**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Unidade Acadêmica de Matemática**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Leonardo Valencio dos Santos** [†]

# Teoria de ligação de módulos

**Campina Grande - PB**

**2024**

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

**Leonardo Valencio dos Santos**

# Teoria de ligação de módulos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Álgebra Comutativa e área de concentração Álgebra como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thyago Santos de Souza

**Campina Grande - PB**

**2024**

S237t Santos, Leonardo Valencio dos.
Teoria de ligação de módulos / Leonardo Valencio dos Santos – Campina Grande, 2024.
63 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação: Prof. Dr. Thyago Santos de Souza."
Referências.

1. Ligação de Módulos. 2. Dimensão de Gorenstein. 3. Grade Reduzido. 4. Ligação Horizontal. 5. Anéis Semiperfeitos. I. Souza, Thyago Santos de. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/093

# Teoria de ligação de módulos

**por**

**Leonardo Valencio dos Santos**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 23/02/2024

Cleto Brasileiro Miranda Neto

**Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB**

Ricardo Burity Croccia Macedo

**Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB**

Thyago Santos de Souza

**Prof. Dr. Thyago Santos de Souza - UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Fevereiro - 2024**

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bençãos alcançadas. Bem como, por sempre me conceder forças para continuar a lutar pelos meus sonhos. Sem ele, nada disso seria possível.

Aos meus pais, Maria Valencio dos Santos e João Bernardino dos Santos Neto que sempre me apoiaram e incentivaram com meus estudos. Ambos nunca mediram esforços para que esse sonho viesse a se tornar realidade. Seus ensinamentos e princípios levarei consigo até o fim de minha vida. Obrigado por me ajudarem a construir a única riqueza que ninguém consegue roubar de alguém: o CONHECIMENTO. Amo muito vocês, essa conquista é nossa.

Agradeço aos meus familiares por todo apoio e companheirismo que foram essenciais para que tudo se tornasse mais simples em meio a dias difíceis. Em especial a meu irmão Leandro e meu tio Manoel. O último, desde a época de criança sempre teve um carinho especial por mim. Ambos sempre acreditaram e torceram pelo meu sucesso.

Ao meus colegas da pós graduação, por sempre estarem dispostos a me ajudar, tirando dúvidas dos conteúdos e me apoiando. Em especial a Antônio Filho e Érica Isabel, ambos vêm caminhando comigo desde a época da graduação na UFCG - Campus Cajazeiras. Não poderia deixar de agradecer também a Kennedy Jhonsson, um rapaz de coração bondoso, por ter me acolhido em Campina Grande em seu apartamento, tirando mais uma preocupação de minha cabeça, que eram tantas, já que eu nunca tinha morado longe de casa. Além de me ensinar a usar os aplicativos de Uber e apresentar alguns locais de Campina Grande, facilitando minha adaptação na cidade.

A Duda e Marcos, pelas tantas caronas nas idas e vindas de minha cidade de origem a Campina Grande e vice-versa. Vocês são dois anjos que Deus colocou em minha vida.

Ao meu orientador, Thyago Santos de Souza, pela amizade, paciência, empenho e dedicação durante esses dois anos de mestrado. Sem dúvidas você é um excelente pesquisador, responsável e dedicado a tudo que faz. Além de muito compreensivo.

A Tonires Sales de Melo e Franciélia Limeira de Sousa que foram meus professores de álgebra da graduação e me incentivaram a cursar o mestrado. Sou muito grato a vocês pela ajuda no início do curso, pois foi uma fase difícil, de adaptação ao ritmo de estudos, e sempre que os procurava para sanar algumas dúvidas, era bem atendido. Obrigado pela disponibilidade de sempre, jamais esquecerei de tudo isso.

A banca por aceitarem o convite para avaliar meu trabalho a fim de torná-lo útil para outros amantes da matemática.

Por fim, a CAPES pelo apoio financeiro.

# Dedicatória

Aos meus pais, irmão e familiares.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos a teoria de ligação de módulos finitamente gerados sobre um anel comutativo Noetheriano semiperfeito. Tal teoria foi introduzida por Martsinkovsky e Strooker e generaliza a clássica ligação de ideais. Mostramos que sob certas condições um módulo de dimensão de Gorenstein zero é ligado horizontalmente, e como consequência fornecemos uma classe de módulos ligados horizontalmente sobre anéis locais Gorenstein. Além disso, para um módulo ligado horizontalmente, discutimos conexões com seus invariantes: grade reduzido, dimensão de Gorenstein e profundidade.

**Palavras-chave:** Ligação de módulos, dimensão de Gorenstein, grade reduzido.

# Abstract

In this work, we study the theory of linkage of finitely generated modules over a semiperfect Noetherian commutative ring. Such theory was introduced by Martsinkovsky and Strooker and generalizes the classical linkage of ideals. We show that under certain conditions a module of Gorenstein dimension zero is horizontally linked, and as a consequence we provide a class of horizontally linked modules over Gorenstein local rings. Moreover, for a horizontally linked module, we discuss connections with its invariants: reduced grade, Gorenstein dimension and depth.

**Key Words:** Linkage of modules, Gorenstein dimension, reduced grade.

# Sumário

# Notações

Todos os anéis considerados neste trabalho, a menos de menção explícita em contrário, são Noetherianos comutativos e com unidade e todos os módulos ao longo dos três capítulos são finitamente gerados. Quando um anel $R$ possui um único ideal maximal $\mathfrak{m}$, dizemos que o anel é *local*, e denotamos por $(R, \mathfrak{m})$.

A seguir listaremos algumas notações usadas neste trabalho.

- $R$ denota um anel;
- $M$, $N$, $K$, $L$, $P$ e $Q$ denotam módulos finitamente gerados;
- $\mathrm{Ker}(-)$ núcleo de um homomorfismo;
- $\mathrm{Im}(-)$ imagem de um homomorfismo;
- $\mathrm{Coker}(-)$ conúcleo de um homomorfismo;
- $\mathrm{Min}(R)$ o conjunto dos primos minimais de $R$;
- $\mathrm{Ass}_R(M)$ o conjunto dos primos associados do $R$-módulo $M$;
- $0 :_R M$ ideal anulador do $R$-módulo $M$;
- $\mathrm{Supp}_R(M)$ suporte do $R$-módulo $M$;
- $\dim(\ )$ dimensão de Krull;
- $\mathrm{ht}(\ )$ altura de um ideal;
- $z_R(M)$ o conjunto dos divisores de zero do $R$-módulo $M$;
- $\mathrm{pd}_R(M)$ a dimensão projetiva do $R$-módulo $M$;

- $\mathrm{id}_R(M)$ a dimensão injetiva do $R$-módulo $M$;
- $\blacksquare$ indica o final de uma demonstração.

# Introdução

A clássica noção de ligação de variedades algébricas remonta ao final do século XIX e início do século XX, quando o matemático alemão Max Noether a usou para estudar curvas algébricas no espaço projetivo $\mathbb{P}^3$. Gradualmente a teoria de ligação foi sendo aplicada em situações mais gerais. Em 1974, Peskine e Szpiro [33] introduziram a noção de ligação de ideais. Posteriormente essas ideias foram estudadas por diversos autores, em [13, 15, 16, 17, 18, 28, 31, 35, 40].

