UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO

MICHELE ALESSANDRA SILVA DA SILVA

# EXISTÊNCIA DE SOLUCÃO PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES COM EXPOENTE VARIÁVEL

CAMPINA GRANDE - PB
2021

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Existência de Solução para problemas Elípticos Não Lineares com Expoente Variável

**por**

**Michele Alessandra Silva da Silva** †

**sob orientação do**

**Prof. Dr. Denílson da Silva Pereira**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# Existência de Solução para problemas Elípticos Não Lineares com Expoente Variável.

por

**Michele Alessandra Silva da Silva**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Alânnio B. Nóbrega

**Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nobrega - UFCG**

João Rodrigues Dos Santos Junior

**Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior - UFPA**

**Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla López - USACH**

Denilson da Silva Pereira

**Prof. Dr. Denílson da Silva Pereira -UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**

**Centro de Ciências e Tecnologia**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Curso de Mestrado em Matemática**

**23/Julho/2021**

S586e Silva, Michele Alessandra Silva da.
Existência de solução para problemas elípticos não lineares com expoente variável / Michele Alessandra Silva da Silva. – Campina Grande, 2021.
130 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Denílson da Silva Pereira".
Referências.

1. Problemas Elípticos. 2. Expoentes Variáveis. 3. Métodos Variacionais. I. Pereira, Denílson da Silva. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

# Dedicatória

A minha mãe.

# Resumo

Neste trabalho vamos estudar existência de solução para problemas elípticos com expoente variável da forma:

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{p(x)}, \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad\quad , \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $p : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, podendo ter Crescimento Sublinear, Crescimento superlinear Subcrítico e Crescimento supercrítico. Para tal demonstramos alguns resultados de imersão dos espaços de Sobolev nos espaços de Lebesgue variável. A principal ferramenta utilizada é o Método Variacional.

**Palavras-Chave:** Problemas Elípticos, Expoentes variáveis, Métodos Variacionais.

# Abstract

In this work we study existence of solutions for elliptic problem with variable exponents of the form:

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{p(x)}, \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad\quad , \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain and $p : \Omega \to \mathbb{R}$ is a continuous function having Sublinear growth, Superlinear and Subcritical growth and Supercritical growth. To do this we prove some results of embeddings from the Sobolev spaces into the variable Lebesgue spaces. The main tools used is Variational Methods.

**Keywords:** Elliptic Problems, Variable Exponents, Variational Methods.

# NOTACÕES

Segue uma lista das principais notações e siglas utilizadas no texto. Alguns dos símbolos aqui listados também são definidos no texto.

- $X'$ - Dual topológico de um espaço de Banach $X$;
- $B_r(x) = \{y;\ \|y - x\| < r\}$;
- $\|.\|_{L^r} = \|.\|_r$ - Norma no espaço $L^r$;
- $\|.\|$ - Norma no espaço $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$;
- $\mathrm{o}(1)$ - Ordem pequena;
- $\mathrm{O}(\varepsilon)$ - Ordem grande;
- $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ - Expoente crítico de Sobolev;
- $C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f$ e todas suas derivadas são contínuas$\}$, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega);\ \mathrm{supt}u \subset\subset \Omega\}$;
- $\mathrm{H}_{0,r}^1(B) = \{u \in \mathrm{H}_0^1(B);\ u(x) = u(|x|)\}$;
- $S_N = \inf\limits_{u \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)\ \|u\|_{2^*}=1} \|\nabla u\|_2^2$;
- $S_N(\Omega) = \inf\limits_{u \in D_0^{1,2}(\Omega)\ \|u\|_{2^*}=1} \|\nabla u\|_2^2$;
- $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{u \in L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right),\ \text{para } i = 1, ..., N\right\}$;
- $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{\mathrm{D}^{1,2}(\Omega)}} = D_0^{1,2}(\Omega)$;
- $\mathrm{supt}\varphi$ - O suporte da função $\varphi$;
- $\to$ - Convergência forte em espaços vetoriais normados;

- $\rightharpoonup$ - Convergência fraca em espaços vetoriais normados;
- $|X|$ - Medida de Lebesgue de um conjunto mensurável;
- q.t.p. - Em quase todo ponto;
- $w_{N-1}$ - Área da superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$;
- $p_-$ - $\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} p$;
- $p_+$ - $\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} p$;
- $p^-$ - $\inf_{\Omega} p$;
- $p^+$ - $\sup_{\Omega} p$.

# Conteúdo

# Introdução

Nesta dissertação apresentaremos alguns resultados de existencia de soluções para problemas elípticos que apresentam um termo não-linear com potência variável do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{p(x)}, \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \quad\quad , \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 3$. Estudamos os casos em que:

(i) p é superlinear subcrítico, ou seja,

$$1 < p(x) \leq 2^* - 1, \quad \text{para todo } x \in \Omega;$$

(ii) p é sublinear, isto é,

$$0 < \inf_{\Omega} p \leq p(x) \leq \sup_{\Omega} p < 1, \quad \text{para todo } x \in \Omega;$$

(iii) p é supercrítico, quer dizer,

$$p(x) = 2^* + |x|^{\alpha}, \quad \text{para todo } x \in B,$$

onde $0 < \alpha < \min\left\{\frac{N}{2},\ N-2\right\}$ e $B$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^N$.

Utilizaremos métodos variacionais para mostrar a existência de solução nos três casos (i), (ii) e (iii), ou seja, vamos consider o funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por,

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)+1} u^{p(x)+1},$$

o qual está associado naturalmente com (1) no sentido de que pontos críticos de I são soluções fracas de (1). Para tal, promovemos alguns resultados de imersão contínua e compacta dos espaços de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ nos espaços de Lebesgue com expoente variável $L^{p(x)}(\Omega)$.

Historicamente, os espaços de Lebesgue com expoente variável apareceram pela primeira vez na literatura já em um artigo de 1931 de Orlicz [28]. Neste artigo, Orlicz essencialmente mostrou a desigualdade de Hölder no espaço $l^{p(x)}$. Trinta anos depois, esses espaços foram desenvolvidos na reta, de forma independente, por pesquisadores russos, notavelmente Sharapudinov [33]. Esses estudos se originaram em um artigo de Tsenov [36], e foram brevemente comentados por Portnov [29,30]. Em [33] Sharapudinov introduziu a norma de Luxemburgo para o espaço de Lebesgue e mostrou que este espaço é reflexivo quando $1 < p_- \leq p_+ < \infty$.

Uma das razões para o grande desenvolvimento da teoria clássica dos Espaços de Lebesgue $L^p$ (onde $1 \leq p \leq \infty$) é a descrição de varios fenômenos que aparecem em ciências aplicadas. Por exemplo, muitos materiais podem ser modelados com precisão suficiente usando os espaços de funções $L^p$, onde $p$ é uma constante fixa. Para alguns materiais não homogêneos, como fluidos eletro-reológicos (aqueles que podem modificar algumas de suas propriedades, geralmente sua viscosidade, por exemplo, atraves de estímulos de um campo elétrico ou magnético), esta abordagem não é mais adequada, mais sim o expoente $p$ deve ser permitido variar. Nesses casos, modelos com expoentes variáveis se mostram mais promissores, ver [31].

Problemas com expoentes variáveis podem representar modelos mais realísticos em aplicações do mundo real. Por exemplo, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= \lambda u - a\left(x\right) u^{p(x)}, & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u\left(x,t\right) &= 0 & , \quad \text{sobre} \quad x \in \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ u\left(.,0\right) &= u_0 \geq 0 & , \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

pode modelar uma reação onde a produção de um composto químico é governada por diferentes padrões de acordo com a região onde a reação ocorre. Para mais informação veja [16].

A dissertação está organizada da seguinte forma:

O **capítulo 1** foi dedicado ao estudo dos espaços de Lebesgue com expoentes variáveis, $\mathrm{L}^{p(x)}\left(\Omega\right)$, e suas propriedades, tais como: completeza, reflexividade, separabilidade e densidade.

O **capítulo 2** foi destinado a relembrar, ou aprender, os conceitos usados em Métodos variacionais.

O **capítulo 3** foi baseado em [22] e [26]. Estudamos a compacidade, ou não, da imersão dos espaços de Sobolev, $H_0^1(\Omega)$, nos espaços $\mathrm{L}^{p(x)}(\Omega)$. Utilizamos o Teorema do Passo da Montanha para garantir a existência de solução para o problema (1) com a condição (i). E por fim, usamos resultados da Teoria de Pontos Críticos para garantir a existência de solução para (1), com a condição (ii).

No **capítulo 4**, baseado em [11], estudamos o caso (iii). Neste capítulo, usamos o Teorema do Passo da Montanha e a estratégia de Brezis Niremberg [7] para garantir que o problema (1) possua solução.

Além dos capítulos, o trabalho conta com três apêndices nos quais fazemos uma exposição breve de conceitos e resultados importantes no desenvolvimento dos capítulos.

# Capítulo 1

# Os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$

Neste capítulo, introduziremos conceitos, notações e principais resultados envolvendo os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$. Esses espaços desempenham um papel fundamental quando se estuda problemas elípticos variacionais com expoentes variáveis. Para mais detalhes recomendamos a leitura das referências [10], [12], [17], [20] e [34].

## 1.1 Definição e propriedades

Com o intuito de definir os espaços de Lebesgue com expoente variável, necessitamos introduzir a classe dos expoentes que serão considerados. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue mensurável. Definimos

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ p \in L^\infty(\Omega)\,;\; p_- := \operatorname*{ess\,inf}_\Omega p \geq 1 \right\}.$$

Dado $p \in L_+^\infty(\Omega)$, escrevemos $p'$ para denotar seu expoente conjugado pontual, isto é,

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1 \quad \text{q.t.p em } \Omega,$$

com convenção de que $\frac{1}{\infty} = 0$.

**Definição 1.1** *Para cada $p \in L_+^\infty(\Omega)$, definimos os espaços de Lebesgue com expoente variável, $L^{p(x)}(\Omega)$, como*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensuravel; } \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

Sobre o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$, consideremos a função modular

$$\begin{aligned} \rho : L^{p(x)}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Devido a importância dessa função, demonstraremos, a seguir, alguns resultados envolvendo $\rho$, e que serão aproveitados ao longo deste trabalho.

**Proposição 1.2** *Para todos $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, tem-se*

(i) $\rho(u) = 0$, *se, e somente se,* $u = 0$;

(ii) $\rho(-u) = \rho(u)$;

(iii) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$, *para todo* $t \in [0,1]$, *i.e.,* $\rho$ *é uma função convexa.*

(iv) $\rho(u+v) \leq 2^{p_+}[\rho(u) + \rho(v)]$;

(v) *Se* $\lambda > 1$, *então*

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p_-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p_+}\rho(u),$$

*e se* $0 < \lambda < 1$, *temos*

$$\lambda^{p_+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p_-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u).$$

(vi) *Para cada* $L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, $\rho(\lambda u)$ *é uma função crescente, contínua e convexa em* $\lambda \in [0, \infty)$.

**Prova.** Sejam $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$.

(i) Note que

$$\rho(u) = 0 \;\Leftrightarrow\; |u(x)|^{p(x)} = 0, \text{ q.t.p em } \Omega \;\Leftrightarrow\; |u(x)| = 0, \text{ q.t.p em } \Omega$$

$$\Leftrightarrow\; u(x) = 0, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

(ii) Segue da definição de $\rho$.

(iii) Note que a função $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,s) = |s|^{p(x)}$ é convexa em $\mathbb{R}$. Logo, pelas propriedades da integral de Lebesgue, concluímos que $\rho$ é convexa.

(iv) Note que

$$|u(x) + v(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)}\left(|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)}\right), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Integrando a desigualdade acima, obtemos o resultado.

(v) Se $\lambda > 1$, temos

$$\begin{aligned} |u(x)|^{p(x)} &\leq \lambda |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p_-} |u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \\ &\leq \lambda^{p_+} |u(x)|^{p(x)}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega \end{aligned}$$

Se $0 < \lambda < 1$, temos

$$\begin{aligned} \lambda^{p_+} |u(x)|^{p(x)} &\leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p_-} |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda |u(x)|^{p(x)} \\ &\leq |u(x)|^{p(x)}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega \end{aligned}$$

(vi) Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)$, tais que $\lambda_1 < \lambda_2$. Fixando $L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} |\lambda_1 u(x)|^{p(x)} &= |\lambda_1|^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} < |\lambda_2|^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} \\ &< |\lambda_2 u(x)|^{p(x)}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega \end{aligned}$$

Integrando esta desigualdade, obtemos

$$\rho(\lambda_1 u) < \rho(\lambda_2 u).$$

Logo,

$$\rho(\lambda u) \text{ é crescente em } \lambda \in [0, \infty).$$

Mostremos a continuidade. Seja $\lambda_n \to \lambda$ em $[0, \infty)$. Note que,

$$\varphi_n := |\lambda_n u(x)|^{p(x)} \text{ é uma sequência crescente e } \varphi_n \to \varphi := |\lambda u(x)|^{p(x)},$$

em quase todo ponto de $\Omega$. Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona temos

$$\rho(\lambda_n u) \to \rho(\lambda u).$$

Portanto, $\rho(\lambda u)$ é contínua em $\lambda \in [0, \infty)$. Com relação à convexidade, note que a função $\varphi(x, \lambda) = |\lambda u(x)|^{p(x)}$, $\lambda \geq 0$, é convexa em $\lambda$. Logo, pelas propriedades da integral de Lebesgue, concluímos que $\rho(\lambda u)$ é convexa em $\lambda \in [0, \infty)$.

■

Segue dos itens (i), (ii), (iv) e (v) da Proposição 1.2 que

**Corolário 1.3** *$L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço vetorial.*

Nosso próximo objetivo é definir uma norma nos espaços $L^{p(x)}(\Omega)$, para isto, precisamos do seguinte resultado

**Proposição 1.4** *Para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ temos*

(i) $I_u = (0, \infty)$, *se* $u = 0$

(ii) $I_u = [a, \infty)$, *com* $a > 0$, *se* $u \neq 0$,

*onde*

$$I_u = \left\{ \lambda > 0;\ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

**Prova.** Se $u = 0$, então segue de (i) da Proposição 1.2 que

$$I_u = \left\{ \lambda > 0;\ \rho\left(\frac{0}{\lambda}\right) = 0 \leq 1 \right\} = (0, \infty).$$

Mostrando o item (i). Suponha agora que $u \neq 0$ e seja $a \in I_u$. Para $\lambda > a$ temos

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{a}.$$

Assim, pelo item (vi) da Proposição 1.2 segue que

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) \leq 1,$$

logo $\lambda \in I_u$. Portanto, $I_u$ é um intervalo. ■

Agora estamos prontos para definir uma norma nos Espaços $L^{p(x)}(\Omega)$, conhecida como **norma de Luxemburg**.

**Proposição 1.5** *A função* $|.|_{L^{p(x)}(\Omega)} : L^{p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x)} = \inf\left\{ \lambda > 0;\ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

*define uma norma em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

**Prova.** Sejam $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que

(i) $|u|_{p(x)} \geq 0$,

(ii) $|u|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

(iii) $|\alpha u|_{p(x)} = |\alpha|\,|u|_{p(x)}$,

(iv) $|u + v|_{p(x)} \leq |u|_{p(x)} + |v|_{p(x)}$.

De fato,

(i) Segue da definição de $|u|_{p(x)}$ .

(ii) Se u=0, então pelo item (i) da Proposição 1.4 segue que

$$I_u = (0, \infty),$$

e assim,

$$|u|_{p(x)} = \inf\ I_u = 0.$$

Seja agora $|u|_{p(x)} = 0$. Vamos supor por contradição que $u \neq 0$. Por propriedade de ínfimo, existe $(\lambda_n) \subset (0,1)$ tal que

$$\lambda_n \ \to\ 0 \quad \text{e} \quad \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$1 \geq \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^{p(x)} |u(x)|^{p(x)}\ dx > \left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\ dx.$$

Sendo $\rho(u) > 0$, teríamos

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \ \to\ \infty, \quad \text{quando} \quad n \ \to\ \infty,$$

uma contradição. Portanto, $u = 0$.

(iii) Se $\alpha = 0$, o resultado é imediato. Se $\alpha \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} |\alpha u|_{p(x)} &= \inf\left\{\lambda > 0;\ \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{|\alpha|\,\lambda > 0;\ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\lambda > 0;\ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha|\,|u|_{p(x)}\,. \end{aligned}$$

(iv) Considere o conjunto

$$C = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega);\ \rho(u) \leq 1\right\}.$$

Observe que $I_u = \{\lambda > 0;\ \lambda^{-1}u \in C\}$. Sendo $L^{p(x)}(\Omega)$ um espaço vetorial e $\rho$ uma função convexa, temos que $C$ é convexo.

Denotando $|u|_{p(x)} = a$ e $|v|_{p(x)} = b$, segue que

$$\frac{u}{a+\varepsilon}, \frac{v}{b+\varepsilon} \in C, \quad \text{para todo} \ \ \varepsilon > 0,$$

pois $a+\varepsilon \in I_u$ e $b+\varepsilon \in I_v$.

Sendo $C$ convexo, obtemos

$$\frac{tu}{a+\varepsilon}+\frac{(1-t)\,v}{b+\varepsilon}\in C, \quad \text{para} \;\; t\in[0,1]\,.$$

Em particular, se

$$t=\frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon},$$

então

$$\frac{u+v}{a+b+2\varepsilon}\in C.$$

Assim,

$$a+b+2\varepsilon\in I_{u+v}.$$

Logo,

$$\inf I_{u+v}=|u+v|_{p(x)}\leq |u|_{p(x)}+|v|_{p(x)}+\varepsilon, \quad \forall\,\varepsilon>0.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos

$$|u+v|_{p(x)}\leq |u|_{p(x)}+|v|_{p(x)}\,.$$

■

A seguinte proposição relaciona a norma de Luxemburg $|.|_{p(x)}$ com a função modular $\rho\,(.)$.

**Proposição 1.6** *Seja $u\in L^{p(x)}(\Omega)$ e $S\subset L^{p(x)}(\Omega)$. Então,*

(i) *Se $u\neq 0$, $|u|_{p(x)}=a \Leftrightarrow \rho\left(\dfrac{u}{a}\right)=1$;*

(ii) $|u|_{p(x)}<1 \Leftrightarrow \rho\,(u)<1$;

(iii) *Se $|u|_{p(x)}>1$, então $|u|_{p(x)}^{p_-}\leq \rho\,(u)\leq |u|_{p(x)}^{p_+}$;*

(iv) *Se $|u|_{p(x)}<1$, então $|u|_{p(x)}^{p_+}\leq \rho\,(u)\leq |u|_{p(x)}^{p_-}$;*

(v) *$S$ é limitado em $L^{p(x)}(\Omega)$ se, e somente se, $\rho\,(S)$ é limitado em $\mathbb{R}$.*

**Prova.** (i) Assuma primeiro $|u|_{p(x)}=a$. Pelo item (ii) da Proposição 1.4,

$$I_u=[a,\infty) \quad \text{e} \quad \rho\left(\frac{u}{a}\right)\leq 1.$$

Suponha que

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right)<1.$$

Para $t > 0$, a função

$$\rho\left(\frac{u}{t}\right),$$

é contínua convexa decrescente. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho\left(\frac{u}{t}\right) < 1, \quad \text{para } \ t \in (a-\delta, a+\delta).$$

Assim, teríamos $a - \dfrac{\delta}{2} \in I_u$, que é um absurdo. Portanto,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Assuma agora, $\rho\left(\dfrac{u}{a}\right) = 1$. Temos $a \in I_u$. Logo, $|u|_{p(x)} \leq a$. Suponha que $|u|_{p(x)} < a$. Assim, existe $\lambda_0 \in I_u$ tal que

$$|u|_{p(x)} \leq \lambda_0 < a.$$

Consequentemente,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) < \rho\left(\frac{u}{\lambda_0}\right) \leq 1,$$

contradizendo a hipótese. Portanto, $|u|_{p(x)} = a$.

(ii) Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Se $u = 0$ é imediato. Suponha $u \neq 0$. Se $|u|_{p(x)} = a < 1$, então $1 < \dfrac{1}{a}$. Sendo $\rho(\lambda u)$ crescente em $\lambda \in [0, \infty)$, temos

$$\rho(u) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Se $\rho(u) < 1$, então $1 \in I_u$. Ou seja,

$$|u|_{p(x)} = \inf I_u \leq 1,$$

e pelo item (i)

$$|u|_{p(x)} < 1.$$

(iii) Seja $|u|_{p(x)} = a > 1$. Então, pelo item (i)

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Sendo $\dfrac{1}{a} < 1$, pelo item (v) da Proposição 1.2 segue

$$\frac{1}{a^{p_+}}\rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 < \frac{1}{a^{p_-}}\rho(u),$$

implicando

$$|u|_{p(x)}^{p_-} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^{p_+}.$$

(iv) Seja $|u|_{p(x)} = a < 1$. Então, pelo item (i)

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Sendo $\dfrac{1}{a} > 1$, pelo item (v) da Proposição 1.2 segue

$$\frac{1}{a^{p_-}}\rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 < \frac{1}{a^{p_+}}\rho(u),$$

implicando

$$|u|_{p(x)}^{p_+} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^{p_-}.$$

(v) Segue dos itens anteriores. ■

**Corolário 1.7** *Para todo* $u \in \mathrm{L}^{p(x)}(\Omega)$, *tem-se*

$$\min\left\{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p_-},\ \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p_+}\right\} \leq \int_\Omega |u|^{p(x)} \leq \max\left\{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p_-},\ \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p_+}\right\}. \quad (1.1)$$

**Prova.** Segue dos itens (iii) e (iv) da Proposição 1.6. ■

As desigualdades acima implicam no seguinte resultado:

**Corolário 1.8** *Seja* $\{u_n\} \subset L^{p(x)}(\Omega)$. *Então,*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|_{L^{p(x)}} = 0$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n) = 0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|_{L^{p(x)}} = \infty$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n) = \infty$.

**Prova.** (i) Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|_{L^{p(x)}} = 0$, então dado $0 < \varepsilon < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |u_n|_{p(x)} < \varepsilon < 1.$$

Pelo item (iv) da Proposição 1.6,

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \rho(u_n) \leq |u_n|_{p(x)}^{p_-} < \varepsilon^{p_-} < \varepsilon.$$

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n) = 0$.

Supondo agora que $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n) = 0$, então dado $0 < \varepsilon < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \rho(u_n) < \varepsilon^{p_+} < \varepsilon < 1.$$

Pelo item (ii) da Proposição 1.6 temos

$$|u_n|_{p(x)} < 1,$$

sempre que $n \geq n_0$. Pelo item (iv) da Proposição 1.6,

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |u_n|_{p(x)}^{p_+} \leq \rho(u_n) < \varepsilon^{p_+}.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} |u_n|_{L^{p(x)}} = 0$.
(ii) Assuma primeiro que $\lim_{n\to\infty} |u_n|_{L^{p(x)}} = \infty$. Então, dado $A > 0$, com $A > 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |u_n|_{p(x)} > A.$$

Pelo item (iii) da Proposição 1.6, temos

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \rho(u_n) \geq |u_n|_{p(x)}^{p_-} > A^{p_-} > A,$$

implicando que $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n) = \infty$.

Assuma agora que $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n) = \infty$, então dado $A > 0$, com $A > 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \rho(u_n) > A^{p_+} > A.$$

Pelo item (ii) da Proposição 1.6,

$$|u_n|_{p(x)} > 1.$$

Assim, segue pelo item (iii) da Proposição 1.6 que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; A^{p_+} < \rho(u_n) \leq |u_n|_{p(x)}^{p_+},$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} |u_n|_{p(x)} = \infty$. ■

Com a Proposição 1.6 e o Corolário 1.8 conseguimos mostrar a seguinte proposição:

**Proposição 1.9** *Os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$, munido da norma de Luxemburg, é um espaço de Banach.*

**Prova.** Seja $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Mostrando que $(u_n)$ possui uma subsequência convergente, demonstraremos o teorema.

**Afirmação 1.10** *Existe uma subsequẽncia* $(u_k) \subset (u_n)$ *tal que*

$$|u_{k+1} - u_k|_{p(x)} < \frac{1}{2^k}, \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

De fato, dado $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_1$ implica

$$|u_m - u_n|_{p(x)} < \frac{1}{2}.$$

Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{2^2}$, existe $n_2 \geq n_1$ tal que $m, n \geq n_2$ implica

$$|u_m - u_n|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

Em particular,

$$|u_{n_2} - u_{n_1}|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{2^3}$, existe $n_3 \geq n_2$ tal que $m, n \geq n_3$ implica

$$|u_m - u_n|_{p(x)} < \frac{1}{2^3}.$$

Em particular,

$$|u_{n_3} - u_{n_2}|_{p(x)} < \frac{1}{2^3}.$$

E assim por diante. Denote $(u_{n_k}) = (u_k)$.

Mostraremos que $(u_k)$ é convergente. Defina a sequência não decrescente

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|, \quad x \in \Omega.$$

Então, $(v_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ e, por (1.2), temos

$$|v_n|_{p(x)} \leq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Proposição 1.6

$$\int_\Omega |v_n(x)|^{p(x)} \, dx \leq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Usando (1.3) e o Teorema da Convergência Monótona, existe $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{1.4}$$

Por outro lado, para $m, n \geq 2$ e $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_n(x)| &\leq |u_m(x) - u_{m-1}(x)| + |u_{m-1}(x) - u_{m-2}(x)| + \cdots \\ &+ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq v(x) - v_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Por (1.4) e (1.5), segue que para quase todo $x \in \Omega$, $\{u_k(x)\} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy, logo convergente, digamos

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{1.6}$$

Resulta de (1.5) e (1.6) que

$$|u_k(x) - u(x)| \leq v(x), \quad \text{para } k \geq 2 \text{ e q.t.p. em } \Omega. \tag{1.7}$$

Sendo $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, então por (1.7) tem-se

$$u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Desde que, por (1.6) e (1.7),

$$|u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \to 0 \text{ e } |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \leq v(x)^{p(x)}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

então pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} \rho(u_k - u) = 0.$$

Portanto, pelo Corolário 1.8

$$\lim_{k\to\infty} |u_k - u|_{p(x)} = 0,$$

concluindo a demonstração. ■

**Proposição 1.11** *Seja $\Omega$ limitado e $(u_n)$ uma sequência em $L^{p(x)}(\Omega)$ tal que*

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{p(x)}(\Omega).$$

*Então, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $Q \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que*

(i) $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ *q.t.p. em $\Omega$;*

(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq Q(x)$ *q.t.p. em* $\Omega$, $\forall n_k \in \mathbb{N}$.

**Prova.** (i) Como a sequência $(u_n)$ é de Cauchy, existe uma subsequência $(u_{n_k})$ verificando (1.2). Procedendo como na demonstração da Proposição 1.9, concluímos de (1.6) que

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = g(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{1.8}$$

Além disso, por (1.7)

$$|u_{n_k}(x) - g(x)| \leq v(x), \quad \text{para todo } k \geq 1, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{1.9}$$

com $v \in L^{p(x)}(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada $g \in L^{p(x)}(\Omega)$ e

$$u_{n_k} \to g \text{ em } L^{p(x)}(\Omega).$$

Logo, $u(x) = g(x)$, q.t.p. em $\Omega$. E usando (1.8), obtemos (i).
(ii) Escolha $Q = g + v$ e aplique (1.9). ■

**Teorema 1.12 (Desigualdade de Hölder Generalizada)** *Seja* $p, q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ *tal que* $p_- > 1$. *Então, para* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *e* $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ *temos que*

$$\int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{q_-}\right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{q(x)},$$

*onde* $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$.

