left(K\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), (v, f(v))\right)^2 - \left|K_2\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right) - f(v)\right|^2. \end{aligned}$$

Portanto, pela propriedade (a) de K, temos

$$d(H(v, t), v)^2 \leq \frac{t^2}{1 - \sigma^2} - \left|K_2\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right) - f(v)\right|^2. \tag{1.4}$$

Observemos agora que, pela propriedade (b) de K, temos

$$\mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\leq f(v)-\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t\Rightarrow$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t\leq f(v)-\mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right).$$

Como $\mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)=K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)$, temos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t\leq f(v)-K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right).$$

Logo, da Desigualdade (1.4), temos

$$d(H(v,t),v)^2\leq\frac{t^2}{1-\sigma^2}-\frac{\sigma^2t^2}{1-\sigma^2}=t^2.$$

Provando a propriedade (a) para H.

Propriedade (b): Observemos que

$$\begin{aligned}
f(H(v,t)) &= f\left(K_1\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\right)\\
&\leq K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\\
&= \mathcal{G}_f\left(K\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\right)\\
&= \mathcal{G}_f(v,f(v))-\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}t\\
&= f(v)-\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}t.
\end{aligned}$$

onde foram utilizadas as definições de epígrafo ($Im(K)\subset epi(f)$), a definição de $\mathcal{G}_f$ e a propriedade (b) de K, respectivamente. Portanto, por definição de $|df|(u)$, segue que

$$|df|(u)\geq\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Usando um argumento semelhante para concluir a veracidade da Inequação (1.3), segue que

$$|df|(u)\geq\frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}.$$

Daí, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))\leq\frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u)^2)}}.$$

quando $|df|(u)<+\infty$. Portanto, se $|df|(u)<\infty$, então

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))=\frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u)^2)}}.$$

Por fim, vejamos a demonstração da seguinte afirmação:
Afirmação: Se $f(u) < \xi$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu \geq f(v) + \delta$$

quando $(v, \mu) \in B((u, \xi), \delta)$.

De fato, suponha, por absurdo, que a afirmação não seja válida. Logo existe uma sequência $((v_n, \mu_n))$ tal que

$$d((v_n, \mu_n), (u, \xi)) < \frac{1}{n} \tag{1.5}$$

e

$$\mu_n < f(v_n) + \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

Da Desigualdade (1.5), segue que

$$\begin{aligned} v_n &\to u \; em \; X \quad e \\ \mu_n &\to \xi \; em \; \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Passando o limite na Desigualdade (1.6) e observando que f é contínua, segue que

$$\xi \leq f(u),$$

o que é um absurdo. Assim, existe $\delta > 0$ tal que $\mu \geq f(v) + \delta$ sempre quando

$$(v, \mu) \in B((u, \xi), \delta).$$

Concluindo, assim, a afirmação.

Agora, definamos $H : B((u, \xi), \delta) \times [0, \delta] \to epi(f)$ dada por

$$H((v, \mu), t) = (v, \mu - t).$$

Observemos que, H é contínua e está bem definida, pois

$$f(v) + t \leq f(v) + \delta \leq \mu \Rightarrow$$

$$f(v) \leq \mu - t \Rightarrow (v, \mu - t) \in epi(f). \tag{1.7}$$

Ainda mais,

$$d(H((v, \mu), t), (v, \mu)) = d((v, \mu - t), (v, \mu)) \leq t.$$

Concluindo que H goza da propriedade (a) da Definição (1.1). Ademais,

$$\mathcal{G}_f(H(v, \mu), t) = \mathcal{G}_f(v, \mu - t) = \mu - t = \mathcal{G}_f(v, \mu) - 1 \cdot t.$$

Mostrando que H goza da propriedade (b) da Definição (1.1). Portanto, se $(u,\xi) \in epi(f)$, então

$$\begin{aligned} |d\mathcal{G}_f|(u,\xi) &\geq 1 \Rightarrow \\ |d\mathcal{G}_f|(u,\xi) &= 1. \end{aligned}$$

Pois já tínhamos verificado, no Exemplo (2), que $|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) \leq 1$. ■

Observando a proposição anterior, podemos reescrever a inclinação fraca de f, $|df|(u)$, em termos da inclinação fraca de $\mathcal{G}_f$ observando os seguintes passos:

$$\begin{aligned} |d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) &= \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}} \\ (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 \cdot (1+(|df|(u))^2) &= (|df|(u))^2 \\ (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 + (|dG_f|(u,f(u)))^2 \cdot (|df|(u))^2 &= (|df|(u))^2 \\ (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 &= (|df|(u))^2 - (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 \cdot (|df|(u))^2 \\ (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 &= (1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2) \cdot (|df|(u))^2 \\ \frac{(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}{(1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2)} &= (|df|(u))^2 \\ |df|(u) &= \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}. \end{aligned}$$

Assim, ao considerarmos f uma função contínua e tomarmos $u \in X$ de tal forma que $|df|(u) < \infty$, segue que temos a seguinte relação:

$$|df|(u) = \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}.$$

Dessa forma, podemos ver como a inclinação fraca de f está bem relacionada com a inclinação fraca de $\mathcal{G}_f$. Mas, vale ressalta que, só pelo fato de f ser uma função $s.c.i.$, obtemos que o conjunto $epi(f)$ é fechado (Observação 1.4) e a função $\mathcal{G}_f$ não é só contínua, mas Lipschitz.

Portanto, a proposição anterior nos permite definir, em um caminho consistente, a inclinação fraca também para funções $s.c.i.$ por meio da função auxiliar $\mathcal{G}_f$.

Definição 1.9. Seja X um espaço métrico e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Definamos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} D(f) &:= \{u \in X | f(u) < \infty\} \\ f^b &:= \{u \in X | f(u) \leq b\}. \end{aligned}$$

Observação: 1.10. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função semicontínua inferiormente e $b \in \mathbb{R}$, então $D(f)$ e f^b são conjuntos fechados.

Definição 1.11. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e considere $u \in D(f)$. Definimos:

$$|df|(u) = \begin{cases} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}, & se\ |d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) < 1 \\ +\infty, & se\ |d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) = 1 \end{cases}$$

Observemos agora que é possível definir a inclinação fraca não somente para funções contínuas, como na Definição (1.1), mas também para funções que são apenas semicontínuas inferiormente. Porém, a maneira que foi definida é muito diferente se comparada com a Definição Inicial (1.1).

A próxima proposição mostra um critério para obter uma estimativa por baixo para $|df|(u)$. A aplicação contínua presente nesse critério é muito similar com a aplicação presente na Definição inicial (Definição 1.1) de inclinação fraca:

Proposição 1.12. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e $u \in D(f)$. Suponha que existam $\delta > 0$, $b > f(u)$, $\delta > 0$ e uma aplicação contínua*

$$H : (B(u,\delta) \cap f^b) \times [0,\delta] \to X$$

tal que goze das propriedades:

a) $d(H(v,t),v) \leq t$,

b) $f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$.

Então, $|df|(u) \geq \sigma$.

Demonstração. O caso em que $|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) = 1$ é trivial pois teríamos $|df|(u) = \infty$ que é maior do que qualquer $\sigma > 0$. Sendo assim, consideremos o caso em que $|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) < 1$.

Seja $\delta' \in (0,\delta]$ tal que

$$\mu \leq b$$

para $(v,\mu) \in B((u,f(u)),\delta')$ e definamos

$$K : (B((u,f(u)),\delta') \cap epi(f)) \times [0,\delta'] \to epi(f)$$

onde

$$K((v,\mu),t) = \left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right), \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t \right).$$

Seguindo os mesmos passos presentes na demonstração da Proposição (1.8) acerca da aplicação K, obtemos que $K((v,\mu),t) \in epi(f)$ e que K goza das propriedades (a) e (b) presentes na Definição (1.1), ou seja,

$$\begin{aligned} d(K((v,\mu),t),(v,\mu)) &\leq t, \\ \mathcal{G}_f(K((v,\mu),t)) &= \mathcal{G}_f(v,\mu) - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t. \end{aligned}$$

Assim, observando ainda mais que K é contínua, segue que K é uma deformação como na Definição (1.1) e, assim, obtemos que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}.$$

Por manipulações algébricas, podemos reescrever a última desigualdade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\leq \frac{(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}{1+(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2} = (|df|(u))^2 \Rightarrow \\ \sigma &\leq |df|(u). \end{aligned}$$

■

A seguir, veremos algumas propriedades importantes sobre a inclinação fraca. A proposição a seguir nos diz que a função inclinação fraca é uma função *s.c.i.* com respeito a topologia do gráfico, vejamos:

Proposição 1.13. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e considere $u \in D(f)$. Se*

$$(u_k, f(u_k)) \to (u, f(u)) \text{ em } G(f),$$

então

$$|df|(u) \leq \liminf_k |df|(u_k).$$

Demonstração. Provemos, primeiramente, para o caso em que f é uma função contínua. Observemos que se $|df|(u) = 0$, então a afirmativa é verdadeira. Consideremos então o caso em que $|df(u)| > 0$. Sendo assim, sejam $\sigma \in (0, |df|(u))$ e $H : B(u,\delta) \times [0,\delta] \to X$ como na Definição (1.1).

Notemos que, como $u_k \to u$, segue que $u_k \in B(u, \frac{\delta}{2})$ para k suficientemente grande. Consideremos $H_1 = H|_{B(u_k,\frac{\delta}{2})\times[0,\frac{\delta}{2}]}$. Observemos que H_1 goza das propriedades (a) e (b) presentes na Definição (1.1). Dessa forma,

$$|df|(u_k) \geq \sigma. \tag{1.8}$$

Como σ foi tomado arbitrariamente segundo a Definição (1.1), temos

$$|df|(u_k) \geq |df|(u),$$

pois $|df|(u)$ é o supremo do conjunto de tais σ e, segundo a Desigualdade (1.8), $|df|(u_k)$ é uma conta superior desse conjunto, para k suficientemente grande. Dessa forma,

$$|df|(u) \leq \liminf_k |df|(u_k).$$

Provando assim que $|df|$ é uma função s.c.i. segundo a topologia do gráfico, quando f é contínua. Vamos ao caso geral. Como $\mathcal{G}_f$ é contínua, aplicando o caso anterior, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u) \leq \liminf_k |d\mathcal{G}_f|(u_k).$$

Observemos agora a função $f_1 : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

que é contínua. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u)}{\sqrt{1-|d\mathcal{G}_f|(u)}} &\leq \liminf_k \frac{|d\mathcal{G}_f|(u_k)}{\sqrt{1-|d\mathcal{G}_f|(u_k)}} \Rightarrow \\ |df|(u) &\leq \liminf_k |df|(u_k). \end{aligned}$$

■

Agora, veremos que, sob certa hipótese, a inclinação fraca de uma função s.c.i. não varia quando a função é perturbada por outra função Localmente Lipschitz.

Proposição 1.14. *Sejam $f_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função localmente Lipschitz e $f = f_0 + f_1$. Considere $u \in D(f_0)$ e assumamos que*

$$\lim_{r \to 0^+} \left(\sup \left\{ \frac{|f_1(v) - f_1(w)|}{d(v,w)} \ ; \ v, w \in B(u,r), v \neq w \right\} \right) = 0. \tag{1.9}$$

Então, para todo $\xi \geq f(u)$, temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) = |d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)).$$

Em particular,

$$|df|(u) = |df_0|(u).$$

Demonstração. Dado $\xi \geq f(u)$, iremos mostrar que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) \geq |d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)).$$

Se $|d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)) = 0$, o resultado é imediato. Considere então $\sigma \in (0, |d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)))$. Seja $\xi > 0$ e

$$H : B((u, \xi - f_1(w)), \delta) \times [0, \delta] \to epi(f_0)$$

como na Definição (1.1). Sem perda de generalidade, podemos supor f_1 Lipschitiz com constante ϵ em uma bola $B(u, 2\delta)$ graças à Hipótese (1.9). Consideremos agora $\delta' \in (0, \delta]$ tal que

$$(v, \mu - f_1(v)) \in B((u, \xi - f_1(u)), \delta)$$

para todo $(v, \mu) \in B((u, \xi), \delta)$.

Consideremos também $K : B((u, \xi), \delta') \times [0, \delta'] \to epi(f)$ dada por

$$K((v, \mu), t) = \left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right), H_2\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right) + f_1\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\right).$$

Observemos que K está bem definida pois

$$\begin{aligned} f\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right) &= f_0\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right) \\ &+ f_1\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

Como $Im(H) \subset epi(f_0)$, segue

$$f_0\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right) \leq H_2\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right).$$

Logo,

$$f\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right) \leq H_2\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right) + f_1\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\right.$$

onde o lado direito é a segunda coordenada de $K((v, \mu), t)$. Portanto, $K((v, \mu), t)$ pertence ao epígrafo de f.

Observemos agora que, aplicando a desigualdade triangular, temos

$$d(K((v, \lambda + f_1(v)), 1 + \epsilon s), (v, \lambda + f_1(v))) = d(H((v, \lambda), s), (v, \lambda + f_1(v) - f_1(H_1((v, \lambda), s)))).$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} d(H((v, \lambda), s), (v, \lambda + f_1(v) - f_1(H_1((v, \lambda), s)))) &\leq d(H((v, \lambda), s), (v, \lambda)) + |f_1(H_1((v, \lambda), s)) - f_1(v)| \\ &\leq s + \epsilon \cdot d(H_1((v, \lambda), s), v) \leq s + \epsilon \cdot s = (1 + \epsilon)s. \end{aligned}$$

Ainda mais,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_f(K((v,\mu),t)) &= H_2\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)+f_1\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\\
&= \mathcal{G}_f\left(H\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)+f_1\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\\
&= \mu-f_1(v)-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+f_1\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\\
&= \mathcal{G}_f(v,\mu)-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+f_1\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)-f_1(v)\\
&= \mathcal{G}_f(v,\mu)-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+\epsilon\cdot d\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right),v\right)\\
&\leq \mathcal{G}_f(v,\mu))-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+\epsilon\cdot d\left(H\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right),(v,\mu-f_1(v))\right)\\
&\leq \mathcal{G}_f(v,\mu)-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+\epsilon\cdot\frac{t}{1+\epsilon}\\
&= \mathcal{G}_f(v,\mu)-\left(\frac{\sigma}{1+\epsilon}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right)t.
\end{aligned}$$

onde foi utilizado o fato de que f_1 é localmente Lipschitz e a propriedade (a) de H. Consequentemente,

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi)\geq\frac{\sigma}{1+\epsilon}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

e, desde que $\epsilon>0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, fazendo $\epsilon\to 0$ temos

$$\begin{aligned}
|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) &\geq \sigma\Rightarrow\\
|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) &\geq |d\mathcal{G}_{f_0}|(u,\xi-f_1(u)).
\end{aligned}$$

A desigualdade contrária é obtida trocando f_0 com a função f e a função f_1 por $(-f_1)$.

■

1.2 Relações entre a inclinação fraca e outros conceitos de derivada

Durante essa seção, considere X um espaço métrico munido com a métrica d. Nesta seção, veremos algumas relações entre outros conceitos de derivada (inclinação forte, subdiferencial e gradiente generalizado de Clark) e a inclinação fraca. Essa seção, foi baseada no artigo de Degiovanni e Marzochhi (Vide [12]) e Canino e Degiovanni (Vide [7]). Para isso, vejamos algumas definições.

Um interessante conceito é o de inclinação forte. A proposta da inclinação forte é de determinar qual é a maior inclinação possível das retas tangentes de uma função em

um ponto u. Caso queira aprofundar o estudo nesse conceito, recomendamos o artigo de Giorgi, Marino e Tosques (Vide [14]). Vejamos a definição:

Definição 1.15. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e $u \in D(f)$. Definimos

$$|\nabla f|(u) = \begin{cases} \limsup \frac{f(u)-f(v)}{d(u,v)}, & se \text{ u não é mínimo local} \\ 0, & se \text{ u é um mínimo local} \end{cases}$$

O número real estendido $|\nabla f|(u)$ é chamado de inclinação forte de f em u.

Proposição 1.16. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i., então $|df|(u) \leq |\nabla f|(u)$ para todo $u \in X$.*

Demonstração. Provemos, primeiramente, para o caso em que f é contínua. Consideremos $u \in X$. Então, temos dois casos:
<u>**Caso 1:**</u> u não é mínimo local.

Neste caso, se $|df|(u) = 0$, então não há o quê provar. Dessa forma, consideremos $\sigma \in (0, |df|(u))$ e uma aplicação $H : U \times [0, \delta] \to \overline{\mathbb{R}}$ como na Definição (1.1). Assim, temos

a) $d(x, H(x,t)) \leq t$

b) $f(H(x,t)) \leq f(x) - \sigma t$

para todo $x \in U$ e $t \in [0, \delta]$. Observemos que, de (b), temos

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t}$$

e, de (a), segue que

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t} \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{d(x, H(x,t))} \leq \limsup \frac{f(u) - f(v)}{d(u,v)} = |\nabla f|(u).$$

<u>**Caso 2:**</u> u é um mínimo local.

Da Proposição (1.2), segue que $|df|(u) = 0$. Sendo assim, $|df|(u) \leq |\nabla f|(u)$. ■

Definição 1.17. Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ um aberto e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferiormente.Para todo $u \in D(f)$, denotamos por $\partial^- f(u)$ o conjunto dos vetores α em X' tal que

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0. \tag{1.10}$$

Os elementos de $\partial^- f(u)$ são chamados de subdiferencial de f em u.

Exemplo 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função módulo. Calculemos $\partial^- f(0)$. Observemos que se $\alpha \in \partial^- f(0)$, então

$$\begin{aligned} \liminf_{v \to 0} \frac{f(v) - f(0) - \langle \alpha, v - 0 \rangle}{|v - 0|} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \liminf_{v \to 0} \frac{|v| - \alpha \cdot v}{|v|} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \liminf_{v \to 0} \left(1 - \alpha \frac{v}{|v|}\right) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \alpha \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Portanto, $\partial^- f(0) = [-1, 1]$.

Definição 1.18. Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $\overline{x} \in D(f)$. Um elemento $\alpha \in X'$ é denominado de subgradiente de Fenchel de f em $\overline{x}$ quando

$$\langle \alpha, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x})$$

para todo $x \in X$. O conjunto formado por todos os subgradientes de Fenchel de f em x é denominado de subdiferencial de Fenchel de f em x e é denotado por $\partial f(x)$. Definimos também que $\partial f(\overline{x}) = \emptyset$ quando $f(\overline{x}) \notin \mathbb{R}$.

A seguinte proposição mostra a relação entre a inclinação forte, a inclinação fraca e a subdiferencial de f:

Proposição 1.19. *Sejam $A \subset X$ um conjunto aberto, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. e $u \in D(f)$. Então as seguintes sentenças são verdadeiras:*

a) *Se $g : A \to \mathbb{R}$ é Frèchet diferenciável em u, então*

$$\partial^-(f + g)(u) = \{\alpha + dg(u) | \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

b) *Se $\alpha \in \partial^- f$, então para todo $w \in X$*

$$\langle \alpha, w \rangle \leq \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(u + tw) - f(u)}{t};$$

c) *Se A é um conjunto convexo e f é uma função convexa, então $\partial^- f(u)$ equivale à subdiferencial de Fenchel;*

d) *Se $\alpha \in \partial^- f$, então $|\nabla f|(u) \leq ||\alpha||$;*

e) *$\partial^- f(u)$ é fechado forte e convexo em X'.*

Demonstração da afirmação (a):

Demonstração. De fato, seja $\beta \in \partial^-(f+g)(u)$, escrevamos $\beta = \beta - dg(u) + dg(u)$ e observemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{v\to u} \frac{(f+g)(v)-(f+g)(u)-\langle \beta, v-u\rangle}{||v-u||} &\geq 0 \Rightarrow \\ \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \beta - dg(u), v-u\rangle}{||v-u||} + \frac{g(v)-g(u)-\langle dg(u), v-u\rangle}{||v-u||} &\geq 0. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\lim_{v\to u} \frac{g(v)-g(u)-\langle dg(u), v-u\rangle}{||v-u||} = 0,$$

pois g é Frèchet diferenciável em u. Daí, segue que

$$\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \beta - dg(u), v-u\rangle}{||v-u||} \geq 0.$$

Dessa forma, $\beta - dg(u) \in \partial^- f(u)$. Sendo assim, $\partial^-(f+g)(u) \subset \{\alpha + dg(u) | \alpha \in \partial^- f(u)\}$. A inclusão contrária é imediata. Portanto,

$$\partial^-(f+g)(u) = \{\alpha + dg(u) | \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Demonstração da afirmação (b):

Definamos $v = u + tw$, assim por definição, temos

$$\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} = \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(u+tw)-f(u)-\langle \alpha, tw\rangle}{||tw||} \geq 0.$$

Observando agora que

$$\frac{\langle \alpha, tw\rangle}{||tw||} = \frac{\langle \alpha, w\rangle}{||w||},$$

pois $t \geq 0$ e α é linear, assim

$$\frac{\langle \alpha, w\rangle}{||w||} \leq \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(u+tw)-f(u)}{||tw||}.$$

Daí, segue que

$$\langle \alpha, w\rangle \leq \liminf_{t\to 0^+} ||w|| \cdot \frac{f(u+tw)-f(u)}{||tw||} = \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(u+tw)-f(u)}{t}.$$

Demonstração da afirmação (c):

Seja $\alpha \in \partial f(u)$ um subgradiente de Fenchel. Logo,

$$\langle \alpha, u-v\rangle \leq f(u) - f(v).$$

para todo $v \in A$. Dessa maneira, segue que

$$0 \leq f(u) - f(v) - \langle \alpha, u-v\rangle,$$

para todo $v \in A$. Dessa forma,

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Portanto, $\alpha \in \partial^- f(u)$. Dessa forma, $\partial f(u) \subset \partial^- f(u)$.

Provemos a inclusão contrária. Seja $\alpha \in \partial^- f(u)$. Logo,

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Sendo assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0$$

para todo $v \in B(u, \delta) \subset A$. Seja $w \in A$. Sendo A convexo, obtemos que o segmento $[u, w]$ está contido em A. Sendo assim, consideremos $v = tu + (1 - t)w$ onde $t > 0$ foi tomado de tal forma que $v \in B(u, \delta)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} &\geq 0 \Rightarrow \\ \langle \alpha, tu + (1 - t)w - u \rangle &\leq f(tu + (1 - t)w) - f(u). \end{aligned}$$

Como f é convexa, obtemos

$$\langle \alpha, (1-t)(w-u) \rangle \leq f(tu+(1-t)w) - f(u) \leq tf(u) + (1-t)f(w) - f(u) = (1-t)(f(w) - f(u)) \Rightarrow$$

$$\langle \alpha, w - u \rangle \leq f(w) - f(u).$$

para todo $w \in A$,. Dessa forma, $\alpha \in \partial f(u)$. Portanto, $\partial^- f(u) \subset \partial f(u)$. Sendo assim, $\partial^- f(u) = \partial f(u)$ concluindo a demonstração do item (c).

Demonstração da afirmação (d):

Seja $\alpha \in \partial^- f$.Observemos que

$$||\alpha|| = \limsup \frac{\langle \alpha, u - v \rangle}{||u - v||}$$

e

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Sendo assim,

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u)}{||v - u||} - \limsup_{v \to u} \frac{\langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Logo,

$$|\nabla f|(u) = \limsup_{v \to u} \frac{f(v) - f(u)}{||v - u||} \leq ||\alpha||.$$

Demonstração da afirmação (e): Provemos primeiramente que $\partial^- f(u)$ é fechado forte. Para isso, consideremos $\alpha \in \overline{\partial^- f(u)}$ e uma sequência (α_n) em $\partial^- f(u)$ tal que

$$\alpha_n \to \alpha$$

com a norma de X'. Observemos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} &= \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha_n, v-u\rangle}{||v-u||} - \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||}. \\
&\geq \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha_n, v-u\rangle}{||v-u||} - \limsup_{v\to u} \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha_n \to \alpha$ fortemente, segue que

$$\lim\sup_{n\to\infty} \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||} = 0.$$

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se

$$\left| \limsup_{v\to u} \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||} \right| < \epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} &\geq \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha_n, v-u\rangle}{||v-u||} - \limsup_{v\to u} \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||} \\
&\geq -\epsilon.
\end{aligned}$$

Recordando que $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, podemos afirmar que

$$\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} \geq 0.$$

Portanto, $\alpha \in \partial^- f(u)$. Logo, $\partial^- f(u)$ é fechado forte.

Vejamos agora que $\partial^- f(u)$ é convexo. Sejam $\alpha, \beta \in \partial^- f(u)$, provaremos que $[\alpha, \beta] \subset \partial^- f(u)$. Para isso, consideremos $w = t\alpha + (1-t)\beta \in [\alpha, \beta]$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle t\alpha+(1-t)\beta, v-u\rangle}{||v-u||} &= t \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} \\
&+ (1-t) \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \beta, v-u\rangle}{||v-u||} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $w \in \partial^- f(u)$. Portanto, $[\alpha, \beta] \subset \partial^- f(u)$. Dessa forma, $\partial^- f(u)$ é um conjunto convexo. ■

Lema 1.1. *Seja X um espaço de Banach real e $\xi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. convexa com $\xi(0) = 0$. Se*

$$\xi(x) \geq -||x||$$

para todo $x \in X$, então existe $z \in X'$ tal que $||z|| \leq 1$ e

$$\xi(x) \geq < z, x >$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Definamos no espaço $X \times \mathbb{R}$ os seguintes conjuntos:

$$A = \{(x,t) \ : \ ||x|| < -t\} \quad \text{e} \quad B = \{(x,t) \ ; \ \xi(x) \leq t\}.$$

É imediato ver que A e B são convexos (em verdade, $B = epi(\xi)$) e A é aberto. Ainda mais, $A \cap B = \emptyset$ pois $\xi(x) \geq -||x||$. Portanto, pela 1ª forma Geométrica de Hahn-Banach, existe um hiperplano separando A e B, i.e., existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $w \in X'$ tal que

$$\begin{aligned} \langle w, x \rangle - \alpha t - \beta &\geq 0, \quad \forall (x,t) \in \overline{A}, \\ \langle w, x \rangle - \alpha t - \beta &\leq 0, \quad \forall (x,t) \in B. \end{aligned}$$

Desde que $(0,0) \in \overline{A} \cap B$, temos $\beta = 0$. Tomando $t = -||x||$ na primeira das desigualdades dadas acima, temos

$$\langle w, x \rangle \geq -\alpha ||x|| \Rightarrow \alpha \geq \frac{\langle w, -x \rangle}{|| - x||}.$$

para todo $x \in X$. Daí segue que

$$\alpha \geq \sup_{x \in X} \frac{\langle w, -x \rangle}{|| - x||} = ||w||$$

e, assim, temos $\alpha \geq 0$ e $||w|| \leq \alpha$. Note que se $\alpha = 0$, então $w = 0$ e, nesse caso, não há hiperplano, o que é um absurdo. Então, $\alpha > 0$. Agora, defina

$$z = \tfrac{w}{\alpha}$$

e considere $t = \xi(x)$ na segunda desigualdade dada acima. Então, $||z|| \leq 1$ e $\langle z, x \rangle \leq t = \xi(x)$. ■

O seguinte teorema mostra a boa compatibilidade que há entre os conceitos de derivada de uma pertubação de uma função s.c.i. por uma função suave.

Teorema 1.20. *Seja $A \subset X$ aberto e convexo com X sendo um espaço de Banach. Considere $f_0 : A \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função convexa e s.c.i., $f_1 : A \to \overline{\mathbb{R}}$ de classe $C^1(A)$ e $f = f_0 + f_1$. As seguintes sentenças são válidas*

a) $|df|(u) = |\nabla f|(u)$ *para todo* $u \in D(f)$.

b) $|df|(u) < +\infty$ *se, e somente se,* $\partial^- f(u) \neq \emptyset$. *para todo* $u \in D(f)$. *E, nesse caso,*

$$|df|(u) = \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Demonstração. Pelo item (e) da Proposição 1.19, segue que $\partial^- f_0(u)$ é fechado fraco estrela, pois é fechado forte e convexo. Desde que

$$\partial^- f(u) = \{\alpha + df_1(u); \alpha \in \partial^- f_0(u)\},$$

graças à propriedade (a) da Proposição 1.19, temos $\partial^- f(u)$ fechado fraco estrela também. Daí segue que, se $\partial^- f(u) \neq \emptyset$, então existe

$$\min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Pela Proposição 1.19, temos

$$\partial^- f(u) \neq \emptyset \Rightarrow |df|(u) \leq |\nabla f|(u) \leq \min\{||\alpha|| \mid \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Assumamos agora que $0 \notin \partial^- f(u)$ e consideremos $\sigma > 0$ tal que

$$\alpha \in \partial^- f(u) \Rightarrow ||\alpha|| > \sigma$$

pois $\partial^- f(u)$ é fechado fraco estrela.
<u>**Afirmação**</u>: Existe $w \in A$ tal que

$$f(w) < f(u) - \sigma||w - u||.$$

Para provar essa afirmação, utilizaremos a contra-positiva do Lema 1.1 para

$$\xi(x) = \frac{f(x+u) - f(u)}{\sigma}.$$

Como f é uma função s.c.i., obtemos que ξ também é s.c.i. .

Suponhamos, por absurdo, que dado $z \in X'$ com $||z|| \leq 1$ tal que

$$\xi(x) \geq \langle z, x \rangle$$

para todo $x \in X$. Observemos que, daí, obtemos que

$$\liminf_{x \to 0} \frac{f(x+u) - f(u) - \langle \sigma z, x \rangle}{||x||} \geq 0.$$

Portanto, $\sigma z \in \partial^- f(u)$. Ora, por definição de σ, concluímos que

$$||\sigma z|| > \sigma \Rightarrow ||z|| > 1.$$

O que é um absurdo, pois supomos que $||z|| \leq 1$. Logo, existe $y \in X$ tal que

$$\xi(y) < \langle z, y \rangle.$$

E, aplicando a contra-positiva do Lema 1.1, obtemos que segue que existe $w_1 \in A$ tal que

$$\xi(w_1) < -||w_1||.$$

Daí obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(w_1+u)-f(u)}{\sigma} &< -||w_1|| \\ \Rightarrow f(w_1+u)-f(u) &< -\sigma||w_1||. \end{aligned}$$

Fazendo $w = w_1 + u$, temos

$$f(w) - f(u) < -\sigma||w-u||.$$

Concluindo a nossa afirmação.

Como f é s.c.i., segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(w) < f(v) - \sigma||w-v||,$$

para todo $v \in B(u,\delta)$ e, a menos de redução do δ, podemos supor $w \notin B(u, 2\delta)$.

Definamos $H : B(u,\delta) \times [0,\delta] \to X$ por

$$H(v,t) = v + t\frac{w-v}{||w-v||}.$$

Note que, pelo fato de w não ser um elemento da bola $B(u,\delta)$, segue que H é contínua. Ainda mais, desde que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{t}{||w-v||} \leq 1 \Rightarrow f(H(v,t)) &\leq f(v) + \frac{t}{||w-v||}\left(f(w)-f(v)\right) \\ &\leq f(v) - \sigma t. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição (1.12) que permite uma estimativa por baixo para a inclinação fraca $|df|(u)$, segue que $|df|(u) \geq \sigma$. Dessa forma, concluímos que

- $\partial^- f(u) = \emptyset \Rightarrow |df|(u) = \infty$
- $\partial^- f(u) \neq \emptyset \Rightarrow |df| \geq \min\{||\alpha||; \alpha \in \partial^- f(u)\}$.

Logo, em todo caso, temos

$$|df|(u) \geq \min\{||\alpha|| \,; \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

E como pela Proposição (1.19), temos

$$|df|(u) \leq |\nabla f|(u) \leq \min\{||\alpha|| \,; \alpha \in \partial^- f(u)\},$$

segue que

$$|df|(u) = |\nabla f|(u) = \min\{||\alpha|| \;\; ; \;\; \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

■

Corolário 1.21. *Seja $A \subset X$ aberto e convexo, com X sendo um espaço de Banach. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável à Frechèt, então*

$$|df|(u) = ||f'(u)||$$

onde $f'(u)$ é a diferencial de f no ponto u.

Demonstração. De fato, basta considerar $f_0 = 0$ e $f_1 = f$. Assim, como f é diferenciável em u, segue que

$$\partial^- f(u) = \{f'(u)\} \neq \emptyset.$$

Portanto, da propriedade (b) do Teorema 1.20, temos $|df|(u) < +\infty$ e, assim,

$$|df|(u) = \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\} = \min\{||f'(u)||\} = ||f'(u)||.$$

■

Observemos que a relação entre a inclinação fraca e a subdiferencial pode ser contemplada no Exemplo (3). De fato, no Exemplo (4), vimos que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função módulo, devemos ter

$$\partial^- f(0) = [-1, 1].$$

Assim,

$$\min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\} = 0.$$

E vimos, no Exemplo (3), que $|df|(0) = 0$. Logo,

$$|df|(0) = \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Por fim, estabeleceremos a relação entre inclinação fraca e o conceito de subdiferencial de Clarke para funções localmente lipschitz.

Uma teoria dos pontos críticos para essa classe de funções está presente no artigo de Chang (Vide [9]). Vejamos a definição do grafiente generalizado de Clark:

Definição 1.22. Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ aberto, f uma função localmente lipschitz e $u \in A$. Definimos a derivada direcional generalizada por

$$f^\circ(u; w) = \limsup_{\substack{v \to u \\ t \to 0^+}} \frac{f(v + tw) - f(v)}{t},$$

e o gradiente generalizado por

$$\partial f(u) = \{\alpha \in X'; f^\circ(u; w) \geq \langle \alpha, w \rangle; \forall w \in X\}.$$

Na dissertação de Abrantes (Vide [23]) , há uma boa demonstração de que $\partial f(u) \neq \emptyset$ e compacto fraco estrela.

Teorema 1.23. *Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ aberto e $f : X \to \mathbb{R}$ localmente lipschitz. Então, para todo $u \in A$, temos*

$$|df|(u) \geq \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial f(u)\}.$$

Demonstração. Se $\min\{||\alpha||; \alpha \in \partial f(u)\} = 0$, então o fato é trivial. Por outro lado, considere

$$0 < \sigma < \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial f(u)\}.$$

No Capítulo 1 da Referência [23], mostra-se que $f^\circ(u, \cdot)$ é convexo, homogênea positiva e contínua.

Pelo Lema 1.1, utilizando a contra-positiva ao considerarmos $\xi(x) = \frac{1}{\sigma} f^\circ(u; x)$, segue que existe $w \in X$ tal que

$$f^\circ(u; w) < -\sigma ||w||.$$

Pela homogeneidade de $f^\circ(u; \cdot)$, podemos supor $||w|| = 1$. Considere $\delta > 0$ tal que $B(u, 2\delta) \subset A$ e

$$f(v + tw) \leq f(v) - \sigma t$$

sempre quando $v \in B(u, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Então, ao definirmos $H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to A$ por $H(v, t) = v + tw$, obtemos que

$$|df|(u) \geq \sigma.$$

Considere agora uma sequência minimizante (σ_n) tal que

$$0 < \sigma_n < \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial f(u)\}$$

com $\sigma_n \to \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial f(u)\}$. Logo, fazendo $n \to \infty$, temos

$$|df|(u) \geq \sigma_n \Rightarrow |df|(u) \geq \min\{||\alpha||; \ \alpha \in \partial f(u)\}.$$

■

Dessa forma, vimos várias relações interessantes entre a inclinação fraca e os conceitos de derivada tais como a inclinação forte, a derivada clássica, a subdiferencial, a subdiferencial de Fenchel e o gradiente generalizado de Clarck.

Na próxima seção, veremos uma generalização do conceito de inclinação fraca que é a inclinação fraca equivariante. Nesse novo conceito, supomos que X está sob a ação do grupo um grupo G e que a aplicação H presente na Definição (1.1) é equivariante em relação a G. Tais conceitos são discutidos detalhadamente na próxima seção.

1.3 A inclinação fraca equivariante

1.3.1 Conceitos básicos sobre ação de grupo e grupo de Lie

O conceito de inclinação fraca pode ser generalizado afim de utilizar melhor as possíveis simetrias do domínio de uma função s.c.i.. Para isso, faz-se necessário o conhecimento de alguns conceitos básicos de ação de grupo e grupo de Lie. Essa seção foi baseada no livro Lie Groups de Procesi C. (Vide [21]).

Definição 1.24. Uma ação de um grupo G em um conjunto X é uma aplicação $\pi : G \times X \to X$, denotado por $gx := \pi(g, x)$, que satisfaz as seguintes condições

$$1x = x \quad e \quad h(kx) = (hk)x,$$

para todo $h, k \in G$ e $x \in X$. Quando um conjunto X está sendo agido por um grupo G, a menos de confusão da ação em questão, dizemos que X é um G conjunto.

Exemplo 5. Seja X um espaço métrico e $G_1 = \{e\}$ o grupo trivial. Observemos que, X é um G_1-grupo pois podemos definir a aplicação $\rho : H \times X \to X$ onde $\rho(e, x) = x$. Tal ação é denominada de **ação trivial.**

Exemplo 6. Considere um espaço vetorial normado X e $G = \mathbb{Z}_2$. Definamos $\pi : G \times X \to X$ onde

$$\pi(1, x) = x \;\; e \;\; \pi(-1, x) = -x$$

é uma ação de grupo em X.

Definição 1.25. Sejam G um grupo e $\cdot : G \times X \to X$ uma ação de grupo. Dizemos que o conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

é uma órbita de x.

Definição 1.26. Dado dois G-conjuntos X, Y, uma aplicação $G-$ equivariante, ou, mais simplesmente, um morfismo, é uma aplicação $f : X \to Y$ tal que

$$f(gx) = gf(x)$$

para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Exemplo 7. Considere X um $\mathbb{Z}_2$-conjunto como no Exemplo (6). Todas as funções ímpares de X em X são equivariantes. De fato, pois se $g : X \to X$ é uma função ímpar, então

$$\begin{aligned} f(1x) &= f(x) = 1f(x) \\ f(-1x) &= f(-x) = -f(x) = -1f(x). \end{aligned}$$

Definição 1.27. Seja X um G-Espaço Métrico. Então, definimos o conjunto dos elementos de E que são fixados na ação por:

$$Fix(G) = \{u \in E \mid g \cdot u = u \text{ para todo } g \in G\ \}.$$

Definição 1.28. Seja X um G-Espaço Métrico. Uma aplicação $G-$ invariante é uma aplicação $f : X \to Y$ tal que

$$f(gx) = f(x)$$

para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Exemplo 8. Considere X um $\mathbb{Z}_2$-conjunto como no Exemplo (6). Todas as funções pares de X em X são invariantes. De fato, pois se $g : X \to X$ é uma função par, então

$$\begin{aligned} f(1x) &= f(x) \\ f(-1x) &= f(-x) = f(x). \end{aligned}$$

Definição 1.29. Seja X um $G-$ grupo. Dizemos que $U \subset X$ é invariante quando $gx \in U$ para todo $g \in G$.

Exemplo 9. Seja X um $\mathbb{Z}_2$-conjunto como no Exemplo (6). Dado um subconjunto $U \subset X$, o conjunto $V = U \cup (-U)$ é invariante. Ou seja, os conjuntos simétricos com respeito a origem são conjuntos invariantes.

Definição 1.30. Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G com uma estrutura de grupo de tal modo que a aplicação

$$(x, y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$$

é diferenciável. Equivalentemente, as aplicações $p : G \times G \to G$ e $i : G \to G$ onde

$$p(x, y) = xy \text{ e } i(x) = x^{-1}$$

são diferenciáveis.

Exemplo 10. A variedade $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ inversíveis, munido da multiplicação de matrizes é um grupo de Lie. Para isso, devemos mostrar que as aplicações

$$\begin{aligned} f &: GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}) \text{ dado por } f(A, B) = A \cdot B \text{ e} \\ g &: GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}) \text{dado por } g(A) = A^{-1} \end{aligned}$$

são diferenciáveis. A diferenciabilidade de f é consequência da diferenciabilidade do produto em $\mathbb{R}$. Já a diferenciabilidade de g decorre da regra de Cramer da inversa de uma matriz.

Exemplo 11. O subgrupo ortogonal real $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ ; \ A \cdot A^t = I\}$ de $GL(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie. Para isso, mostremos primeiramente que $O(n)$ é uma subvariedade de $GL(n,\mathbb{R})$. Consideremos $s(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \ ; \ A = A^t\}$ o conjunto das matrizes reais simétricas de ordem n. Obtém-se assim que $\dim s(n,\mathbb{R}) = \frac{n}{2}(n+1)$. Definamos a aplicação $f : M(n,\mathbb{R}) \to s(n,\mathbb{R})$ onde

$$f(A) = A \cdot A^t.$$

Essa aplicação está bem definida pois, dado $A \in M(n,\mathbb{R})$, temos

$$(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t.$$

Logo, $A \cdot A^t \in s(n,\mathbb{R})$ acarretando assim que f está bem definida.

Provaremos que $O(n)$ é imagem inversa de um valor regular de f, (Vide [17] na página 58) visto que $O(n) = f^{-1}(I)$. Sendo assim, vejamos que:

<u>f **é diferenciável:**</u> Sejam $X, Y \in M(n,\mathbb{R})$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial X}(Y) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(X+rY) - f(X)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(X+rY)(X+rY)^t - XX^t}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{XX^t + rXY^t + rYX^t + r^2YY^t - XX^t}{r} \\
&= XY^t + YX^t.
\end{aligned}$$

<u>I **é valor regular:**</u> Sejam $X \in O(n)$ e $S \in s(n,\mathbb{R})$, tomando $Y = \frac{SX}{2} \in M(n,\mathbb{R})$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial X}(Y) = X\left(\frac{SX}{2}\right)^t + \frac{SX}{2}X^t = \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} = S,$$

ou seja, $\frac{\partial f}{\partial X}(Y)$ é diferenciável para todo $X \in f^{-1}(I) = O(n)$. Logo, I é valor regular de f e, assim, $O(n)$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞. Portanto, $O(n)$ é uma subvariedade $GL(n,\mathbb{R})$.

Por fim, basta considerar as operações multiplicação e inversão induzidas de $GL(n,\mathbb{R})$ em $O(n)$ para concluir que $O(n)$ é um grupo de Lie.

Exemplo 12. Segundo o Exemplo (11), o $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ é um grupo de Lie, visto que $\mathbb{Z}_2 \cong O(2)$. Esse caso é bem importante

Na seção subseção seguinte, é exposta e discutida a definição de inclinação fraca equivariante de uma função contínua e de uma função s.c.i. .

1.3.2 A inclinação fraca equivariante

O conceito de inclinação fraca equivariante de uma função s.c.i. f toma destaque quando o domínio de f possui algumas simetrias. Por exemplo, na Seção 2.3, é mostrada uma generalização da versão simétrica do passo da montanha a qual será de extrema importância na demonstração da infinidade de soluções da Equação de Schröndinger (2).

Nessa seção, consideremos X um espaço métrico onde G é um grupo de Lie G está agindo por meio de transformações isométricas (um G-espaço métrico) e seja d a métrica em X.

Definição 1.31. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e invariante e $u \in X$. Denotamos por $|d_G f|(u)$ o supremo dos σ em $[0, \infty)$ tais que exista uma vizinhança invariante U de u e uma aplicação contínua $H : U \times [0, \delta] \to X$ tal que
Propriedade a:

$$d(H(v,t), v) \leq t,$$

Propriedade b:

$$f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$$

e $H(\cdot, t)$ é equivariante. O número real estendido $|d_G f|(u)$ é denominado de inclinação fraca invariante de f em u.

Vale ressaltar que faz-se necessária a condição de G ser um grupo de Lie porque a diferenciabilidade das aplicações produto e inversão presentes em G torna mais prático o uso de argumentos analíticos. Por exemplo, durante a demonstração de uma versão do Teorema da Deformação (na Seção 2.2), a função contínua que dá a deformação desejada é construída por uma sequência de funções e, para esta ser equivariante, faz-se necessária a continuidade da aplicação produto do grupo de Lie.

Proposição 1.32. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e invariante. Então, $|d_G f| : X \to [0, \infty]$ é invariante e s.c.i.*

Demonstração. **1ª parte:** $|d_G f|$ é invariante.

Provaremos que, dado $g \in G$, temos:

$$|df|(g \cdot u) = |df|(u).$$

Consideremos $\sigma > 0$ como na Definição (1.31). Logo, existe uma vizinhança U de u e uma aplicação contínua $H : U \times [0, \delta] \to X$, onde $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} d(H(v,t),v) &\leq t \\ f(H(v,t)) &\leq f(v) - \sigma t; \\ H(g \cdot v, t) &= g \cdot H(v,t). \end{aligned}$$

para todo $g \in G, v \in U$ e $t \in [0, \delta]$.

Definamos agora $U_1 = g \cdot U \subset U$, visto que U é invariante, e $H_1 = H|_{U_1}$. Observemos que ainda temos

$$d(H_1(g \cdot v, t), g \cdot v) \leq t,$$

para todo $g \cdot v \in g \cdot U = U_1$. Ademais,

$$f(H(g \cdot v, t)) \leq f(g \cdot v) - \sigma t$$

para todo $g \cdot v \in g \cdot U$. E, por fim, H_1 é equivariante, pois H é. Portanto, a aplicação H_1 se encaixa com a aplicação presente na Definição (1.31). Logo,

$$|d_G f|(g \cdot u) \leq |d_G f|(u).$$

A desigualdade contrária é obtida aplicando a Definição (1.31) para $|df|(gu)$ e fazer o mesmo argumento utilizando g^{-1} em vez de g.

2ª parte: $|d_G f|$ é s.c.i.

O argumento é semelhante ao argumento utilizando na Proposição (1.13).

■

Proposição 1.33. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e invariante. Se G_1 é subgrupo de G, então $|d_G f|(u) \leq |d_{G_1}|f(u)$ para todo $u \in X$.*

Demonstração. Observe que se $|d_G f|(u) = 0$, não há o que provar. Consideremos então $0 < \sigma < |d_G f|(u)$ como na Definição 1.31. Assim, existe uma vizinhança invariante U de u e uma aplicação contínua $H : U \times [0, \delta] \to X$ tal que

Propriedade a:

$$d(H(v,t),v) \leq t,$$

Propriedade b:

$$f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$$

e $H(\cdot, t)$ é G-equivariante. Como G_1 é subgrupo de G, segue que $H(\cdot, t)$ e U são G_1-equivariante. Portanto, a aplicação H goza das propriedades da Definição 1.31 aplicada para G_1. Logo,

$$\sigma \leq |d_{G_1} f|(u).$$

Dessa forma, $|d_{G_1}f|(u)$ é uma cota superior de tais σ. Dessa forma, obtemos que

$$|d_G f|(u) \leq |d_{G_1}|f(u).$$

■

Em qualquer espaço métrico, podemos verificar que

$$|df|(u) = |d_{G_1}f|(u)$$

onde $G_1 = \{e\}$ e a ação em questão é a trivial (vide o Exemplo 5).

Para o caso de funções semicontínuas inferiormente e invariantes pela ação do grupo G, também podemos definir os conjuntos $D(f)$ e $epi(f)$ da mesma forma que foi feita na Definição 1.3 e, no Exemplo 13, é induzida uma ação de grupo no epigráfico.

Definição 1.34. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e invariante. Denominados de domínio efetivo de f o conjunto

$$D(f) = \{u \in X \; ; \; f(u) < \infty\}$$

e por epigráfico o conjunto

$$epi(f) = \{(u, \xi) \in X \times \mathbb{R} \; ; f(u) \leq \xi\}$$

onde o epígrafo é munido com a métrica

$$d((u, \xi), (v, \mu)) = (d(u, v)^2 + |\xi - \mu|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 13. Observe que se X é um G-espaço métrico, então o espaço $epi(f)$ tem uma estrutura natural de $G-$espaço métrico com a ação induzida $\cdot : G \times epi(f) \to epi(f)$ com

$$g \cdot (u, \xi) = (g \cdot u, \xi).$$

onde $g \cdot u$ é g agindo em u conforme a ação presente em X. Sendo assim, notemos que sendo f invariante, obtemos também $\mathcal{G}_f$ é invariante. De fato, pois

$$\mathcal{G}_f(g \cdot (u, \xi)) = \mathcal{G}_f((g \cdot u, \xi)) = \xi = \mathcal{G}_f(u, \xi).$$

Observemos que, conforme vimos na Proposição (1.8), a mesma propriedade permanece válida no contexto de inclinação fraca equivariante:

Proposição 1.35. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e equivariante, $u \in X$ e $\mathbb{R}$. Então,*

a)

$$|d_G\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = \begin{cases} \frac{|d_G f|(u)}{\sqrt{1+(|d_G f|(u))^2}}, & se\ |d_G f|(u) < \infty \\ 1, & se\ |d_G f|(u) = \infty, \end{cases}$$

b) $|d_G\mathcal{G}_f|(u, \xi) = 1$, *se* $f(u) < \xi$.

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração apresentada na Proposição (1.8). ■

Da mesma maneira que foi realizada na Seção (1.1), podemos também definir, de maneira consistente, a inclinação fraca para função s.c.i. e equivariantes da seguinte forma:

Definição 1.36. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. invariante e seja $u \in D(f)$. Definimos

$$|d_G f|(u) = \begin{cases} \frac{|d_G\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d_G\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}, & se\ |d_G\mathcal{G}_f|(u, f(u)) < 1 \\ +\infty, & se\ |d_G\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = 1. \end{cases}$$

Por meio da definição de inclinação fraca equivariante, podemos estender resultados que em um primeiro momento são feitos para funções contínuas equivariantes para funções que são apenas semicontínuas inferiormente.

No próximo capítulo, Seção 2.1, são apresentados conceitos da teoria dos pontos críticos mas para funcionais semicontínuos inferiormente. Além disso, na Seção 2.2, é provado um teorema da deformação para funcionais que são apenas contínuos. Por fim, na Seção 2.3, é provado uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente.