Essa teoria foi estendida para módulos por vários autores de diferentes maneiras, por exemplo, Yoshino e Isogawa [41], Martin [24], Martsinkovsky e Strooker [25] e Nagel [30]. Com base nessas generalizações vários trabalhos foram produzidos, veja por exemplo, [9, 10, 11, 19, 32, 36]. Recentemente podemos destacar os trabalhos de Celikbas [7], Sadeghi [37], Dehghani-Zadeh, Dibaei e Sadeghi [8], Jahandiri e Sayyari [21], Miranda-Neto e Souza [29], e Souza [38, 39].

Nesta dissertação, estamos interessados na teoria de ligação de módulos estabelecida por Martsinkovsky e Strooker [25]. Eles definiram a noção de ligação de módulos finitamente gerados sobre anéis Noetherianos semiperfeitos (não necessariamente comutativos). Com base nesse estudo, Dibai e Sadeghi [9] contibuíram com a teoria de ligação, trabalhando com módulos de dimensão de Gorenstein finita, no contexto comutativo (o qual adotaremos em todo o nosso trabalho).

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar a teoria de ligação de módulos, introduzida por Martsinkovsky e Strooker, no contexto comutativo. Daremos uma atenção especial aos módulos ligados horizontalmente com dimensão de Gorenstein finita. Vale destacar que uma das metas é contribuir para literatura matemática nacional, visto que a teoria de ligação é um tema bastante escasso (possivelmente inexistente) no idioma brasileiro. Este material foi construído com base nos artigos [9, 23, 25].

Esta dissertação está dividida em três capítulos e três apêndices. Sendo organizados da seguinte forma:

No Capítulo 1, o foco é apresentar a dimensão de Gorenstein e a transposta de Auslander, ferramentas essenciais para desenvolver a teoria dos capítulos 2 e 3. Neste Capítulo, estudamos a relação entre a transposta de Auslander e o homomorfismo canônico $\sigma_M : M \to M^{**}$ (Proposição 1.7), fornecemos uma caracterização dos anéis locais Gorenstein em termos da dimensão de Gorenstein (Teorema 1.18), e demonstramos a famosa fórmula de Auslander-Bridger (Teorema 1.25), bastante usada no decorrer do texto.

No Capítulo 2, introduzimos a definição de ligação de módulos baseada na definição clássica de ligação de ideais sobre um anel local Gorenstein. E para tanto, definimos o operador $\lambda$ como sendo a composição de dois operadores: sizígias e transposta. Neste capítulo, estudamos os primos associados de um módulo ligado horizontalmente (Teorema 2.18) e fornecemos uma importante caracterização para módulos ligados horizontalmente (Teorema 2.20). Como consequência mostramos que todo módulo Cohen-Macaulay maximal estável sobre um anel local Gorenstein é ligado horizontalmente (Corolário 2.25).

O Capítulo 3, é dedicado ao estudo da teoria de ligação para módulos de dimensão de Gorenstein finita. Inicialmente, apresentamos algumas definições preliminares, entre elas, a de destaque e bastante usada ao longo do capítulo é a de grade reduzido, $\text{r.grade}_R(M)$. Relacionamos o grade reduzido e a propriedade $\tilde{S}_k$ com a ligação horizontal (Proposição 3.4). Ademais, caracterizamos o conjunto dos primos associados de $\text{Ext}_R^{\text{r.grade}_R(M)}(M, R)$, onde $M$ é um módulo ligado horizontalmente de dimensão de Gorenstein finita e positiva (Teorema 3.8), e exploramos algumas consequências. Finalizamos o capítulo estudando o Ext diagonal de um módulo ligado horizontalmente (Teorema 3.17).

Para concluir o trabalho, adicionamos três apêndices com intuito de facilitar a leitura e torná-la mais objetiva. No Apêndice A, apresentamos alguns conceitos e resultados de álgebra homológica. No Apêndice B, exibimos algumas definições e resultados relacionados a profundidade e grade de um módulo, bem como dos anéis Gorenstein e Cohen-Macaulay. Finalmente no Apêndice C, listamos alguns conceitos e resultados sobre os anéis semiperfeitos.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, introduziremos a transposta de Auslander e a dimensão de Gorenstein, também chamada de G-dimensão, que serão de fundamental importância ao longo dos próximos capítulos. A principal referência utilizada foi [23]. Relembramos que ao longo da dissertação assumiremos que todos os anéis são Noetherianos comutativos e com unidade e todos os módulos ao longo dos três capítulos são finitamente gerados.

## 1.1 Transposta de Auslander

Nesta seção, definiremos a transposta de Auslander de um módulo e apresentaremos algumas de suas propriedades. Para um $R$-módulo $M$, definimos $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ e $M^{**} = (M^*)^*$. Os módulos $M^*$ e $M^{**}$ são chamados, respectivamente, o *dual* e *bidual* de $M$ e aplicar $(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, R)$ é chamado *dualização.*

**Definição 1.1** Sejam $M$ um $R$-módulo qualquer (finitamente gerado sempre), e

$$\pi : P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{f} M \to 0$$

uma apresentação projetiva de $M$, ou seja, $\pi$ é uma sequência exata de $R$-módulos com $P_1$ e $P_0$ módulos projetivos. A *transposta de Auslander* de $M$, $\mathrm{Tr}M$, é definida como $\mathrm{Tr}M := \mathrm{Coker}(u^*)$, em outras palavras, dualizando $\pi$ obtemos a sequência exata

$$\pi^* : 0 \to M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{u^*} P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0$$

**Definição 1.2** Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos. Dizemos que $M$ e $N$ são *projetivamente equivalentes* se existem $P$ e $Q$ projetivos tais que $M \oplus P \cong N \oplus Q$. Notação $M \approx N$.

Note que $\mathrm{Tr}M$ depende da escolha da apresentação projetiva $\pi$ usada na definição. Podemos também denotar $\mathrm{Coker}(u^*)$ por $\mathrm{Tr}_\pi M$. O próximo resultado nos mostra que a transposta de Auslander de $M$, $\mathrm{Tr}M$, é única a menos de equivalência projetiva.

