Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Graduações e Isomorfismos em Álgebras de Matrizes Triangulares em Blocos

por

Luis Filipe Ramos Campos da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

S586g Silva, Luis Filipe Ramos Campos da.
Graduações e isomorfismos em álgebras de matrizes triangulares em blocos / Luis Filipe Ramos Campos da Silva. – Campina Grande, 2023.
92 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva”.
Referências.

1. Álgebras Graduadas. 2. Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores em Blocos. 3. Flags Graduados. I. Silva, Diogo Diniz Pereira da Silva e. II. Título.

CDU 512(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Graduações e Isomorfismos em Álgebras de Matrizes Triangulares em Blocos

por

Luis Filipe Ramos Campos da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Alan de Araújo Guimarães

Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães - UFRN

David Levi da S. Macêdo

Prof. Dr. David Levi da Silva Macêdo - UFERSA

Diogo Diniz P.S. Silva

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Junho - 2023

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela minha saúde e por ter me ajudado em todos os momentos difíceis que passei durante o mestrado.

Sou grato aos meus pais, Luis Rangel e Jâmise Ramos, pois sempre me apoiaram e me incentivaram nos momentos difíceis. Quero dizer que amo vocês.

Agradeço aos meus irmãos, Luis Henrique e Jamille Ramos, pois sempre me ajudaram e sempre estiveram presentes nos melhores momentos da minha vida.

Sou grato a minha noiva, Ana Thayse, que me incentivou e me apoiou nos momentos em que mais precisei, inclusive me incentivou a entrar para o programa de mestrado e também agora para o doutorado.

Agradeço a todas as pessoas da minha família: avós, padrinhos, tios e primos que sempre me incentivaram. Em especial, sou muito grato a minha avó, Edorice Ramos, que me fez crescer como pessoa e foi a pessoa que mais me apoiou em toda minha vida. Também agradeço ao meu tio, Jamilson Ramos, que além de amigo sempre me incentivou, esteve presente e me deu suporte a partir do momento que decidi cursar Matemática.

Agradeço ao meu orientador, Diogo Diniz, primeiramente por aceitar me orientar durante o mestrado, e agora no doutorado, além disso por se mostrar sempre disponível nos momentos que mais precisei e por me aconselhar em diversos momentos ao longo do mestrado.

Serei eternamente grato ao professor Daniel Cordeiro, que sempre se mostrou disponível, sempre me incentivou e me ajudou quando passei por momentos difíceis durante a graduação, me passou muito conhecimento, experiência e acabou se tornando um amigo. Me incentivou a ingressar no mestrado e seguir em frente. Muito obrigado por me apresentar o PET-Matemática-UFCG, o senhor será meu eterno tutor.

Agradeço ao professor Antônio Brandão, que me acompanha desde quando entrei na graduação por causa da iniciação científica. Agradeço também por ter me passado todo o conhecimento que o senhor passou e pela paciência que o senhor teve comigo quando cheguei, pois não tinha experiência e sempre fui bem tratado. Muito obrigado por tudo.

Agradeço a todos os integrantes e petianos egressos do PET-Matemática-UFCG. Todos vocês já fizeram algo por mim em algum momento.

Em especial, agradeço a Ismael Sandro, Rodrigo Marques e Lucas Siebra por serem tão presentes como amigos desde a época da graduação, por todos os momentos difíceis que passamos juntos e por me incentivar sempre nos momentos que mais precisei.

Agradeço também aos amigos José Lucas e Eduardo Pinto, também orientandos do professor Diogo Diniz, pois sempre me ajudaram e me tiraram dúvidas quando precisei, além de sempre estarem presentes.

Agradeço também a todas as pessoas da Pós-Graduação, com quem tive contato e já me ajudaram em algum momento. Em especial, sou muito grato a Pedro Fellype que além de ser uma pessoa incrível que está sempre disposto a ajudar a todos, me auxiliou ainda mais nessa reta final quando fui escrever minha dissertação com o Tex, inclusive aos domingos.

Agradeço aos professores Alan de Araújo, petiano egresso e agora professor da UFRN, e Levi da Silva, professor da UFERSA, por terem aceito participar da banca avaliativa deste trabalho.

Por fim, sou muito grato a todos os professores da UAMat que contribuíram para minha formação acadêmica e sempre estiveram disponíveis quando precisei. Agradeço também a todos os coordenadores que já tive durante a graduação e funcionários da UAMat, por sempre estarem disponíveis, agradeço a Claudiana Albuquerque(Aninha), pela amizade e por sempre me ajudar quando precisei.

Dedicatória

Dedico esse trabalho a minha família, em especial a minha avó Edorice Ramos (in memoriam).

Resumo

Nesta dissertação apresentamos a classificação das graduações em álgebras de matrizes sobre um corpo algebricamente fechado, embora muitos dos resultados sejam de caráter mais geral, sobre um corpo arbitrário. Ademais, descreveremos as graduações por grupo nas matrizes triangulares superiores em blocos, provando a conjectura de Valenti e Zaicev para corpos arbitrários de característica zero ou maior que a dimensão da álgebra e um grupo que não é necessariamente abeliano nem finito. Por fim, iremos descrever os isomorfismos graduados de anéis de endomorfismos de flags graduados sobre álgebras graduadas com divisão e, como consequência destes resultados, descrevemos as classes de isomorfismo de álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, graduadas por um grupo abeliano finito.

Palavras-chave: Álgebras graduadas, Álgebras de matrizes Triangulares Superiores em Blocos, Flags Graduados.

Abstract

In this work we classify gradings on matrix algebras over an algebraically closed field, although many of the results we present hold for more general algebras and over an arbitrary field. Moreover, we will describe the group gradings on the algebra of upper block triangular matrices, proving the conjecture of Valenti and Zaicev for arbitrary fields of characteristic zero or greater than the dimension of the algebra and a group which is not necessarily abelian or finite. Finally, we describe the graded isomorphisms of rings of endomorphisms of graded flags over graded division algebras, as a consequence of these results we describe the isomorphism classes of upper block triangular matrix algebras, over an algebraically closed field of characteristic zero, graded by a finite abelian group.

Key Words: Graded algebras, Algebras of upper block-triangular matrices, Graded flags.

Conteúdo

Introdução

Na área da Álgebra somos apresentados às diversas estruturas algébricas como grupos, anéis, módulos, corpos, álgebras, entre outras estruturas. Toda teoria desenvolvida na Álgebra tem como base tais estruturas e, em nosso trabalho, não será diferente. Em diversos momentos utilizaremos conceitos e propriedades dessas estruturas algébricas mais básicas, o leitor interessado poderá consultar as referências [1], [5] e [7] para maiores detalhes.

Inicialmente, no Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos preliminares que serão relevantes para o entendimento dos capítulos subsequentes. Introduziremos o primeiro capítulo fazendo um breve resumo sobre álgebras, mais especificamente, álgebras associativas. De maneira sucinta, uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa é um par $(R, *)$, onde R é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial com uma operação binária bilinear associativa, e $\mathbb{F}$ denota um corpo. Ainda nessa primeira parte do Capítulo 1 serão apresentadas algumas definições, exemplos de álgebras e, por fim, falaremos um pouco sobre homomorfismos de álgebras.

O breve resumo sobre álgebras, na primeira parte do primeiro capítulo, tem como objetivo estabelecer o alicerce necessário para introduzirmos o conceito de Álgebras Graduadas, mais especificamente, o conceito de Álgebras Graduadas por um Grupo. Essas álgebras, em particular as superálgebras, desempenham um papel importante em diferentes áreas da Matemática e da Física Teórica. O mais interessante é que existe uma conexão bem estabelecida entre superidentidades e identidades ordinárias que permite reduzir alguns problemas ao caso de dimensão finita.

Sendo R uma álgebra e G um grupo, dizemos que uma G-graduação em R é uma decomposição do espaço vetorial R em subespaços $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ tal que para quaisquer $g, h \in G$ tem-se $R_g R_h \subseteq R_{gh}$. Uma álgebra R munida de uma G-graduação específica é dita G-graduada. Na segunda seção do Capítulo 1, mencionaremos alguns resultados e exemplos envolvendo álgebras graduadas, introduziremos as definições de homomorfismos de espaços vetoriais graduados, aplicações lineares graduadas e, por fim, homomorfismos de álgebras graduadas.

Como já mencionamos anteriormente, os módulos estão entre as principais estruturas na área da Álgebra. Um dos motivos que torna essa estrutura muito importante é o fato de que um módulo pode ser visto como uma generalização do conceito de espaço vetorial. Na terceira seção do nosso primeiro capítulo apresentaremos as definições de módulo, submódulo, módulo fiel, entre outras definições e, além disso, veremos que assim como as álgebras, os módulos também podem apresentar uma graduação sobre um grupo. Portanto, definiremos os módulos graduados e homomorfismos de módulos graduados.

Um dos teoremas clássicos da Álgebra é o Teorema de Wedderburn-Artin. Como diversos resultados na matemática, o nome desse teorema se dá devido à contribuição mútua dos matemáticos Joseph Wedderburn e Emil Artin. O teorema de Wedderburn-Artin foi provado para álgebras de dimensão finita sobre um corpo, por Wedderburn em 1908, e para anéis com condição de cadeia descendente sobre ideais unilaterais, por Artin em 1928 [7]. No segundo capítulo do nosso trabalho, que tem como base o livro [4], apresentaremos uma versão do Teorema de Wedderburn-Artin para Álgebras Graduadas. Essa versão do teorema afirma que se R é uma álgebra qualquer graduada simples, satisfazendo a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados, então R é isomorfa à álgebra $End_D(V)$ de endomorfismos de um módulo graduado V de dimensão finita sobre uma álgebra graduada com divisão D. Em um segundo momento, ainda nesse capítulo, classificaremos álgebras graduadas com divisão sobre corpos algebricamente fechados. Para encerrar, iremos unir os resultados das primeiras seções desse capítulo para obter uma classificação de graduações por um grupo em álgebras de matrizes sobre um corpo algebricamente fechado.

Valenti e Zaicev, no ano de 2003, mostraram que qualquer graduação de grupo na álgebra de matrizes triangulares superiores sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, onde o grupo da graduação é abeliano, é elementar, a menos de um isomorfismo graduado [12]. Os mesmos autores, em 2007, provaram o mesmo resultado anterior, porém, agora, para um corpo arbitrário e um grupo qualquer [13]. Ainda no mesmo artigo, Valenti e Zaicev conjecturaram uma classificação das graduações de grupo na álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos. Entretanto, apenas em 2011, Valenti e Zaicev provaram, de fato, a validade da conjectura que eles mesmos haviam proposto, para um corpo algebricamente fechado de característica zero e no caso em que o grupo da graduação é abeliano e finito [14]. Dando continuidade a essa sequência, a ideia do terceiro capítulo é descrever as graduações por um grupo em álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos, provando a conjectura de Valenti e Zaicev para corpos arbitrários de característica zero, ou a característica maior que a dimensão da álgebra, e um grupo que não é necessariamente abeliano nem finito. Para esse capítulo utilizamos como principal referência o artigo [15].

Por fim, e não menos importante, no quarto e último capítulo da nossa dissertação, trabalharemos com a definição de flags graduados que é a seguinte: sendo D uma álgebra graduada com divisão e V um espaço vetorial graduado sobre D, um flag graduado sobre V de comprimento r é uma cadeia de D-subespaços graduados $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$, onde $V_0 = 0$ e $V_r = V$. Denotaremos o conjunto $End_D\mathcal{F}$ como sendo o conjunto dos endomorfismos do flag $\mathcal{F}$ e nosso principal objetivo deste capítulo é descrever os isomorfismos graduados de anéis de endomorfismos de flags graduados sobre álgebras graduadas com divisão. Como uma consequência, também iremos descrever as classes de isomorfismo de álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, graduadas por um grupo abeliano finito. Nesse último capítulo utilizamos o artigo [11] como referência base.

Capítulo 1

Preliminares

No primeiro capítulo deste trabalho nosso intuito será estabelecer notações, apresentar definições, exemplos e resultados que serão utilizados posteriormente ao longo deste e, dessa forma, instituir um ambiente propício com a finalidade de introduzir assuntos que serão fundamentais para o entendimento dos resultados que apresentaremos no decorrer dos próximos capítulos. No decurso deste primeiro capítulo, utilizaremos $\mathbb{F}$ para denotar um corpo qualquer e estabelecemos como pré-requisitos os conceitos de grupo e de espaço vetorial.

1.1 Álgebras

Um dos principais objetos de estudo do nosso trabalho são as álgebras graduadas por um grupo. Mais especificamente, em nosso trabalho, estas álgebras serão associativas. Sendo assim, é conveniente apresentarmos a definição de álgebra associativa antes de mencionarmos a definição de uma álgebra graduada por um grupo.

Definição 1.1.1 *Definimos uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa como sendo um par $(R, *)$, onde R é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial com uma operação binária $* : R \times R \longrightarrow R$ bilinear tal que*

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

para quaisquer $a, b, c \in R$.

Na Definição 1.1.1, denominamos a operação "$*$" de multiplicação. No decorrer do texto, denotaremos $a * b$, para quaisquer $a, b \in R$, simplesmente por ab.

Definição 1.1.2 *Uma álgebra R é dita comutativa se para quaisquer $a, b \in R$ tem-se $ab = ba$.*

Exemplo 1.1.3 *A álgebra $\mathbb{F}[x]$ dos polinômios na variável x e com coeficientes em $\mathbb{F}$ é comutativa.*

Definição 1.1.4 *Dizemos que uma álgebra R é unitária (ou que possui unidade), se existir $1_R \in R$ tal que $1_R r = r 1_R = r$, para qualquer $r \in R$. Por simplicidade, escrevemos 1 para indicar 1_R.*

A álgebra do exemplo anterior é unitária, bem como a maioria das álgebras que aparecerão ao longo deste trabalho. A seguir veremos um exemplo de álgebra que não possui unidade.

Exemplo 1.1.5 *A álgebra S das matrizes $n \times n$ estritamente superiores com entradas em $\mathbb{F}$ não possui unidade.*

Definição 1.1.6 *Seja R uma álgebra unitária. Dizemos que um elemento $a \in R$ é invertível se existe $a^{-1} \in R$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Denotamos o conjunto de todos os elementos invertíveis de R por $U(R)$.*

Exemplo 1.1.7 *Um polinômio em $\mathbb{F}[x]$ é invertível se, e somente se, for não nulo e tiver grau zero.*

Definição 1.1.8 *Dizemos que uma álgebra R é uma álgebra com divisão, se R é unitária e para qualquer $a \in R - \{0\}$, existe $a^{-1} \in R$ tal que $aa^{-1} = 1_R = a^{-1}a$.*

Exemplo 1.1.9 *Seja $\mathbb{L}$ uma extensão de $\mathbb{F}$, então $\mathbb{L}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra com divisão.*

No exemplo acima temos uma álgebra com divisão comutativa, a seguir apresentamos um exemplo de álgebra com divisão que não é comutativa.

Exemplo 1.1.10 *Seja $\mathbb{H}$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial com base $\{1, i, j, k\}$ e multiplicação tal que 1 é a unidade e*

$$i^2 = j^2 = -1, \;\; ij = -ji = k.$$

Então $\mathbb{H}$ é uma álgebra com divisão não comutativa.

Definição 1.1.11 *Dado um subconjunto $\beta \subset R$, dizemos que β é uma base para álgebra R, se β for base para o espaço vetorial R e, nesse caso, a dimensão da álgebra R é a dimensão do espaço vetorial R.*

Exemplo 1.1.12 ***(Álgebra das Matrizes)*** *Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $n \in \mathbb{N}$. O espaço vetorial $M_n(\mathbb{F})$ munido da multiplicação usual de matrizes é uma álgebra associativa unitária, a unidade nesse caso é a matriz identidade I_n. As matrizes e_{ij}, que possuem 1 na entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna e 0 nas demais, conhecidas como matrizes elementares, são elementos da álgebra $M_n(\mathbb{F})$. Ademais, não é difícil ver que essas matrizes elementares formam uma base para $M_n(\mathbb{F})$.*

Definição 1.1.13 *Seja R uma álgebra. Dizemos que um subespaço B de R é uma subálgebra de R, se para quaisquer $a, b \in B$, tem-se $ab \in B$. Um subespaço I de R é um ideal (bilateral) de R, se para quaisquer $r \in I$ e $a \in R$, tem-se $ar \in I$ e $ra \in I$. De forma análoga, podemos definir ideal à direita se $ra \in I$ e ideal à esquerda se $ar \in I$.*

Exemplo 1.1.14 *Considere R uma álgebra associativa. O conjunto*

$$Z(R) = \{a \in R \,|\, ax = xa, \text{para todo } x \in R\}$$

é uma subálgebra de R chamada de ***centro de R****.*

Nos capítulos subsequentes utilizaremos o conceito de homomorfismo de álgebras. Sendo assim, vejamos a seguinte definição:

Definição 1.1.15 *Sejam R e B álgebras. Dizemos que uma transformação linear $f : R \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, se $f(ab) = f(a)f(b)$, para quaisquer $a, b \in R$.*

Observe pela Definição 1.1.15 que sendo f um homomorfismo de álgebras, f é também uma transformação linear. Dessa forma, podemos mencionar o **núcleo** e a **imagem** da aplicação f, os quais denotaremos da seguinte maneira:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{a \in R \,|\, f(a) = 0\} \;\text{ e }\; Im(f) = \{f(a) \,|\, a \in R\}.$$

Para alguns tipos específicos de homomorfismos utilizaremos as seguintes nomenclaturas:

Monomorfismo: Para indicar um homomorfismo injetivo;

Epimorfismo: Para indicar um homomorfismo sobrejetivo;

Isomorfismo: Para indicar um homomorfismo bijetivo. Quando existir um isomorfismo entre duas álgebras quaisquer R e B, diremos que R e B são isomorfas e utilizaremos a notação $R \cong B$;

Endomorfismo: Para indicar um homomorfismo onde o domínio coincide com o contra-domínio;

Automorfismo: Para indicar um endomorfismo bijetivo.

Exemplo 1.1.16 *Seja R uma álgebra associativa e unitária. Sendo $a \in U(R)$, considere a seguinte aplicação:*

$$\begin{aligned} \varphi_a : R &\rightarrow R \\ x &\rightarrow \varphi_a(x) = a^{-1}xa. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que a aplicação φ_a é um automorfismo. Chamamos esse automorfismo de ***automorfismo interno determinado por a.***

1.2 Álgebras Graduadas

Levando em consideração a estrutura de uma álgebra, mencionada na seção anterior, podemos definir o conceito de graduação em uma álgebra por um grupo.

Definição 1.2.1 *Sejam R uma álgebra e G um grupo. Uma G-graduação em R é uma decomposição do espaço vetorial R em subespaços*

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

tal que para quaisquer $g, h \in G$ tem-se $R_g R_h \subseteq R_{gh}$. Uma álgebra R munida de uma G-graduação específica é dita G-graduada. Os subespaços R_g, $g \in G$, são chamados de componentes homogêneas da graduação e os elementos do conjunto $\cup_{g \in G} R_g$ são chamados de elementos homogêneos. Dizemos que um elemento não nulo de R_g é homogêneo de grau g e denotamos por $deg(x) = g$.

Cada elemento a da álgebra G-graduada R se escreve, de modo único, como $a = \sum_{g \in G} a_g$ onde $a_g \in R_g$ para todo $g \in G$. Iremos nos referir a esta decomposição como a decomposição homogênea de a.

Proposição 1.2.2 *Sejam G um grupo com elemento neutro e, e R uma álgebra G-graduada com unidade, então $1 \in R_e$, isto é 1 é elemento homogêneo de grau e. Além disso, se $r \in R_g$ é invertível, então $r^{-1} \in R_{g^{-1}}$.*

Demonstração: Seja $1 = \displaystyle\sum_{g \in G} r_g$ a decomposição homogênea da unidade de R. Escolhendo $\tau \in G$ e $\lambda_\tau \in R_\tau$, então

$$\lambda_\tau = 1 \cdot \lambda_\tau = \sum_{g \in G} r_g \lambda_\tau,$$

onde $r_g\lambda_\tau \in R_{g\tau}$, pois R é G-graduada. Se $g \neq e$, então o elemento $r_g\lambda_\tau \in R_{g\tau}$ não terá grau τ. Como devemos ter a igualdade $\lambda_\tau = \sum_{g\in G} r_g\lambda_\tau$, então $r_g\lambda_\tau = 0$, para todo $g \neq e$ em G. Sendo $\lambda \in R$, temos $\lambda = \sum_{\tau\in G}\lambda_\tau$, onde $\lambda_\tau \in R_\tau$ para todo $\tau \in G$, e assim $r_g\lambda = \sum_{\tau\in G} r_g\lambda_\tau$. Logo, $r_g\lambda = 0$, quando $g \neq e$. Em particular, tomando $\lambda = 1$ concluímos que $r_g = 0$ se $g \neq e$, daí segue que $1 = r_e \in R_e$.

Seja $r^{-1} = \sum_{h\in G} s_h$ a decomposição homogênea de r^{-1}. Temos que $1 = \sum_{h\in G} rs_h$, como $rs_h \in R_{gh}$ e $1 \in R_e$ segue que $rs_h = 0$ se $h \neq g^{-1}$. Daí temos que $s_h = 0$ se $h \neq g^{-1}$, pois r é invertível. Assim $r^{-1} = s_{g^{-1}} \in R_{g^{-1}}$. ■

Exemplo 1.2.3 *Qualquer álgebra R pode ser graduada por um grupo qualquer G, basta definirmos $R = R_e$, onde e é o elemento neutro de G, e $R_g = 0$, para qualquer $g \neq e$. Denominamos essa graduação de **Graduação Trivial.***

Exemplo 1.2.4 *Seja G um grupo. Considere o conjunto $\mathbb{F}G$ de todas as somas formais $\sum_{g\in G}\alpha_g g$, com $\alpha_g \in \mathbb{F}$ e $\{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$ é finito. Diz-se que*

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g = \sum_{g\in G}\beta_g g,$$

se $\alpha_g = \beta_g$, para todo $g \in G$. Definamos as seguintes operações em $\mathbb{F}G$:

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g + \sum_{g\in G}\beta_g g := \sum_{g\in G}(\alpha_g + \beta_g)g$$

$$\lambda\sum_{g\in G}\alpha_g g := \sum_{g\in G}(\lambda\alpha_g)g,$$

*onde $\lambda \in \mathbb{F}$. Com essas operações, $\mathbb{F}G$ é um espaço vetorial. Ademais, se considerarmos o produto induzido pela operação do grupo, isto é, definirmos $g \cdot h := gh$ para os elementos da base, o espaço vetorial $\mathbb{F}G$ se torna uma álgebra, usualmente conhecida como **Álgebra de Grupo de** G. A álgebra de grupo $R = \mathbb{F}G$ de um grupo G é naturalmente graduada por G, basta definirmos $R_g = span_{\mathbb{F}}\{g\}$.*

Exemplo 1.2.5 *Seja G um grupo. Se $(g_1, \ldots, g_n)$ é uma n-upla de elementos de G podemos induzir uma G-graduação em $R = M_n(\mathbb{F})$ pondo*

$$R_g = span\{e_{ij} \mid g_i g_j^{-1} = g\},$$

*onde e_{ij} são as matrizes elementares. Chamamos essa graduação de **Graduação Elementar**, visto que nessa graduação as matrizes elementares são elementos homogêneos.*

Exemplo 1.2.6 *Existe uma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação sobre $R = M_2(\mathbb{C})$ associada as matrizes de Pauli*

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

A saber, definimos

$$R_{(\bar{0},\bar{0})} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \right\}, \ R_{(\bar{1},\bar{0})} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \right\},$$
$$R_{(\bar{0},\bar{1})} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \right\}, \ R_{(\bar{1},\bar{1})} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

De forma mais geral, se $\mathbb{F}$ contém uma n-ésima raiz primitiva da unidade ε, então podemos definir as seguintes matrizes $n \times n$ que generalizam $-\sigma_3$ e σ_1 :

$$X = \begin{bmatrix} \varepsilon^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Como $XY = \varepsilon YX$ e $X^n = Y^n = I$, temos uma $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$-graduação sobre $R = M_n(\mathbb{F})$:

$$R_{(\bar{k},\bar{l})} = span\{X^k Y^l\}. \tag{1.2}$$

Exemplo 1.2.7 *Sejam G um grupo abeliano, R e B álgebras graduadas tais que $R = \bigoplus_{h\in G} R_h$ e $B = \bigoplus_{\tau \in G} B_\tau$. Dessa forma, temos uma graduação para $C = R \bigotimes_{\mathbb{F}} B$, basta considerarmos $C_g := \bigoplus_{(h,\tau)\in G^2,\, h\tau = g} R_h \otimes B_\tau$.*

Definição 1.2.8 *Dizemos que o suporte da graduação é o conjunto*

$$Supp(R) = \{g \in G \mid R_g \neq 0\}.$$

Exemplo 1.2.9 *Observe que na graduação mencionada no Exemplo 1.2.3 temos $Supp(R) = \{e\}$, caso $R \neq 0$.*

Definição 1.2.10 *Seja R uma álgebra G-graduada. Dizemos que um subespaço S de R é graduado se*

$$S = \bigoplus_{g\in G} (R_g \cap S).$$

De maneira análoga, podemos definir subálgebras graduadas.

Definição 1.2.11 *Seja R uma álgebra G-graduada. Dizemos que I é um ideal à esquerda graduado de R se I é um subespaço graduado tal que $ra \in I$, para quaisquer $r \in R$ e $a \in I$. Analogamente, definimos ideal à direita graduado de uma álgebra graduada R. A única diferença, nesse caso, é que temos $ar \in I$, para quaisquer $a \in I$ e $r \in R$.*

A seguir, iremos construir um ideal bilateral graduado a partir de uma álgebra graduada que possui um ideal à esquerda graduado.

Exemplo 1.2.12 *Seja R uma álgebra graduada que possui um ideal I à esquerda graduado. Então, $J := I + IR$ é um ideal bilateral graduado. De fato, não é difícil ver que J é um ideal bilateral. Além disso, queremos mostrar que*

$$J = \bigoplus_{\sigma \in G} (J \cap R_\sigma).$$

Suponha que $\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \in J$. Então existem $x, x_1, \ldots, x_n \in I$ e $y_1, \ldots, y_n \in R$ tais que

$$\sum_{\sigma \in G} a_\sigma = x + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = x + \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i).$$

Pondo $x_i = \sum_{g \in G} x_i^{(g)}$, com $x_i^{(g)} \in (R_g \cap I)$, $y_i = \sum_{h \in G} y_i^{(h)}$, com $y_i^{(h)} \in R_h$ e $x = \sum x^{(\sigma)}$, com $x^{(\sigma)} \in R_\sigma \cap I$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in G} a_\sigma &= \sum_{\sigma \in G} x^{(\sigma)} + \sum_i \sum_h \sum_g (x_i^{(g)} y_i^{(h)}) \\
&= \sum_{\sigma \in G} x^{(\sigma)} + \sum_{\sigma \in G} \left(\sum_{gh=\sigma} \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(g)} y_i^{(h)}) \right) \\
&= \sum_{\sigma \in G} \left(x^{(\sigma)} + \sum_{gh=\sigma} \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(g)} y_i^{(h)}) \right).
\end{aligned}$$

Daí, $a_\sigma = \left(x^{(\sigma)} + \sum_{gh=\sigma} \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(g)} y_i^{(h)}) \right) \in J$ e como $a_\sigma \in R_\sigma$, temos $J = \bigoplus_{\sigma \in G} (J \cap R_\sigma)$.

Definição 1.2.13 *Dizemos que uma álgebra graduada R é uma álgebra graduada com divisão, se R é unitária e todo elemento homogêneo não nulo de R tem um inverso em R.*

Exemplo 1.2.14 *Seja R uma $\mathbb{F}$-álgebra com divisão, G um grupo e Γ uma G-graduação qualquer em R. Então R é graduada com divisão.*

Exemplo 1.2.15 *A álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ mencionada no Exemplo 1.2.4 é uma álgebra graduada com divisão. Com efeito, dado $\lambda g \in span\{g\}$ não nulo, com $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que $\lambda \neq 0$ e*

$$(\lambda g)(\lambda^{-1} g^{-1}) = 1.$$

Definição 1.2.16 *Dizemos que uma álgebra G-graduada R é graduada simples se temos $R^2 \neq 0$ e os únicos ideais graduados bilaterais são R e 0.*

Observação 1.2.17 *Toda álgebra graduada com divisão é uma álgebra graduada simples. De fato, seja R uma álgebra G-graduada com divisão e suponha que existe um ideal graduado bilateral não nulo I contido em R. Tome $r \in I \setminus \{0\}$ e seja $r = r_{g_1} + \cdots + r_{g_n}$ a decomposição homogênea de r com $r_{g_i} \neq 0$ para todo i. Como I é graduado, temos $r_{g_1} \in I$. Ora, mas r_{g_1} é homogêneo, portanto possui inverso, o qual denotaremos por $(r_{g_1})^{-1} \in R$. Como I é ideal, então $r_{g_1}(r_{g_1})^{-1} \in I$, ou seja, $1_R \in I$ e assim $I = R$.*

Observação 1.2.18 *Sendo D uma álgebra graduada também podemos identificar a álgebra de matrizes $M_n(D)$ com $M_n(\mathbb{F}) \otimes D$. Basta para cada $(\lambda_{ij}) \otimes d \in M_n(\mathbb{F}) \otimes D$, associarmos a matriz $(\lambda_{ij} d) \in M_n(D)$ e a graduação é dada por:*

$$deg(e_{ij} \otimes d) = g_i(deg(d))g_j^{-1},$$

onde e_{ij} são as matrizes elementares. Iremos denotar por de_{ij} a matriz de $M_n(D)$ com d na i-ésima linha e j-ésima coluna e zero nas demais entradas. Deste modo $e_{ij} \otimes d$ é identificada com de_{ij}.

Exemplo 1.2.19 *Seja D uma álgebra graduada com divisão. A álgebra $M_n(D)$ é uma álgebra graduada simples. Com efeito, seja J um ideal graduado de $M_n(D)$. Observe que se $J \lhd M_n(D)$, então como D tem unidade, existe $I \lhd D$ tal que $J = M_n(I)$. Agora suponha $J \neq 0$. Nosso objetivo é mostrar que $I \lhd D$ é graduado, isto é, $I = \bigoplus (D_g \cap I)$. Para isso, considere $a \in I$. Logo, $a \in D$ e como $D = \bigoplus\limits_{g \in G} D_g$, podemos escrever $a = \sum\limits_{g \in G} a_g$, onde $a_g \in D_g$. Sendo assim, nos resta mostrar que $a_g \in I$. Observe que $a_\tau e_{ij}$ é homogêneo e da Observação 1.2.18 segue que*

$$deg(a_\tau e_{ij}) = deg(e_{ij} \otimes a_\tau) = g_i(deg(a_\tau))g_j^{-1} = g_i \tau g_j^{-1}.$$

Considere $A = ae_{11}$. Assim, podemos escrever

$$A = ae_{11} = \left(\sum_{g \in G} a_g\right) e_{11} = \sum_{g \in G} a_g e_{11} \in J.$$

Observe que $a_g e_{11}$ é homogêneo em $M_n(D)$ e

$$deg(a_g e_{11}) = g_1 g g_1^{-1}.$$

Como J é graduado e $\sum_{g\in G} a_g e_{11} \in J$, segue que cada parcela homogênea pertence a J, isto é, $a_g e_{11} \in J = M_n(I)$, logo $a_g \in I$. Assim, como I é um ideal graduado e D é simples, visto que D é graduada com divisão, então $I = 0$ ou $I = D$. Mas $J \neq 0$, logo $I = D$ e portanto $J = M_n(D)$.

Definição 1.2.20 *Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Uma graduação em V por G é uma decomposição de V em subespaços*

$$V = \bigoplus_{g\in G} V_g.$$

Definimos componentes homogêneas, elementos homogêneos, grau de um elemento e o suporte da graduação de modo análogo ao que foi feito para álgebras.