Capítulo 2

Teorema do Passo da Montanha simétrico para funcionais semicontínuos inferiormente

Neste capítulo, são abordados alguns conceitos básicos da teoria dos pontos críticos para funcionais não suaves assim como a demonstração da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente.

Esse capítulo foi baseado nos artigos de Canino e Degiovanni ([7]), de Marzocchi ([18]) e nos Capítulos 7, 8 e 9 do livro Rabinowitz ([22]).

2.1 Conceitos básicos

A ideia central da teoria dos pontos críticos não suaves é tentar reconstruir os conceitos e definições que há na teoria clássica de tal forma que inclua o novo conceito de inclinação apresentada no Capítulo 1.

Nesta seção, considere X G-espaço métrico onde G é um grupo de Lie e d é a métrica de X. Vejamos algumas definições:

Definição 2.1. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função $s.c.i.$ e invariante. Uma órbita (Definição 1.25) $\mathcal{O} \subset D(f)$ é dita crítica, se

$$|d_G f|(u) = 0$$

para todo $u \in \mathcal{O}$.

Definição 2.2. Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função *s.c.i.* e invariante e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que, f satisfaz a condição G-PS no nível c (mais simplesmente $G-(PS)_c$) se para toda sequência (u_n) em $D(f)$ com

$$|d_G f|(u_n) \to 0 \quad \text{e} \quad f(u_n) \to c$$

implica que (u_n) possui uma subsequência convergente em X.

Em um contexto não-equivariante, dizemos que f satisfaz a condição $(PS)_c$ se f satisfaz $G_1 - (PS)_c$ com $G_1 = \{e\}$.

Proposição 2.3. *Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função contínua e invariante e $c \in \mathbb{R}$. Se f satisfaz a condição $G-(PS)_c$, então $\mathcal{G}_f$ também satisfaz.*

Demonstração. De fato, seja uma (x_n, ξ_n) uma sequência $(PS)_c$ de $\mathcal{G}_f$. Sendo assim,

$$\mathcal{G}_f(x_n, \xi_n) = c \text{ e } |d\mathcal{G}_f|(x_n, \xi_n) \to 0$$

Observemos que $\mathcal{G}_f(x_n, \xi_n) = \xi_n$. Logo, $(x_n, \xi_n) = (x_n, c)$. Observando que, a função $g : \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ onde $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ é contínua, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u_n, c) \to 0 \Rightarrow |df|(u_n) = g(|d\mathcal{G}_f|(u_n, c)) \to 0,$$

graças a Proposição 1.8. Logo, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para f. Portanto, como f goza da propriedade $(PS)_c$, segue que existe uma subsequência (u_{n_k}) convergente. Dessa forma, a subsequência $((u_{n_k}, c))$ de $((u_n, c))$ é convergente. Portanto, $\mathcal{G}_f$ cumpre a condição $(PS)_c$ também. ■

No que segue, para todo $c \in \mathbb{R}$, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} K_c &:= \{u \in D(f) \; ; \; |d_G f|(u) = 0, f(u) = c\} \;\; e \\ f^c &:= \{u \in X \; ; \; f(u) \leq c\}. \end{aligned}$$

Na próxima seção, será abordado uma versão do Teorema da Deformação para funcionais contínuos por meio da teoria de inclinação fraca.

2.2 Teorema da Deformação

Durante esta seção, considere X um espaço métrico munido de uma ação isométrica de um grupo de Lie G compacto, de forma mais resumida, X é um $G-$Espaço Métrico. Esta Seção foi baseada no artigo de Canino e Degiovanni ([7]).

Neste Seção, veremos o quanto o conceito de inclinação fraca (Definição 1.1) será essencial no percurso da demonstração do seguinte Teorema da Deformação:

Teorema 2.4 (Teorema da Deformação Equivariante)**.** *Seja X um $G-$espaço métrico, f uma função contínua equivariante e $c \in \mathbb{R}$. Assuma que f satisfaz $G-(PS)_c$. Então dado $\overline{\epsilon} > 0$, U uma vizinhança invariante de K_c (Se $K_c = \emptyset$ temos $U = \emptyset$), e $\lambda > 0$, existe $\epsilon > 0$ e $\eta : X \times [0,1] \to X$ contínua com:*

a) $d(\eta(u,t), u) \leq \lambda t$;

b) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

c) $f(u) \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}) \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

d) $\eta(f^{c+\epsilon} \setminus U, 1) \subset f^{c-\epsilon}$;

e) $\eta(\cdot, t)$*é equivariante para todo* $t \in [0,1]$

Convidamos o leitor a recordar o clássico Teorema da Deformação da Teoria dos Pontos Críticos:

Teorema 2.5 (Teorema da Deformação)**.** *Seja X um espaço de Banach, $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Assuma que f satisfaz $(PS)_c$. Então para cada $\overline{\epsilon} > 0$, existe $\epsilon > 0$ e $\eta \in C(X \times [0,1], X)$ verificando:*

a) $\eta(u, 0) = u$, *para todo* $u \in X$;

b) $f(u) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon] \Rightarrow \eta(t, u) = u$

c) $\eta(f^{c+\epsilon}, 1) = f^{c-\epsilon}$;

d) $\eta(\cdot, t) : X \to X$ *é um homeomorfismo.*

Observe que o Teorema da Deformação Clássico é bem similar ao Teorema da Deformação Equivariante (2.6) o qual é bem menos exigente. De fato, pois permite construir uma deformação por meio de uma função apenas contínua e não necessariamente C^1. Porém, em contra partida, é exigida a equivariância do funcional f e a deformação proveniente do caso equivariante não possui propriedades tão fortes quanto às propriedades da deformação proveniente do caso clássico. Deveras, tal deformação não é, necessariamente, um homeomorfismo vejamos:

Exemplo 14. Sejam $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq |x|\} \cup (\{0\} \times (-\infty, 0])$ e $f : X \to \mathbb{R}$ com

$$f(x,y) = -y.$$

Observe que f não tem pontos críticos. Note que f verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, pois dada uma sequência (x_n, y_n) que cumpre a condição $(PS)_c$, segue que

$$f(x_n, y_n) = -y_n \to c.$$

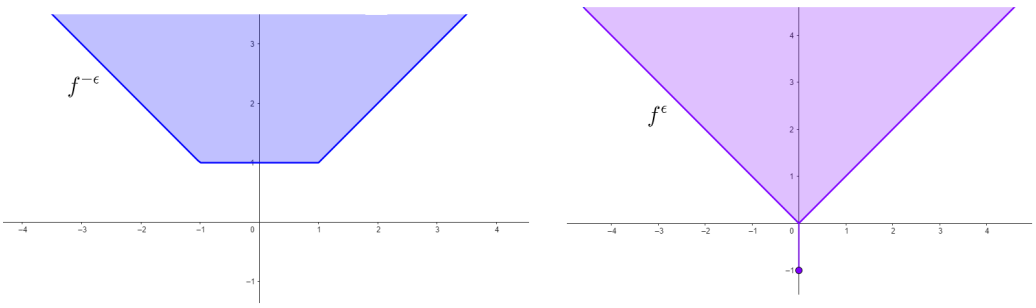
Logo, (y_n) é uma sequência que converge para $-c$ e é limitada por uma constante d. Por outro lado, como $(x_n, y_n) \in X$, segue que

$$|x_n| < y_n < d.$$

Assim, (x_n) também é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Daí, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente para um ponto x_0. Logo,

$$(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x_0, -c).$$

Concluindo assim que f cumpre a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Como f não possui pontos críticos, iremos considerar o conjunto U, do Teorema da Deformação Equivariante, igual a vazio. Provemos agora que f^ϵ não é homeomorfo a um subconjunto de $f^{-\epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$.



(a) Conjunto $f^{-\epsilon}$ (b) Conjunto f^{ϵ}

Figura 2.1: Representação dos conjuntos $f^{-\epsilon}$ e f^{ϵ} no plano $\mathbb{R}^2$.

Observe que, o conjunto f^ϵ não pode ser homeomorfo a nenhum subconjunto de $f^{-\epsilon}$ pois, ao retirar a origem, $f^\epsilon \setminus \{(0,0)\}$ não é conexo por caminhos enquanto os subconjuntos conexos de $f^{-\epsilon}$, ao retirar um ponto, permanecem conexo por caminhos. Portanto, a deformação η associada a f por meio do Teorema da deformação equivariante não é um homeomorfismo.

Mesmo assim, o Teorema da Deformação Equivariante é extremamente útil para provar uma Versão Simétrica do Teorema do Passo da Montanha e, consequentemente, provar a existência de uma infinidade de pontos críticos de um funcional s.c.i. (Teorema 2.7).

Vamos à demonstração do Teorema da Deformação Equivariante. Para isso, construiremos a deformação desejada passo a passo dando à deformação mais propriedades. Para isso, precisaremos do Lema de Milnor presente no artigo de Palais ([20] no Lema 2.4):

Lema 2.1 (Lema de Milnor). *Seja Y um espaço métrico. Então, qualquer cobertura aberta de Y admite um refinamento localmente finito $\{V_{j,\lambda} \mid j \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_j\}$ tal que*

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow V_{j,\lambda} \cap V_{j,\mu} = \emptyset.$$

Demonstração. Consideremos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura de Y. Suponhamos inicialmente que $\{U_\alpha\}$ é localmente finita. Seja B_i o conjunto formado por subconjuntos $\Lambda = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_i\}$ de A.

Seja $\{\alpha_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma partição da unidade com $supt\phi_\alpha \subset U_\alpha$ e para $\Lambda \in B_i$ considere

$$G_{i\Lambda} = \{x \in Y \mid \phi_\alpha(x) > 0 \ se \ \alpha \in \Lambda \ e \ \phi_\gamma(x) < \phi_\alpha(x) \ se \ \alpha \in \Lambda \ e \ \gamma \notin \Lambda\}.$$

Para cada $x \in X$, somente um número finito de ϕ_α são não nulos, logo $G_{i\Lambda}$ é aberto. Observemos que

$$\Lambda \neq \Lambda' \Rightarrow G_{i\Lambda} \cap G_{i\Lambda'} \neq \emptyset.$$

Desde que $G_{i\Lambda} \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, segue que $\{G_{i\Lambda}\}$ refina $\{U_\alpha\}$. Agora, dado $x_0 \in Y$, consideremos os índices $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}$ tal que $\phi_{\alpha_{i_j}}(x_0) > 0$. Determinemos

$$\Lambda = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}\}.$$

Logo, $x_0 \in G_{(m-1)\Lambda}$ e, assim, $\{G_{i\Lambda}\}$ cobre Y. Por fim, seja O uma vizinhança de x_0 tal que $\{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap \theta \neq \emptyset\}$ é um conjunto A' finito.

Então $G_{i\Lambda} = \emptyset$ a menos de que $\Lambda \subset A'$ e isso só pode ocorrer uma quantidade finita de vezes, logo $\{G_{i\Lambda}\}$ é localmente finito. ■

Como desejamos construir uma deformação que é uma deformação que é equivariante, precisaremos associar uma cobertura conveniente à um refinamento que é equivariante e, ainda mais, às funções associadas à partição da unidade também sejam equivariantes. Vejamos o seguinte lema:

Lema 2.2 (Cobertura equivariante). *Seja $\{U_{j,\lambda}\}$ uma cobertura aberta localmente finita de um subconjunto K de um $G-$espaço métrico X, onde G é finito. Então, existe um refinamento $\{V_{j,\lambda}\}$ de $\{U_{j,\lambda}\}$ tal que*

a) *$\{V_{j,\lambda}\}$ é equivariante, i.e.,*

$$g \cdot V_{j,\lambda} = V_{j,\lambda}; \quad \forall g \in G$$

b) *Existe uma partição da unidade subordinada a $\{V_{j,\lambda}\}$ que é equivariante.*

Demonstração. Tal demonstração foi baseada na Seção 6 do Capítulo 3 do livro Introduction to compact transformation groups ([4]).

Observemos que, se $U = \{U_{j,\lambda}\}$ é uma cobertura aberta de K, então

$$g \cdot U = \{gU_{j,\lambda} \mid U_{j,\lambda} \in U\}$$

também é. De fato, gU é aberto pois dado $g \cdot x_0 \in gU$, segue que $x_0 \in U$ e, assim, existe $\delta_0 > 0$ tal que $B(x_0, \delta_0) \subset U$ e, assim, $g \cdot B(x_0, \delta_0) \subset gU$. Como G é um grupo de Lie compacto cuja ação em X é isométrica, segue que $g \cdot B(x_0, \delta_0) = B(g \cdot x_0, \delta_0)$ provando que $g \cdot x_0 \in int(gU)$. Sendo assim, gU é aberto.

Recordando que a interseção finita dos abertos da cobertura, ainda é uma cobertura, segue que

$$\bigcap_{g \in G} gU := \{V_{j,\lambda}\}$$

onde tal interseção pode ser interpretada como o conjunto formado por todas as interseções entre os abertos de tais coberturas. Assim, $\{V_{j,\lambda}\}$ é uma cobertura invariante e aberta de K.

É imediato verificar que $\{V_{j,\lambda}\}$ será localmente finita caso $\{U_{j,\lambda}\}$ seja localmente finita.

Consideremos agora uma partição da unidade $\{\phi_{j\lambda}\}$ subordinada a cobertura $\{V_{j,\lambda}\}$. Definamos

$$\phi'_{j,\lambda} = \frac{1}{|G|} \sum_g \phi_{g \cdot V_{j,\lambda}}(g \cdot x)$$

Então,

$$\sum_{V_{j,\lambda}} \phi'_{j,\lambda}(x) = \frac{1}{|G|} \sum_g \sum_{V_{j,\lambda}} \phi_{g \cdot V_{j,\lambda}}(g \cdot x) = \frac{1}{|G|} \sum_g 1 = 1,$$

pois $\{\phi_{j\lambda}\}$ é uma partição da unidade. Ainda mais,

$$\begin{aligned} \phi'_{j,\lambda}(h \cdot x) = \frac{1}{|G|} \sum_g \phi_{gV_{j,\lambda}}(gh \cdot x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g'} \phi_{g'V_{i,\lambda}}(g' \cdot x) \\ &= \phi'_{j,\lambda}(x). \end{aligned}$$

a segunda igualdade advém da bijetividade da aplicação $\varphi_h : G \to G$ onde $\varphi_h(g) = gh$. Assim $\{\phi'_{j\lambda}\}$ é uma partição da unidade equivariante subordinada a cobertura $\{V_{j,\lambda}\}$ onde $\{V_{j,\lambda}\}$ é uma cobertura equivariante. ■

Agora, vejamos o primeiro passo para a construção da deformação do Teorema da Deformação Equivariante:

Lema 2.3. *Seja $\sigma : X \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que*

$$|d_G f|(u) \neq 0 \Rightarrow |d_G f|(u) > \sigma(u).$$

Então existem duas aplicações contínuas $\eta : X \times \mathbb{R}^+ \to X$ e $\tau : X \to \mathbb{R}^+$ tal que para todo $u \in X$ e $t \in \mathbb{R}^+$, temos

A) $d(\eta(u,t), u) \leq t$;

B) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

C) $t \leq \tau(u) \Rightarrow f(\eta(u,t)) \leq f(u) - \sigma(u)t$;

D) $|d_G f|(u) \neq 0 \Rightarrow \tau(u) > 0$

E) $\eta(\cdot, t)$ *é equivariante para todo* $t \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Sendo $|d_G f|$ s.c.i., segue que para cada u com $|d_G f|(u) \neq 0$, podemos determinar um $\delta_u > 0$ tal que

$$B(u, \delta_u) \subset \{v \in X \mid |df|(v) \neq 0\}.$$

Daí, temos

$$\sup_{v \in B(u,\delta_u)} \sigma(v) < |df|(u).$$

Diminuindo δ_u, se necessário, também podemos encontrar, por meio da Definição 1.1 de inclinação fraca, uma aplicação contínua

$$H_u : B(u, \delta_u) \times [0, \delta_u] \to X$$

tal que

a) $d(H_u(v,t); v) \leq t$;

b) $f(H_u(v,t)) \leq f(v) - \left(\sup_{v \in B(u,\delta_u)} \sigma(v)\right) \cdot t$.

c) $H_u(\cdot, t)$ é equivariante.

Segundo o Lema de Milnor, a cobertura $\{B\left(u, \frac{\delta_u}{2}\right) \mid |df|(u) \neq 0\}$ de $V := \{u \in X \mid |df|(u) \neq 0\}$ admite um refinamento localmente finito, $\beta = \{V_{j,\lambda} \mid j \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_j\}$.

Graças ao Lema (2.2), podemos supor que $\{V_{k,\lambda} \mid j \in \mathbb{N}; \lambda \in \Lambda_j\}$ é equivariante. Consideremos também a partição da unidade equivariante $\{\phi_{j,\lambda} \mid j \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_j\}$ subordinada à $\{V_{j,\lambda}\}$. Desde que o fecho $\overline{V}_{j,\lambda}$ em X está contido em W, podemos estender $\phi_{j,\lambda}$ para X assumindo 0 para valores foram de W.

Para simplificar as notações, definamos $\delta_{j,\lambda} = \delta_{u_{j,\lambda}}$ e $H_{j,\lambda} = H_{u_{j,\lambda}}$. Para todo (j, λ), considere $V_{j,\lambda} \subset B_{\delta_{j,\lambda}}$.. Observemos que a função $\overline{\tau}$ dada por

$$\overline{\tau}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V}_{j,\lambda}\}, & se\ |d_G f|(u) \neq 0 \\ 0, & se\ |d_G f|(u) = 0. \end{cases}$$

é semicontínua inferiormente. De fato, seja $u_n \to u$. Observe que se $|df|(u) = 0$, então

$$0 \leq |d_G f|(u_n) \Rightarrow |d_G f|(u) \leq |d_G f|(u_n) \Rightarrow$$

$$|d_G f|(u) \leq \liminf |d_G f|(u_n).$$

Se $|d_G f|(u) \neq 0$, então se $u \in \overline{V_{j,\lambda}}$, segue que $u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}$ para n suficientemente grande. Como há apenas uma quantidade finita de vizinhanças $\overline{V_{j,\lambda}}$ que contém u, segue que

$$\{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V_{j,\lambda}}\} \subset \{\delta_{j,\lambda} \mid u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}\}$$

para n suficientemente grande. Logo,

$$\frac{1}{4}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V_{j,\lambda}}\} \leq \frac{1}{4}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}\}.$$

Como $|df|$ é s.c.i., segue que, $|df|(u_n) \neq 0$ para n suficientemente grande. Portanto,

$$\overline{\tau}(u) \leq \overline{\tau}(u_n) \Rightarrow$$

$$\overline{\tau}(u) \leq \liminf \overline{\tau}(u_n).$$

Dessa forma, $\overline{\tau}(u)$ é s.c.i.. Definamos agora a aplicação $\tau : X \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\tau(u) = \inf\{d(u,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\}.$$

Note que τ é invariante por G. De fato, observemos que

$$\tau(g \cdot u) = \inf\{d(gu,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\} = \inf\{d(gu,gv) + \overline{\tau}(gv) \mid v \in X\}$$

pois a aplicação $\psi_g : X \to X$ onde $\psi_g(x) = g \cdot x$ é sobrejetora visto que, dado $y \in X$, temos

$$\psi_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot y) = y.$$

Recordando que a ação em questão é isométrica, segue que $d(gu,gv) = d(u,v)$, e como a família $\{\overline{V_{j,\lambda}}\}$ é equivariante, temos $\overline{\tau}(gx) = \overline{\tau}(x)$. Sendo assim,

$$\tau(g \cdot u) = \inf\{d(gu,gv) + \overline{\tau}(gv) \mid v \in X\} = \inf\{d(u,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\} = \tau(u).$$

Portanto, τ é uma função equivariante.

Vejamos agora que τ é uma função contínua. Para isso, considere $u_n \to u$ em X. Notemos que

$$\tau(u_n) = \inf\{d(u_n,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\} \leq d(u_n,v) + \overline{\tau}(v)$$

para todo $v \in X$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \limsup \tau(u_n) &\leq \limsup(d(u_n,v) + \overline{\tau}(v)) \\ \Rightarrow \limsup \tau(u_n) &\leq d(u,v) + \overline{\tau}(v);\ \forall v \in X \\ \Rightarrow \limsup \tau(u_n) &\leq \tau(u). \end{aligned}$$

Por outro lado, notemos que se $|d_G f|(u)$ é positivo, consideremos a quantidade finita de vizinhanças $V_{j,\lambda}$ tal que $|d_G f|(v) \neq 0$ para todo $v \in V_{j,\lambda}$. Assim,

$$\overline{\tau}(u_n) \neq 0; \;\; \forall u_n \in V_{j,\lambda}$$

com n suficientemente grande. Ademais, como existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \in V_{j,\lambda}$ para toda vizinhança em questão que contém u, segue que

$$\begin{aligned} \{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V_{j,\lambda}}\} &\subset \{\delta_{j,\lambda} \mid u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}\} \\ \Rightarrow \min\{\delta_{j,\lambda} \mid u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}\} &\leq \min\{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V_{j,\lambda}}\} \\ \Rightarrow \overline{\tau}(u_n) &\leq \overline{\tau}(u) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\limsup \overline{\tau}(u_n) \leq \overline{\tau}(u).$$

Como $\overline{\tau}$ é s.c.i. e $u_n \to u$, segue que

$$\overline{\tau}(u) \leq \liminf \overline{\tau}(u_n),$$

Sendo assim, $\overline{\tau}(u_n) \to \overline{\tau}(u)$. Observemos agora que,

$$|d(u_n, v) + \overline{\tau}(u_n) - d(u, v) - \overline{\tau}(u)| \leq d(u_n, u) + |\overline{\tau}(u_n) - \overline{\tau}(u)|,$$

assim, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |d(u_n, v) + \overline{\tau}(u_n) - d(u, v) - \overline{\tau}(u)| < \epsilon,$$

para todo $v \in X$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(u, v) + \overline{\tau}(v) &\leq d(u_n, v) + \overline{\tau}(u_n) + \epsilon \Rightarrow \\ \tau(u) &\leq d(u_n, v) + \overline{\tau}(u_n) + \epsilon \Rightarrow \\ \tau(u) &\leq \tau(u_n) + \epsilon \Rightarrow \\ \tau(u) &\leq \liminf \tau(u_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Sendo assim,

$$\tau(u) \leq \liminf \tau(u_n).$$

Portanto,

$$\limsup \tau(u_n) \leq \tau(u) \leq \liminf \tau(u_n) \Rightarrow \tau(u_n) \to \tau(u)$$

quando $|d_G f|(u) \neq 0$.

Vejamos agora o caso em que $|df|(u) = 0$. Neste caso, segue que

$$0 = \tau(u) \leq \tau(u_n) \Rightarrow \liminf \tau(u_n) \Rightarrow$$

$$\limsup \tau(u_n) \leq \tau(u) \leq \liminf \tau(u_n) \Rightarrow \tau(u_n) \to \tau(u).$$

Portanto, τ é uma função contínua.

Vejamos agora algumas propriedades da função τ. Por definição, temos

$$|d_G f|(v) = 0 \Rightarrow \tau(v) = 0$$

$$|d_G f|(v) \neq 0 \Rightarrow 0 < \tau(v) \leq \frac{1}{4}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid v \in \overline{V}_{j,\lambda}\} < \frac{1}{2}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid v \in \overline{V_{j,\lambda}}\}$$

Queremos agora definir uma sequência de aplicações contínuas:

$$\eta_h : \{(v,t) \in X \times [0,\infty] \mid t \leq \tau(v)\} \to X$$

tal que

$A_1)$ $d(\eta_h(v,t),v) \leq \left(\sum_{j=1}^{h}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}\phi_{j,\lambda}(v)\right)t,$

$B_1)$ $f(\eta_h(v,t)) \leq f(v) - \sigma(v)\left(\sum_{j=1}^{h}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}\phi_{j,\lambda}(v)\right)t$

$C_1)$ $\eta_h(\cdot,t)$ é equivariante.

Primeiramente, definamos

$$\overline{\eta_1}(v,t) = \begin{cases} H_{1,\lambda}(v,\phi_{1,\lambda}(v)t), & se\ v \in \overline{V_{1,\lambda}} \\ v, & se\ v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}. \end{cases}$$

Observemos que, η_1 goza das propriedades $(A_1), (B_1)$ e (C_1), pois:

Propriedade (A_1):

$$v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda} \Rightarrow d(\eta_1(v,t),v) = d(v,v) = 0 \leq \phi_{1,\lambda}(v)t.$$

$$v \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda} \Rightarrow d(\eta_1(v,t),v) = d(H_{1,\lambda}(v,\phi_{1,\lambda}(v)t),v) \leq \phi_{1,\lambda}(v)t.$$

Propriedade (B_1): Se $v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}$, então

$$f(\eta_1(v,t)) = f(v) \leq f(v) - \sigma(v)\phi_1(v)t,$$

pois $\phi_1(v) = 0$, visto que $v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}$ e ϕ_1 é uma das funções referente a partição da unidade que, fora do suporte, se anula.

Se $v \in \overline{V_{h,\lambda}}$, então, pela propriedade (b) de $H_{1,\lambda}$, temos

$$\begin{aligned} f(\eta_1(v,t)) &= f(H_{1,\lambda}(v,\phi_{1,\lambda}(v)t)) \\ &\leq f(v) - \left(\sup_{v\in B(u,\delta_u)} \sigma(v)\right)\phi_1(v)t \\ &\leq f(v) - \sigma(v)\phi(v)t. \end{aligned}$$

Propriedade (C_1): Para provar que $\eta_1(\cdot,t)$ é equivariante, vejamos primeiramente que

$\overline{V_{1,\lambda}}$, com $\lambda \in \Lambda_1$, é equivariante $\Rightarrow \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ é equivariante.

De fato, suponha por absurdo que $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ não seja equivariante. Então, existe $v_0 \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ e $g \in G$ tal que $g \cdot v \notin \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$. Ou seja, $g \cdot v \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)$.

Logo, $gv \in V_{1,\lambda}$ pra algum $\lambda \in \Lambda_1$. Como $V_{1,\lambda}$ é equivariante, segue que $v = g^{-1} \cdot (g \cdot v) \in V_{1,\lambda} \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)$, um absurdo. Sendo assim, $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ é equivariante. Concluindo o que desejávamos.

Assim, sendo $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ equivariante, segue que se $v \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$, então $gv \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$. E, portanto,

$$\eta_1(gv, t) = gv = g\eta_1(v, t).$$

Por outro lado, se $v \in \overline{V_{1,\lambda}}$, segue que $gv \in \overline{V_{1,\lambda}}$ e, utilizando a equivariância de $\phi_{1,\lambda}$ juntamente com a definição da ação de grupo no epigráfico presente no Exemplo 13, segue que

$$\begin{aligned} \eta_1(gv, t) &= H_{1,\lambda}(gv, \phi_{1,\lambda}(gv)t) \\ &= gH_{1,\lambda}(gv, \phi_{1,\lambda}(v)t) \\ &= g\,\eta_1(v, t). \end{aligned}$$

Agora, assumamos, indutivamente, que η_{n-1} goze das propriedades $(A_1), (B_1)$ e (C_1). Para todo $v \in \overline{V_{n,\lambda}}$ e $t \in [0, \tau(v))$, temos

$$d(\eta_{n-1}(v, t), v) \leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \phi_{j,\lambda}(v)\right) t \leq \tau(v) < \frac{1}{2}\delta_{n,\lambda}$$

consequentemente, $\eta(v, t) \in B(u_{n,\lambda}, \delta_n, \lambda)$. Dessa forma, a aplicação

$$\eta_n(v, t) = \begin{cases} H_{n,\lambda}(\eta_{n-1}(v, t), \phi_{n,\lambda}(v)t), & se\ v \in \overline{V_{n,\lambda}} \\ \eta_{n-1}(v, t), & se\ v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda} \end{cases}$$

está bem definida e goza das propriedades $(A_1), (B_1)$ e (C_1), cuja demonstração é análoga ao caso $n = 1$.

Desde que a família $\{V_{j,\lambda}\}$ é localmente finita, segue que, para todo u com $|d_G f|(u) \neq 0$, existe uma vizinhança U de u e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\eta_n(v, t) = \eta_{n_0}(v, t)$$

para todo $v \in U$, $t \in [0, \delta(v))$ e $n \geq n_0$. Logo, a aplicação $\eta : X \times [0, \infty] \to X$ dada por

$$\eta(u, t) = \lim_n \eta_n(u, \min\{t, \tau(u)\})$$

é contínua nos pontos (u,t) com $|df|(u) \neq 0$. Por (A_1) e (B_1), temos

$$\begin{aligned} d(\eta(u,t),u) &= \lim_n d(\eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\}),u) \\ &\leq \lim_n \min\{t,\tau(u)\} = \min\{t,\tau(u)\} \leq t, \end{aligned}$$

mostrando que a propriedade (A) do Lema 2.3 é válida para η. Observemos também que η goza da propriedade (B) do Lema 2.3, pois

$$\begin{aligned} f(\eta(u,t),u) &= f(\lim_n \eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\})) \\ &= \lim_n f(\eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\})) \\ &\leq \lim_n f(u) = f(u). \end{aligned}$$

Ainda mais, para verificar que η goza da propriedade (C), basta observar que, ao aplicarmos a propriedade (B_1) em η_n, temos

$$\begin{aligned} t \leq \tau(u) \Rightarrow f(\eta(u,t)) &\leq f(\lim_n \eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\})) \\ &= \lim_n f(\eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\})) \\ &\leq \lim_n \left(f(u) - \sigma(u) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \phi_{j,\lambda}(v) \right) \min\{t,\tau(u)\} \right) \\ &= f(u) - \sigma(u)\min\{t,\tau(u)\} \\ &\leq f(u) - \sigma(u)t, \end{aligned}$$

daí obtemos que η é contínua nos pontos (u,t) com $|df|(u) = 0$. Para verificarmos que τ goza da propriedade (D) do Lema, basta provarmos a contrapositiva

$$\tau(u) = 0 \Rightarrow |d_G f| = 0.$$

De fato, pois se $\tau(u) = 0$, então

$$\inf\{d(u,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\} = 0.$$

Portanto,

$$d(u,v) = 0 \to u = v$$

e

$$\overline{\tau}(v) = 0 \Rightarrow \overline{\tau}(u) = 0$$

igualdade essa que só ocorre quando $|d_G f|(u) = 0$. Por fim, vejamos que $\eta(\cdot,t)$ é equivariante (propriedade (E)), pois

$$\begin{aligned} \eta(gu,t) &= \lim_n \eta_n(gu,\min\{t,\tau(gu)\}) \\ &= \lim_n g\eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\}) \\ &= g\lim_n \eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\}) \\ &= g\eta(u,t), \end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Observe que, foi utilizado o fato de que τ é equivariante e que a ação de grupo é contínua o que ocorre porque a ação é isométrica e realizada por um grupo de Lie compacto. ■

Lema 2.4. *Sejam X um G-espaço métrico completo, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $C \subset X$ fechado e $\delta, \sigma > 0$ tal que*

$$d(u, C) \leq \delta \Rightarrow |d_G f|(u) > \sigma.$$

Então, existe uma aplicação contínua $\eta : X \times [0, \delta] \to X$ tal que

a) $d(\eta(u,t), u) \leq t$;

b) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

c) $d(u, C) \geq \delta \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

d) $u \in C \Rightarrow f(\eta(u,t)) \leq f(u) - \sigma t$;

e) $\eta(\cdot, t)$ *é equivariante para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração. A função $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ onde

$$\varphi(u) = \begin{cases} \sigma, & se\ d(u,C) \leq \delta \\ -\infty, & se\ d(u,C) > \delta \end{cases}$$

é semicontínua superiormente e $|d_G f|$ é semicontínua inferiormente com

$$\phi(u) < |d_G f|(u),$$

para todo $u \in X$. Assim, existe uma aplicação contínua $\hat{\sigma} : X \to [0, \infty)$ tal que

$$\phi(u) < \hat{\sigma}(u) < |d_G f|(u),$$

para todo $u \in X$. Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} d(u,C) \leq \delta \quad &\Rightarrow \quad \hat{\sigma}(u) = \sigma \\ \hat{\sigma}(u) \quad &< \quad |d_G f|(u). \end{aligned}$$

Dessa forma, a função $\overline{\sigma} = \min\{\hat{\sigma}^+, \sigma\}$ é contínua e satisfaz

$$\begin{aligned} d(u,C) \leq \delta \quad &\Rightarrow \quad \overline{\sigma}(u) = \sigma \quad e \\ |d_G f|(u) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \overline{\sigma}(u) < |d_G f|(u). \end{aligned}$$

Seja $\eta_1 : X \times [0, \infty) \to X$ e $\tau_1 : X \to [0, \infty)$ as duas aplicações contínuas provenientes do Lema 2.3 aplicado à função $\overline{\sigma}$. Definamos recursivamente a função

$$\eta_n(u,t) = \begin{cases} \eta_{n-1}(u,t), & se\ 0 \leq t \leq \tau_{n-1} \\ \eta_1(\eta_{n-1}(u, \tau_{n-1}(u)), t - \eta_{n-1}(u)), & se\ t \geq \tau_{n-1}(u), \end{cases}$$

onde

$$\tau_n(u) = \tau_{n-1} + \tau_1(\eta_{n-1}(u, \eta_{n-1}(u))).$$

Provaremos agora que para todo (u,t) onde $d(u,C)+t \leq \delta$, temos

$$\lim_n \tau_n(u) > t.$$

Por absurdo, suponhamos que $\tau_n(u) \leq t$ para todo n. Desde que

$$d(\eta_n(u, \tau_n(u)), \eta_{n-1}(u, \tau_{n-1}(u))) \leq \tau_n(u) - \tau_{n-1}(u),$$

$$d(\eta_n(u, \tau_n(u)), C) \leq d(\eta_n(u, \tau_n(u)), u) + d(u, C) \leq \tau_n(u) + d(u, C)$$

segue que $(\eta_n(u, \tau_n(u)))$ é uma sequência de Cauchy no conjunto $\{v \mid d(u,C) \leq \delta\}$ e, como o espaço é de Banach, segue que é convergente. Então, temos

$$\lim_n \eta_n(u, \tau_n(u)) = v.$$

Sendo assim,

$$\tau_1(v) = \lim_n \tau_1(\eta_n(u, \tau_n(u))) = \lim_n (\tau_{n+1}(u) - \tau_n(u)) = 0,$$

o que é uma contradição. Sendo assim, podemos definir uma aplicação contínua $\eta(u,t) = \lim_n \eta_n(u,t)$. Segue do teorema anterior que

$$f(\eta(u,t)) \leq f(u) - \sigma t.$$

e η é uma aplicação equivariante. Definamos $\eta(u,t) = \eta(u, (\delta - d(u,C))^+)$ quando $d(u,C)+t \geq \delta$. Nesta perspectiva, η tem as propriedades desejadas. ■

Teorema 2.6 (Teorema da Deformação Equivariante)**.** *Seja X um $G-$espaço métrico, f uma função contínua equivariante e $c \in \mathbb{R}$. Assuma que f satisfaz $G-(PS)_c$. Então dado $\overline{\epsilon} > 0$, U uma vizinhança invariante de K_c (Se $K_c = \emptyset$ temos $U = \emptyset$), e $\lambda > 0$, existe $\epsilon > 0$ e $\eta : X \times [0,1] \to X$ contínua com:*

a) $d(\eta(u,t), u) \leq \lambda t$;

b) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

c) $f(u) \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}) \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

d) $\eta(f^{c+\epsilon} \setminus U, 1) \subset f^{c-\epsilon}$;

e) $\eta(\cdot, t)$ *é equivariante para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração. Fixe $\overline{\epsilon} > 0$, uma vizinhança U de K_c e $\lambda > 0$. Primeiramente, suponhamos que f é uma função Lipschitz com constante 1. Da condição $G - PS$ no nível c, segue que K_c é compacto. Considere $r > 0$ tal que $B(K_c; 2r) \subset U$. Consideremos também $\delta, \sigma > 0$ tal que $2\delta < \overline{\epsilon}, \delta \leq r$ e

$$c - 2\delta \leq f(u) \leq c + 2\delta$$

e

$$u \notin B(K_c; r) \Rightarrow |d_G f| > \sigma.$$

Definamos

$$C = \{u \in X \mid c - \delta \leq f(u) \leq c + \delta,\ u \in B(K_c; 2r)\}.$$

Daí, pelo fato de que f é Lipschitz de constante 1, temos

$$d(u, C) \leq \delta \Rightarrow |d_G f|(u) > \sigma.$$

Sendo assim, consideremos $\eta' : X \times [0, \delta] \to X$ uma aplicação contínua como no Teorema 2.4. Nós podemos assumir, sem perda de generalidade, $\lambda \leq \delta$ e definir $\eta : X \times [0, 1] \to X$ por $\eta(u, t) = \eta'(u, \lambda t)$. As propriedades (a) e (b) são imediatas. Como f é uma função Lipschitz com constante 1, temos $f(u) \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon})$ implicando que $d(u, C) \geq \delta$. Consequentemente $\eta(u, t) = u$. Por fim, defina $\epsilon = \min\{\frac{\sigma\lambda}{2}, \delta\}$. Se $u \in f^{c+\epsilon} \setminus U$ e $f(u) \geq c - \epsilon$, segue que $u \in C$ e, consequentemente,

$$f(\eta(u, 1)) = f(\eta'(u, \lambda)) \leq f(u) - \sigma\lambda \leq c + \epsilon - \sigma\lambda \leq c - \epsilon.$$

Se $u \in f^{c+\epsilon} \setminus U$ e $f(u) \leq c - \epsilon$, deduzimos de (b) que $f(\eta(u, 1)) \leq c - \epsilon$. Consideremos agora o caso geral. Como o $epi(f)$ é fechado e $X \times \mathbb{R}$ é completo, segue que $epi(f)$ é completo. Consideremos $\overline{K}_c$ o conjunto dos pontos críticos de G_f no nível c. Como f cumpre a condição $(G - PS)_c$, segue que G_f também cumpre essa condição (Proposição 2.3). Ainda mais, $(U \times \mathbb{R}) \cap epi(f)$ é uma vizinhança de $\overline{K}_c$ e G_f é uma função Lipschitz com constante 1. Aplicando o primeiro caso para G_f, podemos encontrar $\epsilon > 0$ e uma aplicação contínua

$$\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2) : epi(f) \times [0, 1] \to epi(f)$$

tal que

a) $d(\overline{\eta}(u, t), u) \leq \lambda t$;

b) $\overline{\eta}_2((u, \xi), t) \leq \xi$;

c) $\xi \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}) \Rightarrow \overline{\eta}((u, \xi), t) = (u, \xi)$;

d) $\xi \leq c + \epsilon, u \notin U \Rightarrow \overline{\eta}_2((u, \xi), 1) \leq c - \epsilon$

e) $\overline{\eta}(\cdot, t)$é equivariante para todo $t \in [0,1]$

Por fim, definamos $\eta : X \times [0,1] \to X$ por $\eta(u,t) = \overline{\eta}_1((u, f(u)), t)$. Como o domínio de $\overline{\eta}$ é o $epi(f)$, temos $f(\overline{\eta_1}((u, f(u)), t)) \leq \overline{\eta}_2((u, f(u)), t)$. Assim, a função η é uma função conforme o enunciado no teorema. ■

Na próxima seção, aplicaremos o Teorema da Deformação Equivariante para provar uma importante Versão do Teorema do Passo da Montanha Equivariante. Este Teorema é crucial no estudo de soluções da Equação Logarítmica de Schrödinger, a Equação (3) que é um dos objetivos de estudos dessa dissertação.

2.3 Generalização da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para Funcionais não suaves

O objetivo dessa seção é utilizar toda a teoria apresentada até agora nessa dissertação para provar uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. A demonstração desse teorema foi baseada no artigo de Marzocchi ([18]) e nos capítulos 7, 8 e 9 do livro Rabinowitz ([22]). Vejamos o teorema:

Teorema 2.7. *Seja X um espaço de Banach e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional s.c.i. par. Considere $G = \mathbb{Z}_2$ e X como um $\mathbb{Z}_2$ espaço métrico cuja ação é a ação presente no Exemplo (6). Assuma que exista uma sequência estritamente crescente (V_n) de subespaços de dimensão finita de X com as seguintes propriedades*

a) *Existe um subespaço fechado Z de X, $\rho > 0$ e $\alpha > f(0)$ tal que*

$$X = V_0 \oplus Z \quad e \quad ||u|| = \rho \Rightarrow f(u) \geq \alpha; \ \forall u \in Z$$

b) *Existe uma sequência (R_n) em (ρ, ∞) tal que*

$$\forall u \in V_n \ \ com \ \ ||u|| \geq R_n \Rightarrow f(u) \leq f(0).$$

Mais ainda, assuma que

c) *Para todo $c \geq \alpha$, G_f satisfaz a condição $(PS)_c$;*

d) *Tem-se $|d_G\mathcal{G}_f|(0,\xi) \neq 0$, sempre quando $\xi \geq \alpha$.*

Então, existe uma sequência (u_n, ξ_n) em $epi(f)$ tal que $|d\mathcal{G}_f|(u_n, \xi_n) = 0$ e $\mathcal{G}_f(u_n, \xi_n) = \xi_n \to \infty$.

Para fins didáticos, a demonstração desse teorema foi decomposta em lemas e proposições. Daqui em diante, considere as hipóteses e as notações presentes no enunciado do Teorema (2.7).

O primeiro lema nos diz que, para pontos diferentes da origem, a inclinação fraca e a inclinação fraca equivariante de uma função par coincidem quando o grupo em questão é o $\mathbb{Z}_2$. Vejamos:

Lema 2.5. *Seja X um espaço de Banach, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função par e contínua. Então, $|d_{\mathbb{Z}_2} f|(u) = |df|(u)$ para $u \neq 0$.*

Demonstração. Consideremos a função invariante $f : X \to \mathbb{R}$ em relação ao $\mathbb{Z}_2$- espaço métrico X. Graças a Proposição 1.33, temos

$$|d_{\mathbb{Z}_2} f|(u) \leq |d_{G_1} f|(u) = |df|(u)$$

onde G_1 é o grupo trivial, pois G_1 é subgrupo de G. Considere agora σ, onde $0 < \sigma < |d\mathcal{G}_f|(u, \xi)$ como na Definição 1.1. Assim, existe $\delta > 0$ e uma aplicação contínua $H =: B(u; \delta) \times [0, \delta] \to X$ tal que

a) $d(H(v, t), v) \leq t$

b) $f(H(v, t)) \leq f(v) - \sigma t$

onde $v \in B(u, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Ademais, suponhamos, a menos de redução de δ, que $\delta < ||u||$ implicando que $B(u, \delta) \cap B(-u, \delta) = \emptyset$. Assim fica bem definida a função $K : (B(u, \delta) \cup B(-u, \delta)) \times [0, \delta] \to epi(f)$ onde

$$K(v, t) = \begin{cases} H(v, t), & se\ v \in B(u, \delta) \\ H(-v, t), & se\ v \in B(-u, \delta). \end{cases}$$

Observemos que, graças a continuidade de H, obtemos que K é uma função contínua. Notemos também que $K(\cdot, t)$ é equivariante, ou seja,

$$K((-1) \cdot (v, t)) = K(-v, t) = (-1) \cdot K(v, t).$$

Por fim, observemos que K também goza das propriedades (a) e (b) presentes na Definição (1.1). Dessa forma, a aplicação K é uma aplicação conforme a Definição (1.31) e, assim,

$$\sigma \leq |d_{\mathbb{Z}_2} f|(u)$$

Como $|df|(u)$ é o supremos desses sigmas, segue que

$$|df|(u) \leq |d_{\mathbb{Z}_2} f|(u).$$

Portanto, $|df|(u) = |d_{\mathbb{Z}_2} f|(u)$. ■

Sem perda de generalidade, podemos assumir $f(0) = 0$. Consideremos agora a função par $\mathcal{G}_f : epi(f) \to \mathbb{R}$. Pelo Lema (2.5), temos $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(u,\xi) = |d\mathcal{G}_f|(u,\xi)$ para $u \neq 0$. Por hipótese, $\mathcal{G}_f$ satisfaz a condição $G-(PS)_c$ para todo $c \geq \alpha$. Ainda mais,

$$K_c \subset (X \setminus \{0\}) \times \{c\}; \quad \forall c \geq \alpha,$$

onde K_c é relativo à $\mathcal{G}_f$. De fato, pois seja $(u,\xi) \in K_c$. Dessa forma,

$$\mathcal{G}_f(u,\xi) = \xi = c > \alpha > f(0) = 0.$$

Portanto, $(u,\xi) = (u,c) \neq (0,0)$ e, assim, obtemos a inclusão $K_c \subset X \times \{c\}$. Notemos agora que, se $(0,c) \in K_c$, então $|d_G\mathcal{G}_f|(0,c) = 0$, o que contraria a hipótese (d) do Teorema 2.7. Sendo assim, $(0,c) \notin K_c$. Portanto, $K_c \subset (X \setminus \{0\}) \times \{c\}$.

Definamos a família

$$\Sigma = \{A \mid A \text{ é fechado em } X, 0 \notin A \text{ e } A \text{ é simétrico com respeito a } 0\}.$$

Para $A \in \Sigma$, denotamos $\gamma(A)$ o gênero de A (Definição (A.2) do Apêndice (A)). Seja $K = \dim V_0$, sem perda de generalidade, podemos assumir $\dim V_n = n + k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $D_n = \overline{B_{R_n}}$, onde B_{R_n} é a bola centrada na origem com raio R_n. Definamos também

$$\Phi_n = \{\varphi \in C(D_n, epi(f)) \mid \varphi \text{ é equivariante e } \varphi(u) = (u,0),\ \forall u \in \partial B_{R_n} \cap V_n\} \quad e$$
$$\Gamma_j = \{\varphi(\overline{D_n \setminus Y}) \mid \varphi \in \Phi_n,\ n \geq j,\ Y \in \Sigma\ e\ \gamma(Y) \leq n-j\}.$$

Vejamos algumas propriedades envolvendo esses dois conjuntos:

Lema 2.6. *Se $j > k$ e $B \in \Gamma_j$, então $B \cap \partial B_\rho \cap Z \neq \emptyset$.*

Demonstração. Com efeito, seja $B = h(\overline{D_m \setminus Y})$, para $h \in \Phi_m, Y \in \Sigma$ e $\gamma(Y) \leq m-j$. Considere

$$\hat{O} = \{x \in D_m \mid h(x) \in B_\rho\}.$$

Temos que $0 \in \hat{O}$ pois h é ímpar. Denote por O a componente conexa contendo a origem 0. Observemos que

$$\hat{O} = h^{-1}(B_\rho) \cap D_m = h^{-1}(B_\rho) \cap (B_{R_m} \cap V_m).$$

Como h é contínua, segue que $h^{-1}(B_\rho)$ é aberto. Logo, $\hat{O}$ é aberto em V_m, logo O também é aberto em V_m. Dessa forma, pela Proposição A.9 do Apêndice A, temos

$\gamma(\partial O) = m$. Observemos que $h(\partial O) \subset \partial B_\rho$, pois, pela hipótese (b) do Teorema 2.7, podemos escolher $R_m > 0$ tal que $f(x) \leq 0$ para $x \in V_m \setminus B_{R_m}$, Como m é maior do que K, temos

$$\partial B_\rho \cap Z \cap V_m \neq \emptyset.$$

Utilizando a hipótese (a) do Teorema 2.7, temos

$$f_{\partial B_\rho \cap Z \cap V_m} \geq \alpha > 0$$

e, assim obtemos que R_m é maior do que ρ. Suponha que $x \in \partial O$, implicando que $h(x) \in \overline{B_\rho}$, visto que h é contínua. Se $x \in int(B_\rho)$, então existe uma vizinhança $V_x \subset D_m$ tal que

$$h(V_x) \subset B_\rho \Rightarrow V_x \subset \hat{O}$$

o que é um absurdo! Pois $x \in \partial O$. Logo devemos ter $x \in \partial D_m$ relativo à V_m, portanto $h \cong Id$ em ∂O. Sendo assim,

$$R_m = ||x|| = ||h(x)|| < \rho$$

o que é um absurdo! Logo, $h(x) \in \partial B_\rho$. Dessa forma, $h(\partial O) \subset \partial B_\rho$. Agora, defina $W = \{x \in D_m \mid h(x) \in \partial B_\rho\}$ e observe que $\partial O \subset W$ (pelo o que foi provado). Dessa maneira,

$$m = \gamma(\partial O) \leq \gamma(W) \leq m \Rightarrow \gamma(W) = m.$$

Daí, segundo a Observação (A.7) da Propriedade (A.6) do Apêndice (A) da Teoria de gênero, $\gamma(\overline{W \setminus Y}) \geq \gamma(W) - \gamma(Y) \geq m - (m - j) = j > k$. Por outro lado, sendo $h|_{\overline{W \setminus Y}}$ uma função contínua e ímpar, então

$$\gamma(h(\overline{W \setminus Y})) > k.$$

Como a codimensão de Z é k e temos esta última desigualdade, segue que,

$$\emptyset \neq h(\overline{W \setminus Y}) \cap Z \subset (B \cap \partial B_\rho \cap Z).$$

Logo, $B \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset$. ■

Lema 2.7. *Os seguintes fatos são verdadeiros:*

I) $\Gamma_j \neq \emptyset \; \forall j \in \mathbb{N}$.

II) $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$;

III) Se $\psi \in C(epi(f), epi(f))$ *é equivariante e* $\psi(u, 0) = (u, 0)$ *para todo* $u \in \partial B_{R_n} \cap V_n$, *para todo* $n \geq j$, *então* $\psi(B) \in \Gamma_j$ *para todo* $B \in \Gamma_j$.

IV) Se $B \in \Gamma_j$, $s \in \Sigma$ *e* $\gamma(S) \leq s \leq j$, *temos* $\overline{B \setminus (S \times \mathbb{R})} \in \Gamma_{j-s}$.