**Proposição 1.3** *Sejam*

$$\pi : P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{f} M \to 0$$

$$\rho : Q_1 \xrightarrow{v} Q_0 \xrightarrow{g} M \to 0$$

*duas apresentações projetivas de $M$, então $\mathrm{Tr}_\pi M \approx \mathrm{Tr}_\rho M$.*

**Demonstração.** Ver [23], Proposição 4. ■

**Observação 1.4** Dado $M$ um $R$-módulo, $\mathrm{Tr}M$ é definida a menos de equivalência projetiva, ou seja, $\mathrm{Tr}M$ é uma classe de equivalência de módulos. No entanto, trabalharemos com $\mathrm{Tr}M$ livremente como se fosse um $R$-módulo, tendo o cuidado de especificar quando necessário, que um determinado representante está sendo usado. Em verdade, essa distinção é irrelevante dentro dos Ext's para qualquer índice positivo, pois se $\mathrm{Tr}_\pi M \approx \mathrm{Tr}_\rho M$, então por definição, existem $P$ e $Q$ projetivos tais que $\mathrm{Tr}_\pi M \oplus P \cong \mathrm{Tr}_\rho M \oplus Q$, donde $\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}_\pi M \oplus P, R) \cong \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}_\rho M \oplus Q, R)$. Assim,

$$\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}_\pi M, R) \oplus \mathrm{Ext}^i_R(P, R) \cong \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}_\rho M, R) \oplus \mathrm{Ext}^i_R(Q, R).$$

Portanto, pela Proposição A.17, $\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}_\pi M, R) \cong \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}_\rho M, R)$ para todo $i \geq 1$.

**Proposição 1.5** *Sejam $M, M_1$ e $M_2$ $R$-módulos.*

- $(i)$ *Se $M \approx 0$ (isto é, se $M$ é projetivo), então $\mathrm{Tr}M \approx 0$. Além disso, $\mathrm{Tr}(M_1 \oplus M_2) \approx \mathrm{Tr}M_1 \oplus \mathrm{Tr}M_2$ e consequentemente, se $M \approx N$, então $\mathrm{Tr}M \approx \mathrm{Tr}N$.*
- $(ii)$ $\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}M) \approx M$.
- $(iii)$ *Se $S$ é um conjunto multiplicativo em $R$, então $\mathrm{Tr}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) \approx S^{-1}\mathrm{Tr}_R M$. Em particular, $\mathrm{Tr}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \approx (\mathrm{Tr}_R M)_\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.*

**Demonstração.** Ver [23], Observações (2), (3) e (5), páginas 5788 e 5789. ■

**Definição 1.6** Para um $R$-módulo $M$. A aplicação

$$\sigma_M : M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R) = M^{**}$$

definida por $\sigma_M(m)(\varphi) = \varphi(m)$ para $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ e $m \in M$ é chamada de *Homomorfismo canônico* de $M$.

Em seguida, estudamos a relação entre $\mathrm{Tr}M, \mathrm{Ker}(\sigma_M)$ e $\mathrm{Coker}(\sigma_M)$.

**Proposição 1.7** *Seja* $\sigma_M : M \to M^{**}$ *o homomorfismo canônico, então valem os isomorfismos* $\operatorname{Ker}(\sigma_M) \cong \operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Tr}M, R)$ *e* $\operatorname{Coker}(\sigma_M) \cong \operatorname{Ext}^2_R(\operatorname{Tr}M, R)$*. Assim, temos a sequência exata*

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Tr}M, R) \to M \xrightarrow{\sigma_M} M^{**} \to \operatorname{Ext}^2_R(\operatorname{Tr}M, R) \to 0.$$

*Além disso,* $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}M, R) \cong \operatorname{Ext}^{i-2}_R(M^*, R)$ *para todo* $i \geq 3$.

**Demonstração.** Considere a apresentação projetiva de $M$:

$$\pi : P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{f} M \to 0$$

Dualizando $\pi$, obtemos:

$$\pi^* : 0 \to M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{u^*} P_1^* \to \operatorname{Tr}M \to 0$$

Dividindo $\pi^*$ em sequências exatas curtas, temos:

$$\pi_0^* : 0 \to M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{\beta_0} N \to 0$$

$$\pi_1^* : 0 \to N \xrightarrow{\beta_1} P_1^* \to \operatorname{Tr}M \to 0$$

onde $N = \operatorname{Coker}(f^*)$ e $\beta_1 \circ \beta_0 = u^*$. Como $P_0^*$ e $P_1^*$ são projetivos, então pela Proposição A.17, temos que $\operatorname{Ext}^i_R(P_0^*, R) = 0 = \operatorname{Ext}^i_R(P_1^*, R)$ para todo $i > 0$. Assim, pela Proposição A.18($i$), obtemos as sequências exatas:

$$0 \to N^* \xrightarrow{\beta_0^*} P_0^{**} \xrightarrow{f^{**}} M^{**} \to \operatorname{Ext}^1_R(N, R) \to 0$$

$$0 \to (\operatorname{Tr}M)^* \to P_1^{**} \xrightarrow{\beta_1^*} N^* \to \operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Tr}M, R) \to 0$$

Considere o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\beta_1^* \circ \sigma_{P_1}"] & P_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_{P_o}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N^* \arrow[r, "\beta_0^*"'] & P_0^{**} \arrow[r, "f^{**}"'] & M^{**} &
\end{tikzcd}$$

Como $P_1$ é projetivo, então de acordo com o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\sigma_{P_1}"] \arrow[d, "\cong"] & P_1^{**} \arrow[d, "\cong"] \\
P_1 \otimes_R R \arrow[r, "\cong"'] & P_1 \otimes_R \operatorname{Hom}_R(R, R)
\end{tikzcd}$$

segue que $\sigma_{P_1}$ é um isomorfismo.

Note que $\mathrm{Coker}(\beta_1^* \circ \sigma_{P_1}) = \mathrm{Coker}(\beta_1^*) \cong \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R)$. Pelo Lema da Serpente, aplicado ao primeiro diagrama comutativo acima, existe uma sequência exata:

$$\mathrm{Ker}(\beta_1^* \circ \sigma_{P_1}) \to \mathrm{Ker}(\sigma_{P_0}) \to \mathrm{Ker}(\sigma_M) \to \mathrm{Coker}(\beta_1^* \circ \sigma_{P_1}) \to \mathrm{Coker}(\sigma_{P_0}) \to \mathrm{Coker}(\sigma_M).$$

Como $\sigma_{P_0}$ é um isomorfismo, segue da exatidão acima que

$$\mathrm{Ker}(\sigma_M) \cong \mathrm{Coker}(\beta_1^* \circ \sigma_{P_1}) \cong \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R).$$

Pela Proposição A.18$(i)$, as sequências exatas $\pi_0^*$ e $\pi_1^*$, induzem as sequências exatas longas:

$$\pi_0^{**} : \cdots \to \mathrm{Ext}_R^{i-2}(P_0^*, R) \to \mathrm{Ext}_R^{i-2}(M^*, R) \to \mathrm{Ext}_R^{i-1}(N, R) \to \mathrm{Ext}_R^{i-1}(P_0^*, R) \to \cdots$$

$$\pi_1^{**} : \cdots \to \mathrm{Ext}_R^{i-1}(P_1^*, R) \to \mathrm{Ext}_R^{i-1}(N, R) \to \mathrm{Ext}_R^{i}(\mathrm{Tr}M, R) \to \mathrm{Ext}_R^{i}(P_1^*, R) \to \cdots$$

Note que $\mathrm{Im}(f^{**}) = \mathrm{Im}(\sigma_M)$. Assim,

$$\mathrm{Coker}(\sigma_M) = \mathrm{Coker}(f^{**}) \cong \mathrm{Ext}_R^1(N, R) \cong \mathrm{Ext}_R^2(\mathrm{Tr}M, R)$$

onde o último isomorfismo segue de $\pi_1^{**}$ com $i = 2$.