**Prova.** Sejam $\|u\|_{p(x)} = a$ e $\|v\|_{q(x)} = b$. Pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{u(x)}{a} \cdot \frac{v(x)}{b}\, dx\right| &\leq \int_\Omega \frac{|u(x)|}{a} \cdot \frac{|v(x)|}{b}\, dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)} \left|\frac{v(x)}{b}\right|^{q(x)} dx,
\end{aligned}$$

lembrando que $p_- \leq p(x)$ q.t.p. em $\Omega$, segue

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{u(x)}{a} \cdot \frac{v(x)}{b}\, dx\right| &\leq \frac{1}{p_-} \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx + \frac{1}{q_-} \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{b}\right|^{q(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{p_-} + \frac{1}{q_-},
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

**Lema 1.1 (Brezis - Lieb generalizados)** *Seja* $(f_n)$ *uma sequência limitada em* $L^{p(x)}(\Omega)$ *com* $f_n \to f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *q.t.p em* $\Omega$. *Se* $p(x)$ *satisfaz,*

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < +\infty,$$

*então*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \left[ |f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} \right] dx = \int_\Omega |f|^{p(x)} \, dx.$$

**Prova.** Ver [34 - Lema 2.1]. ■

## 1.2 Separabilidade, Reflexibilidade e dual de $L^{p(x)}$

**Teorema 1.13 (Representação de Riesz)** *Seja* $p_- > 1$ *e seja* $q \in L^\infty_+(\Omega)$ *tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad \textit{para todo } x \in \Omega.$$

*Então, dado* $f \in \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^*$ *existe um único* $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ *tal que*

$$f(v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \quad \textit{para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

**Prova.** Ver [17, Teorema 1.12]. ■

Identificamos,

$$\left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^* = L^{q(x)}(\Omega).$$

**Teorema 1.14** *Se* $p_- > 1$, *então* $L^{p(x)}(\Omega)$ *é um espaço reflexivo.*

**Prova.** Ver [12, Teorema 1.10]. ■

**Teorema 1.15** *O espaço* $L^{p(x)}(\Omega)$ *é separável.*

**Prova.** Ver [12, Teorema 1.6]. ■

## 1.3 Densidade e resultados de Imersão em $L^{p(x)}(\Omega)$

**Teorema 1.16** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto. Então, o espaço* $C_0(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

**Prova.** Ver [12, Teorema 1.5]. ■

**Teorema 1.17** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto. Então, o espaço* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

**Prova.** Ver [12, Teorema 1.8]. ■

**Teorema 1.18** *Sejam* $h,\ m \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$. *Se* $|\Omega| < \infty$ *e* $p(x) \leq m(x)$ *q.t.p. em* $\Omega$, *então*

$$L^{m(x)}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{p(x)}(\Omega).$$

**Prova.** Seja $u \in L^{m(x)}(\Omega)$. Como $p(x) \leq m(x)$ q.t.p. em $\Omega$, então vale a relação

$$|u|^{p(x)} \leq 1 + |u|^{m(x)} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e consequentemente

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega} 1 + |u(x)|^{m(x)} dx,$$

acarretando,

$$\rho_{p(x)}(u) \leq |\Omega| + \rho_{m(x)}(u).$$

Assim, dado $S \subset L^{m(x)}(\Omega)$ limitado, temos pelo item $(v)$ da Proposição 1.2 que $\rho_{m(x)}(S)$ é limitado em $\mathbb{R}$, logo $\rho_{p(x)}(S)$ é limitado em $\mathbb{R}$ e assim, $S \subset L^{p(x)}(\Omega)$ é limitado.

Portanto, $L^{m(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ é contínua. ■

# Capítulo 2

# Métodos Variacionais

## 2.1 Derivada à Fréchet e a Gàteaux

Nesta seção faremos um estudo breve de derivada em espaços normados. Para mais informações veja [2], [14] e [19].

**Definição 2.1** *Dado um Espaço de Banach $X$ e um funcional $f : X \to \mathbb{R}$, dizemos que $f$ possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Th}{\|h\|} = 0.$$

*Equivalentemente, podemos escrever*

$$f(a+h) - f(a) - Th = r(h),$$

*com*

$$\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0,$$

*quando $\|h\| \to 0$.*

Denotamos,

$$T = f'(a).$$

**Definição 2.2** *Dado $U \subset X$ aberto, dizemos que $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ quando a Derivada de Fréchet de $f$ existe em todo ponto $a \in U$ e a aplicação $f' : U \to X'$ for contínua.*

**Observação 2.1** *Se $f$ é diferenciável a Frechet em $a \in U$, então $f$ é continua nesse ponto.*

**Definição 2.3** *Dado um Espaço de Banach $X$ e um funcional $f : X \to \mathbb{R}$, dizemos que $f$ possui Derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linaer $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a) - Th}{t} = 0$$

*para todo* $h \in X$.

Denotamos,

$$Th = \frac{\partial f}{\partial h}(a).$$

**Observação 2.2** *Se* $f$ *é Frechet diferenciável em um ponto* $a \in U$, *então, para cada* $h \in X$, $f$ *é Gateaux diferenciável nesse ponto ao longo de* $h$ *e a derivada de Gateaux é dada por* $f'(a)\,h$.

O inverso da Observação 2.2 não vale. Uma função pode assumir derivada de Gateaux em um ponto a, ao longo de cada direção, mas pode deixar de ser Frechet diferenciável nesse ponto. O próximo resultado garante a condição suficiente para valer o inverso.

**Proposição 2.4** *Seja* $X$ *um espaço vetorial normado e* $J : X \to \mathbb{R}$ *um funcional verificando:*

1. $\dfrac{\partial J}{\partial (.)}(u) : X \to \mathbb{R}$ *existe em cada* $u \in X$ *sendo um funcional linear e contínuo;*
2. $\dfrac{\partial J}{\partial (.)} : X \to X'$ *é contínuo.*

*Então,* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Este resultado será usado muitas vezes neste trabalho.

## 2.2 Diferenciabilidade do funcional energia

Nesta seção, temos como objetivo mostrar a diferenciabilidade do funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por,

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1}\, u^{p(x)+1}.$$

Para isso, precisamos de alguns resultados auxiliares.

**Proposição 2.5** *Sejam* $H$ *um espaço de Hilbert e* $\varphi : H \to \mathbb{R}$ *o funcional dado por*

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

*Tem-se que* $\varphi$ *é diferenciável (a Fréchet) com*

$$\varphi'(u)\,v = \langle u, v\rangle, \quad \forall\, u, v \in H.$$

**Prova.** Vamos começar calculando $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$, para $u, v \in H$. Por definição

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u) &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tv)-\varphi(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\|u+tv\|^2-\frac{1}{2}\|u\|^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\langle u+tv, u+tv\rangle-\frac{1}{2}\|u\|^2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\langle u,v\rangle+\frac{t^2}{2}\|v\|^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\langle u,v\rangle+\frac{t}{2}\|v\|^2 = \langle u,v\rangle
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(u+h)-\varphi(u)-\frac{\partial\varphi}{\partial h}(u)}{\|h\|} &= \frac{\frac{1}{2}\|u+h\|^2-\frac{1}{2}\|u\|^2-\langle u,h\rangle}{\|h\|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2+\langle u,h\rangle+\frac{1}{2}\|h\|^2-\frac{1}{2}\|u\|^2-\langle u,h\rangle}{\|h\|} \\
&= \frac{1}{2}\|h\| \to 0, \quad \text{quando} \quad \|h\|\to 0.
\end{aligned}$$

■

**Proposição 2.6** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua com*

$$|f(u)| \le A + B|u|^{\alpha}, \quad (A, B \ge 0)$$

*com $0<\alpha$ se $N=1,2$ e $0<\alpha<2^*-1$ se $N\ge 3$. Mostre que o funcional*

$$\varphi(u) = \int_\Omega F(u)\,dx, \quad \text{onde } F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$$

*é diferenciável com $\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso,*

$$\varphi'(u)\,v = \int_\Omega f(u)\,v\,dx.$$

**Prova.** Primeiramente, $\varphi$ está bem definida. Vamos calcular a derivada de Gateaux da função $\varphi$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tv)-\varphi(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}.$$

Assuma $h_t(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, obtemos $h_t'(c) = f(c)$. Pelo teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (u, u+tv)$ tal que

$$h_t(u+tv) - h_t(u) = h_t'(\theta)\,tv,$$

ou seja,

$$\int_0^{u+tv} f(s)\,ds - \int_0^u f(s)\,ds = f(\theta)\,tv.$$

Assim,

$$\left|\frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\right| = |f(\theta)|\,|v| \leq (A + B|\theta|^\alpha)\,|v|.$$

Desde que,

$$|\theta(x)| \leq |u(x) + tv(x)| + |u(x)| \leq 2|u(x)| + t|v(x)|,$$

para $t \in (0,1)$, resultando

$$|\theta(x)| \leq 2|u(x)| + |v(x)|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\right| &\leq A|v| + B|v|(2|u| + |v|)^\alpha \\ &\leq A|v| + B|v|(2^{2\alpha}|u|^\alpha + 2^\alpha|v|^\alpha) \\ &\leq A_1|v| + A_2|v||u|^\alpha + A_3|v|^{\alpha+1},\end{aligned}$$

onde $A_1 = A$, $A_2 = 2^{2\alpha}B$ e $A_3 = 2^\alpha B$.

Sendo $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)$, para $1 \leq s \leq 2^*$, temos

$$g := A_1|v| + A_2|v||u|^\alpha + A_3|v|^{\alpha+1} \in L^1(\Omega).$$

E mais,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \lim_{t\to 0} f(\theta)\,v = f(u)\,v.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \int_\Omega f(u)\,v.$$

Portanto, a derivada de Gateaux existe e é dada por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u) = \int_\Omega f(u)\,v.$$

Agora vamos mostrar que $\varphi$ satisfaz as condições da Proposição 2.4. Mostra-se que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (.)}(u) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

é linear e, pelo Teorema da Convergência Dominada, é contínua. Valendo o item 1 da Proposição 2.4. Agora vamos mostrar o item 2, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ com

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Tome $v \in H_0^1(\Omega)$, com $\|v\| \leq 1$. Obtemos

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u) \right| \leq \int_\Omega |f(u_n) - f(u)| \, |v|,$$

por Hölder,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u) \right| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_{L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \|v\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)},$$

como $1 < \alpha + 1 < 2^*$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u) \right| \leq c \; \|f(u_n) - f(u)\|_{L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \|v\|. \tag{2.1}$$

Sendo $\Omega$ limitado, temos $H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, com $1 \leq q \leq 2^*$. Logo,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^{\alpha+1}(\Omega)$$

e existe $w \in L^{\alpha+1}(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq w(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim,

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega \Rightarrow f(u_n(x)) \to f(u(x)) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

E mais,

$$\begin{aligned}
|f(u_n) - f(u)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} &\leq (A + B|u_n|^\alpha + A + B|u|^\alpha)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\
&\leq (2A + B(|u_n|^\alpha + |u|^\alpha))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\
&\leq 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} c_1 + 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} c_2 (|u_n|^\alpha + |u|^\alpha)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\
&\leq c_3 + c_4 |u_n|^{\alpha+1} + c_4 |u|^{\alpha+1} \\
&\leq c_3 + c_4 |w|^{\alpha+1} + c_4 |u|^{\alpha+1} \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left|f\left(u_n\right)-f\left(u\right)\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\ dx=0.$$

Em (2.1) resulta

$$\sup_{\|v\|\leq 1}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(u_n\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(u\right)\right|\to 0.$$

Portanto, pela Proposição 2.4, $\varphi\in C^1\left(H_0^1\left(\Omega\right),\mathbb{R}\right)$, com

$$\varphi'\left(u\right)v=\int_{\Omega}f\left(u\right)v\ dx.$$

■

**Definição 2.7** *Uma função $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita ser Carathéodory quando*

1. *$f\left(.,t\right)$, é mensurável para todo $t\in\mathbb{R}$;*
2. *$f\left(x,.\right)$ é contínua em quase todo ponto de $\Omega$.*

**Proposição 2.8** *Seja $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função Carathéodory, com a seguinte condição de crescimento*

$$\left|f\left(x,t\right)\right|\leq a+b\left|t\right|^{p-1},\quad \text{para } a,b>0 \text{ dados,}$$

*com $1<p\leq 2^*$ se $N\geq 3$ e $1<p<\infty$, se $N=1$ ou $N=2$. O funcional $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dado por*

$$\psi\left(u\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2-\int_{\Omega}F\left(x,u\right),$$

*com*

$$F\left(x,t\right)=\int_0^t f\left(x,s\right)ds,$$

*é diferenciável com $\psi\in C^1\left(H_0^1\left(\Omega\right),\mathbb{R}\right)$. Além disso,*

$$\psi'\left(u\right)v=\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\ -\int_{\Omega}f\left(x,u\right)v,\quad \text{para todo } v\in H_0^1\left(\Omega\right).$$

*$\psi$ é chamado de funcional energia.*

**Prova.** Vamos considerar $\psi\left(u\right)=J_1\left(u\right)-J_2\left(u\right)$ com

$$J_1\left(u\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2$$

e

$$J_2\left(u\right)=\int_{\Omega}F\left(x,u\right).$$

Em seguida mostraremos que $J_1, J_2 \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ com

$$J_1'(u)\, v = \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

e

$$J_2'(u)\, v = \int_\Omega f(x,u)\, v,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Pela Proposição 2.5, segue que o funcional $J_1 \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ com a derivada dada acima. Agora, vamos fazer as devidas considerações para $J_2$. Inicialmente, vamos calcular a derivada de Gateaux $\dfrac{\partial J_2}{\partial v}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \Omega$ e para cada $u, v \in H_0^1(\Omega)$, consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) = F(x, u + stv).$$

Observe que $h'(s) = f(x, u + stv)\, tv$, $h(1) = F(x, u + tv)$ e $h(0) = F(x,u)$.

Desde que $h$ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma)$$

de onde concluímos

$$\left| \frac{F(x, u + tv) - F(x,u)}{t} \right| = |f(x, u + \gamma tv)|\, |v|.$$

Da condição de crescimento sobre a função f obtemos:

$$|f(x, u + \gamma tv)|\, |v| \leq a\, |v| + b\, |u + \gamma tv|^{p-1}\, |v|.$$

Portanto,

$$|f(x, u + \gamma tv)|\, |v| \leq a\, |v| + Cb\, |u|^{p-1}\, |v| + C\, |v|^p \in L^1(\Omega).$$

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$ temos que

$$f(x, u(x) + \gamma t_n v(x))\, v(x) \to f(x, u(x))\, v(x) \quad \text{pontualmente em } \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{J_2(u + tv) - J_2(u)}{t} &= \lim_{t \to 0} \left[ \frac{\displaystyle\int_\Omega F(x, u + tv) - \int_\Omega F(x,u)}{t} \right] \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f(x, u + \gamma t_n v)\, v = \int_\Omega f(x,u)\, v. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial J_2}{\partial v}(u) = \int_\Omega f(x,u)\, v.$$

Mostraremos que o operador $\dfrac{\partial J_2}{\partial (.)}$ é contínuo. Seja $(u_n)$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$.

Assim, das imersões contínuas

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^s(\Omega), \quad \text{com} \quad 1 \leq s \leq 2^* \quad \text{no caso} \quad N \geq 3.$$

Do Teorema de Vainberg, existe $\left(u_{n_j}\right) \subset (u_n)$ e $g \in L^s(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \quad \text{quase em toda parte em } \Omega$$

e

$$\left|u_{n_j}(x)\right| \leq g(x) \quad \text{quase em toda parte em } \Omega.$$

Desde que f é uma função Carathéodory,

$$\left[f\left(x, u_{n_j}(x)\right) - f(x, u(x))\right]^{\frac{p}{p-1}} \to 0 \quad \text{quase em toda parte em } \Omega$$

e da condição de crescimento sobre f obtemos

$$\begin{aligned} \left[f\left(x, u_{n_j}(x)\right) - f(x, u(x))\right]^{\frac{p}{p-1}} &\leq C\left[\left|f\left(x, u_{n_j}(x)\right)\right|^{\frac{p}{p-1}} + \left|f(x, u(x))\right|^{\frac{p}{p-1}}\right] \\ &\leq 2\left(a + bg(x)\right)^{\frac{p}{p-1}} \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\left|f\left(x, u_{n_j}(x)\right) - f(x, u(x))\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \to 0.$$

Assim, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\|v\| \leq 1$, temos

$$\left|\frac{\partial J_2}{\partial v}\left(u_{n_j}\right) - \frac{\partial J_2}{\partial v}(u)\right| = \int_\Omega \left[f\left(x, u_{n_j}\right) - f(x,u)\right] v$$

Desde que $\dfrac{p}{p-1}$ e $p$ são expoentes conjugados, da Desigualdade de Hölder,

$$\left|\frac{\partial J_2}{\partial v}\left(u_{n_j}\right) - \frac{\partial J_2}{\partial v}(u)\right| \leq \left|f\left(x, u_{n_j}\right) - f(x,u)\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|v\| = \left|f\left(x, u_{n_j}\right) - f(x,u)\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\left\| \frac{\partial J_2}{\partial (.)} \left(u_{n_j}\right) - \frac{\partial J_2}{\partial (.)} (u) \right\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \frac{\partial J_2}{\partial v} \left(u_{n_j}\right) - \frac{\partial J_2}{\partial v} (u) \right|$$

$$\leq C \left| f\left(x, u_{n_j}(x)\right) - f(x, u(x)) \right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)},$$

implicando que

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\partial J_2}{\partial (.)} \left(u_{n_j}\right) = \frac{\partial J_2}{\partial (.)} (u).$$

Pela Proposição 2.4, segue que o funcional $J_2 \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$.

Portanto, $\psi \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ com

$$\psi'(u)\, v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \; - \int_\Omega f(x, u)\, v, \quad \text{para todo } \; v \in H_0^1(\Omega).$$

■

Agora, vamos mostrar a diferenciabilidade do funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \; - \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} \, u^{p(x)+1}.$$

Denote

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2$$

e

$$I_2(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} \, u^{p(x)+1},$$

vamos mostrar que ambos os funcionais são diferenciáveis. Observe que a diferenciabilidade de $I_1$ segue da Proposição 2.5. Para o funcional $I_2$ vamos dividir nos seguintes casos:

1. $0 < \inf\limits_{\Omega} p < p(x) < \sup\limits_{\Omega} p < 1$

   Na seção 3.4, provaremos que para $p$ nestas condições, temos

$$|u|^{p(x)} \leq 1 + |u|.$$

   Assim, pela Proposição 2.6, $I_2$ é diferenciável com

$$I_2'(u)\, v = \int_\Omega |u|^{p(x)}\, v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

2. $1 < p(x) \leq 2^*$

   Segue da Proposição 2.8 que $I_2$ é diferenciável, com

$$I_2'(u)\,v = \int_\Omega |u|^{p(x)}\,v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

3. $p(x) = 2^* + r^\alpha$.

   Vamos calcular a derivada de Gateaux e usar a Proposição 2.4.

   Com efeito, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\frac{\partial I_2}{\partial v}(u) = \lim_{t\to 0} \frac{I_2(u+tv) - I_2(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{(u+tv)^{2^*+r^\alpha+1} - u^{2^*+r^\alpha+1}}{t\,(2^*+r^\alpha+1)}.$$

   Considere,

$$G(s) = (u+stv)^{2^*+r^\alpha+1},$$

   com $s \in [0,1]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$G(1) - G(0) = G'(\lambda),$$

   ou seja,

$$\frac{(u+tv)^{2^*+r^\alpha+1} + u^{2^*+r^\alpha+1}}{t} = (2^*+r^\alpha+1)\,(u+\lambda tv)^{2^*+r^\alpha}\,v,$$

   implicando,

$$\frac{(u+tv)^{2^*+r^\alpha+1} + u^{2^*+r^\alpha+1}}{t\,(2^*+r^\alpha+1)} = (u+\lambda tv)^{2^*+r^\alpha}\,v.$$

   Observe que

$$\mu := (u+\lambda tv)^{2^*+r^\alpha}\,v \;\to\; u^{2^*+r^\alpha}v,$$

   q.t.p. em $\Omega$, quando $t \to 0$. Além disso,

$$|\mu| \leq (|u| + \lambda t\,|v|)^{2^*+r^\alpha}\,|v|$$

   e

$$(|u| + \lambda t\,|v|)^{2^*+r^\alpha} \in L^{\frac{2}{2^*+r^\alpha}}(\Omega),$$

   pois, $|u|, \lambda t\,|v| \in L^2(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder Generalizada, temos

$$|\mu| \leq (|u| + \lambda t\,|v|)^{2^*+r^\alpha}\,|v| \in L^1(\Omega)$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\frac{\partial I_2}{\partial v}(u) = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{(u+tv)^{2^*+r^\alpha+1} - u^{2^*+r^\alpha+1}}{t\,(2^*+r^\alpha+1)} = \int_\Omega u^{2^*+r^\alpha} v.$$

Pode-se observar que a derivada de Gateaux, dada acima, satisfaz as condições da Proposição 2.4, logo $I_2$ é diferenciável.

Portanto, o funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \; - \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1}\, u^{p(x)+1}$$

é de classe $C^1$ com

$$I'(u)\,v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega u^{2^*+r^\alpha} v,$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

## 2.3 Minimização

Dado um problema elíptico da forma

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= \quad 0 \quad , \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory, com a mesma condição de crescimento da Proposição 2.8. Vamos denotar por $F(x,t)$ a primitiva de $f(x,t)$ com relação a variável t.

Recorde que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca para o problema (2.2) se,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \;=\; \int_\Omega f(x,u)\,v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Ou seja, $u$ é ponto crítico para o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u).$$

**Proposição 2.9** *Sejam $(X, \|.\|)$ um espaço vetorial normado, $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $u_0 \in X$ verificando*

$$\Phi(u_0) = \min_{u\in X} \Phi(u) \quad \left(\max_{u\in X} \Phi(u)\right).$$

*Mostre que $u_0$ é ponto crítico de $\Phi$, isto é,*

$$\Phi'(u_0) = 0.$$

**Prova.** Vamos mostrar que a derivada de Gateaux $\dfrac{\partial \Phi}{\partial h}(u_0) = 0$. Com efeito, por hipótese

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + th),$$

logo,

$$\Phi(u_0 + th) - \Phi(u_0) \geq 0.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, temos os dois casos

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\Phi(u_0 + th) - \Phi(u_0)}{t} \leq 0$$

e

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(u_0 + th) - \Phi(u_0)}{t} \geq 0.$$

Assim, sendo $\Phi$ Gateaux diferenciável, segue

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(u_0) = 0.$$

Como $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, então

$$\Phi'(u_0)\, h = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0) = 0, \quad \forall\, h \in X.$$

■

**Exercício 2.10** *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua crescente e $(x_n) \subset [0, \infty)$ verificando*

$$\liminf_{n \to \infty} x_n \geq x_0.$$

*Mostre que*

$$\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

**Proposição 2.11** *Sejam $(X, \|.\|)$ um espaço normado reflexivo e $\Psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional dado por*

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - g(u),$$

*onde $g : X \to \mathbb{R}$ é completamente contínuo, isto é,*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } X \Rightarrow g(u_n) \to g(u) \text{ em } \mathbb{R}.$$

*Se $\Psi$ é coercivo, ou seja,*

$$\Psi(u) \to \infty, \text{ quando } \|u\| \to \infty,$$

*e leva conjuntos limitados em limitados, então existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\Psi(u_0) = \min_{u \in X} \Psi(u).$$

**Prova.** Sendo $\Psi$ coercivo, dado $M > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\Psi(u) \geq M, \quad \text{para} \quad \|u\| \geq R. \tag{2.3}$$

Por outro lado, sendo $B_R(0)$ um conjunto limitado, temos $\Psi(B_R(0))$ limitado, ou seja,

$$|\Psi(u)| \leq k, \quad \forall\, u \in B_R(0),$$

o que implica

$$\Psi(u) \geq -k, \quad \forall\, u \in B_R(0). \tag{2.4}$$

Segue de (2.3) e (2.4) que

$$\Psi(u) \geq -k, \quad \forall\, u \in X,$$

mostrando que $\Psi$ é limitado inferiormente, ou seja, o conjunto

$$\text{Im}\ \Psi = \{\Psi(u);\ \ u \in X\} \subset \mathbb{R}$$

é limitado inferiormente e, pelo Postulado de Dedeking, existe $\Psi_\infty \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi_\infty = \inf_{u \in X} \Psi(u).$$

Usando propriedades de ínfimo, existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$\Psi(u_n) \to \Psi_\infty. \tag{2.5}$$

**Afirmação 2.12** *A sequência $(u_n)$ é limitada em $X$.*

De fato, caso contrário, existiria uma subsequência $\left(u_{n_j}\right) \subset (u_n)$ tal que

$$\left\|u_{n_j}\right\| \to \infty, \quad \text{quando} \quad n_j \to \infty,$$

sendo $\Psi$ coercivo,

$$\Psi\left(u_{n_j}\right) \to \infty, \quad \text{quando} \quad n_j \to \infty,$$

o que contraria (2.5). Mostrando a Afirmação 2.12.

Sendo $(u_n)$ limitada e $X$ reflexivo, existem uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u_0 \in X$ tais que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \ \text{ em } \ X. \tag{2.6}$$

Sendo $g$ completamente contínuo,

$$g\left(u_{n_k}\right) \to g\left(u_0\right) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Além disso, de (2.6) tem-se

$$\liminf_{n_k \to \infty} \left\|u_{n_k}\right\| \geq \left\|u_0\right\|$$

implicando pelo exercício 2.10,

$$\liminf_{n_k \to \infty} \frac{1}{2}\left\|u_{n_k}\right\|^2 \geq \frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2. \tag{2.8}$$

Passando lim inf na igualdade,

$$\Psi\left(u_{n_k}\right) = \frac{1}{2}\left\|u_{n_k}\right\|^2 - g\left(u_{n_k}\right),$$

obtemos,

$$\liminf_{n_k \to \infty} \Psi\left(u_{n_k}\right) = \liminf_{n_k \to \infty} \frac{1}{2}\left\|u_{n_k}\right\|^2 - \liminf_{n_k \to \infty} g\left(u_{n_k}\right),$$

usando (2.5), (2.7) e (2.8), resulta

$$\Psi_\infty \geq \frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2 - g\left(u_0\right) = \Psi\left(u_0\right).$$

Por outro lado,

$$\Psi_\infty \leq \Psi\left(u_0\right).$$

Portanto,

$$\Psi\left(u_0\right) = \min_{u \in X} \Psi\left(u\right).$$

■

## 2.4 Teorema do Passo da Montanha

Neste seção enunciaremos uma das principais ferramentas utilizadas no trabalho para mostrar a existência de uma solução fraca para uma classe de problemas elípticos, o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosseti e Rabinowitz.

**Teorema 2.13 (Teorema do Passo da Montanha - M. Willen)** *Sejam $X$ um Espaço de Banach e $I \in \mathrm{C}^1\left(X, \mathbb{R}\right)$ com $I\left(0\right) = 0$. Suponha que existem $\alpha, \rho > 0$ tais que*

$$(H_1) \;\; I\left(u\right) \geq \alpha > 0, \quad \text{para todo} \;\; u \in X; \;\; \left\|u\right\| = \rho$$

*e existe* $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e*

$$(H_2)\ \ I(e) < 0.$$

*Então, para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $u_\varepsilon \in X$ *tal que*

(*a*) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$

(*b*) $\|I'(u_\varepsilon)\| < 4\varepsilon$,

*onde*

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t))$$

*e*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \ \gamma(0) = 0 \ \ e \ \ \gamma(1) = e\}.$$

**Prova.** Ver [37, Teorema 1.15]. ■

**Observação 2.14** *As hióteses* $(H_1)$ *e* $(H_2)$ *são chamadas, respectivamente, primeira geometria e segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.*

**Definição 2.15** *Um funcional* $I : X \to \mathbb{R}$ *verifica a condição Palais-Smale* $(PS)_c$*, se para* $c \in \mathbb{R}$*, qualquer sequência* $(u_n) \subset X$ *verificando*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad I'(u_n) \to 0$$

*possui uma subsequência que converge forte em X.*

**Teorema 2.16 (Teorema do Passo da Montanha - Ambrosetti-Rabinowitz)** *Sejam X um Espaço de Banach e* $I \in \mathrm{C}^1(X, \mathbb{R})$ *com* $I(0) = 0$*. Suponha que existem* $\alpha, \rho > 0$ *tais que*

$$(H_1)\ \ I(u) \geq \alpha > 0, \quad \text{para todo } u \in X;\ \ \|u\| = \rho$$

*e existe* $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e*

$$(H_2)\ \ I(e) < 0.$$

*Seja*

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t)),$$

*onde*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \ \gamma(0) = 0 \ \ e \ \ \gamma(1) = e\}.$$

*Se I satisfaz a condição* $(PS)_c$*, então c é um valor crítico de I, isto é, existe* $u \in X$ *tal que*

$$I(u) = c > 0 \quad e \quad I'(u) = 0.$$

**Prova.** Para $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ no Teorema anterior, temos que existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c$$

e

$$I'(u_n) \to 0.$$

Desde que I satisfaz a condição $(PS)_c$, existem $\left(u_{n_j}\right) \subset (u_n)$ e $u \in X$ tal que

$$u_{n_j} \to u \quad \text{em} \;\; X.$$

Da continuidade de $I$ e $I'$, temos

$$I(u) = c \quad \text{e} \quad I'(u) = 0.$$

$\blacksquare$

# Capítulo 3

# Casos Superlinear Subcrítico e Sublinear

Nesta seção estudaremos a imersão, e falta de imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p(x)}(\Omega)$ quando

$$1 \leq p(x) \leq \frac{2N}{N-2}, \quad x \in \Omega$$

e

$$p(x_0) = \frac{2N}{N-2}, \quad \text{para algum } x_0 \in \Omega,$$

e mostraremos uma condição para $p(x)$ para garantir tal imersão.