V) Se $B \in \Gamma_j$ *e* $L = \{(u,\xi) \in epi(f) \mid u \in X, ||u|| = \rho\}$, *temos* $B \cap L = \emptyset$

Demonstração. Vejamos as demonstrações dessas afirmações:

I) Temos $I|_{D_m} \in \Phi_m, \forall m \geq j$, ao considerarmos $Y = \emptyset$.

II) Seja $B = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_{j+1}$, então $B \in \Phi_m$ com $m \geq j+1 > j, Y \in \Sigma$ com

$$\gamma(Y) \leq m - j - 1 < m - j.$$

Logo, $B \in \Gamma_j$.

III) Seja $B = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j$ e suponha ψ como na hipótese da afirmação. Observemos que h é ímpar pois é equivariante em relação à $\mathbb{Z}_2$. Sendo assim,

$$\varphi \circ h \in C(\overline{D_m}, epi(f)) \text{ é ímpar}$$

e $\varphi \circ h(u) = (u, 0)$ em $\partial B_{R_m} \cap V_m$. Assim, $\varphi \circ h \in \Phi_m, m \geq j$ e $\gamma(Y) \leq m - j$, implicando que

$$\varphi \circ h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j.$$

IV) Seja $B = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j$, então $g \in \Phi_m, m \geq j$, $Y \in \Sigma(E)$ e $\gamma(Y) \leq m - j$. Se $Z \in \Sigma$, provemos que

$$B \setminus Z = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))}).$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}
h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))) &= h(D_m \cap (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})^c) \\
&= h(D_m \cap (Y^c \cap h^{-1}(Z \times \mathbb{R})^c) \\
&= h((D_m \cap Y^c) \cap (D_m \cap h^{-1}(Z \times \mathbb{R})^c)) \\
&= h((D_m \setminus Y) \cap (D_m \setminus h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))) \\
&\subset h(D_m \setminus Y) \cap h(D_m \setminus h^{-1}(Z \times \mathbb{R})).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$x \in D_m \setminus h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \Rightarrow x \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \Rightarrow h(x) \notin (Z \times \mathbb{R}) \Rightarrow h(x) \in Z^c \times \mathbb{R}.$$

Logo, $h(D_m \setminus h^{-1}(Z \times \mathbb{R})) \subset Z^c \times \mathbb{R}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))) &\subset (B \cap (Z \times \mathbb{R}))^c = B \setminus (Z \times \mathbb{R}) \\
&\subset \overline{B \setminus (Z \times \mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $b \in B \setminus (Z \times \mathbb{R})$, então $b = h(w)$ onde $w \in \overline{D_m \setminus Y}$ e $w \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$. Sendo assim, existe uma sequência (w_n) de elementos de $D_m \setminus Y$

convergindo para w. Como $Z \times \mathbb{R}$ é fechado e h é uma função contínua, segue que $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ é fechado. Pelo fato de que $w \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$, temos, para n suficientemente grande, $w_n \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$, ou seja,

$$w_n \in (D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))$$

para n suficientemente grande. Logo, $w \in \overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}$. Portanto,

$$B \setminus Z \subset h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}). \tag{2.1}$$

Recordemos que $dim(V_m) < \infty$ e $h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}) \subset V_m$ é um conjunto fechado e limitado, obtemos que $\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}$ é compacto. Consequentemente, usando o fato de que h é uma função contínua, temos $h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))})$ compacto. Logo, da Inclusão (2.1), temos

$$\overline{B \setminus Z} \subset h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}).$$

Dessa forma, fica provada a igualdade

$$\overline{B \setminus Z} = h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}).$$

Agora, observemos que $h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \in \Sigma$. Para isso, devemos verificar que

a) $0 \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$. De fato, pois $0 \notin D_m$ que é o domínio de h

b) $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ é fechado. Recordando que $Z \times \mathbb{R}$ é fechado e h é uma função contínua, segue que $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ é fechado em D_m, mas sendo D_m fechado, temos $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ fechado.

c) $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ é equivariante em relação à $\mathbb{Z}_2$. Realmente, pois

$$u \in h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \Rightarrow \exists (w, \xi) \in Z \times \mathbb{R} \text{ tal que } h(u) = (w, \xi).$$

Como h é ímpar, temos

$$h(-u) = -h(u) = (-w, -\xi) \in Z \times \mathbb{R}$$

pois Z é simétricos com respeito à origem. Logo, $-u \in h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \in \Sigma$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \gamma(h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \cup Y) &\leq \gamma(h^{-1}(Z \times \mathbb{R})) + \gamma(Y) \\ &\leq \gamma(Z \times \mathbb{R}) + \gamma(Y) \\ &\leq s + (m - j) = m - (j - s). \end{aligned}$$

por causa das propriedades presentes na Proposição (A.6) da Teoria de Gênero (A), pelo fato de h ser contínua e pelo fato de que, por hipótese, $\gamma(Z \times \mathbb{R}) \leq s \leq j$. Dessa forma,

$$\overline{B \setminus (Z \times \mathbb{R})} = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))}) \in \Gamma_{j-s}.$$

V) Consideremos a projeção canônica $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$. Verifiquemos que

$$B \cap L \neq \emptyset \Leftrightarrow \pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z \neq \emptyset.$$

De fato, seja $(u, \xi) \in B \cap L$, então

$$u \in Z, ||u|| = \rho \; e \; \pi(u, \xi) = u \Rightarrow$$

$$u \in \pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z \Rightarrow \pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z \neq \emptyset.$$

Seja agora, $u \in \pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z$, logo $u \in \pi(B)$ e, assim, existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $(u, \xi) \in B \subset epi(f)$. Logo, $(u, \xi) \in L$. Dessa forma,

$$(u, \xi) \in B \cap L \Rightarrow B \cap L = \emptyset.$$

Consideremos agora que $B = \varphi(\overline{D_m \setminus Y})$. A função $\pi \circ \varphi \in C(D_m, X)$ é ímpar, $\pi \circ \varphi = id$ em $\partial B_r \cap V_m$, do Lema 2.6, obtemos

$$\pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z \neq \emptyset \Rightarrow B \cap L \neq \emptyset.$$

Portanto, a afirmação (5) está provada.

■

Proposição 2.8. *Seja*

$$c_j = \inf_{B \in \Gamma_j} \max_{(u,\xi) \in B} \mathcal{G}_f(u, \xi), \; \forall j \in \mathbb{N}$$

os valores minimax de $\mathcal{G}_f$. *Se* $j > k$, *então* $c_j \geq \alpha > 0$.

Demonstração. Com efeito, se $j > k$ e $B \in \Gamma_j$, por (5) do Lema (2.7), temos $\pi(B) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset$. Como $f|_{\partial B_\rho \cap Z} \geq \alpha$, segue que

$$(u, \xi) \in B \cap \partial B_\rho \cap Z \Rightarrow \mathcal{G}_f(u, \xi) = \xi \geq f(u) \geq \alpha.$$

Logo,

$$\max_{(u,\xi) \in B} \mathcal{G}_f(u, \xi) \geq \alpha, \; \forall B \in \Gamma_j \Rightarrow$$

$$c_j = \inf_{b \in \Gamma_j} \max_{(u,\xi) \in B} \mathcal{G}_f(u, \xi) \geq \alpha > 0.$$

■

Proposição 2.9. *Se* $j > k$ *e* $c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{j+p} = c$, *então* $\gamma(K_c) \geq p + 1$.

Demonstração. Sendo $f(0) = 0$ e $c \geq \alpha > 0$, segue que $0 \notin K_c$. Além disso, $K_c \in \Sigma$, pois f é par, $0 \notin K_c$ e, como $\mathcal{G}_f$ satisfaz a condição $(PS)_c$, segue que K_c é compacto, em particular, fechado.

Suponhamos, por contradição, que $\gamma(K_c) \leq \rho$. Considere $\delta > 0$, como no item (V) da Proposição (A.6) do Apêndice (A) , tal que $\gamma(N_\delta(K_c)) = \gamma(K_c)$. Tomando $U = N_\delta(K_c)$ e $\overline{\epsilon} = \frac{\alpha}{2}$, apliquemos o Teorema da Deformação (2.6). Assim, existe $\epsilon \in (0, \frac{\alpha}{2})$ e $\eta(t, \cdot) : epi(f) \to epi(f)$ contínua tal que

I) $d(\eta(u,t),u) \leq \lambda t$;

II) $\mathcal{G}_f(\eta(u,t)) \leq \mathcal{G}_f(u)$;

III) $\mathcal{G}_f(u) \in (c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}) \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

IV) $\eta(\mathcal{G}_f^{c+\epsilon} \setminus U, 1) \subset \mathcal{G}_f^{c-\epsilon}$;

V) $\eta(\cdot,t)$ é equivariante segundo $\mathbb{Z}_2$, para todo $t \in [0,1]$.

Aplicando a definição de ínfimo, considere agora $B \in \Gamma_{j+p}$ tal que $\max_{u\in B} I(u) \leq c+\epsilon$. Devemos ter, $\overline{B \setminus U} \in \Gamma_j$ de maneira análoga ao que foi provado na Afirmação (4). Pela hipótese (b), existe $R_m > 0$ tal que

$$f(u) < f(0) = 0; \;\; \forall u \in \partial B_{R_m} \cap V_m; \forall m \in \mathbb{N}$$

e sendo $c - \overline{\epsilon} > c - \alpha > 0$, segue de (III) e de (V) que $\eta(\cdot,t) \in \Phi_m$, para todo $m > k$. Consequentemente, pela invariância de U, temos

$$\eta(\overline{B \setminus U}, 1) \in \Gamma_j.$$

Portanto,

$$c \leq \max_{u \in \eta(\overline{B\setminus T},1)} \mathcal{G}_f(u) \leq c - \epsilon \Rightarrow \epsilon < 0$$

um absurdo! ■

Pelo estudo feito até aqui, obtemos que, para cada $j > k$, tem-se $\gamma(K_{c_j}) \geq 1$. Logo, $K_{c_j} \neq \emptyset$ e, assim, existe um ponto crítico u_j de $\mathcal{G}_f$ tal que $\mathcal{G}_f(u_j) = c_j$.

Proposição 2.10.

$$c_j \to \infty, \;\; \textit{quando} \;\; j \to \infty.$$

Demonstração. Com efeito, pela monotonicidade de Γ_j, temos $c_j \leq c_{j+1}$. Suponha, por absurdo, que (c_j) seja limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $\overline{c} \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_j \to \overline{c}$$

a menos de subsequência. Para $j > k$, devemos ter $\overline{c} > c_j$. Caso contrário, $\overline{c} = c_j$, para todo $j > k$ implicando que $\gamma(K_{\overline{c}}) = \infty$, graças à Afirmação 2. O que não ocorre pois $K_{\overline{c}}$ é compacto. Defina o conjunto

$$K = \{u \in epi(f) \mid c_{k+1} \leq \mathcal{G}_f(u) \leq \overline{c} \; e \; |d\mathcal{G}_f|(u) = 0\}.$$

Como $\mathcal{G}_f$ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c \geq \alpha$, segue que K é compacto, então $\gamma(K) < \infty$ e consideremos $\delta > 0$ tal que

$$q = \gamma(N_\delta(K)) = \gamma(K).$$

Tomando $s = \max\{q, k+1\}$, $U = N_\delta(K)$ e $\overline{\epsilon} = \overline{c} - c_s$ no Teorema da Deformação (2.6), segue que existe $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ e $\eta(\cdot,t) : epi(f) \times [0,1] \to epi(f)$ contínua tal que

I) $d(\eta(u,t),u) \leq \lambda t$; *para algum* $\lambda > 0$.

II) $\mathcal{G}_f(\eta(u,t)) \leq \mathcal{G}_f(u)$;

III) $\mathcal{G}_f(u) \in (c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}) \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

IV) $\eta(\mathcal{G}_f^{c+\epsilon} \setminus U, 1) \subset \mathcal{G}_f^{c-\epsilon}$;

V) $\eta(\cdot,t)$ é equivariante segundo $\mathbb{Z}_2$, para todo $t \in [0,1]$.

Sejam $j \in \mathbb{N}$ tal que $c_j > \overline{c} - \epsilon$ o que é possível devido à convergência $c_j \to \overline{c}$, e escolha $B \in \Gamma_{j+s}$ tal que

$$\max_{u \in B} \mathcal{G}_f(u) \leq \overline{c} + \epsilon.$$

Daí segue que $\overline{B \setminus U} \in \Gamma_j$ a qual inclusão pode ser mostrada de maneira análoga a 4ª afirmação do Lema (2.7). Pela hipótese (b), temos que dado $m \in \mathbb{N}$, existe $R_m > 0$ tal que

$$f(u) \leq f(0) = 0 \ ; \ \forall u \in \partial B_{R_m} \cap V_m.$$

Sendo $\overline{c} - \overline{\epsilon} > 0$, segue que

$$\eta \in \Phi_m; \ \forall m > k$$

de maneira análoga ao que foi provado anteriormente. Logo, devido a invariância de U, temos

$$\eta(1, \overline{B \setminus U}) \in \Gamma_j.$$

Portanto,

$$\overline{c} \leq \max_{u \in \eta(1, \overline{B \setminus U})} I(u) \leq \overline{c} - \epsilon,$$

um absurdo! Portanto, (c_j) é ilimitada. ■

Dessa forma, observando as Proposições (2.9) e (2.10), obtemos que existe uma sequência (u_n, ξ_n) de pontos críticos de $\mathcal{G}_f$ tal que $\mathcal{G}_f(u_n, \xi_n) \to \infty$. Agora, iremos ver um resultado de multiplicidade de pontos críticos para o funcional f. Para isso, a condição $(epi)_c$ mostra-se valiosa para tal objetivo pois associa pontos críticos de $\mathcal{G}_f$ à pontos críticos de f. Vamos à definição:

Definição 2.11. Seja $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que f satisfaz a condição $(epi)_c$ se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\inf\{|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \mid f(u) < \lambda, |\lambda - c| < \epsilon\} > 0.$$

Proposição 2.12. *Seja X um espaço de Banach e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. . Se f satisfaz a condição $(epi)_c$, então*

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) = 0 \Rightarrow \xi = f(u) \Rightarrow |df|(u) = 0.$$

Demonstração. De fato, pois se $|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) = 0$, então

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) \notin \{|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda)\ |f(u) < \lambda, |\lambda - c| < \epsilon\} \Rightarrow$$

$$f(u) \geq \xi \Rightarrow f(u) = \xi.$$

Mas, como $(u,\xi) \in epi(f)$, temos $f(u) \geq \xi$. Logo, $f(u) = \xi$. Recordemos agora que, da Definição 1.11 , temos

$$|df|(u) = \begin{cases} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}, & se\ |d\mathcal{G}_f(u)| < 1 \\ +\infty, & se\ |d\mathcal{G}_f|(u) = 1. \end{cases}$$

Sendo assim,

$$|df|(u) = \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}} = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0.$$

Logo, u é um ponto crítico de f. ■

Agora, podemos provar o seguinte corolário:

Corolário 2.13. *Seja X um espaço de Banach e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional s.c.i. par. Considere $G = \mathbb{Z}_2$ e X como um $\mathbb{Z}_2$ espaço métrico cuja ação é a ação presente no Exemplo (6). Assuma que exista uma sequência estritamente crescente (V_n) de subespaços de dimensão finita de X com as seguintes propriedades*

a) *Existe um subespaço fechado Z de X, $\rho > 0$ e $\alpha > f(0)$ tal que*

$$X = V_0 \oplus Z \ e\ ||u|| = \rho \Rightarrow f(u) \geq \alpha;\ \forall u \in Z$$

b) *Existe uma sequência (R_n) em (ρ, ∞) tal que*

$$u \in V_n, ||u|| \geq R_n \Rightarrow f(u) \leq 0.$$

Mais ainda, assuma que

c) *Para todo $c \geq \alpha$, f satisfaz a condição $(PS)_c$ e a condição $(epi)_c$.*

d) *Tem-se $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\xi) \neq 0$, sempre quando $\xi \geq \alpha$.*

Então, existe uma sequência (u_n) de pontos críticos de f tal que $f(u_n) \to \infty$.

Demonstração. Observando a propriedade (c) de f da hipótese desse teorema, obtemos que $\mathcal{G}_f$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \geq \alpha$. Logo, aplicando a versão simétrica do passo da montanha (Teorema 2.7), obtemos uma sequência de pontos críticos (x_k, ξ_k) de $\mathcal{G}_f$ tal que

$$f(x_k) = \mathcal{G}_f(x_k, f(x_k)) \to \infty.$$

Por fim, os pontos (x_k) são pontos críticos de f devido à Proposição (2.12). Como queríamos demonstrar. ■

Capítulo 3

Equações de Schröndiger com não linearidade logarítmica

Neste capítulo, provaremos a existência de múltiplas soluções fracas do Problema (3) e, em seguida, estudaremos a regularidade dessas soluções assim como a positividade.

3.1 Propriedades do funcional energia

Recordemos o problema postulado na introdução:

$$-\Delta u + \omega u = u \log u^2.$$

onde $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Trabalharemos com o funcional energia associado a esse problema dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \frac{\omega+1}{2}\int |u|^2 - \frac{1}{2}\int G(u),$$

onde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$G(s) = \begin{cases} s^2 \log(s^2), & se\ s \neq 0 \\ 0, & se\ s = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nessa seção, veremos algumas propriedades do funcional energia J. Iniciaremos com um resultado técnico que é bastante útil para estudar a regularidade das soluções fracas associadas ao Problema (3).

Lema 3.1. *Seja $\alpha \geq 1$. Então,*

$$x^\alpha > \log x^2$$

para todo x positivo.

Demonstração. Para realizar essa demonstração, basta provar que a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^\alpha - \log x^2$ é não negativa. Observemos primeiramente que, se $x \in (0,1)$, então

$$\log x^2 < 0 < x^\alpha \ .$$

E, portanto, $f(x) \geq 0$ para $x \in (0,1)$. Vejamos agora o caso em que $x \geq 1$. Observando que $x^\alpha \geq x$ para $x \geq 1$, basta mostrar que a função $g(x) = x - \log x^2$ é não negativa. De fato, notemos que, para $x \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} e^x &\geq x^2 \\ \Rightarrow x = \log e^x &\geq \log x^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, $g(x) \geq 0$ e, assim,

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^\alpha \geq \log x^2.$$

para todo $x > 0$. ■

Lema 3.2. *Considere a função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ onde $h(x) = \log(x^2)$. Então, dado $\delta > 0$, existe $K > 0$ tal que $|h(x)| < |x|^\delta$ para todo $|x| > K$.*

Demonstração. De fato, observemos que, ao aplicarmos a regra de L'Hopital, temos

$$\lim \frac{\log(x^2)}{x^\delta} = 0.$$

Assim, existe $M_1 > 0$ tal que $\log x^2 < |x|^\delta$ para $|x| > M_1$. Por outro lado, como a função h é contínua, obtemos que existe $M > 0$ tal que

$$|h(x)| < M,$$

para todo $x \in (0, M^1]$. Portanto,

$$|h(x)| < M + |x|^\delta,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

■

O nosso primeiro objetivo é mostrar que J cumpre a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Para isso, definamos $G, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$G(s) = \begin{cases} s^2 \log(s^2), & se\ s \neq 0 \\ 0, & se\ s = 0 \end{cases}$$

e

$$g(s) = \begin{cases} s \log(s^2), & se\ s \neq 0 \\ 0, & se\ s = 0. \end{cases}$$

Note que G e g são funções contínuas, basta utilizar a Regra de L'Hopital para provar a continuidade no 0. Definamos também

$$G_1(s) := (s^2 \log s^2)^- \ \ e \tag{3.2}$$

$$G_2(s) := (s^2 \log s^2)^+. \tag{3.3}$$

Observemos que

Proposição 3.1. *Se $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, temos $g(u)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Desde que

$$\int |g(u)v| = \int_{\{|u|\leq 1\}} |g(u)v| + \int_{\{|u|>1\}} |g(u)v| \leq \int_{\{|u|\leq 1\}\cap suptv} |g(u)k| + \int_{\{|u|>1\}\cap suptv} |g(u)k|,$$

onde $k > 0$ foi tomado de tal forma que $|v|_\infty < k$. Dessa forma,

$$\int |g(u)v| \leq C_1 + k \int_{\{|u|>1\}\cap suptv} |g(u)|,$$

onde C_1 é uma constante positiva tal que

$$\int_{\{|u|\leq 1\}\cap suptv} |g(u)k| \leq C_1,$$

a qual existe pois g é uma função contínua e $\{|u| \leq 1\} \cap suptv$ é compacto. Observemos, agora, que dado $\delta \in (0, 2^* - 1]$, pelo Lema 3.2, segue que existe $K_1 > 0$ tal que

$$|u| > K_1 \Rightarrow \log |u|^2 \leq |u|^\delta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\{u>1\}\cap suptv} |g(u)| &= \int_{\{1\leq u\leq K_1\}\cap suptv} |g(u)| + \int_{\{u>K_1\}\cap suptv} |g(u)| \\ &\leq C_2 + \int_{\{u>K_1\}\cap suptv} |u \log u^2| \\ &\leq C_2 + \int_{\{u>K_1\}\cap suptv} |u|^{1+\delta}. \end{aligned}$$

O argumento da existência de $C_2 > 0$ é análoga ao argumento da existência da constante C_1.Dessa forma, existe $C > 0$ tal que

$$\int |g(u)v| \leq C\left(1 + \int_{\{u>K_1\}\cap suptv} |u|^{1+\delta}\right) < \infty,$$

visto que $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{1+\delta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $\delta \in (0, 2^* - 1]$. Portanto, $g(u)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. Em particular, dado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue que existe $\varphi_k \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ tal que

(i) $\varphi_K(x) = 1;\ \forall x \in K$

(ii) $0 \leq \varphi_K(x) \leq 1;\ \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(iii) $\varphi_k(x) = 0$; para x tal que $d(x, K) > 1$.

A construção de tal sequência é feita nos livros do Adams ([1]) e Brezis ([5]) no que concerne o produto de convolução. Assim, $\varphi_K \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_K |g(u)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(u)\varphi_k| < \infty.$$

Logo, $g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. ■

Ademais, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, podemos considerar

$$\langle J'(u), v\rangle := \int \nabla u \nabla v + \omega \int uv - \int uv \log u^2. \tag{3.4}$$

Note que $\langle J'(u), \cdot\rangle$ não é a derivada direcional de J, pois J não possui algumas derivadas direcionais como, por exemplo, a função u definida no Exemplo 1. Porém, podemos definir essa expressão que é conveniente para encontrar soluções fracas.

Observemos, na proposição seguinte, como essa expressão se relaciona bem com os conceitos de inclinação fraca e subdiferencial de Clark:

Proposição 3.2. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $J(u) \in \mathbb{R}$ e $|dJ|(u) < \infty$. Então as seguintes sentenças são verdadeiras:*

(1) *$g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e, para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, temos*

$$|\langle J'(u), v\rangle| \leq |dJ|(u)||v||.$$

(2) *Se $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(g(u)v)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ou $(g(u)v)^- \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então $g(u)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e a identidade (3.4) é verdadeira, identificando $J'(u)$ como um elemento em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Recordando a definição de subdiferencial e usando o item (b) do Teorema 1.20, temos

$$\partial J(u) \neq \emptyset \text{ e } |dJ|(u) \geq \min\{||\alpha||_* \mid \alpha \in \partial J(u)\}$$

visto que $|dJ|(u) < \infty$, onde $||\cdot||_*$ é a norma de $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Agora seja,

$$\begin{aligned} T(u) &= \frac{1}{2}||\nabla(u)||_2^2 + \frac{\omega+1}{2}||u||_2^2 \quad \text{e} \\ Q(u) &= -\frac{1}{2}\int u^2 \log u^2. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 5 de [10], temos $\partial J(u) \subset \partial T(u) + \partial Q(u)$ e, como $\partial J(u) \neq \emptyset$, segue que $\partial Q(u)$ é não vazio. Ao definirmos, $q : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $q(x,t) = -t - g(t)$ e aplicando [20, item (b) do Teorema 3.1], temos

$$-u - g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^N)$$

então $g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, e

$$\partial Q(u) = \{-u \log u^2 - u\}.$$

Observemos que, $J = T + Q$ e como T é diferenciável, segue que

$$\partial T(u) = \{\nabla u + \omega u\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial J(u) &\subset \{\nabla u + \omega u\} + \{-u \log u^2 - u\} \\ \Rightarrow \partial J(u) &= \{\nabla u + \omega u\} + \{-u \log u^2 - u\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\partial J(u) = \{J'(u)\}$ onde $J'(u)$ foi definido em (3.4). Logo,

$$\begin{aligned} ||J'(u)||_* &\leq |dJ|(u) \qquad\qquad \Rightarrow \\ \left|\langle J'(u), \frac{v}{||v||}\rangle\right| &\leq ||J'(u)||_* \leq |dJ|(u)| \Rightarrow \\ |\langle J'(u), v\rangle| &\leq |dJ|(u) \cdot ||v|| \end{aligned}$$

provando, assim, (I). A afirmação (II) segue do Teorema 1 devido a Brezis-Browder na Referência [6]. ■

Proposição 3.3. *O funcional J é semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência de $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_k \to u \; em \; H^1(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$u_k \to u \; em \; L^2(\mathbb{R}^N)$$

e, a menos de subsequência,

$$u_k \to u \text{ em quase todo ponto em } \mathbb{R}^N.$$

Como a função G_1, definida na Equação (3.2),é uma função contínua, seque que

$$G_1(u_k) \to G_1(u) \text{ em quase todo ponto em } \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$\liminf (G_1 \circ u_k)(x) = (G_1 \circ u)(x) \text{ em quase todo ponto em } \mathbb{R}^N.$$

E, pelo Lema de Fatou, segue que

$$\int (G_1 \circ u) = \int \liminf (G_1 \circ u_k) \leq \liminf \int G_1(u_k).$$

Por outro lado, levando em conta a função G_2 definida na Equação (3.3) e que, para todo $\delta \in (0, 2^+ - 2]$, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$G_2(s) \leq C_\delta |s|^{2+\delta};\ \forall s \in \mathbb{R}$$

e que $u_k \to u$ em $L^{2+\delta(\mathbb{R})^N}$. Aplicando a recíproca do Teorema da Convergência Dominada, existe $h \in L^{2+\delta}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_k(c)| \leq |h(x)|$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Assim,

$$G_2(u_k(x)) \leq C_\delta |h(x)|^{2+\delta} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int G_2(u) = \lim_k \inf G_2(u_k).$$

Recordando que $G(s) = G_2(s) - G_1(s)$, temos

$$\int G(u) \leq \liminf_K \int G(u_k).$$

Portanto,

$$J(u) \leq \liminf_K J(u_k)$$

e, assim, J é uma função semicontínua inferiormente.

■

Lema 3.3. *As sequências $(PS)_c$ de J são limitadas em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência $(PS)_c$ de J em $H^1(\mathbb{R}^N)$ de J, ou seja, $J(u_k) \to c$ e $|dJ|(u_k) \to 0$. Pela Proposição (3.2), temos

$$\langle J'(u_k), v\rangle = o(1)||v||;\ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N),$$

onde $o(1)$ é uma ordem pequena, i.e.,

$$o(1) \to 0,\ quando\ ||v|| \to 0.$$

Daí, obtemos que

$$J'(u_k) \to 0,\ quando\ k \to \infty\ em\ H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Agora, observemos que se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então existe $\delta > 0$ pequeno tal que $G_2(s) \leq C_\delta |s|^{2+\delta}$ e como $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2+\delta}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int |G_2(s)| = \int G_2(s) \leq C_\delta \int |u|^{2+\delta} < \infty \Rightarrow G_2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Então, pelo item (2) da Proposição (3.2), podemos escolher u_k como uma função admissível teste na Equação (3.4) e, assim,

$$\langle J'(u_k), u_k\rangle = \int |\nabla u_k|^2 + \omega \int u_k^2 + \int u_k^2 - \int u_k^2 \log u_k^2.$$

Logo, usando a definição de $J(u)$ (Equação (4))

$$\begin{aligned} \langle J'(u_k), u_k\rangle &= 2J(u_k) - \int u_k^2 && (3.5)\\ ||u_k||_2^2 &= 2J(u_k) - \langle J'(u_k), u_k\rangle \leq 2C_1 + o(1)||u_k|| && (3.6) \end{aligned}$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante que limita $(J(u_k))$. Pela desigualdade logarítmicas de Sobolev (Inequação (5)), temos

$$\int u^2 \log u^2 \leq \frac{a^2}{\pi}||\nabla u||_2^2 + (\log ||u||_2^2 - n(1 + \log a))||u||_2^2,\ \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ a > 0.$$

Observemos agora que,

$$\begin{aligned} ||u_k||^2 &= ||\nabla u_k||_2^2 + ||u_k||_2^2 = 2J(u_k) - \omega||u_k||_2^2 + \int u_k^2 \log u_k^2 \\ \Rightarrow ||u_k||^2 &\leq 2J(u_k) - \omega(2J(u_k) - \langle J'(u_k), u_k\rangle) + \int u_k^2 \log u_k^2 \\ \Rightarrow ||u_k||^2 &\leq (2 - 2\omega)J(u_k) + \omega \cdot ||u_k||o(1) + \int u_k^2 \log u_k^2. \end{aligned}$$

Visto que $\langle J'(u_k), u_k\rangle = o(1)||u_k||$, devido a Proposição 3.2.Como $J(u_k) \to c$, segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$|(2 - 2\omega)J(u_k)| < C_2.$$

E usando a desigualdade logarítmica de Schröndinger, temos

$$||u_k||^2 \leq C_2 + \omega||u_k||o(1) + \frac{a^2}{\pi}||\nabla u_k||_2^2 + (\log||u_k||_2^2 - n(1+\log a))||u_k||_2^2.$$

Como $\log s \leq s^{1+\delta}$, com $\delta \in (0,1)$, segue que

$$||u_k||^2 \leq C_2 + \omega||u_k||o(1) + \frac{a^2}{\pi}||\nabla u_k||_2^2 + ((||u_k||_2^2)^{1+\delta} - n(1+\log a))||u_k||_2^2.$$

Consideremos $a > 0$ tão pequeno de tal forma que $d := \frac{a}{\pi} < 1$ e $1 + \log a < 0$. Assim temos,

$$[(||u_k||_2^2)^{1+\delta} - n(1+\log a)]||u_k||_2^2 \leq [(2C_1 + o(1)||u_k||)^{1+\delta} - n(1+\log a)] - (2C_1 + o(1)||u_k||)^{1+\delta}.$$

Logo,

$$(1-d)||u_k||^2 \leq C_2 + \omega||u_k||o(1) + [(2C_1 + o(1)||u_k||)^{1+\delta} - n(1+\log a)] - (2C_1 + o(1)||u_k||)^{1+\delta}.$$

Recordando que $||u_k||o(1) \to 0$ e usando o argumento de absurdo, segue que $(||u||_k)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, assim, (u_k) é limitada em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. ■

Proposição 3.4. *$J|_{H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere agora (u_k) uma sequência $(PS)_c$ de J em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 3.3, temos (u_k) é limitada em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, segue que existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

(i) $u_k \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um subespaço fechado em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $u_k \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$

(iii) $u_k \rightharpoonup u$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$.

Precisamos provar que

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2, \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N).$$

Para isso, fixemos $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ e consideremos $v_R(u_k)v$ onde, dado $R > 0$, tem-se

a) $v_R : \mathbb{R} \to [0,1]$ é suave;

b) $v_R(s) = 1$ para $|s| \leq R$;

c) $v_R(s) = 0$ para $|s| \geq 2R$;

d) $v_R'(s) \leq \frac{c}{R}$ na reta.

Sendo assim, observemos que $v_R(u_k)v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, pois o fato de que $u_k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ implica que $v_R(u_k) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, utilizando a Identidade (3.4) e usando a limitação de (u_k), temos

$$\langle J'(u_k), v_R(u_k)v\rangle = \int \nabla u_k \nabla(v_R(u_k)v) + \omega \int u_k v_R(u_k)v - \int u_k v_R(u_k)v \log u_k^2.$$

Definamos agora,

$$L_k := \left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v + \omega \int v_R(u_k)u_k v - \int v_R(u_k)u_k v \log u_k^2 - \langle J'(u_k), v_R(u_k)v\rangle \right|$$

Logo,

$$L_k = \left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v - \int \nabla u_k \nabla(v_R(u_k)v) \right|.$$

Aplicando a regra do produto e a regra da cadeia temos, segue que

$$\nabla(v_R(u_k)v) = v_R'(u_k)(\nabla u_k)v + v_R(u_k)\nabla v.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_k &= \left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v - \int v_R'(u_k)v|\nabla u_k|^2 - \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v \right| \Rightarrow \\ L_k &= \left| \int v_R'(u_k)v|\nabla u_k|^2 \right| \leq \frac{C_1}{R} \cdot \int |\nabla u_k|^2 \leq \frac{C_2}{R}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = C \cdot ||v||_\infty$ e C_2 é uma constante que limita a sequência $(\frac{C_1}{R}||u_k||_2^2)$. Dessa forma, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v + \omega \int v_R(u_k)u_k v - \int v_R(u_k)u_k v \log u_k^2 - \langle J'(u_k), v_R(u_k)v\rangle \right| \leq \frac{C_2}{R}. \tag{3.7}$$

Observemos que

(i) $\langle J'(u_k), v_R(u_k)v\rangle \to 0$

(ii) $v_R(u_k)\nabla v \to v_R(u)\nabla v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ implicando que

$$\int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v \to \int v_R(u)\nabla u \nabla v.$$

(iii) $(v_R(u_k)u_k \log u_k^2)$ é limitada em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, consideremos $\delta > 0$ de tal forma que $2 + 2\delta \in [2, 2^*]$. Aplicando o Lema 3.2, segue que existe $M > 0$ tal que $\log x^2 \leq M + |x|^\delta$. Daí e a observarmos que $|v_R(u_k(x))| < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, obtemos que,

$$\int_K |v_R(u_k)u_k \log u_k^2|^2 \leq C_1 + \int_K |v_R(u_k)| \cdot |u_k| \cdot |u_k|^\delta|^2 \leq C_1 + \int_K {u_k}^{2+2\delta} = C_1 + ||u_k||^{2+2\delta}_{L^{2+2\delta}(K)}.$$

Aplicando a imersão $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [2, 2^*]$, segue que

$$\int_K |v_R(u_k)u_k \log u_k^2|^2 < C_2 + ||u_k||^{2+2\delta}_{H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)} < C_3,$$

pois (u_k) é limitada em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

(iv) $v_R(u_k)u_k \log(u_k^2) \to v_R(u)u \log u^2$ em q.t.p. pois $u_k \to u$ q.t.p. e v_R e $\log x$ são funções contínuas.

(v) $|v_R(u_k)u_k v \log u_k^2| \leq ||v||_\infty |v_R(u_k)u_k \log u_k^2| < ||v||_\infty \cdot c \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

De (IV) e (V), segue, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$\int v_R(u_k)u_k v \log u_k^2 \to \int v_R(u)uv \log u^2.$$

Portanto, fazendo $k \to \infty$ na Equação (3.7), temos

$$\left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v + \omega \int v_R(u_k)u_k v - \int v_R(u_k)u_k v \log u_k^2 - \langle J'(u_k), v_R(u_k)v \rangle \right| \leq \frac{C_2}{R}.$$

Fazendo agora $R \to \infty$, temos

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2; \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N). \tag{3.8}$$

Assim como na demonstração da Proposição (3.3), obtemos que

$$\begin{aligned} \int G_1(u) &\leq \liminf \int G_1(u_k) \\ \int G_2(u) &= \lim \int G_2(u_k). \end{aligned}$$

Recordando que $G(s) = G_2(s) - G_1(s)$, temos

$$\begin{aligned} \int G(u) = \int (G_2(u) - G_1(u)) &= \int G_2(u) - \int G_1(u) \\ &\geq \limsup \int G_2(u_k) + \limsup \int -G_1(u_k) \\ &= \limsup \int G_2(u_k) - G_1(u_k) \\ &= \limsup \int G(u_k), \end{aligned}$$

pois

$$\lim \int G_2(u_k) = \int G_2(u) \text{ e } \int G_1(u) \leq \liminf \int G_1(u_k).$$

Dessa forma, $\limsup \int u_k^2 \log u_k^2 \leq \int u^2 \log u^2$. Observando agora a equação que $\langle J'(u_k), u_k \rangle \to 0$, temos

$$\lim \left(||\nabla u_k||_2^2 + w||u_k||_2^2 - \int u_k^2 \log u_k^2 \right) = 0.$$

Como

$$\limsup ||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 \leq \limsup K||u_k||^2 < \infty \text{ e}$$
$$\limsup \int u_k^2 \log u_k^2 \leq \int u^2 \log u^2 < \infty,$$

segue que

$$\begin{aligned} 0 = \lim \left(||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 - \int u_k^2 \log u_k^2 \right) &\leq \limsup \left(||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 \right) \\ &\quad + \limsup \left(- \int u_k^2 \log u_k^2 \right) \\ \Rightarrow \limsup \left(||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 \right) &= \limsup \int u_k^2 \log u_k^2 \leq \int u^2 \log u^2 \\ &= ||\nabla u||_2^2 + \omega||u||_2^2, \end{aligned}$$

onde a última Igualdade foi obtida da igualdade (3.8) ao considerar $v = u$. Sendo assim,

$$\limsup ||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 \leq ||\nabla u||_2^2 + \omega||u||_2^2 \tag{3.9}$$

Observando agora que a função $g : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u) = ||\nabla u||_2^2 + \omega||u||_2^2$$

é convexa e semicontínua inferiormente, segue que g é fracamente semicontínua inferiormente. Logo,

$$g(u) \leq \liminf g(u_k). \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10), temos

$$\lim ||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 = ||\nabla u||_2^2 + \omega||u||_2^2.$$

Consideremos agora $M > 0$ tal que $M > \frac{1}{\omega}$ e $M > 1$. Assim,

$$\begin{aligned} ||u_k - u||^2 = ||\nabla(u_k - u)||_2^2 + ||u_k - u||_2^2 &\leq M||\nabla(u_k - u)||_2^2 + M\omega||u_k - u||_2^2 \\ &= M(||\nabla(u_k - u)||_2^2 + \omega||u_k - u||_2^2) \to 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de Brezys-Lieb, temos

$$u_k \to u \; em \; H^1_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, J cumpre a condição $(PS)_c$ para qualquer nível $c \in \mathbb{R}$.

■

Agora, faremos um itinerário para provar a seguinte propriedade:

Teorema 3.5. *O funcional J satisfaz a condição $(epi)_c$ e, além disso, temos $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0, \epsilon) \neq 0$ para $\epsilon \geq \alpha$.*

Para prová-lo, precisaremos dos seguintes lemas que podem ser encontrados no artigo de Degiovanni e Zani (Referência [13]). Para estes resultados, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory e $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt$. Ademais, consideremos que

$$\sup_{|s|\leq t} |g(\cdot, s)| \in L^1_{loc}(\Omega), \quad \forall t > 0. \tag{3.11}$$

E definamos a função $f : W_0^{1,2}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$f(u) = \int_\Omega G(x,u)dx.$$

Ademais, assumamos que existe $a \in L^1(\Omega), b \in \mathbb{R}$ e $d \geq 0$ tal que

$$-a(x) - b|s|^{\frac{2n}{(n-2)}} \leq G(x,s) \leq a(x) + b|s|^{\frac{2n}{(n-2)}} + dsg(x,s) \tag{3.12}$$

em quase todo ponto x de Ω e para todo $s \in \mathbb{R}$. Daí, obtemos que $f : W_0^{1,2}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ é semicontínua inferiormente.

Observação: 3.6. O caso $d = 0$, o crescimento (3.12), é uma típica condição que garante a finitude e a continuidade de f. Se d é positivo, então o crescimento (3.12) é satisfeito quando $G(x,\cdot)$ é uma função convexa q.t.p. em Ω com $g(x,0) \in L^{\frac{2n}{(n-2)}}(\Omega)$. Assim, nesse caso particular, temos

$$sg(x,0) \leq G(x,s) \leq sg(x,s).$$

Observemos que, do crescimento (3.12) e da imersão de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{(n-2)}}(\Omega)$, obtemos que, para $u \in H_0^1(\Omega)$, temos $f(u) \in \mathbb{R}$ e

$$sg(x,s) \geq -\frac{2}{d}a(x) - \frac{2b}{d}|s|^{\frac{2n}{(n-2)}}. \tag{3.13}$$

Lema 3.4. *Seja $d > 0$ e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $g(x,u)u \in L^1(\Omega)$. Então, $f(u) \in \mathbb{R}$ e para todo $\lambda > f(u)$, então existem $\delta, \sigma > 0$ tal que*

$$\int_0^1 \int_\Omega g(x, w + \tau z)(w + \tau z)dxd\tau > \int_\Omega g(x,u)udx + \sigma,$$

para todo $w, z \in W_0^{1,2}(\Omega)$, com $||w - u||_{1,2} < \delta, ||z||_{1,2} < \delta$ e

$$\int_0^1 \int_\Omega G(x, w + \tau z)dxd\tau > \lambda - \delta.$$

Teorema 3.7. *Seja $(u,\lambda) \in epi(f)$ com $\lambda > f(u)$. Então, $|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) = 1$. Ainda mais, se a aplicação $g(x,\cdot)$ é par q.t.p. em Ω, então $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\lambda) = 1$ para todo $\lambda > f(0)$.*

Demonstração. Se $d = 0$, então f é uma função contínua e a afirmação da Proposição 1.35. Primeiramente, tratemos o caso $g(x,u)u \in L^1(\Omega)$. Consideremos σ e δ positivos como no Lema (3.4). Dado $R > 0$, consideremos agora uma função suave $v_R : \mathbb{R} \to [0,1]$ com:

(i) $supt(v_R) \subset [-2R, 2R]$;

(ii) $|v_R'(s)| \leq \frac{2}{R}$.

Considere $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L_c^\infty(\Omega)$ e $R > 0$, com $|v| \leq |u|$, q.t.p.,

$$\begin{aligned} ||v_R(u)v - u||_{1,2} &< \epsilon \\ e \int_\Omega g(x,u)v_R(u)vdx &< \int_\Omega g(x,u)udx + \frac{\sigma}{4}. \end{aligned}$$

Dado $\delta' \in (0,\delta] \cap (0,1)$, definamos a aplicação

$$H_1 : \{w \in B(u,\delta') : f(w) < \infty\} \times [0,\delta'] \to W_0^{1,2}(\Omega),$$

onde $H_1(w,t) = w + t(v_R(w)v - w)$. Se considerarmos $z = t(v_R(w)v - w)$, para $x \in \Omega$ q.t.p., temos

$$\begin{aligned} \frac{G(x,w+z) - G(x,w)}{t} &= \int_0^1 \frac{1}{1-\tau t} g(x, w+\tau z)v_R(w)vd\tau \\ &- \int_0^1 \frac{\tau t}{1-\tau t} g(x,w+\tau z)(w+\tau z)d\tau \\ &- \int_0^1 g(x,w+\tau z)(w+\tau z)d\tau. \end{aligned}$$

Diminuindo δ', se necessário, e usando que a Propriedade (3.11) e que

$$sg(x,s) \geq -\frac{2}{d}a(x) - \frac{2b}{d}|s|^{\frac{2n}{(n-2)}} \tag{3.14}$$

podemos assumir que $3\sigma\delta' + 2\delta \leq 2\delta'$, $||v_R(w)v - w||_{1,2} < \epsilon$ e

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{1}{1-\tau t} g(x,w+\tau z)v_R(w)vdxd\tau < \int_\Omega g(x,u)udx + \frac{\sigma}{4}, \tag{3.15}$$

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{\tau t}{1-\tau t} g(x,w+\tau z)(w+\tau z)dxd\tau > -\frac{\sigma}{4}, \tag{3.16}$$

$$\int_0^1 \int_\Omega g(x,w+\tau z)(w+\tau z)dxd\tau > \int_\Omega g(x,u)udx - \frac{\sigma}{2}. \tag{3.17}$$

Definamos agora a aplicação contínua $H : (B((u,\lambda),\delta') \cap epi(f)) \times [0,\delta'] \to epi(f)$ por

$$H((w,\mu),t) = \left(H_1(w,t), \mu - \frac{\sigma}{2}t\right).$$

Consideremos $\tau \in [0,1]$ tal que $f(w+\tau z) < \lambda - \sigma$. Então, das Inequações (3.15) e (3.16) juntamente com o Lema (3.4), temos

$$f(H_1(w,t)) \leq f(w) + \frac{\sigma}{2}t - \sigma t = f(w) - \frac{\sigma}{2}t \leq \mu - \frac{\sigma}{2}t.$$

Se $f(w) \leq \lambda - \delta$, das Inequações $(3.15 - 3.17)$, temos

$$f(H_1(w,t)) \leq f(w) + \sigma t \leq \lambda - \delta + \sigma\delta' \leq \lambda - \delta' - \frac{\sigma}{2}\delta' \leq \mu - \frac{\sigma}{2}t.$$

A mesma inequação permanece caso exista $\tau \in (0,1]$ tal que $f(w+\tau z) \leq \lambda - \delta$. Então, realmente, os elementos do domínio de H estão no $epi(f)$. Por fim, temos

$$\mathcal{G}_f(H(w,\mu),t) = \mathcal{G}_f(w,\mu) - \frac{\sigma}{2}t$$

e

$$||H_1((w,\mu),t) - w||_{1,2}^2 + |H_2((w,\mu),t) - \mu|^2 = \left(||v_R(w)v - w||_{1,2}^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right)t^2 \leq \left(\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right)t^2.$$

Assim, por definição, temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{4\epsilon^2 + \sigma^2}}. \tag{3.18}$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, podemos fazer $\epsilon \to 0^+$ na Equação (3.18), temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \geq 1.$$

Daí segue que $|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) = 1$, pois, graças ao Exemplo (2), já sabemos que $|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \leq 1$. Façamos, agora, o caso em que $g(x,u)u \notin L^1(\Omega)$. Da Propriedade (3.14), obtemos que

$$\int_\Omega g(x,u)u dx = +\infty.$$

Consideremos novamente o argumento anterior com $v = 0$. Seja $M > 0$. Tomando δ' suficientemente pequeno e da Propriedade (3.14) juntamente com Igualdade (3.14), podemos afirmar que

$$f(H_1(w,t)) \leq f(w) - Mt.$$

Assim, ao definirmos, $H((w,\mu),t) = (H_1(w,t), \mu - Mt)$, podemos mostrar que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \geq \frac{M}{\sqrt{(||u||_{1,2}+1)^2 + M}}$$

e, sendo $M > 0$ arbitrário, ao fazermos $M \to +\infty$, obtemos que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \geq 1.$$

Por fim, assumindo que $g(x,\cdot)$ é ímpar, obtemos que f é par. Assim, se considerarmos $u = 0$ e $\lambda > f(0)$, obtemos que $g(x,u)u \in L^1(\Omega)$ e podemos escolher, no argumento

anterior, $v = 0$. Então, $H(\cdot, t)$ é ímpar e a afirmação também é verdadeira nesse caso. ■

Por fim, provemos que

Teorema 3.8. *O funcional J satisfaz a condição $(epi)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e, além disso, temos $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0, \epsilon) \neq 0$ para $\epsilon \geq \alpha$.*

Demonstração. Basta considerarmos $f = J$ no Teorema (3.7). Assim, obtemos imediatamente que $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0, \epsilon) \neq 0$ para $\epsilon > \alpha > J(0)$. Provemos agora que J cumpre a condição $(epi)_c$. Para isso, precisamos provar que

$$\inf\{|d\mathcal{G}_J|(u, \lambda) \ ; \ f(u) < \lambda, |\lambda - c| < \epsilon\} > 0.$$

Observemos que, se λ é maior do que $f(u)$, obtemos, do Teorema (3.7), que $|d\mathcal{G}_J|(u, \lambda) = 1$. Portanto,

$$\inf\{|d\mathcal{G}_J|(u, \lambda) \ ; \ f(u) < \lambda, |\lambda - c| < \epsilon\} = 1 > 0$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. Portanto, J cumpre a condição $(epi)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. ■

3.2 Multiplicidade de solução, Regularidade e positividade das soluções

Nessa seção, usaremos a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente (Corolário 2.13). Provaremos a multiplicidade de soluções clássicas do problema:

$$-\Delta u + \omega u = u \log u^2.$$

onde $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Também provaremos que se uma solução for não negativa, então ela é estritamente positiva.

3.2.1 Multiplicidade de solução

Teorema 3.9. *O funcional J referente ao Problema (3) possui uma sequência de pontos críticos (u_k) em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ com*

$$J(u_k) \to \infty \text{ quando } k \to \infty.$$

Ademais, obtemos a seguinte relação:

$$\int \nabla u_k \nabla v + \omega \int u_k v = \int u_k v \log u_k^2; \ \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N).$$

Observação: 3.10. Note que a relação

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2; \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

não implica que u é uma solução fraca do Problema (3), pois, deveríamos ter a igualdade acima para toda função $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e não apenas para aquelas funções de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que são essencialmente limitadas e tem suporte compacto. Mas, veremos na Subseção (3.2.3) que, mesmo assim, u é uma solução clássica do Problema (3).

Demonstração. Para provar esse resultado, utilizaremos a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente (Corolário 2.13) com $X = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Vejamos que J cumpre as condições desse teorema.

Observemos que, devido à Proposição (3.4), obtemos que J cumpre a condição PS e, aplicando o Teorema (3.8), obtemos que J satisfaz as condições (c) e (d) do Teorema do Passo da Montanha (Corolário (2.13)).