A definição acima serve de base para a definição de módulos graduados, conceito que terá papel importante nos capítulos seguintes.

Definição 1.2.21 *Sejam V e W espaços vetoriais G-graduados. Dizemos que uma aplicação linear $f : V \to W$ é um homomorfismo de espaços G-graduados se $f(V_g) \subseteq W_g$, para quaisquer $g \in G$. Ademais, se a aplicação f é um isomorfismo de espaços vetoriais, então $f^{-1} : W \to V$ também é um homomorfismo de espaços G-graduados e, nesse caso, dizemos que os espaços vetoriais graduados V e W são isomorfos e que f é um isomorfismo de espaços vetoriais graduados.*

Exemplo 1.2.22 *Sejam G um grupo qualquer, n um inteiro positivo tal que $n \leq |G|$ e $B = \{g_1, \dots, g_n\} \subseteq G$. Iremos construir duas G-graduações em $\mathbb{R}^n$. Para construir a primeira ponha $\mathbb{R}^n_{g_i} = span\{e_i\}$, onde e_i é a base canônica do $\mathbb{R}^n$, e $\mathbb{R}^n_g = 0$, se $g \in G \setminus B$. Para construir a segunda, considere $\mathbb{R}^n_{g_i} = span\{e_{n+1-i}\}$, e $\mathbb{R}^n_g = 0$, se $g \in G \setminus B$. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f((x_1 \dots, x_n)) = (x_n, \dots, x_1)$. Observe que f é um isomorfismo de espaços G-graduados.*

Definição 1.2.23 *Sejam V e W espaços vetoriais graduados por grupos G e H respectivamente. Dizemos que uma aplicação linear $f : V \longrightarrow W$ é graduada, se para qualquer $g \in G$, existe $h \in H$ tal que $f(V_g) \subseteq W_h$.*

Exemplo 1.2.24 *Consideremos os espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^5$. Iremos munir esses espaços com uma $\mathbb{Z}_3$ graduação e uma $\mathbb{Z}_5$ graduação, respectivamente. Considere $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^5$. Defina as componentes homogêneas de $\mathbb{R}^3$ como $span\{e_i\} = (\mathbb{R}^3)_{\overline{i-1}}$, com $i \in \{1, 2, 3\}$. Defina as componentes homogêneas de $\mathbb{R}^5$ como $span\{e'_i\} = (\mathbb{R}^5)_{\overline{i-1}}$, com $i \in \{1, \dots, 5\}$. A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ dada por $f(x, y, z) = (x, y, z, 0, 0)$ é uma transformação linear graduada.*

Definição 1.2.25 *Dizemos que uma aplicação linear invertível* $f : V \longrightarrow W$ *é uma equivalência de espaços vetoriais graduados, se as aplicações* f *e* f^{-1} *são aplicações graduadas. Nesse caso, obtemos uma bijeção* $\alpha : supp\ V \longrightarrow supp\ W$ *tal que* $f(V_g) = W_{\alpha(g)}$.

Definição 1.2.26 *Sejam* R *e* B *álgebras graduadas por grupos* G *e* H*, respectivamente. Uma equivalência de* R *em* B *é um isomorfismo de álgebras* $\psi : R \longrightarrow B$ *que também é uma equivalência de espaços vetoriais graduados.*

Definição 1.2.27 *Sejam* R *e* B *álgebras graduadas por um grupo* G*. Um homomorfismo de álgebras graduadas é um homomorfismo de álgebras* $\varphi : R \longrightarrow B$ *tal que* $\varphi(R_g) \subseteq B_g$ *para todo* $g \in G$.

1.3 Módulos Graduados

A ideia de Espaço Vetorial é o alicerce onde vai ser estabelecido toda a Álgebra Linear. A generalização de ideias ou definições é algo intrínseco à Matemática e portanto nada mais natural do que pensar em uma generalização para a noção de espaço vetorial. Sendo assim, apresentaremos a seguir uma estrutura que generaliza Espaço Vetorial, a saber, os Módulos.

Definição 1.3.1 *Seja* R *uma álgebra com unidade. Um módulo à esquerda sobre* R *(ou um* R*-módulo à esquerda) é um espaço vetorial* M *com uma aplicação bilinear* $R \times M \to M$ *dada por* $(r, m) \mapsto rm$*, onde para quaisquer* $r_1, r_2 \in R$ *e qualquer* $m \in M$ *tem-se:*

(i) $r_1(r_2m) = (r_1r_2)m$;

(ii) $1_Rm = m$.

De maneira análoga, definimos R*-módulo à direita.*

Definição 1.3.2 *Seja* M *um* R*-módulo à esquerda. Um subespaço* $N \subseteq M$ *diz-se um* R*-submódulo de* M *se* $rn \in N$ *para quaisquer* $r \in R$ *e* $n \in N$.

Definição 1.3.3 *Um* R*-módulo à esquerda* V *é dito fiel se a aplicação* $\varphi : R \longrightarrow End(V)$*, dada por* $r \mapsto \varphi(r)$*, é injetora, onde*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(r) : V & \to & V \\ x & \to & \varphi(r)(x) = rx. \end{array}$$

Assim como em álgebras e espaços vetoriais, também podemos definir graduações em módulos.

Definição 1.3.4 *Sejam G um grupo, R uma álgebra G-graduada e V um R-módulo. A decomposição $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ é uma G-graduação em V se $R_g V_h \subseteq V_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Definimos R-módulo à direita graduado de maneira análoga, neste caso, $V_h R_g \subseteq V_{hg}$, para quaisquer $g, h \in G$.*

Exemplo 1.3.5 *Seja G um grupo e R uma álgebra G-graduada. Se considerarmos o módulo V como sendo a própria álgebra R, então V é graduado.*

Definição 1.3.6 *Seja R uma álgebra G-graduada. Dizemos que um R-módulo à esquerda V graduado é graduado simples, se $RV \neq 0$ e os únicos submódulos graduados de V são 0 e V.*

Definição 1.3.7 *Um homomorfismo de R-módulos graduados é um homomorfismo de R-módulos que também é um homomorfismo de espaços G-graduados.*

Por convenção, ao longo deste trabalho, escreveremos homomorfismos de módulos à esquerda do lado direito e homomorfismos de módulos à direita do lado esquerdo.

Sejam V e W R-módulos à esquerda graduados. Introduziremos as seguintes definições:

- $Hom_R(V, W)$ é o conjunto dos homomorfismos de R-módulos entre V e W.
- $Hom_g(V, W)$ é o conjunto das transformações lineares $f : V \longrightarrow W$ tais que $(V_h)f \subset W_{hg}$, para qualquer h em G.
- $Hom^{gr}(V, W) = \bigoplus_{g \in G} Hom_g(V, W)$.
- $Hom_R^{gr}(V, W) = Hom^{gr}(V, W) \cap Hom_R(V, W)$.
- $Hom_R^{gr}(V, V) = End_R^{gr}(V)$.
- $End_R(V)$ é o conjunto dos endomorfismos de V como R-módulos.

Proposição 1.3.8 *A igualdade $Hom_R^{gr}(V, W) = Hom_R(V, W)$ é válida nos seguintes casos:*

1^{o}) O grupo G é finito.

2º) V como R-módulo, sem considerar a graduação, é finitamente gerado.

A demonstração da Proposição 1.3.8 pode ser encontrada em [[10],*Corollary* I.2.11].

Proposição 1.3.9 *Sejam R uma álgebra G-graduada, V um R-módulo à esquerda graduado e $D = End_R^{gr}(V)$. Se $d \in D$ é um elemento homogêneo não nulo, então* $\mathrm{Ker}(d)$ *e $Im(d)$ são submódulos graduados de V.*

Demonstração: Mostraremos primeiramente que $\mathrm{Ker}(d)$ é um submódulo graduado de V. É imediato que $\mathrm{Ker}(d)$ é um subespaço. Além disso, sendo $x \in \mathrm{Ker}(d)$ e $r \in R$, temos $(rx)d = r(x)d = 0$, assim $rx \in \mathrm{Ker}(d)$. Agora considere $W = \mathrm{Ker}(d)$. Queremos mostrar que $W = \bigoplus\limits_{g \in G}(W \cap V_g)$. Sendo $x \in W$, temos $x \in V$ e assim $x = \sum\limits_{g \in G} x_g$, onde $x_g \in V_g$. Assim, $(x)d = \left(\sum\limits_{g \in G} x_g\right) d = 0$, logo $\sum\limits_{g \in G}(x_g)d = 0$. Considere $h = deg(d)$. Observe que $(V_g)d \subseteq V_{gh}$. Logo, $(x_g)d \in V_{gh}$ e portanto $(x_g)d = 0$, assim $x_g \in W$, mostrando que $\mathrm{Ker}(d)$ é um submódulo graduado de V. Agora mostraremos que $Im(d)$ é um submódulo graduado de V. Também é imediato que $Im(d)$ é um subespaço. Agora considere $y \in Im(d)$ e $r \in R$. Daí, existe $x \in V$ tal que $(x)d = y$. Logo, $ry = r(x)d = (rx)d$ e assim $ry \in Im(d)$. Defina $T = Im(d)$. Nosso objetivo é mostrar que $T = \bigoplus\limits_{g \in G}(T \cap V_g)$. Considerando $y \in T$, existe $x \in V$ tal que $y = (x)d$. Logo, $x = \sum\limits_{\tau \in G} x_\tau$, com $x_\tau \in V_g$ e $y = \sum\limits_{g \in G} y_g$, com $y_g \in V_g$. Assim,

$$\sum_{g \in G} y_g = \left(\sum_{\tau \in G} x_\tau\right) d = \sum_{\tau \in G}(x_\tau)d,$$

onde $(x_\tau)d$ são elementos homogêneos, pois $(V_\tau)d \subset V_{\tau h}$. Consideremos y_{g_0}, onde y_{g_0} é uma das parcelas da soma $\sum\limits_{g \in G} y_g$ e $\tau_0 = g_0 h^{-1} \in G$. Como $(V_\tau)d \subset V_{\tau h}$, temos $(x_{\tau_0})d \in V_{g_0}$. Assim, $y_{g_0} = (x_{\tau_0})d$, e, portanto, $y_{g_0} \in T$. Da arbitrariedade de y_{g_0}, qualquer parcela da soma $\sum\limits_{g \in G} y_g$ pertence a T, logo concluímos que $Im(d)$ é um submódulo graduado de V.

■

Definição 1.3.10 *Sejam V e V' R-módulos à direita graduados. Um homomorfismo $\psi : V \longrightarrow V'$ é homogêneo de grau τ, se $\psi(V_g) \subseteq V'_{\tau g}$, para todo $g \in G$.*

Definição 1.3.11 *Sejam R uma álgebra e V um R-módulo tal que $S \subseteq V$. Definiremos o conjunto $ann_R(S)$ como sendo o seguinte conjunto:*

$$ann_R(S) = \{r \in R \,|\, rs = 0, \forall s \in S\}.$$

Exemplo 1.3.12 *Seja R uma álgebra G-graduada. Suponha que V é um R-módulo à esquerda e seja $D = End_R^{gr}(V)$. Sendo $S \subseteq V$ um conjunto de elementos homogêneos, então*

$$ann_R(S) = \{r \in R \,|\, rs = 0, \, \forall s \in S\}$$

é um ideal à esquerda graduado de R. É simples verificar que $ann_R(S)$ é ideal à esquerda de R. Resta mostrar que este é um ideal graduado. Para simplificar a notação denote $ann_R(S) = I$. Considere $i \in I$, isto é, $is = 0$, para todo $s \in S$. Observe que $i \in R$ e assim podemos escrever $i = \sum_{\tau \in G} i_\tau$, onde $i_\tau \in R_\tau$. Dessa forma, dado $s \in S$, homogêneo de grau g, temos $is = \sum_{\tau \in G}(i_\tau s) = 0$. Como $i_\tau s \in V_{\tau g}$ e para $\tau_1 \neq \tau_2$ temos $\tau_1 g \neq \tau_2 g$ segue que $i_\tau s = 0$, ou seja, $i_\tau \in I$.

Definição 1.3.13 *Seja G um grupo. Para cada $g \in G$, definimos o shift à esquerda ${}^{[g]}V$ de um espaço vetorial G-graduado V pondo ${}^{[g]}V_{gh} := V_h$, com $h \in G$. Analogamente, definimos o shift à direita $V^{[g]}$.*

Capítulo 2

Classificação de Graduações em Álgebras de Matrizes

Neste capítulo do nosso trabalho utilizamos o livro [4] como principal referência. Em todo o capítulo estaremos sempre considerando álgebras associativas.

2.1 Álgebras Graduadas Simples com Condição de Minimalidade

Na primeira seção deste capítulo apresentaremos um dos principais resultados em nosso trabalho que é mostrar que qualquer álgebra R graduada simples que satisfaça a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados é isomorfa a álgebra $End_D(V)$ de endomorfismos de um módulo graduado V de dimensão finita sobre uma álgebra graduada com divisão D.

Lema 2.1.1 *Sejam R uma álgebra G-graduada e V um R-módulo à esquerda graduado simples. Considere $D = End_R^{gr}(V)$. Nessas condições, D é uma álgebra graduada com divisão.*

Demonstração: Como já havíamos mencionado anteriormente, temos

$$D = End_R^{gr}(V) = Hom^{gr}(V,V) \cap Hom_R(V,V) = \left(\bigoplus_{g\in G} Hom_g(V,V)\right) \cap Hom_R(V,V).$$

Observe que $Id_V \in Hom_e(V, V)$, onde Id_V denota o operador identidade de V em V. Ademais, sendo $r \in R, v \in V$, temos:

$$(rv)Id_V = rv = r(v)Id_V,$$

logo $Id_V \in Hom_R(V, V)$ e assim $Id_V \in D$. Seja $d \in D$ um elemento homogêneo não nulo. Pela Proposição 1.3.9, Ker(d) e $Im(d)$ são submódulos graduados de V. Como, por hipótese, V é um R-módulo à direita graduado simples, então os únicos submódulos graduados de V são o 0 e o V. Suponhamos que Ker$(d) = V$, logo $(x)d = 0$, para todo $x \in V$ e assim $d = 0$, o que é um absurdo visto que d é um elemento não nulo. Assim, Ker$(d) = 0$. Por outro lado, suponha que $Im(d) = 0$, logo $(x)d = 0$, para todo $x \in V$ e assim $d = 0$, o que é um absurdo e portanto, $Im(d) = V$. Portanto, existe uma aplicação inversa d^{-1}. Se o grau de d é h, então pela Proposição 1.2.2 temos que $d^{-1} \in Hom_{h^{-1}}(V, V)$, além disso $d^{-1} \in Hom_R(V, V)$, pois para todo $x \in V$ temos $(rx)d = r(x)d$, isto é, $(rx)dd^{-1} = (r(x)d)d^{-1}$. Assim, em particular, $rx_0 = (r(x_0)d)d^{-1}$, para algum $x_0 \in V$ fixado. Como dado $y \in V$, existe $x_0 \in V$ tal que $y = (x_0)d$, isto é, $x_0 = (y)d^{-1}$, temos $r(y)d^{-1} = (r((y)d^{-1})d)d^{-1}$ e, dessa forma, $r(y)d^{-1} = (ry)d^{-1}$. Assim, $d^{-1} \in D$.

■

Teorema 2.1.2 *Seja R uma álgebra G-graduada. Suponha que V é um R-módulo à esquerda graduado simples e seja $D = End_R^{gr}(V)$. Se $v_1, \ldots, v_n \in V$ são elementos homogêneos L.I sobre D, então para quaisquer $w_1, \ldots, w_n \in V$ existe $r \in R$ tal que $rv_i = w_i$, com $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração: Observe que é suficiente mostrar que existe $t_1 \in R$ homogêneo tal que $t_1v_1 \neq 0$, e $t_1v_2 = \cdots = t_1v_n = 0$. De fato, como V é simples, por hipótese, temos $< t_1v_1 >= V$, onde $< t_1v_1 >$ denota o subespaço gerado por t_1v_1, e assim existe $u_1 \in R$ tal que $u_1t_1v_1 = w_1$. Repetindo o mesmo procedimento, para cada $i = 1, \ldots, n$, teremos $r_i := u_it_i \in R$, onde $r_iv_i = w_i$ e $r_iv_j = 0$, para $i \neq j$. Considere $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$. Daí,

$$rv_i = (r_1 + r_2 + \cdots + r_n)v_i = r_1v_i + r_2v_i + \cdots + r_nv_i = r_iv_i = w_i,$$

concluindo assim a tese do teorema.

Para provar o que afirmamos anteriormente, faremos indução em n. Para $n = 1$ suponha que não exista $r \in R$ tal que $rv_1 \neq 0$, dessa forma, $Rv_1 = 0$. Logo, o subespaço gerado por v_1 seria um submódulo não nulo de V e assim igual a V. Como $Rv_1 = 0$, então $RV = 0$, o que é um absurdo, pois como V é graduado simples temos $RV \neq 0$.

Para o passo de indução, considere $I \subset R$ como sendo o anulador de $\{v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, isto é,

$$I = \{r \in R \,|\, rv_2 = \cdots = rv_{n-1} = 0\}.$$

Considerando o conjunto S do Exemplo 1.3.12 como sendo o conjunto $\{v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, concluímos que I é um ideal à esquerda graduado de R. Agora considere $W \subseteq V$ o anulador de I, ou seja,

$$W = \{v \in V \,|\, Iv = 0\}.$$

Observe que W é um D-submódulo graduado de V. Queremos mostrar agora que $W = v_2D \oplus \cdots \oplus v_{n-1}D$. Como $v_2, \ldots, v_{n-1} \in W$, então $v_2D \oplus \cdots \oplus v_{n-1}D \subseteq W$. Por outro lado, suponha por absurdo, que exista $v \in W \setminus (v_2D \oplus \cdots \oplus v_{n-1}D)$. Daí, $\{v, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I. Por hipótese de indução, existe r tal que $rv \neq 0$ e $rv_2 = \cdots = rv_{n-1} = 0$. Observe que $r \in I$ e como $v \in W$, temos $rv = 0$, o que é um absurdo, pois $rv \neq 0$. Dessa forma, $W = v_2D \oplus \cdots \oplus v_{n-1}D$. Mostraremos agora que $v_1 \notin W$ e o fato que $v_n \notin W$ é obtido de modo análogo. Suponha que $v_1 \in \bigoplus_{i=2}^{n-1} v_iD$. Logo, existem $d_i \in D$ tais que:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2d_2 + \cdots + v_{n-1}d_{n-1} \\ \Rightarrow v_1I_d &+ v_2(-d_2) + \cdots + v_{n-1}(-d_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

onde $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I. sobre D. Daí, $I_d \equiv 0$, o que é um absurdo. Como $v_1, v_n \notin W$, então $Iv_1 = Iv_n = V$. De fato, como V é simples então $Iv_1 = V$ ou $Iv_1 = 0$. Se $Iv_1 = 0$, então $v_1 \in W$, o que é um absurdo e assim $Iv_1 = V$. Analogamente mostra-se $Iv_n = V$. Se existe $r \in I$ tal que $rv_1 \neq 0$ e $rv_n = 0$, concluímos o resultado. Caso contrário, ou seja, se para todo $r \in I$ temos $rv_1 = 0$ ou $rv_n \neq 0$, a aplicação:

$$\begin{aligned} d : Iv_n &\to Iv_1 \\ rv_n &\to d(rv_n) = rv_1 \end{aligned}$$

está bem definida. Com efeito, sejam $av_n, bv_n \in Iv_n$ tais que $av_n = bv_n$. Assim, $(a-b)v_n = 0$ e consequentemente $(a-b)v_1 = 0$. Daí, $av_1 = bv_1$, ou seja $d(av_n) = d(bv_n)$.

Não é difícil ver que a aplicação d é um homomorfismo de R- módulos e uma aplicação homogênea de grau $(deg(v_n))^{-1}deg(v_1)$. Sendo assim, $d \in D$. Portanto,

$$v_n d - v_1 = v_n d - v_1 I_d \in v_n D \oplus v_1 D.$$

Ademais,

$$(v_n D \oplus v_1 D) \cap W = \{0\}$$

e $v_n d - v_1 I_d \neq 0$, pois $I_d \neq 0$ e $\{v_n, v_1\}$ é L.I sobre D.

Dado $r \in I$, temos:

$$r(v_n d - v_1) = (rv_n)d - rv_1 = rv_1 - rv_1 = 0$$

e portanto $I(v_n d - v_1) = 0$, ou seja, $v_n d - v_1 \in W$. Assim,

$$0 \neq v_n d - v_1 \in W \cap (v_n D \oplus v_1 D) = \{0\},$$

o que é um absurdo. Logo, existe $r \in I$ tal que $rv_1 \neq 0$ e $rv_n = 0$.

■

Teorema 2.1.3 *Sejam G um grupo e R uma álgebra G- graduada. Se R é graduada simples e satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados, então existem uma álgebra G-graduada D e um D-módulo à direita graduado V tais que D é uma álgebra graduada com divisão, V tem dimensão finita sobre D e R é isomorfa a $End_D(V)$ como uma álgebra G-graduada.*

Demonstração: Seja V um ideal à esquerda graduado minimal de R. Observe que a existência do ideal graduado minimal V segue do fato que, por hipótese, R satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados. Para que V seja um módulo graduado simples, nos resta mostrar que $RV \neq 0$. Não é difícil ver que $V + VR$ é um ideal graduado e como $V \neq 0$, pois V é minimal, temos $V + VR \neq 0$. Dessa forma, como R é uma álgebra simples, então $V + VR = R$. Suponha que $RV = 0$. Como $V + VR = R$, então para quaisquer $x, y \in R$ podemos escrever $y = v + \sum v_i r_i$ e portanto

$$xy = xv + \sum(xv_i)r_i = 0 + \sum 0r_i = 0,$$

pois $xv, xv_i \in RV$. Logo, $R^2 = 0$, o que é um absurdo pois $R^2 \neq 0$, visto que R é uma álgebra graduada simples. Portanto, $RV \neq 0$ e consequentemente V é um módulo simples. Consideremos agora a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : R &\rightarrow End(V) \\ r &\rightarrow \varphi(r), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi(r) : V &\rightarrow V \\ x &\rightarrow \varphi(r)(x) = rx. \end{aligned}$$

Observe que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ é um ideal graduado de R e como R é uma álgebra simples, então $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ ou $\mathrm{Ker}(\varphi) = R$. Suponha que $\mathrm{Ker}(\varphi) = R$, ou seja, dado $r \in R$ temos $\varphi(r) = 0$. Daí, $\varphi(r)(x) = rx = 0$, para todo $x \in V$, logo $RV = 0$, o que é um absurdo, pois $RV \neq 0$. Portanto, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ e assim a aplicação φ é injetora. Como a aplicação φ é injetora, concluímos pela Definição 1.3.3 que R age fielmente sobre V. Observe também que $\varphi(R) \subseteq End_D(V)$, onde $D = End_R^{gr}(V)$ e V está sendo visto como um D- módulo à direita com o produto $x \cdot f = (x)f$, onde $x \in V$ e $f \in D$. De fato, dados $f \in D$ e $r \in R$ segue que

$$\varphi(r)(x \cdot f) = r(x \cdot f) = r(x)f = (rx)f = (\varphi(r)(x))f = \varphi(r)(x) \cdot f.$$

Portanto, $\varphi(R) \subseteq End_D(V) \subseteq End(V)$.

Agora mostraremos que V tem dimensão finita sobre D. Suponha que V não tem dimensão finita sobre D. Daí, existe uma sequência infinita $v_1, v_2, \ldots$ de elementos homogêneos D-independentes em V e uma cadeia descendente de ideais à esquerda graduados de R :

$$ann_R\{v_1\} \supset ann_R\{v_1, v_2\} \supset \cdots,$$

onde todas as inclusões acima são próprias pelo Teorema 2.1.2. De fato, não é difícil ver que $ann_R\{v_1\}, ann_R\{v_1, v_2\}, \ldots$ são ideais à esquerda graduados de R. Antes de mostrar que as inclusões acima são próprias, observe que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ está nas condições do Teorema 2.1.2 e além disso, pela Definição 1.3.11, temos:

$$ann_R\{v_1, \ldots, v_n\} \supseteq ann_R\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}.$$

Mostraremos que a inclusão acima é própria. Pelo Teorema 2.1.2, para $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0$ e $w_{n+1} \neq 0$, existe $r \in R$ tal que $rv_i = w_i$. Logo, $rv_1 = rv_2 = \cdots = rv_n = 0$ e $rv_{n+1} = w_{n+1} \neq 0$. Portanto, $r \in ann_R\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $r \notin ann_R\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$. Como R satisfaz a condição de cadeia descendente sobre ideais à esquerda graduados, por hipótese, então toda cadeia descendente de ideais à esquerda graduados é estacionária, o que é um absurdo, pois a cadeia que acabamos de ver anteriormente não é estacionária. Sendo assim, V tem dimensão finita sobre D.

Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma D-base de elementos homogêneos de V. Como V é finitamente gerado sobre D, pela Observação 1.3.8, temos $End_D(V) = End_D^{gr}(V)$. Dada $f \in End_D(V)$, queremos mostrar agora que $f = \varphi_r := \varphi(r)$. Para isso, considere os elementos $w_i = f(v_i)$. Pelo Teorema 2.1.2, existe $r \in R$ tal que $rv_i = w_i$. Observe que dado $x \in V$ podemos escrever $x = v_1 \cdot d_1 + \cdots + v_n \cdot d_n$, onde $d_i \in D$, para $i = 1, \ldots, n$ temos:

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(v_1 \cdot d_1 + \cdots + v_n \cdot d_n) &= f(v_1 \cdot d_1) + \cdots + f(v_n \cdot d_n) && (2.1)\\
&= (f(v_1)) \cdot d_1 + \cdots + (f(v_n)) \cdot d_n\\
&= (w_1) \cdot d_1 + \cdots + (w_n) \cdot d_n\\
&= (rv_1) \cdot d_1 + \cdots + (rv_n) \cdot d_n\\
&= r(v_1 \cdot d_1) + \cdots + r(v_n \cdot d_n)\\
&= r(v_1 \cdot d_1 + \cdots + v_n \cdot d_n)\\
&= \varphi(r)(x).
\end{aligned}
$$

(2.2)

Dessa forma, podemos perceber que todo elemento de $End_D(V)$ pode ser realizado como a multiplicação à esquerda por um elemento adequado de R. Portanto, a aplicação $\varphi : R \to End_D(V)$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas, donde a sobrejetividade segue pelo que acabamos de mostrar e a injetividade segue do fato que R atua fielmente sobre V.

■

Observação 2.1.4 *Fixe uma D-base homogênea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ em V e considere $g_i = deg\{v_i\}$. Dessa forma, podemos identificar $End_D(V)$ com a álgebra de matri-*

zes $M_n(D)$. *A saber, dado* $r \in End_D(V)$, *para cada* $j = 1, \ldots, n$, r *é identificado pela matriz* (x_{ij}), *dada por:*

$$rv_j = \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij}.$$

Em outras palavras, a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \phi : End_D(V) & \to & M_n(D) \\ r & \to & \phi(r) = (x_{ij}) \end{array}$$

é um isomorfismo de álgebras. De fato, ϕ *é um homomorfismo de álgebras, pois sendo* $r_1, r_2 \in End_D(V)$, $\alpha \in \mathbb{F}$ *e* $\phi(r_1) = (x_{ij})$, $\phi(r_2) = (y_{ij})$, *para* $j = 1, \ldots, n$, *temos:*

$$(r_1 + \alpha r_2)v_j = r_1 v_j + \alpha(r_2 v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} + \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} v_i y_{ij} \right).$$

Dessa forma,

$$\phi(r_1 + \alpha r_2) = (x_{ij} + \alpha y_{ij}) = (x_{ij}) + \alpha(y_{ij}) = \phi(r_1) + \alpha\phi(r_2).$$

Ademais, para cada $j = 1, \ldots, n$, *temos:*

$$\begin{array}{rcl} r_1 r_2 v_j = r_1 \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k y_{kj} \right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (r_1 v_k y_{kj}) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} v_i x_{ik} \right) y_{kj} \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(v_i \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj} \right) \right). \end{array}$$

Logo, $\phi(r_1 r_2) = (w_{ij})$, *com* $w_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}$. *Como a matriz* (w_{ij}) *é o produto das matrizes* (x_{ij}) *e* (y_{ij}), *então* $\phi(r_1 r_2) = \phi(r_1)\phi(r_2)$.

Além disso, seja $r \in \mathrm{Ker}(\phi)$, *isto é,* $\phi(r) = (b_{ij}) = 0$. *Dessa forma, para quaisquer* i *e* j *tais que* $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, *temos* $b_{ij} = 0$. *Daí,* $rv_i = 0$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$. *Assim, para qualquer* $v \in V - \{0\}$, *podemos escrever* $v = \sum v_i \alpha_i$, *onde* $\alpha_i \in D$, *e portanto*

$$rv = r\left(\sum v_i \alpha_i \right) = \sum (rv_i)\alpha_i = 0.$$

Dessa forma, $r = 0$ *e fica provado assim que* ϕ *é injetiva.*

Para mostrar a sobrejetividade, observe que sendo $(x_{ij}) \in M_n(D)$, *existe* $r \in End_D(V)$, *onde para cada* $j = 1, \ldots, n$, *temos:*

$$rv_j = \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij}$$

e portanto $\phi(r) = (x_{ij})$.

Observação 2.1.5 *Observe que a recíproca do Teorema 2.1.3 também é válida. Com efeito, se V é um D-módulo à direita graduado de dimensão finita sobre D, então*

$$R := End_D(V) \cong M_n(D),$$

pelo que vimos na Observação 2.1.4. Pelo Exemplo 1.2.19, $M_n(D)$ é uma álgebra graduada simples e portanto R é graduada simples. Iremos mostrar agora que $R \cong V^n$ como R-módulo à esquerda graduado e, dessa forma, R satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados. De fato, considere a aplicação

$$\begin{aligned} T : R &\to V^n \\ r &\to T(r) = (rv_1, \ldots, rv_n), \end{aligned}$$

onde $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é a D-base de V, formada por elementos homogêneos. Não é difícil ver que T é uma aplicação linear. Além disso, dado $w = (w_1, \ldots, w_n) \in V^n$, pelo Teorema 2.1.2, existe $r_0 \in R$ tal que $r_0 v_i = w_i$. Logo,

$$T(r_0) = (r_0 v_1, \ldots, r_0 v_n) = (w_1, \ldots, w_n) = w,$$

ficando assim provado a sobrejetividade. Suponha agora que $r \in \mathrm{Ker}(T)$. Assim, $rv_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, se $v \in V$, existem $d_1, \ldots, d_n \in D$ tais que $v = \sum v_i d_i$, pois β é uma D-base de V e assim

$$rv = r\left(\sum v_i d_i\right) = \sum((rv_i)d_i) = \sum 0 = 0.$$

Dessa forma, $r \in ann_R(V)$. Suponha agora que $r \in ann_R(V)$, então $rv = 0$, para todo $v \in V$, daí $T(r) = (0, 0, \ldots, 0)$, ou seja, $r \in \mathrm{Ker}(T)$. Sendo assim, concluímos que $\mathrm{Ker}(T) = ann_R(V)$. Analogamente ao que foi feito no Exemplo 1.3.12 mostra-se que $ann_R(V)$ é um ideal bilateral graduado. Como R é graduada simples, então $ann_R(V) = R := End_D(V)$ ou $ann_R(V) = 0$. Mas devemos ter $ann_R(V) = 0$, pois $Id_V \in R$ e $Id_V \cdot v = v$. Portanto, $\mathrm{Ker}(T) = 0$ e assim T é injetiva. Por fim, sejam $r', x \in R$, temos:

$$T(r'x) = ((r'x)v_1, \ldots, (r'x)v_n) = r'(xv_1, \ldots, xv_n) = r'T(x).$$

Concluímos então que existe o isomorfismo de R-módulos $R \cong V^n$.