Como aplicação, discutimos a existência de uma solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$ para o seguinte problema com valor de contorno elíptico não linear com expoente variável $2 < p(x) \leq \dfrac{2N}{N-2}$,

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= u(x)^{p(x)-1} &, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0 &, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

## 3.1 Falta de imersão compacta

**Teorema 3.1** *Sejam $\Omega$ um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$ e $p(x)$ uma função mensurável em $\Omega$ satisfazendo*

$$1 \leq p(x) \leq 2^* \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

*Se existe $x_0 \in \Omega$ e constantes $C_0 > 0$, $\eta > 0$ tais que*

$$p(x) \geq 2^* - \frac{C_0}{\log\left(\frac{1}{|x-x_0|}\right)} \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{3.2}$$

*com* $|x - x_0| \leq \eta$*, então a imersão de* $H_0^1(\Omega)$ *em* $L^{p(x)}(\Omega)$ *não é compacta.*

**Prova.** Assuma que $x_0 = 0$ e considere a função

$$r(x) = 2^* - p(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que

- $0 \leq \varphi(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^N$;
- $\varphi(x) = 1, \forall\, x \in B_{\frac{1}{2}}(0)$;
- $\varphi(x) = 0, \forall\, x \in {B_1}^c(0)$.

Temos, supt$\varphi \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ \|x\| \leq 1\right\}$. Para $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\varphi_n(x) = n^{\frac{N-2}{2}} \varphi(nx).$$

Então,

$$\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad \text{supt } \varphi_n \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ \|x\| \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \varphi_n(x)|^2 dx &= \int_\Omega \left|n^{\frac{N-2}{2}} \nabla\varphi(nx)\right|^2 dx = n^{N-2} \int_\Omega |n\, \nabla\varphi(nx)|^2 dx \\ &= n^N \int_\Omega |\nabla\varphi(nx)|^2 dx = n^N \int_{|x|<\frac{1}{n}} |\nabla\varphi(nx)|^2 dx\end{aligned}.$$

Fazendo mudança de variável, $y = nx$, temos

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_n(x)|^2 dx = n^N \int_{|y|<1} |\nabla\varphi(y)|^2 \frac{1}{n^N}\, dy = \int_{|y|<1} |\nabla\varphi(y)|^2 dy$$

e

$$\int_\Omega |\varphi_n(x)|^{p(x)}\, dx = \int_{|x|<\frac{1}{n}} \left(n^{\frac{N-2}{2}}\right)^{p(x)} |\varphi(nx)|^{p(x)}\, dx. \tag{3.3}$$

Note que,

$$r(x) = \frac{2N}{N-2} - p(x) \ \Rightarrow\ (N-2)\, r(x) = 2N - p(x)(N-2)$$

ou seja,

$$\frac{(N-2)\,r(x)}{2} = N - \frac{p(x)\,(N-2)}{2} \;\Rightarrow\; \frac{p(x)\,(N-2)}{2} = N - \frac{(N-2)\,r(x)}{2}.$$

Logo, podemos reescrever (3.3) como

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\varphi_n(x)|^{p(x)}\,dx &= \int_{|x|<\frac{1}{n}} n^{N-\frac{(N-2)r(x)}{2}}\,|\varphi(nx)|^{p(x)}\,dx \\ &= n^N \int_{|x|<\frac{1}{n}} n^{-\frac{(N-2)r(x)}{2}}\,|\varphi(nx)|^{p(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Novamente, fazendo mudança de variável, $y = nx$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\varphi_n(x)|^{p(x)}\,dx &= n^N \int_{|y|<1} n^{-\frac{(N-2)}{2}r\left(\frac{y}{n}\right)}\,|\varphi(y)|^{p\left(\frac{y}{n}\right)}\,\frac{1}{n^N}\,dy \\ &= \int_{|y|<1} n^{-\frac{(N-2)}{2}r\left(\frac{y}{n}\right)}\,|\varphi(y)|^{p\left(\frac{y}{n}\right)}\,dy.\end{aligned}$$

Desde que,

$$\varphi(y) = 1, \quad \text{se} \quad |y| \leq \frac{1}{2}$$

e pela hipótese (3.2), para $|x| \approx 0$, temos

$$r(x) = 2^* - p(x) \leq \frac{C_0}{|\log|x||},$$

segue,

$$\begin{aligned}\int_{|y|<1} |\varphi(y)|^{p\left(\frac{y}{n}\right)} n^{-\frac{(N-2)}{2}r\left(\frac{y}{n}\right)}\,dy &\geq \int_{|y|\leq\frac{1}{2}} n^{-\frac{(N-2)}{2}r\left(\frac{y}{n}\right)}\,dy \\ &\geq \int_{|y|\leq\frac{1}{2}} \frac{1}{n^{\frac{N-2}{2}r\left(\frac{y}{n}\right)}}\,dy \\ &\geq \int_{|y|\leq\frac{1}{2}} \frac{1}{n^{\frac{N-2}{2}\frac{C_0}{|\log|\frac{y}{n}||}}}\,dy \\ &\geq \int_{|y|\leq\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{C_0}{|\log|\frac{y}{n}||}}\,dy.\end{aligned}$$

Para $\frac{1}{4} \leq |y| \leq \frac{1}{2}$, obtemos,

$$\left|\log\left(\frac{|y|}{n}\right)\right| = |\log|y| - \log n| = |\log n - \log|y||,$$

onde $n \approx \infty$, resulta,

$$\left|\log\left(\frac{|y|}{n}\right)\right| = \log n - \log|y| \geq \log n \geq \frac{1}{2}\log n. \tag{3.4}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\varphi_n(x)|^{p(x)}\, dx &\geq \int_{\frac{1}{4}\leq|y|\leq\frac{1}{2}} e^{\log\left(\frac{1}{n^{\frac{N-2}{2}\frac{C_0}{|\log|\frac{y}{n}||}}}\right)} dy \\
&\geq \int_{\frac{1}{4}\leq|y|\leq\frac{1}{2}} e^{-\log\left(n^{\frac{N-2}{2}\frac{C_0}{|\log|\frac{y}{n}||}}\right)} dy \\
&\geq \int_{\frac{1}{4}\leq|y|\leq\frac{1}{2}} e^{-\frac{(N-2)}{2}\frac{C_0}{|\log|\frac{y}{n}||}\log n}\, dy.
\end{aligned}$$

Por (3.4),

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\varphi_n(x)|^{p(x)}\, dx &\geq \int_{\frac{1}{4}\leq|y|\leq\frac{1}{2}} e^{-\frac{(N-2)}{2}\frac{2C_0}{\log n}\log n}\, dy \\
&\geq \int_{\frac{1}{4}\leq|y|\leq\frac{1}{2}} e^{-(N-2)C_0}\, dy \qquad . \\
&\geq e^{-(N-2)C_0}\ \left|\left\{y;\ \tfrac{1}{4}\leq|y|\leq\tfrac{1}{2}\right\}\right| =: \delta = (\delta(N)) > 0
\end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\int_{\Omega} |\nabla\varphi_n(x)|^2\, dx = \int_{|y|<1} |\nabla\varphi(y)|^2\, dy \leq \|\varphi\|^2 =: C,$$

isso implica,

$$\|\varphi_n\|^2 \leq C,$$

ou seja, $(\varphi_n) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada. Sendo $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ reflexivo, então existe $(\varphi_{n_k}) \subset (\varphi_n)$ e $\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\varphi_{n_k} \rightharpoonup \psi \quad em \quad H_0^1(\Omega),$$

acarretando,

$$\Rightarrow \varphi_{n_k} \to \psi \quad em \quad L^2(\Omega).$$

A menos de subsequência, temos

$$\varphi_{n_k}(x) \to \psi(x) \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.5}$$

Porém,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x)|^2 \, dx = \int_\Omega \left| n^{\frac{N-2}{2}} \varphi(nx) \right|^2 dx = n^{N-2} \int_\Omega |\varphi(nx)|^2 \, dx.$$

Fazendo mudança de variável, $y = nx$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi_n(x)|^2 \, dx &= n^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|^2 \frac{1}{n^N} \, dy \\ &= n^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|^2 \, dy \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

resultando

$$\|\varphi_n\|_2^2 \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

ou seja,

$$\varphi_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Portanto,

$$\varphi_n(x) \to 0 \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6), segue

$$\psi(x) = 0 \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x)|^{p(x)} \, dx \geq \delta > 0, \quad \text{para} \quad n \approx \infty.$$

Logo,

$$|\varphi_n|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0; \quad \int_\Omega \left| \frac{\varphi_n(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \geq \delta_1 > 0.$$

Deste modo, a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p(x)}(\Omega)$ não é compacta. ■

## 3.2 Imersão compacta

**Teorema 3.2** *Sejam $\Omega$ um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$ e $p(x)$ uma função mensurável em $\Omega$ satisfazendo*

$$1 \leq p(x) \leq 2^* \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

*Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ e constantes $C_0$, $\eta > 0$ e $0 < \ell < 1$ tal que*

$$\operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega,\ |x-x_0|\geq\eta} p(x) < \frac{2N}{N-2}$$

*e*

$$p(x) \leq \frac{2N}{N-2} - \frac{C_0}{\left|\log\left(\frac{1}{|x-x_0|}\right)\right|^{\ell}} \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,$$

*com $|x - x_0| \leq \eta$. Então, a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p(x)}(\Omega)$ é compacta.*

**Prova.** Podemos assumir $x_0 = 0$ e $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Primeiro, note que se $A \subset \Omega$ é mensurável e $p(x) \leq \overline{p} < 2^*$ em $A$, então para $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_A |v(x)|^{p(x)}dx &= \int_{A\cap\{v<1\}} |v(x)|^{p(x)}dx + \int_{A\cap\{v\geq 1\}} |v(x)|^{p(x)}dx \\
&< \int_A dx + \int_{A\cap\{v\geq 1\}} |v(x)|^{p(x)}dx \\
&< |A| + \int_{A\cap\{v\geq 1\}} |v(x)|^{\overline{p}}dx,
\end{aligned}$$

implicando,

$$\int_A |v(x)|^{p(x)}dx < |A| + \int_A |v(x)|^{\overline{p}}\, dx. \tag{3.7}$$

Observe que,

$$\int_A |v(x)|^{\overline{p}}\, dx = \int_A |1.v(x)|^{\overline{p}}\, dx$$

onde $|v(x)|^{\overline{p}} \in L^{\frac{2^*}{\overline{p}}}(A)$, pois $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{2^*}(\Omega)$. Utilizando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_A |v(x)|^{\overline{p}}dx &\leq \left(\int_A |1|^{\frac{2^*}{2^*-\overline{p}}}\right)^{\frac{2^*-\overline{p}}{2^*}} \left(\int_A |v(x)|^{2^*}\right)^{\frac{\overline{p}}{2^*}} \\
&\leq |A|^{\frac{2^*-\overline{p}}{2^*}} \left(\int_A |v(x)|^{2^*}\right)^{\frac{\overline{p}}{2^*}} dx.
\end{aligned}$$

Em (3.7), obtemos

$$\int_A |v(x)|^{p(x)}\, dx \;\leq\; |A| + |A|^{\frac{2^*-\overline{p}}{2^*}} \left( \int_A |v(x)|^{2^*}\, dx \right)^{\frac{\overline{p}}{2^*}}.$$

Sendo $H_0^1(A) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{2^*}(A)$, consequêntemente

$$\|v\|_{L^{2^*}(A)} \leq c_1 \|v\|_{H_0^1(A)}.$$

Assim,

$$\int_A |v(x)|^{p(x)}\, dx \;\leq\; |A| + {c_1}^{\overline{p}}\, |A|^{\frac{2^*-\overline{p}}{2^*}} \left( \int_A |\nabla v|^2 \right)^{\frac{\overline{p}}{2}},$$

acarretando,

$$\int_A |v(x)|^{p(x)} dx < |A| + {c_1}^{2^*} |A|^{\frac{2^*-\overline{p}}{2^*}} \left( \int_\Omega |\nabla v|^2 \right)^{\frac{\overline{p}}{2}} \tag{3.8}$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $c_1 > 1$.

Seja $c_2 > 1$. Vamos mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \int_{B_\varepsilon(0)} |v(x)|^{p(x)} dx;\; \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_2 \right\} = 0. \tag{3.9}$$

Com efeito, seja $\varepsilon \in (0, \eta)$ e defina $\xi\,(= \xi(\varepsilon))$ por

$$\left( \frac{\xi}{2} \right)^{\frac{1}{N}} = \varepsilon.$$

Considere,

$$a_n = \left( \frac{\xi}{2} \right)^{\frac{n}{N}},\; para\; n \in \mathbb{N}.$$

Segue que,

- $B_{a_{n+1}}(0) \subset B_{a_n}(0)\,,\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$

  De fato, dado $x \in B_{a_{n+1}}(0)$, temos

  $$\|x\| < a_{n+1} = \varepsilon^{n+1} < \varepsilon^n = a_n$$

  para $\varepsilon \approx 0$. Assim, $x \in B_{a_n}(0)\,.$

- $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0) \right)$

  De fato, dado $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0) \right)$, então

  $$\exists\, n_0 \in \mathbb{N};\; x \in B_{a_{n_0}}(0) \setminus B_{a_{n_0+1}}(0)$$

implicando,

$$x \in B_{a_{n_0}}(0) \subset B_{a_1}(0) = B_\varepsilon(0).$$

Além disso, $x \neq 0$, pois caso contrário,

$$x = 0 \Rightarrow x \in B_{a_{n_0+1}}(0),$$

contradizendo a hipótese. Logo $x \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$.

Por outro lado, dado $x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)\right)\right)^c$, temos

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)\right)^c \Rightarrow x \in \left(B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)\right)^c,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ou seja,

$$x \in (B_{a_1}(0))^c \cup \{0\},\ \text{para } n \approx \infty,$$

por definição de $a_1$,

$$x \in (B_\varepsilon(0))^c \cup \{0\},\ \text{para } n \approx \infty,$$

portanto,

$$x \in ((B_\varepsilon(0)) \setminus \{0\})^c.$$

Mostrando que,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)\right)\right)^c \subset ((B_\varepsilon(0)) \setminus \{0\})^c,$$

por consequência,

$$(B_\varepsilon(0)) \setminus \{0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)\right).$$

- $p(x) \leq 2^* - \frac{C_0}{\left(\log\left|\frac{1}{a_{n+1}}\right|\right)^\ell}$ em $B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)$.

  De fato, por hipótese

$$p(x) \leq 2^* - \frac{C_0}{\left(\log\left|\frac{1}{x}\right|\right)^\ell} \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \text{com} \quad |x| < \eta.$$

Tomando $x \in B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)$, temos

$$|x| < a_n = \left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{n}{N}} = \varepsilon^n < \eta^n < \eta, \quad \text{para} \quad \eta \approx 0.$$

E mais,

$$|x| \geq |a_{n+1}| \Rightarrow \log\left(\frac{1}{|x|}\right) \leq \log\left(\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)$$

ou melhor,

$$\frac{-C_0}{\left(\log\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{\ell}} \leq \frac{-C_0}{\left(\log\left(\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)\right)^{\ell}}.$$

Deste modo,

$$p(x) \leq 2^* - \frac{C_0}{\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\ell}} \leq 2^* - \frac{C_0}{\left(\log\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)^{\ell}},$$

para $x \in B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)$.

Vamos denotar $\sigma_N$ o volume da bola unitária $B_1(0)$. Então, para cada $\xi > 0$ suficientemente pequeno e para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\left|B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)\right|^{\frac{C_0}{2^*\left(\log\left(\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)\right)^{\ell}}} &= \left(|B_{a_n}(0)| - \left|B_{a_{n+1}}(0)\right|\right)^{\frac{C_0}{2^*(-\log(|a_{n+1}|))^{\ell}}} \\
&= \left((a_n)^N\sigma_N - (a_{n+1})^N\sigma_N\right)^{\frac{C_0}{2^*\left(-\log\left(\left|\frac{\xi}{2}\right|^{\frac{n+1}{N}}\right)\right)^{\ell}}} \\
&= \left[\left(\left(\tfrac{\xi}{2}\right)^n - \left(\tfrac{\xi}{2}\right)^{n+1}\right)\sigma_N\right]^{\frac{C_0}{2^*\frac{(n+1)^{\ell}}{N^{\ell}}(\log 2 - \log\xi)^{\ell}}} \\
&\leq \left[\left(\tfrac{\xi}{2}\right)^n\sigma_N\right]^{\frac{C_0}{2^*\frac{(n+1)^{\ell}}{N^{\ell}}(\log 2 - \log\xi)^{\ell}}}.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\log 2 - \log\xi \leq -2\log\xi \;\Leftrightarrow\; \log 2 \leq -\log\xi \;\Leftrightarrow\; \xi \leq \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|B_{a_n}(0) \setminus B_{a_{n+1}}(0)\right|^{\frac{C_0}{2^*\left(\log\left(\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)\right)^{\ell}}} &\leq \left[\left(\tfrac{\xi}{2}\right)^n\sigma_N\right]^{\frac{C_0N^{\ell}}{2^*(n+1)^{\ell}(-2\log\xi)^{\ell}}} \\
&= \sigma_N^{\frac{C_0N^{\ell}}{2^*(n+1)^{\ell}(-2\log\xi)^{\ell}}}\left(\tfrac{\xi}{2}\right)^{\frac{C_0N^{\ell}}{2^*(-2\log\xi)^{\ell}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\ell}n^{1-\ell}}
\end{aligned}$$

resultando,

$$\left|B_{a_n}(0)\setminus B_{a_{n+1}}(0)\right|^{\frac{C_0}{2^*\left(\log\left(\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)\right)^{\ell}}}\leq c_3\,\delta^{n^{1-\ell}}, \tag{3.10}$$

onde $c_3$ é constante positiva satisfazendo

$$\sigma_N^{\frac{C_0N^{\ell}}{2^*(n+1)^{\ell}\,2^{\ell}(-\log\xi)^{\ell}}}\leq c_3,$$

para cada $\xi\approx 0$ e para cada $n\in\mathbb{N}$, $\delta\,(=\delta\,(\xi))$ é definido por

$$\delta=\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{C_0N^{\ell}}{2^*2^{2\ell}(-\log\xi)^{\ell}}}.$$

Usando (3.8) e (3.10), com $A=B_{\varepsilon}(0)$ e

$$\overline{p}_n=2^*-\frac{C_0}{\left(\log\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)^{\ell}},$$

obtemos,

$$\int_{B_{\varepsilon}(0)}|v(x)|^{p(x)}\,dx\;=\;\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_{a_n}(0)\setminus B_{a_{n+1}}(0)}|v(x)|^{p(x)}\,dx,$$

por (3.8),

$$\leq\;\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|B_{a_n}(0)\setminus B_{a_{n+1}}(0)\right|+{c_1}^{2^*}\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^2\right)^{\frac{\overline{p}}{2}}\left|B_{a_n}(0)\setminus B_{a_{n+1}}(0)\right|^{\frac{\mathrm{C}_0}{2^*\left(\log\left|\frac{1}{a_{n+1}}\right|\right)^{l}}}\right)$$

$$\leq\;\sum_{n=1}^{\infty}\left|B_{a_n}(0)\setminus B_{a_{n+1}}(0)\right|+{c_1}^{2^*}\|v\|^{\overline{p}}\left|B_{a_n}(0)\setminus B_{a_{n+1}}(0)\right|^{\frac{C_0}{2^*\left(\log\left(\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)\right)^{\ell}}},$$

implicando,

$$\int_{B_{\varepsilon}(0)}|v(x)|^{p(x)}\,dx\;\leq\;|B_{\varepsilon}(0)|+{c_1}^{2^*}{c_2}^{2^*}\sum_{n=1}^{\infty}\left|B_{a_n}(0)\setminus B_{a_{n+1}}(0)\right|^{\frac{C_0}{2^*\left(\log\left(\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)\right)^{\ell}}},$$

usando (3.10),

$$\int_{B_{\varepsilon}(0)}|v(x)|^{p(x)}\,dx\;\leq\;|B_{\varepsilon}(0)|+{c_1}^{2^*}{c_2}^{2^*}c_3\sum_{n=1}^{\infty}\delta^{n^{1-\ell}}.$$

Observe que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n^{1-\ell}} \leq \delta + \int_1^{\infty} \delta^{x^{1-\ell}} < \infty, \quad \text{para} \quad 0 < \delta < 1,$$

e $\delta = (\xi(\varepsilon)) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+$, então

$$\delta + \int_1^{\infty} \delta^{x^{1-\ell}} dx \to 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n^{1-\ell}} \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Acarretando,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_\varepsilon(0)} |v(x)|^{p(x)} dx = 0,$$

portanto,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \int_{B_\varepsilon(0)} |v(x)|^{p(x)} dx; \;\; v \in H_0^1(\Omega), \;\; \|v\| \leq c_2 \right\} = 0,$$

valendo (3.9).

Seja $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Sendo $\Omega$ limitado e $1 \leq p(x) \leq \overline{p} < 2^*$, pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^{\overline{p}}(\Omega)$ existe uma subsequência de $(u_n)$ (a qual ainda denotaremos por $u_n$) tal que

$$u_n \to u \;\; \text{em} \;\; L^{\overline{p}}(\Omega).$$

Logo, passando novamente a uma subsequência se necessário, temos

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p. em} \;\; \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq g_0 \in L^{\overline{p}}(\Omega).$$

Pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^1(\Omega)$, existe uma subsequência

$$u_n \to u \;\; \text{em} \;\; L^1(\Omega).$$

A menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p. em} \;\; \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq g_1 \in L^1(\Omega).$$

Defina

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega; \ \ |u(x)| > 1\}$$

e

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega; \ \ |u(x)| < 1\}.$$

Em $\Omega_1$, temos

$$|u_n(x)|^{p(x)} \leq |u_n(x)|^{\overline{p}} \leq g_0^{\overline{p}}(x) \leq g_0^{\overline{p}}(x) + g_1(x) \ \ \text{q.t.p. em } \Omega_1, \tag{3.11}$$

com $g_0^{\overline{p}} \in L^1(\Omega)$. Por outro lado,

$$|u_n(x)|^{p(x)} \leq |u_n(x)| \leq g_1(x) \leq g_0^{\overline{p}}(x) + g_1(x) \ \ \text{q.t.p. em } \Omega_0. \tag{3.12}$$

Logo, por (3.11) e (3.12), tem-se

$$|u_n(x)|^{p(x)} \leq g_0^{\overline{p}}(x) + g_1(x) \ \ \text{q.t.p. em } \Omega_0 \cup \Omega_1,$$

ou ainda

$$|u_n(x)|^{p(x)} \leq g_0^{\overline{p}}(x) + g_1(x) \ \ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

pois $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \partial\Omega_0$, com $|\partial\Omega_0| = 0$ e

$$g_0^{\overline{p}} + g_1 \in L^1(\Omega).$$

Sendo $u_n(x)^{p(x)} \to u(x)^{p(x)}$ q.t.p. e $\Omega$, pelo TCDL, temos

$$u_n^{p(x)} \to u^{p(x)} \ \ \text{em } L^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\rho(u_n) \to \rho(u),$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega |u_n - u|^{p(x)} dx \to 0,$$

isto é,

$$|u_n - u|_{p(x)} \to 0.$$

■

## 3.3 O problema superlinear subcrítico

Como consequência do Teorema 3.2, obtemos o seguinte resultado

**Teorema 3.3** *Sejam $\Omega$ um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$ e $p(x)$ uma função mensurável em $\Omega$ satisfazendo*

$$1 \leq p(x) \leq 2^* \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

*Suponha todas as hipóteses do Teorema 3.2. Suponha também que $\partial\Omega$ é suave e*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \quad p(x) > 2.$$

*Então, o problema* (3.1) *possui uma solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$.*

**Prova.** Defina o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \frac{(u_+(x))^{p(x)}}{p(x)} dx,$$

onde $u_+ = \max\{u, 0\}$. Temos $J \in C^1(\mathrm{H}_0^1(\Omega); \mathbb{R})$, com

$$J'(u)\, v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega (u_+(x))^{p(x)-2} u_+(x)\, v(x)\, dx.$$

Desde que

$$2 < \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} q(x) \leq q(x) \leq 2^* \ \text{ e } \ H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{2^*}(\Omega),$$

seguem as afirmações:

**Afirmação 3.4** *Existe $e \in H_0^1(\Omega)$, com $\|e\| > r$ e*

$$b = \underset{\|u\|=r}{inf}\, J(u) > J(0) \geq J(e).$$

De fato, observe que, para $\|u\| = r$, temos

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \frac{(u_+(x))^{p(x)}}{p(x)} dx = \frac{r^2}{2} - \int_\Omega \frac{(u_+(x))^{p(x)}}{p(x)} dx.$$

Como,

$$2 < p(x) \leq 2^* \Rightarrow \frac{1}{p(x)} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{p(x)}.$$

Assim,

$$J(u) = \frac{r^2}{2} - \int_\Omega \frac{(u_+(x))^{p(x)}}{p(x)} dx > \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_+(x))^{p(x)} dx.$$

Por hipótese do Teorema 3.2,

$$L^{p(x)} \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega),$$

logo, existe $c_1 > 0$ tal que

$$|u_+|_{p(x)}^{p_-} \leq c_1 \|u\|^{p_-} = c_1 r^{p_-},$$

tomando $r \approx 0$, temos pelo item (iv) da Proposição 1.6,

$$|u_+|_{p(x)} \leq 1 \;\Rightarrow\; \rho(u_+) \leq |u_+|_{p(x)}^{p_-} \leq c_1 r^{p_-}.$$

Logo,

$$J(u) \;>\; \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\rho(u_+) \;\geq\; \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}c_1 r^{p_-} \;=\; \frac{r^2}{2}\left(1 - c_1 r^{p_- - 2}\right) \;>\; 0,$$

se, e somente se,

$$1 - c_1 r^{p_- - 2} > 0,$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{c}\right)^{\dfrac{1}{p_- - 2}} > r.$$

Tomando então $r \approx 0$, tal que

$$\left(\frac{1}{c}\right)^{\dfrac{1}{p_- - 2}} > r,$$

temos,

$$b = \inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0).$$

Agora, considerando $F(u) = \dfrac{(u_+(x))^{p(x)}}{p(x)}$, obtemos

$$F(t) = \frac{t^{p(x)}}{p(x)} \geq \frac{t^{p(x)}}{2^*} \geq \frac{t^{p_-}}{2^*}, \quad \text{se} \quad t \geq 1$$

e

$$F(t) = \frac{t^{p(x)}}{p(x)} \geq c > 0, \quad \text{se} \quad 0 \leq t < 1.$$

Resultando,

$$F(t) \geq c + \frac{t^{p_-}}{2^*}, \quad \forall\, t \geq 0 \quad (p_- = \theta > 2).$$

Fixando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ e $\varphi \neq 0$, observe que para $t \geq 0$

$$\int_\Omega F(t\varphi)dx \;\geq\; \int_\Omega c + \frac{1}{2^*}(t\varphi)^{p_-} \;\geq\; c\,|\Omega| + \frac{t^{p_-}}{2^*}\int_\Omega \varphi^{p_-}.$$

Seja, $c_2 = c\,|\Omega|$ e $c_3 = \dfrac{1}{2^*}\displaystyle\int_\Omega \varphi^{p_-}$, segue

$$\int_\Omega F(t\varphi)dx \;\geq\; c_2 + c_3 t^{p_-}.$$

Logo,

$$J(t\varphi) = \frac{1}{2}\|t\varphi\|^2 - \int_\Omega F(t\varphi)dx \;\leq\; \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - c_2 - c_3 t^{p_-} \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Assim,

$$J(t\varphi) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Tomando $e = t_*\varphi$, com $t_* \approx \infty$, obtemos

$$\|e\| > r \quad e \quad J(e) < 0.$$

**Afirmação 3.5** *$J$ satisfaz a condição $(PS)$.*

De fato, dada $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$, ou seja,

$$J(u_n) \to c \quad e \quad J'(u_n) \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Assim, $(J(u_n))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, logo existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|J(u_n)| \leq k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. Com efeito, como

$$2 < p_- \leq p(x) \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{p_-} \geq \frac{1}{p(x)} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{p(x)} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p_-}.$$

E sabendo que

$$J(u_n) \to c \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

temos,

$$\begin{aligned} c + o_n(1) \;&=\; J(u_n)) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p(x)}}{p(x)}dx \\ &\geq\; \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p_-}\int_\Omega (u_n^+)^{p(x)}dx, \end{aligned}$$

implicando,

$$\frac{1}{p_-}\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{p(x)}dx \;\geq\; \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - c - o_n(1),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{p(x)}dx \;\geq\; \frac{p_-}{2}\|u_n\|^2 - p_-c - p_-o_n(1),$$

portanto,

$$\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{p(x)}dx \;\geq\; \frac{p_-}{2}\|u_n\|^2 - c_1, \tag{3.13}$$

onde $c_1 = p_-c + p_-o_n(1)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
J(u_n) - \frac{1}{2}J'(u_n)u_n &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p(x)}}{p(x)}dx - \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{p(x)}u_n^+u_n\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)-2}u_n^+(x)\left(u_n^+(x) + u_n^-(x)\right)dx - \int_\Omega \frac{u_n^+(x)^{p(x)}}{p(x)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)-2}\left(u_n^+(x)\right)^2 + u_n^+(x)^{p(x)-2}u_n^+(x)u_n^-(x)dx \\
&- \int_\Omega \frac{u_n^+(x)^{p(x)}}{p(x)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{u_n^+(x)^{p(x)}}{p(x)}dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)}dx - \frac{1}{p_-}\int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)}dx.
\end{aligned}$$

Resultando,

$$J(u_n) - \frac{1}{2}J'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_-}\right)\int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)}dx. \tag{3.14}$$

Note que,

$$J(u_n) = c + o_n(1) \tag{3.15}$$

e

$$-J'(u_n)u_n \leq |J'(u_n)u_n| \leq \|J'(u_n)\|\,\|u_n\| \leq \varepsilon\,\|u_n\|. \tag{3.16}$$

Somando (3.15) e (3.16), temos

$$J(u_n) - \frac{J'(u_n)u_n}{2} \leq c + o_n(1) + \frac{\varepsilon}{2}\|u_n\|.$$

Logo, em (3.14) obtemos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_-}\right)\int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)}\,dx \;\leq\; c+o_n(1)+\frac{\varepsilon}{2}\|u_n\|$$

resultando,

$$\int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)}\,dx \;\leq\; \frac{c_2+\dfrac{\varepsilon}{2}\|u_n\|}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p_-}},$$

onde $c_2 = c + o_n(1)$. Assim, tomando $c_3 = \frac{c_2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_-}}$ e $c_4 = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_-}}$, segue que

$$c_3 + c_4\|u_n\| \;\geq\; \int_\Omega u_n^+(x)^{p(x)}dx. \tag{3.17}$$

De (3.13) e (3.17), resulta

$$\frac{p_-}{2}\|u_n\|^2 - c_1 \;\leq\; c_3 + c_4\|u_n\|,$$

acarretando,

$$c_5\|u_n\|^2 \;\leq\; c_1 + c_3 + c_4\|u_n\|,$$

onde $c_5 = \dfrac{p_-}{2}$.