Portanto, basta verificar se J satisfaz as hipóteses geométricas do teorema. Imediatamente, obtemos que $J(0) = 0$. Ainda mais, da desigualdade logarítmica de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}||\nabla u||_2^2 + \frac{\omega+1}{2}||u||_2^2 - \frac{1}{2}\int u^2 \log u^2 \\ &\geq \frac{1}{2}||\nabla u||_2^2 + \frac{\omega+1}{2}||u||_2^2 + \frac{1}{2}(\omega + 1 + n(1+\log a) - \log ||u||_2^2)||u||_2^2 \\ &\geq c||u||^2. \end{aligned}$$

Para um $a > 0$ adequado e $||u|| = \rho$ suficientemente pequeno. Assim, considerando $V_0 := \{0\}$ e $Z = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$||u|| = \rho \Rightarrow c||u|| \leq J(u) \Rightarrow c\rho \leq J(u).$$

Dessa forma, basta considerar $\alpha = c\rho$ para provar a primeira hipótese geométrica (hipótese (a) do Corolário (2.13)).

Por fim, consideremos uma sequência estritamente crescente V_k de subespaços de dimensão finita de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ constituída por funções limitadas advindas dos autoespaços associados ao operador $(-\Delta + |x|^2)$ (vide Referência (2)). Recordando que todas as normas em V_k são equivalentes, se uma sequência em V_k é tomada de tal forma que

$$||u_m|| \to \infty$$

então também $\mu_m = ||u_m||_2 \to \infty$. Escrevamos agora $u_m = \mu_m w_m$, onde

$$w_m = ||u_m||_2^{-1} u_m.$$

Logo,

a) $||w_m||_2 = 1$

b) $||\nabla w_m|| \leq c$, pois

$$||\nabla w_m||_2^2 + ||w_m||_2^2 = \mu_m \int w_m^2 \Rightarrow ||\nabla w_m||_2^2 = \mu_m - 1.$$

c) $||w_m||_\infty \leq C$, pois (u_m) é formada por sequências limitadas.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
J(u_m) &= \frac{1}{2}\left(||\nabla u_m||_2^2 + (w+1)||u_m||_2^2 - \int u_m^2 \log u_m^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(||\nabla(\mu_m w_m)||_2^2 + (w+1)\mu_m^2 - \int (\mu_m w_m)^2 \log \mu_m^2 w_m^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mu_m^2||\nabla w_m||_2^2 + (w+1)\mu_m^2 - \mu_m^2 \int w_m^2 \log \mu_m^2 w_m^2\right) \\
&= \frac{\mu_m^2}{2}\left(||\nabla w_m||_2^2 + (w+1) - \int w_m^2 \log \mu_m^2 w_m^2\right) \\
&= \frac{\mu_m^2}{2}\left(||\nabla w_m||_2^2 + (w+1) - \int w_m^2 (\log \mu_m^2 + \log w_m^2)\right) \\
&= \frac{\mu_m^2}{2}\left(||\nabla w_m||_2^2 + (w+1) - \log \mu_m^2 ||w_m||_2^2 - \int w_m^2 \log w_m^2\right) \\
&= \frac{\mu_m^2}{2}\left(||\nabla w_m||_2^2 + (w+1) - \log \mu_m^2 - \int w_m^2 \log w_m^2\right) \\
&\leq \frac{\mu_m^2}{2}(C - \log \mu_m^2) \to -\infty.
\end{aligned}$$

pois $G : [-C, C] \to \mathbb{R}$, definida na Equação 3.1, é uma função contínua e, assim, é limitada e possui integral finita. Portanto, existe uma sequência (R_k) em (ρ, ∞) tal que para $u \in V_k$ com $||u|| \geq R_k$, temos

$$J(u) \leq 0.$$

Dessa forma, a segunda hipótese geométrica (hipótese (b) do Corolário (2.13)) é satisfeita e, assim, J possui uma sequência de pontos críticos (u_k) tal que $J(u_k) \to \infty$. pela Proposição (3.2),segue que

$$\begin{aligned}
|\langle J'(u_k), v\rangle| &\leq |dJ|(u_k)||v|| = 0 \Rightarrow \\
\int \nabla u_k \nabla v + \omega \int u_k v &= \int u_k v \log u_k^2; \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

3.2.2 Positividade

Nessa seção, verificaremos que dado uma função não negativa só há duas opções: Ou essa função é positiva ou nula. Para isso, utilizaremos um princípio do máximo devido à Vasquez ([25]):

Teorema 3.11 (Princípio do Máximo). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

(i) $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *no sentido das distribuições em* Ω

(ii) $u \geq 0$ *quase em todo ponto em* Ω,

(iii) $\Delta u \leq \beta(u)$ *quase em todo ponto em* $\{x \in \Omega \ : \ 0 < u(x) < a\}$. *onde a é uma constante positiva e* $\beta : [0, a] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua não decrescente com* $\beta(0) = 0$. *Sob a hipótese de que* $\beta(S) = 0$ *para algum* $S > 0$ *ou*

$$\int_0^{\frac{a}{2}} (\beta(S)S)^{\frac{-1}{2}} dS = \infty$$

caso $\beta(S) > 0$ *quando* $S > 0$.

Então, $u \equiv 0$ *q.t.p. em* Ω *ou* u *é estritamente positiva em* Ω *no sentido de que para todo compacto* $K \subset \Omega$, *existe uma constante* $c = c(K) > 0$ *tal que*

$$u \geq c, \ q.t.p \ em \ K.$$

Vamos ao resultado de positividade:

Teorema 3.12. *Seja u solução uma clássica não negativa do problema (3). Então, u é identicamente nula ou estritamente positiva.*

Demonstração. Aplicaremos o princípio do máximo (3.11) com

$$\beta(s) = \begin{cases} \omega s - s \log s^2, & se \ s \neq 0 \\ 0, & se \ s = 0 \end{cases}$$

Observemos que β é uma função contínua, não decrescente para s pequeno, $\beta(0) = 0$ e $\beta(\sqrt{e^{\omega}}) = 0$. Para cada solução $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos $\Delta u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, aplicando o Teorema (3.11), segue que u é nula ou u é estritamente positiva em Ω. ∎

3.2.3 Regularidade

Agora, iremos aplicar a teoria da regularidade para provar que os pontos críticos de J obtidos no Teorema (3.9), são, em verdade, soluções clássicas, ou seja, $C^2(\mathbb{R})$. Para isso, precisaremos utilizar os teoremas da Teoria da Regularidade presentes no Apêndice B.

Agora, provemos que as soluções fracas do Problema (3) são funções $C^2(\mathbb{R}^N)$:

Proposição 3.13. *Os pontos críticos do funcional J obtido no Teorema (3.9) são funções $C^2(\mathbb{R}^N)$ e soluções clássicas do Problema (3).*

Demonstração. Seja u_0 um ponto crítico do funcional J. Pelo Teorema (3.9), u_0 cumpre a seguinte relação:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + \omega \int_{\mathbb{R}^N} u_0 v dx = \int_{\mathbb{R}^N} v u_0 \log u_0^2. \tag{3.19}$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Provemos que u_0 é solução fraca do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u_0), & em\ B(0,R) \\ u = u_0, & sobre\ \partial B(0,R). \end{cases}$$

Para isso, consideremos $v \in C_c^\infty(\overline{B(0,R)})$ e seja $\tilde{v}$ a extensão de v para o $\mathbb{R}^N$ com $supt(\tilde{v}) = supt(v)$. Aplicando v na Equação (3.19), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \cdot \nabla \tilde{v} dx + \omega \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \tilde{v} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{v} u_0 \log u_0^2 \Rightarrow \\ \int_{supt(\tilde{v})} \nabla u_0 \cdot \nabla \tilde{v} dx + \omega \int_{supt(\tilde{v})} u_0 \tilde{v} dx &= \int_{supt(\tilde{v})} \tilde{v} u_0 \log u_0^2 \Rightarrow \\ \int_{supt(v)} \nabla u_0 \cdot v dx + \omega \int_{supt(v)} u_0 v dx &= \int_{supt(v)} v u_0 \log u_0^2. \end{aligned}$$

Como a função v se anula fora do seu suporte, segue que

$$\int_{B(0,R)} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + \omega \int_{B(0,R)} u_0 v dx = \int_{B(0,R)} v u_0 \log u_0^2. \tag{3.20}$$

para todo $v \in C_c^\infty(\overline{B(0,R)})$, como $C_c^\infty(\overline{B(0,R)})$ é denso em $H^1(\overline{B(0,R)})$, segue por continuidade, que

$$\int_{B(0,R)} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + \omega \int_{B(0,R)} u_0 v dx = \int_{B(0,R)} v u_0 \log u_0^2 \tag{3.21}$$

para todo $v \in H^1(\overline{B(0,R)})$. Então, ao considerarmos a função $g : \overline{B(0,R)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$g(\cdot, u_0) = -\omega u_0 + u_0 \log u_0^2,$$

obtemos que u_0 é solução fraca do problema

$$-\Delta u_0 = g(\cdot, u_0(\cdot)).$$

em $\overline{B(0,R)}$. Observemos que g cumpre a condição de crescimento exigida no teorema de Brezys-Kato (Teorema B.2):

$$|g(x,u_0)| = |-\omega u_0 + u_0 \log u_0^2| \leq \omega |u_0| + |u_0 \log u_0^2|$$

Consideremos $\alpha > 0$ tal que $1+\alpha \in [1, \frac{N+2}{N-2}]$. Recordemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log x^2} = \infty.$$

Portanto, existe $K > 1 > 0$ tal que se $x \notin \overline{B(0,K)}$, então

$$x^\alpha > \log x^2.$$

Por outro lado, a função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ onde $h(x) = \omega x + x \log x^2$ é uma função contínua e, assim, é limitada no compacto $\overline{B(0,K)}$ por uma constante $C_1 > 0$. Portanto, se $|u_0| \leq K$, então

$$|g(x,u_0)| \leq h(|u_0|) \leq M.$$

Por outro lado, se $|u_0| > K > 1$, então $|u_0| \leq |u_0|^{1+\alpha}$ e $\log u_0^2 \leq |u|^\alpha$. Assim,

$$|g(x,u_0)| \leq \omega |u_0| + |u_0 \log u_0^2| \leq \omega |u_0|^{1+\alpha} + |u_0| \cdot |u_0| \alpha \leq M_1 |u_0|^{1+\alpha}.$$

Em todo caso, temos

$$|g(x,u_0)| \leq M + M_1 |u_0|^{1+\alpha} \leq C(1 + u_0^{1+\alpha})$$

onde $C = \max\{M, M_1\}$ e $(1+\alpha) \in [1, \frac{N+2}{N-2}]$. Portanto, aplicando o Teorema de Brezis-Kato (Teorema B.2), temos que a seguinte obtemos que $u_0 \in L^q(\overline{B(0,R)})$ para todo $q \in [1, \infty)$.

Agora, iremos regularizar a solução u_0 por meio do Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg. Observemos que a não linearidade da Identidade (3.19) é a função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = u_0(x) \log(u_0^2(x))$, onde u_0 está fixada. Sejam $r \geq 1$. Observemos que:

$$|f(x)|^r = |u_0(x) \log(u_0^2(x))|^r = |u_0|^r |u_0|^\alpha = |u_0| r + \alpha.$$

para $\alpha > 1$ (vide a Proposição(3.1)). Como $u_0 \in L^q(\overline{B(0,R)})$ para todo $q \in [1, \infty)$, temos $f \in L^r(\overline{B(0,R)})$ para todo $r \geq 1$.

Assim, pelo Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg (Teorema B.4), temos $u_0 \in W^{2,r}(\overline{B(0,R)})$ para todo $r \geq 1$. Usaremos, agora, o item (iv) das imersões de Sobolev (Teorema B.5). Consideremos $r > N$, $m = 1$ e $j = 1$, então

$$\frac{N}{p} < 1 = m \Rightarrow W^{2,r}(\overline{B(0,R)}) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$$

Portanto, $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$ para algum $\alpha < 1$. Provemos agora que $u_0 \in C^2(\overline{B(0,R)})$.

Provaremos agora que u_0 é uma função $C^2(\overline{B(0,R)})$, onde R é uma constante positiva. Para isso, aplicaremos o teorema de Existência de Solução para a Equação de Poisson (Teorema B.7).

Consideremos $\Omega = \overline{B(0,R)}$, $f_1 = g(\cdot, u_0(\cdot)) - \omega u_0(\cdot)$ e $h = u_0$. Observemos que $\overline{B(0,R)}$ é limitado cuja fronteira satisfaz o postulado de barreira (vide a Seção 5.5 da Referência [3]). Ademais, provemos que $f_1 \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$. De fato, pois sendo f Lipschitz na bola $B(0,R)$, segue que

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |f(u_0(x)) - f(u_0(y))| \leq M \cdot |u_0(x) - u_0(y)| \leq M \cdot M_1 ||x-y||^{\alpha}$$

Onde M é a constante de Lipschitz de f e M_1 advém do fato de que $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$. Portanto, $g \in C^{0,\alpha}(\overline{B(0,R)})$.

Sendo assim, existe uma única solução $u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Provemos que $u_1 = u_0$. Ora, se u_1 é solução clássica do problema de Poisson (presente no Teorema (B.7), então u_1 é solução fraca. Ou seja, em particular,

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} v f_1(x).$$

para todo $v \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}_c(\Omega)$. Além, disso, como provado inicialmente, u_0 também satisfaz essa identidade. Portanto, usando essas duas relações e percebendo que elas se igualam na fronteira de Ω, temos

$$\int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_0) \cdot \nabla v dx = 0.$$

para todo $v \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}_c(\Omega)$. Fazendo $v = u_1 - u_0$, obtemos que $\nabla(u_1 - u_0)(x) = 0$ q.t.p. para $x \in \Omega$. Como $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$, segue que $\nabla(u_1 - u_0)(x) = 0$ para todo $x \in \overline{B(0,R)}$. Como a bola é conexa, segue que $u_1 - u_0$ é constante na bola fechada. Ora, como na fronteira de $\overline{B(0,R)}$, $u_1 = u_0$ e, portanto, $u_1 = u_0$ em toda a bola. Daí segue que $u_1 = u_0$, e, portanto, $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Como $R > 0$ foi tomado arbitrariamente, obtemos que $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^N)$, como queríamos demonstrar. Daí obtemos também que

$$\Delta u_0 + \omega u = f(u), \quad em\ B(0,R),$$

como $R > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\Delta u_0 + \omega u = f(u), \quad em\ \mathbb{R}^N.$$

Portanto, u_0 é solução clássica do Problema (3). ■

Bibliografia

[1] Adams, R. A. and Fournier, J. J. F.,Sobolev spaces,Pure and Applied Mathematics (Amsterdam),140,Second,Elsevier/Academic Press, Amsterdam,2003.

[2] Berezin, F. A. and Shubin, M. A.,The Schrödinger equation,Mathematics and its Applications (Soviet Series),66,Translated from the 1983 Russian edition by Yu. Rajabov, D. A. Leĭtes and N. A. Sakharova and revised by Shubin, With contributions by G. L. Litvinov and Leĭtes,Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht,1991.

[3] Biezuner, R. J., Equações Diferenciais Parciais I/II, Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas (ICEx), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Notas de Aula, 2010. Disponível em:<http://150.164.25.15/~rodney/notas_de_aula/edp.pdf>. Acesso em: 15/11/2022.

[4] Bredon, G. E.,Introduction to compact transformation groups,Pure and Applied Mathematics, Vol. 46,Academic Press, New York-London,1972.

[5] Brezis, H.,Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,Universitext,Springer, New York,2011.

[6] Brezis, H, and Browder, F. E. , Some properties of higher order Sobolev Spaces, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série,vol. 61,1982.

[7] Canino, A. and Degiovanni, M.,Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations,Topological methods in differential equations and inclusions (Montreal, PQ, 1994),NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.,472,1–50,Kluwer Acad. Publ., Dordrecht,1995.

[8] Cazenave, T.,Stable solutions of the logarithmic Schrödinger equation,Nonlinear Anal.,Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal,7,1983.

[9] Chang, K. C.,Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations,J. Math. Anal. Appl.,Journal of Mathematical Analysis and Applications,80,1981.

[10] Clarke, F. H.,Optimization and nonsmooth analysis,Classics in Applied Mathematics,5,Second,Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA,1990.

[11] D'Avenia, P. and Montefusco, E. and Squassina, M.,On the logarithmic Schrödinger equation, Commun. Contemp. Math.,Communications in Contemporary Mathematics,16,2014.

[12] Degiovanni, M. and Marzocchi, M.,A critical point theory for nonsmooth functionals,Ann. Mat. Pura Appl. (4),Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta,167,1994.

[13] Degiovanni, M. and Zani, S.,Multiple solutions of semilinear elliptic equations with one-sided growth conditions,Nonlinear operator theory,Math. Comput. Modelling,Mathematical and Computer Modelling,32,2000.

[14] De Giorgi, E. and Marino, A. and Tosques, M.,Problems of evolution in metric spaces and maximal decreasing curve,Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8),Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Serie VIII,68,1980.

[15] Guerrero, P. and López, José and Nieto, Juanjo,Global H1 solvability of the 3D logarithmic Schrödinger equation,Nonlinear Analysis: Real World Applications,11,2010,

[16] Lieb, E. H. and Loss, M., Analysis, Graduate Studies in Mathematics, 14, Second, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[17] Lima, E. L.,Elementos de topologia geral,elementos de matemática,1,Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro,1970.

[18] Marzocchi, M.,Multiple solutions of quasilinear equations involving an area-type term,J. Math. Anal. Appl.,Journal of Mathematical Analysis and Applications,196,1995.

[19] Grossinho, M. and Tersian, S. A.,An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations,Nonconvex Optimization and its Applications,52,Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,2001.

[20] Palais, R. S.,Homotopy theory of infinite dimensional manifolds,Topology,Topology. An International Journal of Mathematics,5,1966.

[21] Procesi, C.,Lie groups,Universitext,An approach through invariants and representations,Springer, New York,2007.

[22] Rabinowitz, P. H.,Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,CBMS Regional Conference Series in Mathematics,65,Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI,1986.

[23] Abrantes Santos, J. Teoremas Minimax paa funcionais Localmente Lipschitz e Aplicações. Orientador: Claudianor Oliveira Alves. 2007. Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2001. (181). Dissertação (Mestrado) - Mestrado em Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande,2007.

[24] Struwe, M.,Variational methods,Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics],34,Fourth,Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems,Springer-Verlag, Berlin,2008.

[25] Vázquez, J. L.,A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations,Appl. Math. Optim.,Applied Mathematics and Optimization,12,1984.

[26] Zloshchastiev, K. G.,Logarithmic nonlinearity in theories of quantum gravity: origin of time and observational consequences,Gravit. Cosmol.,Gravitation and Cosmology,16,2010.

Apêndice A

Introdução à Teoria do Gênero

Nesta seção, veremos a definição de gênero de um conjunto assim como algumas propriedades da Teoria de gênero assim como também contemplaremos uma introdução da Teoria do Índice.

Esse apêndice foi baseado no capítulo 7 do Livro "Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations"de Rabinowitz (referência [22]).

Consideremos E um Espaço de Banach Real, G um grupo de aplicações de E em E e o conjunto e $I \in C(E, \mathbb{R})$. Vejamos o seguinte teorema:

Teorema A.1. *Se $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e é par, então $I|_{S^{m-1}}$ tem, no mínimo, m pares distintos de pontos críticos.*

Para provar esse tipo de teorema, precisamos de uma ferramenta que auxilie a "medir o tamanho"da simetria do conjunto. A simetria de um conjunto diz respeito ao conjunto invariante por grupos de simetria. Neste contexto, foi desenvolvida a Teoria de categoria de Ljusternik-Schnirelmann. Há um conceito mais símples que é mais fácil para lidar e será usado aqui: O gênero.

A Teoria de gênero é devida à Krasnoselski. Apesar de que utilizaremos uma definição equivalente devido à Coffman. Consideremos o conjunto:

$$\Sigma(E) = \{A \subset E \setminus \{0\};\ \text{A é fechado e simétrico com respeito a origem}\}.$$

Definição A.2. Seja $A \in \Sigma(E)$. Definimos o gênero de A, denotado por $\gamma(A)$, como sendo o menor inteiro positivo n tal que, existe $\phi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ímpar. Quando não existe n para A, definimos $\gamma(A) = \infty$ e se $A = \setminus\emptyset$, denotamos $\gamma(A) = 0$.

O seguinte exemplo mostra como associar um conjunto que não é simétrico com respeito a origem à um conjunto simétrico e, além disso, a calcular o gênero desse conjunto.

Exemplo 15. Se $B \subset E$ é fechado e $B \cap (-B) = \emptyset$, tomando $A = B \cup (-B)$, temos $\gamma(A) = 1$.

Observemos que $A \in \Sigma(E)$, pois $A \subset E \setminus \{0\}$ é fechado e simétrico em E. Além disso, definindo a aplicação $\varphi : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in B \\ -1, & se\ x \notin -B \end{cases}$$

temos que tal aplicação é contínua e ímpar. Portanto, $\gamma(A) = 1$.

Observação: A.3. Se $A \in \Sigma(E)$ e $\gamma(A) > 1$, então A tem uma infinidade de pontos distintos.

Realmente, suponha, por absurdo, que se A fosse finito, poderíamos escrever $A = B \cup (-B)$ com B fechado tal que $B \cap (-B) = \emptyset$. Então, $\gamma(A) = 1$, o que é um absurdo.

Exemplo 16. Seja $n \geq 1$ e A um conjunto isomorfo ao S^n por uma aplicação ímpar, então $\gamma(A) > 1$. De fato, caso contrário, teríamos $\gamma(A) = 1$ e, assim, por definição, existiria $\varphi \in C(A, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ com φ ímpar. Considere agora $x \in A$ tal que

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi(-x) = -\varphi(x) < 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe um elemento y entre x e $-x$ tal que $\varphi(y) = 0$, um absurdo, pois $\varphi(A) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, $\gamma(A) > 1$.

Definição A.4. Seja $A \in \Sigma(E)$ e $\delta > 0$, denotemos $N_\delta(A)$ uma $\delta-$vizinhança de A, isto é,

$$N_\delta(A) = \{x \in E; d(x, A) \leq \delta\}.$$

Para o próximo teorema, precisaremos do seguinte resultado de topologia geral (Proposição 2 do capítulo 10 da referência [17]):

Teorema A.5 (Teorema de Extensão de Tietze). *Sejam F um subconjunto fechado de um espaço normado X e J um intervalo da reta real. Dada uma função real contínua $f : F \to J$, existe uma função contínua $\varphi : X \to J$ tal que $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in F$.*

Vejamos as principais propriedades do gênero:

Proposição A.6. *Sejam $A, B \in \Sigma(E)$. Então,*

I) ***Normalização:*** *Se $x \neq 0$, então $\gamma(\{x\} \cup \{-x\}) = 1$.*

II) ***Preservação por aplicação contínua:*** *Se existe $f \in C(A, B)$ ímpar, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*

III) *Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*

IV) ***Subaditividade:*** *$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.*

V) ***Propriedade de continuidade:*** *Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe $\delta > 0$ tal que $N_\delta(A) \in \Sigma(E)$ e $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$.*

Demonstração. I) Segue do exemplo (15).

II) Se $\gamma(B) = \infty$ o resultado segue de imediato. Se $\gamma(A) = \infty$, teremos $\gamma(B) = \infty$. De fato, caso contrário, teríamos um $n \in \mathbb{N}$ tal que, existiria $\varphi : B \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ímpar. Desta forma, $g = \varphi \circ f : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é contínua e ímpar. Absurdo!

Com isso, suporemos que, $\gamma(A), \gamma(B) < \infty$. Daí, digamos que $\gamma(B) = n$ logo, existe uma aplicação contínua e ímpar $\varphi : B \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Assim,

$$g = \varphi \circ f : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

é contínua e ímpar, de onde segue que, $\gamma(A) \leq n$. Portanto, $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

III) Basta considerar no item (III) a função f como sendo a aplicação inclusão $i : A \to B$.

IV) Suponha que, $\gamma(A) = m$ e $\gamma(B) = n$. Então existem duas funções contínuas e ímpares, $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ e $\phi \in C(B, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Pelo Teorema de Tietze, existem $\hat{\varphi} \in C(E, \mathbb{R}^m)$ e $\hat{\phi} \in C(E, \mathbb{R}^n)$ tais que, $\hat{\varphi}|_A = \varphi$ e $\hat{\phi}|_B = \phi$. Se necessário, podemos substituir $\hat{\phi}$ e $\hat{\varphi}$ por suas partes ímpares, logo podemos supor $\hat{\phi}$ e $\hat{\varphi}$ ímpares. Agora, consideremos $f = (\hat{\varphi}, \hat{\phi})$, então $f \in C(A \cup B, \mathbb{R}^{m+n} \setminus \{0\})$ é ímpar. Portanto,

$$\gamma(A \cup B) \geq m + n = \gamma(A) + \gamma(B).$$

V) Para cada $x \in A$, definamos $r(x) = \frac{1}{2}||x|| = r = (-x)$ e $T_x = \overline{B}_{r(x)}(x) \cup \overline{B}_{r(x)}(-x)$. Pelo exemplo 15, temos $\gamma(T_x) = 1$. Notemos que,

$$A \subset \bigcup_{x \in A} T_x$$

e pela compacidade de A, segue que existem $x_1, x_2, \cdots, x_k \in A$ tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} T_{x_i}$. Portanto,

$$\gamma(A) \leq \gamma\left(\bigcup_{i=1}^{k} T_{x_i}\right) \leq \Sigma_{i=1}^{k} \gamma(T_{x_i}) = k < \infty.$$

Supondo $\gamma(A) = n$, existe $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ímpar. Novamente, pelo Teorema de Tietze, existe $\varphi \in C(E, \mathbb{R}^n)$ ímpar que estende φ. Agora, sendo A compacto e $\hat{\varphi}$ contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\hat{\varphi} \neq 0$ em $N_\delta(A)$. Logo, $\gamma(N_\delta(A)) \leq n = \gamma(A)$. Além disso, como $A \subset N_\delta(A)$, temos $\gamma(A) \leq \gamma(N_\delta(A))$.

■

Observação: A.7. Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

De fato, como

$$A \subset (\overline{A \setminus B}) \cup B,$$

temos

$$\gamma(A) \leq \gamma((\overline{A \setminus B} \cup B)) \leq \gamma(\overline{A \setminus B}) + \gamma(B)$$

o que implica em,

$$\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B).$$

Para provar o próximo resultado, usaremos o Teorema de Borsuk-Ulam:

Teorema A.8. *(Teorema de Borsuk-Ulam) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e simétrico com respeito a origem $0 \in \Omega$ e $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua. Suponha que, $m < N$. Então, existe $x \in \partial\Omega$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Proposição A.9. *Sejam $A \in \Sigma(E)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ um aberto limitado e simétrico com respeito a origem $0 \in \Omega$. Se existe $h \in C(A, \partial\Omega)$ homeomorfismo ímpar, então $\gamma(A) = k$.*

Demonstração. Verifiquemos que $\gamma(A) \leq k$. De fato, notemos que, por Ω ser abeto, temos $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$. Logo,

$$0 \in \Omega \Rightarrow 0 \notin \partial\Omega.$$

Portanto, como $\partial\Omega$ é fechado e $\{0\}$ é compacto, temos $d(\{0\}, \partial\Omega) > 0$. Assim, podemos estender o contradomínio de h para $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, onde h é 0 fora de uma δ vizinhança de $\partial\Omega$. Dessa forma, $\gamma(A) \leq k$. Suponhamos, $\gamma(A) = j < k$, então existe $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$

ímpar. Como $\varphi \circ h^{-1} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$ é ímpar, segue do Teorema de Borsuk-Ulam, que existe $x \in \partial\Omega$, tal que

$$(\varphi \circ h^{-1})(x) = (\varphi \circ h^{-1})(-x)$$

logo,

$$(\varphi \circ h^{-1})(x) - (\varphi \circ h^{-1})(-x) = 0$$

e, por $\varphi \circ h^{-1}$ ser ímpar, segue que

$$(\varphi \circ h^{-1})(x) = 0.$$

Absurdo! Portanto, $\gamma(A) = k$. ■

Observação: A.10. Se F é um subespaço de E de dimensão k e S_F^{k-1} é a esfera unitária de F, então $\gamma(S_F^{k-1}) = k$.

De fato, na proposição anterior, consideremos $A = S_F^{k-1}, \Omega = B^F(0,1) \subset F \cong \mathbb{R}^k$ e h sendo a aplicação inclusão $i : S_F^{k-1} \to \partial\Omega$ que é um homeomorfismo ímpar. Logo, $\gamma(S^{k-1})_F = k$.

Proposição A.11. *Sejam X um subespaço de E de codimensão k e $A \in \Sigma(E)$ com $\gamma(A) > k$. Então, $A \cap X \neq \emptyset$.*

Demonstração. Façamos $E = V \oplus X$, onde V é subespaço fechado $k-$ dimensional de E. Tomemos P a projeção de E em V. Suponha, por absurdo, que $A \cap X \neq \emptyset$. Considere, $P_1 : A \to S \cap V$ dada por,

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{||P(x)||}.$$

onde S é a esfera unitária de E. Note que P_1 é contínua e ímpar. Daí, $\gamma(A) \leq \gamma(S \cap V) = \gamma(S_V^{k-1}) = k$. Absurdo! Portanto, $A \cap X \neq \emptyset$. ■

Como mencionado anteriormente, há outros caminhos para "medir a simetria" dos conjuntos, não somente no $\mathbb{Z}_2$, mas para ações de grupos mais gerais.

Sejam G um grupo e E um espaço de Banach real munido de uma ação de grupo de G. Recordemos a definição 1.27 do $FixG$:

$$Fix(G) = \{u \in E \mid g \cdot u = u \text{ para todo } g \in G\ \}.$$

Consideremos $\mathcal{E}$ a família de subconjuntos invariantes de $E \setminus \{0\}$, i.e.,

$$A \in \mathcal{E}, x \in A \Rightarrow gx \in A, \ \ \forall g \in G \ e \ x \in A.$$

Dizemos que há uma teoria do índice para (E, G) se existe uma aplicação

$$i : \mathcal{E} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

tal que, para todo $A, B \in \mathcal{E}$:

1º Normalização: Se $x \notin FixG$, então $i\left(\bigcup_{g\in G} gx\right) = 1$.

2º Preservação por aplicação contínua: Se $f \in C(A, B)$ e f é equivariante (definição 1.26).

3º Monotonicidade: $A \subset B \Rightarrow i(A) \leq i(B)$.

4º Subaditividade: $i(A \cup B) \leq i(A) + i(B)$.

5º Propriedade da Continuidade: Se A é compacto e $A \cap FixG = 0$, então $i(A) < \infty$ e existe $\delta > 0$ tal que

$$N_\delta(A) \in \mathcal{E} \;\; e \;\; i(N_\delta(A)) = i(A).$$

Observe que a teoria do Gênero e a teoria de Categoria são casos particulares da Teoria do Índice. Para mais informações, indicamos a referência 22.

Apêndice B

Resultados sobre teoria da regularidade

A seguir serão listados alguns resultados da teoria de regularidade como: O Teorema de Brezis-Kato, um Teorema de existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson e uma versão do Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg e algumas imersões contínuas de Sobolev.

Consideremos o problema (A)

$$\Delta u = g(\cdot, u), \ em \ \Omega$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. Além disso, suponhamos que g satisfaz a condição de crescimento,

$$|g(x, u)| \leq C(1 + |u|^p),$$

com $p \in \left[1, \frac{N+2}{N-2}\right], N \geq 3$. Vejamos o que é uma solução para o problema (A)

Definição B.1. Uma função $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ é solução do problema (A) quando

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) = \int_\Omega g(x, u(x))v$$

para todo $v \in H^1_{loc}(\Omega)$.

Para regularizar as soluções, precisamos de um resultado de regularidade que não necessite da limitação do domínio, visto que estamos trabalhando no $\mathbb{R}^N$. Um teorema

que, nesse contexto, nos será bastante útil é o teorema devido à Brezis-Kato presente no apêndice B do livro de Michael Struwe ([24]):

Teorema B.2 (Brezis-Kato)**.** *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que, para quase todo $x \in \Omega$, vale*

$$|g(x,u)| \leq a(x)(1+|u|)$$

com uma função $a \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega)$. Se $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca de (A), então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ para qualquer $q \in [1,\infty)$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$, para qualquer $q \in [1,\infty)$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$.

Observação: B.3. A função g que cumpre o crescimento dado no problema (A) também cumpre o crescimento da hipótese do Teorema de Brezis-Kato. De fato, basta considerar

$$a(x) = \frac{|g(x,u)|}{1+|u(x)|}$$

e observar que $a \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega)$.

Teorema B.4. *(Agmon-Douglis-Niremberg) Sejam $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, verificando*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} uv = \int_{\mathbb{R}^N} fv$$

para todo $v \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$. Então, $u \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ e existe $C > 0$ independente de f, tal que

$$||u||_{W^{2,r}(\mathbb{R}^N)} \leq C||f||_{L^r(\mathbb{R}^N)}.$$

E recordemos também as imersões de Sobolev (Capítulo 4 do livro do Adams [1]):

Teorema B.5. *Seja Ω um domínio regular, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$, as imersões abaixo são contínuas:*

(i) Se $m < \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$.

(ii) Se $m = \frac{N}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q < \infty$.

(iii) Se $\frac{N}{p} < m$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$,

(iv) Se $m-1 < \frac{N}{p} < m$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)$, com $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.

onde $C^j_B(\Omega)$ é o subespaço de $C^j(\Omega)$ formado pelas funções que, juntamente com suas derivadas até a ordem j são limitadas em Ω.

O seguinte teorema é baseado na seção 9.2 das notas de aula de Rodney ([3]) onde há a hipótese geométrica do postulado de barreira

Definição B.6. Dado um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dizemos que $\partial\Omega$ satisfaz o postulado de barreira se para todo ponto $y \in \partial\Omega$ existe uma função $w \in C^0(\overline{\Omega})$ tal que w é super-harmônica em Ω, $w(y) = 0$ e $w > 0$ em $\overline{\Omega} \setminus \{y\}$.

Observemos o Teorema de Existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson:

Teorema B.7. *(Existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira satisfaz o postulado da barreira, $f \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ e $h \in C^0(\partial\Omega)$. Então o problema de Dirichlet para a equação*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & em\ \Omega \\ u = h, & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndiger logarítimica: Uma abordagem via inclinação fraca

por

Rodrigo Marques Faustino da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Campina Grande - PB

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e FAPESQ.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndiger logarítimica: Uma abordagem via inclinação fraca

por

Rodrigo Marques Faustino da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndiger logarítimica: Uma abordagem via inclinação fraca

por

Rodrigo Marques Faustino da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matatemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares - UFCA

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG

Prof. Dr. Romildo do Nascimento Lima - UFCG

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro - 2022

Dedicatória

Ao Espírito Santo, à minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

"Mesmo que eu tivesse o dom da profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência; mesmo que tivesse toda a fé, a ponto de transportar montanhas, se não tiver amor, eu nada seria."I Coríntios, 13

Por isso, agradeço, ao meu amigo Espírito Santo. Por meio do sublime amor, Ele me conduziu em cada etapa dessa dissertação dando ânimo e zelo para realizar as atividades necessárias, assim como me apresentou pessoas maravilhosas e me concedeu amigos verdadeiros.

Agradeço a minha família, Jeová (pai), Paula (mãe) e Geovânia (irmã), que sempre lutaram por mim e me apoiaram diariamente. Também agradeço a uma família que amo, minha namorada Maria Clara, meus sogros, Adriana e Dedé, e ao meu cunhado, Vinícius, que também sempre me motivavam a perseverar. Aos meus familiares na fé, a todos do grupo de oração CRES, da catequese e de toda Paróquia Sagrada Família, obrigado por suas orações e pela doce fraternidade.

Também agradeço a cada um dos meus amigos da UAMat, em especial, Ismael, Luis, Siebra e Pedro Mestrado que acreditaram em mim mais do que eu mesmo acreditaria. Obrigado pelo apoio e pela fraternidade de vocês.

Agradeço a cada um dos meus professores orientadores, em ordem cronológica, a começar com Ronaebson Carvalho durante o ensino médio do IF, a passar por Marinho no treinamento das olimpíadas, depois por Rodrigo Cohen no PICME, por Daniel Cordeiro no PET, por Claudianor Oliveira Alves nas Iniciações Científicas e o primeiro ano de mestrado, Luiz Antônio no Estágio Supervisionado e Alânnio Nóbrega na dissertação. Cada um de vocês me instruíram, educaram e motivaram, sempre com muito boa vontade, a fim de que eu conseguisse dar o meu melhor. Me perdoem pelo tanto de trabalho que dei a vocês. Também agradeço a todos os professores e funcionários da família UAMat da UFCG. Especialmente, Aninha que sempre nos alegra com sua presença. Por fim, agradeço a banca por examinarem essa dissertação afim de torná-la útil para outros amantes da matemática. Muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho, estaremos interessados em estudar resultados de multiplicidade de soluções e positividade de soluções para a equação de Schröndinger cuja não linearidade é logarítmica. A não linearidade logarítmica traz muitos desafios. Por exemplo, ao fazer uma análise variacional, percebe-se que o funcional energia associado não é de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, nessa dissertação é apresentada uma Versão Simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente que é elaborada por meio do conceito de inclinação fraca (weak slope).

Palavras-chave: Equação logarítmica de Schrödinger; Inclinação fraca; Versão Simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente.

Abstract

In this essay, we are interested to study some results of solution multiplicity and positivity about the Schröndinger's equation which its non-linearity is logarithmic. This non-linearity brings up many issues. For instance, by doing a varational analysis, we realize that the functional energy is not in $C^1(\mathbb{R}^N)$ class. Therefore, in this Master's thesis, it is shown a version of a Simetric Mountain Pass for lower semicontinuity which is drown up trough of the concept of weak slope.

Keywords: Logarithmic Schröndinger's Equation; Weak Slope; Simetric Mountain Pass for lower semicontinuity.

Conteúdo

Introdução 6

1 A inclinação fraca **11**

1.1 Inclinação fraca 11

1.2 Relações entre a inclinação fraca e outros conceitos de derivada 26

1.3 A inclinação fraca equivariante 37

1.3.1 Conceitos básicos sobre ação de grupo e grupo de Lie 37

1.3.2 A inclinação fraca equivariante 40

2 Teorema do Passo da Montanha simétrico para funcionais semicontínuos inferiormente **44**

2.1 Conceitos básicos 44

2.2 Teorema da Deformação 45

2.3 Generalização da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para Funcionais não suaves 59

3 Equações de Schröndiger com não linearidade logarítmica **69**

3.1 Propriedades do funcional energia 69

3.2 Multiplicidade de solução, Regularidade e positividade das soluções . . 83

3.2.1 Multiplicidade de solução 83

3.2.2 Positividade 86

3.2.3 Regularidade 87

Bibliografia **90**

A Introdução à Teoria do Gênero **93**

B Resultados sobre teoria da regularidade **99**

Notações

- $B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}, \quad r > 0$;
- $\mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, ..., x_N) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., N\}$ e $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;
- $supt(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$;
- $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$ e $u^-(x) = \max\{0, -u(x)\}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável;
- Dado $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, definimos, para algum $M \in \mathbb{R}$, $[u \geq M] = \{x \in \Omega \ : \ u(x) \geq M\}$. Analogamente define-se $[u \leq M]$, $[u > M]$ e $[u < M]$;
- $\rightharpoonup$ designa convergência fraca e $\overset{\star}{\rightharpoonup}$ designa convergência fraca estrela;
- $A \hookrightarrow B$ designa que A está imerso em B;
- $C_0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é contínua com $supp(u) \subset \Omega$ compacto$\}$;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\}, p \in [1, +\infty)$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \text{ existe } c > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq c \text{ q.t.p. em } \Omega\}$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é continuamente derivável k vezes$\}$;
- $L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_A |u(x)| dx < +\infty, \text{ para qualquer } A \subset\subset \Omega \right\}$;
- X' denota o dual topológico de X;

- $||\cdot||_*$ denota a norma dos funcionais lineares contínuos, isto é, dados X um espaço de Banach e $I \in X'$

$$||I||_* = \sup\{|I(x)| \ : \ x \in X \text{ e } ||x||_X \leq 1\}.$$

- $G(f)$ denota o gráfico da função f.

Introdução

A física quântica é o estudo dos fenômenos físicos para micro-objetos como, por exemplo, átomos e moléculas. O tamanho para que um objeto seja considerado um micro-objeto é determinado pela sua magnitude comparada à constante de Planck $\hbar \cong 6,62 \cdot 10^{-}34\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$. Para os macro-objetos, a física clássica descreve bem o comportamento desses objetos.

Porém, os sentidos humanos são incapazes, geralmente, para compreender os micro fenômenos diretamente. Sendo assim, faz-se necessário um aparato intermediário tal qual o seu comportamento pode ser interpretado pela mecânica clássica. E, observando tais mudanças, pode-se concluir alterações na dimensão quântica desse aparato intermediador.

Dessa forma, para fazer um estudo profundo da mecânica quântica, o físico J. Von Neumann determinou um sistema básico de postulados. Vejamos o primeiro postulado:

Postulado 1. *Os estados de um sistema mecânico quântico são descritos por vetores não nulos de um espaço de Hilbert complexo e separável L. Dois vetores descrevem o mesmo estado se, e somente se, que são diferentes por apenas um fator complexo não-nulo. Cada estado observável corresponde unicamente a um operador autoadjunto em L.*

O espaço L é denominado por espaço de estado e os vetores desse espaço são chamados por vetores de estado. Nessa perspectiva, pode-se ver como os fenômenos da mecânica quântica podem ser estudados por meio de ferramentas sofisticadas da análise funcional tais como a Teoria Espectral.

Na mecânica quântica, segundo Berezin e Shubin ([2]), a mais importante quantidade física de qualquer sistema mecânico quântico é a energia desse sistema. De-

nominando por H um operador energia, o postulado 3 de Neumann afirma que esse operador determina a lei da evolução do sistema mecânico quântico:

Postulado 2. *Seja $\psi_0 \in L$ o estado do sistema para $t = 0$. Então, para qualquer t, o estado do sistema é representado pelo vetor $\psi(t) = U_t\psi_0$, onde U_t é um operador unitário denominado por operador evolução. A função vetorial $\psi(t)$ é diferenciável se $\psi(t) \in D_H$, onde D_H é o domínio do operador H (somente no caso $t = 0$) e, nesse caso,*

$$i\hbar\frac{d\psi(t)}{dt} = H(\psi(t)), \tag{1}$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck e $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária.

A Relação (1) é a equação base para a mecânica quântica e é denominada de Equação de Schrödinger.

Nesta dissertação, apresentaremos uma teoria dos pontos críticos para funcionais não suaves, seguindo os passos do artigo de D.Avenia, Montefusco e Squassina [11], afim de utilizá-lo para analisar soluções da seguinte equação de Schrödinger:

$$i\partial_t\phi + \Delta\phi + \phi\log|\phi|^2 = 0 \tag{2}$$

sendo $\phi : [0, \infty] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e $N \geq 3$. Observe que a Equação (2) pode ser considerada uma equação de Schrödinger, pois ao definir

$$H(\phi) = -\hbar(\Delta\phi + \phi\log|\phi|^2).$$

Podemos escrever a Equação (2) como a Equação (1). Segundo Zloshchastiev [26], as soluções dessa equação admite aplicações na mecânica quântica, ótica quântica, física nuclear, fenômenos de transporte e difusão, sistemas quânticos abertos, gravidade quântica efetiva, teoria da superfluidibilidade e a condensação de Bose-Einstein.

Considere as ondas estacionárias são funções da forma $\phi = e^{i\omega t}u(x)$, onde u é uma função que é solução do problema:

$$-\Delta u + \omega u = u\log u^2, \tag{3}$$

onde $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Essas ondas estacionárias são soluções da Equação (2). Dessa forma, para solucionar a Equação (2), basta procurar as soluções da equação diferencial parcial elíptica (3). Para fazer uma análise variacional desse problema, inspirados pela teoria dos pontos críticos, somos motivados a estudar os pontos críticos do funcional:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2 + \frac{\omega+1}{2}\int|u|^2 - \frac{1}{2}\int G(u). \tag{4}$$

onde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$G(s) = \begin{cases} s^2 \log(s^2), & se\ s \neq 0 \\ 0, & se\ s = 0. \end{cases}$$

Devido à desigualdade logarítmica de Sobolev presente no livro Analysis de Lieb-Loss ([16], Capítulo 8), temos

$$\int u^2 \log u^2 \leq \frac{a^2}{\pi} ||\nabla u||_2^2 + (\log ||u||_2^2 - n(1+a))||u||_2^2 \tag{5}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $a > 0$. Assim, $J(u) > -\infty$. Mas, existem elementos $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $\int u^2 \log u^2 = -\infty$. Por exemplo,

Exemplo 1. Considere uma função suave $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u(x) = \begin{cases} (|x|^{\frac{N}{2}} \log |x|)^{-1}, & |x| \geq 3, \\ 0, & |x| \leq 2. \end{cases}$$

Então, $\int u^2 \log u^2 = -\infty$. Provemos que, para $N = 1$, temos $\int_{\mathbb{R}} u^2 \log u^2 = -\infty$. Observemos que, sendo u uma função contínua, temos

$$\left| \int_{-2}^{2} u^2 \log u^2 dx \right| < \infty.$$

Como u é uma função par, segue que podemos ater a nossa atenção a integral:

$$\int_3^\infty u^2 \log u^2 dx.$$

Substituindo o valor de u e usando propriedades do logaritmo, obtemos que

$$\int_3^\infty u^2 \log u^2 dx = \int_3^\infty \frac{\log x + 2 \cdot \log(\log x)}{x(\log x)^2} dx.$$

Fazendo a substituição de variável $y = \log x$, obtemos que $dy = \frac{1}{x} dx$. Portanto,

$$\int_3^\infty u^2 \log u^2 dx = -\int_{\log(3)}^\infty \frac{y + 2 \cdot \log(y)}{y^2} dy = -\left(\int_{\log(3)}^\infty \frac{1}{y} dy + \int_{\log(3)}^\infty \frac{2 \cdot \log(y)}{y^2} dy \right),$$

onde a segunda integral é finita e a primeira é infinita. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 \log u^2 dx = -\infty.$$

Então, em geral, J não é C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Devido a perca de suavidade, no estudo da existência de soluções para a Equação (3), segundo D'Avenia, Montefusco e Squassina [11], há outros trabalhos cuja abordagem é indireta. Por um lado, no artigo de Cazenave [8], a ideia é trabalhar com o espaço de Banach:

$$W = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \; ; \; \int u^2 |\log u^2| < \infty \right\}.$$

com norma:

$$||u||_W = ||u||_{H^1} + \inf \left\{ \gamma > 0 \; ; \; \int A\left(\frac{|u|}{\gamma}\right) \leq 1 \right\},$$

onde $A(s) = -s^2 \log s^2$ em $[0, \epsilon^{-3}]$ e $A(s) = 3s^2 + 4e^{-3}s - e^{-6}$ em $[e^{-3}, \infty)$. Sendo assim, nessa estrutura, $J : W \to \mathbb{R}$ está bem definida e é C^1. Por outro lado, no artigo de Guerrero, López e Nieto [15], é penalizada a não linearidade em torno da origem afim de obter estimativas a priori afim de encontro soluções não triviais como limite. Nessa dissertação, será apresentada uma abordagem direta, realizada por D'Avenia, Montefusco e Squassina, para determinar múltiplas soluções da Equação 3 por meio do estudo da inclinação fraca.

Inicialmente, afim de evitar a má definição da expressão

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2; \;\; \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

consideraremos apenas as funções testes v de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que são essencialmente limitadas e possuem suporte compactos, pois, nos asseguraremos que

$$\int uv \log u^2 dx < \infty$$

e fica bem definida a expressão:

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2; \;\; \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Sabendo que o funcional J tem uma perca de suavidade, no capítulo 1 é desenvolvido o conceito de inclinação fraca. O conceito de inclinação fraca procura dar um sentido de inclinação de uma derivada para funções semicontínuas inferiormente. Na seção 2 do capítulo 1 é mostrada relações entre o conceito de inclinação fraca e outros conceitos de derivadas, a saber, a inclinação forte [14], o gradiente generalizado de Clark ([9],[10],[19] e [23]) e a derivada clássica. Na seção 3 é apresentada a inclinação

fraca equivariante juntamente com os conceitos balizares como ação de grupo e grupo de Lie [21].

Na primeira seção do capítulo 2, são apresentados os conceitos de sequência Palais-Smale e a condição Palais-Smale para funcionais não-suaves. Na segunda seção é provado um teorema da deformação para funções apenas contínuas e, ainda mais, a deformação é equivariante em relação a ação de grupo em questão. Já na seção 3, inspirados pela versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha presente no trabalho do Rabinowitz [22], é mostrada uma versão desse teorema para funcionais que são apenas semicontínuos inferiormente.

Por fim, no capítulo 3, é mostrado que a Equação (3) possui uma infinidade de soluções cuja energias converge para mais infinto. Ademais, é discutida a positividade dessas soluções e é provado que tais soluções são funções $C^2(\mathbb{R}^N)$.

Capítulo 1

A inclinação fraca

Neste capítulo apresentaremos uma generalização do conceito de derivada para funcionais que não são deriváveis no sentido clássico.

A teoria apresentada a seguir define o conceito de inclinação fraca (weak slope) que tem muita semelhança e relação com a norma da diferencial de um funcional. Na Seção 1.1, veremos como tal teoria é construída para funções contínuas e, em seguida, estendida para funções semicontínuas inferiormente (s.c.i.).

Vale ressaltar que há diversas generalizações do conceito de derivada. Por exemplo, o gradiente generalizado de Clarke (vide [9],[10],[19] e [23]), a subdiferencial e a inclinação forte (vide [14). Na Seção 1.2, veremos algumas relações entre esses conceitos de derivada e provaremos algumas relações desses conceitos com o conceito de inclinação fraca.

Por fim, na Seção 1.3, veremos o conceito de inclinação fraca equivariante que é uma generalização do conceito de inclinação fraca para funções que possuem certas simetrias e discutiremos algumas de suas propriedades e implicações.

1.1 Inclinação fraca

Ao longo dessa seção, consideraremos X como um espaço métrico munido com a métrica d.