Ademais, R também satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais à direita graduados, pois sendo ψ a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \psi : R^{op} &\to M_n(D^{op}) \\ r &\to \psi(r) = (\phi(r))^t, \end{aligned}$$

onde ϕ é o isomorfismo $R = End_D(V) \cong M_n(D)$, mencionado na Observação 2.1.4, mostraremos que ψ é um isomorfismo. De fato, denotaremos a operação em R^{op} por

" $\circ$ ", a operação em R pela justaposição dos elementos de R e a operação em $M_n(D^{op})$ por " $*$ ". Observe que para quaisquer $a, b \in R^{op}$, temos:

$$\psi(a \circ b) = (\phi(a \circ b))^t = (\phi(ba))^t = (\phi(b)\phi(a))^t = \phi(a)^t * \phi(b)^t = \psi(a) * \psi(b).$$

Além disso, observe que ψ é composta de isomorfismos de espaços vetoriais e portanto ψ também é isomorfismo de espaços vetoriais.

2.2 Classificação das Álgebras Graduadas Simples de Dimensão Finita

Considere R uma álgebra G-graduada. Sejam V um R-módulo à esquerda graduado e $g \in G$. Denote por Γ a graduação de V. O *shift à direita* $V^{[g]}$ é o mesmo conjunto que o conjunto V onde cada componente homogênea desse conjunto é definida por $V^{[g]}_{hg} := V_h$. Como $R_\sigma V^{[g]}_\tau \subseteq V^{[g]}_{\sigma\tau}$, visto que V é um R-módulo à esquerda graduado, então *shift à direita* $V^{[g]}$ também será um R-módulo à esquerda graduado e denotaremos sua graduação por $\Gamma^{[g]}$.

Se $f : V \longrightarrow V$ é uma aplicação homogênea de grau t, então f sendo vista como uma aplicação $V^{[g]} \longrightarrow V^{[g]}$ será homogênea de grau $g^{-1}tg$. Com efeito, sendo $V = \bigoplus_{\tau \in G} V_\tau$, observe que $V^{[g]}_\tau = V_{\tau g^{-1}}$. Queremos mostrar que $(V^{[g]}_\tau)f \subseteq V^{[g]}_{\tau g^{-1}tg}$, ou seja, $(V_{\tau g^{-1}})f \subseteq V_{\tau g^{-1}t}$. Mas observe que $(V_{\tau g^{-1}})f \subseteq V_{\tau g^{-1}t}$, pois, por hipótese, f é homogênea de grau t. Consequentemente, se $D = End^{gr}_R(V)$, então $End^{gr}_R(V^{[g]}) = {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$. Para mostrar esse fato, considere $D' = End^{gr}_R(V^{[g]})$. Nosso objetivo é mostrar que $D' = {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$. Note que é suficiente mostrar que $D'_\tau = {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}_\tau$. Seja $\varphi \in {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}_\tau$. Logo, $\varphi \in D_{g\tau g^{-1}}$ e portanto

$$(V^{[g]}_\sigma)\varphi = (V_{\sigma g^{-1}})\varphi \subseteq V_{\sigma g^{-1} g\tau g^{-1}} = V_{\sigma\tau g^{-1}} = V^{[g]}_{\sigma\tau}.$$

Dessa forma, concluímos que $\varphi \in D'_\tau$. Por outro lado, considere $\varphi \in D'_\tau$. Daí, $(V^{[g]}_{\sigma g})\varphi \subseteq V^{[g]}_{\sigma g\tau}$ e assim

$$(V_\sigma)\varphi = (V_{\sigma g g^{-1}})\varphi = (V^{[g]}_{\sigma g})\varphi \subseteq V^{[g]}_{\sigma g\tau} = V_{\sigma g\tau g^{-1}}.$$

Dessa forma, $\varphi \in D_{g\tau g^{-1}} = {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}_\tau$ e conluímos então que

$$ {}^{[g^{-1}]}D^{[g]} = D' = End^{gr}_R(V^{[g]}). \tag{2.3}$$

Lema 2.2.1 *Seja R uma álgebra graduada simples que possui um ideal I à esquerda graduado minimal. Então I é um R-módulo à esquerda graduado simples gerado por um idempotente homogêneo de R. Além disso, se V é qualquer R-módulo à esquerda graduado simples, então existe $g \in G$ tal que V é isomorfo a $I^{[g]}$ como um R-módulo graduado.*

Demonstração: Como I é minimal, por hipótese, então $I \neq 0$. Pelo Exemplo 1.2.12, $J := I + IR$ é um ideal bilateral graduado e $J \neq 0$, pois $I \neq 0$. Suponha agora que $I^2 = 0$. Como I é um ideal à esquerda, então $RI \subseteq I$ e assim $IRI \subseteq I^2$. Logo,

$$J^2 = (I + IR)(I + IR) = I^2 + I^2R + IRI + IRIR = IRI + (IRI)R = 0. \tag{2.4}$$

Como R é uma álgebra simples, então $J = R$ ou $J = 0$. Mas como vimos anteriormente, $J \neq 0$, logo $J = R$. Portanto, pela igualdade 2.4 temos $R^2 = 0$, o que é um absurdo, pois R é simples e assim $I^2 \neq 0$. Como I é um ideal à esquerda graduado, então I é um R-módulo à esquerda graduado. Ademais, como $I^2 \neq 0$ e $I^2 \subseteq RI$, temos $RI \neq 0$. Logo, como um R- submódulo graduado à esquerda de I é um ideal à esquerda de R graduado que está contido em I e I é minimal, por hipótese, então não existem ideais à esquerda graduados entre o 0 e o I. Logo, não existem R-submódulos graduados à esquerda de I entre 0 e I e portanto I é simples. Consideremos agora um elemento homogêneo $x \in I$ tal que $Ix \neq 0$. Não é difícil ver que Ix é um ideal à esquerda graduado de R contido em I. Assim, como I é simples e $Ix \neq 0$, então $Ix = I$. Agora iremos mostrar que

$$ann_I(x) = \{r \in I |\, rx = 0\} = 0.$$

De fato, suponha que exista r não nulo tal que $rx = 0$. Note que $ann_I(x)$ é um ideal à esquerda graduado de R e I é minimal, então $ann_I(x) = 0$ ou $ann_I(x) = I$. Como existe r não nulo tal que $rx = 0$, então $ann_I(x) = I = Ix = 0$, o que é um absurdo, pois I é minimal e $I \neq 0$. Como $Ix = I$, então existe $\varepsilon \in I$ tal que $\varepsilon x = x$. Substituindo ε pelo seu componente homogêneo em R_e, podemos assumir que ε tem grau e, visto que como existe $\varepsilon \in I$ tal que $\varepsilon x = x$ e podemos escrever $\varepsilon = \sum_{\tau \in G} \varepsilon_\tau$, então $\sum_{\tau \in G} (\varepsilon_\tau x) = x$, isto é, $\varepsilon_{\tau_0} x = x$, para algum $\tau_0 \in G$. Daí, $\tau_0 deg(x) = deg(x)$ e assim $\tau_0 = e$. Observe agora que $(\varepsilon^2 - \varepsilon) \in I$ e

$$(\varepsilon^2 - \varepsilon)x = \varepsilon^2 x - \varepsilon x = \varepsilon x - x = x - x = 0.$$

Portanto, $(\varepsilon^2 - \varepsilon) \in ann_I(x) = 0$ e assim $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Observe que $\varepsilon \neq 0$, pois caso contrário teríamos $x = \varepsilon x = 0$. Daí, $I = Ix = 0$, o que é um absurdo pois I é minimal. Portanto, $R\varepsilon \neq 0$, visto que $\varepsilon^2 \in R\varepsilon$ e $\varepsilon^2 = \varepsilon \neq 0$. Além disso, $R\varepsilon$ é um ideal à esquerda graduado de R e $R\varepsilon \subseteq I$. Como I é minimal, temos $R\varepsilon = I$.

Seja V um R-módulo à esquerda graduado simples. Não é difícil ver que IV é um submódulo à esquerda graduado de V e como V é simples $IV = 0$ ou $IV = V$. Iremos agora mostrar que a ação de R sobre V é fiel. Note que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : R &\rightarrow End(V) \\ r &\rightarrow \varphi(r) = \varphi_r, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi_r : V &\rightarrow V \\ v &\rightarrow \varphi_r(v) = rv, \end{aligned}$$

é injetiva. Com efeito, como $\mathrm{Ker}(\varphi)$ é um ideal bilateral graduado, então $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ ou $\mathrm{Ker}(\varphi) = R$. Suponha que $\mathrm{Ker}(\varphi) = R$. Logo, dado $r \in R$ temos $r \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, isto é, $rv = 0$, para todo $r \in R$ e para todo $v \in V$. Mas isso é um absurdo, pois $RV \neq 0$ visto que V é um R-módulo simples. Dessa forma, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$. Suponha agora que $IV = 0$. Assim, dado $r \in I$ não nulo, então $rv = 0$, para todo $v \in V$. Daí, $\varphi(r)(v) = 0$, para todo $v \in V$, ou seja, $r \in \mathrm{Ker}(\varphi) = 0$, absurdo pois r foi tomado em I não nulo. Assim, $IV = V$. Tome $v_0 \in V$ homogêneo tal que $Iv_0 \neq 0$ e seja $g = deg(v_0)$. Iremos mostrar que o elemento v_0 existe. Suponha, por absurdo, que para todo $v \in V$ homogêneo tivéssemos $Iv = 0$. Seja $i \in I$ e $w \in V$. Como $w \in V$, então $w = \sum_{\sigma \in G} v_\sigma$. Assim,

$$iw = i \sum_{\sigma \in G} v_\sigma = \sum_{\sigma \in G} iv_\sigma = \sum_{\sigma \in G} = \sum 0 = 0,$$

para todo $i \in I$ e para todo $w \in V$ e portanto $IV = 0$, o que é um absurdo pois $IV = V$. Então a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : I &\rightarrow V \\ i &\rightarrow \psi(i) = iv_0 \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos. De fato ψ é linear. Ademais, dado $r' \in R$, temos

$$\psi(r'i) = (r'i)v_0 = r'(iv_0) = r'\psi(i).$$

Além disso, a aplicação ψ leva I_h em V_{hg}, onde $h \in G$. Com efeito, seja $i_h \in I_h$. Note que $i_h \in I \cap R_h$ e assim $\psi(i_h) = i_h v_0$. Observe também que $deg(i_h) = h$, $deg(v_0) = g$ e portanto $deg(i_h v_0) = hg$. Não é difícil ver que $\mathrm{Ker}(\psi)$ é um submódulo graduado de I e como I é simples, então $\mathrm{Ker}(\psi) = I$ ou $\mathrm{Ker}(\psi) = 0$. Note que se $\mathrm{Ker}(\psi) = I$, então $Iv_0 = 0$, o que é um absurdo pois tomamos $v_0 \in V$ homogêneo tal que $Iv_0 \neq 0$. Dessa forma, ψ é injetiva. Por outro lado, $Im(\psi)$ é um submódulo graduado de V e V é simples, logo $Im(\psi) = V$ ou $Im(\psi) = 0$. Observe que se $Im(\psi) = 0$, então $\mathrm{Ker}(\psi) = I$, o que é um absurdo pois mostramos anteriormente que $\mathrm{Ker}(\psi) = 0$. Dessa forma, ψ é sobrejetiva. Consequentemente, $I^{[g]}$ é isomorfo a V como R-módulo. Ainda mais, esse isomorfismo é um isomorfismo de R-módulos graduados, pois como ψ leva I_h em V_{hg}, como comentamos anteriormente, temos $(I_{\tau g^{-1}})\psi \subseteq V_\tau$, em outras palavras, $(I^{[g]}_\tau)\psi \subset V_\tau$. ■

Lema 2.2.2 *Sejam R uma álgebra graduada e $I = R\varepsilon$, onde ε é um idempotente homogêneo de R. Então a álgebra graduada $End^{gr}_R(I)$ é igual a $End_R(I)$ e isomorfa a $\varepsilon R \varepsilon$.*

Demonstração: A multiplicação à direita por um elemento homogêneo $a \in \varepsilon R \varepsilon$ resulta em um endomorfismo do R-módulo à esquerda I que tem o mesmo grau que a. Com efeito, defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_a : I &\rightarrow I \\ x &\rightarrow (x)\varphi_a = xa. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que φ_a é linear. Ademais, dado $r \in R$ e $x \in I$, temos:

$$(rx)\varphi_a = (rx)a = r(xa) = r(x)\varphi_a.$$

Seja $deg(a) = g$. Queremos mostrar agora que

$$(I_\tau)\varphi_a \subseteq I_{\tau g}. \tag{2.5}$$

Sendo $x_\tau \in I_\tau$, temos $(x_\tau)\varphi_a = x_\tau a$. Note que $deg(x_\tau a) = \tau g$. Assim, $x_\tau a \in I_{\tau g}$, concluindo portanto que φ_a é um endomorfismo do R-módulo à esquerda I que tem o mesmo grau que a.

Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \varepsilon R \varepsilon &\to End_R^{gr}(I) \\ a &\to (a)\varphi = \varphi_a, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi_a : I &\to I \\ x &\to (x)\varphi_a = xa. \end{aligned}$$

Iremos mostrar que φ é um homomorfismo de álgebras graduadas. Não é difícil ver que φ é um homomorfismo. Ademais, seja $deg(a) = g$. Por (2.5), temos que $\varphi_a \in End_g(I)$.

Como $a \in \varepsilon R \varepsilon$ e $\varepsilon^2 = \varepsilon$, por hipótese, temos:

$$\varepsilon a = \varepsilon\varepsilon r'\varepsilon = \varepsilon^2 r'\varepsilon = \varepsilon r'\varepsilon = a.$$

Seja $a \in \text{Ker}(\varphi)$. Logo, $(x)\varphi_a = 0$, para todo $x \in I$, ou seja, $xa = 0$, para todo $x \in I$. Em particular, temos $\varepsilon a = 0$ e assim $a = \varepsilon a = 0$, logo φ é injetiva. Antes de mostrarmos que a aplicação φ é sobrejetiva, observe que, pela Observação 1.3.8, $End_R^{gr}(I) = End_R(I)$, pois I é um R-módulo e I é finitamente gerado. De fato, como ε é idempotente, então $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon \in I$. Agora considere V um submódulo de I tal que $\varepsilon \in V$. Como V é submódulo, então para todo $v \in V$ e para todo $r \in R$ temos $rv \in V$. Em particular, $r\varepsilon \in V$, para todo $r \in R$. Logo, $I \subseteq V \subseteq I$ e assim $V = I$. Em outras palavras, o submódulo de I gerado por ε, que consiste na interseção de todos os submódulos de I que contém ε é igual a I. Dessa forma, I é finitamente gerado.

Agora iremos mostrar que φ é sobrejetiva, para isso considere $f \in End_R^{gr}(I) = End_R(I)$ e $x \in I$. Como $x \in I$, então $x = r\varepsilon$, logo $x\varepsilon = r\varepsilon^2 = r\varepsilon = x$ e daí temos:

$$x \cdot f = (x)f = (x\varepsilon)f = x(\varepsilon)f = x(\varepsilon \cdot f).$$

Observe que $\varepsilon \cdot f = a \in I$. Logo, $x \cdot f = x \cdot a$, com $a \in I$ e assim

$$\varepsilon r \varepsilon = \varepsilon a = \varepsilon\varepsilon \cdot f = \varepsilon \cdot f = a.$$

Dessa forma, $a \in \varepsilon R \varepsilon$ e $(x)f = x \cdot f = xa = (x)\varphi_a$, ou seja, $f = \varphi_a$.

$\blacksquare$

Observação 2.2.3 *Em particular, sob as condições do Teorema 2.1.3, o R-módulo graduado simples V e a álgebra graduada com divisão $D = End_R^{gr}(V) = End_R(V)$ são determinados a menos de shifts. Com efeito, pelo Teorema 2.1.3, existe uma álgebra G-graduada D, um D-módulo V à direita graduado tal que D é uma álgebra graduada com divisão , V tem dimensão finita sobre D e $R \cong End_D(V)$ como álgebra G-graduada. Como R satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados(hipótese do Teorema 2.1.3), então R possui um ideal à esquerda graduado minimal. Assim, R está nas condições do Lema 2.2.1. Pelo Lema 2.2.1, se V é um R-módulo à esquerda graduado simples, então existe $g \in G$ tal que $V \cong I^{[g]}$, onde I é um ideal à esquerda graduado minimal de R e $D = End_R^{gr}(V) \cong End_R^{gr}(I^{[g]})$. Logo,*

$$D \cong End_R^{gr}(I^{[g]}) = {}^{[g^{-1}]}(End_R^{gr}(I))^{[g]}.$$

Definição 2.2.4 *Seja G um grupo e sejam D e D' álgebras G-graduadas. Considere V um D-módulo à direita graduado e V' um D'-módulo à direita graduado. Um isomorfismo de (D, V) em (D', V') é um par (ψ_0, ψ_1), onde $\psi_0 : D \to D'$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas e $\psi_1 : V \to V'$ é um isomorfismo de espaços G-graduados tal que $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$, para todo $v \in V$ e $d \in D$.*

Teorema 2.2.5 *Seja G um grupo. Sejam D e D' álgebras G-graduadas que são álgebras graduadas com divisão. Sejam V um D-módulo à direita graduado e V' um D'-módulo à direita graduado, ambos não nulos e de dimensão finita. Sejam $R = End_D(V)$ e $R' = End_{D'}(V')$. Se $\psi : R \to R'$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas, então existe $g \in G$ e um isomorfismo (ψ_0, ψ_1) de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, V^{[g]})$ em (D', V') tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R$ e $v \in V$. Por outro lado, dado um isomorfismo (ψ_0, ψ_1) de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, V^{[g]})$ em (D', V'), existe um único isomorfismo $\psi : R \to R'$ de álgebras G-graduadas tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R$ e $v \in V$. Dois isomorfismos (ψ_0, ψ_1) e (ψ'_0, ψ'_1) determinam o mesmo isomorfismo $R \to R'$ se, e somente se, existe um homogêneo $d \in D'$ diferente de zero tal que $\psi'_0(x) = d^{-1}\psi_0(x)d$ e $\psi'_1(v) = \psi_1(v)d$, para quaisquer $x \in D$ e $v \in V$.*

Demonstração: Defina uma estrutura de R-módulo à esquerda em V' pondo $rv' := \psi(r)v'$, para todo $r \in R$ e $v' \in V'$. Como V' é um R'-módulo graduado simples, então V' também é um R-módulo graduado simples. Com efeito, suponha $U \neq 0$ um R-submódulo de V'. Logo, U também é um R'-submódulo. Considere $u \in U \setminus \{0\}$. Dado $v' \in V'$, existe uma aplicação linear com $r \in R$ onde $\psi(r) = r'$, logo $ru = \psi(r)u = r'u \in U$, portanto $U = V'$ e V' é um R-módulo graduado simples.

Pelo Lema 2.2.1, existe um isomorfismo $\psi_1 : V^{[g]} \to V'$, para algum $g \in G$. Pela definição de estrutura de R-módulo em V' e como $\psi_1 : V^{[g]} \to V'$ é um isomorfismo de

R-módulos, temos:

$$\psi_1(rv) = r\psi_1(v) := \psi(r)\psi_1(v),$$

para todo $r \in R$ e $v \in V$. De 2.3 temos ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]} = End_R^{gr}(V^{[g]})$. Como V tem dimensão finita sobre D, por hipótese, e $D = End_R^{gr}(V)$, pela Observação 1.3.8, temos $D = End_R(V)$, de maneira análoga temos $D' = End_R(V')$. Observe que $V^{[g]}$ também tem dimensão finita, visto que V tem dimensão finita, e assim $End_R^{gr}(V^{[g]}) = End_R(V^{[g]})$. Como ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]} = End_R(V^{[g]})$ e $D' = End_R(V')$, podemos definir $\psi_0 : End_R(V^{[g]}) \to End_R(V')$ pondo $(v')(\psi_0(d)) := \psi_1((\psi_1^{-1}(v'))d)$ para todo $v' \in V'$ e $d \in D$. Observe que $\psi_0(d)$ de fato pertence a $End_R(V')$, pois é a composição de três transformações lineares que pertencem a $End_R(V')$ que são as aplicações ψ_1^{-1}, d e ψ_1. Não é difícil ver que ψ_0 é um isomorfismo de álgebras. Ainda mais, ψ_0 é um isomorfismo de álgebras graduadas. De fato, sejam $F = End_R(V^{[g]})$ e $D' = End_R(V')$. Queremos mostrar que $\psi_0(F_\tau) \subseteq D'_\tau$, onde $D'_\tau = (End_R(V'))_\tau$. Seja $b \in \psi_0(F_\tau)$, ou seja, $b = \psi_0(f_\tau)$, onde $f_\tau \in F_\tau$. Mostrar que $b \in D'_\tau$ é equivalente a mostrar que $(V'_\sigma)b \subseteq V'_{\sigma\tau}$. Sendo assim, considere $x'_\sigma \in V'_\sigma$ e daí

$$(x'_\sigma)b = (x'_\sigma)\psi_0(f_\tau) = \psi_1(\psi_1^{-1}(x'_\sigma)f_\tau). \tag{2.6}$$

Observe que $\psi_1^{-1}(x'_\sigma) \in V_\sigma^{[g]}$. Como $(V_\sigma^{[g]})f_\tau \subseteq V_{\sigma\tau}^{[g]}$, pois $f_\tau \in F_\tau$, temos $(\psi_1^{-1}(x'_\sigma))f_\tau \in V_{\sigma\tau}^{[g]}$ e consequentemente $\psi_1(\psi_1^{-1}(x'_\sigma))f_\tau) \in V'_{\sigma\tau}$. Assim, segue de 2.6 que $(x'_\sigma)b \in V'_{\sigma\tau}$.

Por outro lado, dado (ψ_0, ψ_1) um isomorfismo de pares, definimos $\psi(r) : V' \to V'$ para cada $r \in End_D(V)$, pondo $\psi(r)(v') := \psi_1(r(\psi_1^{-1}(v')))$. Iremos mostrar que $\psi(r)$ está em $R' = End_{D'}(V')$. Não é difícil ver que $\psi(r)$ é linear. Como existe um isomorfismo (ψ_0, ψ_1) de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, V^{[g]})$ em (D', V'), por hipótese, então

$$\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d), \tag{2.7}$$

para quaisquer $v \in V$ e $d \in D$. Pela definição das aplicações ψ_0 e ψ_1 e fazendo as alterações necessárias em 2.7, temos $\psi_1(\psi_1^{-1}(v')\psi_0^{-1}(d')) = v'd'$, ou seja, $\psi_1^{-1}(v')\psi_0^{-1}(d') = \psi_1^{-1}(v'd')$. Logo, $\psi_1(r(\psi_1^{-1}(v')\psi_0^{-1}(d'))) = \psi_1(r(\psi_1^{-1}(v'd'))) = \psi(r)(v'd')$, para quaisquer $v' \in V'$ e $d' \in D'$. Por outro lado,

$$\psi_1(r(\psi_1^{-1}(v')\psi_0^{-1}(d'))) = \psi_1(r(\psi_1^{-1}(v'))\psi_0(\psi_0^{-1}(d')) = (\psi(r)(v'))d',$$

para quaisquer $v' \in V'$ e $d' \in D'$. Daí, $\psi(r)(v'd') = (\psi(r)(v'))d'$, para $v' \in V'$ e $d' \in D'$. Portanto, $\psi(r)$ está em $R' = End_{D'}(V')$. Suponha r homogêneo de grau $h \in G$. Para qualquer $a \in G$, ψ_1^{-1} manda V'_a em $V_{ag^{-1}} = V_a^{[g]}$, visto que $\psi_1 : V^{[g]} \to V'$ é isomorfismo de espaços vetoriais graduados, r manda $V_{ag^{-1}}$ em $V_{hag^{-1}}$, pois r é homogêneo de grau h, e por fim, ψ_1 manda $V_{hag^{-1}}$ em V'_{ha}, pois $\psi_1 : V^{[g]} \to V'$ é um isomorfismo de espaços graduados, por hipótese, e $V_{hag^{-1}} = V_{ha}^{[g]}$. Dessa forma, sendo V'_a uma componente de V', temos:

$$\psi(r)(V'_a) = \psi_1(r(\psi_1^{-1}(V'_a))) \subseteq \psi_1(r(V_{ag^{-1}})) \subseteq \psi_1(V_{hag^{-1}}) \subseteq V'_{ha}.$$

Portanto, $\psi(r)$ é homogênea de grau h. Assim, $\psi : End_D(V) \to End_{D'}(V')$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas. Observe que ψ é única.

Se $d \in D'$ é um elemento homogêneo diferente de zero de grau $t \in G$, então a aplicação $\psi'_0 : {}^{[t^{-1}g^{-1}]}D^{[gt]} \to D'$ dada por $\psi'_0(x) = d^{-1}\psi_0(x)d$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas e a aplicação $\psi'_1 : V^{[gt]} \to V'$ dada por $\psi'_1(v) = \psi_1(v)d$ é um isomorfismo de espaços G-graduados que cumpre:

$$\psi'_1(vx) = \psi_1(vx)d = \psi_1(v)\psi_0(x)d = \psi_1(v)dd^{-1}\psi_0(x)d = \psi'_1(v)\psi'_0(x).$$

Como

$$\psi'_1(rv) = \psi_1(rv)d = (\psi(r)\psi_1(v))d = \psi(r)(\psi_1(v)d) = \psi(r)\psi'_1(v),$$

para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$, concluímos que (ψ'_0, ψ'_1) determina o mesmo isomorfismo $\psi : R \to R'$. Por outro lado, se (ψ'_0, ψ'_1) determina ψ, então $\psi'_1 \circ \psi_1^{-1}$ é uma aplicação homogênea de V' em V' de um determinado grau e também um isomorfismo de R-módulos. Dessa forma, existe $d \in D'$ homogêneo diferente de zero tal que $(\psi'_1 \circ \psi_1^{-1})(v') = v'd$, para qualquer $v' \in V'$. Daí, segue que $\psi'_1(v) = \psi_1(v)d$ para qualquer $v \in V$ e $\psi'_0(x) = d^{-1}\psi_0(x)d$ para qualquer $x \in D$.

■

Observação 2.2.6 *Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma D-base homogênea para V, então $\{\psi_1(v_1), \ldots, \psi_1(v_n))\}$ é uma D'-base homogênea para V', onde $deg(\psi_1(v_i)) = (deg(v_i))g$. Fixadas as bases para V e V', o isomorfismo ψ correspondente a (ψ_0, ψ_1) também pode ser expresso em linguagem de matrizes.*

Seja V um D-módulo à direita graduado simples. Daí, para qualquer $v \in V$ homogêneo não nulo, temos $V = vD$. De fato, não é difícil ver que vD é um submódulo (à direita) graduado de V e como V é graduado simples, então $vD = 0$ ou $vD = V$. Suponha que $vD = 0$. Logo, $0 = v.1 = v$, o que é um absurdo, pois tomamos v não nulo. Dessa forma, $vD = V$. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & {}^{[g]}D & \rightarrow & vD \\ & r & \rightarrow & \varphi(r) = vr. \end{array}$$

Observe que:

1) Sejam $r_1, r_2 \in {}^{[g]}D$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos:

$$\varphi(\lambda r_1 + r_2) = v(\lambda r_1 + r_2) = \lambda(vr_1) + vr_2 = \lambda\varphi(r_1) + \varphi(r_2).$$

2) Dado $x \in {}^{[g]}D$ e $r \in D$, temos:

$$\varphi(xr) = v(xr) = (vx)r = \varphi(x)r.$$

Podemos ver ${}^{[g]}D$ como um D-módulo à direita. Dessa forma, considere $M = {}^{[g]}D$ e $M_\tau = D_{g^{-1}\tau}$ e daí

$$M_\sigma D_g = D_{g^{-1}\sigma} D_g \subseteq D_{g^{-1}\sigma g} = M_{\sigma g}, \tag{2.8}$$

portanto M é um D-módulo à direita graduado.

3) Dado $x \in M_\tau$, temos:

$$\varphi(x) = vx \in V_g D_{g^{-1}\tau} \subseteq V_\tau,$$

pois V é um D-módulo à direita graduado e assim $\varphi(M_\tau) \subseteq V_\tau$.

4) Seja $y \in vD$. Daí, $y = vr_0 = \varphi(r_0)$, onde $r_0 \in {}^{[g]}D$. Dessa forma, φ é sobrejetiva.

5) Seja $r \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Note que $r = \sum_{\tau \in G} r_\tau$, onde $r_\tau \in D_\tau$. Assim,

$$0 = \varphi(r) = \varphi\left(\sum_{\tau \in G} r_\tau\right) = \sum_{\tau \in G}(\varphi(r_\tau)) = \sum_{\tau \in G}(vr_\tau).$$

Observe que vr_τ é homogêneo e $vr_\tau \in V_g D_\tau \subseteq V_{gt}$. Daí,

$$\sum_{\tau \in G}(vr_\tau) = 0 \Longrightarrow vr_\tau = 0,$$

para todo $\tau \in G$. Como D é uma álgebra graduada com divisão, para cada $\tau \in G$, se $r_\tau \neq 0$, existe $r_\tau^{-1} \in D_{\tau^{-1}}$. Assim, se $r_\tau \neq 0$ segue que

$$0 = vr_\tau \Longrightarrow 0r_\tau^{-1} = (vr_\tau)r_\tau^{-1} \Longrightarrow 0 = v,$$

o que é um absurdo, pois por hipótese $v \neq 0$. Dessa forma, não existe nenhum $r_\tau \neq 0$ e portanto $r = \sum_{\tau \in G} r_\tau = 0$. Logo, φ é injetiva.

Portanto, concluímos que ${}^{[g]}D \cong V$, onde $g = deg(v)$. Mostremos que:

$${}^{[g]}D \cong {}^{[h]}D \Longleftrightarrow gT = hT,$$

onde T é o suporte de D. De fato, sejam $V = {}^{[g]}D = \bigoplus_{\tau \in G} D_{g^{-1}\tau}$ e $W = {}^{[h]}D = \bigoplus_{\sigma \in G} D_{h^{-1}\sigma}$. Suponha que exista um isomorfismo $\varphi : V \longrightarrow W$. Dado $s \in T$, queremos mostrar que $gs \in hT$. Ora, como $s \in T$, então $D_s \neq 0$. Ademais, observe que $\varphi(V_{gs}) = W_{gs}$. Como $V_{gs} = D_s \neq 0$, temos $\varphi(V_{gs}) \neq 0$, pois φ é injetiva. Logo, $W_{gs} \neq 0$. Note que $W_{gs} = D_{h^{-1}gs} \neq 0$. Assim, $h^{-1}gs \in T$, isto é, $h^{-1}gs = \lambda \in T$. Dessa forma, $gs = h\lambda \in hT$ e assim $gT \subseteq hT$. A inclusão $hT \subseteq gT$ é obtida de maneira análoga. Suponha agora que $gT = hT$. Logo, $h^{-1}g \in T$. Assim, $D_{h^{-1}g} \neq 0$. Dessa forma, considere $\alpha \in D_{h^{-1}g} - \{0\}$ fixado e defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow W \\ v &\rightarrow \varphi(v) = \alpha v. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que φ é linear. Ademais, observe que:

1) Dados $v \in V$ e $d \in D$ temos:

$$\varphi(vd) = \alpha(vd) = (\alpha v)d = \varphi(v)d.$$

2) Suponha $v \in V$ tal que $\varphi(v) = 0$, isto é, $\alpha v = 0$. Como α é homogêneo e não nulo, $\alpha \in D$ e D é uma álgebra graduada com divisão, temos que existe $\alpha^{-1} \in D$ tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1$. Portanto, se $\alpha v = 0$, então $\alpha^{-1}\alpha v = 0$, ou seja, $v = 0$. Logo, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ e portanto φ é injetora.