Por fim, de $(\pi_1^{**})$ e $(\pi_0^{**})$, concluimos que:

$$\mathrm{Ext}_R^i(\mathrm{Tr}M, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i-1}(N, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i-2}(M^*, R)$$

para todo $i \geq 3$. ■

**Proposição 1.8** *Seja $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata. Então para uma escolha adequada de transpostas de Auslander, temos uma sequência exata longa:*

$$0 \to M''^* \to M^* \to M'^* \to \mathrm{Tr}M'' \to \mathrm{Tr}M \to \mathrm{Tr}M' \to 0$$

**Demonstração.** Sejam $P_1' \to P_0' \to M' \to 0$ e $P_1'' \to P_0'' \to M'' \to 0$ quaisquer duas apresentações projetivas de $M'$ e $M''$, respectivamente. Pelo Lema da Ferradura (Proposição A.12), podemos encaixá-las em um diagrama comutativo com linhas e colunas exatas

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
P_1' \arrow[r] \arrow[d] & P_0' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P_1' \oplus P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Dualizando todo o diagrama, obtemos

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d, dotted] & \\
0 \arrow[r, dotted] & M''^* \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & M^* \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & M'^* \arrow[d, dotted] & \\
0 \arrow[r] & P_0''^* \arrow[r] \arrow[d] & (P_0' \oplus P_0'')^* \arrow[r] \arrow[d] & P_0'^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1''^* \arrow[r] \arrow[d, dotted] & (P_1' \oplus P_1'')^* \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_1'^* \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
 & \mathrm{Tr}M'' \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \mathrm{Tr}M \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \mathrm{Tr}M' \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Aplicando o Lema da Serpente no diagrama destacado acima, concluimos que:

$$0 \to M''^* \to M^* \to M'^* \to \mathrm{Tr}M'' \to \mathrm{Tr}M \to \mathrm{Tr}M' \to 0$$

é exata. ■

**Definição 1.9** Um $R$-módulo $M$ é uma *$k$-ésima sizígias* $(k \geq 1)$ se existe uma sequência exata

$$0 \to M \to P_0 \to \cdots \to P_{k-1}$$

com $P_j$ projetivo, para todo $j = 0, ..., k-1$. Para $k = 1$, dizemos apenas que $M$ é um *módulo de sizígias.*

**Exemplo 1.10** O dual de qualquer $R$-módulo é uma segunda sizígias. De fato, sejam $M$ um $R$-módulo qualquer e $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ uma apresentação projetiva de $M$. Dualizando-a temos que $M^*$ é pelo menos uma segunda sizígias.

**Proposição 1.11** *Seja $M$ um $R$-módulo. Então $M$ é um módulo de sizígias se, e somente se,* $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}M, R) = 0$.

**Demonstração.** Segue de [23], Teorema 43. ∎

## 1.2 Dimensão de Gorenstein

Nesta seção, apresentaremos diversas propriedades da dimensão de Gorenstein (ou G-dimensão) que serão usadas nesta dissertação. A G-dimensão foi introduzida por Auslander em [1] e desenvolvida por Auslander e Bridger em [2]. Ela possui várias propriedades análogas da dimensão projetiva (Veja Apêndice A), entre elas podemos citar a clássica fórmula de Auslander-Bridger (Teorema 1.25), bastante usada ao longo deste trabalho, e que generaliza a fórmula de Auslander-Buchsbaum (Teorema B.15).

**Definição 1.12** Dizemos que um $R$-módulo $M$ é *totalmente reflexivo* ou tem *dimensão de Gorenstein zero*, em símbolos $\text{G-dim}_R(M) = 0$, se satisfaz as seguintes condições:

$(i)$ $M$ é reflexivo, ou seja, o homomorfismo canônico $\sigma_M : M \to M^{**}$ é um isomorfismo;

$(ii)$ $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$ para todo $i \geq 1$;

$(iii)$ $\mathrm{Ext}^i_R(M^*, R) = 0$ para todo $i \geq 1$.

**Observação 1.13** Seja $M$ um $R$-módulo. Pela Definição 1.12 e Proposição 1.7, note que $\text{G-dim}_R(M) = 0$ se, e somente se, $\mathrm{Ker}(\sigma_M) = 0 = \mathrm{Coker}(\sigma_M)$ e $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(M^*, R)$ para todo $i \geq 1$ se, e somente se, $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}M, R) = 0 = \mathrm{Ext}^2_R(\mathrm{Tr}M, R)$ e $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0 = \mathrm{Ext}^{i+2}_R(\mathrm{Tr}M, R)$ para todo $i \geq 1$. Portanto, $\text{G-dim}_R(M) = 0$ se, e somente se, $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}M, R)$ para todo $i \geq 1$.

**Definição 1.14** Sejam $M$ um $R$-módulo e $P \to M$ um epimorfismo tal que $P$ é projetivo. O núcleo deste epimorfismo é denotado por $\Omega M$ e é chamado *módulo de sizígias de $M$*.

Agora listaremos algumas propriedades importantes da dimensão de Gorenstein zero.

**Lema 1.15** *Seja $M$ um $R$-módulo.*

$(i)$ $\text{G-dim}_R(M) = 0 \Leftrightarrow \text{G-dim}_R(\mathrm{Tr}M) = 0$.

$(ii)$ *Se $M$ é projetivo, então* $\text{G-dim}_R(M) = 0$.

$(iii)$ *Considere a sequência exata $0 \to \Omega M \to P \to M \to 0$, onde $P$ é projetivo e* $\text{G-dim}_R(M) = 0$, *então* $\text{G-dim}_R(\Omega M) = 0$.

*(iv)* $\text{G-dim}_R(M) = 0$ *se, e somente se,* $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$ *para todo* $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$.

**Demonstração.** Ver [23], comentário após Definição 12 e Lema 13. ∎

**Definição 1.16** Um $R$-módulo $M$ tem *dimensão de Gorenstein no máximo* $k$ para algum inteiro $k \geq 0$, em símbolos $\text{G-dim}_R(M) \leq k$, se existe uma sequência exata da forma

$$0 \to M_k \to \cdots \to M_0 \to M \to 0$$

com $\text{G-dim}_R(M_j) = 0$ para todo $j = 0, ..., k$.

Se $\text{G-dim}_R(M) \leq k$ para algum $k \geq 0$, então escrevemos $\text{G-dim}_R(M) < \infty$. Caso contrário, $\text{G-dim}_R(M) = \infty$. Se $\text{G-dim}_R(M) < \infty$, definimos a *dimensão de Gorenstein* de $M$, ou simplesmente a *G-dimensão* de $M$, como o menor inteiro $k$ tal que $\text{G-dim}_R(M) \leq k$. Neste caso, escrevemos $\text{G-dim}_R(M) = k$.