Definição 1.1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $u \in X$. Denotaremos por

$|df|(u)$ como o supremo dos $\sigma \in [0, +\infty]$ tal que existe $\delta > 0$ e uma aplicação contínua

$$H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to X$$

tal que

a) $d(H(v,t), v) \leq t$,

b) $f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$.

O número real estendido $|df|(u)$ é chamada inclinação fraca de f em u.

Exemplo 2. Sejam (X, d) um espaço métrico e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz com constante de Lipschitz k, então $|dg|(x) \leq k$.

De fato, seja $\sigma \geq 0$ tal que exista uma aplicação contínua

$$H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to X$$

tal que

(i) $d(H(v,t), v) \leq t$,

(ii) $g(H(v,t)) \leq g(v) - \sigma t$.

Observemos que

$$\begin{aligned} \sigma t &\leq g(v) - g(H(v,t)) \\ \Rightarrow \sigma &\leq \frac{g(v) - g(H(v,t))}{t} \leq \frac{k \cdot d(v, H(v,t))}{t} \\ \Rightarrow \sigma &\leq \frac{k \cdot t}{t} = k. \end{aligned}$$

Logo, o k é uma cota superior para esses σ. Como $|dg|(x)$ é o supremo de tais σ, segue que

$$|dg|(x) \leq k.$$

Observe que tal propriedade é visível geometricamente, visto que toda função lipschitz está entre duas funções afins com inclinação k. Portanto, faz sentido que a inclinação fraca seja majorada por essa constante k (vide Figura 1.1).

Exemplo 3. Consideremos agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = |x|$. Então

$$|df|(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0. \end{cases}$$

De fato, vejamos, primeiramente, para o caso em que x_0 é positivo. Observemos que, pelo Exemplo (2), temos $|df|(x_0) \leq 1$. Falta então provar que $|df|(x_0) \geq 1$.

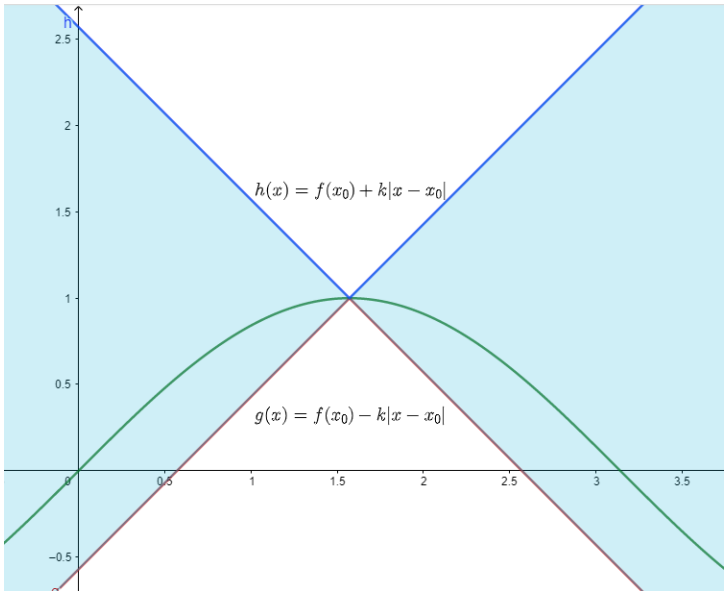


Figura 1.1: Função Lipschitz delimitada por funções lineares com inclinação k.

Consideremos $\delta = \frac{x_0}{8}$, $H : B(x_0, \delta) \times [0, \delta] \to \mathbb{R}$ onde $H(y, t) = y - t$. Notemos que H é contínua e que

$$d(H(y,t), y) = |y - t - y| = |t| = t$$

para todo $y \in B(x_0, \delta)$.

Mostremos agora que H goza da propriedade (b) presente na Definição (1.1). Seja $y \in B(x_0, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Observemos que podemos escrever $y = x_0 + \epsilon$ ou $y = x_0 - \epsilon$, onde $\epsilon \in [0, \delta]$. Ora, se $y = x_0 + \epsilon$, então

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{|x_0 + \epsilon| - |x_0 + \epsilon - t|}{t}.$$

Como $t < \delta = \frac{x_0}{8}$, segue que

$$x_0 - t \geq 0.$$

Logo,

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{x_0 + \epsilon - (x_0 + \epsilon - t)}{t} = \frac{t}{t} \geq 1.$$

Por outro lado, se $y = x_0 - \epsilon$ e, ao observarmos que $\epsilon, t \in [0, \frac{x_0}{8}]$, temos $x_0 - \epsilon - t \geq 0$. Logo,

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{x_0 - \epsilon - (x_0 - \epsilon - t)}{t} = \frac{t}{t} \geq 1.$$

Tendo em vista que, em ambos os casos, temos

$$1 \leq \frac{f(y) - f(H(y,t))}{t}$$

para todo $y \in B(x, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Daí, por meio de manipulações algébricas, segue que

$$f(H(y,t)) \leq f(y) - 1 \cdot t.$$

Dessa forma, por definição, devemos ter $|df|(x_0) \geq 1$. Portanto, $|df|(x_0) = 1$ para $x_0 > 0$.

Analogamente, mostra-se que $|df|(x_0) = 1$ para x_0 negativo. Observe que, nessas regiões, a função módulo é derivável e, ainda mais,

$$|f'(x)| = 1 = |df|(x)$$

para $x \neq 0$.

Tal igualdade não é uma mera coincidência, no Corolário 1.21, é afirmado que, para funções deriváveis, a inclinação fraca coincide com a norma da diferencial da função em questão.

Vejamos agora o caso em que x é nulo. Para isso, consideremos $\sigma \geq 0$ e uma aplicação H associada a σ conforme a Definição (1.1). Observemos que, ao aplicarmos $v = 0$ na propriedade (b) de H, temos

$$\begin{aligned} f(H(0,t)) &\leq f(0) - \sigma \cdot t \Rightarrow \\ \sigma &\leq \frac{f(0) - f(H(0,t))}{t} \Rightarrow \\ \sigma &\leq \frac{|0| - |H(0,t)|}{t} \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\sigma = 0$. Sendo assim, $|df|(0) = \sup \sigma = 0$.

Observemos que, nesse último exemplo, vimos que a inclinação fraca da função módulo no 0 é o 0. Perceba que 0 é um mínimo global da função módulo. A próxima proposição mostra que a inclinação fraca é nula em mínimos locais.

Proposição 1.2. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $U \subset X$ um subconjunto aberto. Se $u \in U$ é um ponto de mínimo local de f, então $|df|(u) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $|df|(u) > 0$. Consideremos $\sigma \in (0, |df|(0))$ e uma aplicação $H : U \times [0, \delta] \to \mathbb{R}$ como na Definição (1.1). Sendo assim,

a) $d(x, H(x,t)) \leq t$

b) $f(H(x,t)) \leq f(x) - \sigma t$

para todo $x \in U$ e $t \in [0, \delta]$. Note que, da propriedade (a), temos

$$H(x,t) \to x, \quad \text{quando } \ t \to 0.$$

Sendo $x = u$ um ponto de mínimo, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$f(u) \leq f(H(u,t)), \quad \forall t \in [0, \delta_1],$$

visto que u é um ponto de mínimo local de f. Dessa forma, observemos agora que, de (b), temos

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t}$$

aplicando $x = u$, temos

$$\sigma \leq \frac{f(u) - f(H(u,t))}{t} \leq 0, \quad \forall t \in [0, \delta_1].$$

Assim, o 0 é uma cota superior de tais σ, portanto

$$|df|(u) \leq 0 \Rightarrow |df|(u) = 0.$$

■

A seguir, definiremos dois importantes conjuntos que serão o alicerce para a construção do conceito de inclinação fraca para funções semicontínuas inferiormente:

Definição 1.3. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferiormente. Denominamos de domínio efetivo de f o conjunto

$$D(f) = \{x \in X : f(u) < \infty\}$$

e de epigráfico de f o conjunto

$$epi(f) = \{(u, \xi) \in X \times \mathbb{R}; f(u) \leq \xi\}.$$

onde o epigráfico é munido com a métrica

$$d((u,\xi),(v,\mu)) = (d(u,v))^2 + |\xi - \mu|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação: 1.4. Se f é semicontínua inferiormente, então o $epi(f)$ é fechado em $X \times \mathbb{R}$. De fato, seja $(u, \xi) \in \overline{epi(f)}$. Logo, existe uma sequência $((u_n, \xi_n))$ de elementos de $\in epi(f)$ tal que

$$(u_n, \xi_n) \to (u, \xi),$$

segundo a métrica do $epi(f)$. Sendo assim,

$$d((u_n, \xi_n), (u, \xi)) \to 0.$$

Como $0 \leq d(u_n, u) \leq d((u_n, \xi_n), (u, \xi))$ e $0 \leq |\xi_n - \xi| \leq d((u_n, \xi_n), (u, \xi))$, segue que $(d(u_n, u))$ e $(|\xi_n - \xi|)$ convergem para 0. Portanto,

$$u_n \to u \ \ em \ \ X \quad e \quad \xi_n \to \xi \ \ em \ \ \mathbb{R}.$$

Como $(u_n, \xi_n) \in epi(f)$, temos

$$f(u_n) \leq \xi_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dessa maneira, podemos fazer $n \to \infty$ e ao observar que f é s.c.i., temos

$$f(u) \leq \liminf f(u_n) \leq \liminf \xi_n = \xi.$$

Portanto, $(u, \xi) \in epi(f)$. Dessa forma, $epi(f)$ é fechado.

Definição 1.5. Seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função *s.c.i.*. Definamos a função $\mathcal{G}_f : epi(f) \to \mathbb{R}$ onde

$$\mathcal{G}_f(u, \xi) = \xi.$$

Proposição 1.6. *A função $\mathcal{G}_f$ é uma função lipschitz.*

Demonstração. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_f(u,\xi) - \mathcal{G}_f(v,\mu)| &= |\xi - \mu| \\ &\leq 1 \cdot d((u,\xi),(v,\mu)). \end{aligned}$$

■

Observação: 1.7. Como a função $\mathcal{G}_f$ é Lipschitz de constante 1, segue, do Exemplo 2, que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) \leq 1$$

para todo $(u, \xi) \in epi(f)$.

A seguinte proposição mostrará uma relação entre $|d\mathcal{G}_f|(u,\xi)$ e $|df|(u)$ quando f é uma função contínua. Vejamos:

Proposição 1.8. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $u \in X$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Então*

a)

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = \begin{cases} \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}}, & se\ |df|(u) < \infty \\ 1, & se\ |df|(u) = +\infty \end{cases}$$

b) $|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) = 1$, *se* $f(u) < \xi$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \begin{cases} \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}}, & se\ |df|(u) < \infty \\ 1, & se\ |df|(u) = +\infty \end{cases} \tag{1.1}$$

Se $|df(u)| = 0$, então a desigualdade é verdadeira. Por outro lado, seja $0 < \sigma < |df|(u)$ e consideremos $H : B(u,\delta) \times [0,\delta] \to X$ uma aplicação contínua como na Definição (1.1). Considere $K : (B((u, f(u)), \delta) \cap epi(f)) \times [0, \delta] \to epi(f)$ dada por

$$K((v,\mu),t) = \left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right), \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} t \right).$$

Notemos que K está bem definida pois, ao aplicar a propriedade (b) de H presente na Definição (1.1), temos

$$\begin{aligned} f\left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)\right) &\leq f(v) - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t \\ &\leq \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t, \end{aligned}$$

visto que $(v,\mu) \in epi(f)$. Assim, $K((v,\mu),t) \in epi(f)$. Vejamos que K goza das propriedades (a) e (b) da Definição (1.1).

Propriedade (a):

Observemos que, ao aplicarmos a propriedade (a) de H, temos

$$\begin{aligned} d(K((v,\mu),t),(v,\mu)) &= \left(d\left(H\left(v,\frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right),v\right)^2+\left(\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t-\mu\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{t^2}{1+\sigma^2}+\frac{\sigma^2t^2}{1+\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}=t. \end{aligned}$$

Propriedade (b): Notemos que

$$\mathcal{G}_f\left(K((v,\mu),t)\right)=\mu-\frac{\sigma t}{\sqrt{1+\sigma^2}}=\mathcal{G}_f(v,\mu)-\frac{\sigma t}{\sqrt{1+\sigma^2}}.$$

Dessa forma, por definição de inclinação fraca, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}. \tag{1.2}$$

Consideremos uma sequência maximizante (σ_n) tal que

$$\sigma_n \to |df|(u).$$

Vejamos agora dois casos:

Caso 1: $|df|(u) < \infty$.

Assim, obtemos que

$$\sigma_n \to |df|(u).$$

Como a função $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

é contínua e, por (1.2), temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) \geq \frac{\sigma_n}{\sqrt{1+\sigma_n^2}}.$$

Fazendo $n \to \infty$, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) \geq \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+|df(u)^2}}. \tag{1.3}$$

Caso 2: $|df|(u) = \infty$

Dessa forma, $\sigma_n \to \infty$. Observemos agora que

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)=1.$$

Logo, aplicando σ_n em (1.2) e fazendo $n \to \infty$, segue

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq 1.$$

Provando, assim,que a Desigualdade (1.1) é verdadeira. Mostremos agora que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \leq \frac{|df|(u)}{\sqrt{1 + (|df|(u))^2}}.$$

Caso $|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = 0$, segue que a desigualdade é verdadeira. Caso contrário, podemos considerar $0 < \sigma < |d\mathcal{G}_f|(u, f(u))$ e uma aplicação contínua

$$K : B((u, f(u)), \delta) \times [0, \delta] \to epi(f)$$

com as propriedades presentes na Definição (1.1). Pela continuidade de f, existe $\delta' > 0$ tal que $\delta' \leq \delta\sqrt{1 - \delta^2}$ e

$$d(v, u)^2 + |f(v) - f(u)|^2 < \delta^2, \quad \forall v \in B(u, \delta').$$

Definamos $H : B(u, \delta') \times [0, \delta'] \to X$ onde

$$H(v, t) = K_1\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right),$$

sendo K_1 a primeira componente de K. Devido a escolha de $\delta' > 0$, note que H está bem definida. Ainda mais, note que H é contínua visto que K_1 também é contínua. Provemos agora que H goza das propriedades (a) e (b) da Definição 1.1:

Propriedade (a): Vejamos que

$$\begin{aligned} d\left(K\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), (v, f(v))\right)^2 &= d\left(K_1\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), v\right)^2 \\ &+ \left|K_2\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right) - f(v)\right|^2. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} d(H(v, t), v)^2 &= d\left(K_1\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), v\right)^2 \\ &= d\left(K\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), (v, f(v))\right)^2 - \left|K_2\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right) - f(v)\right|^2. \end{aligned}$$

Portanto, pela propriedade (a) de K, temos

$$d(H(v, t), v)^2 \leq \frac{t^2}{1 - \sigma^2} - \left|K_2\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right) - f(v)\right|^2. \tag{1.4}$$

Observemos agora que, pela propriedade (b) de K, temos

$$\mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\leq f(v)-\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t\Rightarrow$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t\leq f(v)-\mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right).$$

Como $\mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)=K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)$, temos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t\leq f(v)-K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right).$$

Logo, da Desigualdade (1.4), temos

$$d(H(v,t),v)^2\leq\frac{t^2}{1-\sigma^2}-\frac{\sigma^2t^2}{1-\sigma^2}=t^2.$$

Provando a propriedade (a) para H.

Propriedade (b): Observemos que

$$\begin{aligned}
f(H(v,t)) &= f\left(K_1\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\right)\\
&\leq K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\\
&= \mathcal{G}_f\left(K\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\right)\\
&= \mathcal{G}_f(v,f(v))-\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}t\\
&= f(v)-\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}t.
\end{aligned}$$

onde foram utilizadas as definições de epígrafo ($Im(K)\subset epi(f)$), a definição de $\mathcal{G}_f$ e a propriedade (b) de K, respectivamente. Portanto, por definição de $|df|(u)$, segue que

$$|df|(u)\geq\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Usando um argumento semelhante para concluir a veracidade da Inequação (1.3), segue que

$$|df|(u)\geq\frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}.$$

Daí, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))\leq\frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u)^2)}}.$$

quando $|df|(u)<+\infty$. Portanto, se $|df|(u)<\infty$, então

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))=\frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u)^2)}}.$$

Por fim, vejamos a demonstração da seguinte afirmação:
Afirmação: Se $f(u) < \xi$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu \geq f(v) + \delta$$

quando $(v, \mu) \in B((u, \xi), \delta)$.

De fato, suponha, por absurdo, que a afirmação não seja válida. Logo existe uma sequência $((v_n, \mu_n))$ tal que

$$d((v_n, \mu_n), (u, \xi)) < \frac{1}{n} \tag{1.5}$$

e

$$\mu_n < f(v_n) + \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

Da Desigualdade (1.5), segue que

$$\begin{aligned} v_n &\to u \; em \; X \quad e \\ \mu_n &\to \xi \; em \; \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Passando o limite na Desigualdade (1.6) e observando que f é contínua, segue que

$$\xi \leq f(u),$$

o que é um absurdo. Assim, existe $\delta > 0$ tal que $\mu \geq f(v) + \delta$ sempre quando

$$(v, \mu) \in B((u, \xi), \delta).$$

Concluindo, assim, a afirmação.

Agora, definamos $H : B((u, \xi), \delta) \times [0, \delta] \to epi(f)$ dada por

$$H((v, \mu), t) = (v, \mu - t).$$

Observemos que, H é contínua e está bem definida, pois

$$f(v) + t \leq f(v) + \delta \leq \mu \Rightarrow$$

$$f(v) \leq \mu - t \Rightarrow (v, \mu - t) \in epi(f). \tag{1.7}$$

Ainda mais,

$$d(H((v, \mu), t), (v, \mu)) = d((v, \mu - t), (v, \mu)) \leq t.$$

Concluindo que H goza da propriedade (a) da Definição (1.1). Ademais,

$$\mathcal{G}_f(H(v, \mu), t) = \mathcal{G}_f(v, \mu - t) = \mu - t = \mathcal{G}_f(v, \mu) - 1 \cdot t.$$

Mostrando que H goza da propriedade (b) da Definição (1.1). Portanto, se $(u,\xi) \in epi(f)$, então

$$\begin{aligned} |d\mathcal{G}_f|(u,\xi) &\geq 1 \Rightarrow \\ |d\mathcal{G}_f|(u,\xi) &= 1. \end{aligned}$$

Pois já tínhamos verificado, no Exemplo (2), que $|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) \leq 1$. ■

Observando a proposição anterior, podemos reescrever a inclinação fraca de f, $|df|(u)$, em termos da inclinação fraca de $\mathcal{G}_f$ observando os seguintes passos:

$$\begin{aligned} |d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) &= \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}} \\ (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 \cdot (1+(|df|(u))^2) &= (|df|(u))^2 \\ (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 + (|dG_f|(u,f(u)))^2 \cdot (|df|(u))^2 &= (|df|(u))^2 \\ (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 &= (|df|(u))^2 - (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 \cdot (|df|(u))^2 \\ (|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 &= (1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2) \cdot (|df|(u))^2 \\ \frac{(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}{(1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2)} &= (|df|(u))^2 \\ |df|(u) &= \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}. \end{aligned}$$

Assim, ao considerarmos f uma função contínua e tomarmos $u \in X$ de tal forma que $|df|(u) < \infty$, segue que temos a seguinte relação:

$$|df|(u) = \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}.$$

Dessa forma, podemos ver como a inclinação fraca de f está bem relacionada com a inclinação fraca de $\mathcal{G}_f$. Mas, vale ressalta que, só pelo fato de f ser uma função $s.c.i.$, obtemos que o conjunto $epi(f)$ é fechado (Observação 1.4) e a função $\mathcal{G}_f$ não é só contínua, mas Lipschitz.

Portanto, a proposição anterior nos permite definir, em um caminho consistente, a inclinação fraca também para funções $s.c.i.$ por meio da função auxiliar $\mathcal{G}_f$.

Definição 1.9. Seja X um espaço métrico e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Definamos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} D(f) &:= \{u \in X | f(u) < \infty\} \\ f^b &:= \{u \in X | f(u) \leq b\}. \end{aligned}$$

Observação: 1.10. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função semicontínua inferiormente e $b \in \mathbb{R}$, então $D(f)$ e f^b são conjuntos fechados.

Definição 1.11. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e considere $u \in D(f)$. Definimos:

$$|df|(u) = \begin{cases} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}, & se\ |d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) < 1 \\ +\infty, & se\ |d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) = 1 \end{cases}$$

Observemos agora que é possível definir a inclinação fraca não somente para funções contínuas, como na Definição (1.1), mas também para funções que são apenas semicontínuas inferiormente. Porém, a maneira que foi definida é muito diferente se comparada com a Definição Inicial (1.1).

A próxima proposição mostra um critério para obter uma estimativa por baixo para $|df|(u)$. A aplicação contínua presente nesse critério é muito similar com a aplicação presente na Definição inicial (Definição 1.1) de inclinação fraca:

Proposição 1.12. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e $u \in D(f)$. Suponha que existam $\delta > 0$, $b > f(u)$, $\delta > 0$ e uma aplicação contínua*

$$H : (B(u,\delta) \cap f^b) \times [0,\delta] \to X$$

tal que goze das propriedades:

a) $d(H(v,t),v) \leq t$,

b) $f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$.

Então, $|df|(u) \geq \sigma$.

Demonstração. O caso em que $|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) = 1$ é trivial pois teríamos $|df|(u) = \infty$ que é maior do que qualquer $\sigma > 0$. Sendo assim, consideremos o caso em que $|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) < 1$.

Seja $\delta' \in (0,\delta]$ tal que

$$\mu \leq b$$

para $(v,\mu) \in B((u,f(u)),\delta')$ e definamos

$$K : (B((u,f(u)),\delta') \cap epi(f)) \times [0,\delta'] \to epi(f)$$

onde

$$K((v,\mu),t) = \left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right), \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t \right).$$

Seguindo os mesmos passos presentes na demonstração da Proposição (1.8) acerca da aplicação K, obtemos que $K((v,\mu),t) \in epi(f)$ e que K goza das propriedades (a) e (b) presentes na Definição (1.1), ou seja,

$$\begin{aligned} d(K((v,\mu),t),(v,\mu)) &\leq t, \\ \mathcal{G}_f(K((v,\mu),t)) &= \mathcal{G}_f(v,\mu) - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t. \end{aligned}$$

Assim, observando ainda mais que K é contínua, segue que K é uma deformação como na Definição (1.1) e, assim, obtemos que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}.$$

Por manipulações algébricas, podemos reescrever a última desigualdade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\leq \frac{(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}{1+(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2} = (|df|(u))^2 \Rightarrow \\ \sigma &\leq |df|(u). \end{aligned}$$

■

A seguir, veremos algumas propriedades importantes sobre a inclinação fraca. A proposição a seguir nos diz que a função inclinação fraca é uma função *s.c.i.* com respeito a topologia do gráfico, vejamos:

Proposição 1.13. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e considere $u \in D(f)$. Se*

$$(u_k, f(u_k)) \to (u, f(u)) \text{ em } G(f),$$

então

$$|df|(u) \leq \liminf_k |df|(u_k).$$

Demonstração. Provemos, primeiramente, para o caso em que f é uma função contínua. Observemos que se $|df|(u) = 0$, então a afirmativa é verdadeira. Consideremos então o caso em que $|df(u)| > 0$. Sendo assim, sejam $\sigma \in (0, |df|(u))$ e $H : B(u,\delta) \times [0,\delta] \to X$ como na Definição (1.1).

Notemos que, como $u_k \to u$, segue que $u_k \in B(u, \frac{\delta}{2})$ para k suficientemente grande. Consideremos $H_1 = H|_{B(u_k,\frac{\delta}{2})\times[0,\frac{\delta}{2}]}$. Observemos que H_1 goza das propriedades (a) e (b) presentes na Definição (1.1). Dessa forma,

$$|df|(u_k) \geq \sigma. \tag{1.8}$$

Como σ foi tomado arbitrariamente segundo a Definição (1.1), temos

$$|df|(u_k) \geq |df|(u),$$

pois $|df|(u)$ é o supremo do conjunto de tais σ e, segundo a Desigualdade (1.8), $|df|(u_k)$ é uma conta superior desse conjunto, para k suficientemente grande. Dessa forma,

$$|df|(u) \leq \liminf_k |df|(u_k).$$

Provando assim que $|df|$ é uma função s.c.i. segundo a topologia do gráfico, quando f é contínua. Vamos ao caso geral. Como $\mathcal{G}_f$ é contínua, aplicando o caso anterior, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u) \leq \liminf_k |d\mathcal{G}_f|(u_k).$$

Observemos agora a função $f_1 : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

que é contínua. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u)}{\sqrt{1-|d\mathcal{G}_f|(u)}} &\leq \liminf_k \frac{|d\mathcal{G}_f|(u_k)}{\sqrt{1-|d\mathcal{G}_f|(u_k)}} \Rightarrow \\ |df|(u) &\leq \liminf_k |df|(u_k). \end{aligned}$$

■

Agora, veremos que, sob certa hipótese, a inclinação fraca de uma função s.c.i. não varia quando a função é perturbada por outra função Localmente Lipschitz.

Proposição 1.14. *Sejam $f_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função localmente Lipschitz e $f = f_0 + f_1$. Considere $u \in D(f_0)$ e assumamos que*

$$\lim_{r \to 0^+} \left(\sup \left\{ \frac{|f_1(v) - f_1(w)|}{d(v,w)} \ ; \ v, w \in B(u,r), v \neq w \right\} \right) = 0. \tag{1.9}$$

Então, para todo $\xi \geq f(u)$, temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) = |d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)).$$

Em particular,

$$|df|(u) = |df_0|(u).$$

Demonstração. Dado $\xi \geq f(u)$, iremos mostrar que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) \geq |d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)).$$

Se $|d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)) = 0$, o resultado é imediato. Considere então $\sigma \in (0, |d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)))$. Seja $\xi > 0$ e

$$H : B((u, \xi - f_1(w)), \delta) \times [0, \delta] \to epi(f_0)$$

como na Definição (1.1). Sem perda de generalidade, podemos supor f_1 Lipschitiz com constante ϵ em uma bola $B(u, 2\delta)$ graças à Hipótese (1.9). Consideremos agora $\delta' \in (0, \delta]$ tal que

$$(v, \mu - f_1(v)) \in B((u, \xi - f_1(u)), \delta)$$

para todo $(v, \mu) \in B((u, \xi), \delta)$.

Consideremos também $K : B((u, \xi), \delta') \times [0, \delta'] \to epi(f)$ dada por

$$K((v, \mu), t) = \left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right), H_2\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right) + f_1\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\right).$$

Observemos que K está bem definida pois

$$\begin{aligned} f\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right) &= f_0\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right) \\ &+ f_1\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

Como $Im(H) \subset epi(f_0)$, segue

$$f_0\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right) \leq H_2\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right).$$

Logo,

$$f\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right) \leq H_2\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right) + f_1\left(H_1\left((v, u - f_1(v)), \frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\right.$$

onde o lado direito é a segunda coordenada de $K((v, \mu), t)$. Portanto, $K((v, \mu), t)$ pertence ao epígrafo de f.

Observemos agora que, aplicando a desigualdade triangular, temos

$$d(K((v, \lambda + f_1(v)), 1 + \epsilon s), (v, \lambda + f_1(v))) = d(H((v, \lambda), s), (v, \lambda + f_1(v) - f_1(H_1((v, \lambda), s)))).$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} d(H((v, \lambda), s), (v, \lambda + f_1(v) - f_1(H_1((v, \lambda), s)))) &\leq d(H((v, \lambda), s), (v, \lambda)) + |f_1(H_1((v, \lambda), s)) - f_1(v)| \\ &\leq s + \epsilon \cdot d(H_1((v, \lambda), s), v) \leq s + \epsilon \cdot s = (1 + \epsilon)s. \end{aligned}$$

Ainda mais,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_f(K((v,\mu),t)) &= H_2\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)+f_1\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\\
&= \mathcal{G}_f\left(H\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)+f_1\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\\
&= \mu-f_1(v)-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+f_1\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)\\
&= \mathcal{G}_f(v,\mu)-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+f_1\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right)\right)-f_1(v)\\
&= \mathcal{G}_f(v,\mu)-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+\epsilon\cdot d\left(H_1\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right),v\right)\\
&\leq \mathcal{G}_f(v,\mu))-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+\epsilon\cdot d\left(H\left((v,\mu-f_1(v)),\frac{t}{1+\epsilon}\right),(v,\mu-f_1(v))\right)\\
&\leq \mathcal{G}_f(v,\mu)-\sigma\cdot\frac{t}{1+\epsilon}+\epsilon\cdot\frac{t}{1+\epsilon}\\
&= \mathcal{G}_f(v,\mu)-\left(\frac{\sigma}{1+\epsilon}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right)t.
\end{aligned}$$

onde foi utilizado o fato de que f_1 é localmente Lipschitz e a propriedade (a) de H. Consequentemente,

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi)\geq\frac{\sigma}{1+\epsilon}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

e, desde que $\epsilon>0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, fazendo $\epsilon\to 0$ temos

$$\begin{aligned}
|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) &\geq \sigma\Rightarrow\\
|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) &\geq |d\mathcal{G}_{f_0}|(u,\xi-f_1(u)).
\end{aligned}$$

A desigualdade contrária é obtida trocando f_0 com a função f e a função f_1 por $(-f_1)$.

■

1.2 Relações entre a inclinação fraca e outros conceitos de derivada

Durante essa seção, considere X um espaço métrico munido com a métrica d. Nesta seção, veremos algumas relações entre outros conceitos de derivada (inclinação forte, subdiferencial e gradiente generalizado de Clark) e a inclinação fraca. Essa seção, foi baseada no artigo de Degiovanni e Marzochhi (Vide [12]) e Canino e Degiovanni (Vide [7]). Para isso, vejamos algumas definições.

Um interessante conceito é o de inclinação forte. A proposta da inclinação forte é de determinar qual é a maior inclinação possível das retas tangentes de uma função em

um ponto u. Caso queira aprofundar o estudo nesse conceito, recomendamos o artigo de Giorgi, Marino e Tosques (Vide [14]). Vejamos a definição:

Definição 1.15. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e $u \in D(f)$. Definimos

$$|\nabla f|(u) = \begin{cases} \limsup \frac{f(u)-f(v)}{d(u,v)}, & se \text{ u não é mínimo local} \\ 0, & se \text{ u é um mínimo local} \end{cases}$$

O número real estendido $|\nabla f|(u)$ é chamado de inclinação forte de f em u.

Proposição 1.16. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i., então $|df|(u) \leq |\nabla f|(u)$ para todo $u \in X$.*

Demonstração. Provemos, primeiramente, para o caso em que f é contínua. Consideremos $u \in X$. Então, temos dois casos:
<u>**Caso 1:**</u> u não é mínimo local.

Neste caso, se $|df|(u) = 0$, então não há o quê provar. Dessa forma, consideremos $\sigma \in (0, |df|(u))$ e uma aplicação $H : U \times [0, \delta] \to \overline{\mathbb{R}}$ como na Definição (1.1). Assim, temos

a) $d(x, H(x,t)) \leq t$

b) $f(H(x,t)) \leq f(x) - \sigma t$

para todo $x \in U$ e $t \in [0, \delta]$. Observemos que, de (b), temos

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t}$$

e, de (a), segue que

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t} \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{d(x, H(x,t))} \leq \limsup \frac{f(u) - f(v)}{d(u,v)} = |\nabla f|(u).$$

<u>**Caso 2:**</u> u é um mínimo local.

Da Proposição (1.2), segue que $|df|(u) = 0$. Sendo assim, $|df|(u) \leq |\nabla f|(u)$. ■

Definição 1.17. Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ um aberto e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferiormente.Para todo $u \in D(f)$, denotamos por $\partial^- f(u)$ o conjunto dos vetores α em X' tal que

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0. \tag{1.10}$$

Os elementos de $\partial^- f(u)$ são chamados de subdiferencial de f em u.

Exemplo 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função módulo. Calculemos $\partial^- f(0)$. Observemos que se $\alpha \in \partial^- f(0)$, então

$$\begin{aligned} \liminf_{v \to 0} \frac{f(v) - f(0) - \langle \alpha, v - 0 \rangle}{|v - 0|} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \liminf_{v \to 0} \frac{|v| - \alpha \cdot v}{|v|} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \liminf_{v \to 0} \left(1 - \alpha \frac{v}{|v|}\right) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \alpha \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Portanto, $\partial^- f(0) = [-1, 1]$.

Definição 1.18. Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $\overline{x} \in D(f)$. Um elemento $\alpha \in X'$ é denominado de subgradiente de Fenchel de f em $\overline{x}$ quando

$$\langle \alpha, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x})$$

para todo $x \in X$. O conjunto formado por todos os subgradientes de Fenchel de f em x é denominado de subdiferencial de Fenchel de f em x e é denotado por $\partial f(x)$. Definimos também que $\partial f(\overline{x}) = \emptyset$ quando $f(\overline{x}) \notin \mathbb{R}$.

A seguinte proposição mostra a relação entre a inclinação forte, a inclinação fraca e a subdiferencial de f:

Proposição 1.19. *Sejam $A \subset X$ um conjunto aberto, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. e $u \in D(f)$. Então as seguintes sentenças são verdadeiras:*

a) *Se $g : A \to \mathbb{R}$ é Frèchet diferenciável em u, então*

$$\partial^-(f + g)(u) = \{\alpha + dg(u) | \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

b) *Se $\alpha \in \partial^- f$, então para todo $w \in X$*

$$\langle \alpha, w \rangle \leq \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(u + tw) - f(u)}{t};$$

c) *Se A é um conjunto convexo e f é uma função convexa, então $\partial^- f(u)$ equivale à subdiferencial de Fenchel;*

d) *Se $\alpha \in \partial^- f$, então $|\nabla f|(u) \leq ||\alpha||$;*

e) *$\partial^- f(u)$ é fechado forte e convexo em X'.*

Demonstração da afirmação (a):

Demonstração. De fato, seja $\beta \in \partial^-(f+g)(u)$, escrevamos $\beta = \beta - dg(u) + dg(u)$ e observemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{v\to u} \frac{(f+g)(v)-(f+g)(u)-\langle \beta, v-u\rangle}{||v-u||} &\geq 0 \Rightarrow \\ \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \beta - dg(u), v-u\rangle}{||v-u||} + \frac{g(v)-g(u)-\langle dg(u), v-u\rangle}{||v-u||} &\geq 0. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\lim_{v\to u} \frac{g(v)-g(u)-\langle dg(u), v-u\rangle}{||v-u||} = 0,$$

pois g é Frèchet diferenciável em u. Daí, segue que

$$\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \beta - dg(u), v-u\rangle}{||v-u||} \geq 0.$$

Dessa forma, $\beta - dg(u) \in \partial^- f(u)$. Sendo assim, $\partial^-(f+g)(u) \subset \{\alpha + dg(u) | \alpha \in \partial^- f(u)\}$. A inclusão contrária é imediata. Portanto,

$$\partial^-(f+g)(u) = \{\alpha + dg(u) | \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Demonstração da afirmação (b):

Definamos $v = u + tw$, assim por definição, temos

$$\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} = \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(u+tw)-f(u)-\langle \alpha, tw\rangle}{||tw||} \geq 0.$$

Observando agora que

$$\frac{\langle \alpha, tw\rangle}{||tw||} = \frac{\langle \alpha, w\rangle}{||w||},$$

pois $t \geq 0$ e α é linear, assim

$$\frac{\langle \alpha, w\rangle}{||w||} \leq \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(u+tw)-f(u)}{||tw||}.$$

Daí, segue que

$$\langle \alpha, w\rangle \leq \liminf_{t\to 0^+} ||w|| \cdot \frac{f(u+tw)-f(u)}{||tw||} = \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(u+tw)-f(u)}{t}.$$

Demonstração da afirmação (c):

Seja $\alpha \in \partial f(u)$ um subgradiente de Fenchel. Logo,

$$\langle \alpha, u-v\rangle \leq f(u) - f(v).$$

para todo $v \in A$. Dessa maneira, segue que

$$0 \leq f(u) - f(v) - \langle \alpha, u-v\rangle,$$

para todo $v \in A$. Dessa forma,

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Portanto, $\alpha \in \partial^- f(u)$. Dessa forma, $\partial f(u) \subset \partial^- f(u)$.

Provemos a inclusão contrária. Seja $\alpha \in \partial^- f(u)$. Logo,

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Sendo assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0$$

para todo $v \in B(u, \delta) \subset A$. Seja $w \in A$. Sendo A convexo, obtemos que o segmento $[u, w]$ está contido em A. Sendo assim, consideremos $v = tu + (1 - t)w$ onde $t > 0$ foi tomado de tal forma que $v \in B(u, \delta)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} &\geq 0 \Rightarrow \\ \langle \alpha, tu + (1 - t)w - u \rangle &\leq f(tu + (1 - t)w) - f(u). \end{aligned}$$

Como f é convexa, obtemos

$$\langle \alpha, (1-t)(w-u) \rangle \leq f(tu+(1-t)w) - f(u) \leq tf(u) + (1-t)f(w) - f(u) = (1-t)(f(w) - f(u)) \Rightarrow$$

$$\langle \alpha, w - u \rangle \leq f(w) - f(u).$$

para todo $w \in A$,. Dessa forma, $\alpha \in \partial f(u)$. Portanto, $\partial^- f(u) \subset \partial f(u)$. Sendo assim, $\partial^- f(u) = \partial f(u)$ concluindo a demonstração do item (c).

Demonstração da afirmação (d):

Seja $\alpha \in \partial^- f$.Observemos que

$$||\alpha|| = \limsup \frac{\langle \alpha, u - v \rangle}{||u - v||}$$

e

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Sendo assim,

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u)}{||v - u||} - \limsup_{v \to u} \frac{\langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Logo,

$$|\nabla f|(u) = \limsup_{v \to u} \frac{f(v) - f(u)}{||v - u||} \leq ||\alpha||.$$

Demonstração da afirmação (e): Provemos primeiramente que $\partial^- f(u)$ é fechado forte. Para isso, consideremos $\alpha \in \overline{\partial^- f(u)}$ e uma sequência (α_n) em $\partial^- f(u)$ tal que

$$\alpha_n \to \alpha$$

com a norma de X'. Observemos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} &= \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha_n, v-u\rangle}{||v-u||} - \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||}. \\
&\geq \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha_n, v-u\rangle}{||v-u||} - \limsup_{v\to u} \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha_n \to \alpha$ fortemente, segue que

$$\lim\sup_{n\to\infty} \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||} = 0.$$

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se

$$\left| \limsup_{v\to u} \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||} \right| < \epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} &\geq \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha_n, v-u\rangle}{||v-u||} - \limsup_{v\to u} \frac{\langle \alpha-\alpha_n, u-v\rangle}{||u-v||} \\
&\geq -\epsilon.
\end{aligned}$$

Recordando que $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, podemos afirmar que

$$\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} \geq 0.$$

Portanto, $\alpha \in \partial^- f(u)$. Logo, $\partial^- f(u)$ é fechado forte.

Vejamos agora que $\partial^- f(u)$ é convexo. Sejam $\alpha, \beta \in \partial^- f(u)$, provaremos que $[\alpha, \beta] \subset \partial^- f(u)$. Para isso, consideremos $w = t\alpha + (1-t)\beta \in [\alpha, \beta]$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle t\alpha+(1-t)\beta, v-u\rangle}{||v-u||} &= t \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \alpha, v-u\rangle}{||v-u||} \\
&+ (1-t) \liminf_{v\to u} \frac{f(v)-f(u)-\langle \beta, v-u\rangle}{||v-u||} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $w \in \partial^- f(u)$. Portanto, $[\alpha, \beta] \subset \partial^- f(u)$. Dessa forma, $\partial^- f(u)$ é um conjunto convexo. ■

Lema 1.1. *Seja X um espaço de Banach real e $\xi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. convexa com $\xi(0) = 0$. Se*

$$\xi(x) \geq -||x||$$

para todo $x \in X$, então existe $z \in X'$ tal que $||z|| \leq 1$ e

$$\xi(x) \geq < z, x >$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Definamos no espaço $X \times \mathbb{R}$ os seguintes conjuntos:

$$A = \{(x,t) \ : \ ||x|| < -t\} \quad \text{e} \quad B = \{(x,t) \ ; \ \xi(x) \leq t\}.$$

É imediato ver que A e B são convexos (em verdade, $B = epi(\xi)$) e A é aberto. Ainda mais, $A \cap B = \emptyset$ pois $\xi(x) \geq -||x||$. Portanto, pela 1ª forma Geométrica de Hahn-Banach, existe um hiperplano separando A e B, i.e., existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $w \in X'$ tal que

$$\begin{aligned} \langle w, x \rangle - \alpha t - \beta &\geq 0, \quad \forall (x,t) \in \overline{A}, \\ \langle w, x \rangle - \alpha t - \beta &\leq 0, \quad \forall (x,t) \in B. \end{aligned}$$

Desde que $(0,0) \in \overline{A} \cap B$, temos $\beta = 0$. Tomando $t = -||x||$ na primeira das desigualdades dadas acima, temos

$$\langle w, x \rangle \geq -\alpha ||x|| \Rightarrow \alpha \geq \frac{\langle w, -x \rangle}{|| - x||}.$$

para todo $x \in X$. Daí segue que

$$\alpha \geq \sup_{x \in X} \frac{\langle w, -x \rangle}{|| - x||} = ||w||$$

e, assim, temos $\alpha \geq 0$ e $||w|| \leq \alpha$. Note que se $\alpha = 0$, então $w = 0$ e, nesse caso, não há hiperplano, o que é um absurdo. Então, $\alpha > 0$. Agora, defina

$$z = \tfrac{w}{\alpha}$$

e considere $t = \xi(x)$ na segunda desigualdade dada acima. Então, $||z|| \leq 1$ e $\langle z, x \rangle \leq t = \xi(x)$. ■

O seguinte teorema mostra a boa compatibilidade que há entre os conceitos de derivada de uma pertubação de uma função s.c.i. por uma função suave.

Teorema 1.20. *Seja $A \subset X$ aberto e convexo com X sendo um espaço de Banach. Considere $f_0 : A \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função convexa e s.c.i., $f_1 : A \to \overline{\mathbb{R}}$ de classe $C^1(A)$ e $f = f_0 + f_1$. As seguintes sentenças são válidas*

a) $|df|(u) = |\nabla f|(u)$ *para todo* $u \in D(f)$.

b) $|df|(u) < +\infty$ *se, e somente se,* $\partial^- f(u) \neq \emptyset$. *para todo* $u \in D(f)$. *E, nesse caso,*

$$|df|(u) = \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Demonstração. Pelo item (e) da Proposição 1.19, segue que $\partial^- f_0(u)$ é fechado fraco estrela, pois é fechado forte e convexo. Desde que

$$\partial^- f(u) = \{\alpha + df_1(u); \alpha \in \partial^- f_0(u)\},$$

graças à propriedade (a) da Proposição 1.19, temos $\partial^- f(u)$ fechado fraco estrela também. Daí segue que, se $\partial^- f(u) \neq \emptyset$, então existe

$$\min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Pela Proposição 1.19, temos

$$\partial^- f(u) \neq \emptyset \Rightarrow |df|(u) \leq |\nabla f|(u) \leq \min\{||\alpha|| \mid \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Assumamos agora que $0 \notin \partial^- f(u)$ e consideremos $\sigma > 0$ tal que

$$\alpha \in \partial^- f(u) \Rightarrow ||\alpha|| > \sigma$$

pois $\partial^- f(u)$ é fechado fraco estrela.
<u>**Afirmação**</u>: Existe $w \in A$ tal que

$$f(w) < f(u) - \sigma||w - u||.$$

Para provar essa afirmação, utilizaremos a contra-positiva do Lema 1.1 para

$$\xi(x) = \frac{f(x+u) - f(u)}{\sigma}.$$

Como f é uma função s.c.i., obtemos que ξ também é s.c.i. .

Suponhamos, por absurdo, que dado $z \in X'$ com $||z|| \leq 1$ tal que

$$\xi(x) \geq \langle z, x \rangle$$

para todo $x \in X$. Observemos que, daí, obtemos que

$$\liminf_{x \to 0} \frac{f(x+u) - f(u) - \langle \sigma z, x \rangle}{||x||} \geq 0.$$

Portanto, $\sigma z \in \partial^- f(u)$. Ora, por definição de σ, concluímos que

$$||\sigma z|| > \sigma \Rightarrow ||z|| > 1.$$

O que é um absurdo, pois supomos que $||z|| \leq 1$. Logo, existe $y \in X$ tal que

$$\xi(y) < \langle z, y \rangle.$$

E, aplicando a contra-positiva do Lema 1.1, obtemos que segue que existe $w_1 \in A$ tal que

$$\xi(w_1) < -||w_1||.$$

Daí obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(w_1+u)-f(u)}{\sigma} &< -||w_1|| \\ \Rightarrow f(w_1+u)-f(u) &< -\sigma||w_1||. \end{aligned}$$

Fazendo $w = w_1 + u$, temos

$$f(w) - f(u) < -\sigma||w-u||.$$

Concluindo a nossa afirmação.

Como f é s.c.i., segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(w) < f(v) - \sigma||w-v||,$$

para todo $v \in B(u,\delta)$ e, a menos de redução do δ, podemos supor $w \notin B(u, 2\delta)$.

Definamos $H : B(u,\delta) \times [0,\delta] \to X$ por

$$H(v,t) = v + t\frac{w-v}{||w-v||}.$$

Note que, pelo fato de w não ser um elemento da bola $B(u,\delta)$, segue que H é contínua. Ainda mais, desde que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{t}{||w-v||} \leq 1 \Rightarrow f(H(v,t)) &\leq f(v) + \frac{t}{||w-v||}\left(f(w)-f(v)\right) \\ &\leq f(v) - \sigma t. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição (1.12) que permite uma estimativa por baixo para a inclinação fraca $|df|(u)$, segue que $|df|(u) \geq \sigma$. Dessa forma, concluímos que

- $\partial^- f(u) = \emptyset \Rightarrow |df|(u) = \infty$
- $\partial^- f(u) \neq \emptyset \Rightarrow |df| \geq \min\{||\alpha||; \alpha \in \partial^- f(u)\}$.

Logo, em todo caso, temos

$$|df|(u) \geq \min\{||\alpha|| \,; \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

E como pela Proposição (1.19), temos

$$|df|(u) \leq |\nabla f|(u) \leq \min\{||\alpha|| \,; \alpha \in \partial^- f(u)\},$$

segue que

$$|df|(u) = |\nabla f|(u) = \min\{||\alpha|| \;\; ; \;\; \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

■

Corolário 1.21. *Seja $A \subset X$ aberto e convexo, com X sendo um espaço de Banach. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável à Frechèt, então*

$$|df|(u) = ||f'(u)||$$

onde $f'(u)$ é a diferencial de f no ponto u.

Demonstração. De fato, basta considerar $f_0 = 0$ e $f_1 = f$. Assim, como f é diferenciável em u, segue que

$$\partial^- f(u) = \{f'(u)\} \neq \emptyset.$$

Portanto, da propriedade (b) do Teorema 1.20, temos $|df|(u) < +\infty$ e, assim,

$$|df|(u) = \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\} = \min\{||f'(u)||\} = ||f'(u)||.$$

■

Observemos que a relação entre a inclinação fraca e a subdiferencial pode ser contemplada no Exemplo (3). De fato, no Exemplo (4), vimos que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função módulo, devemos ter

$$\partial^- f(0) = [-1, 1].$$

Assim,

$$\min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\} = 0.$$

E vimos, no Exemplo (3), que $|df|(0) = 0$. Logo,

$$|df|(0) = \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Por fim, estabeleceremos a relação entre inclinação fraca e o conceito de subdiferencial de Clarke para funções localmente lipschitz.

Uma teoria dos pontos críticos para essa classe de funções está presente no artigo de Chang (Vide [9]). Vejamos a definição do grafiente generalizado de Clark:

Definição 1.22. Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ aberto, f uma função localmente lipschitz e $u \in A$. Definimos a derivada direcional generalizada por

$$f^\circ(u; w) = \limsup_{\substack{v \to u \\ t \to 0^+}} \frac{f(v + tw) - f(v)}{t},$$

e o gradiente generalizado por

$$\partial f(u) = \{\alpha \in X'; f^\circ(u; w) \geq \langle \alpha, w \rangle; \forall w \in X\}.$$

Na dissertação de Abrantes (Vide [23]) , há uma boa demonstração de que $\partial f(u) \neq \emptyset$ e compacto fraco estrela.

Teorema 1.23. *Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ aberto e $f : X \to \mathbb{R}$ localmente lipschitz. Então, para todo $u \in A$, temos*

$$|df|(u) \geq \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial f(u)\}.$$

Demonstração. Se $\min\{||\alpha||; \alpha \in \partial f(u)\} = 0$, então o fato é trivial. Por outro lado, considere

$$0 < \sigma < \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial f(u)\}.$$

No Capítulo 1 da Referência [23], mostra-se que $f^\circ(u, \cdot)$ é convexo, homogênea positiva e contínua.

Pelo Lema 1.1, utilizando a contra-positiva ao considerarmos $\xi(x) = \frac{1}{\sigma} f^\circ(u; x)$, segue que existe $w \in X$ tal que

$$f^\circ(u; w) < -\sigma ||w||.$$

Pela homogeneidade de $f^\circ(u; \cdot)$, podemos supor $||w|| = 1$. Considere $\delta > 0$ tal que $B(u, 2\delta) \subset A$ e

$$f(v + tw) \leq f(v) - \sigma t$$

sempre quando $v \in B(u, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Então, ao definirmos $H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to A$ por $H(v, t) = v + tw$, obtemos que

$$|df|(u) \geq \sigma.$$

Considere agora uma sequência minimizante (σ_n) tal que

$$0 < \sigma_n < \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial f(u)\}$$

com $\sigma_n \to \min\{||\alpha|| \ ; \ \alpha \in \partial f(u)\}$. Logo, fazendo $n \to \infty$, temos

$$|df|(u) \geq \sigma_n \Rightarrow |df|(u) \geq \min\{||\alpha||; \ \alpha \in \partial f(u)\}.$$

■

Dessa forma, vimos várias relações interessantes entre a inclinação fraca e os conceitos de derivada tais como a inclinação forte, a derivada clássica, a subdiferencial, a subdiferencial de Fenchel e o gradiente generalizado de Clarck.