3) Dado $y \in W$, considere $v = \alpha^{-1}y \in V$. Daí,

$$\varphi(v) = \varphi(\alpha^{-1}y) = \alpha(\alpha^{-1}y) = y \in Im(\varphi).$$

Logo, φ é sobrejetora.

4) Seja $v_\tau \in V_\tau$. Como $V_\tau = D_{g^{-1}\tau}$, v_τ tem grau $g^{-1}\tau$ em D. Ademais, $\alpha \in D_{h^{-1}g}$. Logo,

$$\varphi(v_\tau) = \alpha v_\tau \in D_{h^{-1}g} D_{g^{-1}\tau} \subseteq D_{h^{-1}\tau} = W_\tau.$$

Daí, $\varphi(V_\tau) \subseteq W_\tau$. Dessa forma, ${}^{[g]}D \cong {}^{[h]}D$.

Seja $T \subseteq G$ o suporte de D. Se V é um D-módulo à direita graduado de dimensão finita, então existe uma decomposição canônica de V em uma soma direta

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s,$$

onde V_i é a soma de todos os submódulos graduados que são isomorfos a algum ${}^{[g_i]}D$ fixado, com $g_i \in G$. Os elementos $g_1, \ldots, g_s$ não são unicamente determinados, mas suas classes laterais são determinadas a menos de permutação. Escreva $\gamma = (g_1, \ldots, g_s)$, onde $g_i^{-1} g_j \notin T$, para $i \neq j$. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma D-base homogênea, então, para cada i, o subconjunto

$$\{v_j |\ deg(v_j) \in g_i T\}$$

é uma D-base para V_i. Considere $k_i = dim_D V_i$ e escreva

$$\kappa = (k_1, \ldots, k_s).$$

Por outro lado, dado um par (κ, γ), considere $V(G, D, \kappa, \gamma)$ o D-módulo à direita que possui uma D-base homogênea consistindo de k_i elementos com os respectivos graus g_i, com $i = 1, \ldots, s$. Denotamos a álgebra G-graduada $End_D(V)$ por $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$.

Definição 2.2.7 *Escreveremos $(D, \kappa, \gamma) \sim (D', \kappa', \gamma')$, se κ e κ' têm o mesmo número s de componentes e existem um elemento $g \in G$ e uma permutação π dos símbolos $\{1, \ldots, s\}$ tais que $D' \cong {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$, $k'_i = k_{\pi(i)}$ e $g'_i \in g_{\pi(i)}(SuppD)g$, para todo $i = 1, \ldots, s$.*

Utilizando a Definição 2.2.7 e combinando os Teoremas 2.1.3 e 2.2.5, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.2.8 *Sejam G um grupo e R uma álgebra G-graduada. Se R é graduada simples e satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados, então R é isomorfa a alguma $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$, onde D é uma álgebra graduada com divisão. Duas álgebras G-graduadas $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$ e $\mathcal{M}(G, D', \kappa', \gamma')$ são isomorfas se, e somente se, $(D, \kappa, \gamma) \sim (D', \kappa', \gamma')$.*

Demonstração: Como R é graduada simples e satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados, pelo Teorema 2.1.3, existem uma álgebra G-graduada D e um D-módulo à direita graduado V tais que D é uma álgebra graduada com divisão, V tem dimensão finita sobre D e $R \cong End_D(V) = \mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$, para algum κ e algum γ. Observe que, pelo Teorema 2.2.5, temos que $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma) = End_D(V) \cong End_{D'}(V') = \mathcal{M}(G, D', \kappa', \gamma')$ se, e somente se, κ e κ' têm o mesmo número s de componentes e existem um elemento $g \in G$ e uma permutação π dos símbolos $\{1, \ldots, s\}$ tais que $D' \cong {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$, $k'_i = k_{\pi(i)}$ e $g'_i \in g_{\pi(i)}(SuppD)g$, para todo $i = 1, \ldots, s$, ou seja, $(D, \kappa, \gamma) \sim (D', \kappa', \gamma')$.

■

2.3 Álgebras Graduadas com Divisão sobre Corpos Algebricamente Fechados

Nesta seção iremos dar uma classificação das álgebras graduadas com divisão de dimensão finita, assumindo que o corpo $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado. Contudo, a priori, começaremos com o caso geral.

Sejam D uma álgebra graduada com divisão, $T = Supp\, D$ e $\Delta = D_e$. Então Δ é uma álgebra com divisão, isto é, $1 \in D_e$ e dado $x \in D_e$, temos $x^{-1} \in D_{e^{-1}} = D_e$. Para cada $t \in T$, tome um elemento não nulo $X_t \in D_t$. Assim, $D_t = \Delta X_t$. Com efeito, seja $y \in \Delta X_t$. Logo, $y = \delta X_t \in D_e D_t = D_t$. Por outro lado, seja $y \in D_t$. Observe que $\delta = y(X_t)^{-1} \in \Delta$. Logo, $y = \delta X_t \in \Delta X_t$. Consequentemente, para quaisquer $u, v \in T$ existe um elemento não nulo $\sigma(u, v) \in \Delta$ tal que

$$X_u X_v = \sigma(u, v) X_{uv}, \tag{2.9}$$

visto que $X_u X_v$ tem grau uv e X_{uv} também tem grau uv, portanto $X_u X_v X_{uv}^{-1}$ tem grau e, dessa forma o elemento $X_u X_v X_{uv}^{-1}$ é justamente o elemento $\sigma(u, v)$. Ademais, para qualquer $\delta \in \Delta$ e $t \in T$, existe um elemento não nulo $t \cdot \delta \in \Delta$ tal que

$$X_t \delta = (t \cdot \delta) X_t. \tag{2.10}$$

De fato, observe que $X_t \delta \in D_t = \Delta X_t$. Logo, $X_t \delta = y X_t$, onde $y \in \Delta$. Basta tomarmos agora $y = t \cdot \delta$. Consequentemente, podemos identificar D com o conjunto das expressões formais $\sum_{t\in T}\delta_t X_t$, onde $\delta_t \in \Delta$, todos, a menos de uma quantidade finita de δ_t, são zeros, e a multiplicação dessas somas é determinada pela multiplicação de Δ e equações 2.9 e 2.10. Em outras palavras, D é o produto cruzado $\Delta * T$ associado a ação $\cdot$ e cociclo σ.

A associatividade da multiplicação de D é equivalente as seguintes condições:

1) Para qualquer $t \in T$, a aplicação $\delta \longmapsto t\cdot\delta$ é um automorfismo de Δ. De fato, não é difícil ver que essa aplicação é linear. Ademais, seja $\delta \in \Delta$ tal que $t\cdot\delta = 0$. Logo, $(t\cdot\delta)X_t = 0$. Daí, segue de 2.10 que $X_t\delta = 0$, isto é, $X_t^{-1}X_t\delta = 0$. Logo, $\delta = 0$ e assim a aplicação é injetiva. Por fim, seja $\varepsilon \in \Delta$. Daí, $\varepsilon X_t \in D_t = X_t\Delta$ e assim

$$\varepsilon X_t = X_t\delta = (t\cdot\delta)X_t,$$

com $\delta \in \Delta$. Portanto, $\varepsilon = t\cdot\delta$ e concluímos assim que a aplicação é sobrejetiva.

2) A aplicação $\sigma : T\times T \longrightarrow \Delta^\times$ é um 2-cociclo, isto é,

$$\sigma(u,v)\sigma(uv,w) = (u\cdot\sigma(v,w))\sigma(u,vw), \tag{2.11}$$

para quaisquer $u,v,w \in T$. Com efeito, segue de 2.9 que $\sigma(u,vw) = X_uX_{vw}(X_{uvw})^{-1}$. Portanto,

$$(u\cdot\sigma(v,w))\sigma(u,vw) = (u\cdot\sigma(v,w))X_uX_{vw}(X_{uvw})^{-1}. \tag{2.12}$$

Como $u \in T$ e $\sigma(v,w) \in \Delta$, segue de 2.10 que $(u\cdot\sigma(v,w))X_u = X_u\sigma(v,w)$. Logo,

$$(u\cdot\sigma(v,w))\sigma(u,vw) = X_u\sigma(v,w)X_{vw}(X_{uvw})^{-1}. \tag{2.13}$$

Segue de 2.9 que

$$X_u\sigma(v,w)X_{vw}(X_{uvw})^{-1} = X_uX_vX_w(X_{uvw})^{-1} = \sigma(u,v)\sigma(uv,w). \tag{2.14}$$

Portanto, de 2.13 e 2.14 concluímos

$$(u\cdot\sigma(v,w))\sigma(u,vw) = \sigma(u,v)\sigma(uv,w).$$

3) A aplicação $\cdot : T\times\Delta \longrightarrow \Delta$ é uma ação $\sigma - twisted$, isto é,

$$u\cdot(v\cdot\delta) = \sigma(u,v)((uv)\cdot\delta)\sigma(u,v)^{-1},$$

para quaisquer $u,v \in T$ e $\delta \in \Delta$. Com efeito, como $v \in T$ e $\delta \in \Delta$, segue de 2.10 que

$$u\cdot(v\cdot\delta) = u(X_v\delta X_v^{-1}) = (X_uX_v)\delta X_v^{-1}X_u^{-1}. \tag{2.15}$$

Segue de 2.9 que $(X_uX_v)\delta X_v^{-1}X_u^{-1} = \sigma(u,v)X_{uv}\delta X_v^{-1}X_u^{-1}$. Daí, segue de 2.15 que

$$u \cdot (v \cdot \delta) = \sigma(u,v)X_{uv}\delta X_v^{-1}X_u^{-1} = \sigma(u,v)X_{uv}\delta X_{uv}^{-1}X_{uv}X_v^{-1}X_u^{-1}. \qquad (2.16)$$

Por fim, utilizando 2.9 e 2.10 em 2.16, temos:

$$u \cdot (v \cdot \delta) = \sigma(u,v)((uv) \cdot \delta)\sigma(u,v)^{-1}.$$

A partir de agora, assumiremos que o corpo $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado e que D tem dimensão finita sobre $\mathbb{F}$. Logo, $\Delta = \mathbb{F}$, assim $X_t\delta = \delta X_t = (t \cdot \delta)X_t$, portanto $\delta = t \cdot \delta$, e a ação $\cdot$ é trivial. Logo, a equação 2.11 pode ser simplificada, isto é,

$$\sigma(u,v)\sigma(uv,w) = \sigma(v,w)\sigma(u,vw),$$

para quaisquer $u, v, w \in T$. Em outras palavras, D é a álgebra de grupo torcida $\mathbb{F}^\sigma T$, onde $\sigma \in Z^2(T, \mathbb{F}^\times)$.

Reescalar os elementos X_t corresponde a trocar σ com um cociclo de cohomologia. De fato, se $X'_t = \lambda(t)X_t$, para alguma aplicação $\lambda : T \longrightarrow \mathbb{F}^\times$, então

$$X'_uX'_v = \lambda(u)X_u\lambda(v)X_v = \lambda(u)\lambda(v)\sigma(u,v)X_{uv} = \sigma(u,v)\lambda(u)\lambda(uv)^{-1}\lambda(v)X'_{uv}.$$

Por outro lado, $X'_uX'_v = \sigma'(u,v)X'_{uv}$ e portanto $\sigma'(u,v) = \sigma(u,v)d\lambda(u,v)$, onde d denota a aplicação co-fronteira. Escreveremos $[\sigma]$ para a classe de σ em $H^2(T, \mathbb{F}^\times)$.

Lema 2.3.1 *Se $D = \bigoplus_{g\in G} D_g$ é uma álgebra G-graduada com divisão, então $T = Supp\, D$ é um subgrupo de G. Além disso, se D tem dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado, então $dim\, D_k = 1$, para qualquer $k \in Supp\, D$.*

Demonstração: Sejam $a, b \in Supp\, D$. Logo, existem d_a e d_b não nulos tais que $d_a \in D_a$ e $d_b \in D_b$. Como D é uma álgebra graduada com divisão, d_a e d_b são invertíveis e além disso não são divisores de zero. Logo, $d_ad_b \neq 0$. Como D é uma álgebra graduada, então $D_aD_b \subseteq D_{ab}$ e assim $D_{ab} \neq 0$, isto é, $ab \in Supp\, D$. Como d_a é não nulo e invertível, existe d_a^{-1} tal que $d_ad_a^{-1} = 1$. Ademais, observe que d_a^{-1} é homogêneo de grau a^{-1}. Portanto, se $a \in Supp\, D$ então $a^{-1} \in Supp\, D$, concluindo assim que $Supp\, D$ é um subgrupo de G.

Como D_e é uma álgebra com divisão, como já vimos anteriormente, de dimensão finita e agora sobre um corpo algebricamente fechado, então $D_e = \mathbb{F}$. Logo, $dim\, D_e = 1$.

Para quaisquer $k \neq e$ e $w \in D_k - \{0\}$, existe w^{-1} homogêneo tal que $w^{-1} \in D_{k^{-1}}$. Seja $z \in D_k - \{0\}$. Logo, $w^{-1}z \in D_e$, isto é, $z = \lambda w$, para algum $\lambda \in \mathbb{F}$ e portanto $dim\, D_k = 1$.

■

Antes de enunciarmos o Teorema 2.3.4, observe as seguintes definições:

Definição 2.3.2 *Uma equivalência de espaços vetoriais graduados $f : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo linear tal que f e f^{-1} são aplicações graduadas.*

Definição 2.3.3 *Sejam*

$$\Gamma : A = \bigoplus_{s \in S} A_s \quad e \quad \Gamma' : B = \bigoplus_{t \in T} B_t$$

duas graduações sobre álgebras, com suportes S e T, respectivamente. Dizemos que Γ e Γ' são equivalentes, se existe uma equivalência de álgebras graduadas $\varphi : A \longrightarrow B$, isto é, um isomorfismo de álgebras que é também uma equivalência de espaços vetoriais graduados. Diremos também que φ é uma equivalência de Γ e Γ'. Fica determinada uma bijeção $\alpha : S \longrightarrow T$ tal que $\varphi(A_s) = B_{\alpha(s)}$, para todo $s \in S$.

Teorema 2.3.4 *Seja D uma álgebra G-graduada de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$. Se D é uma álgebra graduada com divisão com suporte $T \subseteq G$, então D é isomorfa a álgebra de grupo torcida $\mathbb{F}^{\sigma}T$ com a T-graduação canônica, onde T é um subgrupo finito de G e $\sigma : T \times T \longrightarrow \mathbb{F}^{\times}$ é um 2-cociclo em T. Duas álgebras de grupo torcidas, $\mathbb{F}^{\sigma_1}T_1$ e $\mathbb{F}^{\sigma_2}T_2$, são isomorfas como álgebras G-graduadas se, e somente se, $T_1 = T_2$ e $[\sigma_1] = [\sigma_2]$. As álgebras $\mathbb{F}^{\sigma_1}T_1$ e $\mathbb{F}^{\sigma_2}T_2$ são equivalentes se, e somente se, existe um isomorfismo $\alpha : T_1 \longrightarrow T_2$ tal que $[\sigma_1] = [\sigma_2 \circ \alpha]$, onde $(\sigma_2 \circ \alpha)(u, v) := \sigma_2(\alpha(u), \alpha(v))$, com $u, v \in T_1$.*

Demonstração: Observe que os comentários realizados anteriormente demonstram as primeiras afirmações do Teorema 2.3.4, nos resta agora verificar a afirmação sobre a equivalência. Suponha que exista uma equivalência $\psi : \mathbb{F}^{\sigma_1}T_1 \longrightarrow \mathbb{F}^{\sigma_2}T_2$ com a bijeção correspondente dos suportes $\alpha : T_1 \longrightarrow T_2$. Dessa forma, para cada $u \in T_1$ existe $\lambda_u \in \mathbb{F}^{\times}$ tal que $\psi(X_u) = \lambda_u X_{\alpha(u)}$. Daí, para quaisquer $u, v \in T_1$, o elemento $\psi(X_u X_v) = \psi(X_u)\psi(X_v)$ é, por um lado, um múltiplo escalar não nulo de $X_{\alpha(uv)}$, pois

$$\psi(X_u X_v) = \psi(\sigma_1(u, v)X_{uv}) = \sigma_1(u, v)\psi(X_{uv}) = \sigma_1(u, v)\lambda_{uv}X_{\alpha(uv)},$$

por outro lado, temos

$$\psi(X_u)\psi(X_v) = \lambda_u X_{\alpha(u)}\lambda_v X_{\alpha(v)} = \lambda_u\lambda_v X_{\alpha(u)}X_{\alpha(v)} = \lambda_u\lambda_v\sigma_2(\alpha(u), \alpha(v))X_{\alpha(u)\alpha(v)}.$$

Dessa forma, $\alpha(uv) = \alpha(u)\alpha(v)$, consequentemente α é um isomorfismo de grupos e $\sigma_1(u,v) = \sigma_2(\alpha(u),\alpha(v))\lambda_u\lambda_{uv}^{-1}\lambda_v$. Logo, $[\sigma_1] = [\sigma_2 \circ \alpha]$. Reciprocamente, se $\alpha : T_1 \longrightarrow T_2$ é um isomorfismo tal que $[\sigma_1] = [\sigma_2 \circ \alpha]$, então existe uma aplicação $\lambda : T_1 \longrightarrow \mathbb{F}^\times$ tal que $\sigma_2(\alpha(u),\alpha(v)) = \sigma_1(u,v)d\lambda(u,v)$. Defina

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{F}^{\sigma_1}T_1 &\rightarrow \mathbb{F}^{\sigma_2}T_2 \\ X_t &\rightarrow \psi(X_t) = \lambda(t)^{-1}X_{\alpha(t)}, \end{aligned}$$

para todo $t \in T_1$. Observe que a aplicação ψ é equivalência de espaços vetoriais e um isomorfismo de álgebras. ∎

Denotaremos por Γ_0 a graduação canônica sobre $D = \mathbb{F}^\sigma T$. Queremos descrever o grupo $Stab(\Gamma_0)$ de automorfismos da álgebra graduada D e o grupo $Aut(\Gamma_0)$ das auto-equivalências de D. Qualquer automorfismo ψ da álgebra graduada D deve mandar X_t em um múltiplo escalar não nulo de si mesmo e consequentemente a aplicação ψ é dada por $X_t \longrightarrow \lambda(t)X_t$, onde $\lambda : T \longrightarrow \mathbb{F}^\times$ é um homomorfismo de grupos, isto é, um caracter de T. De fato, λ é um homomorfismo de grupos, pois como ψ manda $X_{t_1} \longrightarrow \lambda(t_1)X_{t_1}$ e $X_{t_2} \longrightarrow \lambda(t_2)X_{t_2}$, temos:

$$\psi(X_{t_1})\psi(X_{t_2}) = \lambda(t_1)\lambda(t_2)X_{t_1}X_{t_2} = \lambda(t_1)\lambda(t_2)\sigma(t_1,t_2)X_{t_1t_2}. \tag{2.17}$$

Por outro lado, temos:

$$\psi(X_{t_1}X_{t_2}) = \psi(\sigma(t_1,t_2)X_{t_1t_2}) = \sigma(t_1,t_2)\lambda(t_1t_2)X_{t_1t_2}. \tag{2.18}$$

Como ψ é um automorfismo, segue de 2.17 e 2.18 que $\lambda(t_1)\lambda(t_2) = \lambda(t_1t_2)$.

Observando a demonstração do Teorema 2.3.4, vê-se que qualquer equivalência $\psi : D \longrightarrow D$ deve induzir um automorfismo do grupo T que estabiliza a classe de cohomologia $[\sigma]$ e, por outro lado, qualquer α como no Teorema 2.3.4, determina uma equivalência $\psi : D \longrightarrow D$. Observe que existem muitas equivalências correspondentes a α. Essas equivalências estão em correspondência biunívoca com o conjunto de caracteres de T.

Proposição 2.3.5 *Sejam T um grupo e $\sigma \in Z^2(T,\mathbb{F}^\times)$. Seja $D = \mathbb{F}^\sigma T$ e considere Γ_0 a T-graduação natural sobre D. Então, o $Stab(\Gamma_0)$ é isomorfo ao grupo $Z^1(T,\mathbb{F}^\times)$ de caracteres de T. Além disso, o grupo quociente $Aut(\Gamma_0)/Stab(\Gamma_0)$ é isomorfo ao estabilizador da classe de cohomologia $[\sigma]$ no grupo $Aut(T)$.*

Fixe um grupo finito T. Para a classificação de graduações sobre álgebras de matrizes será importante saber quando existe $\sigma \in Z^2(T, \mathbb{F}^\times)$ tal que $D = \mathbb{F}^\sigma T$ é uma álgebra simples, isto é, quando D for isomorfa a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{F})$, onde $|T| = n^2$ para corresponder a dimensão de $M_n(\mathbb{F})$.

Agora assuma que T é abeliano. Podemos descrever todos $[\sigma] \in H^2(T, \mathbb{F}^\times)$ tal que $D = \mathbb{F}^\sigma T$ é uma álgebra simples. Seja

$$\beta_\sigma(u, v) := \frac{\sigma(u, v)}{\sigma(v, u)},$$

para quaisquer $u, v \in T$. Não é difícil ver que $\beta = \beta_\sigma$ depende somente da classe de cohomologia $[\sigma]$ e que $\beta : T \times T \longrightarrow \mathbb{F}^\times$ é um bicaracter alternado, isto é, β é multiplicativo em cada variável e tem a propriedade $\beta(t, t) = 1$, para todo $t \in T$.

Observe que $X_u X_v = \beta(u, v) X_v X_u$. Iremos mostrar agora que se D é simples, então o centro de D é gerado pela identidade. De fato, considere $M = (m_{ij}) \in Z(D)$. Tome índices i, j tais que $i \neq j$. Note que

$$0 = e_{ii} e_{jj} M = e_{ii} M e_{jj} = m_{ij} e_{ij},$$

logo $m_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Portanto, $M = \sum m_{ii} e_{ii}$. Logo,

$$m_{jj} e_{ij} = e_{ij} M = M e_{ij} = m_{ii} e_{ij},$$

e assim $m_{jj} = m_{ii}$. Portanto, M é gerado pela identidade. Dizemos que β é não degenerado se $\beta(u, t) = 1$, para todo $u \in T$, implica que $t = e$ e $\beta(t, u) = 1$, para todo $u \in T$, implica que $t = e$. Suponha que $\beta(u, t) = 1$, para todo $u \in T$. Dessa forma,

$$X_u X_t = \beta(u, t) X_t X_u = X_t X_u.$$

Logo, $X_t \in Z(D)$ e assim $t = e$, ou seja, β é não degenerado. Observe que se $char\, \mathbb{F} = p > 0$, onde p é um número primo, então $t^p = e$ implica $\beta(u, t) = 1$, para todo $u \in T$. Com efeito, como β é um bicaracter segue que $(\beta(u, t))^p = \beta(u, t^p)$ e portanto, temos:

$$(\beta(u, t))^p = \beta(u, t^p) = \beta(u, e) = 1.$$

Como $char\, \mathbb{F} = p$, então

$$(\beta(u, t))^p = 1 \Longrightarrow (\beta(u, t))^p - 1 = 0 \Longrightarrow (\beta(u, t) - 1)^p = 0 \Longrightarrow \beta(u, t) = 1,$$

para todo $u \in T$. Suponha que $p|\,|T|$. Logo, pelo Teorema de Cauchy, T possui ao menos um elemento de ordem p, digamos $o(t) = p$. Assim, $t^p = e$. Daí, pelo que vimos anteriormente $\beta(u,t) = 1$, para todo $u \in T$ e assim $t = e$, o que é um absurdo, visto que $o(t) = p$, com p primo. Dessa forma, p não divide $|T|$. Por outro lado, se σ é um 2-cociclo tal que $\beta = \beta_\sigma$ é não degenerado, então D é uma álgebra associativa semi-simples(Teorema de Maschke, para maiores detalhes desse resultado consultar [8]) e o $Z(D)$ é gerado pela identidade, assim D é simples.

Apresentaremos agora uma definição que utilizaremos logo a seguir.

Definição 2.3.6 *Sejam T_1 e T_2 subgrupos de T. Diremos que T_1 e T_2 são β-ortogonais se $\beta(x,y) = 1$, para todo $x \in T_1$ e para todo $y \in T_2$.*

Suponha que exista um bicaracter alternado não degenerado β sobre T. Mostraremos agora que existe uma decomposição de T no produto direto de subgrupos cíclicos:

$$T = H_1' \times H_1'' \times \cdots \times H_r' \times H_r'', \tag{2.19}$$

onde $H_i' \times H_i''$ e $H_j' \times H_j''$ são β-ortogonais para $i \neq j$, e H_i' e H_i'' estão em dualidade por β, isto é, não são ortogonais.

Sejam T_1 e T_2 grupos tais que $|T_1| = n$ e $|T_2| = m$. Se $T = T_1 \times T_2$, onde $mdc(n,m) = 1$, então $\beta(t_1,t_2) = 1$ para quaisquer $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$. De fato, como $mdc(n,m) = 1$, então existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $an + bm = 1$. Por outro lado, como β é um bicaracter, temos $(\beta(t_1,t_2))^{an} = (\beta(t_1^n,t_2))^a$ e $(\beta(t_1,t_2))^{bm} = (\beta(t_1,t_2^m))^b$. Segue de β ser bicaracter que $\beta(e,t_2) = 1$ e $\beta(t_1,e) = 1$. Portanto, para quaisquer $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$, temos:

$$(\beta(t_1,t_2))^1 = (\beta(t_1,t_2))^{an+bm} = (\beta(t_1,t_2))^{an}(\beta(t_1,t_2))^{bm} = (\beta(t_1^n,t_2))^a(\beta(t_1,t_2^m))^b = 1.$$

Consequentemente é suficiente considerar o caso de um q-grupo T, onde q é um número primo e $q \neq char\mathbb{F}$. Iremos proceder agora por indução sobre $|T|$. Seja a um elemento de ordem q^m, onde m é maximal. Como β é não degenerado, existe b tal que $\beta(a,b) = \varepsilon$, onde ε é uma q^m-ésima raiz primitiva da unidade. Com efeito, note que $a^{q^{m-1}} \neq 1$, então existe b tal que $\delta = \beta(a^{q^{m-1}}, b) \neq 1$ e por outro lado $\delta^q = 1$. Logo, $o(\delta) = q$. Assim, $\delta = \varepsilon^{q^{m-1}} \neq 1$ e $\varepsilon^{q^m} = 1$ e assim ε é uma q^m-ésima raiz primitiva da unidade. Observe que $(\beta(a,b))^{o(b)} = \beta(a, b^{o(b)}) = \beta(a,e) = 1$. Recorde que $\beta(a,b) = \varepsilon$, onde ε é uma q^m-ésima raiz primitiva da unidade. Portanto, $\varepsilon^{o(b)} = 1$ e dessa forma $q^m |\, o(b)$. Por outro lado, temos $o(b) \leq o(a) = q^m$, onde m é maximal. Assim, $o(b) = q^m$. Além disso, b não pode ser uma potência de a. Caso contrário, $\beta(a,b) = \beta(a,a^m)$ e como β é um bicaracter, temos $\beta(a,a^m) = (\beta(a,a))^m$. Segue do fato de β ser alternado que $\beta(a,a) = 1$. Logo,

$$\beta(a,a^m) = (\beta(a,a))^m = 1^m = 1,$$

o que é um absurdo, pois $\beta(a,b) = \beta(a,a^m) = \varepsilon \neq 1$. Sejam $H' = \langle a \rangle$ e $H'' = \langle b \rangle$. Então H' e H'' estão em dualidade por β. Seja $H = H' \times H''$ e

$$H^{\perp} := \{t \in T \,|\, \beta(u,t) = 1, \forall u \in H\}.$$

Logo, $H^{\perp} \cap H = \{e\}$, pois a restrição de β sobre H é não degenerado. De fato, suponha que $x \in H^{\perp} \cap H$, ou seja, $x \in H$ e $x \in H^{\perp}$. Como a restrição de β sobre H é não degenerado, se $\beta|_H(x,u) = 1$, para todo $u \in H$, então $x = e$. Ora, como $x \in H^{\perp}$, temos $\beta|_H(x,u) = 1$, para todo $u \in H$. Iremos mostrar agora que para qualquer $t \in T$, $\beta(b,t) = \varepsilon^i$, para algum i. Com efeito, segue de β ser um bicaracter alternado que

$$1 = \beta(e,t) = \beta(b^{o(b)},t) = (\beta(b,t))^{o(b)} = (\beta(b,t))^{q^m}$$

Logo, $\beta(b,t)$ é uma raiz q^m-ésima da unidade e assim $\beta(b,t)$ é potência de ε, pois pertence ao grupo cíclico gerado por ε que é o das raízes q^m-ésimas da unidade, ou seja, $\beta(b,t) = \varepsilon^i$ para algum i. Dessa forma,

$$\beta(b,t) = \varepsilon^i = (\beta(a,b))^i = ((\beta(b,a))^{-1})^i = (\beta(b,a))^{-i}.$$

Assim, $\beta(b,t)(\beta(b,a))^i = 1$, ou seja, $\beta(b,t)\beta(b,a^i) = 1$. Logo, $\beta(b,ta^i) = 1$. Analogamente segue que $\beta(a,t) = \varepsilon^j$, para algum j, e consequentemente $\beta(a,tb^{-j}) = 1$. Como $\beta(b,ta^i) = 1$, temos:

$$\beta(b,ta^i)^n = 1^n \Longrightarrow \beta(b^n,ta^i) = 1. \tag{2.20}$$

Por outro lado, como $\beta(a,tb^{-j}) = 1$, temos:

$$\beta(a,tb^{-j})^k = 1^k \Longrightarrow \beta(a^k,tb^{-j}) = 1. \tag{2.21}$$

Ademais, observe que

$$\beta(b^n,b^{-j}) = \beta(b,b^{-j})^n = \beta(b,b)^{-jn} = 1^{-jn} = 1. \tag{2.22}$$

De maneira análoga ao que foi feito em 2.22, concluímos que

$$\beta(a^k, a^i) = 1. \tag{2.23}$$

Segue de 2.20 que $\beta(b^n, ta^i) = 1$ e de 2.22 que $\beta(b^n, b^{-j}) = 1$. Portanto,

$$\beta(b^n, b^{-j})\beta(b^n, ta^i) = 1 \cdot 1 \Longrightarrow \beta(b^n, ta^i b^{-j}) = 1. \tag{2.24}$$

Segue de 2.23 que $\beta(a^k, a^i) = 1$ e de 2.21 que $\beta(a^k, tb^{-j}) = 1$. Assim,

$$\beta(a^k, tb^{-j})\beta(a^k, a^i) = 1 \cdot 1 \Longrightarrow \beta(a^k, tb^{-j}a^i) = 1. \tag{2.25}$$

Multiplicando as equações 2.24 e 2.25, temos:

$$\beta(a^k b^n, ta^i b^{-j}) = 1, \tag{2.26}$$

para qualquer de $u = a^k b^n \in H$. Portanto, concluímos que $ta^i b^{-j} \in H^\perp$. Note que $a^i b^{-j} \in H$ e portanto é o inverso de algum elemento de H, digamos $a^i b^{-j} = u^{-1}$, onde $u \in H$. Assim, definindo $v = tu^{-1}$ temos

$$tu^{-1} = v \in H^\perp \Longrightarrow t = uv,$$

onde $u \in H$ e $v \in H^\perp$. Dessa forma, $T = H \times H^\perp$, onde $H = H' \times H''$, com H' e H'' cíclicos. Ademais, aplicando a hipótese de indução em $H^\perp$ temos que $H^\perp = H_1' \times H_1'' \times \cdots \times H_r' \times H_r''$, onde $H_1', H_1'', \ldots, H_r', H_r''$ são grupos cíclicos, com $H_i' \times H_i''$ e $H_j' \times H_j''$ sendo β-ortogonais para $i \neq j$. Segue da própria definição do conjunto $H^\perp$, que $H_i' \times H_i''$ e $H_j' \times H_j''$ são β-ortogonais para $i \neq j$. Sendo assim, fica estabelecida a existência da decomposição 2.19.