Portanto, temos $(u_n)$ limitada em $H_0^1(\Omega)$, sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, existe $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Note que,

$$\int_\Omega |\nabla(u_{n_k}-u)|^2 = \int_\Omega \nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u) - \int_\Omega \nabla u\nabla(u_{n_k}-u).$$

Assim, como queremos mostrar que

$$u_{n_k} \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

resta mostrar que,

$$\int_\Omega \nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u) \to 0, \quad \text{quando} \quad k\to\infty. \tag{3.18}$$

Usando $J'(u_{n_k}) \to 0$, concluímos

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_\Omega \nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{p(x)}(u_{n_k}-u)\right|.$$

Sabemos pelo Teorema 3.2 que

$$\left(u_{n_k}^+\right)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega)$$

e

$$(u_{n_k}-u) \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Pela Desigualdade de Hölder generelizada, temos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\int_\Omega \nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)\right| &\leq \lim_{k\to\infty}\left[c\left|\left(u_{n_k}^+\right)^{p(x)-1}\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}|u_{n_k}-u|_{p(x)}\right]\\ &\leq c\lim_{k\to\infty}\left[\left|u_{n_k}^+\right|_{p(x)}|u_{n_k}-u|_{p(x)}\right].\end{aligned}$$

Como $\left(u_{n_k}^+\right)$ é limitada e $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^{p(x)}(\Omega)$, então

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\left|u_{n_k}^+\right|_{p(x)}|u_{n_k}-u|_{p(x)}\right] = 0$$

e assim,

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\int_\Omega \nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)\ dx\right| = 0,$$

valendo (3.18). Logo,

$$u_{n_k} \to u \quad em \quad H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $J$ satisfaz a condição $(PS)$.

Pelo Teorema do Passo da Montanha, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u) = c \quad e \quad J'(u) = 0,$$

ou seja, $u$ é solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= {u_+}^{p(x)-1} &, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0 &, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo temos que $u(x) > 0$ em $\Omega$, logo $u$ é solução para o problema (3.1) . ■

## 3.4 O problema sublinear

Nosso objetivo agora é estudar análise de soluções positivas para o problema elíptico sublinear

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{p(x)} \quad , \qquad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad , \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado e o expoente $p$ é considerado uma função positiva em $C^{\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, sendo a principal característica o fato que $0 < \inf\limits_{\Omega} p < p(x) < \sup\limits_{\Omega} p < 1$.

**Teorema 3.6** *Seja $p \in C^{\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, com $0 < \inf\limits_{\Omega} p < p(x) < \sup\limits_{\Omega} p < 1$ e considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= u^{p(x)} \quad , \qquad x \in \Omega \\ u(x) &= 0 \quad , \qquad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

*Então, o problema (3.19) admite uma única solução fraca positiva $u_0 \in C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \beta < 1$ arbitrário.*

**Prova.**

Considere o funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p(x)+1} |u|^{p(x)+1} \right). \tag{3.20}$$

Pode-se notar que o funcional está bem definido, pois

$$u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{\mathrm{H}_0^1} < \infty$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)+1} |u|^{p(x)+1} < \int_{\Omega} |u|^{p(x)+1} < \infty,$$

onde $H_0^1(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^{p(x)+1}(\Omega)$.

**Proposição 3.7** *$J$ é coercivo.*

**Prova.** Suponha por contradição que exista $\{u_n\} \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|u_n\|_{\mathrm{H}_0^1} \to \infty \quad e \quad J(u_n) \leq c.$$

Então,

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)+1}\left|u_n\right|^{p(x)+1} = \int_\Omega \frac{1}{2}\left|\nabla u_n\right|^2 - J(u_n) \geq \frac{\|u_n\|^2}{2} - c \to \infty$$

implicando,

$$\int_\Omega \left|u_n\right|^{p(x)+1} > \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1}\left|u_n\right|^{p(x)+1} \to \infty,$$

ou seja,

$$\rho(u_n) \to \infty.$$

Pelo Corolário 1.8, temos

$$\left|u_n\right|_{p(x)+1} \to \infty. \tag{3.21}$$

Note que,

$$1 < p(x)+1 < 2 \Rightarrow L^2 \subset L^{p(x)+1} \quad \text{e} \quad \left|u_n\right|_{p(x)+1} \leq c\left\|u_n\right\|_2. \tag{3.22}$$

Usando (3.21) em (3.22), obtemos

$$\left\|u_n\right\|_2 \to \infty.$$

Definindo $v_n = \dfrac{u_n}{t_n}$, onde $t_n = \left\|u_n\right\|_2$, temos

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} t_n^{p(x)-1}\left|v_n\right|^{p(x)+1} \leq \int_\Omega t_n^{p(x)-1}\left|v_n\right|^{p(x)+1} \leq \int_\Omega t_n^{p(x)-1}\frac{\left|u_n\right|^{p(x)+1}}{t_n^{p(x)+1}}$$

$$\leq \int_\Omega \frac{\left|u_n\right|^{p(x)+1}}{t_n^2} = \frac{1}{t_n^2}\rho(u_n),$$

por (3.22),

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} t_n^{p(x)-1}\left|v_n\right|^{p(x)+1} \leq \frac{1}{t_n^2} c \left\|u_n\right\|_2.$$

Desde que,

$$\frac{c}{t_n^2}\left\|u_n\right\|_2 = \frac{c}{t_n^2} t_n = c t_n^{-1} \to 0,$$

segue,

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} t_n^{p(x)-1}\left|v_n\right|^{p(x)+1} \to 0. \tag{3.23}$$

**Afirmação 3.8** $J(v_n) \leq o(1)$

De fato,

$$J(v_n) = \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla v_n|^2 - \frac{1}{p(x)+1} |v_n|^{p(x)+1} \right) = \int_\Omega \left( \frac{1}{2} \frac{1}{t_n^2} |\nabla u_n|^2 - \frac{1}{p(x)+1} |v_n|^{p(x)+1} \right).$$

Como

$$- \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} \; |v_n|^{p(x)+1} \; < \; 0,$$

temos,

$$J(v_n) \; \leq \; \frac{t_n^{-2}}{2} \; \|u_n\|^2 . \tag{3.24}$$

Por hipótese, $J(u_n) \; \leq \; c$, logo

$$J(u_n) \; = \; \frac{1}{2} \; \|u_n\|^2 \; - \; \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} \; |u_n|^{p(x)+1} \; \leq \; c,$$

de onde segue,

$$\frac{1}{2} \; \|u_n\|^2 \; \leq \; c \; + \; \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} \; |u_n|^{p(x)+1} .$$

Em (3.24), obtemos

$$\begin{aligned} J(v_n) \; &\leq \; c \, t_n^{-2} \; + \; t_n^{-2} \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} \left| \frac{t_n \; u_n}{t_n} \right|^{p(x)+1} \\ &\leq \; c \, t_n^{-2} \; + \; \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} \; t_n^{-2} \; t_n^{p(x)+1} \; |v_n|^{p(x)+1} \\ &\leq \; o(1) \; + \; \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1} \; t_n^{p(x)-1} \; |v_n|^{p(x)+1} , \end{aligned}$$

usando (3.23),

$$J(v_n) \leq \; o(1) .$$

Portanto,

$$v_n \; \to \; 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{H}_0^1(\Omega) .$$

Pela desigualdade de Poincaré, existe $c \; > 0$ tal que

$$\|v_n\|_2 \; \leq \; c \; \|v_n\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \; \to \; 0,$$

de onde segue,

$$\|v_n\|_2 \; \to \; 0.$$

Contradizendo,

$$\|v_n\|_2 \;=\; 1.$$

Portanto, $J$ é coercivo. ■

Por outro lado, seja $\lambda_1$ o primeiro autovalor de $-\Delta u$ com condição de fronteira de Dirichlet e $\varphi_1$ a autofunção positiva associada à $\lambda_1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{J(t\varphi_1)}{t^2} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \frac{t^2}{2}\,|\nabla\varphi_1|^2 \;-\; \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1}\,|t\varphi_1|^{p(x)+1}}{t^2} \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}\,|\nabla\varphi_1|^2 \;-\; \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1}\,t^{p(x)-1}\,|\varphi_1|^{p(x)+1}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Pela 1ª identidade de Green, temos

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 \;=\; \int_\Omega \lambda_1\,\varphi_1^2.$$

Substituindo em (3.25),

$$\frac{J(t\varphi_1)}{t^2} = \int_\Omega \frac{\lambda_1\varphi_1^2}{2} \;-\; \int_\Omega \frac{1}{p(x)+1}\,t^{p(x)-1}\,|\varphi_1|^{p(x)+1}$$

para $t \;>\; 0$. Tomando $t \approx 0$,

$$t^{p(x)-1} \approx +\infty,$$

implicando,

$$\frac{J(t\varphi_1)}{t^2} \;<\; 0, \quad \text{para} \quad t \approx 0.$$

Portanto, $J$ atinge o mínimo absoluto em algum $u_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $u_0 \neq 0$, que pode ser assumido como não negativo. Essa função $u_0$ é em particular uma solução fraca não negativa para (3.19). Por [26] segue $u_0 \in \mathrm{C}^{1,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$, para cada $0 < \beta < 1$.

Para provar a unicidade, assuma que $u$, $v$ são soluções fraca para (3.19). Vamos mostrar o Lema 3.1, que será usado na próxima proposição:

**Lema 3.1** *Para cada função $u \geq 0$ vale*

$$|u|^{p(x)} \leq 1 + |u|.$$

**Prova.** De fato, considere primeiro $u \geq 1$, e assim

$$\frac{|u|^{p(x)}}{u+1} = \frac{|u|^{p(x)-1}}{1+\dfrac{1}{u}} \leq \frac{|u|^{p_+-1}}{1+\dfrac{1}{u}} \;\to\; 0 \quad \text{quando} \;\; u \to 0.$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$|u| > M \;\Rightarrow\; \frac{|u|^{p(x)}}{u+1} < \varepsilon,$$

implicando,

$$|u|^{p(x)} < \varepsilon\,(u+1)\,, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Tomando $\varepsilon < 1$, segue que

$$|u|^{p(x)} < (u+1)\,.$$

Considere Agora $u \approx 0$. Temos,

$$\lim_{u \to 0} \frac{|u|^{p(x)}}{u+1} = 0,$$

em outras palavras, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|u| \leq \delta \;\Rightarrow\; |u|^{p(x)} < \varepsilon\,(u+1)\,.$$

Tomando, novamente, $\varepsilon < 1$,

$$|u|^{p(x)} < (u+1)\,, \quad \forall\, x \in \Omega \quad \text{e} \quad |u| \leq \delta.$$

Por outro lado,

$$|u|^{p(x)} \leq c, \quad \forall\;\; \delta \leq |u| \leq M \quad \text{e} \quad x \in \Omega$$

e

$$|u|^{p(x)} \leq u+1, \quad \forall\;\; |u| \leq \delta \quad \text{e} \quad |u| \geq M.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u|^{p(x)} &\leq c + u + 1, \\ &\leq \max\{c, 1\}\,(u+1) \\ &\leq \widetilde{c}\,(u+1)\,, \quad \forall\, x \in \Omega. \end{aligned}$$

■

**Proposição 3.9** *A aplicação* $t \mapsto \dfrac{t^{p(x)}}{t}$ *é decrescente em* $(0, +\infty)$ *e para cada* $u \geq 0$, *a função* $x \mapsto u^{p(x)} \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega)$.

De fato,

$$\frac{t^{p(x)}}{t} \;=\; t^{p(x)-1}.$$

Assim, tomando

$$t_1 < t_2 \quad \text{em} \quad (0,+\infty)$$

temos,

$$t_1^{p(x)-1} > \; t_2^{p(x)-1}.$$

Portanto, $t \;\mapsto\; \dfrac{t^{p(x)}}{t}$ é decrescente em $(0,+\infty)$.

Pelo Lema 3.1,

$$|u|^{p(x)} \;\leq\; (1+u)\,.$$

Assim, se $u \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega)$, então $u^{p(x)} \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega)$.

Por [8] temos que a seguinte desigualdade se mantém

$$I \;=\; \left\langle \left(-\frac{\Delta u}{u}\right) - \left(-\frac{\Delta v}{v}\right),\; u^2 - v^2 \right\rangle \geq 0,$$

isto é,

$$I \;=\; \int_{\Omega} \left(-\frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}\right)\left(u^2 - v^2\right) \;\geq 0.$$

Por outro lado,

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}\right)\left(u^2 - v^2\right) = \int_{\Omega} \left(u^{p(x)-1} \;-\; v^{p(x)-1}\right)\left(u^2 - v^2\right)$$

Observe que

- $u \leq v \;\Rightarrow\; u^2 \leq v^2$ e $u^{p(x)-1} \geq \; v^{p(x)-1}$, resultando,

  $$u^2 - v^2 \leq 0 \quad e \quad u^{p(x)-1} - \; v^{p(x)-1} \geq 0,$$

  ou seja,

  $$I \;\leq\; 0.$$

- $u \geq v \;\Rightarrow\; u^2 \geq v^2$ e $u^{p(x)-1} \leq \; v^{p(x)-1}$, implicando,

  $$u^2 - v^2 \geq 0 \quad e \quad u^{p(x)-1} - \; v^{p(x)-1} \leq 0,$$

  logo,

  $$I \;\leq\; 0.$$

Portanto, $I = 0$. Consequentemente,

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v} \right) \left( u^2 - v^2 \right) = 0 \Leftrightarrow u = cv, \quad \text{para} \quad \text{algum} \quad c > 0.$$

Segue então,

$$-\Delta u = -\Delta (cv) = c(-\Delta v),$$

sendo u e v soluções para (3.19), temos

$$u^{p(x)} = c\left(v^{p(x)}\right),$$

usando novamente u=cv,

$$c^{p(x)} v^{p(x)} = c v^{p(x)},$$

implicando,

$$c = 1.$$

Portanto, $u = v$. ■

# Capítulo 4

# Caso Supercrítico

Nosso objetivo neste capítulo é encontrar uma solução radial não trivial para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{p(r)-1} \quad \text{em} \quad B \\ u &> 0 \quad \text{em} \quad B \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $p(r) = 2^* + r^\alpha$, com $0 < \alpha < \min\left\{\frac{N}{2}, N-2\right\}$ e $B = B_1(0)$. Neste caso, o método variacional não pode ser aplicado diretamente. Para resolver esse problema, usaremos a estratégia de [7].

Considere, por alguns momentos, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave limitado, $N \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $p = 2^*$ e $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet. Sabemos do resultado de não existência de Pohozaev que o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= u\,|u|^{2^*-2} \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

não possui solução quando $\Omega$ for um domínio estrelado. No entanto, Brezis e Nirenberg em [7] mostraram que pertubando (4.2) por $\lambda u$, para $\lambda > 0$, o problema possui solução nos seguintes casos:

(i) se $N \geq 4$, então para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_1)$ o problema (4.2) possui solução;

(ii) se $N = 3$, então existe $\lambda_* \in [0, \lambda_1)$ tal que para todo $\lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$ o problema (4.2) possui solução;

(iii) se $N = 3$ e $\Omega = B_1(0)$, então $\lambda_* = \frac{\lambda_1}{4}$ e para $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$ não há solução para (4.2).

Note que, como em Brezis e Nirenberg [7], o problema (4.1) pode ser visto como uma pertubação do problema crítico.

## 4.1 Preliminares

Seja $S_N > 0$ a melhor constante na imersão de Sobolev

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^N) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \tag{4.3}$$

com $2^* = \frac{2N}{N-2}$, i.e.,

$$S_N = \inf\left\{\|\nabla u\|_2^2;\ \ u \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)\ \text{ e }\ \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = 1\right\}.$$

Sabemos que o ínfimo $S_N$ é atingido. Para qualquer subconjunto aberto $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$, defina

$$S_N(\Omega) = \inf\left\{\|\nabla u\|_2^2;\ \ u \in D_0^{1,2}(\Omega)\ \text{ e }\ \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1\right\}. \tag{4.4}$$

Segue da referência [37],

$$S_N = S_N(\Omega),$$

ou seja, $S_N$ independe de $\Omega$ e $S_N(\Omega)$ nunca é atingido, exceto quando $\Omega = \mathbb{R}^N$.

As hipóteses a seguir estão relacionadas com o artigo [Do O].

No que segue, denotamos por $f : [0,1) \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua satisfazendo

$(f_1)$ $f(0) = 0$ e $f(r) > 0$, para todo $r > 0$;

$(f_2)$ $f(r) \leq \dfrac{c}{|\log r|^\beta}$, para algum $\beta > 2$ e para r próximo de 0;

$(f_3)$ $f(r) \leq \dfrac{c}{|1-r|}$, para algum r próximo de 1.

Veja a seguir alguns exemplos de funções que satisfazem as hipóteses acima:

**Exemplo 1:** $f(r) = r^\alpha$, para $\alpha > 0$.

**Exemplo 2:** $f(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\log r|^{2+\delta}} & ,\ \delta > 0,\ r \approx 0 \\ \dfrac{1}{1-r} & ,\ r \approx 1. \end{cases}$

**Exemplo 3:** $f(r) = \begin{cases} r^\alpha |\log r|^\eta, & \alpha > 0,\ \eta \geq 0\ (r \approx 0); \\ \dfrac{1}{1-r} & ,\ r \approx 1. \end{cases}$

Vamos mostrar apenas o exemplo 1: Com efeito, temos $f(0) = 0$ e $f(r) = r^{\alpha} > 0$, para todo $r > 0$. Valendo $(f_1)$.

$(f_2)$ Vamos mostrar que

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = 0.$$

Com efeito,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = \lim_{r\to 0} \frac{|\log r|^{\beta}}{r^{-\alpha}} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

por L'Hospital,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta\ |\log r|^{\beta-1}\left(\frac{-1}{r}\right)}{-\alpha\ r^{-\alpha-1}} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta\ |\log r|^{\beta-1}}{\alpha\ r^{-\alpha}} == \frac{+\infty}{+\infty},$$

novamente, por L'Hospital,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta(\beta-1)|\log r|^{\beta-2}\left(\frac{-1}{r}\right)}{\alpha(-\alpha)\ r^{-\alpha-1}} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta(\beta-1)|\log r|^{\beta-2}}{\alpha^2\ r^{-\alpha}} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Sucessivamente, pelo Princípio da Boa Ordenação, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta < n_0 \ \Rightarrow\ \beta - n_0 < 0.$$

Assim, usaremos L'Hospital até $n_0 - 1 \leq \beta$.

**Afirmação 4.1** *Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \leq \beta$, vale*

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1)|\log r|^{\beta-n}}{\alpha^n\ r^{-\alpha}}.$$

De fato, por indução, para n=1, temos $\beta - 1 > 0$ e assim,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

por L'Hospital,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta|\log r|^{\beta-1}}{\alpha\ r^{-\alpha}}.$$

Suponha que para n=k vale, vamos mostrar que vale para n=k+1. Com efeito, por hipótese de indução,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k+1)|\log r|^{\beta-k}}{\alpha^k\ r^{-\alpha}} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

por L'Hospital,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} |\log r|^{\beta} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k)|\log r|^{\beta-k-1}}{\alpha^{k+1}\ r^{-\alpha}} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

valendo para $k+1 \leq \beta$.

Portanto, a Afirmação 4.1 vale.

Como $n_0 - 1 \leq \beta$, aplicando a Afirmação 4.1,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} \left|\log r\right|^{\beta} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta\left(\beta-1\right)...\left(\beta-n_0+2\right)\left|\log r\right|^{\beta-n_0+1}}{\alpha^{n_0-1}\ r^{-\alpha}} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

por L'Hospital,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} r^{\alpha} \left|\log r\right|^{\beta} &= \lim_{r\to 0} \frac{\beta\left(\beta-1\right)...\left(\beta-n_0+1\right)\left|\log r\right|^{\beta-n_0}}{\alpha^{n_0}\ r^{-\alpha}} \\ &= \lim_{r\to 0} C\ \left|\log r\right|^{\beta-n_0}\ r^{\alpha} = 0\end{aligned}$$

onde $C = \dfrac{\beta\left(\beta-1\right)...\left(\beta-n_0+1\right)}{\alpha^{n_0}}$.

Portanto,

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} \left|\log r\right|^{\beta} = 0,$$

em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|r| < \delta \ \Rightarrow\ r^{\alpha} \left|\log r\right|^{\beta} < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = c$,

$$r^{\alpha} \left|\log r\right|^{\beta} < c, \quad \forall\, r \approx 0 \quad \text{e} \quad \text{para algum } \ \beta > 2.$$

$(f_3)$ Note que,

$$\lim_{r\to 1} r^{\alpha} \left|1-r\right| = 1\left|1-1\right| = 0,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|r-1| < \delta \ \Rightarrow\ r^{\alpha} \left|1-r\right| < \varepsilon.$$

Considerando $\varepsilon = c$, segue

$$f\left(r\right) < \frac{c}{\left|\log r\right|}, \quad \text{para } \ r \approx 1.$$

Provaremos, agora, a seguinte desigualdade:

**Teorema 4.2** *Suponha que $f \in C([0,1), \mathbb{R}^+)$ satizfaz $(f_1) - (f_3)$ e seja*

$$p(r) = 2^* + f(r).$$

*Então,*

$$\sup\left\{\int_B |u(x)|^{p(r)}\, dx;\ u \in \mathrm{H}^1_{0,rad}(B),\ \|\nabla u\|_2 = 1\right\} < +\infty \tag{4.5}$$

Usaremos a seguinte versão do Lema Radial:

## 4.2 Lema Radial

**Lema 4.1** *Seja* $u \in \mathrm{H}^1_{0,rad}(B)$. *Então,*

$$|u(r)| \leq \frac{1}{(N-2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\|\nabla u\|_2}{r^{\frac{N-2}{2}}} \tag{4.6}$$

*e*

$$|u(r)| \leq \frac{(1-r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}} \|\nabla u\|_2 . \tag{4.7}$$

**Prova.** Se $u \in \mathrm{H}^1_{0,rad}(B)$, então

$$|u(r)| = \left| \int_r^1 u^{'}(s) ds \right| \leq \int_r^1 \left| u^{'}(s) s^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{s^{\frac{N-1}{2}}} \right| ds. \tag{4.8}$$

**Afirmação 4.3** $u^{'}(s) s^{\frac{N-1}{2}} \in L^2([r,1))$ *e* $\frac{1}{s^{\frac{N-1}{2}}} \in L^2([r,1))$.

De fato, lembrando que

$$u(x) = u(|x|) = u(r),$$

onde $|x| = \sqrt{x_1^2 + ....x_N^2}$, temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{|x|} = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{r}.$$

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{du}{dr} \frac{x_i}{r}.$$

Calculando o gradiente, obtemos

$$\nabla u(r) = \left( \frac{du}{dr} \frac{x_1}{r}, ..., \frac{du}{dr} \frac{x_N}{r} \right) = \frac{du}{dr} \frac{x}{r},$$

resultando,

$$|\nabla u(r)|^2 = \left| u^{'}(r) \right|^2 \frac{|x|^2}{r^2} = \left| u^{'}(r) \right|^2 .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla u(x)|^2 \, dx &= n\alpha(n) \int_0^1 |\nabla u(r)|^2 \, r^{N-1} dr \\ &= |\partial B| \int_0^1 \left| u^{'}(r) \right|^2 r^{N-1} dr. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_r^1 \left|u^{'}(s)s^{\frac{N-1}{2}}\right|^2 ds &= \int_r^1 \left|u^{'}(s)\right|^2 s^{N-1}ds \leq \int_0^1 \left|u^{'}(s)\right|^2 s^{N-1}ds \\ &\leq \frac{1}{w_{N-1}}\int_B |\nabla u(x)|^2\, dx = c\,\|\nabla u\|^2_{L^2(B)} < +\infty,\end{aligned}$$

ou seja,

$$u^{'}(s)s^{\frac{N-1}{2}} \in L^2([r,1)).$$

Calculando a outra integral,

$$\begin{aligned}\int_r^1 \left|\frac{1}{s^{\frac{N-1}{2}}}\right|^2 ds &= \int_r^1 \frac{1}{|s|^{N-1}}ds = \frac{s^{-N+2}}{-N+2}\Big|_r^1 = \frac{1}{2-N} - \frac{r^{2-N}}{2-N} \\ &= \frac{1}{N-2}\left(\frac{1}{r^{N-2}} - 1\right) \leq \frac{1}{N-2}\frac{1}{r^{N-2}}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Implicando,

$$\left\|\frac{1}{s^{\frac{N-1}{2}}}\right\|_{L^2([r,1))} \leq \frac{1}{(N-2)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}} < +\infty.$$

Provando a Afirmação 4.3. Usando Hölder em (4.8),

$$|u(r)| \leq \|\nabla u\|_{L^2([r,1))}\left\|\frac{1}{s^{\frac{N-1}{2}}}\right\|_{L^2([r,1))} \leq \|\nabla u\|_{L^2([r,1))}\frac{1}{(N-2)^{\frac{1}{2}}r^{\frac{N-2}{2}}}$$

o que conclui (4.6).

Para obter (4.7), observe que podemos reescrever

$$\begin{aligned}\left(\frac{r^{2-N}-1}{N-2}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{N-2}}\left(\frac{1}{r^{N-2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{N-2}}\left(\frac{1-r^{N-2}}{r^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N-2}\,r^{\frac{N-2}{2}}}\left(1-r^{N-2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N-2}\,r^{\frac{N-2}{2}}}\left[(1-r)(1+r+...+r^{N-3})\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(1-r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}}\left(\frac{1+r+...+r^{N-3}}{N-2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{(1-r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}}.\end{aligned}$$

Assim, usando (4.9), temos

$$
\begin{aligned}
|u(r)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2([r,1))} \left\| \frac{1}{s^{\frac{N-1}{2}}} \right\|_{L^2([r,1))} = \|\nabla u\|_{L^2([r,1))} \left( \frac{r^{2-N}-1}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2([r,1))} \frac{(1-r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}}
\end{aligned}
$$

obtendo (4.7). ■

Agora vamos a demonstração do **Teorema 4.2**.