Na próxima seção, veremos uma generalização do conceito de inclinação fraca que é a inclinação fraca equivariante. Nesse novo conceito, supomos que X está sob a ação do grupo um grupo G e que a aplicação H presente na Definição (1.1) é equivariante em relação a G. Tais conceitos são discutidos detalhadamente na próxima seção.

1.3 A inclinação fraca equivariante

1.3.1 Conceitos básicos sobre ação de grupo e grupo de Lie

O conceito de inclinação fraca pode ser generalizado afim de utilizar melhor as possíveis simetrias do domínio de uma função s.c.i.. Para isso, faz-se necessário o conhecimento de alguns conceitos básicos de ação de grupo e grupo de Lie. Essa seção foi baseada no livro Lie Groups de Procesi C. (Vide [21]).

Definição 1.24. Uma ação de um grupo G em um conjunto X é uma aplicação $\pi : G \times X \to X$, denotado por $gx := \pi(g, x)$, que satisfaz as seguintes condições

$$1x = x \quad e \quad h(kx) = (hk)x,$$

para todo $h, k \in G$ e $x \in X$. Quando um conjunto X está sendo agido por um grupo G, a menos de confusão da ação em questão, dizemos que X é um G conjunto.

Exemplo 5. Seja X um espaço métrico e $G_1 = \{e\}$ o grupo trivial. Observemos que, X é um G_1-grupo pois podemos definir a aplicação $\rho : H \times X \to X$ onde $\rho(e, x) = x$. Tal ação é denominada de **ação trivial.**

Exemplo 6. Considere um espaço vetorial normado X e $G = \mathbb{Z}_2$. Definamos $\pi : G \times X \to X$ onde

$$\pi(1, x) = x \;\; e \;\; \pi(-1, x) = -x$$

é uma ação de grupo em X.

Definição 1.25. Sejam G um grupo e $\cdot : G \times X \to X$ uma ação de grupo. Dizemos que o conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

é uma órbita de x.

Definição 1.26. Dado dois G-conjuntos X, Y, uma aplicação $G-$ equivariante, ou, mais simplesmente, um morfismo, é uma aplicação $f : X \to Y$ tal que

$$f(gx) = gf(x)$$

para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Exemplo 7. Considere X um $\mathbb{Z}_2$-conjunto como no Exemplo (6). Todas as funções ímpares de X em X são equivariantes. De fato, pois se $g : X \to X$ é uma função ímpar, então

$$\begin{aligned} f(1x) &= f(x) = 1f(x) \\ f(-1x) &= f(-x) = -f(x) = -1f(x). \end{aligned}$$

Definição 1.27. Seja X um G-Espaço Métrico. Então, definimos o conjunto dos elementos de E que são fixados na ação por:

$$Fix(G) = \{u \in E \mid g \cdot u = u \text{ para todo } g \in G\ \}.$$

Definição 1.28. Seja X um G-Espaço Métrico. Uma aplicação $G-$ invariante é uma aplicação $f : X \to Y$ tal que

$$f(gx) = f(x)$$

para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Exemplo 8. Considere X um $\mathbb{Z}_2$-conjunto como no Exemplo (6). Todas as funções pares de X em X são invariantes. De fato, pois se $g : X \to X$ é uma função par, então

$$\begin{aligned} f(1x) &= f(x) \\ f(-1x) &= f(-x) = f(x). \end{aligned}$$

Definição 1.29. Seja X um $G-$ grupo. Dizemos que $U \subset X$ é invariante quando $gx \in U$ para todo $g \in G$.

Exemplo 9. Seja X um $\mathbb{Z}_2$-conjunto como no Exemplo (6). Dado um subconjunto $U \subset X$, o conjunto $V = U \cup (-U)$ é invariante. Ou seja, os conjuntos simétricos com respeito a origem são conjuntos invariantes.

Definição 1.30. Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G com uma estrutura de grupo de tal modo que a aplicação

$$(x, y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$$

é diferenciável. Equivalentemente, as aplicações $p : G \times G \to G$ e $i : G \to G$ onde

$$p(x, y) = xy \text{ e } i(x) = x^{-1}$$

são diferenciáveis.

Exemplo 10. A variedade $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ inversíveis, munido da multiplicação de matrizes é um grupo de Lie. Para isso, devemos mostrar que as aplicações

$$\begin{aligned} f &: GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}) \text{ dado por } f(A, B) = A \cdot B \text{ e} \\ g &: GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}) \text{dado por } g(A) = A^{-1} \end{aligned}$$

são diferenciáveis. A diferenciabilidade de f é consequência da diferenciabilidade do produto em $\mathbb{R}$. Já a diferenciabilidade de g decorre da regra de Cramer da inversa de uma matriz.

Exemplo 11. O subgrupo ortogonal real $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ ; \ A \cdot A^t = I\}$ de $GL(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie. Para isso, mostremos primeiramente que $O(n)$ é uma subvariedade de $GL(n,\mathbb{R})$. Consideremos $s(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \ ; \ A = A^t\}$ o conjunto das matrizes reais simétricas de ordem n. Obtém-se assim que $\dim s(n,\mathbb{R}) = \frac{n}{2}(n+1)$. Definamos a aplicação $f : M(n,\mathbb{R}) \to s(n,\mathbb{R})$ onde

$$f(A) = A \cdot A^t.$$

Essa aplicação está bem definida pois, dado $A \in M(n,\mathbb{R})$, temos

$$(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t.$$

Logo, $A \cdot A^t \in s(n,\mathbb{R})$ acarretando assim que f está bem definida.

Provaremos que $O(n)$ é imagem inversa de um valor regular de f, (Vide [17] na página 58) visto que $O(n) = f^{-1}(I)$. Sendo assim, vejamos que:

<u>f **é diferenciável:**</u> Sejam $X, Y \in M(n,\mathbb{R})$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial X}(Y) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(X+rY) - f(X)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(X+rY)(X+rY)^t - XX^t}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{XX^t + rXY^t + rYX^t + r^2YY^t - XX^t}{r} \\
&= XY^t + YX^t.
\end{aligned}$$

<u>I **é valor regular:**</u> Sejam $X \in O(n)$ e $S \in s(n,\mathbb{R})$, tomando $Y = \frac{SX}{2} \in M(n,\mathbb{R})$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial X}(Y) = X\left(\frac{SX}{2}\right)^t + \frac{SX}{2}X^t = \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} = S,$$

ou seja, $\frac{\partial f}{\partial X}(Y)$ é diferenciável para todo $X \in f^{-1}(I) = O(n)$. Logo, I é valor regular de f e, assim, $O(n)$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞. Portanto, $O(n)$ é uma subvariedade $GL(n,\mathbb{R})$.

Por fim, basta considerar as operações multiplicação e inversão induzidas de $GL(n,\mathbb{R})$ em $O(n)$ para concluir que $O(n)$ é um grupo de Lie.

Exemplo 12. Segundo o Exemplo (11), o $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ é um grupo de Lie, visto que $\mathbb{Z}_2 \cong O(2)$. Esse caso é bem importante

Na seção subseção seguinte, é exposta e discutida a definição de inclinação fraca equivariante de uma função contínua e de uma função s.c.i. .

1.3.2 A inclinação fraca equivariante

O conceito de inclinação fraca equivariante de uma função s.c.i. f toma destaque quando o domínio de f possui algumas simetrias. Por exemplo, na Seção 2.3, é mostrada uma generalização da versão simétrica do passo da montanha a qual será de extrema importância na demonstração da infinidade de soluções da Equação de Schröndinger (2).

Nessa seção, consideremos X um espaço métrico onde G é um grupo de Lie G está agindo por meio de transformações isométricas (um G-espaço métrico) e seja d a métrica em X.

Definição 1.31. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e invariante e $u \in X$. Denotamos por $|d_G f|(u)$ o supremo dos σ em $[0, \infty)$ tais que exista uma vizinhança invariante U de u e uma aplicação contínua $H : U \times [0, \delta] \to X$ tal que
Propriedade a:

$$d(H(v,t), v) \leq t,$$

Propriedade b:

$$f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$$

e $H(\cdot, t)$ é equivariante. O número real estendido $|d_G f|(u)$ é denominado de inclinação fraca invariante de f em u.

Vale ressaltar que faz-se necessária a condição de G ser um grupo de Lie porque a diferenciabilidade das aplicações produto e inversão presentes em G torna mais prático o uso de argumentos analíticos. Por exemplo, durante a demonstração de uma versão do Teorema da Deformação (na Seção 2.2), a função contínua que dá a deformação desejada é construída por uma sequência de funções e, para esta ser equivariante, faz-se necessária a continuidade da aplicação produto do grupo de Lie.

Proposição 1.32. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e invariante. Então, $|d_G f| : X \to [0, \infty]$ é invariante e s.c.i.*

Demonstração. **1ª parte:** $|d_G f|$ é invariante.

Provaremos que, dado $g \in G$, temos:

$$|df|(g \cdot u) = |df|(u).$$

Consideremos $\sigma > 0$ como na Definição (1.31). Logo, existe uma vizinhança U de u e uma aplicação contínua $H : U \times [0, \delta] \to X$, onde $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} d(H(v,t),v) &\leq t \\ f(H(v,t)) &\leq f(v) - \sigma t; \\ H(g \cdot v, t) &= g \cdot H(v,t). \end{aligned}$$

para todo $g \in G, v \in U$ e $t \in [0, \delta]$.

Definamos agora $U_1 = g \cdot U \subset U$, visto que U é invariante, e $H_1 = H|_{U_1}$. Observemos que ainda temos

$$d(H_1(g \cdot v, t), g \cdot v) \leq t,$$

para todo $g \cdot v \in g \cdot U = U_1$. Ademais,

$$f(H(g \cdot v, t)) \leq f(g \cdot v) - \sigma t$$

para todo $g \cdot v \in g \cdot U$. E, por fim, H_1 é equivariante, pois H é. Portanto, a aplicação H_1 se encaixa com a aplicação presente na Definição (1.31). Logo,

$$|d_G f|(g \cdot u) \leq |d_G f|(u).$$

A desigualdade contrária é obtida aplicando a Definição (1.31) para $|df|(gu)$ e fazer o mesmo argumento utilizando g^{-1} em vez de g.

2ª parte: $|d_G f|$ é s.c.i.

O argumento é semelhante ao argumento utilizando na Proposição (1.13).

■

Proposição 1.33. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e invariante. Se G_1 é subgrupo de G, então $|d_G f|(u) \leq |d_{G_1}|f(u)$ para todo $u \in X$.*

Demonstração. Observe que se $|d_G f|(u) = 0$, não há o que provar. Consideremos então $0 < \sigma < |d_G f|(u)$ como na Definição 1.31. Assim, existe uma vizinhança invariante U de u e uma aplicação contínua $H : U \times [0, \delta] \to X$ tal que

Propriedade a:

$$d(H(v,t),v) \leq t,$$

Propriedade b:

$$f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$$

e $H(\cdot, t)$ é G-equivariante. Como G_1 é subgrupo de G, segue que $H(\cdot, t)$ e U são G_1-equivariante. Portanto, a aplicação H goza das propriedades da Definição 1.31 aplicada para G_1. Logo,

$$\sigma \leq |d_{G_1} f|(u).$$

Dessa forma, $|d_{G_1}f|(u)$ é uma cota superior de tais σ. Dessa forma, obtemos que

$$|d_G f|(u) \leq |d_{G_1}|f(u).$$

■

Em qualquer espaço métrico, podemos verificar que

$$|df|(u) = |d_{G_1}f|(u)$$

onde $G_1 = \{e\}$ e a ação em questão é a trivial (vide o Exemplo 5).

Para o caso de funções semicontínuas inferiormente e invariantes pela ação do grupo G, também podemos definir os conjuntos $D(f)$ e $epi(f)$ da mesma forma que foi feita na Definição 1.3 e, no Exemplo 13, é induzida uma ação de grupo no epigráfico.

Definição 1.34. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e invariante. Denominados de domínio efetivo de f o conjunto

$$D(f) = \{u \in X \; ; \; f(u) < \infty\}$$

e por epigráfico o conjunto

$$epi(f) = \{(u, \xi) \in X \times \mathbb{R} \; ; f(u) \leq \xi\}$$

onde o epígrafo é munido com a métrica

$$d((u, \xi), (v, \mu)) = (d(u, v)^2 + |\xi - \mu|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 13. Observe que se X é um G-espaço métrico, então o espaço $epi(f)$ tem uma estrutura natural de $G-$espaço métrico com a ação induzida $\cdot : G \times epi(f) \to epi(f)$ com

$$g \cdot (u, \xi) = (g \cdot u, \xi).$$

onde $g \cdot u$ é g agindo em u conforme a ação presente em X. Sendo assim, notemos que sendo f invariante, obtemos também $\mathcal{G}_f$ é invariante. De fato, pois

$$\mathcal{G}_f(g \cdot (u, \xi)) = \mathcal{G}_f((g \cdot u, \xi)) = \xi = \mathcal{G}_f(u, \xi).$$

Observemos que, conforme vimos na Proposição (1.8), a mesma propriedade permanece válida no contexto de inclinação fraca equivariante:

Proposição 1.35. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e equivariante, $u \in X$ e $\mathbb{R}$. Então,*

a)

$$|d_G\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = \begin{cases} \frac{|d_G f|(u)}{\sqrt{1+(|d_G f|(u))^2}}, & se\ |d_G f|(u) < \infty \\ 1, & se\ |d_G f|(u) = \infty, \end{cases}$$

b) $|d_G\mathcal{G}_f|(u, \xi) = 1$, *se* $f(u) < \xi$.

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração apresentada na Proposição (1.8). ■

Da mesma maneira que foi realizada na Seção (1.1), podemos também definir, de maneira consistente, a inclinação fraca para função s.c.i. e equivariantes da seguinte forma:

Definição 1.36. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. invariante e seja $u \in D(f)$. Definimos

$$|d_G f|(u) = \begin{cases} \frac{|d_G\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d_G\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}, & se\ |d_G\mathcal{G}_f|(u, f(u)) < 1 \\ +\infty, & se\ |d_G\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = 1. \end{cases}$$

Por meio da definição de inclinação fraca equivariante, podemos estender resultados que em um primeiro momento são feitos para funções contínuas equivariantes para funções que são apenas semicontínuas inferiormente.

No próximo capítulo, Seção 2.1, são apresentados conceitos da teoria dos pontos críticos mas para funcionais semicontínuos inferiormente. Além disso, na Seção 2.2, é provado um teorema da deformação para funcionais que são apenas contínuos. Por fim, na Seção 2.3, é provado uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente.

Capítulo 2

Teorema do Passo da Montanha simétrico para funcionais semicontínuos inferiormente

Neste capítulo, são abordados alguns conceitos básicos da teoria dos pontos críticos para funcionais não suaves assim como a demonstração da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente.

Esse capítulo foi baseado nos artigos de Canino e Degiovanni ([7]), de Marzocchi ([18]) e nos Capítulos 7, 8 e 9 do livro Rabinowitz ([22]).

2.1 Conceitos básicos

A ideia central da teoria dos pontos críticos não suaves é tentar reconstruir os conceitos e definições que há na teoria clássica de tal forma que inclua o novo conceito de inclinação apresentada no Capítulo 1.

Nesta seção, considere X G-espaço métrico onde G é um grupo de Lie e d é a métrica de X. Vejamos algumas definições:

Definição 2.1. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função $s.c.i.$ e invariante. Uma órbita (Definição 1.25) $\mathcal{O} \subset D(f)$ é dita crítica, se

$$|d_G f|(u) = 0$$

para todo $u \in \mathcal{O}$.

Definição 2.2. Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função *s.c.i.* e invariante e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que, f satisfaz a condição G-PS no nível c (mais simplesmente $G-(PS)_c$) se para toda sequência (u_n) em $D(f)$ com

$$|d_G f|(u_n) \to 0 \quad \text{e} \quad f(u_n) \to c$$

implica que (u_n) possui uma subsequência convergente em X.

Em um contexto não-equivariante, dizemos que f satisfaz a condição $(PS)_c$ se f satisfaz $G_1 - (PS)_c$ com $G_1 = \{e\}$.

Proposição 2.3. *Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função contínua e invariante e $c \in \mathbb{R}$. Se f satisfaz a condição $G-(PS)_c$, então $\mathcal{G}_f$ também satisfaz.*

Demonstração. De fato, seja uma (x_n, ξ_n) uma sequência $(PS)_c$ de $\mathcal{G}_f$. Sendo assim,

$$\mathcal{G}_f(x_n, \xi_n) = c \text{ e } |d\mathcal{G}_f|(x_n, \xi_n) \to 0$$

Observemos que $\mathcal{G}_f(x_n, \xi_n) = \xi_n$. Logo, $(x_n, \xi_n) = (x_n, c)$. Observando que, a função $g : \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ onde $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ é contínua, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u_n, c) \to 0 \Rightarrow |df|(u_n) = g(|d\mathcal{G}_f|(u_n, c)) \to 0,$$

graças a Proposição 1.8. Logo, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para f. Portanto, como f goza da propriedade $(PS)_c$, segue que existe uma subsequência (u_{n_k}) convergente. Dessa forma, a subsequência $((u_{n_k}, c))$ de $((u_n, c))$ é convergente. Portanto, $\mathcal{G}_f$ cumpre a condição $(PS)_c$ também. ■

No que segue, para todo $c \in \mathbb{R}$, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} K_c &:= \{u \in D(f) \; ; \; |d_G f|(u) = 0, f(u) = c\} \;\; e \\ f^c &:= \{u \in X \; ; \; f(u) \leq c\}. \end{aligned}$$

Na próxima seção, será abordado uma versão do Teorema da Deformação para funcionais contínuos por meio da teoria de inclinação fraca.

2.2 Teorema da Deformação

Durante esta seção, considere X um espaço métrico munido de uma ação isométrica de um grupo de Lie G compacto, de forma mais resumida, X é um $G-$Espaço Métrico. Esta Seção foi baseada no artigo de Canino e Degiovanni ([7]).

Neste Seção, veremos o quanto o conceito de inclinação fraca (Definição 1.1) será essencial no percurso da demonstração do seguinte Teorema da Deformação:

Teorema 2.4 (Teorema da Deformação Equivariante)**.** *Seja X um $G-$espaço métrico, f uma função contínua equivariante e $c \in \mathbb{R}$. Assuma que f satisfaz $G-(PS)_c$. Então dado $\overline{\epsilon} > 0$, U uma vizinhança invariante de K_c (Se $K_c = \emptyset$ temos $U = \emptyset$), e $\lambda > 0$, existe $\epsilon > 0$ e $\eta : X \times [0,1] \to X$ contínua com:*

a) $d(\eta(u,t), u) \leq \lambda t$;

b) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

c) $f(u) \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}) \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

d) $\eta(f^{c+\epsilon} \setminus U, 1) \subset f^{c-\epsilon}$;

e) $\eta(\cdot, t)$*é equivariante para todo* $t \in [0,1]$

Convidamos o leitor a recordar o clássico Teorema da Deformação da Teoria dos Pontos Críticos:

Teorema 2.5 (Teorema da Deformação)**.** *Seja X um espaço de Banach, $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Assuma que f satisfaz $(PS)_c$. Então para cada $\overline{\epsilon} > 0$, existe $\epsilon > 0$ e $\eta \in C(X \times [0,1], X)$ verificando:*

a) $\eta(u, 0) = u$, *para todo* $u \in X$;

b) $f(u) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon] \Rightarrow \eta(t, u) = u$

c) $\eta(f^{c+\epsilon}, 1) = f^{c-\epsilon}$;

d) $\eta(\cdot, t) : X \to X$ *é um homeomorfismo.*

Observe que o Teorema da Deformação Clássico é bem similar ao Teorema da Deformação Equivariante (2.6) o qual é bem menos exigente. De fato, pois permite construir uma deformação por meio de uma função apenas contínua e não necessariamente C^1. Porém, em contra partida, é exigida a equivariância do funcional f e a deformação proveniente do caso equivariante não possui propriedades tão fortes quanto às propriedades da deformação proveniente do caso clássico. Deveras, tal deformação não é, necessariamente, um homeomorfismo vejamos:

Exemplo 14. Sejam $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq |x|\} \cup (\{0\} \times (-\infty, 0])$ e $f : X \to \mathbb{R}$ com

$$f(x,y) = -y.$$

Observe que f não tem pontos críticos. Note que f verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, pois dada uma sequência (x_n, y_n) que cumpre a condição $(PS)_c$, segue que

$$f(x_n, y_n) = -y_n \to c.$$

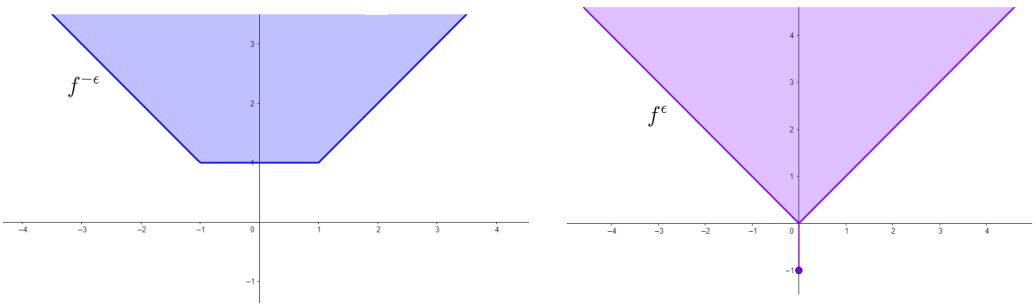
Logo, (y_n) é uma sequência que converge para $-c$ e é limitada por uma constante d. Por outro lado, como $(x_n, y_n) \in X$, segue que

$$|x_n| < y_n < d.$$

Assim, (x_n) também é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Daí, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente para um ponto x_0. Logo,

$$(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x_0, -c).$$

Concluindo assim que f cumpre a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Como f não possui pontos críticos, iremos considerar o conjunto U, do Teorema da Deformação Equivariante, igual a vazio. Provemos agora que f^ϵ não é homeomorfo a um subconjunto de $f^{-\epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$.



(a) Conjunto $f^{-\epsilon}$ (b) Conjunto f^{ϵ}

Figura 2.1: Representação dos conjuntos $f^{-\epsilon}$ e f^{ϵ} no plano $\mathbb{R}^2$.

Observe que, o conjunto f^ϵ não pode ser homeomorfo a nenhum subconjunto de $f^{-\epsilon}$ pois, ao retirar a origem, $f^\epsilon \setminus \{(0,0)\}$ não é conexo por caminhos enquanto os subconjuntos conexos de $f^{-\epsilon}$, ao retirar um ponto, permanecem conexo por caminhos. Portanto, a deformação η associada a f por meio do Teorema da deformação equivariante não é um homeomorfismo.

Mesmo assim, o Teorema da Deformação Equivariante é extremamente útil para provar uma Versão Simétrica do Teorema do Passo da Montanha e, consequentemente, provar a existência de uma infinidade de pontos críticos de um funcional s.c.i. (Teorema 2.7).

Vamos à demonstração do Teorema da Deformação Equivariante. Para isso, construiremos a deformação desejada passo a passo dando à deformação mais propriedades. Para isso, precisaremos do Lema de Milnor presente no artigo de Palais ([20] no Lema 2.4):

Lema 2.1 (Lema de Milnor). *Seja Y um espaço métrico. Então, qualquer cobertura aberta de Y admite um refinamento localmente finito $\{V_{j,\lambda} \mid j \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_j\}$ tal que*

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow V_{j,\lambda} \cap V_{j,\mu} = \emptyset.$$

Demonstração. Consideremos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura de Y. Suponhamos inicialmente que $\{U_\alpha\}$ é localmente finita. Seja B_i o conjunto formado por subconjuntos $\Lambda = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_i\}$ de A.

Seja $\{\alpha_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma partição da unidade com $supt\phi_\alpha \subset U_\alpha$ e para $\Lambda \in B_i$ considere

$$G_{i\Lambda} = \{x \in Y \mid \phi_\alpha(x) > 0 \ se \ \alpha \in \Lambda \ e \ \phi_\gamma(x) < \phi_\alpha(x) \ se \ \alpha \in \Lambda \ e \ \gamma \notin \Lambda\}.$$

Para cada $x \in X$, somente um número finito de ϕ_α são não nulos, logo $G_{i\Lambda}$ é aberto. Observemos que

$$\Lambda \neq \Lambda' \Rightarrow G_{i\Lambda} \cap G_{i\Lambda'} \neq \emptyset.$$

Desde que $G_{i\Lambda} \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, segue que $\{G_{i\Lambda}\}$ refina $\{U_\alpha\}$. Agora, dado $x_0 \in Y$, consideremos os índices $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}$ tal que $\phi_{\alpha_{i_j}}(x_0) > 0$. Determinemos

$$\Lambda = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}\}.$$

Logo, $x_0 \in G_{(m-1)\Lambda}$ e, assim, $\{G_{i\Lambda}\}$ cobre Y. Por fim, seja O uma vizinhança de x_0 tal que $\{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap \theta \neq \emptyset\}$ é um conjunto A' finito.

Então $G_{i\Lambda} = \emptyset$ a menos de que $\Lambda \subset A'$ e isso só pode ocorrer uma quantidade finita de vezes, logo $\{G_{i\Lambda}\}$ é localmente finito. ■

Como desejamos construir uma deformação que é uma deformação que é equivariante, precisaremos associar uma cobertura conveniente à um refinamento que é equivariante e, ainda mais, às funções associadas à partição da unidade também sejam equivariantes. Vejamos o seguinte lema:

Lema 2.2 (Cobertura equivariante). *Seja $\{U_{j,\lambda}\}$ uma cobertura aberta localmente finita de um subconjunto K de um $G-$espaço métrico X, onde G é finito. Então, existe um refinamento $\{V_{j,\lambda}\}$ de $\{U_{j,\lambda}\}$ tal que*

a) *$\{V_{j,\lambda}\}$ é equivariante, i.e.,*

$$g \cdot V_{j,\lambda} = V_{j,\lambda}; \quad \forall g \in G$$

b) *Existe uma partição da unidade subordinada a $\{V_{j,\lambda}\}$ que é equivariante.*

Demonstração. Tal demonstração foi baseada na Seção 6 do Capítulo 3 do livro Introduction to compact transformation groups ([4]).

Observemos que, se $U = \{U_{j,\lambda}\}$ é uma cobertura aberta de K, então

$$g \cdot U = \{gU_{j,\lambda} \mid U_{j,\lambda} \in U\}$$

também é. De fato, gU é aberto pois dado $g \cdot x_0 \in gU$, segue que $x_0 \in U$ e, assim, existe $\delta_0 > 0$ tal que $B(x_0, \delta_0) \subset U$ e, assim, $g \cdot B(x_0, \delta_0) \subset gU$. Como G é um grupo de Lie compacto cuja ação em X é isométrica, segue que $g \cdot B(x_0, \delta_0) = B(g \cdot x_0, \delta_0)$ provando que $g \cdot x_0 \in int(gU)$. Sendo assim, gU é aberto.

Recordando que a interseção finita dos abertos da cobertura, ainda é uma cobertura, segue que

$$\bigcap_{g \in G} gU := \{V_{j,\lambda}\}$$

onde tal interseção pode ser interpretada como o conjunto formado por todas as interseções entre os abertos de tais coberturas. Assim, $\{V_{j,\lambda}\}$ é uma cobertura invariante e aberta de K.

É imediato verificar que $\{V_{j,\lambda}\}$ será localmente finita caso $\{U_{j,\lambda}\}$ seja localmente finita.

Consideremos agora uma partição da unidade $\{\phi_{j\lambda}\}$ subordinada a cobertura $\{V_{j,\lambda}\}$. Definamos

$$\phi'_{j,\lambda} = \frac{1}{|G|} \sum_g \phi_{g \cdot V_{j,\lambda}}(g \cdot x)$$

Então,

$$\sum_{V_{j,\lambda}} \phi'_{j,\lambda}(x) = \frac{1}{|G|} \sum_g \sum_{V_{j,\lambda}} \phi_{g \cdot V_{j,\lambda}}(g \cdot x) = \frac{1}{|G|} \sum_g 1 = 1,$$

pois $\{\phi_{j\lambda}\}$ é uma partição da unidade. Ainda mais,

$$\begin{aligned} \phi'_{j,\lambda}(h \cdot x) = \frac{1}{|G|} \sum_g \phi_{gV_{j,\lambda}}(gh \cdot x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g'} \phi_{g'V_{i,\lambda}}(g' \cdot x) \\ &= \phi'_{j,\lambda}(x). \end{aligned}$$

a segunda igualdade advém da bijetividade da aplicação $\varphi_h : G \to G$ onde $\varphi_h(g) = gh$. Assim $\{\phi'_{j\lambda}\}$ é uma partição da unidade equivariante subordinada a cobertura $\{V_{j,\lambda}\}$ onde $\{V_{j,\lambda}\}$ é uma cobertura equivariante. ■

Agora, vejamos o primeiro passo para a construção da deformação do Teorema da Deformação Equivariante:

Lema 2.3. *Seja $\sigma : X \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que*

$$|d_G f|(u) \neq 0 \Rightarrow |d_G f|(u) > \sigma(u).$$

Então existem duas aplicações contínuas $\eta : X \times \mathbb{R}^+ \to X$ e $\tau : X \to \mathbb{R}^+$ tal que para todo $u \in X$ e $t \in \mathbb{R}^+$, temos

A) $d(\eta(u,t), u) \leq t$;

B) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

C) $t \leq \tau(u) \Rightarrow f(\eta(u,t)) \leq f(u) - \sigma(u)t$;

D) $|d_G f|(u) \neq 0 \Rightarrow \tau(u) > 0$

E) $\eta(\cdot, t)$ *é equivariante para todo* $t \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Sendo $|d_G f|$ s.c.i., segue que para cada u com $|d_G f|(u) \neq 0$, podemos determinar um $\delta_u > 0$ tal que

$$B(u, \delta_u) \subset \{v \in X \mid |df|(v) \neq 0\}.$$

Daí, temos

$$\sup_{v \in B(u,\delta_u)} \sigma(v) < |df|(u).$$

Diminuindo δ_u, se necessário, também podemos encontrar, por meio da Definição 1.1 de inclinação fraca, uma aplicação contínua

$$H_u : B(u, \delta_u) \times [0, \delta_u] \to X$$

tal que

a) $d(H_u(v,t); v) \leq t$;

b) $f(H_u(v,t)) \leq f(v) - \left(\sup_{v \in B(u,\delta_u)} \sigma(v)\right) \cdot t$.

c) $H_u(\cdot, t)$ é equivariante.

Segundo o Lema de Milnor, a cobertura $\{B\left(u, \frac{\delta_u}{2}\right) \mid |df|(u) \neq 0\}$ de $V := \{u \in X \mid |df|(u) \neq 0\}$ admite um refinamento localmente finito, $\beta = \{V_{j,\lambda} \mid j \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_j\}$.

Graças ao Lema (2.2), podemos supor que $\{V_{k,\lambda} \mid j \in \mathbb{N}; \lambda \in \Lambda_j\}$ é equivariante. Consideremos também a partição da unidade equivariante $\{\phi_{j,\lambda} \mid j \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_j\}$ subordinada à $\{V_{j,\lambda}\}$. Desde que o fecho $\overline{V}_{j,\lambda}$ em X está contido em W, podemos estender $\phi_{j,\lambda}$ para X assumindo 0 para valores foram de W.

Para simplificar as notações, definamos $\delta_{j,\lambda} = \delta_{u_{j,\lambda}}$ e $H_{j,\lambda} = H_{u_{j,\lambda}}$. Para todo (j, λ), considere $V_{j,\lambda} \subset B_{\delta_{j,\lambda}}$.. Observemos que a função $\overline{\tau}$ dada por

$$\overline{\tau}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V}_{j,\lambda}\}, & se\ |d_G f|(u) \neq 0 \\ 0, & se\ |d_G f|(u) = 0. \end{cases}$$

é semicontínua inferiormente. De fato, seja $u_n \to u$. Observe que se $|df|(u) = 0$, então

$$0 \leq |d_G f|(u_n) \Rightarrow |d_G f|(u) \leq |d_G f|(u_n) \Rightarrow$$

$$|d_G f|(u) \leq \liminf |d_G f|(u_n).$$

Se $|d_G f|(u) \neq 0$, então se $u \in \overline{V_{j,\lambda}}$, segue que $u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}$ para n suficientemente grande. Como há apenas uma quantidade finita de vizinhanças $\overline{V_{j,\lambda}}$ que contém u, segue que

$$\{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V_{j,\lambda}}\} \subset \{\delta_{j,\lambda} \mid u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}\}$$

para n suficientemente grande. Logo,

$$\frac{1}{4}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V_{j,\lambda}}\} \leq \frac{1}{4}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}\}.$$

Como $|df|$ é s.c.i., segue que, $|df|(u_n) \neq 0$ para n suficientemente grande. Portanto,

$$\overline{\tau}(u) \leq \overline{\tau}(u_n) \Rightarrow$$

$$\overline{\tau}(u) \leq \liminf \overline{\tau}(u_n).$$

Dessa forma, $\overline{\tau}(u)$ é s.c.i.. Definamos agora a aplicação $\tau : X \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\tau(u) = \inf\{d(u,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\}.$$

Note que τ é invariante por G. De fato, observemos que

$$\tau(g \cdot u) = \inf\{d(gu,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\} = \inf\{d(gu,gv) + \overline{\tau}(gv) \mid v \in X\}$$

pois a aplicação $\psi_g : X \to X$ onde $\psi_g(x) = g \cdot x$ é sobrejetora visto que, dado $y \in X$, temos

$$\psi_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot y) = y.$$

Recordando que a ação em questão é isométrica, segue que $d(gu,gv) = d(u,v)$, e como a família $\{\overline{V_{j,\lambda}}\}$ é equivariante, temos $\overline{\tau}(gx) = \overline{\tau}(x)$. Sendo assim,

$$\tau(g \cdot u) = \inf\{d(gu,gv) + \overline{\tau}(gv) \mid v \in X\} = \inf\{d(u,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\} = \tau(u).$$

Portanto, τ é uma função equivariante.

Vejamos agora que τ é uma função contínua. Para isso, considere $u_n \to u$ em X. Notemos que

$$\tau(u_n) = \inf\{d(u_n,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\} \leq d(u_n,v) + \overline{\tau}(v)$$

para todo $v \in X$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \limsup \tau(u_n) &\leq \limsup(d(u_n,v) + \overline{\tau}(v)) \\ \Rightarrow \limsup \tau(u_n) &\leq d(u,v) + \overline{\tau}(v);\ \forall v \in X \\ \Rightarrow \limsup \tau(u_n) &\leq \tau(u). \end{aligned}$$

Por outro lado, notemos que se $|d_G f|(u)$ é positivo, consideremos a quantidade finita de vizinhanças $V_{j,\lambda}$ tal que $|d_G f|(v) \neq 0$ para todo $v \in V_{j,\lambda}$. Assim,

$$\overline{\tau}(u_n) \neq 0; \;\; \forall u_n \in V_{j,\lambda}$$

com n suficientemente grande. Ademais, como existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \in V_{j,\lambda}$ para toda vizinhança em questão que contém u, segue que

$$\begin{aligned} \{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V_{j,\lambda}}\} &\subset \{\delta_{j,\lambda} \mid u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}\} \\ \Rightarrow \min\{\delta_{j,\lambda} \mid u_n \in \overline{V_{j,\lambda}}\} &\leq \min\{\delta_{j,\lambda} \mid u \in \overline{V_{j,\lambda}}\} \\ \Rightarrow \overline{\tau}(u_n) &\leq \overline{\tau}(u) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\limsup \overline{\tau}(u_n) \leq \overline{\tau}(u).$$

Como $\overline{\tau}$ é s.c.i. e $u_n \to u$, segue que

$$\overline{\tau}(u) \leq \liminf \overline{\tau}(u_n),$$

Sendo assim, $\overline{\tau}(u_n) \to \overline{\tau}(u)$. Observemos agora que,

$$|d(u_n, v) + \overline{\tau}(u_n) - d(u, v) - \overline{\tau}(u)| \leq d(u_n, u) + |\overline{\tau}(u_n) - \overline{\tau}(u)|,$$

assim, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |d(u_n, v) + \overline{\tau}(u_n) - d(u, v) - \overline{\tau}(u)| < \epsilon,$$

para todo $v \in X$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(u, v) + \overline{\tau}(v) &\leq d(u_n, v) + \overline{\tau}(u_n) + \epsilon \Rightarrow \\ \tau(u) &\leq d(u_n, v) + \overline{\tau}(u_n) + \epsilon \Rightarrow \\ \tau(u) &\leq \tau(u_n) + \epsilon \Rightarrow \\ \tau(u) &\leq \liminf \tau(u_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Sendo assim,

$$\tau(u) \leq \liminf \tau(u_n).$$

Portanto,

$$\limsup \tau(u_n) \leq \tau(u) \leq \liminf \tau(u_n) \Rightarrow \tau(u_n) \to \tau(u)$$

quando $|d_G f|(u) \neq 0$.

Vejamos agora o caso em que $|df|(u) = 0$. Neste caso, segue que

$$0 = \tau(u) \leq \tau(u_n) \Rightarrow \liminf \tau(u_n) \Rightarrow$$

$$\limsup \tau(u_n) \leq \tau(u) \leq \liminf \tau(u_n) \Rightarrow \tau(u_n) \to \tau(u).$$

Portanto, τ é uma função contínua.

Vejamos agora algumas propriedades da função τ. Por definição, temos

$$|d_G f|(v) = 0 \Rightarrow \tau(v) = 0$$

$$|d_G f|(v) \neq 0 \Rightarrow 0 < \tau(v) \leq \frac{1}{4}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid v \in \overline{V}_{j,\lambda}\} < \frac{1}{2}\min\{\delta_{j,\lambda} \mid v \in \overline{V_{j,\lambda}}\}$$

Queremos agora definir uma sequência de aplicações contínuas:

$$\eta_h : \{(v,t) \in X \times [0,\infty] \mid t \leq \tau(v)\} \to X$$

tal que

$A_1)$ $d(\eta_h(v,t),v) \leq \left(\sum_{j=1}^{h}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}\phi_{j,\lambda}(v)\right)t,$

$B_1)$ $f(\eta_h(v,t)) \leq f(v) - \sigma(v)\left(\sum_{j=1}^{h}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}\phi_{j,\lambda}(v)\right)t$

$C_1)$ $\eta_h(\cdot,t)$ é equivariante.

Primeiramente, definamos

$$\overline{\eta_1}(v,t) = \begin{cases} H_{1,\lambda}(v,\phi_{1,\lambda}(v)t), & se\ v \in \overline{V_{1,\lambda}} \\ v, & se\ v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}. \end{cases}$$

Observemos que, η_1 goza das propriedades $(A_1), (B_1)$ e (C_1), pois:

Propriedade (A_1):

$$v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda} \Rightarrow d(\eta_1(v,t),v) = d(v,v) = 0 \leq \phi_{1,\lambda}(v)t.$$

$$v \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda} \Rightarrow d(\eta_1(v,t),v) = d(H_{1,\lambda}(v,\phi_{1,\lambda}(v)t),v) \leq \phi_{1,\lambda}(v)t.$$

Propriedade (B_1): Se $v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}$, então

$$f(\eta_1(v,t)) = f(v) \leq f(v) - \sigma(v)\phi_1(v)t,$$

pois $\phi_1(v) = 0$, visto que $v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}$ e ϕ_1 é uma das funções referente a partição da unidade que, fora do suporte, se anula.

Se $v \in \overline{V_{h,\lambda}}$, então, pela propriedade (b) de $H_{1,\lambda}$, temos

$$\begin{aligned} f(\eta_1(v,t)) &= f(H_{1,\lambda}(v,\phi_{1,\lambda}(v)t)) \\ &\leq f(v) - \left(\sup_{v\in B(u,\delta_u)} \sigma(v)\right)\phi_1(v)t \\ &\leq f(v) - \sigma(v)\phi(v)t. \end{aligned}$$

Propriedade (C_1): Para provar que $\eta_1(\cdot,t)$ é equivariante, vejamos primeiramente que

$\overline{V_{1,\lambda}}$, com $\lambda \in \Lambda_1$, é equivariante $\Rightarrow \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ é equivariante.

De fato, suponha por absurdo que $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ não seja equivariante. Então, existe $v_0 \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ e $g \in G$ tal que $g \cdot v \notin \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$. Ou seja, $g \cdot v \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)$.

Logo, $gv \in V_{1,\lambda}$ pra algum $\lambda \in \Lambda_1$. Como $V_{1,\lambda}$ é equivariante, segue que $v = g^{-1} \cdot (g \cdot v) \in V_{1,\lambda} \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)$, um absurdo. Sendo assim, $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ é equivariante. Concluindo o que desejávamos.

Assim, sendo $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$ equivariante, segue que se $v \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$, então $gv \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda}\right)^c$. E, portanto,

$$\eta_1(gv, t) = gv = g\eta_1(v, t).$$

Por outro lado, se $v \in \overline{V_{1,\lambda}}$, segue que $gv \in \overline{V_{1,\lambda}}$ e, utilizando a equivariância de $\phi_{1,\lambda}$ juntamente com a definição da ação de grupo no epigráfico presente no Exemplo 13, segue que

$$\begin{aligned} \eta_1(gv, t) &= H_{1,\lambda}(gv, \phi_{1,\lambda}(gv)t) \\ &= gH_{1,\lambda}(gv, \phi_{1,\lambda}(v)t) \\ &= g\,\eta_1(v, t). \end{aligned}$$

Agora, assumamos, indutivamente, que η_{n-1} goze das propriedades $(A_1), (B_1)$ e (C_1). Para todo $v \in \overline{V_{n,\lambda}}$ e $t \in [0, \tau(v))$, temos

$$d(\eta_{n-1}(v, t), v) \leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \phi_{j,\lambda}(v)\right) t \leq \tau(v) < \frac{1}{2}\delta_{n,\lambda}$$

consequentemente, $\eta(v, t) \in B(u_{n,\lambda}, \delta_n, \lambda)$. Dessa forma, a aplicação

$$\eta_n(v, t) = \begin{cases} H_{n,\lambda}(\eta_{n-1}(v, t), \phi_{n,\lambda}(v)t), & se\ v \in \overline{V_{n,\lambda}} \\ \eta_{n-1}(v, t), & se\ v \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} V_{1,\lambda} \end{cases}$$

está bem definida e goza das propriedades $(A_1), (B_1)$ e (C_1), cuja demonstração é análoga ao caso $n = 1$.

Desde que a família $\{V_{j,\lambda}\}$ é localmente finita, segue que, para todo u com $|d_G f|(u) \neq 0$, existe uma vizinhança U de u e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\eta_n(v, t) = \eta_{n_0}(v, t)$$

para todo $v \in U$, $t \in [0, \delta(v))$ e $n \geq n_0$. Logo, a aplicação $\eta : X \times [0, \infty] \to X$ dada por

$$\eta(u, t) = \lim_n \eta_n(u, \min\{t, \tau(u)\})$$

é contínua nos pontos (u,t) com $|df|(u) \neq 0$. Por (A_1) e (B_1), temos

$$\begin{aligned} d(\eta(u,t),u) &= \lim_n d(\eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\}),u) \\ &\leq \lim_n \min\{t,\tau(u)\} = \min\{t,\tau(u)\} \leq t, \end{aligned}$$

mostrando que a propriedade (A) do Lema 2.3 é válida para η. Observemos também que η goza da propriedade (B) do Lema 2.3, pois

$$\begin{aligned} f(\eta(u,t),u) &= f(\lim_n \eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\})) \\ &= \lim_n f(\eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\})) \\ &\leq \lim_n f(u) = f(u). \end{aligned}$$

Ainda mais, para verificar que η goza da propriedade (C), basta observar que, ao aplicarmos a propriedade (B_1) em η_n, temos

$$\begin{aligned} t \leq \tau(u) \Rightarrow f(\eta(u,t)) &\leq f(\lim_n \eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\})) \\ &= \lim_n f(\eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\})) \\ &\leq \lim_n \left(f(u) - \sigma(u) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \phi_{j,\lambda}(v) \right) \min\{t,\tau(u)\} \right) \\ &= f(u) - \sigma(u)\min\{t,\tau(u)\} \\ &\leq f(u) - \sigma(u)t, \end{aligned}$$

daí obtemos que η é contínua nos pontos (u,t) com $|df|(u) = 0$. Para verificarmos que τ goza da propriedade (D) do Lema, basta provarmos a contrapositiva

$$\tau(u) = 0 \Rightarrow |d_G f| = 0.$$

De fato, pois se $\tau(u) = 0$, então

$$\inf\{d(u,v) + \overline{\tau}(v) \mid v \in X\} = 0.$$

Portanto,

$$d(u,v) = 0 \to u = v$$

e

$$\overline{\tau}(v) = 0 \Rightarrow \overline{\tau}(u) = 0$$

igualdade essa que só ocorre quando $|d_G f|(u) = 0$. Por fim, vejamos que $\eta(\cdot,t)$ é equivariante (propriedade (E)), pois

$$\begin{aligned} \eta(gu,t) &= \lim_n \eta_n(gu,\min\{t,\tau(gu)\}) \\ &= \lim_n g\eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\}) \\ &= g\lim_n \eta_n(u,\min\{t,\tau(u)\}) \\ &= g\eta(u,t), \end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Observe que, foi utilizado o fato de que τ é equivariante e que a ação de grupo é contínua o que ocorre porque a ação é isométrica e realizada por um grupo de Lie compacto. ■

Lema 2.4. *Sejam X um G-espaço métrico completo, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $C \subset X$ fechado e $\delta, \sigma > 0$ tal que*

$$d(u, C) \leq \delta \Rightarrow |d_G f|(u) > \sigma.$$

Então, existe uma aplicação contínua $\eta : X \times [0, \delta] \to X$ tal que

a) $d(\eta(u,t), u) \leq t$;

b) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

c) $d(u, C) \geq \delta \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

d) $u \in C \Rightarrow f(\eta(u,t)) \leq f(u) - \sigma t$;

e) $\eta(\cdot, t)$ *é equivariante para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração. A função $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ onde

$$\varphi(u) = \begin{cases} \sigma, & se\ d(u,C) \leq \delta \\ -\infty, & se\ d(u,C) > \delta \end{cases}$$

é semicontínua superiormente e $|d_G f|$ é semicontínua inferiormente com

$$\phi(u) < |d_G f|(u),$$

para todo $u \in X$. Assim, existe uma aplicação contínua $\hat{\sigma} : X \to [0, \infty)$ tal que

$$\phi(u) < \hat{\sigma}(u) < |d_G f|(u),$$

para todo $u \in X$. Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} d(u,C) \leq \delta \quad &\Rightarrow \quad \hat{\sigma}(u) = \sigma \\ \hat{\sigma}(u) \quad &< \quad |d_G f|(u). \end{aligned}$$

Dessa forma, a função $\overline{\sigma} = \min\{\hat{\sigma}^+, \sigma\}$ é contínua e satisfaz

$$\begin{aligned} d(u,C) \leq \delta \quad &\Rightarrow \quad \overline{\sigma}(u) = \sigma \quad e \\ |d_G f|(u) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \overline{\sigma}(u) < |d_G f|(u). \end{aligned}$$

Seja $\eta_1 : X \times [0, \infty) \to X$ e $\tau_1 : X \to [0, \infty)$ as duas aplicações contínuas provenientes do Lema 2.3 aplicado à função $\overline{\sigma}$. Definamos recursivamente a função

$$\eta_n(u,t) = \begin{cases} \eta_{n-1}(u,t), & se\ 0 \leq t \leq \tau_{n-1} \\ \eta_1(\eta_{n-1}(u, \tau_{n-1}(u)), t - \eta_{n-1}(u)), & se\ t \geq \tau_{n-1}(u), \end{cases}$$

onde

$$\tau_n(u) = \tau_{n-1} + \tau_1(\eta_{n-1}(u, \eta_{n-1}(u))).$$

Provaremos agora que para todo (u,t) onde $d(u,C)+t \leq \delta$, temos

$$\lim_n \tau_n(u) > t.$$

Por absurdo, suponhamos que $\tau_n(u) \leq t$ para todo n. Desde que

$$d(\eta_n(u, \tau_n(u)), \eta_{n-1}(u, \tau_{n-1}(u))) \leq \tau_n(u) - \tau_{n-1}(u),$$

$$d(\eta_n(u, \tau_n(u)), C) \leq d(\eta_n(u, \tau_n(u)), u) + d(u, C) \leq \tau_n(u) + d(u, C)$$

segue que $(\eta_n(u, \tau_n(u)))$ é uma sequência de Cauchy no conjunto $\{v \mid d(u,C) \leq \delta\}$ e, como o espaço é de Banach, segue que é convergente. Então, temos

$$\lim_n \eta_n(u, \tau_n(u)) = v.$$

Sendo assim,

$$\tau_1(v) = \lim_n \tau_1(\eta_n(u, \tau_n(u))) = \lim_n (\tau_{n+1}(u) - \tau_n(u)) = 0,$$

o que é uma contradição. Sendo assim, podemos definir uma aplicação contínua $\eta(u,t) = \lim_n \eta_n(u,t)$. Segue do teorema anterior que

$$f(\eta(u,t)) \leq f(u) - \sigma t.$$

e η é uma aplicação equivariante. Definamos $\eta(u,t) = \eta(u, (\delta - d(u,C))^+)$ quando $d(u,C)+t \geq \delta$. Nesta perspectiva, η tem as propriedades desejadas. ■

Teorema 2.6 (Teorema da Deformação Equivariante)**.** *Seja X um $G-$espaço métrico, f uma função contínua equivariante e $c \in \mathbb{R}$. Assuma que f satisfaz $G-(PS)_c$. Então dado $\overline{\epsilon} > 0$, U uma vizinhança invariante de K_c (Se $K_c = \emptyset$ temos $U = \emptyset$), e $\lambda > 0$, existe $\epsilon > 0$ e $\eta : X \times [0,1] \to X$ contínua com:*

a) $d(\eta(u,t), u) \leq \lambda t$;

b) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

c) $f(u) \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}) \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

d) $\eta(f^{c+\epsilon} \setminus U, 1) \subset f^{c-\epsilon}$;

e) $\eta(\cdot, t)$ *é equivariante para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração. Fixe $\overline{\epsilon} > 0$, uma vizinhança U de K_c e $\lambda > 0$. Primeiramente, suponhamos que f é uma função Lipschitz com constante 1. Da condição $G - PS$ no nível c, segue que K_c é compacto. Considere $r > 0$ tal que $B(K_c; 2r) \subset U$. Consideremos também $\delta, \sigma > 0$ tal que $2\delta < \overline{\epsilon}, \delta \leq r$ e

$$c - 2\delta \leq f(u) \leq c + 2\delta$$

e

$$u \notin B(K_c; r) \Rightarrow |d_G f| > \sigma.$$

Definamos

$$C = \{u \in X \mid c - \delta \leq f(u) \leq c + \delta,\ u \in B(K_c; 2r)\}.$$

Daí, pelo fato de que f é Lipschitz de constante 1, temos

$$d(u, C) \leq \delta \Rightarrow |d_G f|(u) > \sigma.$$

Sendo assim, consideremos $\eta' : X \times [0, \delta] \to X$ uma aplicação contínua como no Teorema 2.4. Nós podemos assumir, sem perda de generalidade, $\lambda \leq \delta$ e definir $\eta : X \times [0, 1] \to X$ por $\eta(u, t) = \eta'(u, \lambda t)$. As propriedades (a) e (b) são imediatas. Como f é uma função Lipschitz com constante 1, temos $f(u) \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon})$ implicando que $d(u, C) \geq \delta$. Consequentemente $\eta(u, t) = u$. Por fim, defina $\epsilon = \min\{\frac{\sigma\lambda}{2}, \delta\}$. Se $u \in f^{c+\epsilon} \setminus U$ e $f(u) \geq c - \epsilon$, segue que $u \in C$ e, consequentemente,

$$f(\eta(u, 1)) = f(\eta'(u, \lambda)) \leq f(u) - \sigma\lambda \leq c + \epsilon - \sigma\lambda \leq c - \epsilon.$$

Se $u \in f^{c+\epsilon} \setminus U$ e $f(u) \leq c - \epsilon$, deduzimos de (b) que $f(\eta(u, 1)) \leq c - \epsilon$. Consideremos agora o caso geral. Como o $epi(f)$ é fechado e $X \times \mathbb{R}$ é completo, segue que $epi(f)$ é completo. Consideremos $\overline{K}_c$ o conjunto dos pontos críticos de G_f no nível c. Como f cumpre a condição $(G - PS)_c$, segue que G_f também cumpre essa condição (Proposição 2.3). Ainda mais, $(U \times \mathbb{R}) \cap epi(f)$ é uma vizinhança de $\overline{K}_c$ e G_f é uma função Lipschitz com constante 1. Aplicando o primeiro caso para G_f, podemos encontrar $\epsilon > 0$ e uma aplicação contínua

$$\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2) : epi(f) \times [0, 1] \to epi(f)$$

tal que

a) $d(\overline{\eta}(u, t), u) \leq \lambda t$;

b) $\overline{\eta}_2((u, \xi), t) \leq \xi$;

c) $\xi \notin (c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}) \Rightarrow \overline{\eta}((u, \xi), t) = (u, \xi)$;

d) $\xi \leq c + \epsilon, u \notin U \Rightarrow \overline{\eta}_2((u, \xi), 1) \leq c - \epsilon$

e) $\overline{\eta}(\cdot, t)$é equivariante para todo $t \in [0,1]$

Por fim, definamos $\eta : X \times [0,1] \to X$ por $\eta(u,t) = \overline{\eta}_1((u, f(u)), t)$. Como o domínio de $\overline{\eta}$ é o $epi(f)$, temos $f(\overline{\eta_1}((u, f(u)), t)) \leq \overline{\eta}_2((u, f(u)), t)$. Assim, a função η é uma função conforme o enunciado no teorema. ■

Na próxima seção, aplicaremos o Teorema da Deformação Equivariante para provar uma importante Versão do Teorema do Passo da Montanha Equivariante. Este Teorema é crucial no estudo de soluções da Equação Logarítmica de Schrödinger, a Equação (3) que é um dos objetivos de estudos dessa dissertação.