Os cociclos σ tais que β_σ é um bicaracter alternado não degenerado dado e isomorfismos de $\mathbb{F}^\sigma T$ em uma álgebra de matrizes podem ser descritos explicitamente, como faremos a seguir. Denote por $l_i = |H_i'| = |H_i''|$. Sejam $H_i' = \langle a_i \rangle$ e $H_i'' = \langle b_i \rangle$, então $\varepsilon_i := \beta(a_i, b_i)$ é uma l_i-ésima raiz primitiva da unidade, basta usarmos o que já provamos anteriormente, pois $l_i = o(a_i)$ e ainda mais, l_i é a maior ordem de um elemento de H_i'. Além disso, todos os outros valores de β sobre os elementos $a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r$ são 1, visto que $H_1', H_1'', \ldots, H_r', H_r''$ são β-ortogonais. Note que podemos tomar os elementos $X_{a_i} = a_i \in \mathbb{F}^\sigma T$ e $X_{b_i} = b_i \in \mathbb{F}^\sigma T$ de modo que $X_{a_i}^{l_i} = X_{b_i}^{l_i} = 1$, pois $l_i = |H_i'| = |H_i''|$. Então, obtemos um isomorfismo $\mathbb{F}^\sigma T \longrightarrow M_{l_1}(\mathbb{F}) \otimes \cdots \otimes M_{l_r}(\mathbb{F})$ definido por

$$X_{a_i} \mapsto I \otimes \cdots I \otimes X_i \otimes I \otimes \cdots I \quad \text{e} \quad X_{b_i} \mapsto I \otimes \cdots I \otimes Y_i \otimes I \otimes \cdots I, \tag{2.27}$$

onde

$$X_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_i^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

são as matrizes de Pauli generalizadas no i-ésimo fator, $M_{l_i}(\mathbb{F})$. De fato, segue imediatamente da definição desta aplicação que temos um homomorfismo de álgebras. A sobrejetividade segue da graduação de Pauli, pois X_i e Y_i estão na imagem pela própria definição e assim potências, somas e produtos de X_i e Y_i também estarão na imagem. Ademais, como a aplicação já é sobrejetiva e o domínio e contra-domínio tem a mesma dimensão, visto que

$$dim\, \mathbb{F}^{\sigma}T = |T| = |H_1'||H_1''| \cdots |H_r'||H_r''| = l_1^2 \cdots l_r^2 = dim(M_{l_1}(\mathbb{F}) \otimes \cdots \otimes M_{l_r}(\mathbb{F})),$$

concluímos que a aplicação também é injetiva. Dessa forma, podemos resumir o que foi discutido anteriormente com o seguinte teorema:

Teorema 2.3.7 *Sejam T um grupo abeliano finito e $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado. Nessas condições, existe uma graduação sobre a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{F})$ com suporte T fazendo $M_n(\mathbb{F})$ uma álgebra graduada com divisão se, e somente se, a $char\, \mathbb{F}$ não divide n e $T \cong \mathbb{Z}_{l_1}^2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_{l_r}^2$, onde $l_1 \cdots l_r = n$. As classes de isomorfismo dessas graduações estão em correspondência biunívoca com os bicaracteres alternados não degenerados $\beta : T \times T \longrightarrow \mathbb{F}^{\times}$. Todas essas graduações pertencem a uma classe de equivalência.*

Exemplo 2.3.8 *A graduação mencionada no Exemplo 1.2.6 sobre $D = M_2(\mathbb{F})$, onde $char\, \mathbb{F} \neq 2$, faz com que D seja uma álgebra graduada com divisão com $T = \mathbb{Z}_2^2$,*

$$X_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $a = (\bar{1}, \bar{0})$, $b = (\bar{0}, \bar{1})$, e $c = (\bar{1}, \bar{1})$ são elementos não triviais de T. Podemos aplicar o Teorema 2.3.7, assim, $T \cong \mathbb{Z}_2^2$ e neste caso temos $l_1 = 2$ e $r = 1$. Além disso, existe somente um bicaracter alternado não degenerado sobre T :

$$\beta(a,b) = \beta(b,a) = \beta(a,c) = \beta(c,a) = \beta(b,c) = \beta(c,b) = -1,$$

com todos os demais valores iguais a 1, *pois* β *é alternado. Consequentemente, como só existe um bicaracter alternado não degenerado* β, *então só existe uma classe de isomorfismo e assim todas as graduações sobre* $M_2(\mathbb{F})$ *obtidas permutando* a, b *e* c *são isomorfas. Não é difícil ver que, sobre um corpo algebricamente fechado, a álgebra dos quatérnions,*

$$\mathcal{Q} = \mathbb{F}1 \oplus \mathbb{F}\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{F}\boldsymbol{j} \oplus \mathbb{F}\boldsymbol{k} \quad \textit{onde} \quad \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1,$$

é isomorfa a $M_2(\mathbb{F})$. *Observe que a decomposição acima é uma* $\mathbb{Z}_2^2-$*graduação sobre* $\mathcal{Q}$ *se definirmos* $deg\,\boldsymbol{i} = a$, $deg\,\boldsymbol{j} = b$, $deg\,\boldsymbol{k} = c$, *e assim* $\mathcal{Q}$ *com a* $\mathbb{Z}_2^2-$*graduação é uma álgebra graduada com divisão. Como* $\mathcal{Q} \cong M_2(\mathbb{F})$, *transportamos a* $\mathbb{Z}_2^2-$*graduação para* $M_2(\mathbb{F})$. *Assim,* $M_2(\mathbb{F})$ *é uma álgebra graduada com divisão.*

Proposição 2.3.9 *Seja* T *um grupo abeliano finito. Suponha* $\sigma \in Z^2(T, \mathbb{F}^\times)$ *de tal forma que* $D = \mathbb{F}^\sigma T$ *é simples. Seja* Γ_0 *a* T*-graduação natural sobre* D. *Então, a aplicação que manda* $t \in T$ *no automorfismo interno* $X \longmapsto X_t X X_t^{-1}$ *é um isomorfismo entre* T *e* $Stab(\Gamma_0)$. *O grupo quociente* $Aut(\Gamma_0)/Stab(\Gamma_0)$ *é isomorfo a* $Aut(T, \beta_\sigma)$, *onde* $Aut(T, B_\sigma)$ *é o subgrupo de* $Aut(T)$ *dos* $\alpha' s$ *tais que* $\beta(\alpha(u), \alpha(v)) = \beta(u, v)$.

Demonstração: Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : T &\rightarrow Stab(\Gamma_0) \\ t &\rightarrow \varphi(t) = \varphi_t, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi_t : D &\rightarrow D \\ X &\rightarrow \varphi_t(X) = X_t X X_t^{-1}. \end{aligned}$$

Seja $t \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, isto é, $\varphi(t) = \varphi_t = I_d$, onde I_d denota a função identidade de D. Dado $s \in T$, temos $\varphi_t(X_s) = X_s$. Segue de comentários anteriores que $X_t X_s = \beta(t, s) X_s X_t$. Portanto,

$$X_t X_s X_t^{-1} = X_s \Longrightarrow \beta(t, s) X_s X_t X_t^{-1} = X_s \Longrightarrow \beta(t, s) = 1,$$

para todo $s \in T$. Como β é um bicaracter não degenerado, então $t = e$. Logo, φ é injetiva. Pela Proposição 2.3.5, temos $Stab(\Gamma_0) \cong Z^1(T, \mathbb{F}^\times) = \hat{T} \cong T$. Assim, $|Stab(\Gamma_0)| = |T|$, $Stab(\Gamma_0)$ e T são finitos e φ é injetora. Logo, φ é sobrejetiva. É imediato que φ é um homomorfismo. Portanto, φ é um isomorfismo.

Novamente pela Proposição 2.3.5, $Aut(\Gamma_0)/Stab(\Gamma_0)$ é isomorfo ao estabilizador de $[\sigma]$ em $Aut(T)$. Mas $[\sigma]$ é unicamente determinado por β, consequentemente o estabilizador de $[\sigma]$ é $Aut(T, \beta)$. ■

2.4 Classificação de Graduações sobre Álgebra de Matrizes

Nesta seção iremos utilizar resultados das duas últimas seções, para obter uma classificação de graduações de grupo sobre álgebra de matrizes sobre um corpo algebricamente fechado.

Sejam W um espaço vetorial de dimensão n e $W = W_{g_1} \oplus \cdots \oplus W_{g_s}$ uma decomposição em soma direta indexada por alguns elementos de um grupo G, com $k_i = dim\, W_{g_i}$. Essa decomposição induz uma G-graduação sobre a álgebra $R = End(W)$ de maneira usual: $r \in R$ é homogêneo de grau g se $r(W_h) \subseteq W_{gh}$, para todo $h \in G$. Claramente essa graduação é dada pela graduação do Exemplo 1.2.5 com uma base escolhida adequada de matrizes unitárias e_{ij} e a n-upla de elementos do grupo como segue: os primeiros k_1 elementos são iguais a g_1, os seguintes k_2 elementos são iguais a g_2, e assim por diante. Utilizaremos a notação $\kappa = (k_1, \ldots, k_s)$ e $\gamma = (g_1, \ldots, g_s)$. Também utilizaremos $|\kappa| := k_1 + \cdots + k_s$.

Definição 2.4.1 *Dizemos que uma G-graduação sobre $R = M_n(\mathbb{F})$ é elementar se esta graduação for induzida de uma decomposição do espaço vetorial $\mathbb{F}^n$, como descrito acima.*

Observe que, para $n \geq 2$, a componente nula R_e sempre tem dimensão maior ou igual a 1, visto que a unidade já está em R_e. Por outro lado, a graduação dada por (1.2) tem a propriedade que todas as componentes não nulas tem dimensão 1.

Lema 2.4.2 *Seja R uma álgebra de matrizes sobre um corpo algebricamente fechado e considere $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ uma graduação. Então, as seguintes condições são equivalentes:*
1) $dim\, R_g \leq 1$, para todo $g \in G$;
2) $dim\, R_e = 1$;
3) R é uma álgebra graduada com divisão.

Demonstração: 1) $\Longrightarrow$ 2). Suponha que $dim\, R_g \leq 1$, para todo $g \in G$. Logo, $dim\, R_e = 0$ ou $dim\, R_e = 1$. Como a matriz identidade está em R_e, temos $dim\, R_e = 1$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Suponha que R não é graduada com divisão. Daí, algum R_g contém uma matriz X degenerada não nula. Observe que RXR é um ideal bilateral não nulo, pois $X \neq 0$. Como R é simples, então $RXR = R$. Consequentemente, existem g_1, g_2 tais que $0 \neq R_{g_1} X R_{g_2} \subseteq R_e$, visto que existem $Z_1, \ldots, Z_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ matrizes onde $\sum_{i=1}^{n} Y_i X Z_i = 1 \in R_e$. Como R_e consiste de matrizes escalares, pois $dim\, R_e = 1$, e todas as matrizes da forma AXB são degeneradas, pois X é degenerada, temos:

$$AXB = \lambda I \Longrightarrow det(AXB) = det(\lambda I) \Longrightarrow 0 = det(\lambda I) = \lambda^n \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow AXB = 0,$$

para quaisquer $A \in R_{g_1}$ e $B \in R_{g_2}$, o que é um absurdo pelo que vimos anteriormente.

3) $\Longrightarrow$ 1). Suponha que R é uma álgebra graduada com divisão. Sendo assim, pelo Teorema 2.3.4, $R \cong \mathbb{F}^\sigma T$. Se $g \notin Supp\, R$, então $dim\, R_g = 0$. Se $g \in Supp\, R$, como $R \cong \mathbb{F}^\sigma T$, então $dim\, R_g = 1$.

■

Definição 2.4.3 *Dizemos que uma G-graduação sobre $R = M_n(\mathbb{F})$ é uma graduação com divisão, se esta graduação satisfaz as condições do Lema 2.4.2.*

Pelo Corolário 2.2.8, qualquer G-graduação sobre uma álgebra de matrizes R sobre um corpo algebricamente fechado é uma combinação de uma graduação elementar e uma graduação com divisão, no sentido que R é isomorfa, como álgebra G-graduada, a alguma $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$, onde D é uma álgebra de matrizes com uma graduação com divisão. Observe que podemos utilizar de fato o Corolário 2.2.8, pois R é graduada simples e satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais à esquerda graduados, pois R tem dimensão finita.

Combinando o Corolário 2.2.8 com o Teorema 2.3.4, obtemos o seguinte:

Corolário 2.4.4 *Seja G um grupo. Seja R uma álgebra G-graduada de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$. Suponha que R é graduada simples. Então, R é isomorfa a $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$, como uma álgebra G-graduada, onde $D = \mathbb{F}^\sigma T$ para algum subgrupo $T \subset G$ e $\sigma \in Z^2(T, \mathbb{F}^\times)$. Duas álgebras G-graduadas , $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$ e $\mathcal{M}(G, D', \kappa', \gamma')$ são isomorfas se, e somente se, κ e κ' têm o mesmo número de componentes s, existem um elemento $g \in G$ e uma permutação π de símbolos $\{1, \ldots, s\}$ tais que $T' = g^{-1}Tg$, $[\sigma'] = [\sigma^g]$, $k'_i = k_{\pi(i)}$ e $g'_i \in g_{\pi(i)}Tg$, para todo $i = 1, \ldots, s$, onde $\sigma^g(u, v) := \sigma(gug^{-1}, gvg^{-1})$, para quaisquer $u, v \in T'$.*

As álgebras $\mathcal{M}(G, \mathbb{F}^\sigma T, \kappa, \gamma)$ são graduadas simples. De fato, pelo Exemplo 1.2.19, $M_n(D)$ é graduada simples, pois D é graduada com divisão. Logo, sendo V um D-módulo à direita graduado de dimensão finita sobre D, temos $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma) = End_D(V) \cong M_n(D)$, donde concluímos que $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma) = End_D(V)$ são graduadas simples. Porém, as álgebras $\mathcal{M}(G, \mathbb{F}^\sigma T, \kappa, \gamma)$ não são necessariamente simples, visto que $\mathbb{F}^\sigma T$ será uma álgebra simples somente para escolhas especiais de T e σ.

Definição 2.4.5 *Um representante concreto da classe de isomorfismo de graduações correspondente a β, como no Teorema 2.3.7 , pode ser obtido da seguinte maneira: primeiramente, decomponha T como em 2.19 e considere os geradores $a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r$. Então defina uma graduação sobre $M_{l_i}(\mathbb{F})$ declarando que X_i tem grau a_i e Y_i tem grau b_i, onde X_i e Y_i são dados por 2.28 e $\varepsilon_i = \beta(a_i, b_i)$. Então $M_{l_1}(\mathbb{F}) \otimes \cdots \otimes M_{l_r}(\mathbb{F})$ com a graduação do produto tensorial é um representante da classe desejada. Chamaremos qualquer representante obtido deste modo de realização standard.*

Exemplo 2.4.6 *A $\mathbb{Z}_2^2$-graduação sobre $M_2(\mathbb{F})$ no Exemplo 2.3.8 é uma realização standard da classe de isomorfismo correspondente ao único bicaracter alternado não degenerado sobre $\mathbb{Z}_2^2$. Todas as outras realizações standard são obtidas permutando a, b e c. De modo mais geral, sejam $T = \mathbb{Z}_2^{2r} = (\mathbb{Z}_2^2)^r$ e a_i e b_i a base canônica na i-ésima cópia de $\mathbb{Z}_2^2$, defina β pondo $\beta(a_i, b_i) = -1$ e todos os outros valores sobre os geradores iguais a 1. Então $D = M_2(\mathbb{F})^{\otimes r}$ tem uma graduação no produto tensorial por $(\mathbb{Z}_2^2)^r$, a qual é uma realização standard da classe de isomorfismo de graduações sobre $M_{2^r}(\mathbb{F})$ correspondente a β.*

Outra simplificação no caso abeliano é que ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]} = D$. Com efeito, sendo G um grupo abeliano qualquer, temos $g\tau = \tau g$, para quaisquer $g, \tau \in G$, isto é, $g\tau g^{-1} = \tau$. Logo, $D_{g\tau g^{-1}} = D_\tau$. Mas, por definição temos $D_{g\tau g^{-1}} ={}^{[g^{-1}]} D_\tau^{[g]}$. Portanto, ${}^{[g^{-1}]}D_\tau^{[g]} = D_\tau$. Daí, não nos preocuparemos com a ação de g sobre T e σ como no Corolário 2.4.4.

Será conveniente usar o conceito de um *multiset*, isto é, um conjunto munido com uma função a $\{1, 2, \ldots\}$ que atribui a cada elemento sua multiplicidade. Por um elemento de um multiset vamos dizer um elemento do conjunto fundamental. Uma função sobre um multiset é apenas uma função sobre o conjunto fundamental. Dizemos que dois multisets são iguais, se os conjuntos fundamentais são iguais e as multiplicidades são iguais para cada elemento. A cardinalidade $|\Xi|$ de um multiset Ξ é a soma das multiplicidades de todos os elementos.

Definição 2.4.7 *Escreveremos* $\Xi(\kappa, \gamma)$ *para o multiset cujo o conjunto fundamental é* $\{g_1T, \ldots, g_sT\} \subseteq G/T$ *e cuja a função multiplicidade é dada por* $\kappa(g_iT) = k_i$, *para todo* $i = 1, \ldots, s$.

Portanto, $\Xi(\kappa, \gamma) = \Xi(\hat{\kappa}, \hat{\gamma})$ se, e somente se, κ e $\hat{\kappa}$ têm o mesmo número de componentes s e existe uma permutação π dos símbolos $\{1, \ldots, s\}$ tal que $\hat{k}_i = k_{\pi(i)}$ e $\hat{g}_i \equiv g_{\pi(i)}(mod\ T)$, para todo $i = 1, \ldots, s$. Também, $|\Xi(\kappa, \gamma)| = |\kappa|$. A ação de G sobre G/T por translação induz uma ação sobre os multisets em G/T.

Definição 2.4.8 *Seja* D *uma realização standard da álgebra* G*-graduada com divisão com suporte* $T \subseteq G$ *e bicaracter* β. *Seja* $R = \mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$ *e* $n = |\kappa|\sqrt{|T|}$. *Então,* R *pode ser identificada com a álgebra de matrizes* $M_n(\mathbb{F})$ *via produto de Kronecker. Denotaremos a* G*-graduação sobre* $M_n(\mathbb{F})$, *decorrente dessa identificação, por* $\Gamma_M(G, D, \kappa, \gamma)$. *Por abuso de notação, também escreveremos* $\Gamma_M(G, T, \beta, \kappa, \gamma)$, *uma vez que a classe de isomorfismo de* D *é unicamente determinada por* $T \subseteq G$ *e* β.

Teorema 2.4.9 *Sejam* G *um grupo abeliano e* $\mathbb{F}$ *um corpo algebricamente fechado. Seja* Γ *uma* G*-graduação sobre a álgebra de matrizes* $R = M_n(\mathbb{F})$. *Então,* Γ *é isomorfa a alguma* $\Gamma_M(G, T, \beta, \kappa, \gamma)$, *onde* $T \subseteq G$ *é um subgrupo,* $\beta : T \times T \longrightarrow \mathbb{F}^{\times}$ *é um bicaracter alternado não degenerado e* $|\kappa|\sqrt{|T|} = n$. *Duas graduações,* $\Gamma_M(G, T_1, \beta_1, \kappa_1, \gamma_1)$ *e* $\Gamma_M(G, T_2, \beta_2, \kappa_2, \gamma_2)$, *são isomorfas se, e somente se,* $T_1 = T_2$, $\beta_1 = \beta_2$ *e* $\Xi(\kappa_1, \gamma_1) = g\Xi(\kappa_2, \gamma_2)$, *para algum* $g \in G$.

Demonstração: Pelo Corolário 2.2.8, R com a graduação Γ é isomorfa a $\mathcal{M}(G, D, \kappa, \gamma)$, para algum κ, γ e uma álgebra graduada com divisão D. Desconsiderando a graduação, R é isomorfa a $M_k(D)$, onde $k = |\kappa|$. Como R é uma álgebra simples, então $M_k(D)$ é simples e consequentemente D também é simples. Pelo Teorema 2.3.7, como uma álgebra graduada, D é isomorfa a realização standard para único $T \subseteq G$ e β. Por fim, como G é abeliano, a relação de equivalência $(D_1, \kappa_1, \gamma_1) \sim (D_2, \kappa_2, \gamma_2)$ no Corolário 2.2.8 é equivalente a $D_1 \cong D_2$ e $\Xi(\kappa_1, \gamma_1) = g\Xi(\kappa_2, \gamma_2)$, para algum $g \in G$. ■

Observação 2.4.10 *No Teorema 2.4.9, se* n *é um número primo, então só existem duas possibilidades para* T, *isto é,* $T = \{e\}$ *ou* $T \cong \mathbb{Z}_n^2$. *De fato, se* n *é um número primo, temos duas possibilidades: ou* $|\kappa| = n$ *e* $\sqrt{|T|} = 1$ *ou* $|\kappa| = 1$ *e* $\sqrt{|T|} = n$. *No primeiro caso, se* $\sqrt{|T|} = 1$, *temos* $T = \{e\}$. *No segundo caso, se* $\sqrt{|T|} = n$, *então* $|T| = n^2$ *e pelo Teorema 2.3.7, concluímos que* $l_1^2 l_2^2 \cdots l_r^2 = n^2$. *Daí,* $l_1 l_2 \cdots l_r = n$ *e assim* $n = l_1$ *e* $r = 1$. *Portanto, novamente pelo Teorema 2.3.7,* $T \cong \mathbb{Z}_n^2$.

Exemplo 2.4.11 *Considere G-graduações sobre $M_2(\mathbb{F})$. De acordo com o que vimos na Observação 2.4.10, temos duas possibilidades:*

1ª Possibilidade: *$\Gamma_M(G, \{e\}, 1, \kappa, \gamma)$ é determinado pelo multiset $\Xi = \Xi(\kappa, \gamma)$ em G. Neste caso, Ξ tem cardinalidade 2, ou seja, é um par não ordenado $\{g_1, g_2\}$ onde g_1 e g_2 não são necessariamente distintos, pois como $T = \{e\}$ e $\beta = 1$, então $\mathbb{F}^\sigma T = \mathbb{F}$. Daí, como $n = |\kappa|\sqrt{|T|}$, pelo Teorema 2.4.9, temos $|\kappa| = 2$. Como podemos mudar Ξ sem mudar a classe de isomorfismo da graduação, toda informação está contida em $g := g_1 g_2^{-1}$ a qual é determinada a menos de inverso. Consequentemente, defina $\Gamma^1_{M_2}(G, g)$ pondo $deg\, E_{11} = deg\, E_{22} = e$, $deg\, E_{12} = g$ e $deg\, E_{21} = g^{-1}$.*

2ª Possibilidade: *$\Gamma_M(G, T, \beta, \kappa, \gamma)$ com $T \cong \mathbb{Z}_2^2$ existe somente se $char\mathbb{F} \neq 2$. De fato, segue do Teorema 2.3.7 que $char\mathbb{F}$ não divide 2, portanto temos $char\mathbb{F} \neq 2$. Além disso, pelo Exemplo 2.3.8, existe apenas um bicaracter alternado não degenerado β. Por fim, $\Xi(\kappa, \gamma)$ tem cardinalidade 1. Com efeito, pelo Teorema 2.4.9, temos $2 = |\kappa|\sqrt{|T|}$. Dessa forma, ainda nessa possibilidade, teremos dois casos:*

1º Caso: *$|\kappa| = 2$ e $\sqrt{|T|} = 1$, o que não pode ocorrer pois T tem 4 elementos.*

2º Caso: *$|\kappa| = 1$ e $\sqrt{|T|} = 2$. Neste caso, $|T| = 4$, $\Xi(\kappa, \gamma)$ tem cardinalidade 1 e dessa forma não existe repetição, isto é, a cardinalidade não vai interferir.*

Consequentemente, defina $\Gamma^2_{M_2}(G, T)$ pondo $deg\, I = e$, $deg\,(E_{11} - E_{22}) = a$, $deg\,(E_{12} + E_{21}) = b$, $deg\,(E_{12} - E_{21}) = ab$, onde $\{a, b\}$ é uma base do subgrupo $T \subseteq G$. Analogamente ao que foi feito no Exemplo 2.3.8, dá pra verificar que de fato, a menos de sinal, $deg\, I = e$, $deg\,(E_{11} - E_{22}) = a$, $deg\,(E_{12} + E_{21}) = b$, $deg\,(E_{12} - E_{21}) = ab$. (A classe de isomorfismo da graduação não depende da escolha da base, então faremos um abuso de notação omitindo a e b). Em outras palavras, $\Gamma^2_{M_2}(G, T)$ é a G-graduação induzida da $\mathbb{Z}_2^2$-graduação do Exemplo 2.3.8 por um isomorfismo $\mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow T$. Pelo Teorema 2.4.9, qualquer G-graduação sobre $M_2(\mathbb{F})$ é isomorfa a alguma $\Gamma^1_{M_2}(G, g)$ ou $\Gamma^2_{M_2}(G, T)$, porém não as duas. Além disso,

- *$\Gamma^1_{M_2}(G, g)$ é isomorfa a $\Gamma^1_{M_2}(G, g')$ se, e somente se, $g' = g$ ou $g' = g^{-1}$;*
- *$\Gamma^2_{M_2}(G, T)$ é isomorfa a $\Gamma^2_{M_2}(G, T')$ se, e somente se, $T' = T$.*

Outro modo para simplificar a situação vista no Exemplo 2.4.11 é impor restrições sobre o grupo que gradua. Por exemplo, se o subgrupo de torção de G é cíclico, então $T = \{e\}$. De fato, pelo que vimos na Observação 2.4.10, então $T = \{e\}$ ou $T \cong \mathbb{Z}_{l_1}^2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_{l_r}^2$. Suponha que $T \cong \mathbb{Z}_{l_1}^2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_{l_r}^2$. Daí, como T é finito, logo os elementos de T tem ordem finita e assim T está contido no subgrupo de torção de G. Como esse subgrupo de torção de G é cíclico, por hipótese, então T deveria ser cíclico, o que é um absurdo, pois dessa forma $\mathbb{Z}_{l_1}^2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_{l_r}^2$ seria cíclico, o que não ocorre. Logo, $T = \{e\}$. Consequentemente as G-graduações sobre $M_n(\mathbb{F})$, para qualquer n, são classificadas (a menos de isomorfismo) por multisets em G de cardinalidade n (a menos de translação). Isso ocorre porque como $T = \{e\}$, então $n = |\kappa|\sqrt{1} = |\kappa| = k_1 + k_2 + \cdots + k_s$, onde $|\kappa|$ é a cardinalidade do multiset.

Exemplo 2.4.12 *Seja $G = \mathbb{Z}_m$. Então um multiset de cardinalidade n em G pode ser visto como uma m-upla de inteiros não negativos $(k_1, \ldots, k_m)$ com $k_1 + \cdots + k_m = n$. Consequentemente, as $\mathbb{Z}_m$-graduações sobre $M_n(\mathbb{F})$ são classificadas, a menos de isomorfismo, pelas classes de equivalência de tais m-uplas sob permutações cíclicas. Alternativamente, podemos pensar em termos de n-uplas $(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$ de elementos de $\mathbb{Z}_m$, onde $\overline{a_i}$ não são necessariamente distintos. Em outras palavras, quando temos um multiset (uma m-upla) e transladamos esse multiset por um elemento, digamos $\overline{x}$, onde esse $\overline{x}$ é justamente o elemento $g \in G$ do Teorema 2.4.9, o elemento $\overline{x}$ "translada para frente" os elementos de cada entrada da m-upla. Daí, a nova m-upla será obtida pela translação da m-upla anterior x vezes. Por exemplo, se considerarmos a 10-upla $(k_1, \ldots, k_{10})$ e transladarmos por $\overline{1}$, iremos obter a 10-upla $(k_{10}, \ldots, k_9)$. Para não existir redundância devido as permutações e translações, podemos tomar representantes $0 \leq a_i < m$, ordenar a n-upla de modo que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ e definir $b_i = a_i - a_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, n-1$. Consequentemente, as $\mathbb{Z}_m$-graduações sobre $M_n(\mathbb{F})$ são classificadas por $(n-1)$-uplas $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ de inteiros onde $0 \leq b_i < m$.*

Exemplo 2.4.13 *Seja $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Se n é ímpar ou $\mathrm{char}\mathbb{F} = 2$, então $T = \{e\}$ e consequentemente as $\mathbb{Z}_2^2$-graduações sobre $M_n(\mathbb{F})$ são classificadas, a menos de isomorfismo, pelas classes de equivalência de 4-uplas (k_1, k_2, k_3, k_4) de inteiros não negativos com $k_1 + \cdots + k_4 = n$ sob permutações $(12)(34)$, $(13)(24)$ e $(14)(23)$. De fato, note que G é o grupo de Klein e consequentemente $|G| = 4$. Portanto, como T é subgrupo G, então ou $|T| = 1$, ou $|T| = 2$ ou $|T| = 4$. Primeiramente, analisaremos o caso em que n é um número ímpar. Se $|T| = 2$, temos pelo Teorema 2.4.9 que $n = |\kappa|\sqrt{2}$, o que é um absurdo, visto que $|\kappa|$ é um natural diferente de zero. Se $|T| = 4$, novamente pelo Teorema 2.4.9, $n = |\kappa|\sqrt{4} = |\kappa|2$, isto é, n é par, o que é um absurdo pois n é um número ímpar.*

Capítulo 3

Graduações por um Grupo em Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

3.1 Notações e Preliminares

Após Kemer [9] mencionar em seus trabalhos Identidades Graduadas e utilizar desses conceitos para resolver o tão conhecido Problema de Specht, as álgebras graduadas vêm sendo cada vez mais objeto de estudo. Uma questão bem interessante à respeito de graduações em álgebras é classificar todas as graduações possíveis em uma determinada álgebra. Para álgebras associativas simples de Lie e Jordan, a classificação está praticamente completa (olhar o livro [4] para maiores detalhes sobre esse fato). Porém, neste capítulo iremos estudar uma álgebra que não é, em geral, simples, a saber, a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos. Essas álgebras são definidas da seguinte maneira: sendo $n_1, n_2, \ldots, n_t \in \mathbb{N}$, defina $UT(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ como o conjunto das matrizes

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{tt} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

onde cada A_{ij}, para $1 \leq i \leq j \leq t$, é uma matriz $n_i \times n_j$ com entradas no corpo $\mathbb{F}$. Estabeleceremos a notação X_{ij} para o (i,j)-ésimo bloco de $X \in UT(n_1, n_2, \ldots, n_t)$. O radical de Jacobson J de $UT(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ é o conjunto de todos os elementos tais que todos A_{ii} são zero, para $i = 1, 2, \ldots, t$. Observe que as matrizes triangulares superiores são um caso particular de matrizes triangulares superiores em blocos se considerarmos $UT(1, 1, \ldots, 1)$.

Ao longo deste capítulo fixaremos um grupo G com notação multiplicativa e um corpo arbitrário $\mathbb{F}$. Seja $U = UT(n_1, n_2, \ldots, n_t)$. Se B é uma álgebra G-graduada, então podemos fornecer uma G-graduação sobre $U \otimes_{\mathbb{F}} B$ se colocarmos

$$deg(e_{ij} \otimes b) = g_i(deg(b))g_j^{-1}, \tag{3.2}$$

para todo homogêneo $b \in B$. Observe que essa ideia é bem análoga a ideia da Observação 1.2.18. Em [13], Valenti e Zaicev conjecturaram que existe um isomorfismo graduado de toda graduação em U em $UT(n'_1, n'_2, \ldots, n'_t) \otimes M_n(\mathbb{F})$, onde $M_n(\mathbb{F})$ está munida com uma graduação de divisão e $UT(n'_1, n'_2, \ldots, n'_t)$ está munido com uma graduação elementar. Foi provado que essa conjectura, de fato, é válida se o corpo base é algebricamente fechado de característica zero e o grupo é abeliano e finito [14].