**Definição 1.17** Sejam $K$ e $M$ $R$-módulos e $i$ um número inteiro positivo. Dizemos que $K$ é uma *$i$-ésima sizígias de $M$* se existir uma sequência exata

$$0 \to K \to P_{i-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

com $P_0, ..., P_{i-1}$ módulos projetivos. Neste caso, escrevemos $K = \Omega^i M$. Por convenção, todo módulo é uma 0-ésima sizígias.

Dizemos que um anel local $R$ é *Gorenstein* se ele tem dimensão injetiva finita quando visto como um módulo sobre si mesmo (Veja Apêndice B). A seguir apresentaremos uma importante caracterização de anéis Gorenstein em termos da G-dimensão.

**Teorema 1.18** *Sejam $R$ um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual $k$. Considere* $\dim(R) = n$. *Então as seguintes condições são equivalentes:*

*(i)* *$R$ é Gorenstein;*

*(ii)* $\text{G-dim}_R(M) \leq n$ *para todo $R$-módulo $M$;*

*(iii)* $\text{G-dim}_R(M) < \infty$ *para todo $R$-módulo $M$;*

*(iv)* $\text{G-dim}_R(k) < \infty$*;*

*(v)* $\text{G-dim}_R(k) = n$.

**Demonstração.** Vamos mostrar que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$ ; $(i) + (ii) + (iii) + (iv) \Rightarrow (v)$ e $(v) \Rightarrow (iv)$. Note que, $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ e $(v) \Rightarrow (iv)$ são óbvias. Assim, mostraremos apenas que $(i) \Rightarrow (ii)$, $(iv) \Rightarrow (i)$ e $(i) + (ii) + (iii) + (iv) \Rightarrow (v)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que $R$ é Gorenstein, então $\mathrm{id}(R) = n$, pelo Teorema B.18. Se $n = 0$, então $R$ é injetivo como $R$-módulo. Pela Proposição A.6, $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}M, R)$ para todo $i \geq 1$ e para todo $R$-módulo $M$, ou seja, todo módulo $M$ tem G-dimensão zero, pela Observação 1.13.

Agora assuma que $n \geq 1$ e seja $M$ um $R$-módulo. Considere

$$0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

uma sequência exata de $R$-módulos, onde $P_j$ é livre, para todo $j = 0, ..., n-1$. Como $\mathrm{id}(R) = n$, então pelas Proposições A.19 e A.21, $\mathrm{Ext}^i_R(K, R) \cong \mathrm{Ext}^{i+n}_R(M, R) = 0$ para todo $i \geq 1$. Seja,

$$\cdots \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to K \to 0$$

uma resolução livre de $K$. Dualizando-a, temos:

$$0 \to K^* \to F_0^* \to F_1^* \to \cdots \to F_{n-1}^* \to F_n^* \to \cdots$$

que é exato, pois $\mathrm{Ext}^i_R(K, R) = 0$ para todo $i \geq 1$. Seja $M' = \mathrm{Coker}(F^*_{n-2} \to F^*_{n-1})$. Pela exatidão da sequência acima junto com a Proposição A.21, temos $\mathrm{Ext}^i_R(K^*, R) \cong \mathrm{Ext}^{i+n}_R(M', R) = 0$ para todo $i \geq 1$, pelo mesmo motivo do $K$. Logo, $\mathrm{Ext}^i_R(K, R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(K^*, R)$ para todo $i \geq 1$. Resta mostrarmos que $K$ é reflexivo. De fato, como $K$ é um módulo de sizígias, segue das Proposições 1.7 e 1.11 que $\mathrm{Ker}(\sigma_K) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}K, R) = 0$, ou seja, $\sigma_K$ é injetor. Por fim, mostraremos que $\sigma_K$ é sobrejetor. Para isso, considere a sequência exata:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & F \arrow[rr] \arrow[dr, "f"] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

com $F$ livre. Assim, $0 \to K' \to F \xrightarrow{f} K \to 0$ é também exata. Logo, $K'$ é uma $(n+1)$-ésima sizígias e com a mesma prova que para $K$, obtemos $\mathrm{Ext}^i_R(K', R) = \mathrm{Ext}^i_R(K'^*, R) = 0$ para todo $i \geq 1$. Em particular, usando a sequência exata longa dos Ext's (Proposição A.18$(i)$), concluímos que $f^{**} : F^{**} \to K^{**}$ é sobrejetor. Por $\sigma_K \circ f = f^{**} \circ \sigma_F$ e usando o fato que $\sigma_F$ é um isomorfismo, temos que $\mathrm{Im}(\sigma_K) = \mathrm{Im}(f^{**}) = K^{**}$.

Portanto, $\text{G-dim}_R(K) = 0$ e assim, $\text{G-dim}_R(M) \leq n$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Assuma que $\text{G-dim}_R(k) < \infty$. Digamos que $\text{G-dim}_R(k) = s$, então existe uma sequência exata de $R$-módulos da forma

$$0 \to M_s \to M_{s-1} \to \cdots \to M_0 \to k \to 0$$

com $\text{G-dim}_R(M_i) = 0$ para todo $0 \leq i \leq s$. Assim, $\text{Ext}_R^{i+s}(k, R) \cong \text{Ext}_R^i(M_s, R) = 0$ para todo $i \geq 1$. Fazendo $j = i+s$, segue que $\text{Ext}_R^j(k, R) = 0$ para todo $j > s$. Pela Proposição A.22, $\text{id}(R) \leq s < \infty$, ou seja, $R$ é Gorenstein.

$(i) + (ii) + (iii) + (iv) \Rightarrow (v)$ Por $(ii)$, $\text{G-dim}_R(M) \leq n$ para todo $R$-módulo $M$. Em particular, vale para $M = k$, ou seja, $\text{G-dim}_R(k) \leq n$. Por outro lado, pelo Teorema B.18, $\text{Ext}_R^n(k, R) \cong k \neq 0$. Logo, pela Proposição A.22, $\text{id}(R) \geq n$. Agora pela prova de $(iv) \Rightarrow (i)$, $\text{G-dim}_R(k) \geq \text{id}(R) \geq n$. Portanto, $\text{G-dim}_R(k) = n$. ∎

Agora, vamos listar algumas propriedades da G-dimensão.

**Lema 1.19** *Sejam $M, N, L$ e $K$ $R$-módulos*

$(i)$ *Seja $k \geq 1$. Assuma que*

$$0 \to K \to M_{k-1} \to \cdots \to M_0 \to N \to 0$$

*é uma sequência exata de $R$-módulos, com $\text{G-dim}_R(N) \leq k$ e $\text{G-dim}_R(M_j) = 0$, para todo $j = 0, ..., k-1$. Então, $\text{G-dim}_R(K) = 0$.*

$(ii)$ $\text{G-dim}_R(M) \leq k \Leftrightarrow \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq k$ *para todo* $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. *Em outras palavras,* $\text{G-dim}_R(M) = \sup\{\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)\}$.