**Prova.** Para $u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$, com $\|\nabla u\|_2 = 1$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w_{N-1}} \int_B |u(x)|^{2^*+f(r)}\, dx &= \int_0^1 |u(r)|^{2^*+f(r)}\, r^{N-1} dr \\
&= \int_0^\rho |u(r)|^{2^*+f(r)}\, r^{N-1} dr + \int_\rho^1 |u(r)|^{2^*+f(r)}\, r^{N-1} dr.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Vamos estimar cada uma dessas integrais separadamente:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\rho |u(r)|^{2^*+f(r)}\, r^{N-1} dr &= \int_0^\rho |u(r)|^{2^*} \left(|u(r)|^{f(r)} + 1 - 1\right) r^{N-1} dr \\
&= \int_0^\rho |u(r)|^{2^*} \left(|u(r)|^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr + \int_0^\rho |u(r)|^{2^*}\, r^{N-1} dr \\
&\leq \int_0^\rho |u(r)|^{2^*} \left(|u(r)|^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr + \int_0^1 |u(r)|^{2^*}\, r^{N-1} dr \\
&\leq \int_0^\rho |u(r)|^{2^*} \left(|u(r)|^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr + \frac{1}{w_{N-1}} \int_B |u(x)|^{2^*}\, dx \\
&\leq \int_0^\rho |u(r)|^{2^*} \left(|u(r)|^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr + \frac{1}{w_{N-1}} \Sigma_N
\end{aligned}
$$

onde,

$$
\Sigma_N := \sup_{\left\{u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B);\ \|\nabla u\|_2 = 1\right\}} \int_B |u(x)|^{2^*}\, dx \tag{4.11}
$$

é a melhor constante da imersão

$$
\mathrm{H}^1_{0,r}(B) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2^*}(B).
$$

Pelo Lema Radial, para $u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$ com $\|\nabla u\|_2 = 1$, podemos escrever

$$|u(r)| \leq \frac{(1-r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}} \leq \frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}} \tag{4.12}$$

o que implica,

$$\int_0^\rho |u(r)|^{2^*} \left(|u(r)|^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr \leq \int_0^\rho \left(\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{2N}{N-2}} \left(\left|\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr.$$

**Proposição 4.1:** Dado $d > 1$, existe $\rho = \rho(d) > 0$ tal que

$$e^{g(s)} - 1 \leq dg(s), \quad \forall\, s \in (0, p)$$

sempre que $g(s) \to 0$ quando $s \to 0$.

Considere

$$g(r) = \frac{N-2}{2} f(r) \left|\log r\right|,$$

por $f(2)$, temos

$$g(r) \leq \frac{N-2}{2} \frac{c}{|\log r|^{\beta-1}},$$

para $r \to 0$ e $\beta > 1$. Assim,

$$g(r) \to 0.$$

Pela Proposição 4.1,

$$e^{\frac{N-2}{2} f(r) |\log r|} - 1 \leq d \frac{N-2}{2} f(r) \left|\log r\right|, \tag{4.13}$$

para todo $r \in (0, \rho)$ e para algum $d > 1$.

Voltando a integral, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\rho \left(\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{2N}{N-2}} \left(\left(\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr &= \int_o^\rho \frac{r^{N-1}}{r^N} \left(e^{\ln\left(\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{f(r)}} - 1\right) dr \\
&= \int_o^\rho \frac{1}{r} \left(e^{f(r)\ln\left(\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)} - 1\right) dr \\
&= \int_o^\rho \frac{1}{r} \left(e^{f(r)\ln\left(r^{\frac{-(N-2)}{2}}\right)} - 1\right) dr \\
&= \int_o^\rho \frac{1}{r} \left(e^{f(r)\frac{N-2}{2}(-\ln r)} - 1\right) dr \\
&= \int_0^\rho \frac{1}{r} \left(e^{f(r)\frac{N-2}{2}|\ln r|} - 1\right) dr,
\end{aligned}$$

por (4.13),

$$\int_0^\rho \left(\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{2N}{N-2}} \left(\left(\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr \leq \int_0^\rho \frac{d}{r} \frac{N-2}{2} f(r) \left|\ln r\right| dr.$$

Portanto,

$$\int_0^\rho |u(x)|^{2^*} \left(|u(r)|^{f(r)} - 1\right) r^{N-1} dr \leq d\frac{N-2}{2} \int_0^\rho \frac{f(r)\left|\log r\right|}{r}\, dr.$$

**Afirmação 4.4** $\displaystyle\int_0^\rho \frac{f(r)\left|\log r\right|}{r}\, dr < +\infty.$

De fato,

$$\int_0^\rho \frac{f(r)\left|\log r\right|}{r}\, dr \leq \int_0^\rho \frac{c}{\left|\log r\right|^\beta} \frac{\left|\log r\right|}{r}\, dr \leq c \int_0^\rho \frac{\left|\log r\right|^{1-\beta}}{r}\, dr,$$

para $\rho \approx 0$. Note que,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\left|\log r\right|^{1-\beta}}{r} = \frac{0}{0},$$

por L'Hospital,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{|\log r|^{1-\beta}}{r} &= \lim_{r\to 0}(1-\beta)\ |\log r|^{-\beta}\frac{1}{r} = (1-\beta)\lim_{r\to 0}\frac{1}{r\,|\log r|^{\beta}}\\ &\leq \lim_{r\to 0}\frac{1}{r\,|\log r|}\frac{1}{|\log r|^{\beta-1}} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|\log r^{r}|}\frac{1}{|\log r|^{\beta-1}} = 0.\end{aligned}$$

Assim, por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{|\log r|^{1-\beta}}{r}\right| < \varepsilon, \quad \forall\ |r| \leq \delta. \tag{4.14}$$

Voltando à integral com $\delta \approx 0$, conseguimos

$$\int_0^{\rho}\frac{|\log r|^{1-\beta}}{r}dr = \int_0^{\delta}\frac{|\log r|^{1-\beta}}{r}dr + \int_{\delta}^{\rho}\frac{|\log r|^{1-\beta}}{r}dr,$$

usando (4.14) e sabendo que $\dfrac{|\log r|^{1-\beta}}{r}$ é contínua em $(\delta, \rho)$, pelo Teorema de Weierstrass, existe o máximo e o mínimo, desta forma

$$\int_0^{\rho}\frac{|\log r|^{1-\beta}}{r}dr \leq c\varepsilon + c(\rho-\delta).$$

Segue a Afirmação 4.4. Portanto,

$$\int_0^{\rho}|u(x)|^{2^*}\left(|u(r)|^{f(r)}-1\right)r^{N-1}dr < +\infty,$$

implicando

$$\int_0^{\rho}|u(r)|^{2^*+f(r)}\,r^{N-1}dr < +\infty.$$

Para estimar a segunda integral em (4.10), usando novamente (4.12) e $(f_3)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{\rho}^{1}|u(r)|^{2^*+f(r)}\,r^{N-1}dr &\leq \int_{\rho}^{1}\left|\frac{1}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{2^*+f(r)} r^{N-1}dr\\ &\leq \int_{\rho}^{1}\frac{1}{r^{N+\frac{(N-2)}{2}f(r)-N+1}}dr\\ &\leq \int_{\rho}^{1}\frac{1}{r^{1+\frac{(N-2)}{2}f(r)}}dr.\end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável na última integral, $r = 1 - s$, obtemos

$$\int_{\rho}^{1} \frac{1}{r^{1+\frac{(N-2)}{2}f(r)}}\, dr = -\int_{1-\rho}^{0} \frac{1}{(1-s)^{1+\frac{(N-2)}{2}f(1-s)}}\, ds$$

$$= \int_{0}^{1-\rho} \frac{1}{(1-s)^{1+\frac{(N-2)}{2}f(1-s)}}\, ds,$$

por $(f_3)$,

$$\int_{\rho}^{1} \frac{1}{r^{1+\frac{(N-2)}{2}f(r)}} dr \leq \int_{0}^{1-\rho} \frac{1}{(1-s)^{1+\frac{(N-2)}{2}\frac{c}{s}}} ds.$$

**Afirmação 4.5** $\displaystyle\int_{0}^{1-\rho} \frac{1}{(1-s)^{1+\frac{(N-2)}{2}\frac{c}{s}}}\, ds < +\infty.$

De fato, fazendo mudança de variável, $1-s=x$, segue

$$\int_{0}^{1-\rho} \frac{1}{(1-s)^{1+\frac{(N-2)}{2}\frac{c}{s}}} ds = \int_{1}^{\rho} \frac{-1}{x^{1+\frac{N-2}{2}\frac{c}{1-x}}} dx$$

$$= \int_{\rho}^{1} \frac{1}{x^{1+\frac{N-2}{2}\frac{c}{1-x}}} dx,$$

tomando $c_1 = \frac{(N-2)}{2}c$,

$$\int_{0}^{1-\rho} \frac{1}{(1-s)^{1+\frac{(N-2)}{2}\frac{c}{s}}} ds = \int_{\rho}^{1} \frac{1}{x^{1+\frac{c_1}{1-x}}} dx$$

$$= \int_{\rho}^{1} x^{\frac{c_1}{x-1}-1} dx$$

$$= \int_{\rho}^{1} e^{\ln x\left(\frac{c_1}{x-1}-1\right)} dx$$

$$= \int_{\rho}^{1} e^{\left(\frac{c_1}{x-1}-1\right)\ln x} dx.$$

Considerando,

$$h(x) = \frac{c_1 - x + 1}{x-1} \ln x$$

e passando ao limite com $x \to 1$, conseguimos

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \frac{0}{0},$$

por L'Hospital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{(-1)\ln x + (c-x+1)\dfrac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1}\left(-\ln x + \frac{c-x+1}{x}\right) = c.$$

Por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta$$

implica

$$|h(x)| - |c| \ \leq \ |h(x) - c| \ < \ \varepsilon,$$

resultando,

$$|h(x)| \leq c + \varepsilon, \quad \forall\, x \in (1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}.$$

Substituindo na integral e lembrando que $e^x$ é uma função crescente e contínua em $(\rho, 1-\delta)$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\rho^1 e^{\left(\frac{c}{x-1}-1\right)\ln x} dx &= \int_\rho^{1-\delta} e^{h(x)} dx + \int_{1-\delta}^1 e^{h(x)} dx \\
&\leq c(1-\delta-\rho) + \int_{1-\delta}^1 e^{\varepsilon + c} dx \\
&\leq c(1-\delta-\rho) + c\delta < +\infty.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^{1-\rho} \frac{1}{(1-s)^{1+\frac{(N-2)}{2}\frac{c}{s}}} ds < +\infty.$$

Concluindo a afirmação 4.5. Acarretando,

$$\int_\rho^1 |u(r)|^{2^*+f(r)}\, r^{N-1} dr < +\infty.$$

Assim, em (4.10) temos

$$\int_B |u(x)|^{2^*+f(r)}\, dx < +\infty.$$

■

## 4.3 Imersão de $H_0^1(B)$ em $L^{p(r)}(B)$

Como consequência do Teorema 4.2, temos a seguinte imersão do subespaço de funções radiais em $H_0^1(B)$ em um espaço de Lebesgue invariante com expoente variável.

**Corolário 4.6** *A seguinte imersão*

$$H_{0,r}^1(B) \hookrightarrow L^{p(r)}(B).$$

*é contínua.*

**Prova.** Considere o espaço de Lebesgue com expoente variável

$$\mathrm{L}^{2^*+f(r)}(B) = \left\{ u : B \to \mathbb{R} \text{ mensuravel}; \int_B |u(x)|^{2^*+f(r)}\, dx < +\infty \right\}$$

com norma

$$\|u\|_{2^*+f(r)} = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_B \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{2^*+f(r)} dx \leq 1 \right\}.$$

Assumindo que $u \in \mathrm{H}_{0,r}^1(B)$ com $\|\nabla u\|_2 = 1$, devemos mostrar que

$$\|u\|_{2^*+f(r)} \leq c\, \|u\|_{\mathrm{H}_{0,r}^1(B)}.$$

Usando o Teorema 4.2, sabemos que

$$\int_B |u(x)|^{2^*+f(r)}\, dx \leq c < +\infty. \tag{4.15}$$

Para $\lambda > 1$, podemos escrever

$$\int_B \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{2^*+f(r)} dx = \int_B \frac{|u(x)|^{2^*+f(r)}}{\lambda^{2^*} \lambda^{f(r)}} dx,$$

sendo $\dfrac{1}{\lambda^{f(r)}} < 1$, a igualdade acima resulta

$$\int_B \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{2^*+f(r)} dx \leq \int_B \frac{|u(x)|^{2^*+f(r)}}{\lambda^{2^*}} dx,$$

usando (4.15) e escolhendo $c = c\,|B|$, obtemos

$$\int_B \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{2^*+f(r)} dx \leq \frac{c}{\lambda^{2^*}}, \quad \forall\, \lambda > 1.$$

Considerando $\lambda = \lambda_0 \approx +\infty$,

$$\int_B \left|\frac{u(x)}{\lambda_0}\right|^{2^*+f(r)} dx \;\leq\; \frac{c}{\lambda_0^{2^*}} \;\leq\; 1,$$

ou seja,

$$\lambda_0 \in \left\{\lambda > 0; \int_B \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{2^*+f(r)} dx \leq 1\right\},$$

por definição de ínfimo

$$\inf\left\{\lambda > 0; \int_B \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{2^*+f(r)} dx \leq 1\right\} \leq \lambda_0.$$

Logo,

$$\|u\|_{2^*+f(r)} \leq \lambda_0 \|\nabla u\|_{L^2(B)}, \forall\, u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$$

e

$$\|\nabla u\|_{L^2(B)} = 1.$$

■

No que segue, assumiremos que

$$f(r) = r^\alpha, \text{ com } 0 < \alpha < \min\left\{\frac{N}{2}, N-2\right\}.$$

**Definição 4.7** $\mathcal{U}_N := \sup\limits_{\left\{u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B);\, \|\nabla u\|_2 = 1\right\}} \int_B |u(x)|^{p(r)}\, dx.$

Vamos mostrar o seguinte teorema

**Teorema 4.8** *Se* $p(r) = 2^* + r^\alpha$ *e* $0 < \alpha < \min\left\{\frac{N}{2}, N-2\right\}$, *então*

$$\mathcal{U}_N \geq \Sigma_N. \tag{4.16}$$

**Prova.** Denotaremos por

$$\mathrm{u}^*_\varepsilon(r) = \mathrm{C}_N \frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left[\varepsilon^2 + r^2\right]^{\frac{N-2}{2}}}, \text{ com } \varepsilon > 0 \text{ e } \mathrm{C}_N\left[N(N-2)\right]^{\frac{N-2}{4}} \tag{4.17}$$

as **instantons** de Sobolev.

**Proposição 4.9** *As instantons de Sobolev satisfazem*

$$-\Delta u = u^{2^*-1} \;\; \textit{sobre} \;\; \mathbb{R}^N. \tag{4.18}$$

**Prova.** Relembrando que para uma função radial u o laplaciano é dado por

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{du}{dr}.$$

Assim, calculando

$$\begin{aligned}
\frac{du_\varepsilon^*}{dr} &= \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{[\varepsilon^2+r^2]^{\frac{N-2}{2}}}\right) = \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \frac{d}{dr}\left([\varepsilon^2+r^2]^{\frac{2-N}{2}}\right) \\
&= \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \frac{(2-N)}{2} [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} 2r \\
&= \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} r.
\end{aligned}$$

Computando novamente a derivada de $u_\varepsilon^*$ em relação à r,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u_\varepsilon^*}{dr^2} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{du_\varepsilon^*}{dr}\right) = \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) \frac{d}{dr}([\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} r) \\
&= \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) \left([\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} + r\left(\frac{-N}{2}\right)[\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N-2}{2}} 2r\right) \\
&= \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) \left([\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} - r^2 N [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N-2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\Delta u_\varepsilon^* &= \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} - \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) r^2 N [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N-2}{2}} \\
&+ \tfrac{N-1}{r} \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} r \\
&= \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} - \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} N(2-N) r^2 [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N-2}{2}} \\
&+ (N-1)\mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (2-N) [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} \\
&= \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} N(2-N) [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N}{2}} - \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} N(2-N) r^2 [\varepsilon^2+r^2]^{\frac{-N-2}{2}}.
\end{aligned}$$

Deixando em evidência a parcela

$$\mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} N(2-N) \left[\varepsilon^2+r^2\right]^{\frac{-N}{2}},$$

obtemos,

$$\Delta u_\varepsilon^* = \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} N(2-N) \left[\varepsilon^2 + r^2\right]^{\frac{-N}{2}} (1 - r^2 \left[\varepsilon^2 + r^2\right]^{-1}).$$

Observe que

$$1 - \frac{r^2}{[\varepsilon^2 + r^2]} = \frac{\varepsilon^2 + r^2 - r^2}{\varepsilon^2 + r^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + r^2},$$

substituindo na igualdade acima

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon^* &= \frac{\mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N+2}{2}} N(2-N)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N+2}{2}}} = \frac{(N(N-2))^{\frac{N-2}{4}} N(N-2)(-\varepsilon^{\frac{N+2}{2}})}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N+2}{2}}} \\ &= \frac{(N(N-2))^{\frac{N+2}{4}} (-\varepsilon^{\frac{N+2}{2}})}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N+2}{2}}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$-\Delta u_\varepsilon^* = \frac{\varepsilon^{\frac{N+2}{2}} (N(N-2))^{\frac{N+2}{4}}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N+2}{2}}}.$$

Por outro lado,

$$(u_\varepsilon^*(r))^{2^*-1} = \frac{\mathrm{C}_N^{\frac{N+2}{N-2}} \varepsilon^{\frac{N+2}{2}}}{[\varepsilon^2 + r^2]^{\frac{N+2}{2}}} = \frac{(N(N-2))^{\frac{N+2}{4}} \varepsilon^{\frac{N+2}{2}}}{[\varepsilon^2 + r^2]^{\frac{N+2}{2}}}.$$

Portanto,

$$-\Delta u_\varepsilon^* = (u_\varepsilon^*(r))^{2^*-1}.$$

■

As instantons de Sobolev satisfazem também

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u_\varepsilon^*(x)|^2 \, dx = \mathrm{S}_N^{\frac{N}{2}} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_\varepsilon^*(x)|^2 \, dx. \tag{4.19}$$

A igualdade (4.19) implica que para uma certa função cut-off $\eta$ vale

$$\|\nabla (\eta u_\varepsilon^*)\|_2^2 = S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) \tag{4.20}$$

$$\|\eta u_\varepsilon^*\|_{2^*}^{2^*} = S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right). \tag{4.21}$$

Voltando a prova do Teorema 4.8, seja $\mathrm{B}_N := \dfrac{1}{S_N^{\frac{N}{4}}}$ e

$$u_\varepsilon(r) := \mathrm{B}_N \eta(r)\, u_\varepsilon^*(r),$$

aplicando a definição de $u_\varepsilon^*(r)$, obtemos

$$u_\varepsilon(r) := \frac{\mathrm{B}_N \eta(r)\, \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{\mathrm{A}_N \eta(r)\, \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

onde

$$\mathrm{A}_N = \mathrm{B}_N \mathrm{C}_N.$$

Usando (4.20) e (4.21), mostra-se que valem as seguintes igualdades para $u_\varepsilon$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2 = 1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) \tag{4.22}$$

e

$$\int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*}\, dx = \Sigma_N + \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) \tag{4.23}$$

Para provar (4.16) recorremos ao seguinte Lema:

**Lema 4.2** *Existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno*

$$\int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha}\, dx \geq \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*}\, dx + c\,|\log\ \varepsilon|\, \varepsilon^\alpha + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right).$$

Vamos usar tal Lema e depois demonstramos.

Sabendo que

$$\mathcal{U}_N = \sup\left\{\int_B |u(x)|^{2^*+r^\alpha}\, dx; \quad u \in \mathrm{H}^1_{0,rad}(B) \ \text{ e } \ \|\nabla u\|_2 = 1\right\},$$

então, tomando

$$\overline{u}_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon(x)}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2},$$

temos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_N &\geq \int_B |\overline{u}_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha}\, dx = \int_B \left|\frac{u_\varepsilon(x)}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2}\right|^{2^*+r^\alpha} dx \\
&\geq \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha}\, dx + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2

$$\mathcal{U}_N \geq \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*}\, dx + c\,|\log\ \varepsilon|\, \varepsilon^\alpha + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right),$$

por (4.23),

$$\mathcal{U}_N \geq \Sigma_N + \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) + c\,|\log\ \varepsilon|\, \varepsilon^\alpha + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right).$$

**Afirmação 4.10** $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right)+c\left|\log\ \varepsilon\right|\varepsilon^{\alpha}+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)>0.$

De fato, mostrar isso equivale

$$\left|\log\ \varepsilon\right|>\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{c\varepsilon^{\alpha}},$$

se, e somente se,

$$\left|\log\ \varepsilon\right|>\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}.$$

Mas, observe que para $\varepsilon\approx 0$,

$$\left|\log\ \varepsilon\right|\approx+\infty.$$

Assim, vamos mostrar que

$$\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}<+\infty.$$

Com efeito, procedemos em três partes:

- $\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}\dfrac{\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha}}{\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha}}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}\right|\left|\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha}\right|\leq c\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha}<c$, para $\varepsilon\approx 0$.
- $\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}\dfrac{\varepsilon^{N-2-\alpha}}{\varepsilon^{N-2-\alpha}}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{\varepsilon^{N-2}}\right|\left|\varepsilon^{N-2-\alpha}\right|\leq c\varepsilon^{N-2-\alpha}<c.$
- $\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}\dfrac{\varepsilon^{N-\alpha}}{\varepsilon^{N-\alpha}}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right)}{\varepsilon^{N}}\right|\left|\varepsilon^{N-\alpha}\right|\leq c\varepsilon^{N-\alpha}<c.$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{\varepsilon^{\alpha}}<+\infty,$$

valendo a afirmação 4.10. Logo,

$$\mathcal{U}_{N}\geq\Sigma_{N}.$$

■

Vamos demonstrar o Lema 4.2.

**Prova.** Por definição

$$u_{\varepsilon}\left(r\right)=\mathrm{B}_{N}\eta\left(r\right)u_{\varepsilon}^{*}\left(r\right)=\mathrm{A}_{N}\eta\left(r\right)\frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(\varepsilon^{2}+r^{2}\right)^{\frac{N-2}{2}}},$$

lembrando da definição de $\eta$, obtemos

$$u_\varepsilon(r) \leq \mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r) = \mathrm{A}_N \frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(\varepsilon^2 + r^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} \leq 1,$$

se, e somente se,

$$\mathrm{A}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \leq \left(\varepsilon^2 + r^2\right)^{\frac{N-2}{2}},$$

ou seja,

$$\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}} \varepsilon \leq \varepsilon^2 + r^2,$$

isolando r,

$$\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}} \varepsilon - \varepsilon^2 \leq r^2.$$

Considerando

$$a_\varepsilon := \left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}} \varepsilon - \varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

então, obtemos

$$u_\varepsilon(r) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; a_\varepsilon \leq r. \tag{4.24}$$

Analisando a integral e tomando $\varepsilon \approx 0$, segue

$$\frac{1}{w_{N-1}} \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha}\, dx = \int_0^{a_\varepsilon} |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr + \int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr.$$

Vamos estimar a segunda integral. Com efeito,

$$\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr = \int_{a_\varepsilon}^1 |\mathrm{B}_N \eta(r)\, u_\varepsilon^*(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr,$$

sendo $\eta \leq 1$, segue a desigualdade

$$\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \leq \int_{a_\varepsilon}^1 |\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)|^{r^\alpha} |\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)|^{2^*} r^{N-1}\, dr,$$

usando (4.24)

$$\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \leq \int_{a_\varepsilon}^1 |\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)|^{2^*} r^{N-1}\, dr.$$

Aplicando a definição de $u_\varepsilon^*(r)$,

$$\begin{aligned}\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\,dr &\leq \int_{a_\varepsilon}^1 \left|\mathrm{A}_N \frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{2^*} r^{N-1}\,dr \\ &\leq \int_{a_\varepsilon}^1 \frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^{\frac{2^*(N-2)}{2}}}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{2^*(N-2)}{2}}} r^{n-1}\,dr \\ &\leq \mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N \int_{a_\varepsilon}^1 \frac{r^{N-1}}{(\varepsilon^2+r^2)^N}\,dr,\end{aligned}$$

tendo em vista que vale a desigualdade

$$\frac{1}{(\varepsilon^2+r^2)^N} \leq \frac{1}{r^{2N}}$$

substituindo na integral

$$\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\,dr \leq \mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N \int_{a_\varepsilon}^1 \frac{r^{N-1}}{r^{2N}}\,dr = \mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N \int_{a_\varepsilon}^1 r^{-N-1}\,dr.$$

Assim,

$$\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\,dr \leq \mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N \left[\frac{-r^{-N}}{N}\right]_{a_\varepsilon}^1 = \frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{N}\left(a_\varepsilon^{-N}-1\right)$$

usando a definição de $a_\varepsilon$,

$$\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\,dr \leq \frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{N}\left(\left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}\varepsilon-\varepsilon^2\right]^{\frac{-N}{2}}-1\right).$$

**Afirmação 4.11** $\dfrac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{N}\left(\left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}\varepsilon-\varepsilon^2\right]^{\frac{-N}{2}}-1\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)$

De fato,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{N\varepsilon^{\frac{N}{2}}}\left(\left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}\varepsilon-\varepsilon^2\right]^{\frac{-N}{2}}-1\right)\right| &= \left|\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{N}\left(\left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}\varepsilon-\varepsilon^2\right]^{\frac{-N}{2}}-1\right)\right| \\ &= \left|\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}}{N}\left[\frac{\varepsilon}{\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}\varepsilon-\varepsilon^2}\right]^{\frac{N}{2}} - \frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{N}\right|\end{aligned}$$

por desigualdade triangular,

$$\left|\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{N\varepsilon^{\frac{N}{2}}}\left(\left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}\varepsilon-\varepsilon^2\right]^{\frac{-N}{2}}-1\right)\right|\leq\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}}{N}\left|\left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}-\varepsilon\right]^{\frac{-N}{2}}\right|+\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

Fazendo $\varepsilon\to 0$, do lado direito obtemos

$$\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}}{N}\left|\left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}-\varepsilon\right]^{\frac{-N}{2}}\right|+\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{N}\ \to\ \frac{\mathrm{A}_N^{\frac{N}{N-2}}}{N}:=c.$$

Portanto,

$$\left|\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{N\varepsilon^{\frac{N}{2}}}\left(\left[\mathrm{A}_N^{\frac{2}{N-2}}\varepsilon-\varepsilon^2\right]^{\frac{-N}{2}}-1\right)\right|<+\infty.$$

Decorre da Afirmação 4.11

$$\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha}\ r^{N-1}\,dr=\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right). \tag{4.25}$$

Pelas contas anteriores, vale também

$$\int_{a_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\ r^{N-1}\,dr=\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) \tag{4.26}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha}\,r^{N-1}\,dr &= \int_0^1\left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha}-|u_\varepsilon(r)|^{2^*}+|u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right)r^{N-1}\,dr\\ &= \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\,r^{N-1}dr+\int_0^1\left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha}-|u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right)r^{N-1}dr\\ &= \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\,r^{N-1}dr+\int_0^{a_\varepsilon}\left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha}-|u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right)r^{N-1}dr\\ &+ \int_{a_\varepsilon}^1\left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha}-|u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right)r^{N-1}\,dr.\end{aligned}$$

Observe que por (4.25) e (4.26),

$$\int_{a_\varepsilon}^1\left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha}-|u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right)r^{N-1}\,dr\ =\ \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr &= \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*} r^{N-1} dr \\ &+ \int_0^{a_\varepsilon} \left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right) r^{N-1} dr + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right).\end{aligned} \tag{4.27}$$

Como

$$\varepsilon < a_\varepsilon, \quad \text{para} \quad \varepsilon \approx 0,$$

na igualdade (4.27),

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr &= \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*} r^{N-1} dr + \int_0^{\varepsilon} \left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right) r^{N-1} dr \\ &+ \int_\varepsilon^{a_\varepsilon} \left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right) r^{N-1} dr \; + \; \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) \\ &\geq \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*} r^{N-1} dr + \int_0^{\varepsilon} \left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right) r^{N-1} dr \\ &+ \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\end{aligned}$$

pois

$$\int_\varepsilon^{a_\varepsilon} \left(|u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\right) r^{N-1} dr \geq 0.$$

Aplicando a definição de $u_\varepsilon$ e usando que

$$\eta(r) \equiv 1, \quad \text{para} \quad 0 < r < \varepsilon,$$

temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr &\geq \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*} r^{N-1} dr \\ &+ \int_0^{\varepsilon} \left(|\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)|^{2^*+r^\alpha} - |\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)|^{2^*}\right) r^{N-1} dr + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right).\end{aligned}$$

Defina

$$\mathrm{I}_{1,\varepsilon}:=\int_0^{\varepsilon} \left|\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)\right|^{2^*} \left(\left|\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)\right|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\, dr$$

e

$$d_N:=\frac{\mathrm{A}_N}{2^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Construiremos uma estimativa inferior para $\mathrm{I}_{1,\varepsilon}$.