Denotaremos por J o radical de Jacobson de $U = UT(n_1, n_2, \ldots, n_t)$. Denotaremos também por $M_{n_i \times n_j}$ o subespaço das matrizes que tem todos os blocos nulos com possivelmente exceção do (i,j)-ésimo bloco. Dessa forma, podemos escrever (como espaços vetoriais) $U = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq t} M_{n_i \times n_j}$. Portanto, utilizando essa notação, temos $J = \bigoplus_{i<j} M_{n_i \times n_j}$. Por fim, iremos definir $M_i = M_{n_i \times n_i}$, para $i = 1, 2, \ldots, t$.

3.2 Resultados Principais

Lema 3.2.1 *Se J é graduado, então $M_1, M_2, \ldots, M_t$ são subespaços graduados, a menos de isomorfismo graduado.*

Demonstração: Não é difícil mostrar que o anulador de um subespaço graduado é ainda graduado. (Esse fato pode ser verificado de forma análoga ao que foi feito no Exemplo 1.3.12, onde $ann_U(J)$ agora é um anulador à direita). Iremos mostrar agora que $R := ann_U(J) = \bigoplus_{j=1}^{t} M_{n_1\times n_j}$. De fato, sendo $B \in \bigoplus_{j=1}^{t} M_{n_1\times n_j}$ temos

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Ademais, dada uma matriz $A \in J$ temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

Por outro lado, seja $B \in ann_U(J)$. Logo, $B \in U$ e $AB = 0$, para qualquer $A \in J$. Nosso objetivo é mostrar que as componentes $M_{n_i\times n_j}$, com $i > 1$, são nulas. Em outras palavras, queremos mostrar que B_{kj}, com $k > 1$, são nulos. Seja $B = (b_{rs})_{n\times n} \in ann_U(J)$, onde $n = n_1 + \cdots + n_k$. Observe que a entrada (p, q) de B_{kj}, com $k > 1$, é $b_{(n_1+\cdots+n_{k-1}+p,\ n_1+\cdots+n_{j-1}+q)}$. Considere $p' = n_1 + \cdots + n_{k-1} + p$ e $q' = n_1 + \cdots n_{j-1} + q$. Como $k > 1$, temos $p' > n_1$. Logo, $e_{1p'} \in J$. Portanto, por um lado temos $e_{1p'}Be_{q'q'} = b_{p'q'}e_{1q'}$. Por outro lado, temos $e_{1p'}Be_{q'q'} = 0$, pois $B \in ann_U(J)$ e $e_{1p'} \in J$. Assim, $b_{p'q'}$ que é a entrada (p, q) de B_{kj}, com $k > 1$, é nula. Logo, $B_{kj} = 0$, com $k > 1$ e assim fica mostrado a igualdade $R = \bigoplus_{j=1}^{t} M_{n_1\times n_j}$. Dessa forma, como $ann_U(J)$ é graduado e pela igualdade demonstrada acima, temos $R = \bigoplus_{j=1}^{t} M_{n_1\times n_j}$ é graduado.

Observe que em uma álgebra associativa com unidade, munida de uma graduação, a unidade é homogênea, como foi visto na Proposição 1.2.2. O mesmo argumento utilizado para provar o que afirmamos anteriormente, poderá ser usado para provar o seguinte: se uma álgebra associativa tem uma unidade à esquerda, então existe uma unidade à esquerda homogênea nessa álgebra. Observe que

$$1_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1\times n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_1, \tag{3.5}$$

ademais 1_1 é uma unidade à esquerda de R. Seja u a componente de grau e de 1_1. Assim, temos que u é uma unidade à esquerda e, dessa forma, temos $u^2 = u$. Consequentemente, u é diagonalizável. De fato, o polinômio minimal de u tem que dividir $x(x-1)$. Assim, o polinômio minimal ou é x, ou $x-1$, ou $x(x-1)$. O minimal não pode ser x, pois u é uma unidade à esquerda. Se o minimal for $x-1$, então $u = 1_U$. Logo, $u = 1_U \in R$, o que é um absurdo. Assim, o minimal de u é $x(x-1)$. Além disso, a forma diagonal de u é exatamente 1_1. Com efeito, como o minimal de u é $x(x-1)$, então os autovalores de u são 1 e 0. A forma diagonal de u é do tipo

$$PuP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

onde $P \in U$ é uma matriz invertível. A questão agora é saber a quantidade de 1's que tem nessa matriz da igualdade 3.6. Mas observe que essa quantidade de 1's é justamente o posto de PuP^{-1} que coincide com o posto de u. Mostremos que o posto de u é exatamente n_1. Como $u \in R = \bigoplus_{j=1}^{t} M_{n_1 \times n_j}$, então o posto de u é menor ou igual a n_1. Lembremos que o posto coincide com a dimensão da imagem do operador u. Tome $k \leq n_1$ e considere

$$v_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

onde o número 1 está na posição k. Note que $ue_{k1} = e_{k1}$, pois $e_{k1} \in M_1 \subseteq R$. Como $ue_{k1} = e_{k1}$, então ao multiplicarmos a primeira linha de u pela primeira coluna de e_{k1} temos zero e assim a primeira entrada de uv_k é zero. Continuando a análise, a k-ésima linha de u multiplicada pela primeira coluna de e_{1k} é 1, visto que $ue_{k1} = e_{k1}$. Logo, a

k-ésima entrada de uv_k é 1. Dessa forma, $uv_k = v_k$. Fazendo $k = 1, 2, \ldots, n_1$, nota-se que existem n_1 vetores L.I na imagem de u. Portanto, n_1 é menor ou igual do que o posto de u e consequentemente o posto de u é exatamente n_1. Como u é diagonalizável e a forma diagonal de u é 1_1, temos $u = P1_1P^{-1}$, isto é, $P^{-1}uP = 1_1$, onde $P \in U = UT(n_1, \ldots, n_t)$. Sejam $U = UT(n_1, \ldots, n_t)$ e $\Gamma : U = \bigoplus_{g \in G} U_g$ a graduação de U. Defina a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (U, \Gamma) & \rightarrow & U \\ & a & \rightarrow & \varphi(a) = P^{-1}aP. \end{array} \tag{3.8}$$

Pelo Exemplo 1.1.16, temos que φ é um automorfismo e assim considerando U com a seguinte graduação

$$\Gamma' : U = \bigoplus_{g \in G} \varphi(U_g),$$

temos que φ é um isomorfismo de álgebras graduadas. Note que $u \in U_e$ (u é homogêneo) e $\varphi(u) = P^{-1}uP = 1_1$. Dessa forma, podemos assumir que 1_1 é homogêneo a menos de isomorfismo graduado.

Ademais, observe que

$$\begin{aligned} 1 - 1_1 &= \begin{bmatrix} I_{n_1 \times n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{n_2 \times n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_{n_t \times n_t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{n_1 \times n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{n_2 \times n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_{n_t \times n_t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{n_2 \times n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_{n_t \times n_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{tt} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{tt} \end{bmatrix} \in U.$$

Note que $(1-1_1)U \cong UT(n_2, n_3, \ldots, n_t)$ como álgebras G-graduadas. De fato, seja $U' = UT(n_2, n_3, \ldots, n_t)$, e observe que $(1-1_1)$ é homogêneo de grau e, daí $(1-1_1)U$ é um subespaço graduado, ou seja, U' é graduado. Seguiremos por indução em t para mostrar que $M_1, \ldots, M_t$ são subespaços graduados. Note que U' está na nossa hipótese de indução. Daí, $M'_1, \ldots, M'_{t-1}$ são subespaços graduados de U'. Podemos dizer que $M_2 = M'_1, \ldots, M_t = M'_{t-1}$, visto que $(1-1_1)U \cong UT(n_2, n_3, \ldots, n_t)$. Dessa forma, nos resta mostrar que M_1 é graduado. Em geral, se $i \leq j$ e 1_i e 1_j são as matrizes identidade de M_i e M_j, respectivamente, então $M_{n_i \times n_j} = 1_i U 1_j$ é um subespaço graduado. Observe que, de fato, 1_i e 1_j são elementos homogêneos, pois M_i e M_j são componentes homogêneas e dessa forma $1_i U 1_j$ é um subespaço graduado, ou seja, $M_{n_i \times n_j} = 1_i U 1_j$ é um subespaço graduado. Assim, em particular, M_1 é um subespaço graduado.

■

Segue do Lema 3.2.1 que os M_i's, com $1 \leq i \leq t$, são subespaços graduados e assim

$$M_i = \bigoplus_{g \in G} (M_i \cap A_g).$$

Observe que os M_i's são álgebras se considerarmos a restrição da operação de U para cada M_i. Logo, podemos definir $M_{i_g} := M_i \cap A_g$ e daí $M_i = \bigoplus_{g \in G} M_{i_g}$, onde $M_{i_g} M_{i_h} \subseteq M_{i_{gh}}$, para quaisquer $g, h \in G$. Portanto, qualquer M_i, com $1 \leq i \leq t$, é uma álgebra graduada se J é graduado. Segue da Observação 1.2.18 que $M_i \cong M_{p_i} \otimes D_i$, com $1 \leq i \leq t$, onde M_{p_i} é uma álgebra de matrizes munida da graduação elementar e D_i é uma álgebra graduada com divisão, onde a graduação em $M_{p_i} \otimes D_i$ é induzida por 3.2. Sabemos que todo automorfismo de uma álgebra de matrizes é interno, isto é, todo automorfismo tem a forma

$$\begin{aligned} \varphi : M_{n_i}(\mathbb{F}) &\rightarrow M_{n_i}(\mathbb{F}) \\ X &\rightarrow \varphi(X) = AXA^{-1}, \end{aligned}$$

onde $A \in U$ é inversível. Consequentemente, podemos encontrar uma matriz invertível A_i tal que

$$A_i M_i A_i^{-1} = M_{p_i} \otimes D_i,$$

visto que $M_i \cong M_{n_i}(\mathbb{F})$ e $M_i \cong M_{p_i} \otimes D_i$. Tomando a matriz diagonal em blocos

$$A' = diag(A_1, \ldots, A_t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_t \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

obtemos um automorfismo de U tal que $M_i = M_{p_i} \otimes D_i$, para todo i. Basta considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow U \\ X &\rightarrow \varphi(X) = A'XA'^{-1} \end{aligned}$$

e observar que $\phi(M_i) := A'M_iA'^{-1} = A_iM_iA_i^{-1} = M_{p_i} \otimes D_i$.

Lema 3.2.2 *Utilizando as notações já estabelecidas anteriormente, se J é graduado, então existe uma álgebra graduada com divisão D, e elementos $g_1, g_2, \ldots, g_t \in G$ tais que $D_i = {}^{[g_i]}D^{[g_i^{-1}]}$. Além disso, $U \cong U' \otimes D$, onde U' é dado com uma G-graduação elementar.*

Demonstração: Para todo $i = 1, 2, \ldots, t$, denote por e_i a unidade da álgebra graduada com divisão D_i e denote $e_{11}^{(i)} \in M_{p_i}$ a matriz elementar com 1 na entrada $(1,1)$ do i-ésimo bloco da matriz, e zero nas demais entradas. Para $i < j$, considere $X = e_ie_{11}^{(i)}Ue_je_{11}^{(j)}$. (aqui $e_ie_{11}^{(i)}$ representa $e_{11} \otimes e_i \in M_{p_i} \otimes D_i = M_i$ e representaremos $e_je_{11}^{(j)}$ de maneira análoga). Note que dado $d \in D_i$, temos:

$$d(e_ie_{11}^{(i)}Ue_je_{11}^{(j)}) = (e_{11} \otimes de_i)U(e_{11} \otimes e_j) = (e_{11}e_{11} \otimes de_i)U(e_{11} \otimes e_j). \tag{3.10}$$

Por outro lado, temos:

$$(e_{11}e_{11} \otimes de_i)U(e_{11} \otimes e_j) = (e_{11} \otimes e_i)(e_{11} \otimes d)U(e_{11} \otimes e_j) = e_i e_{11}^{(i)}(BU)e_j e_{11}^{(j)}, \quad (3.11)$$

onde $B = e_{11} \otimes d \in U$. Logo, de 3.10 e 3.11 segue que

$$d(e_i e_{11}^{(i)} U e_j e_{11}^{(j)}) = e_i e_{11}^{(i)}(BU)e_j e_{11}^{(j)}, \quad (3.12)$$

e, além disso, $BU \subseteq U$. Assim,

$$e_i e_{11}^{(i)}(BU)e_j e_{11}^{(j)} \subseteq X$$

e dessa forma X é um D_i-módulo à esquerda. Analogamente mostra-se que X é um D_j-módulo à direita. Se D_i consiste de matrizes $n_i \times n_i$ e D_j de matrizes $n_j \times n_j$, então X é o espaço das matrizes $n_i \times n_j$. De fato, observe que $dim(D_i) = n_i^2$ e $dim(M_i) = dim(M_{n_i \times n_i}) = n_i^2$. Dessa forma, como $M_i = M_{p_i} \otimes D_i$, temos $dim(M_i) = dim(M_{p_i})dim(D_i)$, isto é, $n_i^2 = dim(M_{p_i})n_i^2$. Daí, $dimM_{p_i} = 1$ e assim $M_i = D_i$. Como $M_i = D_i$, 1_i é a unidade de M_i e e_i é a unidade de D_i, temos $1_i = e_i$. Logo,

$$e_i e_{11}^{(i)} = (e_{11} \otimes e_i) = (e_{11} \otimes 1_i) = (1 \otimes 1_i) = 1_i.$$

De maneira análoga, concluímos que $e_j e_{11}^{(j)} = 1_j$. Assim,

$$X = e_i e_{11}^{(i)} U e_j e_{11}^{(j)} = 1_i U 1_j = M_{n_i \times n_j},$$

ou seja, como havíamos afirmado anteriormente, X é o espaço das matrizes $n_i \times n_j$ e portanto $dim(X) = n_i \cdot n_j$. Observe que o corpo $\mathbb{F} \subseteq D_i$, pois D_i tem unidade visto que D_i é uma álgebra com divisão. Iremos mostrar agora que X tem dimensão finita sobre D_i. Suponha, por absurdo, que X tem uma D_i-base infinita. Tome $s = (n_i \cdot n_j) + 1$ elementos dessa D_i-base. Sejam $x_1, \dots, x_s$ elementos da D_i- base. Fazendo a combinação linear

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_s x_s = 0,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{F}$, observamos que como o corpo $\mathbb{F} \subseteq D_i$, então $\alpha_i \in D_i$, para $i = 1, \dots, s$. Como $x_1, \dots, x_s$ são L.I. em D_i, então $\alpha_i = 0$, para $i = 1, \dots, s$. Como a $dim(X) = s-1$

e encontramos s vetores L.I, chegamos a um absurdo. Logo, X tem uma D_i-base finita, isto é, X como D_i-módulo à esquerda tem dimensão finita. Sendo assim, podemos considerar a dimensão de X sobre D_i por κ_1 e como D_i consiste de matrizes $n_i \times n_i$, então a dimensão de D_i sobre $\mathbb{F}$ é n_i^2. Dessa forma, a dimensão de X sobre $\mathbb{F}$ é $\kappa_1 \cdot n_i^2$. Por outro lado, a dimensão de X sobre $\mathbb{F}$ é $n_i \cdot n_j$. Logo, $n_i \cdot n_j = \kappa_1 \cdot n_i^2$. Analogamente, analisando a álgebra D_j, concluímos que $n_i \cdot n_j = \kappa_2 \cdot n_j^2$, para algum $\kappa_2 \in \mathbb{N}$. Assim, $n_i \cdot n_j = \kappa_1 \cdot n_i^2 = \kappa_2 \cdot n_j^2$, donde concluímos que $n_j = \kappa_1 \cdot n_i$. Assim, $\kappa_1 \cdot n_i^2 = \kappa_2 \cdot (\kappa_1 \cdot n_i)^2$ e portanto $1 = \kappa_2 \cdot \kappa_1$. Daí, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ e assim $n_i = n_j$. Consequentemente, dado um elemento homogêneo $v \in X$ não nulo de grau $h \in G$, temos $X = D_i v = v D_j$, pois como $dim(X) = n_i \cdot n_j$ e $n_i = n_j$, então $dim(X) = n_i^2$. Ademais, não é difícil perceber que $dim(D_i v) = n_i^2$. Portanto, $X = D_i v$. De maneira análoga, concluímos $X = v D_j$. Assim, para qualquer $x \in D_i$, existe $y \in D_j$ tal que $xv = vy$. Daí, $deg(x)h = h(deg(y))$ e assim temos $deg(x) = h(deg(y))h^{-1}$. Defina agora a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T : D_i &\rightarrow D_j \\ x &\rightarrow T(x) = y. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que a aplicação T é linear. Ademais, como $deg(x) = h(deg(y))h^{-1}$, então $h^{-1}deg(x)h = deg(T(x))$. Assim, utilizando a definição da aplicação T e que para qualquer $x \in D_i$, temos:

$$vT(x_1x_2) = x_1x_2v = x_1vT(x_2) = vT(x_1)T(x_2), \tag{3.13}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in D_i$. De 3.13, segue que $v(T(x_1x_2) - T(x_1)T(x_2)) = 0$. Considere $(T(x_1x_2) - T(x_1)T(x_2)) = y$, tal que $y \in D_j$. Daí, $vy = 0$, isto é, $v\left(\sum_{\sigma \in G} y_\sigma\right) = 0$, onde $y_\sigma \in (D_j)_\sigma$. Assim, $vy_\sigma = 0$, para todo $\sigma \in G$. Ademais, suponha $y \neq 0$. Logo, existe $y_{\sigma_0} \neq 0$. Observe que, em particular, $vy_{\sigma_0} = 0$. Dessa forma, concluímos que $v = 0$, o que é um absurdo pois v é um elemento homogêneo não nulo, por hipótese. Portanto, $y = 0$, ou seja, $T(x_1x_2) = T(x_1)T(x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in D_i$, e assim T é um isomorfismo de álgebras entre D_i e D_j. Pelo que vimos anteriormente, a aplicação $T : D_i \longrightarrow {}^{[h]}D_j^{[h^{-1}]}$ é um isomorfismo de álgebras graduadas, para $i < j$, pois dado $x \in (D_i)_\sigma$, como $deg(T(x)) = h^{-1}(deg(x))h$, então $deg(T(x)) = \sigma$ em ${}^{[h]}D_j^{[h^{-1}]}$, visto que $\left({}^{[h]}D_j^{[h^{-1}]}\right)_\sigma = (D_j)_{h^{-1}\sigma h}$. Dessa forma, para cada $i = 1, \ldots, t-1$, existe $g_i \in G$ tal que $D_i \cong {}^{[g_i]}D_t^{[g_i^{-1}]}$. Basta considerarmos agora $D_t = D$. Dessa forma, provamos a primeira parte do Lema, sob a hipótese de que D_i consiste de matrizes $n_i \times n_i$, D_j de matrizes $n_j \times n_j$ e assim X é o espaço de matrizes $n_i \times n_j$. Porém, de forma geral, observe que $n_i^2 = dim(M_i) = dim(M_{p_i} \otimes D_i) = dim(M_{p_i})dim(D_i) = s_i^2 dim(D_i)$, onde $s_i^2 = dim(M_{p_i})$ e, portanto, $dim(D_i)$ é um quadrado perfeito, digamos $dim(D_i) = (n_i')^2$. Analogamente, concluímos que $dim(D_j) = (n_j')^2$. Daí, como $X = e_i e_{11}^{(i)} U e_j e_{11}^{(j)}$, de forma similar ao que foi feito anteriormente, concluímos que X é o espaço das matrizes $(n_i') \times (n_j')$. Sendo assim, recaímos no primeiro caso e podemos repetir todos os argumentos anteriormente utilizados para concluir a primeira parte do Lema.

Considerando todas as matrizes elementares $e_{ij}^{(r)} \in M_{p_r}$ e $e_{mn}^{(s)} \in M_{p_s}$, podemos repetir novamente os argumentos utilizados anteriormente para mostrar que $e_{ij}^{(r)} U e_{mn}^{(s)}$ é um (D_r, D_s)-bimódulo graduado que tem a dimensão de D. Com efeito, já vimos anteriormente que X é um D_i-módulo à esquerda e D_j-módulo à direita. Ademais, observe que $dim(e_{ij}^{(r)} U e_{mn}^{(s)}) = n_r \cdot n_s = n_r^2 = dim(D_r)$, visto que $n_r = n_s$. Segue da primeira parte do Lema que $D_r = {}^{[g_r]}D^{[g_r^{-1}]}$. Daí, $dim(D_r) = dim(D)$, isto é, $n_r^2 = dim(D)$. Portanto,
$dim(e_{ij}^{(r)} U e_{mn}^{(s)}) = dim(D)$. Assim, obtemos $U \cong U' \otimes D$, para alguma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos U' munida de uma graduação elementar.

■

Observação 3.2.3 *Note que para o caso particular onde $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado de característica zero e G um grupo abeliano, J será imediatamente graduado e a classificação de graduações de divisão em álgebras de matrizes é conhecida (para maiores detalhes ver [[4], Capítulo 1]). Consequentemente obtemos novamente o resultado de Valenti e Zaicev [14]. A vantagem do resultado, apresentado anteriormente, é depender apenas do fato de J ser graduado.*

Agora mencionaremos um resultado muito importante que é o seguinte Lema:

Lema 3.2.4 *[[6], Corolário 3.3] Seja A uma álgebra associativa de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ graduada por um grupo qualquer G. Suponha que ou $char\,\mathbb{F} = 0$ ou $char\,\mathbb{F} > dim(A)$. Então o radical de Jacobson $J := J(A)$ é um ideal graduado de A.*

Combinando o Lema 3.2.4 e o Lema 3.2.2, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.5 *Seja G um grupo qualquer. Considere qualquer G-graduação sobre a álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos $A = UT(n_1, \ldots, n_t)$ sobre um* *corpo* $\mathbb{F}$*. Suponha que ou* $char\,\mathbb{F} = 0$ *ou* $char\,\mathbb{F} > dim(A)$*. Então existem uma* G*-graduação sobre* $D = M_n(\mathbb{F})$ *tal que* D *é uma álgebra* G*-graduada com divisão e uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos* $B = UT(n'_1, n'_2, \ldots, n'_t)$ *munida de uma graduação elementar, tal que* $A \cong B \otimes D$*.*

Capítulo 4

Isomorfismos Graduados em Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

Como já mencionamos anteriormente, na introdução do nosso trabalho, o principal objetivo deste capítulo é descrever os isomorfismos graduados de anéis de endomorfismos de flags graduados sobre álgebras graduadas com divisão. A definição de flag graduado será mencionada posteriormente. Como uma consequência, também iremos descrever as classes de isomorfismo de álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, graduadas por um grupo abeliano finito. Alguns dos resultados que serão apresentados neste capítulo serão adaptações de resultados já demonstrados no Capítulo 2, porém agora, daremos enfoque nos anéis de endomorfismos de flags graduados. A seguir, apresentaremos alguns resultados prévios que serão essenciais para o entendimento deste capítulo.

4.1 Notações e preliminares

Ao longo deste capítulo, utilizaremos $\mathbb{F}$ e V para denotar um corpo e um espaço vetorial, respectivamente. Iremos nos referir a módulos à direta graduados sobre uma álgebra graduada com divisão como espaços vetoriais graduados. Sejam D uma álgebra graduada com divisão e V um espaço vetorial graduado sobre D. Denotaremos $End_D V$ o anel de endomorfismos do D-módulo V. Para qualquer $\tau \in G$, o conjunto $(End_D V)_\tau$ de endomorfismos homogêneos de grau τ é um subespaço de $End_D V$, a soma de tais subespaços é direta, e se V tem dimensão finita temos a igualdade $End_D V = \bigoplus_{\tau \in G} (End_D V)_\tau$ (ver [[10], Corolário I.2.11, pág. 10]). Além disso, temos $(End_D V)_\tau (End_D V)_\lambda \subseteq (End_D V)_{\tau\lambda}$. Portanto, essa decomposição é uma graduação pelo grupo G sobre $End_D V$.

Definição 4.1.1 *Sejam D uma álgebra graduada com divisão e V um espaço vetorial graduado sobre D. Um flag graduado sobre V de comprimento r é uma cadeia de D-subespaços graduados $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$, onde $V_0 = 0$ e $V_r = V$.*

Observação 4.1.2 *O conjunto*

$$End_D \mathcal{F} = \{\varphi \in End_D V \mid \varphi(V_i) \subseteq V_i,\ i = 1, \ldots, r\}$$

é uma subálgebra de $End_D V$. Com efeito, sendo $\varphi, \psi \in End_D \mathcal{F}$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos:

$$(\varphi + \lambda\psi)(V_i) \subseteq (\varphi(V_i) + \lambda\psi(V_i)) \subseteq V_i,$$

visto que $\varphi, \psi \in End_D \mathcal{F}$. Logo, $(\varphi + \lambda\psi) \in End_D \mathcal{F}$. Ademais, temos:

$$(\varphi \circ \psi)(V_i) = \varphi(\psi(V_i)) \subseteq V_i,$$

pois $\varphi, \psi \in End_D \mathcal{F}$, e assim $(\varphi \circ \psi) \in End_D \mathcal{F}$.

Na Proposição 4.1.3, mostraremos que $End_D \mathcal{F}$ é uma subálgebra graduada.

Proposição 4.1.3 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre uma álgebra graduada com divisão D. Se $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ é um flag graduado sobre V, então a álgebra $End_D \mathcal{F}$ é uma subálgebra graduada de $End_D V$.*

Demonstração: Para mostrar que $End_D \mathcal{F}$ é uma subálgebra graduada de $End_D V$, iremos provar que $End_D \mathcal{F} = \bigoplus_{\tau \in G} (End_D \mathcal{F} \cap (End_D V)_\tau)$. Como $End_D V$ é uma álgebra graduada, $End_D \mathcal{F} \subset End_D V$ e sendo ϕ um endomorfismo de $\mathcal{F}$ podemos escrever $\psi = \psi_1 + \cdots + \psi_k$, onde $\psi_1, \ldots, \psi_k$ são elementos homogêneos de $End_D V$ de graus dois a dois distintos $\tau_1, \ldots, \tau_k$, respectivamente. Dado $v \in V_i \cap V_g$, temos $\psi(v) = \psi_1(v) + \cdots + \psi_k(v)$. Como $\psi(v) \in V_i$ e V_i é um subespaço graduado, então $\psi_j(v) \in V_i$ para $j = 1, \ldots, k$. De fato, como $\psi_j(v) \in V$ para $1 \leq j \leq k$, então $\psi_j(v)$ é homogêneo e tem grau $\tau_j g$, pois ψ_j tem grau τ_j e v tem grau g. Além disso, para $i \neq j$, temos $deg(\psi_j(v)) \neq deg(\psi_i(v))$. Daí, temos uma soma de elementos homogêneos de graus dois a dois distintos e esta soma está em V_i. Logo, $\psi_j(v) \in V_i$ para $j = 1, \ldots, k$, e assim $\psi_j(V_i \cap V_g) \subseteq V_i$. Como $V_i = \bigoplus_{g \in G}(V_i \cap V_g)$, então

$$\psi_j(V_i) = \psi_j\left(\bigoplus_{g\in G}(V_i \cap V_g)\right) = \sum_{g\in G}\psi_j(V_i \cap V_g) \subseteq \sum_{g\in G} V_i = V_i,$$

para $i = 1, \ldots, r$. Portanto, $\psi_j \in End_D\mathcal{F}$ para $j = 1, \ldots, k$.

■

Definição 4.1.4 *Sejam D e D' álgebras graduadas com divisão e $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$, $\mathcal{F}' : V_0' \subset V_1' \subset \cdots \subset V_r'$ flags graduados de mesmo comprimento sobre os espaços vetoriais V e V' sobre D e D', respectivamente. Um isomorfismo do par $(D, \mathcal{F})$ em $(D', \mathcal{F}')$ é um par (ψ_0, ψ_1), onde $\psi_0 : D \longrightarrow D'$ é um isomorfismo de álgebras graduadas e $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ é um isomorfismo de espaços vetoriais graduados tal que $\psi_1(V_i) = V_i'$, para $i = 0, \ldots, r$ e $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$, para quaisquer $v \in V$ e $d \in D$.*

Lema 4.1.5 *Se $R = End_D\mathcal{F}$ é o anel de endomorfismos de um flag $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ sobre uma álgebra graduada com divisão D, então $End_R V_i = D$, para $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Demonstração: Sejam v e f elementos homogêneos tais que $v \in V_i \setminus V_{i-1}$ e $f \in End_R V_i$. Se v e vf são linearmente independentes sobre D, então existe $r \in R$ tal que $rv = 0$ e $r(vf) \neq 0$, o que é uma contradição, visto que $r(vf) = (rv)f = 0$. Logo, v e vf são linearmente dependentes sobre D. Iremos mostrar que existe $d \in D$ tal que $vf = vd$. Com efeito, como v e vf são linearmente dependentes sobre D, existem $a, b \in D$ com $(a, b) \neq (0, 0)$ tal que $va + (vf)b = 0$. Assim,

$$v\left(\sum_{g\in G} a_g\right) + (vf)\left(\sum_{g\in G} b_g\right) = 0, \tag{4.1}$$

isto é,

$$\sum_{g\in G}(va_g) + \sum_{g\in G}((vf)b_g) = 0.$$

Se $b \neq 0$, existe $g_0 \in G$ tal que $b_{g_0} \neq 0$. Sejam $deg(v) = h$ e $deg(vf) = h\tau$, reindexando os índices, temos:

$$\sum_{g\in G}(va_{\tau g}) + \sum_{g\in G}((vf)b_g) = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{g \in G}(va_{\tau g} + (vf)b_g) = 0.$$

Assim,

$$va_{\tau g} + (vf)b_g = 0,$$

para qualquer $g \in G$. Fazendo $g = g_0$, temos:

$$va_{\tau g_0} = -(vf)b_{g_0}.$$

Logo,

$$v(-a_{\tau g_0})(b_{g_0})^{-1} = vf.$$

Sendo assim, basta considerar $d = (-a_{\tau g_0})(b_{g_0})^{-1}$.

Se $b = 0$, de 4.1 segue que

$$\sum(va_g) = 0,$$

e assim $va_g = 0$, para todo $g \in G$. Ademais, observe que se $b = 0$, necessariamente $a \neq 0$, visto que $(a, b) \neq (0, 0)$. Logo, como $a \neq 0$, existe $g' \in G$ tal que $a_{g'} \neq 0$. Em particular, $va_{g'} = 0$ e como $a_{g'} \neq 0$, concluímos que $v = 0$, o que é um absurdo pois $v \notin V_{i-1}$ porém $0 \in V_{i-1}$. Portanto, só precisamos analisar o caso $b \neq 0$ e isso já foi feito anteriormente.