$(iii)$ *Se $0 \to K \to L \to M \to 0$ é uma sequência exata, então:*

$(a)$ $\text{G-dim}_R(K) \leq \max\{\text{G-dim}_R(L), \text{G-dim}_R(M) - 1\}$

$(b)$ $\text{G-dim}_R(L) \leq \max\{\text{G-dim}_R(K), \text{G-dim}_R(M)\}$

$(c)$ $\text{G-dim}_R(M) \leq 1 + \max\{\text{G-dim}_R(K), \text{G-dim}_R(L)\}$

*Em particular, se dois dos três módulos $K, L$ e $M$ tem dimensão de Gorenstein finita, então o terceiro também tem.*

$(iv)$ $\text{G-dim}_R(M \oplus N) = \max\{\text{G-dim}_R(M), \text{G-dim}_R(N)\}$.

$(v)$ *Se $M \approx N$. Então,* $\text{G-dim}_R(M) = \text{G-dim}_R(N)$.

$(vi)$ *Seja $M \neq 0$ um $R$-módulo tal que $\text{G-dim}_R(M) < \infty$, então*

$$\text{G-dim}_R(M) = \sup\{i \geq 0 \mid \text{Ext}_R^i(M, R) \neq 0\}.$$

**Demonstração.** $(i)$ Ver [23], Teorema 20. $(ii)$ Ver [23], Corolário 22. $(iii)$ Ver [23], Teorema 18. $(vi)$ Ver [23], Lema 23(c).

$(iv)$ Considere a sequência exata

$$0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0.$$

Pelo item $(iii)(b)$, $\text{G-dim}_R(M \oplus N) \leq \max\{\text{G-dim}_R(M), \text{G-dim}_R(N)\}$. Suponha que

$$\max\{\text{G-dim}_R(M), \text{G-dim}_R(N)\} = \text{G-dim}_R(M)$$

então $\text{G-dim}_R(M) \geq \text{G-dim}_R(N) > \text{G-dim}_R(N) - 1$. Agora pelo item $(iii)(a)$, temos que $\text{G-dim}_R(M) \leq \max\{\text{G-dim}_R(M \oplus N), \text{G-dim}_R(N) - 1\} = \text{G-dim}_R(M \oplus N)$ e assim, temos a igualdade.

$(v)$ Se $M \approx N$, então existem $P$ e $Q$ projetivos tais que $M \oplus P \cong N \oplus Q$. Logo, $\text{G-dim}_R(M \oplus P) = \text{G-dim}_R(N \oplus Q)$. Desde que $P$ e $Q$ são projetivos, o Lema 1.15$(ii)$ garante que $\text{G-dim}_R(P) = 0 = \text{G-dim}_R(Q)$. Portanto, $\text{G-dim}_R(M) = \text{G-dim}_R(N)$, pelo item $(iv)$. ■

Vamos concluir a seção apresentando um importante resultado. Para isso, precisaremos da seguinte definição.

**Definição 1.20** Um $R$-módulo $M$ satisfaz a propriedade $\tilde{S}_k$ se

$$\text{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq \min\{k, \text{depth}(R_\mathfrak{p})\}$$

para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$.

**Teorema 1.21** *Seja $k$ um inteiro positivo. Considere as seguintes afirmações.*

$(i)$ $\text{Ext}^i_R(\text{Tr}M, R) = 0$ *para todo* $1 \leq i \leq k$;

$(ii)$ $M$ *é uma $k$-ésima sizígias;*

$(iii)$ $M$ *satisfaz* $\tilde{S}_k$.

*Então,*

$(a)$ $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$;

$(b)$ *Se* $\text{G-dim}_R(M) < \infty$, *então* $(iii) \Rightarrow (i)$;

**Demonstração.** Ver [23], Proposição 38 e Teorema 42. ■

## 1.3 Fórmula de Auslander-Bridger

Nesta seção, provaremos a fórmula de Auslander-Bridger. Inicialmente enunciaremos alguns resultados auxiliares necessários para a demonstração do resultado principal da seção.

Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M$ um $R$-módulo. Lembramos que a *profundidade* de $M$, denotada por $\mathrm{depth}_R(M)$, é o comprimento de uma $M$-sequência maximal em $\mathfrak{m}$ (Para mais detalhes, veja Apêndice B).

**Lema 1.22** *Sejam $R$ um anel local e $M$ um $R$-módulo. Se $\text{G-dim}_R(M) < \infty$ e $\mathrm{depth}(R) = 0$, então $\text{G-dim}_R(M) = 0$.*

**Demonstração.** Ver [23], Corolário 26. ∎

**Lema 1.23** *Sejam $R$ um anel local e $M \neq 0$ um $R$-módulo tal que $\text{G-dim}_R(M) = 0$. Então, $\mathrm{depth}_R(M) = \mathrm{depth}(R)$.*

**Demonstração.** Ver [23], Lema 28. ∎

**Lema 1.24** *Sejam $M$ um $R$-módulo e $x \in R$. Se $x$ é $R$ e $M$-regular e $\text{G-dim}_R(M) < \infty$, então $\text{G-dim}_{R/(x)}(M/xM) \leq \text{G-dim}_R(M)$. Além disso, se $x \in J(R)$ (o radical de Jacobson de $R$), então $\text{G-dim}_{R/(x)}(M/xM) = \text{G-dim}_R(M)$.*

**Demonstração.** Ver [23], Corolário 33. ∎

**Teorema 1.25** (Fórmula de Auslander-Bridger). *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M \neq 0$ um $R$-módulo. Se $\text{G-dim}_R(M) < \infty$, então $\text{G-dim}_R(M) + \mathrm{depth}_R(M) = \mathrm{depth}(R)$.*

**Demonstração.** Usaremos indução sobre $m = \text{G-dim}_R(M)$. Se $m = 0$, o resultado segue pelo Lema 1.23. Suponha que $m \geq 1$ e que o resultado é válido para módulos de dimensão de Gorenstein igual a $m - 1$. Seja $d = \mathrm{depth}(R)$. Agora provaremos o caso $m = 1$.

Afirmação: Se $\text{G-dim}_R(M) = 1$, então $\mathrm{depth}_R(M) = d - 1$.

De fato, provemos por indução em $d$. Se $d = 0$, então $\text{G-dim}_R(M) = 0$, pelo Lema 1.22. Logo nesse caso, não há módulos $M$ com $\text{G-dim}_R(M) = 1$ e assim, o caso $d = 0$ é verdadeiro por vacuidade. Seja $d \geq 1$ e assuma que resultado é válido para um anel arbitrário de profundidade $d - 1$ e mostraremos que vale para $d$.