2.3 Generalização da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para Funcionais não suaves

O objetivo dessa seção é utilizar toda a teoria apresentada até agora nessa dissertação para provar uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. A demonstração desse teorema foi baseada no artigo de Marzocchi ([18]) e nos capítulos 7, 8 e 9 do livro Rabinowitz ([22]). Vejamos o teorema:

Teorema 2.7. *Seja X um espaço de Banach e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional s.c.i. par. Considere $G = \mathbb{Z}_2$ e X como um $\mathbb{Z}_2$ espaço métrico cuja ação é a ação presente no Exemplo (6). Assuma que exista uma sequência estritamente crescente (V_n) de subespaços de dimensão finita de X com as seguintes propriedades*

a) *Existe um subespaço fechado Z de X, $\rho > 0$ e $\alpha > f(0)$ tal que*

$$X = V_0 \oplus Z \quad e \quad ||u|| = \rho \Rightarrow f(u) \geq \alpha; \ \forall u \in Z$$

b) *Existe uma sequência (R_n) em (ρ, ∞) tal que*

$$\forall u \in V_n \ \ com \ \ ||u|| \geq R_n \Rightarrow f(u) \leq f(0).$$

Mais ainda, assuma que

c) *Para todo $c \geq \alpha$, G_f satisfaz a condição $(PS)_c$;*

d) *Tem-se $|d_G\mathcal{G}_f|(0,\xi) \neq 0$, sempre quando $\xi \geq \alpha$.*

Então, existe uma sequência (u_n, ξ_n) em $epi(f)$ tal que $|d\mathcal{G}_f|(u_n, \xi_n) = 0$ e $\mathcal{G}_f(u_n, \xi_n) = \xi_n \to \infty$.

Para fins didáticos, a demonstração desse teorema foi decomposta em lemas e proposições. Daqui em diante, considere as hipóteses e as notações presentes no enunciado do Teorema (2.7).

O primeiro lema nos diz que, para pontos diferentes da origem, a inclinação fraca e a inclinação fraca equivariante de uma função par coincidem quando o grupo em questão é o $\mathbb{Z}_2$. Vejamos:

Lema 2.5. *Seja X um espaço de Banach, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função par e contínua. Então, $|d_{\mathbb{Z}_2} f|(u) = |df|(u)$ para $u \neq 0$.*

Demonstração. Consideremos a função invariante $f : X \to \mathbb{R}$ em relação ao $\mathbb{Z}_2$- espaço métrico X. Graças a Proposição 1.33, temos

$$|d_{\mathbb{Z}_2} f|(u) \leq |d_{G_1} f|(u) = |df|(u)$$

onde G_1 é o grupo trivial, pois G_1 é subgrupo de G. Considere agora σ, onde $0 < \sigma < |d\mathcal{G}_f|(u, \xi)$ como na Definição 1.1. Assim, existe $\delta > 0$ e uma aplicação contínua $H =: B(u; \delta) \times [0, \delta] \to X$ tal que

a) $d(H(v, t), v) \leq t$

b) $f(H(v, t)) \leq f(v) - \sigma t$

onde $v \in B(u, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Ademais, suponhamos, a menos de redução de δ, que $\delta < ||u||$ implicando que $B(u, \delta) \cap B(-u, \delta) = \emptyset$. Assim fica bem definida a função $K : (B(u, \delta) \cup B(-u, \delta)) \times [0, \delta] \to epi(f)$ onde

$$K(v, t) = \begin{cases} H(v, t), & se\ v \in B(u, \delta) \\ H(-v, t), & se\ v \in B(-u, \delta). \end{cases}$$

Observemos que, graças a continuidade de H, obtemos que K é uma função contínua. Notemos também que $K(\cdot, t)$ é equivariante, ou seja,

$$K((-1) \cdot (v, t)) = K(-v, t) = (-1) \cdot K(v, t).$$

Por fim, observemos que K também goza das propriedades (a) e (b) presentes na Definição (1.1). Dessa forma, a aplicação K é uma aplicação conforme a Definição (1.31) e, assim,

$$\sigma \leq |d_{\mathbb{Z}_2} f|(u)$$

Como $|df|(u)$ é o supremos desses sigmas, segue que

$$|df|(u) \leq |d_{\mathbb{Z}_2} f|(u).$$

Portanto, $|df|(u) = |d_{\mathbb{Z}_2} f|(u)$. ■

Sem perda de generalidade, podemos assumir $f(0) = 0$. Consideremos agora a função par $\mathcal{G}_f : epi(f) \to \mathbb{R}$. Pelo Lema (2.5), temos $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(u,\xi) = |d\mathcal{G}_f|(u,\xi)$ para $u \neq 0$. Por hipótese, $\mathcal{G}_f$ satisfaz a condição $G-(PS)_c$ para todo $c \geq \alpha$. Ainda mais,

$$K_c \subset (X \setminus \{0\}) \times \{c\}; \quad \forall c \geq \alpha,$$

onde K_c é relativo à $\mathcal{G}_f$. De fato, pois seja $(u,\xi) \in K_c$. Dessa forma,

$$\mathcal{G}_f(u,\xi) = \xi = c > \alpha > f(0) = 0.$$

Portanto, $(u,\xi) = (u,c) \neq (0,0)$ e, assim, obtemos a inclusão $K_c \subset X \times \{c\}$. Notemos agora que, se $(0,c) \in K_c$, então $|d_G\mathcal{G}_f|(0,c) = 0$, o que contraria a hipótese (d) do Teorema 2.7. Sendo assim, $(0,c) \notin K_c$. Portanto, $K_c \subset (X \setminus \{0\}) \times \{c\}$.

Definamos a família

$$\Sigma = \{A \mid A \text{ é fechado em } X, 0 \notin A \text{ e } A \text{ é simétrico com respeito a } 0\}.$$

Para $A \in \Sigma$, denotamos $\gamma(A)$ o gênero de A (Definição (A.2) do Apêndice (A)). Seja $K = \dim V_0$, sem perda de generalidade, podemos assumir $\dim V_n = n + k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $D_n = \overline{B_{R_n}}$, onde B_{R_n} é a bola centrada na origem com raio R_n. Definamos também

$$\Phi_n = \{\varphi \in C(D_n, epi(f)) \mid \varphi \text{ é equivariante e } \varphi(u) = (u,0),\ \forall u \in \partial B_{R_n} \cap V_n\} \quad e$$
$$\Gamma_j = \{\varphi(\overline{D_n \setminus Y}) \mid \varphi \in \Phi_n,\ n \geq j,\ Y \in \Sigma\ e\ \gamma(Y) \leq n-j\}.$$

Vejamos algumas propriedades envolvendo esses dois conjuntos:

Lema 2.6. *Se $j > k$ e $B \in \Gamma_j$, então $B \cap \partial B_\rho \cap Z \neq \emptyset$.*

Demonstração. Com efeito, seja $B = h(\overline{D_m \setminus Y})$, para $h \in \Phi_m, Y \in \Sigma$ e $\gamma(Y) \leq m-j$. Considere

$$\hat{O} = \{x \in D_m \mid h(x) \in B_\rho\}.$$

Temos que $0 \in \hat{O}$ pois h é ímpar. Denote por O a componente conexa contendo a origem 0. Observemos que

$$\hat{O} = h^{-1}(B_\rho) \cap D_m = h^{-1}(B_\rho) \cap (B_{R_m} \cap V_m).$$

Como h é contínua, segue que $h^{-1}(B_\rho)$ é aberto. Logo, $\hat{O}$ é aberto em V_m, logo O também é aberto em V_m. Dessa forma, pela Proposição A.9 do Apêndice A, temos

$\gamma(\partial O) = m$. Observemos que $h(\partial O) \subset \partial B_\rho$, pois, pela hipótese (b) do Teorema 2.7, podemos escolher $R_m > 0$ tal que $f(x) \leq 0$ para $x \in V_m \setminus B_{R_m}$, Como m é maior do que K, temos

$$\partial B_\rho \cap Z \cap V_m \neq \emptyset.$$

Utilizando a hipótese (a) do Teorema 2.7, temos

$$f_{\partial B_\rho \cap Z \cap V_m} \geq \alpha > 0$$

e, assim obtemos que R_m é maior do que ρ. Suponha que $x \in \partial O$, implicando que $h(x) \in \overline{B_\rho}$, visto que h é contínua. Se $x \in int(B_\rho)$, então existe uma vizinhança $V_x \subset D_m$ tal que

$$h(V_x) \subset B_\rho \Rightarrow V_x \subset \hat{O}$$

o que é um absurdo! Pois $x \in \partial O$. Logo devemos ter $x \in \partial D_m$ relativo à V_m, portanto $h \cong Id$ em ∂O. Sendo assim,

$$R_m = ||x|| = ||h(x)|| < \rho$$

o que é um absurdo! Logo, $h(x) \in \partial B_\rho$. Dessa forma, $h(\partial O) \subset \partial B_\rho$. Agora, defina $W = \{x \in D_m \mid h(x) \in \partial B_\rho\}$ e observe que $\partial O \subset W$ (pelo o que foi provado). Dessa maneira,

$$m = \gamma(\partial O) \leq \gamma(W) \leq m \Rightarrow \gamma(W) = m.$$

Daí, segundo a Observação (A.7) da Propriedade (A.6) do Apêndice (A) da Teoria de gênero, $\gamma(\overline{W \setminus Y}) \geq \gamma(W) - \gamma(Y) \geq m - (m - j) = j > k$. Por outro lado, sendo $h|_{\overline{W \setminus Y}}$ uma função contínua e ímpar, então

$$\gamma(h(\overline{W \setminus Y})) > k.$$

Como a codimensão de Z é k e temos esta última desigualdade, segue que,

$$\emptyset \neq h(\overline{W \setminus Y}) \cap Z \subset (B \cap \partial B_\rho \cap Z).$$

Logo, $B \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset$. ■

Lema 2.7. *Os seguintes fatos são verdadeiros:*

I) $\Gamma_j \neq \emptyset \; \forall j \in \mathbb{N}$.

II) $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$;

III) Se $\psi \in C(epi(f), epi(f))$ *é equivariante e* $\psi(u, 0) = (u, 0)$ *para todo* $u \in \partial B_{R_n} \cap V_n$, *para todo* $n \geq j$, *então* $\psi(B) \in \Gamma_j$ *para todo* $B \in \Gamma_j$.

IV) Se $B \in \Gamma_j$, $s \in \Sigma$ *e* $\gamma(S) \leq s \leq j$, *temos* $\overline{B \setminus (S \times \mathbb{R})} \in \Gamma_{j-s}$.

V) Se $B \in \Gamma_j$ *e* $L = \{(u,\xi) \in epi(f) \mid u \in X, ||u|| = \rho\}$, *temos* $B \cap L = \emptyset$

Demonstração. Vejamos as demonstrações dessas afirmações:

I) Temos $I|_{D_m} \in \Phi_m, \forall m \geq j$, ao considerarmos $Y = \emptyset$.

II) Seja $B = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_{j+1}$, então $B \in \Phi_m$ com $m \geq j+1 > j, Y \in \Sigma$ com

$$\gamma(Y) \leq m - j - 1 < m - j.$$

Logo, $B \in \Gamma_j$.

III) Seja $B = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j$ e suponha ψ como na hipótese da afirmação. Observemos que h é ímpar pois é equivariante em relação à $\mathbb{Z}_2$. Sendo assim,

$$\varphi \circ h \in C(\overline{D_m}, epi(f)) \text{ é ímpar}$$

e $\varphi \circ h(u) = (u, 0)$ em $\partial B_{R_m} \cap V_m$. Assim, $\varphi \circ h \in \Phi_m, m \geq j$ e $\gamma(Y) \leq m - j$, implicando que

$$\varphi \circ h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j.$$

IV) Seja $B = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j$, então $g \in \Phi_m, m \geq j$, $Y \in \Sigma(E)$ e $\gamma(Y) \leq m - j$. Se $Z \in \Sigma$, provemos que

$$B \setminus Z = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))}).$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}
h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))) &= h(D_m \cap (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})^c) \\
&= h(D_m \cap (Y^c \cap h^{-1}(Z \times \mathbb{R})^c) \\
&= h((D_m \cap Y^c) \cap (D_m \cap h^{-1}(Z \times \mathbb{R})^c)) \\
&= h((D_m \setminus Y) \cap (D_m \setminus h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))) \\
&\subset h(D_m \setminus Y) \cap h(D_m \setminus h^{-1}(Z \times \mathbb{R})).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$x \in D_m \setminus h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \Rightarrow x \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \Rightarrow h(x) \notin (Z \times \mathbb{R}) \Rightarrow h(x) \in Z^c \times \mathbb{R}.$$

Logo, $h(D_m \setminus h^{-1}(Z \times \mathbb{R})) \subset Z^c \times \mathbb{R}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))) &\subset (B \cap (Z \times \mathbb{R}))^c = B \setminus (Z \times \mathbb{R}) \\
&\subset \overline{B \setminus (Z \times \mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $b \in B \setminus (Z \times \mathbb{R})$, então $b = h(w)$ onde $w \in \overline{D_m \setminus Y}$ e $w \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$. Sendo assim, existe uma sequência (w_n) de elementos de $D_m \setminus Y$

convergindo para w. Como $Z \times \mathbb{R}$ é fechado e h é uma função contínua, segue que $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ é fechado. Pelo fato de que $w \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$, temos, para n suficientemente grande, $w_n \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$, ou seja,

$$w_n \in (D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))$$

para n suficientemente grande. Logo, $w \in \overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}$. Portanto,

$$B \setminus Z \subset h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}). \tag{2.1}$$

Recordemos que $dim(V_m) < \infty$ e $h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}) \subset V_m$ é um conjunto fechado e limitado, obtemos que $\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}$ é compacto. Consequentemente, usando o fato de que h é uma função contínua, temos $h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))})$ compacto. Logo, da Inclusão (2.1), temos

$$\overline{B \setminus Z} \subset h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}).$$

Dessa forma, fica provada a igualdade

$$\overline{B \setminus Z} = h(\overline{(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R})))}).$$

Agora, observemos que $h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \in \Sigma$. Para isso, devemos verificar que

a) $0 \notin h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$. De fato, pois $0 \notin D_m$ que é o domínio de h

b) $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ é fechado. Recordando que $Z \times \mathbb{R}$ é fechado e h é uma função contínua, segue que $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ é fechado em D_m, mas sendo D_m fechado, temos $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ fechado.

c) $h^{-1}(Z \times \mathbb{R})$ é equivariante em relação à $\mathbb{Z}_2$. Realmente, pois

$$u \in h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \Rightarrow \exists (w, \xi) \in Z \times \mathbb{R} \text{ tal que } h(u) = (w, \xi).$$

Como h é ímpar, temos

$$h(-u) = -h(u) = (-w, -\xi) \in Z \times \mathbb{R}$$

pois Z é simétricos com respeito à origem. Logo, $-u \in h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \in \Sigma$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \gamma(h^{-1}(Z \times \mathbb{R}) \cup Y) &\leq \gamma(h^{-1}(Z \times \mathbb{R})) + \gamma(Y) \\ &\leq \gamma(Z \times \mathbb{R}) + \gamma(Y) \\ &\leq s + (m - j) = m - (j - s). \end{aligned}$$

por causa das propriedades presentes na Proposição (A.6) da Teoria de Gênero (A), pelo fato de h ser contínua e pelo fato de que, por hipótese, $\gamma(Z \times \mathbb{R}) \leq s \leq j$. Dessa forma,

$$\overline{B \setminus (Z \times \mathbb{R})} = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z \times \mathbb{R}))}) \in \Gamma_{j-s}.$$

V) Consideremos a projeção canônica $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$. Verifiquemos que

$$B \cap L \neq \emptyset \Leftrightarrow \pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z \neq \emptyset.$$

De fato, seja $(u, \xi) \in B \cap L$, então

$$u \in Z, ||u|| = \rho \; e \; \pi(u, \xi) = u \Rightarrow$$

$$u \in \pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z \Rightarrow \pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z \neq \emptyset.$$

Seja agora, $u \in \pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z$, logo $u \in \pi(B)$ e, assim, existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $(u, \xi) \in B \subset epi(f)$. Logo, $(u, \xi) \in L$. Dessa forma,

$$(u, \xi) \in B \cap L \Rightarrow B \cap L = \emptyset.$$

Consideremos agora que $B = \varphi(\overline{D_m \setminus Y})$. A função $\pi \circ \varphi \in C(D_m, X)$ é ímpar, $\pi \circ \varphi = id$ em $\partial B_r \cap V_m$, do Lema 2.6, obtemos

$$\pi(B) \cap \partial B_\rho \cap Z \neq \emptyset \Rightarrow B \cap L \neq \emptyset.$$

Portanto, a afirmação (5) está provada.

■

Proposição 2.8. *Seja*

$$c_j = \inf_{B \in \Gamma_j} \max_{(u,\xi) \in B} \mathcal{G}_f(u, \xi), \; \forall j \in \mathbb{N}$$

os valores minimax de $\mathcal{G}_f$. *Se* $j > k$, *então* $c_j \geq \alpha > 0$.

Demonstração. Com efeito, se $j > k$ e $B \in \Gamma_j$, por (5) do Lema (2.7), temos $\pi(B) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset$. Como $f|_{\partial B_\rho \cap Z} \geq \alpha$, segue que

$$(u, \xi) \in B \cap \partial B_\rho \cap Z \Rightarrow \mathcal{G}_f(u, \xi) = \xi \geq f(u) \geq \alpha.$$

Logo,

$$\max_{(u,\xi) \in B} \mathcal{G}_f(u, \xi) \geq \alpha, \; \forall B \in \Gamma_j \Rightarrow$$

$$c_j = \inf_{b \in \Gamma_j} \max_{(u,\xi) \in B} \mathcal{G}_f(u, \xi) \geq \alpha > 0.$$

■

Proposição 2.9. *Se* $j > k$ *e* $c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{j+p} = c$, *então* $\gamma(K_c) \geq p + 1$.

Demonstração. Sendo $f(0) = 0$ e $c \geq \alpha > 0$, segue que $0 \notin K_c$. Além disso, $K_c \in \Sigma$, pois f é par, $0 \notin K_c$ e, como $\mathcal{G}_f$ satisfaz a condição $(PS)_c$, segue que K_c é compacto, em particular, fechado.

Suponhamos, por contradição, que $\gamma(K_c) \leq \rho$. Considere $\delta > 0$, como no item (V) da Proposição (A.6) do Apêndice (A) , tal que $\gamma(N_\delta(K_c)) = \gamma(K_c)$. Tomando $U = N_\delta(K_c)$ e $\overline{\epsilon} = \frac{\alpha}{2}$, apliquemos o Teorema da Deformação (2.6). Assim, existe $\epsilon \in (0, \frac{\alpha}{2})$ e $\eta(t, \cdot) : epi(f) \to epi(f)$ contínua tal que

I) $d(\eta(u,t),u) \leq \lambda t$;

II) $\mathcal{G}_f(\eta(u,t)) \leq \mathcal{G}_f(u)$;

III) $\mathcal{G}_f(u) \in (c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}) \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

IV) $\eta(\mathcal{G}_f^{c+\epsilon} \setminus U, 1) \subset \mathcal{G}_f^{c-\epsilon}$;

V) $\eta(\cdot,t)$ é equivariante segundo $\mathbb{Z}_2$, para todo $t \in [0,1]$.

Aplicando a definição de ínfimo, considere agora $B \in \Gamma_{j+p}$ tal que $\max_{u\in B} I(u) \leq c+\epsilon$. Devemos ter, $\overline{B \setminus U} \in \Gamma_j$ de maneira análoga ao que foi provado na Afirmação (4). Pela hipótese (b), existe $R_m > 0$ tal que

$$f(u) < f(0) = 0; \;\; \forall u \in \partial B_{R_m} \cap V_m; \forall m \in \mathbb{N}$$

e sendo $c - \overline{\epsilon} > c - \alpha > 0$, segue de (III) e de (V) que $\eta(\cdot,t) \in \Phi_m$, para todo $m > k$. Consequentemente, pela invariância de U, temos

$$\eta(\overline{B \setminus U}, 1) \in \Gamma_j.$$

Portanto,

$$c \leq \max_{u \in \eta(\overline{B\setminus T},1)} \mathcal{G}_f(u) \leq c - \epsilon \Rightarrow \epsilon < 0$$

um absurdo! ■

Pelo estudo feito até aqui, obtemos que, para cada $j > k$, tem-se $\gamma(K_{c_j}) \geq 1$. Logo, $K_{c_j} \neq \emptyset$ e, assim, existe um ponto crítico u_j de $\mathcal{G}_f$ tal que $\mathcal{G}_f(u_j) = c_j$.

Proposição 2.10.

$$c_j \to \infty, \;\; \textit{quando} \;\; j \to \infty.$$

Demonstração. Com efeito, pela monotonicidade de Γ_j, temos $c_j \leq c_{j+1}$. Suponha, por absurdo, que (c_j) seja limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $\overline{c} \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_j \to \overline{c}$$

a menos de subsequência. Para $j > k$, devemos ter $\overline{c} > c_j$. Caso contrário, $\overline{c} = c_j$, para todo $j > k$ implicando que $\gamma(K_{\overline{c}}) = \infty$, graças à Afirmação 2. O que não ocorre pois $K_{\overline{c}}$ é compacto. Defina o conjunto

$$K = \{u \in epi(f) \mid c_{k+1} \leq \mathcal{G}_f(u) \leq \overline{c} \; e \; |d\mathcal{G}_f|(u) = 0\}.$$

Como $\mathcal{G}_f$ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c \geq \alpha$, segue que K é compacto, então $\gamma(K) < \infty$ e consideremos $\delta > 0$ tal que

$$q = \gamma(N_\delta(K)) = \gamma(K).$$

Tomando $s = \max\{q, k+1\}$, $U = N_\delta(K)$ e $\overline{\epsilon} = \overline{c} - c_s$ no Teorema da Deformação (2.6), segue que existe $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ e $\eta(\cdot,t) : epi(f) \times [0,1] \to epi(f)$ contínua tal que

I) $d(\eta(u,t),u) \leq \lambda t$; *para algum* $\lambda > 0$.

II) $\mathcal{G}_f(\eta(u,t)) \leq \mathcal{G}_f(u)$;

III) $\mathcal{G}_f(u) \in (c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}) \Rightarrow \eta(u,t) = u$;

IV) $\eta(\mathcal{G}_f^{c+\epsilon} \setminus U, 1) \subset \mathcal{G}_f^{c-\epsilon}$;

V) $\eta(\cdot,t)$ é equivariante segundo $\mathbb{Z}_2$, para todo $t \in [0,1]$.

Sejam $j \in \mathbb{N}$ tal que $c_j > \overline{c} - \epsilon$ o que é possível devido à convergência $c_j \to \overline{c}$, e escolha $B \in \Gamma_{j+s}$ tal que

$$\max_{u \in B} \mathcal{G}_f(u) \leq \overline{c} + \epsilon.$$

Daí segue que $\overline{B \setminus U} \in \Gamma_j$ a qual inclusão pode ser mostrada de maneira análoga a 4ª afirmação do Lema (2.7). Pela hipótese (b), temos que dado $m \in \mathbb{N}$, existe $R_m > 0$ tal que

$$f(u) \leq f(0) = 0 \ ; \ \forall u \in \partial B_{R_m} \cap V_m.$$

Sendo $\overline{c} - \overline{\epsilon} > 0$, segue que

$$\eta \in \Phi_m; \ \forall m > k$$

de maneira análoga ao que foi provado anteriormente. Logo, devido a invariância de U, temos

$$\eta(1, \overline{B \setminus U}) \in \Gamma_j.$$

Portanto,

$$\overline{c} \leq \max_{u \in \eta(1, \overline{B \setminus U})} I(u) \leq \overline{c} - \epsilon,$$

um absurdo! Portanto, (c_j) é ilimitada. ■

Dessa forma, observando as Proposições (2.9) e (2.10), obtemos que existe uma sequência (u_n, ξ_n) de pontos críticos de $\mathcal{G}_f$ tal que $\mathcal{G}_f(u_n, \xi_n) \to \infty$. Agora, iremos ver um resultado de multiplicidade de pontos críticos para o funcional f. Para isso, a condição $(epi)_c$ mostra-se valiosa para tal objetivo pois associa pontos críticos de $\mathcal{G}_f$ à pontos críticos de f. Vamos à definição:

Definição 2.11. Seja $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que f satisfaz a condição $(epi)_c$ se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\inf\{|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \mid f(u) < \lambda, |\lambda - c| < \epsilon\} > 0.$$

Proposição 2.12. *Seja X um espaço de Banach e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. . Se f satisfaz a condição $(epi)_c$, então*

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) = 0 \Rightarrow \xi = f(u) \Rightarrow |df|(u) = 0.$$

Demonstração. De fato, pois se $|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) = 0$, então

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\xi) \notin \{|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda)\ |f(u) < \lambda, |\lambda - c| < \epsilon\} \Rightarrow$$

$$f(u) \geq \xi \Rightarrow f(u) = \xi.$$

Mas, como $(u,\xi) \in epi(f)$, temos $f(u) \geq \xi$. Logo, $f(u) = \xi$. Recordemos agora que, da Definição 1.11 , temos

$$|df|(u) = \begin{cases} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}, & se\ |d\mathcal{G}_f(u)| < 1 \\ +\infty, & se\ |d\mathcal{G}_f|(u) = 1. \end{cases}$$

Sendo assim,

$$|df|(u) = \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}} = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0.$$

Logo, u é um ponto crítico de f. ■

Agora, podemos provar o seguinte corolário:

Corolário 2.13. *Seja X um espaço de Banach e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional s.c.i. par. Considere $G = \mathbb{Z}_2$ e X como um $\mathbb{Z}_2$ espaço métrico cuja ação é a ação presente no Exemplo (6). Assuma que exista uma sequência estritamente crescente (V_n) de subespaços de dimensão finita de X com as seguintes propriedades*

a) *Existe um subespaço fechado Z de X, $\rho > 0$ e $\alpha > f(0)$ tal que*

$$X = V_0 \oplus Z \ e\ ||u|| = \rho \Rightarrow f(u) \geq \alpha;\ \forall u \in Z$$

b) *Existe uma sequência (R_n) em (ρ, ∞) tal que*

$$u \in V_n, ||u|| \geq R_n \Rightarrow f(u) \leq 0.$$

Mais ainda, assuma que

c) *Para todo $c \geq \alpha$, f satisfaz a condição $(PS)_c$ e a condição $(epi)_c$.*

d) *Tem-se $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\xi) \neq 0$, sempre quando $\xi \geq \alpha$.*

Então, existe uma sequência (u_n) de pontos críticos de f tal que $f(u_n) \to \infty$.

Demonstração. Observando a propriedade (c) de f da hipótese desse teorema, obtemos que $\mathcal{G}_f$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \geq \alpha$. Logo, aplicando a versão simétrica do passo da montanha (Teorema 2.7), obtemos uma sequência de pontos críticos (x_k, ξ_k) de $\mathcal{G}_f$ tal que

$$f(x_k) = \mathcal{G}_f(x_k, f(x_k)) \to \infty.$$

Por fim, os pontos (x_k) são pontos críticos de f devido à Proposição (2.12). Como queríamos demonstrar. ■

Capítulo 3

Equações de Schröndiger com não linearidade logarítmica

Neste capítulo, provaremos a existência de múltiplas soluções fracas do Problema (3) e, em seguida, estudaremos a regularidade dessas soluções assim como a positividade.

3.1 Propriedades do funcional energia

Recordemos o problema postulado na introdução:

$$-\Delta u + \omega u = u \log u^2.$$

onde $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Trabalharemos com o funcional energia associado a esse problema dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \frac{\omega+1}{2}\int |u|^2 - \frac{1}{2}\int G(u),$$

onde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$G(s) = \begin{cases} s^2 \log(s^2), & se\ s \neq 0 \\ 0, & se\ s = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nessa seção, veremos algumas propriedades do funcional energia J. Iniciaremos com um resultado técnico que é bastante útil para estudar a regularidade das soluções fracas associadas ao Problema (3).

Lema 3.1. *Seja $\alpha \geq 1$. Então,*

$$x^\alpha > \log x^2$$

para todo x positivo.

Demonstração. Para realizar essa demonstração, basta provar que a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^\alpha - \log x^2$ é não negativa. Observemos primeiramente que, se $x \in (0,1)$, então

$$\log x^2 < 0 < x^\alpha \ .$$

E, portanto, $f(x) \geq 0$ para $x \in (0,1)$. Vejamos agora o caso em que $x \geq 1$. Observando que $x^\alpha \geq x$ para $x \geq 1$, basta mostrar que a função $g(x) = x - \log x^2$ é não negativa. De fato, notemos que, para $x \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} e^x &\geq x^2 \\ \Rightarrow x = \log e^x &\geq \log x^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, $g(x) \geq 0$ e, assim,

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^\alpha \geq \log x^2.$$

para todo $x > 0$. ■

Lema 3.2. *Considere a função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ onde $h(x) = \log(x^2)$. Então, dado $\delta > 0$, existe $K > 0$ tal que $|h(x)| < |x|^\delta$ para todo $|x| > K$.*

Demonstração. De fato, observemos que, ao aplicarmos a regra de L'Hopital, temos

$$\lim \frac{\log(x^2)}{x^\delta} = 0.$$

Assim, existe $M_1 > 0$ tal que $\log x^2 < |x|^\delta$ para $|x| > M_1$. Por outro lado, como a função h é contínua, obtemos que existe $M > 0$ tal que

$$|h(x)| < M,$$

para todo $x \in (0, M^1]$. Portanto,

$$|h(x)| < M + |x|^\delta,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

■

O nosso primeiro objetivo é mostrar que J cumpre a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Para isso, definamos $G, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$G(s) = \begin{cases} s^2 \log(s^2), & se\ s \neq 0 \\ 0, & se\ s = 0 \end{cases}$$

e

$$g(s) = \begin{cases} s \log(s^2), & se\ s \neq 0 \\ 0, & se\ s = 0. \end{cases}$$

Note que G e g são funções contínuas, basta utilizar a Regra de L'Hopital para provar a continuidade no 0. Definamos também

$$G_1(s) := (s^2 \log s^2)^- \ \ e \tag{3.2}$$

$$G_2(s) := (s^2 \log s^2)^+. \tag{3.3}$$

Observemos que

Proposição 3.1. *Se $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, temos $g(u)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Desde que

$$\int |g(u)v| = \int_{\{|u|\leq 1\}} |g(u)v| + \int_{\{|u|>1\}} |g(u)v| \leq \int_{\{|u|\leq 1\}\cap suptv} |g(u)k| + \int_{\{|u|>1\}\cap suptv} |g(u)k|,$$

onde $k > 0$ foi tomado de tal forma que $|v|_\infty < k$. Dessa forma,

$$\int |g(u)v| \leq C_1 + k \int_{\{|u|>1\}\cap suptv} |g(u)|,$$

onde C_1 é uma constante positiva tal que

$$\int_{\{|u|\leq 1\}\cap suptv} |g(u)k| \leq C_1,$$

a qual existe pois g é uma função contínua e $\{|u| \leq 1\} \cap suptv$ é compacto. Observemos, agora, que dado $\delta \in (0, 2^* - 1]$, pelo Lema 3.2, segue que existe $K_1 > 0$ tal que

$$|u| > K_1 \Rightarrow \log |u|^2 \leq |u|^\delta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\{u>1\}\cap suptv} |g(u)| &= \int_{\{1\leq u\leq K_1\}\cap suptv} |g(u)| + \int_{\{u>K_1\}\cap suptv} |g(u)| \\ &\leq C_2 + \int_{\{u>K_1\}\cap suptv} |u \log u^2| \\ &\leq C_2 + \int_{\{u>K_1\}\cap suptv} |u|^{1+\delta}. \end{aligned}$$

O argumento da existência de $C_2 > 0$ é análoga ao argumento da existência da constante C_1.Dessa forma, existe $C > 0$ tal que

$$\int |g(u)v| \leq C\left(1 + \int_{\{u>K_1\}\cap suptv} |u|^{1+\delta}\right) < \infty,$$

visto que $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{1+\delta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $\delta \in (0, 2^* - 1]$. Portanto, $g(u)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. Em particular, dado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue que existe $\varphi_k \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ tal que

(i) $\varphi_K(x) = 1;\ \forall x \in K$

(ii) $0 \leq \varphi_K(x) \leq 1;\ \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(iii) $\varphi_k(x) = 0$; para x tal que $d(x, K) > 1$.

A construção de tal sequência é feita nos livros do Adams ([1]) e Brezis ([5]) no que concerne o produto de convolução. Assim, $\varphi_K \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_K |g(u)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(u)\varphi_k| < \infty.$$

Logo, $g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. ■

Ademais, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, podemos considerar

$$\langle J'(u), v\rangle := \int \nabla u \nabla v + \omega \int uv - \int uv \log u^2. \tag{3.4}$$

Note que $\langle J'(u), \cdot\rangle$ não é a derivada direcional de J, pois J não possui algumas derivadas direcionais como, por exemplo, a função u definida no Exemplo 1. Porém, podemos definir essa expressão que é conveniente para encontrar soluções fracas.

Observemos, na proposição seguinte, como essa expressão se relaciona bem com os conceitos de inclinação fraca e subdiferencial de Clark:

Proposição 3.2. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $J(u) \in \mathbb{R}$ e $|dJ|(u) < \infty$. Então as seguintes sentenças são verdadeiras:*

(1) *$g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e, para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, temos*

$$|\langle J'(u), v\rangle| \leq |dJ|(u)||v||.$$

(2) *Se $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(g(u)v)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ou $(g(u)v)^- \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então $g(u)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e a identidade (3.4) é verdadeira, identificando $J'(u)$ como um elemento em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Recordando a definição de subdiferencial e usando o item (b) do Teorema 1.20, temos

$$\partial J(u) \neq \emptyset \text{ e } |dJ|(u) \geq \min\{||\alpha||_* \mid \alpha \in \partial J(u)\}$$

visto que $|dJ|(u) < \infty$, onde $||\cdot||_*$ é a norma de $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Agora seja,

$$\begin{aligned} T(u) &= \frac{1}{2}||\nabla(u)||_2^2 + \frac{\omega+1}{2}||u||_2^2 \quad \text{e} \\ Q(u) &= -\frac{1}{2}\int u^2 \log u^2. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 5 de [10], temos $\partial J(u) \subset \partial T(u) + \partial Q(u)$ e, como $\partial J(u) \neq \emptyset$, segue que $\partial Q(u)$ é não vazio. Ao definirmos, $q : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $q(x,t) = -t - g(t)$ e aplicando [20, item (b) do Teorema 3.1], temos

$$-u - g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^N)$$

então $g(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, e

$$\partial Q(u) = \{-u \log u^2 - u\}.$$

Observemos que, $J = T + Q$ e como T é diferenciável, segue que

$$\partial T(u) = \{\nabla u + \omega u\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial J(u) &\subset \{\nabla u + \omega u\} + \{-u \log u^2 - u\} \\ \Rightarrow \partial J(u) &= \{\nabla u + \omega u\} + \{-u \log u^2 - u\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\partial J(u) = \{J'(u)\}$ onde $J'(u)$ foi definido em (3.4). Logo,

$$\begin{aligned} ||J'(u)||_* &\leq |dJ|(u) \qquad\qquad \Rightarrow \\ \left|\langle J'(u), \frac{v}{||v||}\rangle\right| &\leq ||J'(u)||_* \leq |dJ|(u)| \Rightarrow \\ |\langle J'(u), v\rangle| &\leq |dJ|(u) \cdot ||v|| \end{aligned}$$

provando, assim, (I). A afirmação (II) segue do Teorema 1 devido a Brezis-Browder na Referência [6]. ■

Proposição 3.3. *O funcional J é semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência de $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_k \to u \; em \; H^1(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$u_k \to u \; em \; L^2(\mathbb{R}^N)$$

e, a menos de subsequência,

$$u_k \to u \text{ em quase todo ponto em } \mathbb{R}^N.$$

Como a função G_1, definida na Equação (3.2),é uma função contínua, seque que

$$G_1(u_k) \to G_1(u) \text{ em quase todo ponto em } \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$\liminf (G_1 \circ u_k)(x) = (G_1 \circ u)(x) \text{ em quase todo ponto em } \mathbb{R}^N.$$

E, pelo Lema de Fatou, segue que

$$\int (G_1 \circ u) = \int \liminf (G_1 \circ u_k) \leq \liminf \int G_1(u_k).$$

Por outro lado, levando em conta a função G_2 definida na Equação (3.3) e que, para todo $\delta \in (0, 2^+ - 2]$, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$G_2(s) \leq C_\delta |s|^{2+\delta};\ \forall s \in \mathbb{R}$$

e que $u_k \to u$ em $L^{2+\delta(\mathbb{R})^N}$. Aplicando a recíproca do Teorema da Convergência Dominada, existe $h \in L^{2+\delta}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_k(c)| \leq |h(x)|$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Assim,

$$G_2(u_k(x)) \leq C_\delta |h(x)|^{2+\delta} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int G_2(u) = \lim_k \inf G_2(u_k).$$

Recordando que $G(s) = G_2(s) - G_1(s)$, temos

$$\int G(u) \leq \liminf_K \int G(u_k).$$

Portanto,

$$J(u) \leq \liminf_K J(u_k)$$

e, assim, J é uma função semicontínua inferiormente.

■

Lema 3.3. *As sequências $(PS)_c$ de J são limitadas em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência $(PS)_c$ de J em $H^1(\mathbb{R}^N)$ de J, ou seja, $J(u_k) \to c$ e $|dJ|(u_k) \to 0$. Pela Proposição (3.2), temos

$$\langle J'(u_k), v\rangle = o(1)||v||;\ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N),$$

onde $o(1)$ é uma ordem pequena, i.e.,

$$o(1) \to 0,\ quando\ ||v|| \to 0.$$

Daí, obtemos que

$$J'(u_k) \to 0,\ quando\ k \to \infty\ em\ H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Agora, observemos que se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então existe $\delta > 0$ pequeno tal que $G_2(s) \leq C_\delta |s|^{2+\delta}$ e como $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2+\delta}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int |G_2(s)| = \int G_2(s) \leq C_\delta \int |u|^{2+\delta} < \infty \Rightarrow G_2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Então, pelo item (2) da Proposição (3.2), podemos escolher u_k como uma função admissível teste na Equação (3.4) e, assim,

$$\langle J'(u_k), u_k\rangle = \int |\nabla u_k|^2 + \omega \int u_k^2 + \int u_k^2 - \int u_k^2 \log u_k^2.$$

Logo, usando a definição de $J(u)$ (Equação (4))

$$\begin{aligned} \langle J'(u_k), u_k\rangle &= 2J(u_k) - \int u_k^2 && (3.5)\\ ||u_k||_2^2 &= 2J(u_k) - \langle J'(u_k), u_k\rangle \leq 2C_1 + o(1)||u_k|| && (3.6) \end{aligned}$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante que limita $(J(u_k))$. Pela desigualdade logarítmicas de Sobolev (Inequação (5)), temos

$$\int u^2 \log u^2 \leq \frac{a^2}{\pi}||\nabla u||_2^2 + (\log ||u||_2^2 - n(1 + \log a))||u||_2^2,\ \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ a > 0.$$

Observemos agora que,

$$\begin{aligned} ||u_k||^2 &= ||\nabla u_k||_2^2 + ||u_k||_2^2 = 2J(u_k) - \omega||u_k||_2^2 + \int u_k^2 \log u_k^2 \\ \Rightarrow ||u_k||^2 &\leq 2J(u_k) - \omega(2J(u_k) - \langle J'(u_k), u_k\rangle) + \int u_k^2 \log u_k^2 \\ \Rightarrow ||u_k||^2 &\leq (2 - 2\omega)J(u_k) + \omega \cdot ||u_k||o(1) + \int u_k^2 \log u_k^2. \end{aligned}$$

Visto que $\langle J'(u_k), u_k\rangle = o(1)||u_k||$, devido a Proposição 3.2.Como $J(u_k) \to c$, segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$|(2 - 2\omega)J(u_k)| < C_2.$$

E usando a desigualdade logarítmica de Schröndinger, temos

$$||u_k||^2 \leq C_2 + \omega||u_k||o(1) + \frac{a^2}{\pi}||\nabla u_k||_2^2 + (\log||u_k||_2^2 - n(1+\log a))||u_k||_2^2.$$

Como $\log s \leq s^{1+\delta}$, com $\delta \in (0,1)$, segue que

$$||u_k||^2 \leq C_2 + \omega||u_k||o(1) + \frac{a^2}{\pi}||\nabla u_k||_2^2 + ((||u_k||_2^2)^{1+\delta} - n(1+\log a))||u_k||_2^2.$$

Consideremos $a > 0$ tão pequeno de tal forma que $d := \frac{a}{\pi} < 1$ e $1 + \log a < 0$. Assim temos,

$$[(||u_k||_2^2)^{1+\delta} - n(1+\log a)]||u_k||_2^2 \leq [(2C_1 + o(1)||u_k||)^{1+\delta} - n(1+\log a)] - (2C_1 + o(1)||u_k||)^{1+\delta}.$$

Logo,

$$(1-d)||u_k||^2 \leq C_2 + \omega||u_k||o(1) + [(2C_1 + o(1)||u_k||)^{1+\delta} - n(1+\log a)] - (2C_1 + o(1)||u_k||)^{1+\delta}.$$

Recordando que $||u_k||o(1) \to 0$ e usando o argumento de absurdo, segue que $(||u||_k)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, assim, (u_k) é limitada em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. ■

Proposição 3.4. *$J|_{H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere agora (u_k) uma sequência $(PS)_c$ de J em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 3.3, temos (u_k) é limitada em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, segue que existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

(i) $u_k \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um subespaço fechado em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $u_k \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$

(iii) $u_k \rightharpoonup u$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$.

Precisamos provar que

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2, \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N).$$

Para isso, fixemos $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ e consideremos $v_R(u_k)v$ onde, dado $R > 0$, tem-se

a) $v_R : \mathbb{R} \to [0,1]$ é suave;

b) $v_R(s) = 1$ para $|s| \leq R$;

c) $v_R(s) = 0$ para $|s| \geq 2R$;

d) $v_R'(s) \leq \frac{c}{R}$ na reta.

Sendo assim, observemos que $v_R(u_k)v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, pois o fato de que $u_k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ implica que $v_R(u_k) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, utilizando a Identidade (3.4) e usando a limitação de (u_k), temos

$$\langle J'(u_k), v_R(u_k)v\rangle = \int \nabla u_k \nabla(v_R(u_k)v) + \omega \int u_k v_R(u_k)v - \int u_k v_R(u_k)v \log u_k^2.$$

Definamos agora,

$$L_k := \left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v + \omega \int v_R(u_k)u_k v - \int v_R(u_k)u_k v \log u_k^2 - \langle J'(u_k), v_R(u_k)v\rangle \right|$$

Logo,

$$L_k = \left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v - \int \nabla u_k \nabla(v_R(u_k)v) \right|.$$

Aplicando a regra do produto e a regra da cadeia temos, segue que

$$\nabla(v_R(u_k)v) = v_R'(u_k)(\nabla u_k)v + v_R(u_k)\nabla v.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_k &= \left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v - \int v_R'(u_k)v|\nabla u_k|^2 - \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v \right| \Rightarrow \\ L_k &= \left| \int v_R'(u_k)v|\nabla u_k|^2 \right| \leq \frac{C_1}{R} \cdot \int |\nabla u_k|^2 \leq \frac{C_2}{R}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = C \cdot ||v||_\infty$ e C_2 é uma constante que limita a sequência $(\frac{C_1}{R}||u_k||_2^2)$. Dessa forma, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v + \omega \int v_R(u_k)u_k v - \int v_R(u_k)u_k v \log u_k^2 - \langle J'(u_k), v_R(u_k)v\rangle \right| \leq \frac{C_2}{R}. \tag{3.7}$$

Observemos que

(i) $\langle J'(u_k), v_R(u_k)v\rangle \to 0$

(ii) $v_R(u_k)\nabla v \to v_R(u)\nabla v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ implicando que

$$\int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v \to \int v_R(u)\nabla u \nabla v.$$

(iii) $(v_R(u_k)u_k \log u_k^2)$ é limitada em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, consideremos $\delta > 0$ de tal forma que $2 + 2\delta \in [2, 2^*]$. Aplicando o Lema 3.2, segue que existe $M > 0$ tal que $\log x^2 \leq M + |x|^\delta$. Daí e a observarmos que $|v_R(u_k(x))| < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, obtemos que,

$$\int_K |v_R(u_k)u_k \log u_k^2|^2 \leq C_1 + \int_K |v_R(u_k)| \cdot |u_k| \cdot |u_k|^\delta|^2 \leq C_1 + \int_K {u_k}^{2+2\delta} = C_1 + ||u_k||^{2+2\delta}_{L^{2+2\delta}(K)}.$$

Aplicando a imersão $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [2, 2^*]$, segue que

$$\int_K |v_R(u_k)u_k \log u_k^2|^2 < C_2 + ||u_k||^{2+2\delta}_{H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)} < C_3,$$

pois (u_k) é limitada em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

(iv) $v_R(u_k)u_k \log(u_k^2) \to v_R(u)u \log u^2$ em q.t.p. pois $u_k \to u$ q.t.p. e v_R e $\log x$ são funções contínuas.