Lembrando que

$$u_\varepsilon(r)=\mathrm{A}_N\eta(r)\frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}$$

e sabendo que

$$\eta(r)\equiv 1, \quad \forall\, 0\le r\le\varepsilon,$$

temos

$$I_{1,\varepsilon}=\int_0^{\varepsilon}\left|\frac{\mathrm{A}_N\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{2^*}\left(\left|\frac{\mathrm{A}_N\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\, dr.$$

Como $r\le\varepsilon$ implica

$$\frac{1}{r^2+\varepsilon^2}\ge\frac{1}{2\varepsilon^2},$$

substituindo na igualdade acima,

$$I_{1,\varepsilon}\ge\int_0^{\varepsilon}\left|\frac{\mathrm{A}_N\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(2\varepsilon^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{2^*}\left(\left|\frac{\mathrm{A}_N\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(2\varepsilon^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\, dr$$

utilizando a definição de $2^*$,

$$\begin{aligned} I_{1,\varepsilon} &\ge \int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{\left(2\varepsilon^2\right)^N}\left(\left|\frac{\mathrm{A}_N}{2^{\frac{N-2}{2}}}\frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\varepsilon^{N-2}}\right|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\, dr \\ &\ge \int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{\left(2\varepsilon^2\right)^N}\left(\left(\frac{\mathrm{A}_N}{2^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{r^\alpha}\left(\varepsilon^{\frac{-(N-2)}{2}}\right)^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\, dr, \end{aligned}$$

sendo $d_N:=\dfrac{\mathrm{A}_N}{2^{\frac{N-2}{2}}}$,

$$I_{1,\varepsilon}\ \ge\ \int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{A}_N^{2^*}\varepsilon^N}{\left(2\varepsilon^2\right)^N}\left(d_N^{r^\alpha}\varepsilon^{\frac{-r^\alpha(N-2)}{2}}-1\right) r^{N-1}\, dr. \tag{4.28}$$

Observe que podemos ver

$$d_N^{r^\alpha}\,\varepsilon^{\frac{-r^\alpha(N-2)}{2}} = e^{\ln\left(d_N^{r^\alpha}\,\varepsilon^{\frac{-r^\alpha(N-2)}{2}}\right)}.$$

Por propriedades de ln,

$$\begin{aligned} d_N^{r^\alpha}\,\varepsilon^{\frac{-r^\alpha(N-2)}{2}} - 1 &= e^{r^\alpha\left[\ln d_N + \frac{N-2}{2}|\ln\varepsilon|\right]} - 1 \\ &\geq r^\alpha\left[\ln d_N + \tfrac{N-2}{2}\,|\ln\varepsilon|\right]. \end{aligned}$$

Em (4.28),

$$I_{1,\varepsilon} \geq \frac{\mathrm{A}_N^{2^*}}{2^N}\,\frac{1}{\varepsilon^{2N-N}}\int_0^\varepsilon \left(r^\alpha \ln d_N + \frac{(N-2)}{2} r^\alpha\,|\ln\varepsilon|\right) r^{N-1}\,dr.$$

Denotando

$$c = \frac{\mathrm{A}_N^{2^*}}{2^N},$$

obtemos

$$\begin{aligned} I_{1,\varepsilon} &\geq \frac{c}{\varepsilon^N}\left(\ln d_N + \tfrac{(N-2)}{2}\,|\ln\varepsilon|\right)\int_0^\varepsilon r^{\alpha+N-1}\,dr \\ &\geq \frac{c}{\varepsilon^N}\left(\ln d_N + \tfrac{(N-2)}{2}\,|\ln\varepsilon|\right)\left[\frac{r^{\alpha+N}}{\alpha+N}\right]_0^\varepsilon \\ &\geq \frac{c}{\varepsilon^N}\left(\ln d_N + \tfrac{(N-2)}{2}\,|\ln\varepsilon|\right)\frac{\varepsilon^{\alpha+N}}{\alpha+N} \\ &\geq c\left(\ln d_N + \tfrac{(N-2)}{2}\,|\ln\varepsilon|\right)\varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Distribuindo $c\varepsilon^\alpha$ e usando o fato de ser positivo,

$$\begin{aligned} I_{1,\varepsilon} &\geq c\,\varepsilon^\alpha \ln d_N + c\,\varepsilon^\alpha\tfrac{(N-2)}{2}\,|\ln\varepsilon| = c\,\varepsilon^\alpha + c\,\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon| \\ &> c\,\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \geq \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*} r^{N-1} dr$$

$$+ \int_0^\varepsilon \left(|\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)|^{2^*+r^\alpha} - |\mathrm{B}_N u_\varepsilon^*(r)|^{2^*}\right) r^{N-1} dr + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)$$

acarreta

$$\int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*+r^\alpha}\ r^{N-1}\, dr \geq \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\ r^{N-1}\, dr + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) + c\,|\ln\varepsilon|\,\varepsilon^\alpha.$$

Portanto,

$$\int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha}\ dx \geq \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*}\ dx + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) + c\,|\ln\varepsilon|\,\varepsilon^\alpha.$$

■

## 4.4 Sequência de Concentração Normalizada

**Definição 4.12** *Uma sequência* $(u_n) \subset \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$ *é uma Sequência de Concentração Normalizada se*

(i) $\|\nabla u_n\|_2 = 1$;

(ii) $u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$;

(iii) Para qualquer $\delta > 0$ :

$$\sigma_n^2 := \int_\delta^1 |u_n'(r)|^2\ r^{N-1}\, dr \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Denotaremos por $\mathcal{N}$ o conjunto formado por todas as sequências normalizantes. Na próxima Proposição, vamos caracterizar o limite maximal do funcional

$$\int_0^1 |u(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr$$

sobre $\mathcal{N}$.

**Proposição 4.13** $\sup\limits_{(u_n)\in\mathcal{N}} \left\{ \lim\limits_{n\to+\infty} w_{N-1} \int_0^1 |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \right\} \leq \Sigma_N$

**Prova.** É suficiente provar o seguinte: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n \geq n_0$ temos

$(a)$ $w_{N-1}\displaystyle\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \leq \Sigma_N + \frac{\varepsilon}{2}$ ;

$(b)$ $w_{N-1}\displaystyle\int_{\eta}^{1} |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Vamos provar primeiro que $(a)$ vale:

$$\begin{aligned} w_{N-1}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr &= w_{N-1}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} |u_n(r)|^{r^\alpha} r^{N-1}\, dr \\ &= w_{N-1}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} \left(|u_n(r)|^{r^\alpha} - 1 + 1\right) r^{N-1}\, dr \\ &= w_{N-1}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} \left(|u_n(r)|^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr \\ &+ w_{N-1}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} r^{N-1}\, dr. \end{aligned}$$

Observe que,

$$w_{N-1}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} r^{N-1}\, dr \leq \int_B |u_n(x)|^{2^*}\, dx \leq \Sigma_N.$$

Substituindo na desigualdade acima, obtemos

$$w_{N-1}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \leq w_{N-1}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} \left(|u_n(r)|^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr + \Sigma_N \tag{4.29}$$

Pelo Lema Radial,

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} \left(|u_n(r)|^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr &\leq \int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} \left(\left(\frac{(N-2)^{-\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr \\ &\leq \int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} \left[e^{\ln\left(\frac{(N-2)^{-\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{r^\alpha}} - 1\right] r^{N-1}\, dr. \end{aligned}$$

Por propriedades do ln,

$$\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} \left(|u_n(r)|^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr \leq \int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} \left[e^{r^\alpha \ln\left(\frac{(N-2)^{-\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)} - 1\right] r^{N-1}\, dr,$$

pela Proposição 4.1,

$$\begin{aligned}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left(|u_n(r)|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\,dr &\leq c\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left[r^\alpha \ln\left(\frac{(N-2)^{-\frac{1}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}}\right)\right] r^{N-1}\,dr\\ &\leq c\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left[r^\alpha \ln\left((N-2)^{-\frac{1}{2}}\, r^{\frac{-(N-2)}{2}}\right)\right] r^{N-1}\,dr,\end{aligned}$$

tomando $c_N^{\frac{-(N-2)}{2}} = (N-2)^{-\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left(|u_n(r)|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\,dr &\leq c\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left[r^\alpha \ln\left(c_N r\right)^{\frac{-(N-2)}{2}}\right] r^{N-1}\,dr\\ &\leq c\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left[-r^\alpha \frac{(N-2)}{2}\ln\left(c_N r\right)\right] r^{N-1}\,dr\\ &\leq c_1\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left[-r^\alpha \ln\left(c_N r\right)\right] r^{N-1}\,dr.\end{aligned}$$

Tendo em vista que $\ln(c_N r) < 0$,

$$\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left(|u_n(r)|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\,dr \leq c_1\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} r^\alpha \left|\ln\left(c_N r\right)\right| r^{N-1}\,dr,$$

sendo $r^\alpha |\ln r|$ crescente,

$$\begin{aligned}\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left(|u_n(r)|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\,dr &\leq c_1\,\eta^\alpha \left|\ln c_N\eta\right|\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*} r^{N-1}\,dr\\ &\leq c_1\,\eta^\alpha \left|\ln c_N\eta\right|\int_0^{1} |u_n(r)|^{2^*} r^{N-1}\,dr\\ &\leq c_1\,\eta^\alpha \left|\ln c_N\eta\right|\frac{1}{w_{N-1}}\int_B |u_n(x)|^{2^*}\,dx,\end{aligned}$$

aplicando a definição de $\Sigma_N$ ,

$$\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left(|u_n(r)|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\,dr \leq c_2\,\eta^\alpha \left|\ln c_N\eta\right|\Sigma_N.$$

Considerando $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$c_2\,\eta^\alpha \left|\ln c_N\eta\right|\Sigma_N \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

obtemos,

$$\int_0^{\eta} |u_n(r)|^{2^*}\left(|u_n(r)|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\,dr \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.30}$$

De (4.29) e (4.30) concluímos $(a)$.

Para provar o item $(b)$, procedemos como segue: admita $t \in (\eta(\varepsilon), 1)$. Podemos escrever

$$|u_n(t)| = \left| \int_1^t u_n'(s)\ ds \right| = \left| \int_1^t u_n'(s)\, s^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{s^{\frac{N-1}{2}}}\ ds \right|,$$

por contas feitas na demonstração do Lema Radial, temos

$$u_n'(s)\, s^{\frac{N-1}{2}},\ \frac{1}{s^{\frac{N-1}{2}}} \in \mathrm{L}^2((t,1)),$$

assim, por Hölder

$$\begin{aligned}
|u_n(t)| &\leq \left| \int_1^t |u_n'(s)|^2 s^{N-1}\ ds \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int_1^t \frac{1}{s^{N-1}}\ ds \right|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sigma_n \left| \int_t^1 \frac{1}{s^{N-1}}\ ds \right|^{\frac{1}{2}} = \sigma_n \left( \left| \frac{s^{2-N}}{2-N} \right|_t^1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\sigma_n}{(N-2)^{\frac{1}{2}}} \left|1 - t^{2-N}\right|^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_n}{(N-2)^{\frac{1}{2}}} \left|t^{2-N} - 1\right|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sigma_n}{(N-2)^{\frac{1}{2}}}\, t^{\frac{2-N}{2}}.
\end{aligned}$$

Pelo item (iii) da definição 4.12,

$$\sigma_n \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

então podemos estimar

$$\begin{aligned}
\int_\eta^1 |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\ dr &\leq \int_\eta^1 \left| \frac{\sigma_n}{(N-2)} r^{\frac{2-N}{2}} \right|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\ dr \\
&\leq \frac{\sigma_n^{2^*+r^\alpha}}{(N-2)^{2^*+r^\alpha}} \int_\eta^1 r^{\frac{2-N}{2}2^*} r^{\frac{2-N}{2}r^\alpha} r^{N-1}\ dr \\
&\leq \frac{\sigma_n^{2^*+r^\alpha}}{(N-2)^{2^*+r^\alpha}} \int_\eta^1 r^{-N} r^{\frac{2-N}{2}r^\alpha} r^{N-1}\ dr,
\end{aligned}$$

sendo $\sigma_n \leq 1$,

$$\int_\eta^1 |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\ dr \leq \frac{\sigma_n^{2^*}}{(N-2)^{2^*+r^\alpha}} \int_\eta^1 r^{-1-\frac{N-2}{2}r^\alpha}\ dr = \frac{\sigma_n^{2^*}}{(N-2)^{2^*+r^\alpha}} c(\eta),$$

onde $c(\eta)$ não depende de n.

Assim, para $n \approx +\infty$,

$$\int_{\eta}^{1} |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

valendo $(b)$. ■

Sabemos que o supremo $\Sigma_N$ em (4.10) não é atingido sempre que $\Omega \neq \mathbb{R}^N$. O seguinte teorema mostra que $\mathcal{U}_N$ é alcançado se for maior que $\Sigma_N$.

**Teorema 4.14** *Se $\mathcal{U}_N > \Sigma_N$, então o supremo $\mathcal{U}_N$ é atingido.*

**Prova.** Suponha por contradição que $\mathcal{U}_N$ não é atingido. Seja $(u_n)$ uma sequência maximizante, i.e.,

$$\|\nabla u_n\|_2 = 1$$

e

$$\int_B |u_n(x)|^{p(r)}\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{U}_N.$$

Sendo $(u_n)$ limitada em $\mathrm{H}^1_{0,r}(B)$, existe uma subsequência fracamente convergente

$$u_n \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad \mathrm{H}^1_{0,r}(B).$$

Por resultados de Análise Funcional,

$$\|w\|_{\mathrm{H}^1_{0,r}(B)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_{\mathrm{H}^1_{0,r}(B)},$$

ou seja,

$$\|\nabla w\|_{\mathrm{L}^2(B)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{\mathrm{L}^2(B)} = 1.$$

Assim,

$$\int_B |\nabla w(x)|^2\, dx \leq 1.$$

**Afirmação 4.15** *A função $w \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$ é nula.*

De fato, suponha por contradição que $w \neq 0$, temos

$$\int_B |\nabla w(x)|^2\, dx > 0.$$

Por uma argumento do tipo Brezis-Lieb,

$$\int_B |u_n(x)|^{2^*+r^\alpha}\, dx = \int_B |u_n(x) - w(x)|^{2^*+r^\alpha}\, dx + \int_B |w(x)|^{2^*+r^\alpha}\, dx + \mathrm{O}(1) \quad (4.31)$$

e

$$\int_B |\nabla u_n(x)|^2 \, dx = \int_B |\nabla (u_n(x) - w(x))|^2 \, dx + \int_B |\nabla w(x)|^2 \, dx + \mathrm{O}(1). \quad (4.32)$$

Da segunda identidade, se

$$\int_B |\nabla w(x)|^2 \, dx = 1,$$

então,

$$1 = \int_B |\nabla (u_n(x) - w(x))|^2 \, dx + 1 + \mathrm{O}(1)$$

consequentemente

$$\int_B |\nabla (u_n(x) - w(x))|^2 \, dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

acarretando,

$$u_n \to w, \quad \text{em} \quad \mathrm{H}^1_{0,r}(B).$$

Por continuidade, $\mathcal{U}_N$ é atingido, contradizendo nossa hipótese. Assim, podemos assumir,

$$0 < \int_B |\nabla w|^2 < 1.$$

Então, definindo $z_n = u_n - w$ e recordando que

$$\int_B |u_n(x)|^{p(r)} \, dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathcal{U}_N,$$

obtemos por (4.31),

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_N &= \int_B |z_n(x)|^{2^*+r^\alpha} dx + \int_B |w(x)|^{2^*+r^\alpha} dx + \mathrm{O}(1) \\
&= \int_B \left( \frac{|z_n(x)|}{\|\nabla z_n\|_2} \right)^{2^*+r^\alpha} \|\nabla z_n\|_2^{2^*+r^\alpha} dx + \int_B \left( \frac{|w(x)|}{\|\nabla w\|_2} \right)^{2^*+r^\alpha} \|\nabla w\|_2^{2^*+r^\alpha} dx + \mathrm{O}(1) \\
&= \|\nabla z_n\|_2^{2^*+r^\alpha} \int_B \left( \frac{|z_n(x)|}{\|\nabla z_n\|_2} \right)^{2^*+r^\alpha} dx + \|\nabla w\|_2^{2^*+r^\alpha} \int_B \left( \frac{|w(x)|}{\|\nabla w\|_2} \right)^{2^*+r^\alpha} dx + \mathrm{O}(1).
\end{aligned}$$

Por definição de $\mathcal{U}_N$,

$$\mathcal{U}_N \leq \mathcal{U}_N \, \|\nabla z_n\|_2^{2^*+r^\alpha} + \mathcal{U}_N \, \|\nabla w\|_2^{2^*+r^\alpha} + \mathrm{O}(1),$$

usando (4.32),

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_N &\leq \mathcal{U}_N \left(1-\|\nabla w\|_2^2+\mathrm{O}(1)\right)^{\frac{2^*+r^\alpha}{2}} + \mathcal{U}_N \left(\|\nabla w\|_2^2\right)^{\frac{2^*+r^\alpha}{2}} + \mathrm{O}(1) \\
&= \mathcal{U}_N \left[\left(1-\|\nabla w\|_2^2+\mathrm{O}(1)\right)^{\frac{2^*+r^\alpha}{2}} + \left(\|\nabla w\|_2^2\right)^{\frac{2^*+r^\alpha}{2}}\right] + \mathrm{O}(1) \\
&< \mathcal{U}_N,
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Implicando

$$\mathcal{U}_N < \mathcal{U}_N$$

um absurdo. Portanto,

$$w = 0.$$

Assim,

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{H}^1_{0,r}(B). \tag{4.33}$$

Agora, vamos mostrar que $(u_n)$ é uma sequência de concentração normalizada. Para isto, precisamos mostrar que

$$\int_\delta^1 |u_n'(r)|^2 \; r^{N-1}\, dr \to 0 \tag{4.34}$$

para qualquer $\delta > 0$.

Lembre que

$$\mathrm{H}^1_{0,r}([\delta,1)) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^p([\delta,1)),$$

para todo $p \geq 1$ e então

$$\int_\delta^1 |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} \; r^{N-1}\, dr \to 0. \tag{4.35}$$

**Proposição 4.16** *Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lambda \int_B \nabla u_n \nabla \varphi \, dx = \int_B (2^* + r^\alpha) \, |u_n|^{2^*+r^\alpha} \, u_n \varphi \, dx,$$

*onde $\varphi \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$.*

**Prova.** Vamos colocá-lo nas condições do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Considere $E = \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$,

$$F(u) = \|u_n\|^2 - 1,$$

$$J(u) = \int_B |u(x)|^{2^*+r^\alpha} \, dx$$

e

$$M = \left\{ u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B) \, ; \; F(u) = 0 \right\} = \left\{ u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B) \, ; \; \|\nabla u\|_2 = 1 \right\}.$$

Obtemos

$$F'(u)\, v = \int_B \nabla u \nabla \varphi \, dx$$

e

$$J'(u)\, \varphi = \int_B (2^* + r^\alpha) \, |u|^{2^*+r^\alpha-2} \, u \, \varphi \, dx$$

**Afirmação 4.17** *O funcional $J$ é limitado inferiormente em $M$.*

De fato, note que

$$J(u) = \int_B |u|^{2^*+r^\alpha} \, dx \geq 0, \quad \forall \, u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$$

em particular, sobre $M \subset \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$.

Pelo Postulado de Dedeking, existe $c_* \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 \leq c_* = \inf_{u \in M} J(u).$$

**Afirmação 4.18** *O funcional $F'$ é não nulo em $M$, i.e.,*

$$F'(u) \neq 0, \quad \forall \, u \in M.$$

De fato, dado $u \in M$, temos

$$\|\nabla u\|_2 = 1,$$

assim,

$$F'(u) = \int_B |\nabla u|^2 \, dx = 1 \neq 0.$$

Valendo a afirmação 4.18.

Mostra-se também,

$$\min_{u \in M} J(u) = J(u_n).$$

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lambda \int_B \nabla u_n \nabla \varphi \, dx = \int_B (2^* + r^\alpha) \, |u_n|^{2^*+r^\alpha} \, u_n \varphi \, dx,$$

para toda $\varphi \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$. ■

**Afirmação 4.19** *A sequência* $(u_n)$ *é* $(PS)_{c_*}$ *para* $J$*, i.e.,*

$$J(u_n) \to c_* \quad \text{e} \quad J'(u_n) \to 0.$$

De fato, sendo

$$c_* = \inf_{u \in M} J(u),$$

então para $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, existe

$$(\overline{u_n}) \subset M,$$

tal que

$$c_* \ \leq \ J(\overline{u_n}) \ \leq \ c_* + \frac{1}{n}.$$

Do Princípio Variacional de Ekelend, para $\lambda = n$, existe $(u_n) \subset M$ tal que

$$J(u_n) \to c_*$$

e

$$J(u_n) < J(u) + \frac{1}{n}\|u_n - u\| \tag{4.36}$$

para todo $u \neq u_n$.

Seja $w \in M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, defina n

$$\begin{aligned} h_n : \quad \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t,s) \quad &\longrightarrow h_n(t,s) = F(u_n + tw + su_n), \end{aligned}$$

temos $h_n = F \circ \psi_n \in \mathrm{C}^1$ onde

$$\psi_n(t,s) = u_n + tw + su_n$$

e

$$h_n(0,0) = F(u_n) = 0.$$

Além disso,

$$\frac{\partial h_n}{\partial s}(0,0) \ = \ \frac{\partial (F \circ \psi_n)}{\partial s}(0,0) = F'(\psi_n(0,0)) \frac{\partial \psi_n}{\partial s}(0,0) = F'(u_n)\, u_n$$

pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

$$F'(u_n)\, u_n \neq 0,$$

assim,

$$\frac{\partial h_n}{\partial s}(0,0) \neq 0.$$

Aplicando o Teorema da Função implícita, existe $\delta > 0$ e uma aplicação

$$T_n : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$$

tal que

$$T_n \in \mathrm{C}^1,$$

$$h_n(t, T_n(t)) = 0, \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta)$$

e

$$T_n'(0) = 0.$$

Logo

$$F(u_n + tw + T_n(t)\, u_n) = 0, \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta)$$

$$\Rightarrow\ u_n + tw + T_n(t)\, u_n \in M, \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta).$$

Considerando

$$\begin{array}{rcl} \alpha : (-\delta, \delta) & \longrightarrow & M \\ t & \longrightarrow & \alpha(t) = u_n + tw + T_n(t)\, u_n \end{array}$$

temos

$$\alpha(0) = u_n + T_n(0)\, u_n = u_n$$

e

$$\alpha'(t) = w + T_n'(t)\, u_n.$$

Tomando em (4.36), $u = \alpha(t)$, temos

$$J(u_n) < J(\alpha(t)) + \frac{1}{n}\|u_n - \alpha(t)\|.$$

Resultando

$$\begin{aligned} \frac{J(\alpha(t)) - J(\alpha(0))}{t} &\geq \frac{J(u_n) - \frac{1}{n}\|tw + T_n(t)\, u_n\| - J(u_n)}{t} \\ &\geq -\frac{1}{n}\left\|w + \frac{T_n(t)}{t}u_n\right\| \geq -\frac{1}{n}\left(\|w\| + \left\|\frac{T_n(t)}{t}u_n\right\|\right) \\ &\geq -\frac{1}{n}\|w\| - \frac{1}{n}\left\|\frac{T_n(t)}{t}u_n\right\|. \end{aligned}$$

Sendo $-\dfrac{1}{n} \geq -1$, na desigualdade acima

$$\frac{J(\alpha(t)) - J(\alpha(0))}{t} \geq -\frac{1}{n}\|w\| - \left\|\frac{T_n(t)}{t}u_n\right\|,$$

passando ao limite com $t \to 0$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(\alpha(t)) - J(\alpha(0))}{t} \geq \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{n}\|w\| - \left\|\frac{T_n(t)}{t}u_n\right\|\right)$$

implicando

$$(J\circ\alpha)'(0) \geq -\frac{1}{n}\|w\| - \|T_n'(0)\,u_n\|$$

em outros termos

$$J'(\alpha(0))\,\alpha'(0) \geq -\frac{1}{n}\|w\| - \|T_n'(0)\,u_n\| = -\frac{1}{n}\|w\|.$$

Substituindo $\alpha(0) = u_n$ e $\alpha'(0) = w$, obtemos

$$J'(u_n)\frac{w}{\|w\|} \geq -\frac{1}{n}, \quad \forall\, w \in M.$$

Tomando $-w \in M$, temos

$$J'(u_n)\frac{w}{\|w\|} \leq \frac{1}{n},$$

acarretando,

$$\|J'(u_n)\|_{\mathrm{H}^1_{0,r}(B)} = \sup_{v\in\mathrm{H}^1_{0,r}(B),\ \|v\|=1}|J'(u_n)\,v| \leq \frac{1}{n},$$

logo

$$J'(u_n) \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

Portanto, $(u_n)$ é $(PS)_{c_*}$ para $J$ restrito à $M$.

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange,

$$\mathrm{o}(1) = \|J|'_M(u_n)\|_* = \min_{\lambda\in\mathbb{R}}\|J'(u_n) - \lambda F'(u_n)\|_{\left(\mathrm{H}^1_{0,r}(B)\right)'},$$

onde,

$$\|J|'_M(u_n)\|_* = \sup_{F'(u_n)v=0,\ \|v\|=1}|J'(u_n)\,v|.$$

Observe que,

$$\left|J'\left(u_n\right)u_n-\lambda_n F'\left(u_n\right)u_n\right|\leq\left\|J'\left(u_n\right)-\lambda_n F'\left(u_n\right)\right\|_{\left(\mathrm{H}^1_{0,r}(B)\right)'},$$

por consequência,

$$\left|J'\left(u_n\right)u_n-\lambda_n F'\left(u_n\right)u_n\right|\leq\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|J'\left(u_n\right)-\lambda F'\left(u_n\right)\right\|_{\left(\mathrm{H}^1_{0,r}(B)\right)'}=\mathrm{o}\left(1\right),\tag{4.37}$$

assim,

$$-\lambda_n F'\left(u_n\right)u_n=\mathrm{o}\left(1\right).$$

Sendo, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange,

$$F'\left(u_n\right)u_n\neq 0,$$

segue,

$$\lambda_n\to 0,\quad\text{quando}\quad n\to+\infty.$$

Portanto,

$$\left\|J'\left(u_n\right)\right\|_{\left(\mathrm{H}^1_{0,r}(B)\right)'}\leq\left\|J'\left(u_n\right)-\lambda_n F'\left(u_n\right)\right\|_{\left(\mathrm{H}^1_{0,r}(B)\right)'}+\left|\lambda_n\right|\left\|F'\left(u_n\right)\right\|_{\left(\mathrm{H}^1_{0,r}(B)\right)'}=\mathrm{o}\left(1\right)$$

implicando,

$$\left\|J'\left(u_n\right)\right\|_{\left(\mathrm{H}^1_{0,r}(B)\right)'}\to 0,\quad\text{quando}\quad n\to+\infty$$

mostrando que $(u_n)$ é uma sequência $(PS)_{c_*}$ para $J$ em $\mathrm{H}^1_{0,r}(B)$.