Considere uma resolução livre de $M$.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & F \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Assim, $0 \to K \to F \to M \to 0$ é exata, com $\text{G-dim}_R(F) = 0$ e desde que $\text{G-dim}_R(M) = 1$, então pelo Lema 1.19$(i)$, $\text{G-dim}_R(K) = 0$. Como $\text{G-dim}_R(K) = 0 = \text{G-dim}_R(F)$, então pelo Lema 1.23, $\text{depth}_R(K) = d = \text{depth}_R(F)$. Agora pelo Lema B.5,

$$\text{depth}_R(M) \geq \min\{\text{depth}_R(F), \text{depth}_R(K) - 1\} = d - 1.$$

Suponha por contradição que $\text{depth}_R(M) \geq d$. Pela Proposição B.14, existe um elemento $x \in \mathfrak{m}$ que é $R$ e $M$-regular. Considere $\overline{R} = R/xR$ e $\overline{M} = M/xM$. Pela Proposição B.10, $\text{depth}(\overline{R}) = \text{depth}(R) - 1 = d - 1$. Além disso, pelo Lema 1.24, $\text{G-dim}_{\overline{R}}(\overline{M}) = \text{G-dim}_R(M) = 1$. Por hipótese de indução, $\text{depth}_{\overline{R}}(\overline{M}) = d - 2$, logo, pela Proposição B.10, temos que $\text{depth}_R(\overline{M}) = d - 2$. Considere a sequência exata,

$$0 \to M \xrightarrow{f} M \to \overline{M} \to 0$$

onde $f(a) = ax$. Como $\text{depth}_R(M) \geq d$ e $\text{depth}_R(\overline{M}) = d - 2$, então $\text{depth}_R(M) > \text{depth}_R(\overline{M})$. Pelo Lema B.5, $d \leq \text{depth}_R(M) = \text{depth}_R(\overline{M}) + 1 = d - 1$, absurdo. Portanto, $\text{depth}_R(M) = d - 1$. Isso conclui a prova da afirmação, ou seja, do caso $m = 1$.

Finalmente, se $m \geq 2$, temos uma sequência exata $0 \to K \to F \to M \to 0$, com $F$ livre e pelo Lema 1.19$(iii)$, $\text{G-dim}_R(K) = m - 1$. Por hipótese de indução, $\text{G-dim}_R(K) + \text{depth}_R(K) = \text{depth}(R)$. Daí, $\text{depth}_R(K) = d - (m-1)$. Como $\text{depth}_R(F) = d > d - (m - 1) = \text{depth}_R(K)$, pois $m \geq 2$, então pelo Lema B.5,

$$\text{depth}_R(K) \geq \min\{\text{depth}_R(F), \text{depth}_R(M) + 1\} = \text{depth}_R(M) + 1.$$

Assim, $\text{depth}_R(F) > \text{depth}_R(K) \geq \text{depth}_R(M) + 1 > \text{depth}_R(M)$. Portanto, mais uma vez pelo Lema B.5, $\text{depth}_R(K) = \text{depth}_R(M) + 1$, o que implica que

$$\text{depth}_R(M) = \text{depth}_R(K) - 1 = d - (m - 1) - 1 = d - m = \text{depth}(R) - \text{G-dim}_R(M)$$

isto é, $\text{G-dim}_R(M) + \text{depth}_R(M) = \text{depth}(R)$. ■

Dizemos que um $R$-módulo $M$ é *Cohen-Macaulay maximal* se $\text{depth}_R(M) = \dim(R)$.

**Corolário 1.26** *Sejam $R$ um anel local Gorenstein e $M \neq 0$ um $R$-módulo. Então,* $\text{G-dim}_R(M) = 0$ *se, e somente se, $M$ é Cohen-Macaulay maximal.*

**Demonstração.** Pelo Teorema 1.18, $\text{G-dim}_R(M) < \infty$ para todo $R$-módulo $M$. Além disso, sendo $R$ um anel Gorenstein, então $R$ é Cohen-Macaulay, pela Proposição B.19, ou seja, $\operatorname{depth}(R) = \dim(R)$.

Se $\text{G-dim}_R(M) = 0$, então pela fórmula de Auslander Bridger (Teorema 1.25), temos que $\operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}(R)$. Portanto, $\operatorname{depth}_R(M) = \dim(R)$ e assim, $M$ é um módulo Cohen-Macaulay maximal.

Por outro lado, suponha que $M$ é um módulo Cohen-Macaulay maximal, então $\operatorname{depth}_R(M) = \dim(R)$. Novamente pelo Teorema 1.25, $\text{G-dim}_R(M) + \operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}(R)$. Como $\operatorname{depth}_R(M) = \dim(R)$ e $\operatorname{depth}(R) = \dim(R)$, temos $\text{G-dim}_R(M) = 0$. ■

# Capítulo 2

# Ligação de ideais e módulos

Neste capítulo, vamos introduzir a teoria de ligação de ideais e estendê-la para módulos. Além de explorar algumas de suas propriedades e estudar os primos associados de um módulo ligado horizontalmente. Concluímos apresentando uma caracterização de módulos ligados horizontalmente, seguido de algumas consequências. A principal referência utilizada foi [25].

## 2.1 Ligação de ideais

Nesta seção, reformulamos a clássica definição de ligação de ideais com o intuito de obter uma definição no contexto de módulos. Definiremos o operador $\lambda$ como sendo a composição de dois operadores: sizígias e transposta. Esse operador $\lambda$ apareceu pela primeira vez no livro de Auslander e Bridger em [2], onde foi denotado por $D_1$.

Dizemos que um ideal $I$ de um anel local $R$ é *Gorenstein* se o anel quociente $R/I$ é Gorenstein. Para ideais $I$ e $J$ de um anel $R$, definimos o *condutor* de $I$ em $J$ (em $R$) por:

$$J : I = J :_R I = \{x \in R \mid xI \subseteq J\} = \{x \in R \mid xy \in J, \ \forall \ y \in I\}.$$

**Definição 2.1** Seja $R$ um anel local Gorenstein. Dizemos que dois ideais $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ de $R$ são (algebricamente) *ligados* por um ideal Gorenstein $\mathfrak{c}$ se satisfaz as seguintes condições:

$(i)$ $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$,

$(ii)$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} :_R \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} :_R \mathfrak{a}$.

Começamos provando o seguinte lema.

**Lema 2.2** *Sejam $R$ um anel local Gorenstein, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$ ideais de $R$ com $\mathfrak{c}$ um ideal Gorenstein tal que $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Então, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ligados por $\mathfrak{c}$ se, e somente se, os ideais $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ de $R/\mathfrak{c}$ são ligados pelo ideal nulo de $R/\mathfrak{c}$.*

**Demonstração.** Inicialmente mostraremos as seguintes afirmações:

Afirmação 1: $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{c} = \mathfrak{a}/\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}/\mathfrak{c}$.

$\subseteq$) Seja $\overline{x} \in (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{c}$, então existe $x_1 \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ tal que $\overline{x} = \overline{x_1}$. Daí, $x_1 \in \mathfrak{a}$ e $x_1 \in \mathfrak{b}$, o que implica que $\overline{x_1} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ e $\overline{x_1} \in \mathfrak{b}/\mathfrak{c}$. Assim, $\overline{x} = \overline{x_1} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}/\mathfrak{c}$.