Dado $w \in V_i$, existe $r \in R$ tal que $rv = w$. De fato, fixado $w \in V_i$, iremos considerar uma D-base de $\mathcal{F}$ contendo v, digamos $\{v\} \cup \{z_\delta\}_{\delta \in \Lambda}$. Defina a aplicação $r : V \longrightarrow V$, dada por $r(x) = wd_x$, onde $x = vd_x + \sum_{\delta \in \Lambda} z_\delta d_{\delta_x}$, com $d_x, d_{\delta_x} \in D$, ou seja, $r\left(vd_x + \sum_{\delta \in \Lambda} z_\delta d_{\delta_x}\right) = wd_x$. Não é difícil ver que r é linear e, além disso, dado $d \in D$, temos $r(xd) = wd_x d = (wd_x)d = r(x)d$. Logo, $r \in End_D V$. Ademais, dado $j \in \{1, \ldots, r\}$, se $j \geq i$, temos $w \in V_i \subseteq V_j$, e daí $w \in V_j$. Assim, se $x \in V_j$, então $r(x) = wd_x \in V_j D \subseteq V_j$, visto que V_j é um D-subespaço. Portanto, $r(x) \in V_j$, ou seja, $r(V_j) \subseteq V_j$. Para o caso em que $j < i$, como $v \notin V_{i-1}$ e $V_j \subseteq V_{i-1}$, então $v \notin V_j$. Logo, se $x \in V_j$, então $d_x = 0$ e portanto $r(x) = wd_x = 0 \in V_j$. Daí, $r(V_j) \subseteq V_j$. Sendo assim, $r \in R = End_D\mathcal{F}$. Além disso, como $v = v.1 + \sum_{\delta \in \Lambda} z_\delta.0$, então $r(v) = wd_v = w.1 = w$. Consequentemente, $wf = (rv)f = r(vd) = wd$. Daí, não é difícil ver que f é homogêneo de grau g, se, e somente se, d é homogêneo de grau g.

■

Na proposição a seguir, mostraremos que um isomorfismo de pares $(D, \mathcal{F}) \longrightarrow (D', \mathcal{F}')$ induz um isomorfismo de $End_D\mathcal{F}$ em $End_{D'}\mathcal{F}'$.

Proposição 4.1.6 *Dado um isomorfismo (ψ_0, ψ_1) de $(D, \mathcal{F})$ em $(D', \mathcal{F}')$, existe um único isomorfismo de álgebras graduadas $\psi : R \longrightarrow R'$, onde $R = End_D\mathcal{F}$, $R' = End_{D'}\mathcal{F}'$, tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R$ e para todo $v \in V$. Dois isomorfismos (ψ_0, ψ_1) e (ψ_0', ψ_1') determinam o mesmo isomorfismo $R \longrightarrow R'$ de álgebras graduadas se, e somente se, existe um homogêneo não nulo $d \in D'_\epsilon$, onde ϵ é o elemento neutro de G, tal que $\psi_0'(x) = d^{-1}\psi_0(x)d$ e $\psi_1'(v) = \psi_1(v)d$.*

Demonstração: Observe que a Proposição 4.1.6 é uma adaptação do Teorema 2.2.5. Nessa proposição, substituímos os conjuntos $End_D(V)$ e $End_{D'}(V')$ por $End_D\mathcal{F}$ e $End_{D'}\mathcal{F}'$, respectivamente. Sendo assim, a prova da primeira parte da Proposição 4.1.6 pode ser realizada utilizando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 2.2.5, com exceção do fato de mostrar que $\psi(r) \in R'$. Dessa forma, considere $v' \in V_i'$. Pela Definição 4.1.4, temos $\psi_1^{-1}(v') \in V_i$, para $i = 1, \ldots, r$. Daí, dado $r \in R$, temos $r(\psi_1^{-1}(v')) \in V_i$, para $i = 1, \ldots, r$. Logo, $\psi_1(r(\psi_1^{-1}(v'))) \in V_i'$, ou seja, $\psi(r)(v') \in V_i'$, para $i = 1, \ldots, r$, ficando assim provado que de fato $\psi(r) \in R'$. A demonstração da segunda parte da Proposição 4.1.6 também é análoga a que foi realizada no Teorema 2.2.5.

■

Definição 4.1.7 *Sejam D e D' álgebras graduadas com divisão, graduadas pelos grupos G e H, respectivamente e sejam V e V' espaços vetoriais graduados sobre D e D', respectivamente. Uma equivalência de (D, V) em (D', V') é um par (ψ_0, ψ_1), onde $\psi_0 : D \to D'$ é uma equivalência de álgebras graduadas e $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ é uma equivalência de espaços vetoriais tal que $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$, para todo $v \in V$ e para todo $d \in D$.*

Observação 4.1.8 *Seja $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ um flag graduado sobre V, então $V_0^{[g]} \subset V_1^{[g]} \subset \cdots \subset V_r^{[g]}$ é um flag graduado sobre $V^{[g]}$, o qual denotaremos por $\mathcal{F}^{[g]}$. Com efeito, observe que $V_0^{[g]}, \ldots, V_r^{[g]}$ são ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$-subespaços, pois V_i para $i = 0, \ldots, r$, são D-subespaços e portanto $V_iD \subseteq V_i$, para $i = 0, \ldots, r$. Ademais, como $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$, então de fato temos a seguinte cadeia $V_0^{[g]} \subset V_1^{[g]} \subset \cdots \subset V_r^{[g]}$. Além disso, como $V_0 = 0$ e $V_r = V$, então $V_0^{[g]} = 0$ e $V_r^{[g]} = V$.*

4.2 Isomorfismos Graduados de Anéis de Endomorfismos de Flags Graduados

Sejam $R = End_D\mathcal{F}$ e $R' = End_{D'}\mathcal{F}'$, onde $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são flags sobre as álgebras graduadas com divisão D e D', respectivamente. Se existe $g \in G$ tal que $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, \mathcal{F}^{[g]})$ é isomorfo a $(D', \mathcal{F}')$, então pela Proposição 4.1.6, R e R' são isomorfos como anéis graduados. Ainda nesta seção, provaremos a recíproca dessa afirmação anterior.

Definição 4.2.1 *Seja $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ um flag graduado em um espaço vetorial graduado V sobre uma álgebra graduada com divisão D. Dizemos que uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V sobre D é uma base de $\mathcal{F}$, se $\{v_1, \ldots, v_{n_i}\}$ é uma base para V_i, onde $n = dim_D V$ e $n_i = dim_D V_i$, para $i = 1, \ldots, r$.*

Lema 4.2.2 *Seja $R = End_D\mathcal{F}$, onde D é uma álgebra graduada com divisão, V um D-módulo à direita graduado e $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V$ é um flag graduado sobre V. Então, os submódulos de V como um R-módulo à esquerda são $V_0, \ldots, V_r$.*

Demonstração: Primeiramente, observe que $V_0, V_1, \ldots, V_r$ são R-submódulos graduados de V, visto que $\varphi(V_i) \subseteq V_i$, para todo $\varphi \in R$ e $i = 1, \ldots, r$. Suponha que W é um R-submódulo graduado de V não nulo e seja p o inteiro que pertence ao conjunto $\{1, \ldots, r\}$ tal que $W \subseteq V_p$ e $W \nsubseteq V_{p-1}$. Dessa forma, sendo $w \in W \backslash V_{p-1}$, existe uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathcal{F}$ tal que $v_{n_{p-1}+1} = w$, onde $n = dim_D V$, $n_{p-1} = dim_D V_{p-1}$. Com efeito, sendo β_1 uma base para V_1, podemos completar a base β_1 de tal forma que iremos conseguir uma nova base, digamos β_2, para o V_2. Iremos continuar esse procedimento, completando base até chegarmos em uma base para o V_{p-1}. Como $W \nsubseteq V_{p-1}$, então w é $L.I$ com os elementos da base de V_{p-1}. Portanto, a união da base de V_{p-1} com $\{w\}$ será um subconjunto $L.I$ de V_p, portanto poderá ser completado até se obter uma base para V_p. Continuando o procedimento, iremos fazer uma base para V_{p+1} e assim sucessivamente até chegarmos a uma base para V e, dessa forma, conseguimos uma base β de $\mathcal{F}$ que cumpre as condições anteriormente mencionadas. Dado $v \in V_p$ e sendo r' o endomorfismo D-linear de V tal que $r'w = v$ e $r'v_i = 0$, se $i \neq n_{p-1} + 1$, então $r' \in R$. Com efeito, basta mostrarmos que $r'(V_i) \subseteq V_i$, para $i = 1, \ldots, r$. Para mostrarmos que $r' \in R$, dividiremos a prova em dois casos. Sendo $x \in V_i$, $n_i = dim_D V_i$, existem $\lambda_i \in D$ tais que $x = \sum_{i=1}^{n_i} v_i \lambda_i$. Assim,

1º Caso ($i \leq p - 1$):

$r'(x) = r'\left(\sum_{i=1}^{n_i} v_i\lambda_i\right) = 0$ e $0 \in V_i$. Portanto, $r'(V_i) \subseteq V_i$.

2º Caso ($i > p-1$):

$r'(x) = r'\left(\sum_{i=1}^{n_i} v_i\lambda_i\right) = r'(v_{n_{p-1}+1})(\lambda_{n_{p-1}+1}) = r'(w)(\lambda_{n_{p-1}+1}) = v(\lambda_{n_{p-1}+1})$,

onde $v(\lambda_{n_{p-1}+1}) \in V_p \subseteq V_i$. Logo, $r'(V_i) \subseteq V_i$.

Dessa forma, $r' \in R$. Como W é um R-submódulo, concluímos que $v = r'w \in W$ e portanto $V_p \subseteq W$.

■

Lema 4.2.3 *Seja $R = End_D\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é um flag sobre a álgebra graduada com divisão D. Se e é um idempotente de R tal que $e(V) = V_1$, então $R_1 = Re$ é um subanel de R, a aplicação $r \mapsto r|_{V_1}$ é um isomorfismo de R_1 em End_DV_1 e $R = R_1 \oplus I_1$, onde $I_1 = R(1-e)$.*

Demonstração: Não é difícil ver que R_1 e I_1 são ideais à esquerda e, dessa forma, em particular R_1 é um subanel. Denotando $i : V_1 \longrightarrow V$ como a aplicação inclusão, a aplicação φ dada por $\varphi(r_1) = ir_1e$ é um homomorfismo injetivo de End_DV_1 em R_1. De fato, para cada $x \in V$, temos $r_2e(x) \in V_1$. Como $e(V) = V_1$, por hipótese, para cada $x \in V$, existe $y_x \in V$ tal que $r_2e(x) = e(y_x)$. Daí, por um lado, temos:

$$\varphi(r_1r_2)(x) = ir_1r_2e(x) = r_1e(y_x).$$

Por outro lado, temos:

$$(\varphi(r_1)\varphi(r_2))(x) = ((ir_1e)(ir_2e))(x) = r_1er_2e(x) = r_1ee(y_x) = r_1e(y_x).$$

Ademais, dado $x \in V$, temos:

$$\varphi(r_1 + r_2)(x) = i(r_1 + r_2)e(x) = ir_1e(x) + ir_2e(x) = (\varphi(r_1) + \varphi(r_2))(x).$$

Logo, $\varphi(r_1r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)$ e $\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$. Além disso, observe que:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{r_1 \in End_D(V_1)\,;\, \varphi(r_1) = 0\},$$

isto é, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{r_1 \in End_D(V_1)\,;\, ir_1e(x) = 0, \forall x \in V\}$. Daí, como $e(V) = V_1$, temos $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{r_1 \in End_D(V_1)\,;\, r_1(v_1) = 0, \forall v_1 \in V_1\} = \{0\}$ e assim temos a injetividade. Além disso, dado $r \in R_1$, a restrição $r|_{V_1}$ de r em V_1 está em End_DV_1 e como

$r \in R_1 = Re$, então $r = r_0 e$, para algum $r_0 \in R$. Logo, $i(r|_{V_1})e = re = (r_0 e)e = r_0 e = r$. Portanto, φ é um isomorfismo de anéis graduados. Para provar que $R = R_1 \oplus I_1$, onde $I_1 = R(1-e)$, basta utilizar o Lema 2.54 em [3].

■

Observação 4.2.4 *Dado $v \in V$ e $r \in R$, o elemento $re(v)$ está em V_1, visto que $R = End_D \mathcal{F} = \{\varphi \in End_D V \mid \varphi(V_i) \subseteq V_i, i = 1, \ldots, r\}$ e $e(v) \in V_1$. Ademais, sendo $v_1 \in V_1$, observe que $v_1 = e(y)$, onde $y \in V$. Logo, $e(y) = e(v_1)$, ou seja, $v_1 = e(v_1)$. Em particular, temos $ere(v) = re(v)$, pois $re(v) \in V_1$. Daí, $ere = re$, para todo $r \in R$. Assim,*

$$(1-e)r(1-e) = (r - er)(1-e) = r - re - er + ere = r - er = (1-e)r.$$

Dessa forma, I_1 também será um ideal à direita, pois pelo Lema 4.2.3, temos $I_1 = R(1-e)$ e portanto, sendo $r(1-e) \in I_1$ e $s \in R$ temos:

$$r(1-e)s = r(1-e)s(1-e),$$

onde $r(1-e)s \in R$. Daí, $r(1-e)s \in I_1$. Ademais, temos $I_1 = ann_R V_1$. De fato, se $r \in ann_R V_1$, então $rv_1 = 0$, para todo $v_1 \in V_1$. Como $e(V) = V_1$, então $re(v) = 0$, para todo $v \in V$. Logo, $re = 0$. Como podemos escrever $r = re + r(1-e)$, temos $r = r(1-e)$, e assim $r \in I_1$. Por outro lado, se $r \in I_1$, então $r = r_0(1-e)$, com $r_0 \in R$, portanto $re = r_0(1-e)e = 0$. De forma análoga ao que foi feito anteriormente, se $re = 0$, então $rv_1 = 0$, para todo $v_1 \in V_1$, ou seja, $r \in ann_R V_1$. Dessa forma, concluímos que $re = 0$ se, e somente se, $r \in I_1$.

Lema 4.2.5 *Seja $\psi : R \longrightarrow R'$ um isomorfismo de álgebras graduadas, onde $R = End_D \mathcal{F}$ e $R' = End_{D'} \mathcal{F}'$ são os anéis de endomorfismos dos flags graduados $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sobre as álgebras graduadas com divisão D e D', respectivamente. Se e é um idempotente não nulo de R tal que $e(V) = V_1$, então $V_1' = \psi(e)(V')$.*

Demonstração: Primeiramente, observe que $\psi(e)(V')$ é um subespaço, pois $\psi(e)$ é linear e $\psi(e)(V')$ é imagem de um espaço vetorial por uma transformação linear. Além disso, dados $d' \in D'$ e $v' \in V'$, temos $\psi(e)(v')d' = \psi(e)(v'd')$, visto que $\psi(e) \in R'$, onde $\psi(e)(v'd') \in \psi(e)(V')$. Assim, $\psi(e)(V')$ é um D'-submódulo de V'. Ademais, $\psi(e)(V')$ também é um R'-submódulo de V', pois dados $r' \in R'$, $v' \in V'$ e como $ere = re$, onde $r = \psi^{-1}(r')$, pela Observação 4.2.4, temos:

$$r'(\psi(e)(v')) = \psi(r)(\psi(e)(v')) = \psi(re)(v') = \psi(ere)(v') = \psi(e)(\psi(re)(v')),$$

onde $\psi(re)(v') \in V'$. Ademais, $\psi(e)(V')$ é um submódulo não nulo, caso contrário, $\psi(e) = 0$, isto é, $e = 0$, visto que ψ é um isomorfismo. Porém, e é não nulo, por hipótese. Como $\psi(e)(V')$ é um R'-submódulo não nulo de V', pelo Lema 4.2.2, $\psi(e)(V')$ pode ser $V'_1, \ldots, V'_r$. Daí, $V'_1 \subseteq \psi(e)(V')$. Seja f' uma projeção não nula de V' em V'_1 e $f = \psi^{-1}(f')$. Não é difícil ver que $f' \in End_{D'}(V')$ e, além disso, $f'(V'_i) \subseteq V'_1 \subseteq V'_i$, para $i = 1, \ldots, r$. Logo, $f' \in R'$. Como $f = \psi^{-1}(f')$, então $\psi(f) = f'$ e sendo $v'_1 \in V'_1$, como $V'_1 \subseteq \psi(e)(V')$, temos $v'_1 = \psi(e)(v')$, isto é, $\psi(e)v'_1 = \psi(e^2)(v') = \psi(e)(v') = v'_1$. Logo, $\psi(e)f' = f'$ e portanto, $\psi(e)\psi(f) = \psi(f)$ e assim $ef = f$. Suponha que $f(V) = 0$. Daí, $f = 0$, ou seja, $\psi^{-1}(f') = 0$ e assim $f' = 0$, o que é um absurdo, pois f' é uma projeção não nula. Então, nesse caso, $0 \neq f(V) = ef(V) \subseteq V_1$ e pelo Lema 4.2.2, como $f(V)$ é um R-submódulo de V, temos $f(V) = V_1 = e(V)$. Observe que f atua como identidade sobre sua imagem, e portanto sobre $e(V)$, assim $f(e(v)) = e(v)$, para todo $v \in V$, logo, $fe = e$. Assim,

$$\psi(e)(V') = \psi(f)\psi(e)(V') \subseteq \psi(f)(V') = \psi(\psi^{-1}(f')(V')) = f'(V') = V'_1.$$

■

Lema 4.2.6 *Sejam $R = End_D\mathcal{F}$ e $R' = End_{D'}\mathcal{F}'$ os anéis de endomorfismos dos flags graduados $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sobre as álgebras graduadas com divisão D e D', respectivamente. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{F}$ e seja e_{ij} o endomorfismo D-linear de V tal que $e_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$. Se $\psi : R \longrightarrow R'$ é um isomorfismo de álgebras graduadas, então $dim_D V = dim_{D'} V'$. Além disso, dado v'_1 não-nulo em $\psi(e_{11})(V)$, existem $v'_2, \ldots, v'_n$ em V' tais que $\beta' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ é uma base para V' e $\psi(e_{ij})(v'_k) = \delta_{jk}v'_i$ para quaisquer i, j tais que $e_{ij} \in R$.*

Demonstração: Não é difícil ver que $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ são idempotentes ortogonais em R tais que $e_{11} + \cdots + e_{nn}$ é a identidade de R. Dessa forma, $V' = \bigoplus_{j=1}^{n} Q'_j$, onde $Q'_j = \psi(e_{jj})(V')$. De fato, observe que

$$\psi(e_{11} + \cdots + e_{nn}) = \psi(e_{11}) + \cdots + \psi(e_{nn}),$$

dessa forma, $\psi(e_{11}) + \cdots + \psi(e_{nn})$ é a identidade de R'. Sendo assim, dado $v' \in V'$, temos

$$v' = \psi(e_{11})(v') + \cdots + \psi(e_{nn})(v'),$$

logo $V' \subseteq \sum_{i=1}^{n} Im\psi(e_{ii})$. A inclusão $\sum_{i=1}^{n} Im\psi(e_{ii}) \subseteq V'$ é imediata, e portanto $V' = \sum_{i=1}^{n} Im\psi(e_{ii})$. Ademais, como ψ é um isomorfismo, então $\psi(e_{11}), \ldots, \psi(e_{nn})$ são idempotentes ortogonais e, consequentemente, cada um deles atua como identidade sobre sua imagem e a composição de dois distintos é zero , logo $\bigoplus_{j=1}^{n} \psi(e_{jj})(V')$ de fato é uma soma direta. Dado $x \in Q'_j$, temos $x = \psi(e_{jj})(v')$, onde $v' \in V'$. Daí, dado $d' \in D'$, temos $xd' = \psi(e_{jj})(v')d'$. Como $\psi(e_{jj}) \in R'$, então

$$xd' = \psi(e_{jj})(v')d' = \psi(e_{jj})(v'd').$$

Note que $\psi(e_{jj})(v'd') \in \psi(e_{jj})(V') = Q'_j$. Portanto, Q'_j é um D'-subespaço não nulo de V' e assim

$$dim_{D'}V' = \sum_{j=1}^{n} dim_{D'}Q'_j \geq n = dim_D V.$$

Analogamente, mostra-se que $dim_D V \geq dim_{D'}V'$, e portanto $dim_{D'}V' = dim_D V$. Assim, $\sum_{j=1}^{n} dim_{D'}Q'_j = n$ e portanto $dim_{D'}Q'_j = 1$, para $j = 1, \ldots, n$. Dado $e_{ij} \in R$, temos:

$$\psi(e_{ij})Q'_k = \psi(e_{ij})\psi(e_{kk})(V') = \psi(e_{ij}e_{kk})(V') = 0,$$

para qualquer $k \neq j$. Se $\psi(e_{ij})Q'_j = 0$, então $\psi(e_{ij})\psi(e_{jj})(V') = 0$ e, dessa forma, $\psi(e_{ij})(V') = 0$, isto é, $\psi(e_{ij}) = 0$, o que é um absurdo. Assim, $\psi(e_{ij})Q'_j \neq 0$. Como $e_{ii}e_{ij} = e_{ij}$, então

$$\psi(e_{ij})Q'_j = \psi(e_{ij})\psi(e_{jj})(V') = \psi(e_{ij})(V') = \psi(e_{ii}e_{ij})(V') = \psi(e_{ii})\psi(e_{ij})(V'),$$

onde $\psi(e_{ij})(V') \subseteq V'$. Logo, $\psi(e_{ij})Q'_j \subseteq Q'_i$, onde $Q'_i = \psi(e_{ii})(V')$. Como Q'_i e Q'_j são D'-módulos de dimensão 1, concluímos que a aplicação $\varphi_{ij} : Q'_j \longrightarrow Q'_i$ dada por $\varphi_{ij}(v') = \psi(e_{ij})v'$ é um isomorfismo de D'-módulos. Com efeito, para quaisquer $v', w' \in Q'_j$ e $d' \in D'$, temos:

$$\varphi_{ij}(v' + w') = \psi(e_{ij})(v' + w') = \psi(e_{ij})(v') + \psi(e_{ij})(w') = \varphi_{ij}(v') + \varphi_{ij}(w')$$

e

$$\varphi_{ij}(v'd') = \psi(e_{ij})(v'd') = \psi(e_{ij})(v')d' = \varphi_{ij}(v')d'.$$

Ademais, como $1 = dim_{D'}Q'_j = dim\mathrm{Ker}(\varphi_{ij}) + dimIm(\varphi_{ij})$, então $dim\mathrm{Ker}(\varphi_{ij}) = 0$ ou $dimIm(\varphi_{ij}) = 0$. Mas vimos anteriormente que $\psi(e_{ij})Q'_j \neq 0$ e, sendo assim,

$dim\mathrm{Ker}(\varphi_{ij}) = 0$, ou seja, φ_{ij} é injetiva. Nesse caso, $dimIm(\varphi_{ij}) = 1$ e φ_{ij} também é sobrejetora, logo φ_{ij} é um isomorfismo. Seja v'_i o elemento único de Q'_i tal que $\psi(e_{1i})(v'_i) = v'_1$, com $i = 2, \ldots, n$. Sendo $v'_i \in Q'_i$, com $i = 1, \ldots, n$, e como vale $\bigoplus_{i=1}^{n} Q'_i$, então $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ é L.I. Como $dim_{D'}V' = dim_D V = n$, temos $\beta' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ é uma base de V'. Para qualquer $e_{ij} \in R$ e $k \neq j$, temos $v'_k = \psi(e_{kk})(v')$, para algum $v' \in V'$, e portanto, $\psi(e_{ij})(v'_k) = \psi(e_{ij})\psi(e_{kk})(v') = \psi(e_{ij}e_{kk})(v') = 0$. Além disso, $e_{1i} \in R$ e

$$\psi(e_{1i})\psi(e_{ij})(v'_j) = \psi(e_{1i}e_{ij})(v'_j) = \psi(e_{1j})(v'_j) = v'_1.$$

Dado $x \in V'$ note que

$$\psi(e_{ij})(x) = \psi(e_{ii})\psi(e_{ij})(x) = \psi(e_{ii})(x'),$$

onde $x' = \psi(e_{ij})(x)$. Logo, $Im\psi(e_{ij}) \subseteq Q'_i$. Assim, $\psi(e_{ij})(v'_j) \in Q'_i$. Como v'_i é o único elemento de Q'_i tal que $\psi(e_{1i})(v'_i) = v'_1$, com $i = 2, \ldots, n$, temos $\psi(e_{ij})(v'_j) = v'_i$. ■

Teorema 4.2.7 *Sejam D, D' álgebras graduadas com divisão, V, V' módulos à direita graduados sobre D e D', respectivamente, e $R = End_D\mathcal{F}$, $R' = End_{D'}\mathcal{F}'$, onde $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$, $\mathcal{F}' : V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_{r'}$ são flags graduados sobre V e V', respectivamente. Se $\psi : R \longrightarrow R'$ é um isomorfismo de álgebras graduadas, então $r = r'$, existem $g \in G$ e um isomorfismo (ψ_0, ψ_1) de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, \mathcal{F}^{[g]})$ em $(D', \mathcal{F}')$ tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$.*

Demonstração: Seja W_1 um subespaço de V tal que $V = V_1 \oplus W_1$ e denote por e a projeção correspondente sobre V_1. Então e é um idempotente de R tal que $e(V) = V_1$. De fato, como $V = V_1 \oplus W_1$, então dado $v \in V$, temos $v = v_1 + w_1$, onde $v_1 \in V_1$ e $w_1 \in W_1$. Daí, $e(v) = e(v_1 + w_1) = v_1$. Assim, $e^2(v) = e(v_1) = v_1$, logo $e^2 = e$. Dessa forma, pelo Lema 4.2.3, temos $R = R_1 \oplus I_1$, onde $R_1 = Re$ e $I_1 = R(1 - e)$. Considere V' como um R-módulo à esquerda com a ação $rv := \psi(r)(v)$. Do Lema 4.2.5, segue que $V'_1 = \psi(e)(V')$ e, assim, $eV' = V'_1$. Da Observação 4.2.4, dado $r \in I_1$, temos $I_1e = 0$, ou seja, $I_1e(V) = 0$. Como $e(V) = V_1$, temos $I_1V_1 = 0$. Analogamente ao que foi feito anteriormente, mostra-se que $I_1V'_1 = 0$. Além disso, note que V_1 e V'_1 são R-submódulos, assim pelo Lema 4.2.2, temos que V_1 e V'_1 são R-módulos simples. Como $I_1V_1 = 0$, então $RV_1 = (R_1 \oplus I_1)V_1 = R_1V_1$. Analogamente para $I_1V'_1 = 0$, temos $RV'_1 = R_1V'_1$. Sendo assim, V_1 e V'_1 são R_1-módulos simples. Da Observação 2.2.1, segue que existem $g \in G$ e um isomorfismo $\psi'_1 : V_1^{[g]} \longrightarrow V'_1$ de R_1-módulos. As igualdades $I_1V_1 = 0$ e

$I_1V_1' = 0$ implicam que ψ_1' é um isomorfismo de R-módulos. Defina $\psi_0 : {}^{[g^{-1}]}D^{[g]} \longrightarrow D'$ como

$$v'\psi_0(d) = \psi_1'((\psi_1')^{-1}(v')d),$$

para $v' \in V'$ e $d \in D$. Portanto, (ψ_0, ψ_1') é um isomorfismo de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, V_1^{[g]})$ em (D', V_1').

Sejam $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para $\mathcal{F}$ e $\beta' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ a base de V' mencionada no Lema 4.2.6 com $v_1' = \psi_1'(v_1)$. Considere $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ a aplicação

$$\psi_1(v_1d_1 + \cdots + v_nd_n) = v_1'\psi_0(d_1) + \cdots + v_n'\psi_0(d_n). \tag{4.2}$$

Observe que (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, V^{[g]})$ em (D', V'). Vamos mostrar agora que um escalar em R pode sair da aplicação ψ_1. Como $e_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$ e $e_{ij}v_k' = \delta_{jk}v_i'$, então dado $e_{ij} \in R$ e $v_k \in \beta$, temos:

$$\psi_1(e_{ij}v_k) = \delta_{jk}\psi_1(v_i) = \delta_{jk}v_i' = e_{ij}v_k' = e_{ij}\psi_1(v_k). \tag{4.3}$$

De fato, para $\delta_{jk} = 0$ não é difícil ver que a Equação 4.3 é válida. Para $\delta_{jk} = 1$, temos:

$$\psi_1(e_{ij}v_k) = \psi_1(\delta_{jk}v_i) = \psi_1(v_i) = v_i' = \delta_{jk}v_i' = e_{ij}v_k' = e_{ij}\psi_1(v_k).$$

Não é difícil ver que $\psi_1(v + w) = \psi_1(v) + \psi_1(w)$, para quaisquer $v, w \in V$. Ademais, dado $v \in V$, podemos escrever $v = \sum(v_id_i)$. Sendo assim, por um lado temos:

$$\psi_1(vd) = \psi_1\left(\left(\sum(v_id_i)\right)d\right) = \psi_1\left(\sum v_i(d_id)\right) = \psi_1\left(\sum(v_if_i)\right) = \sum\left(v_i'\psi_0(f_i)\right),$$

onde $f_i = d_id \in D$ e $d, d_i \in D$. Por outro lado, temos:

$$\psi_1(v)\psi_0(d) = \psi_1\left(\sum(v_id_i)\right)\psi_0(d) = \left(\sum\left(v_i'\psi_0(d_i)\right)\right)\psi_0(d) = \sum\left(v_i'\psi_0(f_i)\right),$$

onde $f_i = d_id \in D$ e $d, d_i \in D$. Logo, $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$, para quaisquer $v \in V$ e $d \in D$. Portanto,

$$\psi_1(e_{ij}v) = e_{ij}\psi_1(v), \tag{4.4}$$

para todo $e_{ij} \in R$ e para todo $v \in V$.

Dado $d \in D$, denote por r_d o endomorfismo D-linear de V tal que $r_d(v_k) = v_kd$, para $k = 1, \ldots, n$. Não é difícil ver que $r_d \in R$, para todo $d \in D$. Temos que

$$r_dv_1' = r_d\psi_1(v_1) = \psi_1(r_dv_1) = \psi_1(v_1d) = v_1'\psi_0(d).$$

Além disso, temos $r_d v'_k = v'_k \psi_0(d)$, para $k = 2, \ldots, n$. De fato, primeiramente observe que para qualquer $d \in D$ e para todo $e_{ij} \in R$, temos $e_{ij} r_d = r_d e_{ij}$, visto que dado $v \in \beta$, temos:

$$e_{ij} r_d(v) = e_{ij}(vd) = e_{ij}(v)d = r_d(e_{ij}v) = r_d e_{ij}(v).$$

Sejam $d'_1, \ldots, d'_n$ elementos homogêneos em D' tais que

$$r_d v'_k = v'_1 d'_1 + \cdots + v'_n d'_n.$$

Note que

$$e_{ii}(r_d v'_k) = e_{ii}\left(\sum_{j=1}^{n} v'_j d'_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (e_{ii} v'_j) d'_j = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} v'_i) d'_j = v'_i d'_i.$$

Daí, se $i \neq k$, então $v'_i d'_i = e_{ii}(r_d v'_k) = r_d e_{ii} v'_k = r_d \delta_{ik} v'_i = 0$, consequentemente $d'_i = 0$. Portanto, $r_d v'_k = v'_k d'_k$. Como $e_{1k} v'_k = \delta_{kk} v'_1 = v'_1$, temos:

$$v'_1 d'_k = e_{1k} v'_k d'_k = e_{1k} r_d v'_k = r_d e_{1k} v'_k = r_d v'_1 = v'_1 \psi_0(d),$$

o que implica que $d'_k = \psi_0(d)$ e assim fica provado o que afirmamos anteriormente que $r_d v'_k = v'_k \psi_0(d)$, para $k = 2, \ldots, n$. Dessa forma,

$$\psi_1(r_d v_k) = \psi_1(v_k d) = v'_k \psi_0(d) = r_d v'_k = r_d \psi_1(v_k)$$

e portanto

$$\psi_1(r_d v) = r_d \psi_1(v), \tag{4.5}$$

para todo $d \in D$ e para todo $v \in V$. Considere $r \in R$ e sejam d_{ij} os elementos de D tais que $rv_k = v_1 d_{1k} + \cdots + v_n d_{nk}$, para $k = 1, \ldots, n$. Então $r = \sum r_{d_{ij}} e_{ij}$, onde a soma é sobre i, j tais que $e_{ij} \in R$. Portanto, R é gerado como um anel pelos e_{ij} que estão em R juntamente com os elementos $\{r_d \mid d \in D\}$. Portanto, 4.4 e 4.5 implicam que $\psi_1(rv) = r\psi_1(v)$, para todo $r \in R$ e para todo $v \in V$. Logo, $\psi_1(V_1) \subset \cdots \subset \psi_1(V_r)$ são R-submódulos de V'. De fato, considere $\psi_1(V_j)$, com $j = 1, \ldots, r$, e tome $\psi_1(v_k)$, onde v_k está na base de V_j, para $j = 1, \ldots, r$. Dado $e_{ij} \in R$, temos:

$$e_{ij} \psi_1(v_k) = \psi_1(e_{ij} v_k) = \psi_1(x),$$

onde $x = e_{ij} v_k \in RV_j \subseteq V_j$, assim $\psi_1(x) \in \psi_1(V_j)$. Analogamente, mostra-se que $\psi_1^{-1}(V'_1) \subset \cdots \subset \psi_1^{-1}(V'_{r'})$ são R-submódulos de V. Pelo Lema 4.2.2, concluímos que $r = r'$ e $\psi_1(V_i) = V'_i$, para $i = 1, \ldots, r$.