Sabendo que (4.37) vale para todo $\varphi\in M$, temos

$$\lambda_n\int_B\nabla u_n\nabla\varphi\,dx=\int_B\left(2^*+r^\alpha\right)\left|u_n\right|^{2^*+r^\alpha-2}u_n\varphi\,dx+\mathrm{o}\left(1\right).\tag{4.38}$$

Escolhendo $\varphi=u_n$, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_n\int_B\left|\nabla u_n\right|^2\,dx &= \int_B\left(2^*+r^\alpha\right)\left|u_n\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx+\left\langle\mathrm{o}\left(1\right),u_n\right\rangle\\ &\geq 2^*\int_B\left|u_n\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx+\left\langle\mathrm{o}\left(1\right),u_n\right\rangle\to 2^*\mathcal{U}_N.\end{aligned}$$

Concluindo

$$\liminf_{n\to+\infty}\lambda_n\geq 2^*\mathcal{U}_N.$$

Agora, escolha uma função corte

$$\eta(r) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } r \leq \dfrac{\delta}{2} \\ 1 & , \text{ se } r \geq \delta, \end{cases}$$

e admita $\varphi = \eta u_n$ em (4.38),

$$\lambda_n \int_B \nabla u_n \nabla (\eta u_n) \; dx = \int_B (2^* + r^\alpha) |u_n|^{2^*+r^\alpha-2} u_n (\eta u_n) \; dx + \langle o(1), \eta u_n \rangle,$$

isto equivale,

$$\lambda_n w_{N-1} \int_0^1 \nabla u_n \nabla (\eta u_n) r^{N-1} \, dr = w_{N-1} \int_0^1 (2^* + r^\alpha) |u_n|^{2^*+r^\alpha} \eta \, r^{N-1} \, dr + \langle o(1), \eta u_n \rangle,$$

usando a definição de $\eta$,

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^1 \nabla u_n \nabla (\eta u_n) r^{N-1} \, dr = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\frac{\delta}{2}}^1 (2^* + r^\alpha) |u_n|^{2^*+r^\alpha} \eta \, r^{N-1} \, dr + \langle o(1), \eta u_n \rangle.$$

**Afirmação 4.20** $\dfrac{1}{\lambda_n} \displaystyle\int_{\frac{\delta}{2}}^1 (2^* + r^\alpha) |u_n|^{2^*+r^\alpha} \eta \, r^{N-1} \, dr + \langle o(1), \eta u_n \rangle \to 0.$

De fato,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_n} \int_{\frac{\delta}{2}}^1 (2^* + r^\alpha) |u_n|^{2^*+r^\alpha} \eta \, r^{N-1} \, dr + \langle o(1), \eta u_n \rangle \\ \leq \; & \frac{1}{\lambda_n} \int_{\frac{\delta}{2}}^1 (2^* + r^\alpha) |u_n|^{2^*+r^\alpha} \; r^{N-1} \, dr + \langle o(1), \eta u_n \rangle \\ \leq \; & \frac{2^*}{\lambda_n} \int_{\frac{\delta}{2}}^1 |u_n|^{2^*+r^\alpha} \; r^{N-1} \, dr + \langle o(1), \eta u_n \rangle. \end{aligned}$$

Usando (4.35),

$$\frac{2^*}{\lambda_n} \int_{\frac{\delta}{2}}^1 |u_n|^{2^*+r^\alpha} \; r^{N-1} \, dr \to 0,$$

segue a afirmação 4.20.

Assim,

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^1 \nabla u_n \nabla (\eta u_n) r^{N-1} \, dr \to 0.$$

Calculando o gradiente do produto,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{o}\,(1) &= \int_{\frac{\delta}{2}}^{1} \nabla u_n \left(\nabla u_n \eta \;+\; u_n \nabla \eta\right) r^{N-1}\, dr \\
&= \int_{\frac{\delta}{2}}^{1} \left|\nabla u_n\right|^2 \eta\, r^{N-1} + u_n \left(\nabla u_n \nabla \eta\right) r^{N-1}\, dr \\
&\geq \int_{\delta}^{1} \left|\nabla u_n\right|^2 \eta\, r^{N-1}\, dr + \int_{\delta}^{1} u_n \left(\nabla u_n \nabla \eta\right) r^{N-1}\, dr.
\end{aligned}
$$

Note que

$$\nabla \eta \equiv 0, \quad \forall\, r > \delta.$$

Na desigualdade acima,

$$\mathrm{o}\,(1) \geq \int_{\delta}^{1} \left|\nabla u_n\right|^2\; r^{N-1}\, dr + \mathrm{o}\,(1) \tag{4.39}$$

resultando,

$$\int_{\delta}^{1} \left|\nabla u_n\right|^2\; r^{N-1}\, dr \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty \quad \text{e} \quad \forall\, \delta > 0.$$

Portanto, $(u_n)$ é uma sequência de concentração normalizada,

$$(u_n) \in \mathcal{N}.$$

Pela Proposição 4.13

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{B} \left|u_n\right|^{2^* + r^{\alpha}}\, r^{N-1}\, dr \leq \Sigma_N.$$

Por hipótese ,

$$\mathcal{U}_N = \lim_{n \to +\infty} \int_{B} \left|u_n\right|^{2^* + r^{\alpha}}\, r^{N-1}\, dr \leq \Sigma_N < \mathcal{U}_N,$$

ou seja,

$$\mathcal{U}_N < \mathcal{U}_N,$$

um absurdo. Deste modo, o supremo $\mathcal{U}_N$ é atingido. ■

## 4.5 O problema supercrítico

Consideramos, a seguir, uma equação elíptica relacionada com uma não linearidade supercrítica.

**Teorema 4.21** *Seja* $p(r) = 2^* + r^\alpha$, *com* $0 < \alpha < \min\left\{\frac{N}{2}, N-2\right\}$. *Então, o seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{p(r)-1} \quad \text{em} \quad B \\ u &> 0 \quad \text{em} \quad B \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B \end{cases} \tag{4.40}$$

*tem uma solução radial não trivial.*

**Prova.** Considere o funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla u|^2 \, dx - \int_B \frac{1}{2^* + r^\alpha} |u|^{2^*+r^\alpha} \, dx,$$

com $u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$. Pelo Teorema 3.1, $I$ está bem definido e é de classe $\mathrm{C}^1$. O funcional $I$ tem a geometria do Passo da Montanha na origem, mas claro, devido ao crescimento supercrítico, o funcional $I$ não satisfaz a condição $(PS)$. Para contornar este problema seguiremos a estratégia de Brezis-Niremberg [7]:

Identificaremos o nível de não compacidade, e mostraremos que abaixo desse nível há compacidade. Então, em um último passo, mostraremos que o nível minimax do funcional está de fato abaixo do nível de não-compacidade.

Procederemos em três passos:

(1) O nível $\frac{1}{N}S_N^{\frac{N}{2}}$ é o nível de não compacidade para o funcional $I$;

(2) O nível do Passo da Montanha $c$ de $I$ satisfaz

$$c < \frac{1}{N}S_N^{\frac{N}{2}};$$

(3) Por (2), obteremos uma solução fraca $u$ no nível

$$c \in \left(0, \frac{1}{N}S_N^{\frac{N}{2}}\right).$$

Mostraremos então que $u \neq 0$.

Nesta seção, denotaremos novamente

$$u_\varepsilon^*(r) = C_N \frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

com $\varepsilon > 0$ e $C_N = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{2}}$.

Vamos a demonstração dos três passos:

(1) Dado $r > 0$, seja $\eta = \eta_r \in \mathrm{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ uma função radial não negativa tal que

$$\operatorname{supt} \eta \subset B_r(0) \quad \text{e} \quad \eta \equiv 1 \quad \text{em} \quad B_{\frac{r}{2}}(0).$$

Para $\varepsilon > 0$, defina $u_\varepsilon = \eta u_\varepsilon^*$. Podemos checar que $u_\varepsilon \in \mathrm{H}_{0,r}^1(B)$ é uma sequência de Palais-Smale para $I$ com

$$I(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx - \int_B \frac{1}{2^* + r^\alpha} |u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} \, dx \to \frac{1}{N} S_N^{\frac{N}{2}}.$$

A sequência $u_\varepsilon$ está se concentrando e converge fracamente para 0 e, portanto, não contém uma subsequência fortemente convergente.

(2) O funcional $I$ tem a geometria do Passo da Montanha. Para provar que o nível do Passo da Montanha está abaixo do valor $\frac{1}{N} S_N^{\frac{N}{2}}$, escolha $u_\varepsilon$ como no item (1) e defina

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,\mathrm{R}]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma := \left\{\gamma : [0,\mathrm{R}] \to \mathrm{H}_{0,r}^1(B) \text{ continua; } \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(\mathrm{R}) = \mathrm{R}u_\varepsilon\right\},$$

com $\mathrm{R} > 0$ suficientemente grande, tal que

$$I(\mathrm{R}u_\varepsilon) \leq 0.$$

Então, a curva $\gamma_\varepsilon(t) = tu_\varepsilon$, com $t \in [0,\mathrm{R}]$, pertence à $\Gamma$ e

$$c \leq \max_{t \in [0,\mathrm{R}]} I(tu_\varepsilon) =: I(t_\varepsilon u_\varepsilon).$$

Primeiro, vamos estimar o valor de $t_\varepsilon$, usando argumentos similares como na prova da Proposição 4.13. Com efeito, sendo

$$\frac{d}{dt} I(tu_\varepsilon)|_{t=t_\varepsilon} = 0,$$

temos

$$t_\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2 - \int_B t_\varepsilon^{2^*+r^\alpha-1} |u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} \, dx = 0,$$

implicando

$$t_\varepsilon \int_B |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx = \int_B t_\varepsilon^{2^*+r^\alpha-1} |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha} \, dx. \tag{4.41}$$

Por Brezis-Niremberg [7],

$$\int_B |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx = S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) \tag{4.42}$$

e

$$\int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \, dx = S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right). \tag{4.43}$$

Usando (4.42) em (4.41),

$$\begin{aligned} S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) &= \int_B |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx = t_\varepsilon^{2^*-2} \int_B t_\varepsilon^{r^\alpha} |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha} \, dx \\ &= t_\varepsilon^{2^*-2} \int_B t_\varepsilon^{r^\alpha} \left( |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha} + t_\varepsilon^{-r^\alpha} |u_\varepsilon(x)|^{2^*} - t_\varepsilon^{-r^\alpha} |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \right) dx, \end{aligned}$$

distribuindo $t_\varepsilon^{r^\alpha}$ e separando as integrais, obtemos

$$\begin{aligned} S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) &= t_\varepsilon^{2^*-2} \int_B t_\varepsilon^{r^\alpha} |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon(x)|^{2^*} + |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \, dx \\ &= t_\varepsilon^{2^*-2} \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \, dx + t_\varepsilon^{2^*-2} \int_B t_\varepsilon^{r^\alpha} |u_\varepsilon(x)|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \, dx \\ &= t_\varepsilon^{2^*-2} \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \, dx + t_\varepsilon^{2^*-2} \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \left( \left(t_\varepsilon |u_\varepsilon(x)|\right)^{r^\alpha} - 1 \right) dx, \end{aligned}$$

utilizando (4.43),

$$S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) = t_\varepsilon^{2^*-2} \left[ S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right) + \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \left( \left(t_\varepsilon |u_\varepsilon(x)|\right)^{r^\alpha} - 1 \right) dx \right].$$

Defina

$$\mathbf{A}_\varepsilon := \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*} \left( \left(t_\varepsilon |u_\varepsilon(x)|\right)^{r^\alpha} - 1 \right) dx,$$

assim

$$S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) = t_\varepsilon^{2^*-2} \left[ S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N}\right) + \mathrm{A}_\varepsilon \right]. \tag{4.44}$$

**Afirmação 4.22** $-c\varepsilon^{\frac{N}{2}} \leq \mathrm{A}_\varepsilon \ \leq \ c\varepsilon^\alpha |\log \varepsilon|$.

De fato, seja $\widetilde{a}_\varepsilon$ tal que, para $\|x\| = r$, tem-se

$$|t_\varepsilon u_\varepsilon(x)| \leq 1, \quad \text{para} \quad \widetilde{a}_\varepsilon \leq r \leq 1.$$

Por esse motivo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_\varepsilon &= \int_B |u_\varepsilon(x)|^{2^*}\left((t_\varepsilon|u_\varepsilon(x)|)^{r^\alpha}-1\right)\,dx \\
&= w_{N-1}\int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\left(|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|^{r^\alpha}-1\right)r^{N-1}\,dr \\
&= w_{N-1}\int_0^{\widetilde{a}_\varepsilon} |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\left(|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|^{r^\alpha}-1\right)r^{N-1}\,dr \\
&+ w_{N-1}\int_{\widetilde{a}_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\left(|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|^{r^\alpha}-1\right)r^{N-1}\,dr.
\end{aligned}$$

Para $\widetilde{a}_\varepsilon \leq r \leq 1$, temos

$$|t_\varepsilon u_\varepsilon(x)|^{r^\alpha}-1 \leq 0.$$

Logo, na desigualdade anterior

$$\mathrm{A}_\varepsilon \leq w_{N-1}\int_0^{\widetilde{a}_\varepsilon} |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\left(|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|^{r^\alpha}-1\right)r^{N-1}\,dr,$$

resultando,

$$\mathrm{A}_\varepsilon \leq w_{N-1}\int_0^{\widetilde{a}_\varepsilon} |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\left(e^{r^\alpha \ln|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|}-1\right)r^{N-1}\,dr. \tag{4.45}$$

**Exercício 4.23** $e^{r^\alpha \ln|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|}-1 \leq cr^\alpha|\ln\varepsilon|$.

Substituindo o exercício 4.23 na desigualdade (4.45), temos

$$\mathrm{A}_\varepsilon \leq w_{N-1}\int_0^{\widetilde{a}_\varepsilon} |u_\varepsilon(r)|^{2^*} cr^\alpha|\ln\varepsilon|\,r^{N-1}\,dr. \tag{4.46}$$

Observe que

$$u_\varepsilon^*(r) = \frac{\mathrm{C}_N\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{N-2}{2}}} \leq \frac{\mathrm{C}_N\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\varepsilon^{N-2}} = \frac{\mathrm{C}_N}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}},$$

assim,

$$u_\varepsilon(r) = \eta u_\varepsilon^*(r) \leq \frac{\eta\mathrm{C}_N}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Calculando o modulo e elevando a $2^*$, obtemos

$$|u_\varepsilon(r)|^{2^*} \leq \left|\eta\frac{\mathrm{C}_N}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{\frac{2N}{N-2}} \leq \left|\frac{\mathrm{C}_N}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{\frac{2N}{N-2}} \leq \widetilde{\mathrm{C}}_N\varepsilon^{-N}. \tag{4.47}$$

Por outro lado, temos também

$$u_\varepsilon^*(r) = \frac{\mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N-2}{2}}} \leq \frac{\mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{r^{N-2}},$$

logo,

$$|u_\varepsilon(r)|^{2^*} \leq \left| \frac{\eta \mathrm{C}_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{r^{\frac{N-2}{2}}} \right|^{\frac{2N}{N-2}} \leq \frac{\widetilde{\mathrm{C}}_N \varepsilon^N}{r^{2N}}. \tag{4.48}$$

Substituindo (4.47) e (4.48) em (4.46),

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_\varepsilon &\leq w_{N-1} \int_0^\varepsilon |u_\varepsilon(r)|^{2^*} c r^\alpha |\ln \varepsilon| r^{N-1}\, dr + w_{N-1} \int_\varepsilon^{\widetilde{a}_\varepsilon} |u_\varepsilon(r)|^{2^*} c r^\alpha |\ln \varepsilon| r^{N-1}\, dr \\
&\leq w_{N-1} \int_0^\varepsilon \widetilde{\mathrm{C}}_N \varepsilon^{-N} c r^\alpha |\ln \varepsilon| r^{N-1}\, dr + w_{N-1} \int_\varepsilon^{\widetilde{a}_\varepsilon} \widetilde{\mathrm{C}}_N \varepsilon^N r^{-2N} c r^\alpha |\ln \varepsilon| r^{N-1}\, dr,
\end{aligned}$$

juntando as constantes,

$$\mathrm{A}_\varepsilon \leq c \int_0^\varepsilon \varepsilon^{-N} r^\alpha |\ln \varepsilon| r^{N-1}\, dr + c \int_\varepsilon^{\widetilde{a}_\varepsilon} \varepsilon^N r^{-N-1+\alpha} |\ln \varepsilon|\, dr,$$

sendo $r \leq \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_\varepsilon &\leq c\varepsilon^{-N} \varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon| \int_0^\varepsilon r^{N-1}\, dr + c\varepsilon^N |\ln \varepsilon| \int_\varepsilon^{\widetilde{a}_\varepsilon} r^{-N-1+\alpha}\, dr \\
&\leq c\varepsilon^{-N} \varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon| \left[ \frac{r^N}{N} \right]_0^\varepsilon + c\varepsilon^N |\ln \varepsilon| \left[ \frac{r^{\alpha-N}}{\alpha - N} \right]_\varepsilon^{\widetilde{a}_\varepsilon} \\
&\leq \frac{c\varepsilon^{-N} \varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon| \varepsilon^N}{N} + \frac{c\varepsilon^N |\ln \varepsilon|}{\alpha - N} \left( \widetilde{a}_\varepsilon^{\alpha-N} + \varepsilon^{\alpha-N} \right) \\
&\leq c\varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon| + \frac{1}{\alpha - N} \left( c\varepsilon^N |\ln \varepsilon| \widetilde{a}_\varepsilon^{\alpha-N} + c\varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon| \right).
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\alpha < \min \left\{ N - 2, \frac{N}{2} \right\},$$

ou seja,

$$\alpha - N < 0,$$

substituindo na desigualdade acima,

$$\mathrm{A}_\varepsilon \leq c\varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_\varepsilon &= w_{N-1}\int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\left(|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\,dr \\ &\geq w_{N-1}\int_{\widetilde{a}_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*}\left(|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|^{r^\alpha}-1\right) r^{N-1}\,dr, \end{aligned}$$

desde que,

$$|t_\varepsilon u_\varepsilon(r)|^{r^\alpha}-1 \geq -1, \quad \forall\, r,$$

temos,

$$\mathrm{A}_\varepsilon \geq -w_{N-1}\int_{\widetilde{a}_\varepsilon}^1 |u_\varepsilon(r)|^{2^*} r^{N-1}\,dr,$$

por (4.48),

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_\varepsilon &\geq -w_{N-1}\int_{\widetilde{a}_\varepsilon}^1 \frac{\widetilde{\mathrm{C}}_N\varepsilon^N}{r^{2N}}\, r^{N-1}\,dr \;= -c\int_{\widetilde{a}_\varepsilon}^1 \varepsilon^N\, r^{-N-1}\,dr \\ &\geq -c\varepsilon^N\,\frac{r^{-N}}{-N}\Big|_{\widetilde{a}_\varepsilon}^1 = c\varepsilon^N\left(1-\widetilde{a}_\varepsilon^{-N}\right) \geq -c\varepsilon^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$-c\varepsilon^{\frac{N}{2}} \;\leq\; \mathrm{A}_\varepsilon \;\leq\; c\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon|\,,$$

mostrando a afirmação 4.22. Segue dessa desigualdade que

$$|\mathrm{A}_\varepsilon| \;\leq\; c\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon| \;+\; c\varepsilon^{\frac{N}{2}}.$$

Claramente, temos

$$c\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon| = \mathrm{O}\left(\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon|\right)$$

e

$$c\varepsilon^{\frac{N}{2}} = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right).$$

Assim,

$$|\mathrm{A}_\varepsilon| \leq \mathrm{O}\left(\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right).$$

Substituindo em (4.44),

$$S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) = t_\varepsilon^{2^*-2}\left[S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right],$$

acarretando,

$$S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) = t_\varepsilon^{2^*-2}\left[S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^\alpha\,|\ln\varepsilon|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right].$$

Dividindo por $S_N^{\frac{N}{2}}$, obtemos

$$1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) = t_\varepsilon^{2^*-2}\left[1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^\alpha \left|\ln \varepsilon\right|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right]. \tag{4.49}$$

**Afirmação 4.24** *Vale a seguinte desigualdade*

$$1 + (2^* - 2)(t-1) \leq t^{2^*-2}, \quad \forall\, t \approx 1 \ \ (t > 0).$$

De fato, defina

$$f(t) = t^{2^*-2} - 1 - (2^* - 2)(t-1).$$

Observe que

$$f(1) = 1 - 1 = 0,$$

e

$$f'(t) = (2^* - 2)\, t^{2^*-3} - (2^* - 2).$$

E mais,

- $t < 1 \ \Rightarrow\ t^{2^*-3} < 1 \ \Rightarrow\ (2^* - 2)\, t^{2^*-3} < (2^* - 2) \ \Rightarrow\ f'(t) < 0,$
- $t > 1 \ \Rightarrow\ t^{2^*-3} > 1 \ \Rightarrow\ (2^* - 2)\, t^{2^*-3} > (2^* - 2) \ \Rightarrow\ f'(t) > 0,$

ou seja, 1 é mínimo local para $t \approx 1$, logo

$$0 = f(1) \ \leq\ f(t), \quad \forall\, t \approx 1.$$

Aplicando a definição de $f$

$$0 \ \leq\ t^{2^*-2} - 1 - (2^* - 2)(t-1), \quad \forall\, t \approx 1,$$

isso implica,

$$t^{2^*-2} \ \geq\ 1 + (2^* - 2)(t-1), \quad \forall\, t \approx 1.$$

Valendo a afirmação 4.24.

**Afirmação 4.25** $t_\varepsilon \ \to\ 1, \quad$ *quando* $\quad \varepsilon \to 0.$

De fato, primeiro vamos mostrar que vale as seguintes convergências

(i) $\mathrm{O}\left(\varepsilon^\alpha \left|\ln \varepsilon\right|\right) \ \to\ 0, \quad$ quando $\quad \varepsilon \ \to 0;$

(ii) $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) \ \to\ 0, \quad$ quando $\quad \varepsilon \ \to 0;$

(iii) $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$;

Com efeito, sabemos que existe $c > 0$ tal que

$$\left|\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)\right| \leq c\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|.$$

Passando ao limite com $\varepsilon \to 0$ e observe no lado direito que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right| = c\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left|\ln\varepsilon\right|}{\varepsilon^{-\alpha}} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

por L'Hospital,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right| = c\lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{-\alpha\varepsilon^{-\alpha-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\alpha\varepsilon^{-\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{\alpha}}{\alpha} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right) = 0.$$

Para os itens (ii) e (iii) basta notar que

$$\left|\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right| \leq c\varepsilon^{\frac{N}{2}} \to 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0$$

e

$$\left|\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)\right| \leq c\varepsilon^{N-2} \to 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0$$

para alguma constante $c > 0$. Valendo os itens (i), (ii) e (iii).

Passando ao limite, com $\varepsilon \to 0$ em (4.49), obtemos

$$1 = \lim_{\varepsilon\to 0} t_{\varepsilon}.$$

Sendo assim, vale a afirmação 4.24 para $t_{\varepsilon}$, ou seja,

$$1 + \left(2^{*} - 2\right)\left(t_{\varepsilon} - 1\right) \leq t_{\varepsilon}^{2^{*}-2},$$

multiplicando ambos os lados por $\left[1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right]$, resulta

$$\left(1 + \left(2^{*} - 2\right)\left(t_{\varepsilon} - 1\right)\right)\left[1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right] \leq t_{\varepsilon}^{2^{*}-2}\left[1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right],$$

usando (4.49),

$$\left(1 + \left(2^{*} - 2\right)\left(t_{\varepsilon} - 1\right)\right)\left[1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right] \leq 1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right),$$

subtraindo menos 1 nos dois lados e dividindo por $\varepsilon^{N-2}$, temos

$$\frac{(1+(2^*-2)(t_\varepsilon-1))\left[1+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right]-1}{\varepsilon^{N-2}} \leq c,$$

ou seja,

$$(1+(2^*-2)(t_\varepsilon-1))\left[1+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right]-1=\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right).$$

Ou melhor,

$$(1+(2^*-2)(t_\varepsilon-1))\left[1+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\right]=1+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right).$$

Desenvolvendo a multiplicação,

$$\begin{aligned}1+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) &= 1+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+(2^*-2)(t_\varepsilon-1)\\ &+ (2^*-2)(t_\varepsilon-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+(2^*-2)(t_\varepsilon-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right),\end{aligned}$$

isolando $(2^*-2)(t_\varepsilon-1)$,

$$\begin{aligned}(2^*-2)(t_\varepsilon-1) &= \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)\\ &+ (2^*-2)(t_\varepsilon-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+(2^*-2)(t_\varepsilon-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right),\end{aligned}$$

dividindo tudo por $(2^*-2)$,

$$(t_\varepsilon-1)=\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)}{(2^*-2)}+(t_\varepsilon-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+(t_\varepsilon-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right).$$

Resultando,

$$(t_\varepsilon-1)=\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+(t_\varepsilon-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+(t_\varepsilon-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right).$$

Sabendo que

$$t_\varepsilon \leq \mathrm{R} \;\Rightarrow\; t_\varepsilon-1 \leq \mathrm{R}-1,$$

substituindo na igualdade acima

$$(t_\varepsilon-1)\leq \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+(\mathrm{R}-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)+(\mathrm{R}-1)\,\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right),$$

usando propriedades de Ordem grande,

$$(t_\varepsilon-1)\leq \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right). \tag{4.50}$$

**Afirmação 4.26** $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)$.

De fato, vamos mostrar um por vez:

- $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)$.

$$\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|}\,\frac{\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-2}} \leq c\,\frac{\varepsilon^{N-2-\alpha}}{\left|\ln\varepsilon\right|},$$

sendo $\alpha < N-2$,

$$c\,\frac{\varepsilon^{N-2-\alpha}}{\left|\ln\varepsilon\right|} \leq \frac{c}{\left|\ln\varepsilon\right|} \;\to\; 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0,$$

por definição de limite,

$$\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|}\,\frac{\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-2}} \;\leq\; \frac{c}{\left|\ln\varepsilon\right|} \;\leq\; c.$$

Logo, $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)$.

- $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)$.

$$\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)}{\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|}\,\frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} \;\leq\; c\,\frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha}}{\left|\ln\varepsilon\right|} \;\leq\; \frac{c}{\left|\ln\varepsilon\right|} \;\to\; 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0,$$

novamente por definição de Limite,

$$\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right)}{\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|}\,\frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}}}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} \;\leq\; c.$$

Concluindo, $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right)$.

Portanto, vale a afirmação 4.26.

Substituindo em (4.50),

$$t_{\varepsilon} - 1 \;=\; \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\alpha}\left|\ln\varepsilon\right|\right) =: \mathrm{R}_{\varepsilon}. \tag{4.51}$$

Voltando para estimativa de $I\left(t_{\varepsilon}u_{\varepsilon}\right)$,

$$\begin{aligned} I\left(t_{\varepsilon}u_{\varepsilon}\right) &= \frac{1}{2}\int_{B}\left|\nabla\left(t_{\varepsilon}u_{\varepsilon}\right)\right|^{2}\,dx - \int_{B}\frac{1}{2^{*}+r^{\alpha}}\left|t_{\varepsilon}u_{\varepsilon}\right|^{2^{*}+r^{\alpha}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{B}t_{\varepsilon}^{2}\,\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{2}\,dx - \int_{B}\frac{t_{\varepsilon}^{2^{*}+r^{\alpha}}}{2^{*}+r^{\alpha}}\left|u_{\varepsilon}\right|^{2^{*}+r^{\alpha}}\,dx, \end{aligned}$$

usando (4.51),

$$I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right)=\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^2}{2}\int_B\left|\nabla u_\varepsilon\right|^2\,dx-\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx,$$

por (4.42),

$$I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right)=\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^2}{2}\left(S_N^{\frac{N}{2}}+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)\right)-\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx,$$

desenvolvendo o quadrado da soma,

$$\begin{aligned}
I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &= \frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2+2\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)}{2}\left(S_N^{\frac{N}{2}}+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)\right)-\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx\\
&= \frac{\mathrm{R}_\varepsilon^2}{2}S_N^{\frac{N}{2}}\;+\;\frac{\mathrm{R}_\varepsilon^2}{2}\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}}+\mathrm{R}_\varepsilon\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)\\
&+\;\frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2}\;+\;\frac{\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)}{2}-\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx\\
&= \mathrm{R}_\varepsilon^2c\;+\;\mathrm{R}_\varepsilon^2\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}}+\mathrm{R}_\varepsilon\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)\\
&+\;\frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2}\;+\;\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)-\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx\\
&= c\mathrm{R}_\varepsilon^2\;+\;\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}}+\frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2}-\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}$,

$$\begin{aligned}
I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &= c\mathrm{R}_\varepsilon^2\;+\;\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}}+\frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2}-\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha}\,dx\\
&-\;\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left(\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}-\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}\right)\,dx\\
&= c\mathrm{R}_\varepsilon^2\;+\;\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}}+\frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2}\\
&-\;\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left(\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha}-\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}\right)\,dx-\int_B\frac{\left(\mathrm{R}_\varepsilon+1\right)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha}\,\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}\,dx
\end{aligned}$$

**Afirmação 4.27**

$$(1+\mathrm{R}_\varepsilon)^{2^*+r^\alpha} \geq 1+(2^*+r^\alpha)\,\mathrm{R}_\varepsilon + c\mathrm{R}_\varepsilon^2$$

*e*

$$\frac{(1+\mathrm{R}_\varepsilon)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha} \geq d.$$

De fato, ajustando o Binômio de Newton, conseguimos mostrar a primeira desigualdade. Em relação a segunda, temos

$$\frac{(1+\mathrm{R}_\varepsilon)^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha} \geq \frac{1^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha} \geq \frac{1}{2^*+r^\alpha}, \quad \text{para} \quad r \leq 1.$$

Considerando

$$d \;=\; \frac{1}{2^*+r^\alpha},$$

temos a afirmação.