(v) $|v_R(u_k)u_k v \log u_k^2| \leq ||v||_\infty |v_R(u_k)u_k \log u_k^2| < ||v||_\infty \cdot c \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

De (IV) e (V), segue, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$\int v_R(u_k)u_k v \log u_k^2 \to \int v_R(u)uv \log u^2.$$

Portanto, fazendo $k \to \infty$ na Equação (3.7), temos

$$\left| \int v_R(u_k)\nabla u_k \nabla v + \omega \int v_R(u_k)u_k v - \int v_R(u_k)u_k v \log u_k^2 - \langle J'(u_k), v_R(u_k)v \rangle \right| \leq \frac{C_2}{R}.$$

Fazendo agora $R \to \infty$, temos

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2; \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N). \tag{3.8}$$

Assim como na demonstração da Proposição (3.3), obtemos que

$$\begin{aligned} \int G_1(u) &\leq \liminf \int G_1(u_k) \\ \int G_2(u) &= \lim \int G_2(u_k). \end{aligned}$$

Recordando que $G(s) = G_2(s) - G_1(s)$, temos

$$\begin{aligned} \int G(u) = \int (G_2(u) - G_1(u)) &= \int G_2(u) - \int G_1(u) \\ &\geq \limsup \int G_2(u_k) + \limsup \int -G_1(u_k) \\ &= \limsup \int G_2(u_k) - G_1(u_k) \\ &= \limsup \int G(u_k), \end{aligned}$$

pois

$$\lim \int G_2(u_k) = \int G_2(u) \text{ e } \int G_1(u) \leq \liminf \int G_1(u_k).$$

Dessa forma, $\limsup \int u_k^2 \log u_k^2 \leq \int u^2 \log u^2$. Observando agora a equação que $\langle J'(u_k), u_k \rangle \to 0$, temos

$$\lim \left(||\nabla u_k||_2^2 + w||u_k||_2^2 - \int u_k^2 \log u_k^2 \right) = 0.$$

Como

$$\limsup ||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 \leq \limsup K||u_k||^2 < \infty \text{ e}$$
$$\limsup \int u_k^2 \log u_k^2 \leq \int u^2 \log u^2 < \infty,$$

segue que

$$\begin{aligned} 0 = \lim \left(||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 - \int u_k^2 \log u_k^2 \right) &\leq \limsup \left(||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 \right) \\ &\quad + \limsup \left(- \int u_k^2 \log u_k^2 \right) \\ \Rightarrow \limsup \left(||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 \right) &= \limsup \int u_k^2 \log u_k^2 \leq \int u^2 \log u^2 \\ &= ||\nabla u||_2^2 + \omega||u||_2^2, \end{aligned}$$

onde a última Igualdade foi obtida da igualdade (3.8) ao considerar $v = u$. Sendo assim,

$$\limsup ||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 \leq ||\nabla u||_2^2 + \omega||u||_2^2 \tag{3.9}$$

Observando agora que a função $g : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u) = ||\nabla u||_2^2 + \omega||u||_2^2$$

é convexa e semicontínua inferiormente, segue que g é fracamente semicontínua inferiormente. Logo,

$$g(u) \leq \liminf g(u_k). \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10), temos

$$\lim ||\nabla u_k||_2^2 + \omega||u_k||_2^2 = ||\nabla u||_2^2 + \omega||u||_2^2.$$

Consideremos agora $M > 0$ tal que $M > \frac{1}{\omega}$ e $M > 1$. Assim,

$$\begin{aligned} ||u_k - u||^2 = ||\nabla(u_k - u)||_2^2 + ||u_k - u||_2^2 &\leq M||\nabla(u_k - u)||_2^2 + M\omega||u_k - u||_2^2 \\ &= M(||\nabla(u_k - u)||_2^2 + \omega||u_k - u||_2^2) \to 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de Brezys-Lieb, temos

$$u_k \to u \; em \; H^1_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, J cumpre a condição $(PS)_c$ para qualquer nível $c \in \mathbb{R}$.

■

Agora, faremos um itinerário para provar a seguinte propriedade:

Teorema 3.5. *O funcional J satisfaz a condição $(epi)_c$ e, além disso, temos $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0, \epsilon) \neq 0$ para $\epsilon \geq \alpha$.*

Para prová-lo, precisaremos dos seguintes lemas que podem ser encontrados no artigo de Degiovanni e Zani (Referência [13]). Para estes resultados, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory e $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt$. Ademais, consideremos que

$$\sup_{|s|\leq t} |g(\cdot, s)| \in L^1_{loc}(\Omega), \quad \forall t > 0. \tag{3.11}$$

E definamos a função $f : W_0^{1,2}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$f(u) = \int_\Omega G(x,u)dx.$$

Ademais, assumamos que existe $a \in L^1(\Omega), b \in \mathbb{R}$ e $d \geq 0$ tal que

$$-a(x) - b|s|^{\frac{2n}{(n-2)}} \leq G(x,s) \leq a(x) + b|s|^{\frac{2n}{(n-2)}} + dsg(x,s) \tag{3.12}$$

em quase todo ponto x de Ω e para todo $s \in \mathbb{R}$. Daí, obtemos que $f : W_0^{1,2}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ é semicontínua inferiormente.

Observação: 3.6. O caso $d = 0$, o crescimento (3.12), é uma típica condição que garante a finitude e a continuidade de f. Se d é positivo, então o crescimento (3.12) é satisfeito quando $G(x,\cdot)$ é uma função convexa q.t.p. em Ω com $g(x,0) \in L^{\frac{2n}{(n-2)}}(\Omega)$. Assim, nesse caso particular, temos

$$sg(x,0) \leq G(x,s) \leq sg(x,s).$$

Observemos que, do crescimento (3.12) e da imersão de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{(n-2)}}(\Omega)$, obtemos que, para $u \in H_0^1(\Omega)$, temos $f(u) \in \mathbb{R}$ e

$$sg(x,s) \geq -\frac{2}{d}a(x) - \frac{2b}{d}|s|^{\frac{2n}{(n-2)}}. \tag{3.13}$$

Lema 3.4. *Seja $d > 0$ e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $g(x,u)u \in L^1(\Omega)$. Então, $f(u) \in \mathbb{R}$ e para todo $\lambda > f(u)$, então existem $\delta, \sigma > 0$ tal que*

$$\int_0^1 \int_\Omega g(x, w + \tau z)(w + \tau z)dxd\tau > \int_\Omega g(x,u)udx + \sigma,$$

para todo $w, z \in W_0^{1,2}(\Omega)$, com $||w - u||_{1,2} < \delta, ||z||_{1,2} < \delta$ e

$$\int_0^1 \int_\Omega G(x, w + \tau z)dxd\tau > \lambda - \delta.$$

Teorema 3.7. *Seja $(u,\lambda) \in epi(f)$ com $\lambda > f(u)$. Então, $|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) = 1$. Ainda mais, se a aplicação $g(x,\cdot)$ é par q.t.p. em Ω, então $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\lambda) = 1$ para todo $\lambda > f(0)$.*

Demonstração. Se $d = 0$, então f é uma função contínua e a afirmação da Proposição 1.35. Primeiramente, tratemos o caso $g(x,u)u \in L^1(\Omega)$. Consideremos σ e δ positivos como no Lema (3.4). Dado $R > 0$, consideremos agora uma função suave $v_R : \mathbb{R} \to [0,1]$ com:

(i) $supt(v_R) \subset [-2R, 2R]$;

(ii) $|v_R'(s)| \leq \frac{2}{R}$.

Considere $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L_c^\infty(\Omega)$ e $R > 0$, com $|v| \leq |u|$, q.t.p.,

$$\begin{aligned} ||v_R(u)v - u||_{1,2} &< \epsilon \\ e \int_\Omega g(x,u)v_R(u)vdx &< \int_\Omega g(x,u)udx + \frac{\sigma}{4}. \end{aligned}$$

Dado $\delta' \in (0,\delta] \cap (0,1)$, definamos a aplicação

$$H_1 : \{w \in B(u,\delta') : f(w) < \infty\} \times [0,\delta'] \to W_0^{1,2}(\Omega),$$

onde $H_1(w,t) = w + t(v_R(w)v - w)$. Se considerarmos $z = t(v_R(w)v - w)$, para $x \in \Omega$ q.t.p., temos

$$\begin{aligned} \frac{G(x,w+z) - G(x,w)}{t} &= \int_0^1 \frac{1}{1-\tau t} g(x, w+\tau z)v_R(w)vd\tau \\ &- \int_0^1 \frac{\tau t}{1-\tau t} g(x,w+\tau z)(w+\tau z)d\tau \\ &- \int_0^1 g(x,w+\tau z)(w+\tau z)d\tau. \end{aligned}$$

Diminuindo δ', se necessário, e usando que a Propriedade (3.11) e que

$$sg(x,s) \geq -\frac{2}{d}a(x) - \frac{2b}{d}|s|^{\frac{2n}{(n-2)}} \tag{3.14}$$

podemos assumir que $3\sigma\delta' + 2\delta \leq 2\delta'$, $||v_R(w)v - w||_{1,2} < \epsilon$ e

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{1}{1-\tau t} g(x,w+\tau z)v_R(w)vdxd\tau < \int_\Omega g(x,u)udx + \frac{\sigma}{4}, \tag{3.15}$$

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{\tau t}{1-\tau t} g(x,w+\tau z)(w+\tau z)dxd\tau > -\frac{\sigma}{4}, \tag{3.16}$$

$$\int_0^1 \int_\Omega g(x,w+\tau z)(w+\tau z)dxd\tau > \int_\Omega g(x,u)udx - \frac{\sigma}{2}. \tag{3.17}$$

Definamos agora a aplicação contínua $H : (B((u,\lambda),\delta') \cap epi(f)) \times [0,\delta'] \to epi(f)$ por

$$H((w,\mu),t) = \left(H_1(w,t), \mu - \frac{\sigma}{2}t\right).$$

Consideremos $\tau \in [0,1]$ tal que $f(w+\tau z) < \lambda - \sigma$. Então, das Inequações (3.15) e (3.16) juntamente com o Lema (3.4), temos

$$f(H_1(w,t)) \leq f(w) + \frac{\sigma}{2}t - \sigma t = f(w) - \frac{\sigma}{2}t \leq \mu - \frac{\sigma}{2}t.$$

Se $f(w) \leq \lambda - \delta$, das Inequações $(3.15 - 3.17)$, temos

$$f(H_1(w,t)) \leq f(w) + \sigma t \leq \lambda - \delta + \sigma\delta' \leq \lambda - \delta' - \frac{\sigma}{2}\delta' \leq \mu - \frac{\sigma}{2}t.$$

A mesma inequação permanece caso exista $\tau \in (0,1]$ tal que $f(w+\tau z) \leq \lambda - \delta$. Então, realmente, os elementos do domínio de H estão no $epi(f)$. Por fim, temos

$$\mathcal{G}_f(H(w,\mu),t) = \mathcal{G}_f(w,\mu) - \frac{\sigma}{2}t$$

e

$$||H_1((w,\mu),t) - w||_{1,2}^2 + |H_2((w,\mu),t) - \mu|^2 = \left(||v_R(w)v - w||_{1,2}^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right)t^2 \leq \left(\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right)t^2.$$

Assim, por definição, temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{4\epsilon^2 + \sigma^2}}. \tag{3.18}$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, podemos fazer $\epsilon \to 0^+$ na Equação (3.18), temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \geq 1.$$

Daí segue que $|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) = 1$, pois, graças ao Exemplo (2), já sabemos que $|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \leq 1$. Façamos, agora, o caso em que $g(x,u)u \notin L^1(\Omega)$. Da Propriedade (3.14), obtemos que

$$\int_\Omega g(x,u)u dx = +\infty.$$

Consideremos novamente o argumento anterior com $v = 0$. Seja $M > 0$. Tomando δ' suficientemente pequeno e da Propriedade (3.14) juntamente com Igualdade (3.14), podemos afirmar que

$$f(H_1(w,t)) \leq f(w) - Mt.$$

Assim, ao definirmos, $H((w,\mu),t) = (H_1(w,t), \mu - Mt)$, podemos mostrar que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \geq \frac{M}{\sqrt{(||u||_{1,2}+1)^2 + M}}$$

e, sendo $M > 0$ arbitrário, ao fazermos $M \to +\infty$, obtemos que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\lambda) \geq 1.$$

Por fim, assumindo que $g(x,\cdot)$ é ímpar, obtemos que f é par. Assim, se considerarmos $u = 0$ e $\lambda > f(0)$, obtemos que $g(x,u)u \in L^1(\Omega)$ e podemos escolher, no argumento

anterior, $v = 0$. Então, $H(\cdot, t)$ é ímpar e a afirmação também é verdadeira nesse caso. ■

Por fim, provemos que

Teorema 3.8. *O funcional J satisfaz a condição $(epi)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e, além disso, temos $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0, \epsilon) \neq 0$ para $\epsilon \geq \alpha$.*

Demonstração. Basta considerarmos $f = J$ no Teorema (3.7). Assim, obtemos imediatamente que $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0, \epsilon) \neq 0$ para $\epsilon > \alpha > J(0)$. Provemos agora que J cumpre a condição $(epi)_c$. Para isso, precisamos provar que

$$\inf\{|d\mathcal{G}_J|(u, \lambda) \ ; \ f(u) < \lambda, |\lambda - c| < \epsilon\} > 0.$$

Observemos que, se λ é maior do que $f(u)$, obtemos, do Teorema (3.7), que $|d\mathcal{G}_J|(u, \lambda) = 1$. Portanto,

$$\inf\{|d\mathcal{G}_J|(u, \lambda) \ ; \ f(u) < \lambda, |\lambda - c| < \epsilon\} = 1 > 0$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. Portanto, J cumpre a condição $(epi)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. ■

3.2 Multiplicidade de solução, Regularidade e positividade das soluções

Nessa seção, usaremos a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente (Corolário 2.13). Provaremos a multiplicidade de soluções clássicas do problema:

$$-\Delta u + \omega u = u \log u^2.$$

onde $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Também provaremos que se uma solução for não negativa, então ela é estritamente positiva.

3.2.1 Multiplicidade de solução

Teorema 3.9. *O funcional J referente ao Problema (3) possui uma sequência de pontos críticos (u_k) em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ com*

$$J(u_k) \to \infty \text{ quando } k \to \infty.$$

Ademais, obtemos a seguinte relação:

$$\int \nabla u_k \nabla v + \omega \int u_k v = \int u_k v \log u_k^2; \ \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^N).$$

Observação: 3.10. Note que a relação

$$\int \nabla u \nabla v + \omega \int uv = \int uv \log u^2; \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

não implica que u é uma solução fraca do Problema (3), pois, deveríamos ter a igualdade acima para toda função $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e não apenas para aquelas funções de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que são essencialmente limitadas e tem suporte compacto. Mas, veremos na Subseção (3.2.3) que, mesmo assim, u é uma solução clássica do Problema (3).

Demonstração. Para provar esse resultado, utilizaremos a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha para funcionais semicontínuos inferiormente (Corolário 2.13) com $X = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Vejamos que J cumpre as condições desse teorema.

Observemos que, devido à Proposição (3.4), obtemos que J cumpre a condição PS e, aplicando o Teorema (3.8), obtemos que J satisfaz as condições (c) e (d) do Teorema do Passo da Montanha (Corolário (2.13)).

Portanto, basta verificar se J satisfaz as hipóteses geométricas do teorema. Imediatamente, obtemos que $J(0) = 0$. Ainda mais, da desigualdade logarítmica de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}||\nabla u||_2^2 + \frac{\omega+1}{2}||u||_2^2 - \frac{1}{2}\int u^2 \log u^2 \\ &\geq \frac{1}{2}||\nabla u||_2^2 + \frac{\omega+1}{2}||u||_2^2 + \frac{1}{2}(\omega + 1 + n(1+\log a) - \log ||u||_2^2)||u||_2^2 \\ &\geq c||u||^2. \end{aligned}$$

Para um $a > 0$ adequado e $||u|| = \rho$ suficientemente pequeno. Assim, considerando $V_0 := \{0\}$ e $Z = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$||u|| = \rho \Rightarrow c||u|| \leq J(u) \Rightarrow c\rho \leq J(u).$$

Dessa forma, basta considerar $\alpha = c\rho$ para provar a primeira hipótese geométrica (hipótese (a) do Corolário (2.13)).

Por fim, consideremos uma sequência estritamente crescente V_k de subespaços de dimensão finita de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ constituída por funções limitadas advindas dos autoespaços associados ao operador $(-\Delta + |x|^2)$ (vide Referência (2)). Recordando que todas as normas em V_k são equivalentes, se uma sequência em V_k é tomada de tal forma que

$$||u_m|| \to \infty$$

então também $\mu_m = ||u_m||_2 \to \infty$. Escrevamos agora $u_m = \mu_m w_m$, onde

$$w_m = ||u_m||_2^{-1} u_m.$$

Logo,

a) $||w_m||_2 = 1$

b) $||\nabla w_m|| \leq c$, pois

$$||\nabla w_m||_2^2 + ||w_m||_2^2 = \mu_m \int w_m^2 \Rightarrow ||\nabla w_m||_2^2 = \mu_m - 1.$$

c) $||w_m||_\infty \leq C$, pois (u_m) é formada por sequências limitadas.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
J(u_m) &= \frac{1}{2}\left(||\nabla u_m||_2^2 + (w+1)||u_m||_2^2 - \int u_m^2 \log u_m^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(||\nabla(\mu_m w_m)||_2^2 + (w+1)\mu_m^2 - \int (\mu_m w_m)^2 \log \mu_m^2 w_m^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mu_m^2||\nabla w_m||_2^2 + (w+1)\mu_m^2 - \mu_m^2 \int w_m^2 \log \mu_m^2 w_m^2\right) \\
&= \frac{\mu_m^2}{2}\left(||\nabla w_m||_2^2 + (w+1) - \int w_m^2 \log \mu_m^2 w_m^2\right) \\
&= \frac{\mu_m^2}{2}\left(||\nabla w_m||_2^2 + (w+1) - \int w_m^2 (\log \mu_m^2 + \log w_m^2)\right) \\
&= \frac{\mu_m^2}{2}\left(||\nabla w_m||_2^2 + (w+1) - \log \mu_m^2 ||w_m||_2^2 - \int w_m^2 \log w_m^2\right) \\
&= \frac{\mu_m^2}{2}\left(||\nabla w_m||_2^2 + (w+1) - \log \mu_m^2 - \int w_m^2 \log w_m^2\right) \\
&\leq \frac{\mu_m^2}{2}(C - \log \mu_m^2) \to -\infty.
\end{aligned}$$

pois $G : [-C, C] \to \mathbb{R}$, definida na Equação 3.1, é uma função contínua e, assim, é limitada e possui integral finita. Portanto, existe uma sequência (R_k) em (ρ, ∞) tal que para $u \in V_k$ com $||u|| \geq R_k$, temos

$$J(u) \leq 0.$$

Dessa forma, a segunda hipótese geométrica (hipótese (b) do Corolário (2.13)) é satisfeita e, assim, J possui uma sequência de pontos críticos (u_k) tal que $J(u_k) \to \infty$. pela Proposição (3.2),segue que

$$\begin{aligned}
|\langle J'(u_k), v\rangle| &\leq |dJ|(u_k)||v|| = 0 \Rightarrow \\
\int \nabla u_k \nabla v + \omega \int u_k v &= \int u_k v \log u_k^2; \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

3.2.2 Positividade

Nessa seção, verificaremos que dado uma função não negativa só há duas opções: Ou essa função é positiva ou nula. Para isso, utilizaremos um princípio do máximo devido à Vasquez ([25]):

Teorema 3.11 (Princípio do Máximo). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

(i) $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *no sentido das distribuições em* Ω

(ii) $u \geq 0$ *quase em todo ponto em* Ω,

(iii) $\Delta u \leq \beta(u)$ *quase em todo ponto em* $\{x \in \Omega \ : \ 0 < u(x) < a\}$. *onde a é uma constante positiva e* $\beta : [0, a] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua não decrescente com* $\beta(0) = 0$. *Sob a hipótese de que* $\beta(S) = 0$ *para algum* $S > 0$ *ou*

$$\int_0^{\frac{a}{2}} (\beta(S)S)^{\frac{-1}{2}} dS = \infty$$

caso $\beta(S) > 0$ *quando* $S > 0$.

Então, $u \equiv 0$ *q.t.p. em* Ω *ou* u *é estritamente positiva em* Ω *no sentido de que para todo compacto* $K \subset \Omega$, *existe uma constante* $c = c(K) > 0$ *tal que*

$$u \geq c, \ q.t.p \ em \ K.$$

Vamos ao resultado de positividade:

Teorema 3.12. *Seja u solução uma clássica não negativa do problema (3). Então, u é identicamente nula ou estritamente positiva.*

Demonstração. Aplicaremos o princípio do máximo (3.11) com

$$\beta(s) = \begin{cases} \omega s - s \log s^2, & se \ s \neq 0 \\ 0, & se \ s = 0 \end{cases}$$

Observemos que β é uma função contínua, não decrescente para s pequeno, $\beta(0) = 0$ e $\beta(\sqrt{e^{\omega}}) = 0$. Para cada solução $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos $\Delta u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, aplicando o Teorema (3.11), segue que u é nula ou u é estritamente positiva em Ω. ∎

3.2.3 Regularidade

Agora, iremos aplicar a teoria da regularidade para provar que os pontos críticos de J obtidos no Teorema (3.9), são, em verdade, soluções clássicas, ou seja, $C^2(\mathbb{R})$. Para isso, precisaremos utilizar os teoremas da Teoria da Regularidade presentes no Apêndice B.

Agora, provemos que as soluções fracas do Problema (3) são funções $C^2(\mathbb{R}^N)$:

Proposição 3.13. *Os pontos críticos do funcional J obtido no Teorema (3.9) são funções $C^2(\mathbb{R}^N)$ e soluções clássicas do Problema (3).*

Demonstração. Seja u_0 um ponto crítico do funcional J. Pelo Teorema (3.9), u_0 cumpre a seguinte relação:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + \omega \int_{\mathbb{R}^N} u_0 v dx = \int_{\mathbb{R}^N} v u_0 \log u_0^2. \tag{3.19}$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Provemos que u_0 é solução fraca do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u_0), & em\ B(0,R) \\ u = u_0, & sobre\ \partial B(0,R). \end{cases}$$

Para isso, consideremos $v \in C_c^\infty(\overline{B(0,R)})$ e seja $\tilde{v}$ a extensão de v para o $\mathbb{R}^N$ com $supt(\tilde{v}) = supt(v)$. Aplicando v na Equação (3.19), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \cdot \nabla \tilde{v} dx + \omega \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \tilde{v} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{v} u_0 \log u_0^2 \Rightarrow \\ \int_{supt(\tilde{v})} \nabla u_0 \cdot \nabla \tilde{v} dx + \omega \int_{supt(\tilde{v})} u_0 \tilde{v} dx &= \int_{supt(\tilde{v})} \tilde{v} u_0 \log u_0^2 \Rightarrow \\ \int_{supt(v)} \nabla u_0 \cdot v dx + \omega \int_{supt(v)} u_0 v dx &= \int_{supt(v)} v u_0 \log u_0^2. \end{aligned}$$

Como a função v se anula fora do seu suporte, segue que

$$\int_{B(0,R)} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + \omega \int_{B(0,R)} u_0 v dx = \int_{B(0,R)} v u_0 \log u_0^2. \tag{3.20}$$

para todo $v \in C_c^\infty(\overline{B(0,R)})$, como $C_c^\infty(\overline{B(0,R)})$ é denso em $H^1(\overline{B(0,R)})$, segue por continuidade, que

$$\int_{B(0,R)} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + \omega \int_{B(0,R)} u_0 v dx = \int_{B(0,R)} v u_0 \log u_0^2 \tag{3.21}$$

para todo $v \in H^1(\overline{B(0,R)})$. Então, ao considerarmos a função $g : \overline{B(0,R)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$g(\cdot, u_0) = -\omega u_0 + u_0 \log u_0^2,$$

obtemos que u_0 é solução fraca do problema

$$-\Delta u_0 = g(\cdot, u_0(\cdot)).$$

em $\overline{B(0,R)}$. Observemos que g cumpre a condição de crescimento exigida no teorema de Brezys-Kato (Teorema B.2):

$$|g(x,u_0)| = |-\omega u_0 + u_0 \log u_0^2| \leq \omega |u_0| + |u_0 \log u_0^2|$$

Consideremos $\alpha > 0$ tal que $1+\alpha \in [1, \frac{N+2}{N-2}]$. Recordemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log x^2} = \infty.$$

Portanto, existe $K > 1 > 0$ tal que se $x \notin \overline{B(0,K)}$, então

$$x^\alpha > \log x^2.$$

Por outro lado, a função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ onde $h(x) = \omega x + x \log x^2$ é uma função contínua e, assim, é limitada no compacto $\overline{B(0,K)}$ por uma constante $C_1 > 0$. Portanto, se $|u_0| \leq K$, então

$$|g(x,u_0)| \leq h(|u_0|) \leq M.$$

Por outro lado, se $|u_0| > K > 1$, então $|u_0| \leq |u_0|^{1+\alpha}$ e $\log u_0^2 \leq |u|^\alpha$. Assim,

$$|g(x,u_0)| \leq \omega |u_0| + |u_0 \log u_0^2| \leq \omega |u_0|^{1+\alpha} + |u_0| \cdot |u_0| \alpha \leq M_1 |u_0|^{1+\alpha}.$$

Em todo caso, temos

$$|g(x,u_0)| \leq M + M_1 |u_0|^{1+\alpha} \leq C(1 + u_0^{1+\alpha})$$

onde $C = \max\{M, M_1\}$ e $(1+\alpha) \in [1, \frac{N+2}{N-2}]$. Portanto, aplicando o Teorema de Brezis-Kato (Teorema B.2), temos que a seguinte obtemos que $u_0 \in L^q(\overline{B(0,R)})$ para todo $q \in [1, \infty)$.

Agora, iremos regularizar a solução u_0 por meio do Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg. Observemos que a não linearidade da Identidade (3.19) é a função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = u_0(x) \log(u_0^2(x))$, onde u_0 está fixada. Sejam $r \geq 1$. Observemos que:

$$|f(x)|^r = |u_0(x) \log(u_0^2(x))|^r = |u_0|^r |u_0|^\alpha = |u_0| r + \alpha.$$

para $\alpha > 1$ (vide a Proposição(3.1)). Como $u_0 \in L^q(\overline{B(0,R)})$ para todo $q \in [1, \infty)$, temos $f \in L^r(\overline{B(0,R)})$ para todo $r \geq 1$.

Assim, pelo Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg (Teorema B.4), temos $u_0 \in W^{2,r}(\overline{B(0,R)})$ para todo $r \geq 1$. Usaremos, agora, o item (iv) das imersões de Sobolev (Teorema B.5). Consideremos $r > N$, $m = 1$ e $j = 1$, então

$$\frac{N}{p} < 1 = m \Rightarrow W^{2,r}(\overline{B(0,R)}) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$$

Portanto, $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$ para algum $\alpha < 1$. Provemos agora que $u_0 \in C^2(\overline{B(0,R)})$.

Provaremos agora que u_0 é uma função $C^2(\overline{B(0,R)})$, onde R é uma constante positiva. Para isso, aplicaremos o teorema de Existência de Solução para a Equação de Poisson (Teorema B.7).

Consideremos $\Omega = \overline{B(0,R)}$, $f_1 = g(\cdot, u_0(\cdot)) - \omega u_0(\cdot)$ e $h = u_0$. Observemos que $\overline{B(0,R)}$ é limitado cuja fronteira satisfaz o postulado de barreira (vide a Seção 5.5 da Referência [3]). Ademais, provemos que $f_1 \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$. De fato, pois sendo f Lipschitz na bola $B(0,R)$, segue que

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |f(u_0(x)) - f(u_0(y))| \leq M \cdot |u_0(x) - u_0(y)| \leq M \cdot M_1 ||x-y||^{\alpha}$$

Onde M é a constante de Lipschitz de f e M_1 advém do fato de que $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$. Portanto, $g \in C^{0,\alpha}(\overline{B(0,R)})$.

Sendo assim, existe uma única solução $u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Provemos que $u_1 = u_0$. Ora, se u_1 é solução clássica do problema de Poisson (presente no Teorema (B.7), então u_1 é solução fraca. Ou seja, em particular,

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} v f_1(x).$$

para todo $v \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}_c(\Omega)$. Além, disso, como provado inicialmente, u_0 também satisfaz essa identidade. Portanto, usando essas duas relações e percebendo que elas se igualam na fronteira de Ω, temos

$$\int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_0) \cdot \nabla v dx = 0.$$

para todo $v \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}_c(\Omega)$. Fazendo $v = u_1 - u_0$, obtemos que $\nabla(u_1 - u_0)(x) = 0$ q.t.p. para $x \in \Omega$. Como $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$, segue que $\nabla(u_1 - u_0)(x) = 0$ para todo $x \in \overline{B(0,R)}$. Como a bola é conexa, segue que $u_1 - u_0$ é constante na bola fechada. Ora, como na fronteira de $\overline{B(0,R)}$, $u_1 = u_0$ e, portanto, $u_1 = u_0$ em toda a bola. Daí segue que $u_1 = u_0$, e, portanto, $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Como $R > 0$ foi tomado arbitrariamente, obtemos que $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^N)$, como queríamos demonstrar. Daí obtemos também que

$$\Delta u_0 + \omega u = f(u), \quad em\ B(0,R),$$

como $R > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\Delta u_0 + \omega u = f(u), \quad em\ \mathbb{R}^N.$$

Portanto, u_0 é solução clássica do Problema (3). ■

Bibliografia

[1] Adams, R. A. and Fournier, J. J. F.,Sobolev spaces,Pure and Applied Mathematics (Amsterdam),140,Second,Elsevier/Academic Press, Amsterdam,2003.

[2] Berezin, F. A. and Shubin, M. A.,The Schrödinger equation,Mathematics and its Applications (Soviet Series),66,Translated from the 1983 Russian edition by Yu. Rajabov, D. A. Leĭtes and N. A. Sakharova and revised by Shubin, With contributions by G. L. Litvinov and Leĭtes,Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht,1991.

[3] Biezuner, R. J., Equações Diferenciais Parciais I/II, Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas (ICEx), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Notas de Aula, 2010. Disponível em:<http://150.164.25.15/~rodney/notas_de_aula/edp.pdf>. Acesso em: 15/11/2022.

[4] Bredon, G. E.,Introduction to compact transformation groups,Pure and Applied Mathematics, Vol. 46,Academic Press, New York-London,1972.

[5] Brezis, H.,Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,Universitext,Springer, New York,2011.

[6] Brezis, H, and Browder, F. E. , Some properties of higher order Sobolev Spaces, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série,vol. 61,1982.

[7] Canino, A. and Degiovanni, M.,Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations,Topological methods in differential equations and inclusions (Montreal, PQ, 1994),NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.,472,1–50,Kluwer Acad. Publ., Dordrecht,1995.

[8] Cazenave, T.,Stable solutions of the logarithmic Schrödinger equation,Nonlinear Anal.,Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal,7,1983.

[9] Chang, K. C.,Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations,J. Math. Anal. Appl.,Journal of Mathematical Analysis and Applications,80,1981.

[10] Clarke, F. H.,Optimization and nonsmooth analysis,Classics in Applied Mathematics,5,Second,Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA,1990.

[11] D'Avenia, P. and Montefusco, E. and Squassina, M.,On the logarithmic Schrödinger equation, Commun. Contemp. Math.,Communications in Contemporary Mathematics,16,2014.

[12] Degiovanni, M. and Marzocchi, M.,A critical point theory for nonsmooth functionals,Ann. Mat. Pura Appl. (4),Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta,167,1994.

[13] Degiovanni, M. and Zani, S.,Multiple solutions of semilinear elliptic equations with one-sided growth conditions,Nonlinear operator theory,Math. Comput. Modelling,Mathematical and Computer Modelling,32,2000.

[14] De Giorgi, E. and Marino, A. and Tosques, M.,Problems of evolution in metric spaces and maximal decreasing curve,Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8),Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Serie VIII,68,1980.

[15] Guerrero, P. and López, José and Nieto, Juanjo,Global H1 solvability of the 3D logarithmic Schrödinger equation,Nonlinear Analysis: Real World Applications,11,2010,

[16] Lieb, E. H. and Loss, M., Analysis, Graduate Studies in Mathematics, 14, Second, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[17] Lima, E. L.,Elementos de topologia geral,elementos de matemática,1,Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro,1970.

[18] Marzocchi, M.,Multiple solutions of quasilinear equations involving an area-type term,J. Math. Anal. Appl.,Journal of Mathematical Analysis and Applications,196,1995.

[19] Grossinho, M. and Tersian, S. A.,An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations,Nonconvex Optimization and its Applications,52,Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,2001.

[20] Palais, R. S.,Homotopy theory of infinite dimensional manifolds,Topology,Topology. An International Journal of Mathematics,5,1966.

[21] Procesi, C.,Lie groups,Universitext,An approach through invariants and representations,Springer, New York,2007.

[22] Rabinowitz, P. H.,Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,CBMS Regional Conference Series in Mathematics,65,Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI,1986.

[23] Abrantes Santos, J. Teoremas Minimax paa funcionais Localmente Lipschitz e Aplicações. Orientador: Claudianor Oliveira Alves. 2007. Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2001. (181). Dissertação (Mestrado) - Mestrado em Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande,2007.

[24] Struwe, M.,Variational methods,Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics],34,Fourth,Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems,Springer-Verlag, Berlin,2008.

[25] Vázquez, J. L.,A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations,Appl. Math. Optim.,Applied Mathematics and Optimization,12,1984.

[26] Zloshchastiev, K. G.,Logarithmic nonlinearity in theories of quantum gravity: origin of time and observational consequences,Gravit. Cosmol.,Gravitation and Cosmology,16,2010.

Apêndice A

Introdução à Teoria do Gênero

Nesta seção, veremos a definição de gênero de um conjunto assim como algumas propriedades da Teoria de gênero assim como também contemplaremos uma introdução da Teoria do Índice.

Esse apêndice foi baseado no capítulo 7 do Livro "Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations"de Rabinowitz (referência [22]).

Consideremos E um Espaço de Banach Real, G um grupo de aplicações de E em E e o conjunto e $I \in C(E, \mathbb{R})$. Vejamos o seguinte teorema:

Teorema A.1. *Se $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e é par, então $I|_{S^{m-1}}$ tem, no mínimo, m pares distintos de pontos críticos.*

Para provar esse tipo de teorema, precisamos de uma ferramenta que auxilie a "medir o tamanho"da simetria do conjunto. A simetria de um conjunto diz respeito ao conjunto invariante por grupos de simetria. Neste contexto, foi desenvolvida a Teoria de categoria de Ljusternik-Schnirelmann. Há um conceito mais símples que é mais fácil para lidar e será usado aqui: O gênero.

A Teoria de gênero é devida à Krasnoselski. Apesar de que utilizaremos uma definição equivalente devido à Coffman. Consideremos o conjunto:

$$\Sigma(E) = \{A \subset E \setminus \{0\};\ \text{A é fechado e simétrico com respeito a origem}\}.$$

Definição A.2. Seja $A \in \Sigma(E)$. Definimos o gênero de A, denotado por $\gamma(A)$, como sendo o menor inteiro positivo n tal que, existe $\phi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ímpar. Quando não existe n para A, definimos $\gamma(A) = \infty$ e se $A = \setminus\emptyset$, denotamos $\gamma(A) = 0$.

O seguinte exemplo mostra como associar um conjunto que não é simétrico com respeito a origem à um conjunto simétrico e, além disso, a calcular o gênero desse conjunto.

Exemplo 15. Se $B \subset E$ é fechado e $B \cap (-B) = \emptyset$, tomando $A = B \cup (-B)$, temos $\gamma(A) = 1$.

Observemos que $A \in \Sigma(E)$, pois $A \subset E \setminus \{0\}$ é fechado e simétrico em E. Além disso, definindo a aplicação $\varphi : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in B \\ -1, & se\ x \notin -B \end{cases}$$

temos que tal aplicação é contínua e ímpar. Portanto, $\gamma(A) = 1$.

Observação: A.3. Se $A \in \Sigma(E)$ e $\gamma(A) > 1$, então A tem uma infinidade de pontos distintos.

Realmente, suponha, por absurdo, que se A fosse finito, poderíamos escrever $A = B \cup (-B)$ com B fechado tal que $B \cap (-B) = \emptyset$. Então, $\gamma(A) = 1$, o que é um absurdo.

Exemplo 16. Seja $n \geq 1$ e A um conjunto isomorfo ao S^n por uma aplicação ímpar, então $\gamma(A) > 1$. De fato, caso contrário, teríamos $\gamma(A) = 1$ e, assim, por definição, existiria $\varphi \in C(A, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ com φ ímpar. Considere agora $x \in A$ tal que

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi(-x) = -\varphi(x) < 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe um elemento y entre x e $-x$ tal que $\varphi(y) = 0$, um absurdo, pois $\varphi(A) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, $\gamma(A) > 1$.

Definição A.4. Seja $A \in \Sigma(E)$ e $\delta > 0$, denotemos $N_\delta(A)$ uma $\delta-$vizinhança de A, isto é,

$$N_\delta(A) = \{x \in E; d(x, A) \leq \delta\}.$$

Para o próximo teorema, precisaremos do seguinte resultado de topologia geral (Proposição 2 do capítulo 10 da referência [17]):

Teorema A.5 (Teorema de Extensão de Tietze). *Sejam F um subconjunto fechado de um espaço normado X e J um intervalo da reta real. Dada uma função real contínua $f : F \to J$, existe uma função contínua $\varphi : X \to J$ tal que $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in F$.*

Vejamos as principais propriedades do gênero:

Proposição A.6. *Sejam $A, B \in \Sigma(E)$. Então,*

I) ***Normalização:*** *Se $x \neq 0$, então $\gamma(\{x\} \cup \{-x\}) = 1$.*

II) ***Preservação por aplicação contínua:*** *Se existe $f \in C(A, B)$ ímpar, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*

III) *Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*

IV) ***Subaditividade:*** *$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.*

V) ***Propriedade de continuidade:*** *Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe $\delta > 0$ tal que $N_\delta(A) \in \Sigma(E)$ e $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$.*

Demonstração. I) Segue do exemplo (15).

II) Se $\gamma(B) = \infty$ o resultado segue de imediato. Se $\gamma(A) = \infty$, teremos $\gamma(B) = \infty$. De fato, caso contrário, teríamos um $n \in \mathbb{N}$ tal que, existiria $\varphi : B \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ímpar. Desta forma, $g = \varphi \circ f : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é contínua e ímpar. Absurdo!

Com isso, suporemos que, $\gamma(A), \gamma(B) < \infty$. Daí, digamos que $\gamma(B) = n$ logo, existe uma aplicação contínua e ímpar $\varphi : B \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Assim,

$$g = \varphi \circ f : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

é contínua e ímpar, de onde segue que, $\gamma(A) \leq n$. Portanto, $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

III) Basta considerar no item (III) a função f como sendo a aplicação inclusão $i : A \to B$.

IV) Suponha que, $\gamma(A) = m$ e $\gamma(B) = n$. Então existem duas funções contínuas e ímpares, $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ e $\phi \in C(B, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Pelo Teorema de Tietze, existem $\hat{\varphi} \in C(E, \mathbb{R}^m)$ e $\hat{\phi} \in C(E, \mathbb{R}^n)$ tais que, $\hat{\varphi}|_A = \varphi$ e $\hat{\phi}|_B = \phi$. Se necessário, podemos substituir $\hat{\phi}$ e $\hat{\varphi}$ por suas partes ímpares, logo podemos supor $\hat{\phi}$ e $\hat{\varphi}$ ímpares. Agora, consideremos $f = (\hat{\varphi}, \hat{\phi})$, então $f \in C(A \cup B, \mathbb{R}^{m+n} \setminus \{0\})$ é ímpar. Portanto,

$$\gamma(A \cup B) \geq m + n = \gamma(A) + \gamma(B).$$

V) Para cada $x \in A$, definamos $r(x) = \frac{1}{2}||x|| = r = (-x)$ e $T_x = \overline{B}_{r(x)}(x) \cup \overline{B}_{r(x)}(-x)$. Pelo exemplo 15, temos $\gamma(T_x) = 1$. Notemos que,

$$A \subset \bigcup_{x \in A} T_x$$

e pela compacidade de A, segue que existem $x_1, x_2, \cdots, x_k \in A$ tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} T_{x_i}$. Portanto,

$$\gamma(A) \leq \gamma\left(\bigcup_{i=1}^{k} T_{x_i}\right) \leq \Sigma_{i=1}^{k} \gamma(T_{x_i}) = k < \infty.$$

Supondo $\gamma(A) = n$, existe $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ímpar. Novamente, pelo Teorema de Tietze, existe $\varphi \in C(E, \mathbb{R}^n)$ ímpar que estende φ. Agora, sendo A compacto e $\hat{\varphi}$ contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\hat{\varphi} \neq 0$ em $N_\delta(A)$. Logo, $\gamma(N_\delta(A)) \leq n = \gamma(A)$. Além disso, como $A \subset N_\delta(A)$, temos $\gamma(A) \leq \gamma(N_\delta(A))$.

■

Observação: A.7. Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

De fato, como

$$A \subset (\overline{A \setminus B}) \cup B,$$

temos

$$\gamma(A) \leq \gamma((\overline{A \setminus B} \cup B)) \leq \gamma(\overline{A \setminus B}) + \gamma(B)$$

o que implica em,

$$\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B).$$

Para provar o próximo resultado, usaremos o Teorema de Borsuk-Ulam:

Teorema A.8. *(Teorema de Borsuk-Ulam) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e simétrico com respeito a origem $0 \in \Omega$ e $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua. Suponha que, $m < N$. Então, existe $x \in \partial\Omega$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Proposição A.9. *Sejam $A \in \Sigma(E)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ um aberto limitado e simétrico com respeito a origem $0 \in \Omega$. Se existe $h \in C(A, \partial\Omega)$ homeomorfismo ímpar, então $\gamma(A) = k$.*

Demonstração. Verifiquemos que $\gamma(A) \leq k$. De fato, notemos que, por Ω ser abeto, temos $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$. Logo,

$$0 \in \Omega \Rightarrow 0 \notin \partial\Omega.$$

Portanto, como $\partial\Omega$ é fechado e $\{0\}$ é compacto, temos $d(\{0\}, \partial\Omega) > 0$. Assim, podemos estender o contradomínio de h para $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, onde h é 0 fora de uma δ vizinhança de $\partial\Omega$. Dessa forma, $\gamma(A) \leq k$. Suponhamos, $\gamma(A) = j < k$, então existe $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$

ímpar. Como $\varphi \circ h^{-1} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$ é ímpar, segue do Teorema de Borsuk-Ulam, que existe $x \in \partial\Omega$, tal que

$$(\varphi \circ h^{-1})(x) = (\varphi \circ h^{-1})(-x)$$

logo,

$$(\varphi \circ h^{-1})(x) - (\varphi \circ h^{-1})(-x) = 0$$

e, por $\varphi \circ h^{-1}$ ser ímpar, segue que

$$(\varphi \circ h^{-1})(x) = 0.$$

Absurdo! Portanto, $\gamma(A) = k$. ■

Observação: A.10. Se F é um subespaço de E de dimensão k e S_F^{k-1} é a esfera unitária de F, então $\gamma(S_F^{k-1}) = k$.

De fato, na proposição anterior, consideremos $A = S_F^{k-1}, \Omega = B^F(0,1) \subset F \cong \mathbb{R}^k$ e h sendo a aplicação inclusão $i : S_F^{k-1} \to \partial\Omega$ que é um homeomorfismo ímpar. Logo, $\gamma(S^{k-1})_F = k$.

Proposição A.11. *Sejam X um subespaço de E de codimensão k e $A \in \Sigma(E)$ com $\gamma(A) > k$. Então, $A \cap X \neq \emptyset$.*

Demonstração. Façamos $E = V \oplus X$, onde V é subespaço fechado $k-$ dimensional de E. Tomemos P a projeção de E em V. Suponha, por absurdo, que $A \cap X \neq \emptyset$. Considere, $P_1 : A \to S \cap V$ dada por,

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{||P(x)||}.$$

onde S é a esfera unitária de E. Note que P_1 é contínua e ímpar. Daí, $\gamma(A) \leq \gamma(S \cap V) = \gamma(S_V^{k-1}) = k$. Absurdo! Portanto, $A \cap X \neq \emptyset$. ■

Como mencionado anteriormente, há outros caminhos para "medir a simetria" dos conjuntos, não somente no $\mathbb{Z}_2$, mas para ações de grupos mais gerais.

Sejam G um grupo e E um espaço de Banach real munido de uma ação de grupo de G. Recordemos a definição 1.27 do $FixG$:

$$Fix(G) = \{u \in E \mid g \cdot u = u \text{ para todo } g \in G\ \}.$$

Consideremos $\mathcal{E}$ a família de subconjuntos invariantes de $E \setminus \{0\}$, i.e.,

$$A \in \mathcal{E}, x \in A \Rightarrow gx \in A, \ \ \forall g \in G \ e \ x \in A.$$

Dizemos que há uma teoria do índice para (E, G) se existe uma aplicação

$$i : \mathcal{E} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

tal que, para todo $A, B \in \mathcal{E}$:

1º Normalização: Se $x \notin FixG$, então $i\left(\bigcup_{g\in G} gx\right) = 1$.

2º Preservação por aplicação contínua: Se $f \in C(A, B)$ e f é equivariante (definição 1.26).

3º Monotonicidade: $A \subset B \Rightarrow i(A) \leq i(B)$.

4º Subaditividade: $i(A \cup B) \leq i(A) + i(B)$.

5º Propriedade da Continuidade: Se A é compacto e $A \cap FixG = 0$, então $i(A) < \infty$ e existe $\delta > 0$ tal que

$$N_\delta(A) \in \mathcal{E} \;\; e \;\; i(N_\delta(A)) = i(A).$$

Observe que a teoria do Gênero e a teoria de Categoria são casos particulares da Teoria do Índice. Para mais informações, indicamos a referência 22.

Apêndice B

Resultados sobre teoria da regularidade

A seguir serão listados alguns resultados da teoria de regularidade como: O Teorema de Brezis-Kato, um Teorema de existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson e uma versão do Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg e algumas imersões contínuas de Sobolev.

Consideremos o problema (A)

$$\Delta u = g(\cdot, u), \ em \ \Omega$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. Além disso, suponhamos que g satisfaz a condição de crescimento,

$$|g(x, u)| \leq C(1 + |u|^p),$$

com $p \in \left[1, \frac{N+2}{N-2}\right], N \geq 3$. Vejamos o que é uma solução para o problema (A)

Definição B.1. Uma função $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ é solução do problema (A) quando

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) = \int_\Omega g(x, u(x))v$$

para todo $v \in H^1_{loc}(\Omega)$.

Para regularizar as soluções, precisamos de um resultado de regularidade que não necessite da limitação do domínio, visto que estamos trabalhando no $\mathbb{R}^N$. Um teorema

que, nesse contexto, nos será bastante útil é o teorema devido à Brezis-Kato presente no apêndice B do livro de Michael Struwe ([24]):

Teorema B.2 (Brezis-Kato)**.** *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que, para quase todo $x \in \Omega$, vale*

$$|g(x,u)| \leq a(x)(1+|u|)$$

com uma função $a \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega)$. Se $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca de (A), então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ para qualquer $q \in [1,\infty)$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$, para qualquer $q \in [1,\infty)$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$.

Observação: B.3. A função g que cumpre o crescimento dado no problema (A) também cumpre o crescimento da hipótese do Teorema de Brezis-Kato. De fato, basta considerar

$$a(x) = \frac{|g(x,u)|}{1+|u(x)|}$$

e observar que $a \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega)$.

Teorema B.4. *(Agmon-Douglis-Niremberg) Sejam $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, verificando*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} uv = \int_{\mathbb{R}^N} fv$$

para todo $v \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$. Então, $u \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ e existe $C > 0$ independente de f, tal que

$$||u||_{W^{2,r}(\mathbb{R}^N)} \leq C||f||_{L^r(\mathbb{R}^N)}.$$

E recordemos também as imersões de Sobolev (Capítulo 4 do livro do Adams [1]):

Teorema B.5. *Seja Ω um domínio regular, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$, as imersões abaixo são contínuas:*

(i) Se $m < \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$.

(ii) Se $m = \frac{N}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q < \infty$.

(iii) Se $\frac{N}{p} < m$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$,

(iv) Se $m-1 < \frac{N}{p} < m$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)$, com $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.

onde $C^j_B(\Omega)$ é o subespaço de $C^j(\Omega)$ formado pelas funções que, juntamente com suas derivadas até a ordem j são limitadas em Ω.

O seguinte teorema é baseado na seção 9.2 das notas de aula de Rodney ([3]) onde há a hipótese geométrica do postulado de barreira

Definição B.6. Dado um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dizemos que $\partial\Omega$ satisfaz o postulado de barreira se para todo ponto $y \in \partial\Omega$ existe uma função $w \in C^0(\overline{\Omega})$ tal que w é super-harmônica em Ω, $w(y) = 0$ e $w > 0$ em $\overline{\Omega} \setminus \{y\}$.

Observemos o Teorema de Existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson:

Teorema B.7. *(Existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira satisfaz o postulado da barreira, $f \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ e $h \in C^0(\partial\Omega)$. Então o problema de Dirichlet para a equação*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & em\ \Omega \\ u = h, & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

S586m Silva, Rodrigo Marques Faustino da.

Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndinger logarítimica: uma abordagem via inclinação fraca / Rodrigo Marques Faustino da Silva. – Campina Grande, 2022.

101 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação: Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega".

Referências.

1. Análise Matemática. 2. Equação Logarítimica de Schröndinger. 3. Inclinação Fraca. 4. Versão Simétrica do Teorema – Passo da Montanha – Funcionais Semi Contínuos Inferiormente. I. Nóbrega, Alânnio Barbosa. II. Título.

CDU 517(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225