■

Seja G um grupo. Dada uma álgebra graduada com divisão D e $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde n é um número natural, denote $V(D, n, \mathbf{g})$ como sendo o D-módulo à direita graduado $\bigoplus_{i=1}^{n} {}^{[g_i]}D$.

Observação 4.2.8 *Os pares* $(D, V(D, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}))$ *e* $(D', V(D', \boldsymbol{n}', \boldsymbol{g}'))$ *são isomorfos se, e somente se,* $D \cong D'$*,* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}'$ *e existem* $h_1, \ldots, h_n \in SuppD$*,* $\sigma \in S_n$ *tais que* $g_i = g'_{\sigma(i)}h_{\sigma(i)}$*, para* $i = 1, \ldots, n$*.*

Dada uma terna $(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$, onde D é uma álgebra com uma graduação com divisão pelo grupo G, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ é uma s-upla de números naturais e $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde $n = m_1 + \cdots + m_s$. Denote por $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ o flag graduado $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_s$, onde $V_0 = 0$ e $V_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} {}^{[g_j]}D$, $n_i = m_1 + \cdots + m_i$, para $i = 1, \ldots, s$. O anel $R = End_D\mathcal{F}$ de endomorfismos desse flag é denotado por $\mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$.

Lema 4.2.9 *Sejam* $\mathcal{F}(D, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{g}) : V_0 \subset \cdots \subset V_s$ *e* $\mathcal{F}(D', \boldsymbol{m}', \boldsymbol{g}') : V'_0 \subset \cdots \subset V'_s$ *flags graduados de mesmo comprimento e seja* $\psi_0 : D \longrightarrow D'$ *um isomorfismo de álgebras graduadas. Existe um isomorfismo* $\psi_1 : V_s \longrightarrow V'_s$ *de espaços vetoriais graduados tal que* (ψ_0, ψ_1) *é um isomorfismo de pares se, e somente se,* $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}'$ *e existem* $h_1, \ldots, h_n \in SuppD$*, onde* $n = n_1 + \cdots + n_s$*, e* $\sigma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_s}$ *tal que* $g_i = g'_{\sigma(i)}h_{\sigma(i)}$*.*

Demonstração: Denote $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ e $\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_s)$. Suponha que existe um isomorfismo de espaços vetoriais graduados $\psi_1 : V_s \longrightarrow V'_s$ tal que (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de pares. Nesse caso, os pares $(D, V_{i+1}/V_i)$ e $(D, V'_{i+1}/V'_i)$ são isomorfos, com $i = 0, \ldots, s-1$. De fato, considere a aplicação $\varphi : V_{i+1}/V_i \longrightarrow V'_{i+1}/V'_i$ dada por $\varphi(\overline{v}) = \overline{\psi_1(v)}$. Essa aplicação está bem definida, pois dados $\overline{w}, \overline{v} \in V_{i+1}/V_i$ tais que $\overline{w} = \overline{v}$, temos $w - v \in V_i$ e como (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de pares, então $\psi_1(V_i) \subseteq V'_i$, logo $\psi_1(w - v) \in V'_i$, isto é, $\overline{\psi_1(w)} = \overline{\psi_1(v)}$. A linearidade de φ é imediata. Além disso, sendo $\overline{v} \in V_{i+1}/V_i$ e $d \in D$, temos:

$$\varphi(\overline{v}d) = \varphi(\overline{vd}) = \overline{\psi_1(vd)} = \overline{\psi_1(v)\psi_0(d)} = \overline{\psi_1(v)}\psi_0(d) = \varphi(\overline{v})\psi_0(d).$$

Seja $\overline{x} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Logo, $\overline{\psi_1(x)} = \overline{0}$ e assim $\psi_1(x) \in V'_i$. Como (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de pares, então $V'_i = \psi_1(V_i)$ e portanto existe $y \in V_i$ tal que $\psi_1(x) = \psi_1(y)$.

Daí, $x = y$, visto que ψ_1 é injetora. Assim, $\overline{x} = \overline{0}$, ou seja, φ é injetiva. Não é difícil ver que φ é sobrejetiva. Por fim, considere $\overline{x} \in (V_{i+1}/V_i)_g = ((V_{i+1})_g + V_i)/V_i = (((V_s)_g \cap V_{i+1}) + V_i)/V_i$. Dessa forma, $\overline{x} = \overline{a}$, onde $a \in (V_{i+1})_g = (V_s)_g \cap V_{i+1}$. Daí, $\varphi(\overline{x}) = \varphi(\overline{a}) = \overline{\psi_1(a)}$. Como $a \in (V_{i+1})_g$, então $\psi_1(a) \in (V'_{i+1})_g$ e, dessa forma, $\overline{\psi_1(a)} = \varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{x}) \in (V'_{i+1}/V'_i)_g$. O espaço vetorial V_{i+1}/V_i tem uma base de elementos homogêneos de graus $g_{n_i+1}, \ldots, g_{n_i+m_{i+1}}$, onde $n_0 = 0$ e $n_i = n_{i-1} + m_i$ para $i = 1, \ldots, s$. Com efeito, se $\{v_1, \ldots, v_{n_s}\}$ é uma base homogênea do flag, então $\{v_1, \ldots, v_{n_{i+1}}\}$ é uma base de V_{i+1}, logo $\{\overline{v_{n_i+1}}, \ldots, \overline{v_{n_{i+1}}}\}$, ou até mesmo $\{\overline{v_{n_i+1}}, \ldots, \overline{v_{n_i+m_{i+1}}}\}$ é base para V_{i+1}/V_i com graus $g_{n_i+1}, g_{n_i+2}, \ldots, g_{n_i+m_{i+1}}$, respectivamente. Analogamente, V'_{i+1}/V'_i tem uma base de elementos homogêneos de graus $g'_{n'_i+1}, \ldots, g'_{n'_i+m'_{i+1}}$. Convencionando que $m_0 = 0$, observe que:

$$(D, \mathbf{m}, s) = \bigoplus_{i=1}^{s} V(D, m_i, g_{m_{i-1}+1}, \ldots, g_{m_{i-1}+m_i}),$$

onde $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ com $n = m_1 + \cdots + m_s$. Dessa forma, $V_1 = V(D, m_1, (g_1, \ldots, g_{m_1}))$ e $V'_1 = V(D', m'_1, (g'_1, \ldots, g'_{m'_1}))$. Como vimos anteriormente, $(V_{i+1}/V_i) \cong (V'_{i+1}/V'_i)$, logo para $i = 0$ temos $V_1 \cong V'_1$ e, dessa forma, $(D, V_1) \cong (D', V'_1)$, ou seja,

$$(D, V(D, m_1, (g_1, \ldots, g_{m_1}))) \cong (D', V(D', m'_1, (g'_1, \ldots, g'_{m'_1}))).$$

Portanto, $m_1 = m'_1$. Esse argumento pode ser repetido e de maneira geral tem-se $m_i = m'_i$. Sendo assim, pela Observação 4.2.8, $m_i = m'_i$, existem m_i elementos que pertencem ao suporte, isto é, existem $h_{n_i+1}, \ldots, h_{n_i+m_i} \in Supp\, D$ e uma permutação σ_i de elementos $\{n_i + 1, \ldots, n_i + m_i\}$ tal que $g_j = g'_{\sigma_i(j)} h_{\sigma_i(j)}$ para todo $j \in \{n_i + 1, \ldots, n_i + m_i\}$. Portanto, $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$, além disso se $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$, então $g_i = g'_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)}$ para $i = 1, \ldots, n$. Para provar a recíproca, considere $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ uma base de $\mathcal{F}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$ de elementos homogêneos com $deg_G v'_i = g'_i$. Sejam $d'_1, \ldots, d'_n$ elementos homogêneos não nulos de graus $h_1, \ldots, h_n$, respectivamente. Sendo $w_i = v'_{\sigma(i)} d'_{\sigma(i)}$, o conjunto $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é uma base de $\mathcal{F}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$ e $deg_G w_i = g_i$ para $i = 1, \ldots, n$. De fato, observe que w_i para $i = 1, \ldots, n$ são elementos homogêneos, são L.I, o conjunto formado por esses $w_i's$ tem n elementos e $w_i \in {}^{[g_i]}D$, para cada $i = 1, \ldots, n$ e

$$deg_G w_i = (degv'_{\sigma(i)})(degd'_{\sigma(i)}) = g'_{\sigma(i)}h_{\sigma(i)} = g_i.$$

Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ de elementos homogêneos de graus $g_1, \ldots, g_n$, respectivamente. Então, a aplicação $\psi_1(v_1d_1 + \cdots + v_nd_n) = w_1\psi_0(d_1) + \cdots + w_n\psi_0(d_n)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais graduados tal que (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de pares. Com efeito, de forma análoga ao que foi feito na aplicação ψ_1 do Teorema 4.2.7, fica estabelecido um isomorfismo entre V_s e V'_s e, nesse caso, como $\psi_1(v_i) = w_i$ onde $deg_G w_i = g_i = degv_i$, com $i = 1, \ldots, n$, temos um isomorfismo de espaços vetoriais graduados. Além disso, $\psi_1(V_i) = V'_i$, para todo $i = 0, \ldots, s$, visto que a base de V_i está sendo levada na base de V'_i. Por fim, a igualdade $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$, para todo $v \in V$ e para todo $d \in D$, pode ser verificada de forma análoga ao que foi feito no Teorema 4.2.7.

$\blacksquare$

Corolário 4.2.10 *As álgebras $\mathcal{A}(D, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{g})$ e $\mathcal{A}(D', \boldsymbol{m}', \boldsymbol{g}')$ são isomorfas se, e somente se, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}'$, existe $g \in G$ tal que ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]} \cong D'$, existem $h_1, \ldots, h_n \in SuppD$ e $\sigma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_s}$ tais que $g'_i = g_{\sigma(i)}h_{\sigma(i)}g$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.2.7, as álgebras $\mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ e $\mathcal{A}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$ são isomorfas se, e somente se, os flags $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ e $\mathcal{F}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$ são do mesmo comprimento e existe $g \in G$ e um isomorfismo (ψ_0, ψ_1) de $(D', \mathcal{F}')$ em $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, \mathcal{F}^{[g]})$. Observe que $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})^{[g]} = \mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{k})$, onde $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_s)$ e $\mathbf{k} = (g_1g, \ldots, g_sg)$. Além disso, $Supp\ {}^{[g^{-1}]}D^{[g]} = g^{-1}(SuppD)g$. Com efeito, dado $\tau \in SuppD$, temos $0 \neq D_\tau = D_{gg^{-1}\tau gg^{-1}} =^{[g^{-1}]} D^{[g]}_{g^{-1}\tau g}$. Logo, $g^{-1}\tau g \in Supp\ {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$. Reciprocamente, dado $\alpha \in Supp\ {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$, temos $0 \neq {}^{[g^{-1}]}D^{[g]}_\alpha = D_{g\alpha g^{-1}}$. Daí, $g\alpha g^{-1} = \tau \in SuppD$ e, dessa forma, $\alpha = g^{-1}\tau g$, onde $\tau \in SuppD$, concluindo assim que $\alpha \in g^{-1}(SuppD)g$. O resultado agora segue do Lema 4.2.9.

$\blacksquare$

A seguir iremos considerar equivalência entre anéis de endomorfismos de flags graduados. Para anéis de endomorfismos de espaços vetoriais temos o seguinte resultado:

Proposição 4.2.11 ([4], Proposição 2.33) *Sejam D e D' álgebras graduadas com divisão e sejam V e V' módulos à direita graduados sobre D e D', respectivamente.*

Se $\psi : R \longrightarrow R'$ é uma equivalência de álgebras graduadas, onde $R = End_D V$, $R' = End_{D'} V'$, então existe uma equivalência de pares (ψ_0, ψ_1) de (D, V) em (D', V') tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R$ e para todo $v \in V$.

Assim como foi feito no Teorema 4.2.7, obtemos o resultado análogo para anéis de endomorfismos de flags graduados.

Corolário 4.2.12 *Sejam D e D' álgebras graduadas com divisão, considere V e V' módulos à direita graduados sobre D e D', respectivamente, e $R = End_D\mathcal{F}$, $R' = End_{D'}\mathcal{F}'$, onde $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são flags graduados sobre V e V', respectivamente. Se $\psi : R \longrightarrow R'$ é uma equivalência de álgebras graduadas, então existe uma equivalência de pares (ψ_0, ψ_1) de $(D, \mathcal{F})$ em $(D', \mathcal{F}')$ tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R$ e para todo $v \in V$.*

Demonstração: Seja e uma projeção de V sobre V_1 e $R_1 = Re$. Pelo Lema 4.2.5, temos que $e' = \psi(e)$ é uma projeção sobre V_1'. Sendo $R_1' = R'e'$, segue do Lema 4.2.3 que $r \mapsto r|_{V_1}$ é um isomorfismo de R_1 em $End_D V_1$ e $r' \mapsto r'|_{V_1'}$ é um isomorfismo de R_1' em $End_D V_1'$. A restrição de ψ a R_1 é uma equivalência de R_1 em R_1', visto que ψ é uma equivalência, por hipótese, e

$$\psi(R_1) = \psi(Re) = \psi(R)\psi(e) = R'e' = R_1'.$$

Consequentemente, pela Proposição 4.2.11, existe uma equivalência de pares (ψ_0, ψ_1) de (D, V_1) em (D', V_1') tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R_1$ e para todo $v \in V_1$. Pelo Lema 4.2.3, temos $R = R_1 \bigoplus I_1$, onde $I_1 = ann_R V_1$. Logo, dado $r \in R$ podemos escrever $r = r_1 + i_1$, onde $r_1 \in R_1$ e $i_1 \in I_1$. Daí, dado $v \in V_1$, temos

$$\psi_1(rv) = \psi_1((r_1+i_1)v) = \psi_1(r_1v) = \psi(r_1)\psi_1(v) = r_1'\psi_1(v) = (r_1'+i_1')\psi_1(v) = \psi(r)\psi_1(v),$$

para todo $r \in R$, com $r_1' \in R_1'$ e $i_1' \in I_1'$. Sejam $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{F}$ e $\beta' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ a base obtida no Lema 4.2.6 com $v_1' = \psi_1(v_1)$. Então, a aplicação $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ dada por $\psi_1(v_1d_1 + \cdots + v_nd_n) = v_1'\psi_0(d_1) + \cdots + v_n'\psi_0(d_n)$ é uma equivalência de espaços vetoriais graduados tal que (ψ_0, ψ_1) é uma equivalência de pares de $(D, \mathcal{F})$ em $(D', \mathcal{F}')$. Segue da demonstração do Teorema 4.2.7 que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R$ e para todo $v \in V$.

■

Como consequência do Corolário 4.2.12 obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.2.13 *Se as álgebras* $\mathcal{A}(D, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{g})$ *e* $\mathcal{A}(D', \boldsymbol{m}', \boldsymbol{h})$ *são equivalentes, então* D *é equivalente a* D', $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}'$, *existe uma bijeção* λ *de* $\{g(Supp\, D) |\, g \in SuppV\}$ *em* $\{g'(Supp\, D') |\, g' \in SuppV'\}$ *e uma permutação* $\sigma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_s}$ *tal que* $h_{\sigma(i)} Supp\, D' = \lambda(g_i Supp\, D)$ *para* $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração: Pelo Corolário 4.2.12, existe uma equivalência de $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ em $\mathcal{F}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$. Seja (ψ_0, ψ_1) uma equivalência de pares. Isso implica que D é equivalente a D', $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$. Dado $g \in (Supp\, V)$, existe um único $g' \in (Supp\, V')$ tal que $\psi_1(V_g) = V'_{g'}$, consequentemente temos a bijeção $g \mapsto g'$. Como $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$, para todo $v \in V$ e para todo $d \in D$, então $g(Supp\, D) = h(Supp\, D)$ se, e somente se, $g'(Supp\, D') = h'(Supp\, D')$. De fato, $g(Supp\, D) = h(Supp\, D)$ se, e somente se, $g = h\tau$, com $\tau \in SuppD$. Sejam $v \in V_h$, $d \in D_\tau$, temos $vd \in V_h D_\tau \subset V_g$. Como $\psi_1(V_g) = V'_{g'}$, então $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d) = h'\tau' \in V'_{g'}$, onde $h' \in V'_{h'}$ e $\tau' \in Supp\, D'$. Logo, $g' = h'\tau'$, onde $\tau' \in Supp\, D'$, isto é, $g'(Supp\, D') = h'(Supp\, D')$. Portanto, $g(Supp\, D) \mapsto g'(Supp\, D')$ é uma bijeção, a qual denotaremos por λ. Com efeito, a boa definição e a injetividade da aplicação λ seguem diretamente desta equivalência $g(Supp\, D) = h(Supp\, D)$ se, e somente se, $g'(Supp\, D') = h'(Supp\, D')$. A sobrejetividade de λ é imediata. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{F}$ de elementos homogêneos de graus $g_1, \ldots, g_n$, respectivamente. Então $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$, onde $v'_i = \psi_1(v_i)$ é uma base de $\mathcal{F}'$ de elementos homogêneos de graus $g'_1, \ldots, g'_n$, respectivamente. Portanto, existe uma permutação $\sigma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_s}$ tal que $\lambda(g_i Supp\, D) = g'_i Supp\, D' = h_{\sigma(i)} Supp\, D'$.

■

4.3 Graduações sobre Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

Seja $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_s)$ uma s-upla de números naturais. Defina indutivamente $n_0 = 0$, $n_i = p_1 + \cdots + p_i$, para $i = 1, \ldots, s$ e denote $P_i = \{n_{i-1}+1, \ldots, n_i\}$, $i = 1, \ldots, s$. Dado $i \in \{1, \ldots, n_s\}$, existe um único $k \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $i \in P_k$, visto que P_i, com $i = 1, \ldots, s$, são dois a dois disjuntos. Se $i \in P_k$ e $j \in P_l$, então a matriz elementar $e_{ij} \in R = UT(p_1, \ldots, p_s)$ se, e somente se, $k \leq l$. O conjunto das matrizes elementares que pertencem a R formam uma base para essa álgebra e iremos nos referir a essa base como base canônica de R.

Definição 4.3.1 *Uma graduação* $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ *pelo grupo* G *sobre a álgebra* $R = UT(p_1, \ldots, p_s)$ *de matrizes triangulares superiores em blocos é uma graduação elementar se toda matriz elementar na base canônica de* R *é um elemento homogêneo.*

Se $R = UT(p_1, \ldots, p_s)$ tem uma graduação elementar, então existe uma n-upla $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ de elementos de G, onde $n = p_1 + \cdots + p_s$, tal que $deg_G e_{ij} = g_i g_j^{-1}$. Reciprocamente, dado uma n-upla $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, denotamos por R_g o subespaço de R gerado pelas matrizes e_{ij} na base canônica de R, onde i, j são tais que $g_i g_j^{-1} = g$. Então $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ é uma graduação elementar sobre R.

Qualquer graduação elementar é isomorfa a álgebra de endomorfismos de um determinado flag sobre um corpo. Em [2], os autores provaram que dois anéis de endomorfismos são isomorfos se, e somente se, os flags graduados são isomorfos a menos de shift. Além disso, os autores determinaram em termos de uplas associadas quando duas graduações elementares são isomorfas. Nessa seção iremos considerar os resultados análogos para graduações arbitrárias sobre álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos.

Definição 4.3.2 *Uma* G*-graduação* $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ *sobre a álgebra* R *é fina, se* $dim R_g \leq 1$, *para todo* $g \in G$.

Seja G um grupo, não necessariamente abeliano, $R = M_n(\mathbb{F})$ com uma graduação elementar induzida por $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ e D uma álgebra graduada por G. O produto tensorial $R \otimes D$ tem uma G-graduação tal que $deg_G(e_{ij} \otimes d) = g_i deg_G d g_j^{-1}$. Se o grupo G é abeliano, o produto tensorial sobre quaisquer duas álgebras G-graduadas S e D tem uma graduação canônica onde $(S \otimes D)_g = \bigoplus_{hk=g} S_h \otimes D_k$. Isso coincide com a graduação anterior se $S = R$ é uma álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{F})$ com uma graduação elementar. O resultado principal de [14] é que se G é um grupo abeliano finito e o corpo $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado de característica zero, então toda graduação sobre uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos é isomorfa, como álgebra graduada, a um produto tensorial de uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos com uma graduação elementar e a álgebra de matrizes completa com uma graduação fina. Mais especificamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.3 ([14], Teorema 3.2) *Sejam G um grupo abeliano finito e $UT(d_1, \dots, d_m)$ uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$ de característica zero. Então existe uma decomposição $d_1 = tp_1, \dots, d_m = tp_m$, um subgrupo $H \subset G$ e uma n-upla $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$, onde $n = p_1 + \cdots + p_m$ tal que $UT(d_1, \dots, d_m)$ é isomorfa a $M_t(\mathbb{F}) \otimes UT(p_1, \dots, p_m)$ como uma álgebra G-graduada onde $M_t(\mathbb{F})$ é uma álgebra H-graduada com uma graduação fina com suporte H e $UT(p_1, \dots, p_m)$ tem uma graduação elementar definida por $(g_1, \dots, g_n)$.*

Desde que $\mathbb{F}$ seja algebricamente fechado, pelo Lema 2.4.2 temos que uma graduação fina sobre $M_t(\mathbb{F})$ é uma graduação com divisão. Na próxima proposição, provaremos que a álgebra $M_t(\mathbb{F}) \otimes UT(p_1, \dots, p_m)$ mencionada no Teorema 4.3.3 é isomorfa ao anel de endomorfismos de um flag sobre $D = M_t(\mathbb{F})$.

Proposição 4.3.4 *Sejam G um grupo, D uma álgebra graduada com divisão, $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_s)$ uma s-upla de números naturais e $\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_n)$ uma n-upla de elementos de G, onde $n = p_1 + \cdots + p_s$. A álgebra $UT(p_1, \dots, p_s) \otimes_{\mathbb{F}} D$ com a graduação tal que $deg_G e_{ij} \otimes d = g_i (deg_G d) g_j^{-1}$ é isomorfa a álgebra $\mathcal{A}(D, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{g})$.*

Demonstração: Seja $n = p_1 + \cdots + p_s$. Considere em $M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} D$ a graduação tal que $deg_G e_{ij} \otimes d = g_i (deg_G d) g_j^{-1}$. A álgebra $UT(p_1, \dots, p_s) \otimes_{\mathbb{F}} D$ é uma subálgebra homogênea de $M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} D$. Observe que $\mathcal{A}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ é uma subálgebra homogênea de $End_D V$, onde $V = V(D, n, \mathbf{g})$. Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{F}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ de elementos homogêneos tais que $deg_G v_i = g_i$. Denote por $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} D \longrightarrow End_D V$ o isomorfismo dado por

$$\varphi((\lambda_{ij}) \otimes d) v_k = \sum_i v_i (\lambda_{ik} d), \ \ k = 1, \dots, n.$$

Denotaremos por e_{ij} o elemento de $End_D V$ tal que $e_{ij} v_k = \delta_{jk} v_i$ para $1 \leq i, j, k \leq n$. Dado $d \in D$, denotaremos por r_d o elemento de $End_D V$ tal que $r_d v_k = v_k d$ para $k = 1, \dots, n$. Um endomorfismo $r \in End_D V$ é determinado pelas igualdades $r v_j = \sum_i v_i d_{ij}$, onde $d_{ij} \in D$, $j = 1, \dots, n$. Temos $r = \displaystyle\sum_{ij} e_{ij} r_{d_{ij}}$, além disso o elemento r está em $\mathcal{F}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ se, e somente se, $d_{ij} = 0$ sempre que i e j são tais que $i \in P_k$, $j \in P_l$ e $k > l$. Dessa forma, $\mathcal{F}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ é gerado pelos elementos $\{e_{ij} |\ i \in P_k, j \in P_l, 1 \leq k \leq l \leq s\}$ juntamente com os elementos $\{r_d |\ d \in D\}$. Como $\varphi(e_{ij} \otimes d) = e_{ij} r_d$, então a álgebra $UT(p_1, \dots, p_s) \otimes_{\mathbb{F}} D$ é isomorfa a álgebra $\mathcal{A}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$.

■

Corolário 4.3.5 *Seja G um grupo abeliano. Denote por S e S' as álgebras $M_t(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} UT(p_1, \dots, p_m)$ e $M_{t'}(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} UT(p'_1, \dots, p'_m)$, respectivamente, onde $M_t(\mathbb{F})$, $M_{t'}(\mathbb{F})$ são álgebras com uma G-graduação fina e $UT(p_1, \dots, p_m)$, $UT(p'_1, \dots, p'_m)$ tem uma graduação elementar definida pelas u-plas $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g'}$ de elementos de G, respectivamente. As álgebras S e S' são isomorfas se, e somente se, $M_t(\mathbb{F}) \cong M_{t'}(\mathbb{F})$, $(p_1, \dots, p_m) = (p'_1, \dots, p'_m)$ e existem $g \in G$, $h_1, \dots, h_n \in Supp\, M_t$ e $\sigma \in S_{p_1} \times \dots \times S_{p_m}$ tais que $g'_i = g_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)} g$ para $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração: Pela Proposição 4.3.4 temos que $S \cong \mathcal{A}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$, onde $D = M_t(\mathbb{F})$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ e $S' \cong \mathcal{A}(D', \mathbf{p}', \mathbf{g}')$, onde $D' = M_{t'}(\mathbb{F})$, $\mathbf{p}' = (p'_1, \dots, p'_m)$. Como o grupo é abeliano temos ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]} = D$ para qualquer $g \in G$, logo o resultado segue do Corolário 4.2.10

■

Observação 4.3.6 *Se o corpo é algebricamente fechado de característica zero, então segue do Teorema 4.3.3 que qualquer graduação por um grupo abeliano finito na álgebra $UT(d_1, \dots, d_m)$ é isomorfa a álgebra $M_t(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} UT(p_1, \dots, p_m)$ graduada como no Corolário 4.3.5. Neste caso, o Corolário 4.3.5 nos permite determinar se duas graduações sobre álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos são isomorfas.*

A recíproca do Corolário 4.2.12 não é válida em geral. Provamos que equivalência de graduações diferenciam graduações elementares e não elementares.

Corolário 4.3.7 *Sejam $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero e G um grupo abeliano finito. Sejam $S = UT(p_1, \dots, p_m)$ uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos com uma graduação elementar pelo grupo G definida pela upla $\boldsymbol{g}$ e $S' = UT(p'_1, \dots, p'_m)$ graduada pelo grupo H respectivamente. As álgebras S e S' são equivalentes se, e somente se, S' tem uma graduação elementar $(p_1, \dots, p_m) = (p'_1, \dots, p'_m)$ e existe uma bijeção λ de $\{g_1, \dots, g_n\}$ em $\{h_1, \dots, h_n\}$ tal que a igualdade $\lambda(g_i)\lambda(g_j)^{-1} = \lambda(g_k)\lambda(g_l)^{-1}$ é válida sempre que $g_i g_j^{-1} = g_k g_l^{-1}$ e uma permutação $\sigma \in S_{p_1} \times \dots \times S_{p_m}$ tal que $h_{\sigma(i)} = \lambda(g_i)$ para $i = 1, \dots, n$, onde $h_i = (deg_H e_{1i})^{-1}$.*

Demonstração: Se S' é equivalente a S, então pelo Corolário 4.2.13 e pelo Teorema 4.3.3, S' tem uma graduação elementar. Observe que $(h_1, \dots, h_n)$, onde $h_i = (deg_H e_{1i})^{-1}$, induz a graduação elementar em S'. A existência de λ e σ também segue do Corolário 4.2.13. Para provar a recíproca, note que $S \cong \mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ e $S' \cong \mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbf{p}, \mathbf{h})$.

Sejam $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a base canônica de $\mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ e $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ a base de $\mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbf{p}, \mathbf{h})$, onde $deg_H v'_i = \lambda(g_i)$. A aplicação linear ψ_1 tal que $\psi_1(v_i) = v'_i$ é uma equivalência de espaços vetoriais. Seja $\psi : \mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbf{p}, \mathbf{g}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbf{p}, \mathbf{h})$ o homomorfismo de álgebras tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in \mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ e para todo $v \in V$. Então $\psi(e_{ij})$ é homogêneo de grau $\lambda(g_i)\lambda(g_j)^{-1}$. Isso é uma equivalência de álgebras porque $\lambda(g_i)\lambda(g_j)^{-1} = \lambda(g_k)\lambda(g_l)^{-1}$ sempre que $g_i g_j^{-1} = g_k g_l^{-1}$.

■

Bibliografia

[1] Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, ix+128.

[2] Bărăscu, M. and Dăscălescu, S., *Good gradings on upper block triangular matrix algebras*, Comm. Algebra, 41, 2013, 11, 4290–4298.

[3] Brešar, Matej, *Introduction to noncommutative algebra*, Universitext, Springer, Cham, 2014, xxxviii+199.

[4] Elduque, Alberto and Kochetov, Mikhail, *Gradings on simple Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, 189, American Mathematical Society, Providence, RI; Atlantic Association for Research in the Mathematical Sciences (AARMS), Halifax, NS, 2013, xiv+336.

[5] Garcia, A. and Lequain Y., *Elementos de álgebra*, 6ª edição, IMPA, 2018.

[6] Gordienko, A. S., *Co-stability of radicals and its applications to PI-theory*, Algebra Colloq., 23, 2016, 3, 481–492.

[7] Jacobson, Nathan, *Basic algebra. II*, Second, W. H. Freeman and Company, New York, 1989, xviii+686.

[8] Karpilovsky, Gregory, *The algebraic structure of crossed products*, North-Holland Mathematics Studies, 142, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 118, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987, x+348.

[9] Kemer, Aleksandr Robertovich, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations of Mathematical Monographs, 87, Translated from the Russian by C. W. Kohls, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, vi+81.

[10] Năstăsescu, C. and van Oystaeyen, F., *Graded ring theory*, North-Holland Mathematical Library, 28, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982, ix+340.

[11] Ramos Borges, Alex and Fidelis, Claudemir and Diniz, Diogo, *Graded isomorphisms on upper block triangular matrix algebras*, Linear Algebra Appl., 543, 2018, 92–105.

[12] Valenti, A. and Zaicev, M., *Abelian gradings on upper-triangular matrices*, Arch. Math. (Basel), 80, 2003, 1, 12–17.

[13] Valenti, A. and Zaicev, M. V., *Group gradings on upper triangular matrices*, Arch. Math. (Basel), 89, 2007, 1, 33–40.

[14] Valenti, Angela and Zaicev, Mikhail, *Abelian gradings on upper block triangular matrices*, Canad. Math. Bull., 55, 2012, 1, 208–213.

[15] Yasumura, Felipe Yukihide, *Group gradings on upper block triangular matrices*, Arch. Math. (Basel), 110, 2018, 4, 327–332.