Assim,

$$\begin{aligned}
I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) \;&\leq\; c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \;+\; \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}} + \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} \\
&-\; \int_B \frac{\left(1+(2^*+r^\alpha)\,\mathrm{R}_\varepsilon + c\mathrm{R}_\varepsilon^2\right)}{2^*+r^\alpha}\; |u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha}\; dx - d\int_B \left(|u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*}\right)\, dx \\
&\leq\; c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \;+\; \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}} + \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} - \int_B \frac{|u_\varepsilon|^{2^*}}{2^*+r^\alpha}\, dx - \int_B \mathrm{R}_\varepsilon\, |u_\varepsilon|^{2^*}\; dx \\
&-\; c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \int_B \frac{|u_\varepsilon|^{2^*}}{2^*+r^\alpha}\, dx \;-\; d\int_B \left(|u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*}\right)\, dx,
\end{aligned}$$

por (4.43),

$$\begin{aligned}
I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) \;&\leq\; c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \;+\; \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}} + \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} - \int_B \frac{|u_\varepsilon|^{2^*}}{2^*+r^\alpha}\, dx - \mathrm{R}_\varepsilon S_N^{\frac{N}{2}} \\
&-\; \mathrm{R}_\varepsilon \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) - c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \int_B \frac{|u_\varepsilon|^{2^*}}{2^*+r^\alpha}\, dx \;-\; d\int_B \left(|u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*}\right)\, dx.
\end{aligned}$$

Note que,

$$r \leq 1 \;\Rightarrow\; r^\alpha \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{-c\mathrm{R}_\varepsilon^2}{2^*+r^\alpha} \leq \frac{-c\mathrm{R}_\varepsilon^2}{2^*+1},$$

deste modo,

$$\begin{aligned} I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &\leq c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \ + \ \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} - \int_B \frac{\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}}{2^* + r^\alpha}\, dx - \mathrm{R}_\varepsilon \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) \\ &- \frac{c\mathrm{R}_\varepsilon^2}{2^*+1} \int_B \left|u_\varepsilon\right|^{2^*}\, dx \ - \ d\int_B \left(\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha} - \left|u_\varepsilon\right|^{2^*}\right)\, dx \\ &\leq c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \ + \ \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} - \int_B \frac{\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}}{2^* + r^\alpha}\, dx - \mathrm{R}_\varepsilon \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) \\ &- c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \left(S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right)\right) \ - \ d\int_B \left(\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha} - \left|u_\varepsilon\right|^{2^*}\right)\, dx. \end{aligned}$$

Como

$$\mathrm{R}_\varepsilon \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) = \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon \varepsilon^N\right)$$

e

$$\mathrm{R}_\varepsilon^2 \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) = \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right),$$

então,

$$\begin{aligned} I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &\leq c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \ + \ \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} - \int_B \frac{\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}}{2^* + r^\alpha}\, dx + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon \varepsilon^N\right) \\ &+ \ \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) - c\mathrm{R}_\varepsilon^2 S_N^{\frac{N}{2}} \ - \ d\int_B \left(\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha} - \left|u_\varepsilon\right|^{2^*}\right), \end{aligned}$$

sendo,

$$-c\mathrm{R}_\varepsilon^2 S_N^{\frac{N}{2}} \leq 0,$$

na desigualdade acima,

$$\begin{aligned} I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &\leq c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \ + \ \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} - \int_B \frac{\left|u_\varepsilon\right|^{2^*}}{2^* + r^\alpha}\, dx + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon \varepsilon^N\right) \\ &+ \ \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) \ - \ d\int_B \left(\left|u_\varepsilon\right|^{2^*+r^\alpha} - \left|u_\varepsilon\right|^{2^*}\right) \end{aligned}.$$

Podemos ver $c\mathrm{R}_\varepsilon^2 = \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right)$ e assim,

$$\begin{aligned}
I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &\leq \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) - \frac{1}{2^*}\int_B |u_\varepsilon|^{2^*}\, dx + \frac{1}{2^*}\int_B |u_\varepsilon|^{2^*}\, dx \\
&- \int_B \frac{|u_\varepsilon|^{2^*}}{2^* + r^\alpha}\, dx + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon \varepsilon^N\right) - d\int_B \left(|u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*}\right) \\
&\leq \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) - \frac{1}{2^*}\left(S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right)\right) \\
&+ \int_B \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2^* + r^\alpha}\right)|u_\varepsilon|^{2^*}\, dx + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon \varepsilon^N\right) - d\int_B \left(|u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*}\right).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\mathrm{O}\left(\varepsilon^N \mathrm{R}_\varepsilon\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right),$$

acarretando,

$$\begin{aligned}
I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &\leq \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{2} + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) - \frac{1}{2^*} S_N^{\frac{N}{2}} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) \\
&+ \int_B \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2^* + r^\alpha}\right)|u_\varepsilon|^{2^*}\, dx - d\int_B \left(|u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*}\right) dx \\
&\leq \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{N} + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) + \int_B \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2^* + r^\alpha}\right)|u_\varepsilon|^{2^*}\, dx \\
&- d\int_B \left(|u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*}\right) dx.
\end{aligned}$$

Desde que,

$$\mathrm{O}\left(\varepsilon^N\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right),$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &\leq \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{N} + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + \int_B \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2^* + r^\alpha}\right)|u_\varepsilon|^{2^*}\, dx \\
&- d\int_B \left(|u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*}\right) dx
\end{aligned} \tag{4.52}$$

**Afirmação 4.28**

$$\int_B \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2^* + r^\alpha}\right)|u_\varepsilon|^{2^*}\, dx \leq c\varepsilon^\alpha$$

*e*

$$\int_B \left( |u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*} \right) dx \;\geq\; \varepsilon^\alpha \left| \ln \varepsilon \right| .$$

De fato, para a primeira integral, temos

$$\begin{aligned}
\int_B \left( \frac{1}{2^*} - \frac{1}{2^* + r^\alpha} \right) |u_\varepsilon|^{2^*} \; dx \;&\leq\; c \int_0^1 \; r^\alpha \, |u_\varepsilon|^{2^*} \, r^{N-1} \, dr \\
&\leq\; c \int_0^\varepsilon \; r^\alpha \varepsilon^{-N} r^{N-1} \, dr + c \int_\varepsilon^1 \; r^\alpha \frac{\varepsilon^N}{r^{2N}} r^{N-1} \, dr \\
&\leq\; c\varepsilon^\alpha + c \left( \varepsilon^\alpha - \varepsilon^N \right) = c\varepsilon^\alpha
\end{aligned}$$

Para a outra integral, temos,

$$\begin{aligned}
\int_B \left( |u_\varepsilon|^{2^*+r^\alpha} - |u_\varepsilon|^{2^*} \right) dx \;&=\; \int_B |u_\varepsilon|^{2^*} \left( |u_\varepsilon|^{r^\alpha} - 1 \right) dx \\
&\geq\; \int_0^\varepsilon \; |u_\varepsilon|^{2^*} \left( |u_\varepsilon|^{r^\alpha} - 1 \right) \; r^{N-1} \, dr \\
&-\; \int_{a_\varepsilon}^1 \; |u_\varepsilon|^{2^*} \left( 1 - |u_\varepsilon|^{r^\alpha} \right) \; r^{N-1} \, dr \\
&\geq\; \int_0^\varepsilon \; \varepsilon^{-N} r^\alpha \left| \log \varepsilon \right| \; r^{N-1} \, dr - \int_{a_\varepsilon}^1 \; |u_\varepsilon|^{2^*} \; r^{N-1} \, dr \\
&\geq\; \varepsilon^\alpha \left| \log \varepsilon \right|
\end{aligned}$$

Substituindo a Afirmação 4.28 na desigualdade (4.52), resulta

$$I\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) \leq \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{N} + \mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) \;+\; \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) + c\varepsilon^\alpha - d\varepsilon^\alpha \left| \ln \varepsilon \right| .$$

Observe que, para $\varepsilon \approx 0$, temos

- $\mathrm{O}\left(\mathrm{R}_\varepsilon^2\right) \leq c\mathrm{R}_\varepsilon^2 \;\to\; 0$
- $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N-2}\right) \;\leq\; c\varepsilon^{N-2} \;\to\; 0$
- $\varepsilon^\alpha \left| \ln \varepsilon \right| \;=\; \dfrac{\left| \ln \varepsilon \right|}{\varepsilon^{-\alpha}} \;\to\; \dfrac{+\infty}{+\infty}$, por L'Hospital,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^\alpha \left| \ln \varepsilon \right| \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\alpha \varepsilon^{-\alpha-1}} \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\alpha \varepsilon^{-\alpha}} = 0.$$

Portanto,

$$c \leq I(t_\varepsilon u_\varepsilon) < \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{N}, \quad \text{para} \quad \varepsilon \approx 0.$$

(3) Utilizando o Teorema do Passo da Motanha com,

$$H = \mathrm{H}^1_{0,r}(B), \quad e = \mathrm{R}u_\varepsilon \quad \text{e} \quad I = \varphi,$$

onde

$$\|e\| = \|\mathrm{R}u_\varepsilon\| = \mathrm{R}\,\|u_\varepsilon\| > r, \quad \text{pois} \quad \mathrm{R} \approx +\infty$$

e

$$I(\mathrm{R}u_\varepsilon) \leq 0 = I(0) < \inf_{\|u\|=1} I(u).$$

Então, existe $\{u_n\} \subset \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$, tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0.$$

Assim,

$$I'(u_n)\varphi = \int_B \nabla u_n \nabla \varphi \, dx - \int_B |u_n|^{2^*+r^\alpha-1} \varphi \, dx \to 0,$$

para toda $\varphi \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$. Ou seja,

$$w_{N-1} \int_0^1 u_n' \varphi' \, r^{N-1} \, dr - w_{N-1} \int_0^1 |u_n|^{2^*+r^\alpha-1} \varphi \, r^{N-1} \, dr \to 0. \tag{4.53}$$

A sequência $\{u_n\} \subset \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$ é limitada, assim, existe $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$ tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u, \quad \text{quando} \quad k \to +\infty$$

e u é solução fraca para o problema

$$-\Delta u = u^{2^*-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Se $u \neq 0$, então terminamos a demonstração. Assuma, u=0 e concluímos que isso é impossível.

Por (4.35), temos

$$\int_\delta^1 |u_n(r)|^{2^*+r^\alpha} \, r^{N-1} \, dr \to 0,$$

para $\delta > 0$ fixado. Tomando $\eta \in C^{\infty}$,

$$\eta(r) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \quad r \leq \dfrac{\delta}{2} \\ 1 & , \text{ se } \quad r \geq \delta \end{cases}$$

e escolhendo $\varphi = \eta u_n$ em (4.53), obtemos

$$I'(u_n)(\eta u_n) = w_{N-1} \int_0^1 u_n' (\eta u_n)' \; r^{N-1} \, dr - w_{N-1} \int_0^1 |u_n|^{2^* + r^{\alpha} - 1} (\eta u_n) \; r^{N-1} \, dr \; \to \; 0,$$

assim,

$$\langle o(1), \eta u_n \rangle \frac{1}{w_{N-1}} = \int_0^1 u_n' (\eta u_n)' \; r^{N-1} \, dr - \int_0^1 |u_n|^{2^* + r^{\alpha} - 1} (\eta u_n) \; r^{N-1} \, dr \; \to \; 0,$$

implicando,

$$\int_0^1 u_n' (\eta u_n)' \; r^{N-1} \, dr = \int_0^1 |u_n|^{2^* + r^{\alpha} - 1} (\eta u_n) \; r^{N-1} \, dr \; + \langle o(1), \eta u_n \rangle \frac{1}{w_{N-1}} \; \to \; 0.$$

Usando a definição de $\eta$,

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^1 u_n' (\eta u_n)' \; r^{N-1} \, dr = \int_{\frac{\delta}{2}}^1 |u_n|^{2^* + r^{\alpha} - 1} (\eta u_n) \; r^{N-1} \, dr \; + \langle o(1), \eta u_n \rangle \frac{1}{w_{N-1}} \; \to \; 0.$$

Acarretando,

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^1 u_n' (\eta u_n)' \; r^{N-1} \, dr \; \to \; 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Realizando as mesmas contas feitas em (4.39), temos

$$o(1) \geq \int_{\delta}^1 |u_n'|^2 \; r^{N-1} \, dr + o(1),$$

ou seja,

$$\int_{\delta}^1 |u_n'|^2 \; r^{N-1} \, dr \; \to \; 0,$$

para todo $\delta > 0$.

**Afirmação 4.29** $I(u_n) = I_0(u_n) + o(1)$, *onde*

$$I_0(u_n) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u_n(x)|^2 \; dx \; - \; \frac{1}{2^*} \int_B |u_n(x)|^{2^*} \; dx.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_n|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr &= \int_0^1 |u_n|^{2^*} r^{N-1}\, dr + \int_0^1 \left(|u_n|^{2^*+r^\alpha} - |u_n|^{2^*}\right) r^{N-1}\, dr \\ &= \int_0^1 |u_n|^{2^*} r^{N-1}\, dr + \int_0^\eta |u_n|^{2^*} \left(|u_n|^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr \\ &+ \int_\eta^1 |u_n|^{2^*} \left(|u_n|^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr.\end{aligned}$$

Observe que por (4.30),

$$\int_0^\eta |u_n(r)|^{2^*} \left(|u_n(r)|^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

substituindo na desigualdade anterior,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_n|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr &\leq \int_0^1 |u_n|^{2^*} r^{N-1}\, dr + \frac{\varepsilon}{2} + \int_\eta^1 |u_n|^{2^*} \left(|u_n|^{r^\alpha} - 1\right) r^{N-1}\, dr \\ &\leq \int_0^1 |u_n|^{2^*} r^{N-1}\, dr + \frac{\varepsilon}{2} + \int_\eta^1 |u_n|^{2^*} |u_n|^{r^\alpha} r^{N-1}\, dr.\end{aligned}$$

Por (4.35) concluímos

$$\int_0^1 |u_n|^{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \leq \int_0^1 |u_n|^{2^*} r^{N-1}\, dr + \varepsilon,$$

ou melhor,

$$\int_0^1 \frac{|u_n|^{2^*+r^\alpha}}{2^*+r^\alpha} r^{N-1}\, dr \leq \int_0^1 \frac{|u_n|^{2^*}}{2^*} r^{N-1}\, dr + \varepsilon \frac{1}{2^*}.$$

Portanto,

$$I(u_n) \leq I_0(u_n) + \mathrm{o}(1).$$

Da mesma forma, mostra-se que

$$I(u_n) \geq I_0(u_n) + \mathrm{o}(1).$$

Conseqüentemente, obtemos que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ também para o funcional $I_0$. No entanto, sabe-se que para $I_0$ a condição Palais-Smale é válida para $0 < c < \frac{1}{N} S_N^{\frac{N}{2}}$ , ver [37, Teorema 1.45], e, portanto, para a subsequência, temos que $u_n \to u = 0$ fortemente em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Mas, isso implica que $I(u_n) \to 0$, em contradição com $I(u_n) \to c > 0$.

Portanto, $u \neq 0$. ■

**Lema 4.3** *Toda sequência* $\{u_n\} \subset \mathrm{H}^1_{0,r}(B)$ *tal que*

$$d = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(u_n) < \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{N}$$

*e*

$$I'(u_n) \to 0$$

*admite uma subsequência convergente, ou seja,* $I$ *satisfaz a condição* $(PS)_d$.

**Prova.** Ver Lema 1.44 de [37]. ■

# Apêndice A
# Resultados de Análise Funcional

Neste apêndice vamos fazer uma breve discussão sobre alguns resultados de Análise Funcional, ressaltando as principais propriedades que utilizamos no texto. Os resultados discutidos aqui são baseados em [5] e [21].

**Teorema E.30** *Seja $X$ e $Y$ espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Suponha que $(x_n) \subset X$ seja fracamente convergente, digamos,*

$$x_n \rightharpoonup x.$$

*Então, $T(x_n) \subset Y$ converge forte para $T(x)$.*

**Prova.** Ver [21, Teorema 8.1-7]. ■

**Teorema E.31** *Suponha que $E$ é um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)$ uma sequência limitada em $E$. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})$ que converge na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$.*

**Prova.** Ver [5, Teorema 3.18] ■

**Teorema E.32** *Seja $E$ um espaço vetorial normado e $(x_n)$ uma sequência em $E$. Se $x_n \rightharpoonup x$ em $E$, então $\|x_n\|$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

**Prova.** Ver [5, Proposição 3.5]. ■

# Apêndice B
# Espaços de Sobolev

Neste apêndice, vamos fazer uma sucinta exposição sobre os Espaços de Sobolev. Os resultados que apresentaremos podem ser encontrados em [5], [25] e [35].

**Definição E.33** *Para* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $m \in \mathbb{N}$, *definimos o espaço de Sobolev* $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ *como o seguinte subconjunto de* $\mathrm{L}^p(\Omega)$

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega)\,;\ \mathrm{D}^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega)\ \textit{para}\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

O espaço de Sobolev $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

de modo que a norma correspondente é

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\,.$$

O par $\left(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{W^{m,p}(\Omega)}\right)$ é um espaço de Banach.

Denotaremos

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{1,2}} = H_0^1(\Omega)\,.$$

**Teorema E.34** *As seguintes imersões*

$$\begin{aligned} H^1\left(\mathbb{R}^N\right) &\hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^N\right), \quad 2 \leq p < \infty, \quad N = 1, 2, \\ H^1\left(\mathbb{R}^N\right) &\hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^N\right), \quad 2 \leq p \leq 2^*, \quad N \geq 3, \\ D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) &\hookrightarrow L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right), \quad N \geq 3 \end{aligned}$$

*são contínuas.*

**Prova.** As duas primeiras imersões podem ser encontradas em [5], Corolário 9.11 e 9.10 respectivamente. Para a terceira imersão, veja [35]. ■

**Teorema E.35 (Rellich)** *Se* $|\Omega| < \infty$ *então a seguinte imersão é compacta*

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < 2^*.$$

**Prova.** Ver [5, Teorema 9.16]. ■

**Proposição E.36 (Desigualdade de Poincaré)** *Suponha que* $1 \leq p < \infty$ *e* $\Omega$ *um cojunto aberto limitado. Então, existe uma constante* $C$ *(dependendo de* $\Omega$ *e* $p$*) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

**Prova.** Ver [5, Corolário 9.19]. ■

**Teorema E.37** *Sejam* $K, F \subset \mathbb{R}^N$ *com* $K$ *compacto,* $F$ *fechado e* $K \cap F = \emptyset$*. Então, existe* $\rho \in \mathrm{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ *tal que*

*(i)* $0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$*;*

*(ii)* $\rho(x) = 1, \quad \forall\, x \in K$*;*

*(iii)* $\rho(x) = 0, \quad \forall\, x \in F$*.*

**Prova.** Ver [Adauto, exemplo 4]. ■

# Apêndice C
# Resultados utilizados na dissertação

Neste Apêndice, enunciamos os demais resultados utilizados ao longo da dissertação. Os mesmos serão apresentados sem demonstração, apenas será citado onde a prova pode ser encontrada.

Seja $N \geq 3$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ o expoente crítico de Sobolev. O espaço

$$D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) := \left\{ u \in L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right),\ \text{ para } i = 1, ..., N \right\}$$

possui estrutura de Hilbert quando dotado do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx$$

de modo que a norma correspondente é

$$\|u\| = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço $\mathrm{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ é denso em $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$, em outras palavras,

$$\overline{\mathrm{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)}^{\|.\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}} = D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Para $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$, definimos

$$D_0^{1,2}(\Omega) := \overline{\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}},$$

e mais, se $|\Omega| < \infty$, temos

$$D_0^{1,2}(\Omega) = \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

**Teorema E.38 (Função Implícita)** *Dada a função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $C^k$ $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^{N+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0; \delta)$ e um intervalo $(y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:*

1) $B \times \overline{J} \subset U$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ *para todo* $(x,y) \in B \times \overline{J}$*;*

2) *Para todo* $x \in B$ *existe um único* $y = \xi(x) \in J$ *tal que* $f(x,y) = f(x,\xi(x)) = c$.

*A função* $\xi : B \to J$*, assim definida, é de classe* $C^k$ *e suas derivadas parciais em cada ponto* $x \in B$ *são dadas por*

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,\xi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x))}.$$

**Prova.** Ver [24, Teorema 1 - capítulo 4]. ■

**Teorema E.39 (Mudança de Variável)** *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto compacto J-mensurável,* $h : U \to V$ *um difeomorfismo de classe* $C^1$ *entre abertos* $U$, $V \subset \mathbb{R}^N$ *e* $f : h(X) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável. Então*

$$\int_{h(X)} f(y)\,dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det\ h'(x)|\ dx.$$

**Prova.** Ver [24, Teorema 6 - capítulo 9]. ■

**Teorema E.40 (Teorema do Valor Médio)** *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* $f$ *é derivável em* $(a,b)$*, existe* $c \in (a,b)$*, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

**Prova.** Ver [23, Teorema 7]. ■

**Teorema E.41** *Se* $f$ *é uma função mensurável em* $\mathbb{R}^N$*, não negativa ou integrável, tal que* $f(x) = f(|x|)$ *é uma função radial, então,*

$$\int_{B_1(0)} f(x)\ dx = w_{n-1} \int_0^1 f(r)\, r^{N-1}\ dr.$$

**Prova.** Ver [15, Teorema 2.49] ■

**Teorema E.42 (Teorma da Convergência Monótona)** *Seja* $(f_n)$ *uma sequência em* $L^+$ *tal que* $f_j < f_{j+1}$ *para todo* $j$*, e* $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \left(= \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)$*, então*

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n.$$

**Prova.** Ver [15, Teorema 2.14]. ■

**Teorema E.43 (Teorema da Convergência Monótona, Beppo Levi)** *Seja* $(f_n)$ *uma sequência de funções em* $L^1$ *que satisfaz*

(a) $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ...$ *q.t.p. em* $\Omega$*;*

(b) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n < \infty$.

*Então* $f_n(x)$ *converge q.t.p. em* $\Omega$ *para um limite finito, que denotamos por* $f(x)$*. A função* $f$ *pertence a* $L^1$ *e* $f_n(x)\, \|f_n - f\|_1 \to 0$.

**Prova.** Ver [5, Teorema 4.1]. ■

**Teorema E.44 (Teorma da Convergência Dominada de Lebesgue)** *Seja* $(f_n)$ *uma sequência em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

(a) $f_n \to f$ *q.t.p. em* $\Omega$*;*

(b) *Existe uma sequência não negativa* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *q.t.p. em* $\Omega$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n.$$

**Prova.** Ver [15, Teorema 2.24]. ■

**Teorema E.45** *Sejam* $(f_n)$ *uma sequência de funções em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que*

$$f_n \to f \quad \text{em} \;\; L^p(\Omega).$$

*Então, existe* $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ *e uma função* $g \in L^p(\Omega)$ *tal que*

$$|f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

*e*

$$f_{n_k} \to f \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

**Prova.** Ver [6, Teorema IV.9]. ■

**Teorema E.46 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange)** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach,* $J, F : X \to \mathbb{R}$ *funcionais de classe* $\mathrm{C}^1(X, \mathbb{R})$ *e* $M = \{u \in X;\; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ *com* $F'(u) \neq 0$*, para todo* $u \in M$*. Se* $J$ *é limitado inferiormente sobre* $M$ *e existe* $u_0 \in M$ *tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u\in M} J(u),$$

*então existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(Multiplicador de Lagrange) verificando*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

**Prova.** Ver [18, Proposição 14.3]. ■

**Corolário E.47** *A derivada de $J$ restrita a $M$ tem norma dada por*

$$\|J|'_M(u)\|_* = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|J'(u) - \lambda F'(u)\|.$$

**Prova.** Ver [2, Corolário 4.1]. ■

**Teorema E.48 (Princípio Variacional de Ekeland)** *Sejam $X$ um Espaço Métrico Completo e $\Phi : X \to (-\infty, +\infty]$ um Funcional Semicontínuo Inferiormente. Suponhamos que $\Phi$ seja limitado inferiormente e sejam $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $u \in X$ dados tais que*

$$\Phi(u) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon.$$

*Então, existe $v_\varepsilon \in X$ tal que*

(a) $\Phi(v_\varepsilon) \leq \Phi(u)$;

(b) $d(u, v_\varepsilon) \leq \dfrac{1}{\lambda}$;

(c) *Para cada* $w \neq v_\varepsilon \in X$, $\Phi(v_\varepsilon) < \Phi(w) + \varepsilon\lambda d(v_\varepsilon, w)$.

**Prova.** Ver [14, Teorema 6.1] ■

# Bibliografia


[1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F.. Sobolev Spaces. Academic Press, New York-San Francisco-London, 2003

[2] Alves, C. O.. Uma Introdução as Equações Elípticas. I ENAMA - UFRJ, 2007.

[3] Antontsev, S. N.; Rodrigues, J. F.. On stationary thermo-rheological viscous flows. Annali dell'Universita di Ferrara, vol. 52, issue 1, 2006

[4] Barreiro, J. L. P.. Existência e Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares envolvendo expoentes variáveis. UFCG, 2014.

[5] Brezis, H.. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer-Verlag New York, 2010.

[6] Brezis, H.. Analisis funcional, Teoria y aplicaciones. Alianza Editorial Sa, 1984.

[7] Brezis, H.; Nirenberg, L.. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, issue 4, 1983.

[8] Brezis, H.; Oswald, L.; Remarks on Sublinear Elliptic Equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods e Applications, Vol. 10, issue 1, 1986.

[9] Chen, Y.; Levine, S.; Rao, M.. Variable Exponent, Linear Growth Functionals in Image Restoration. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 66, issue 4, 2006.

[10] Diening, L.; Harjulehto, P.; Hästö, P.; Ruzicka, R.; Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[11] Do Ó, J. M.; Ruf, B.; Ubilla, P.. On supercritical Sobolev type inequalities and related elliptic equations. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, Vol. 55, issue 4, 2016.

[12] Fan, X.; Zhao, D.. On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 263, issue 2, 2001.

[13] Ferreira, M. C.. Existência de soluções via métodos variacionais para uma classe de problemas quasilineares com expoentes variáveis. UFCG, 2014.

[14] Figueiredo, G. J. M.. Uma introdução à teoria dos pontos críticos. UFPA, 2012.

[15] Folland, G. B.. Real Analysis. Modern techniques and their applications. Wiley-Interscience, 1999.

[16] Gómez, J.L.. Varying Stoichiometric Exponents I: Classical Steady-States and Metasolutions. Advanced Nonlinear Studies, vol. 3, issue 3, 2003.

[17] Guimarães, C. J.. Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações envolvendo o $p(x)$-Laplaciano.. UFCG, 2006.

[18] Kavian, O.. Introduction a la theorie des points critiques: et applications aux problemes elliptiques. Springer, 1994.

[19] Kesavan, S.. Nonlinear Functional Analysis - A First Course. Hindustan Book Agency, 2004.

[20] Kovácik, O.; Rákosník, J.. On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 41, 592-618, 1991.

[21] Kreyszig, E.. Introductory functional analysis with applications. John Wiley e Sons, 1978.

[22] Kurata, K.; Shioji, N.; Compact embedding from $W_0^{1,2}(\Omega)$ to $L^{q(x)}(\Omega)$ and its application to nonlinear elliptic boundary value problem with variable critical exponent. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 339, 1386-1394, 2008.

[23] Lima, E. L.. Curso de Análise, volume 1. IMPA, 2014.

[24] Lima, E. L.. Análise Real, volume 2. IMPA, 1997.

[25] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M.. Espaços de Sobolev. Instituto de Matemática - UFRJ, 2000.

[26] Melián, J. G.; Rossi, J. D.; Lis, J.S.. A variable exponent diffusion problem of concave-convex nature. Topological methods in nonlinear analysis, 2016.

[27] Melo, J. L. F.. Multiplicidade de Soluções para uma Classe de Problemas Críticos via Categoria de Lusternik-Schnirelman. UFCG, 2010.

[28] Orlicz, W.; Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math., vol. 3, 200-211, 1931.

[29] Portnov, V.. Certain properties of the Orlicz spaces generated by the functions M(x,w). Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 170, 1269-1272, 1966.

[30] Portnov, V.. On the theory of Orlicz spaces which are generated by variable N-functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 175, 296-299, 1967.

[31] Radulescu, V. D.; Repovs, D. D.. Partial differential equations with variable exponents: variational methods and qualitative analysis. CRC Press, 2015.

[32] Struwe, M.. Variational methods: Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[33] Sharapudinov, I.. On the topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. Math. Notes, vol. 26, issue 3-4, 796-806, 1979.

[34] Silva, W. C.. Princípio de concentração e compacidade para o operador $p(x)$-Laplaciano.. UFPA, 2014.

[35] Talenti, G.. Best constant in Sobolev inequality. Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 110, issue 1, 1976.

[36] Tsenov, I.. Generalization of the problem of best approximation of a function in the space $l^s$.. Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ., vol. 7, 25â€“37, 1961.

[37] Willen, M.. Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.