$\supseteq$) Considere agora $\overline{y} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}/\mathfrak{c}$. Logo, $\overline{y} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ e $\overline{y} \in \mathfrak{b}/\mathfrak{c}$, ou seja, existem $y_1 \in \mathfrak{a}$ e $y_2 \in \mathfrak{b}$ tais que $\overline{y} = \overline{y_1}$ e $\overline{y} = \overline{y_2}$. Daí, $\overline{y_1} = \overline{y_2}$ e assim, $y_3 = y_1 - y_2 \in \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}$. Logo, $y_1 = y_3 + y_2 \in \mathfrak{b}$. Desse modo, $y_1 \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Portanto, $\overline{y} = \overline{y_1} \in (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{c}$.

Afirmação 2: $(\mathfrak{c} : \mathfrak{b})/\mathfrak{c} = 0 : (\mathfrak{b}/\mathfrak{c})$.

$\subseteq$) Tome $\overline{z} \in (\mathfrak{c} : \mathfrak{b})/\mathfrak{c}$, então existe $z_1 \in \mathfrak{c} : \mathfrak{b}$ tal que $\overline{z} = \overline{z_1}$. Seja $\overline{r} \in \mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ arbitrário. Assim, $\overline{z}\,\overline{r} = \overline{z_1}\,\overline{r} = \overline{z_1 r} = \overline{0}$ em $R/\mathfrak{c}$. Portanto, $\overline{z} \in 0 : (\mathfrak{b}/\mathfrak{c})$.

$\supseteq$) Seja $\overline{w} \in 0 : (\mathfrak{b}/\mathfrak{c})$ e considere $s \in \mathfrak{b}$. Daí, $\overline{ws} = \overline{w}\,\overline{s} = \overline{0}$ em $R/\mathfrak{c}$. Logo, $ws \in \mathfrak{c}$ e assim, $w \in \mathfrak{c} : \mathfrak{b}$. Portanto, $\overline{w} \in (\mathfrak{c} : \mathfrak{b})/\mathfrak{c}$.

Afirmação 3: $(\mathfrak{c} : \mathfrak{a})/\mathfrak{c} = 0 : (\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$ (análogo a Afirmação 2).

($\Rightarrow$) Assuma que $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ligados por $\mathfrak{c}$, então por definição $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{a} = \mathfrak{c} : \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} : \mathfrak{a}$. Quocientando por $\mathfrak{c}$, temos:

$$\mathfrak{c}/\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}/\mathfrak{c} = (\mathfrak{c} : \mathfrak{b})/\mathfrak{c} \text{ e } \mathfrak{b}/\mathfrak{c} = (\mathfrak{c} : \mathfrak{a})/\mathfrak{c}.$$

Assim, pelas Afirmações 1, 2 e 3

$$0 \subseteq \mathfrak{a}/\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}/\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}/\mathfrak{c} = 0 : (\mathfrak{b}/\mathfrak{c}) \text{ e } \mathfrak{b}/\mathfrak{c} = 0 : (\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$$

ou seja, os ideais $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ de $R/\mathfrak{c}$ são ligados pelo ideal nulo de $R/\mathfrak{c}$.

($\Leftarrow$) Suponha agora que os ideais $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ de $R/\mathfrak{c}$ são ligados pelo ideal nulo de $R/\mathfrak{c}$. Daí,

$$0 \subseteq \mathfrak{a}/\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}/\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}/\mathfrak{c} = 0 : (\mathfrak{b}/\mathfrak{c}) \text{ e } \mathfrak{b}/\mathfrak{c} = 0 : (\mathfrak{a}/\mathfrak{c}).$$

Novamente pelas Afirmações 1,2 e 3, $\mathfrak{c}/\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{c} = (\mathfrak{c} : \mathfrak{b})/\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{b}/\mathfrak{c} = (\mathfrak{c} : \mathfrak{a})/\mathfrak{c}$, ou seja, $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} : \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} : \mathfrak{a}$. Portanto, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ligados por $\mathfrak{c}$. ■

Como uma consequência, ligação de ideais por um ideal Gorenstein sempre pode ser substituída pela ligação pelo ideal nulo. De forma geral, para verificar se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ligados por $\mathfrak{c}$, estendemos esses ideais ao longo do homomorfismo natural de anéis $R \to R/\mathfrak{c}$, verificamos a ligação dos ideais estendidos pelo ideal nulo e contraímos os ideais estendidos de volta para $R$. Para simplificar a linguagem, apresentamos a seguinte definição.

**Definição 2.3** Dois ideais em um anel local Gorenstein são *ligados horizontalmente* se eles são ligados pelo ideal nulo.

**Exemplo 2.4** Sejam $k$ um corpo e $R = k[X]/(X^m)$ com $m > 1$ inteiro. Tome $n \in \{1, ..., m-1\}$ e denotamos por $x^n$ a classe residual de $X^n$ em $R$. Então os ideais $(x^n)$ e $(x^{m-n})$ são ligados horizontalmente.

**Demonstração.** Ora, como $k$ é corpo, temos que $R$ é local com ideal maximal $\mathfrak{m} = (X)/(X^m)$. Além disso, desde que $R$ é Gorenstein, segue que o ideal nulo é Gorenstein. É óbvio que $0 \subseteq (x^n) \cap (x^{m-n})$. Note que, $(x^n) = 0 :_R (x^{m-n})$. De fato, seja $a \in (x^n)$ e considere $b \in (x^{m-n})$ arbitrário. Logo, existem $r, s \in R$ tais que $a = x^n r$ e $b = x^{m-n}s$. Daí, $ab = x^n r x^{m-n} s = x^m rs = 0rs = 0$. Assim, $a \in 0 :_R (x^{m-n})$, isto é, $(x^n) \subseteq 0 :_R (x^{m-n})$. Por outro lado, tome $z \in 0 :_R (x^{m-n})$. Então, $zx^{m-n} = 0$. Como $z \in R$, existe $z_1 \in k[X]$ tal que $z = \overline{z_1}$. Logo, $\overline{z_1}\overline{X^{m-n}} = 0$ e assim, $z_1 X^{m-n} \in (X^m)$, o que implica que $z_1 X^{m-n} = X^m w$, com $w \in k[X]$. Desse modo, $z_1 = X^n w$, donde $z = \overline{z_1} = \overline{X^n w} = x^n \overline{w} \in (x^n)$, ou seja, $0 :_R (x^{m-n}) \subseteq (x^n)$. De forma análoga, mostramos que $(x^{m-n}) = 0 :_R (x^n)$. Assim, $(x^n)$ é ligado a $(x^{m-n})$ pelo ideal nulo e, portanto, são ligados horizontalmente. ■

A discussão anterior mostra que a ligação geral pode ser pensada informalmente como um procedimento de três etapas que consiste na extensão de um ideal, ligação horizontal, e contração de um ideal. Nosso próximo objetivo é mostrar que todos os três componentes dessa sequência podem ser definidos para módulos. Para tanto, relembraremos os operadores sizígias e transposta.

**Observação 2.5** Seja $M$ um $R$-módulo.

$(i)$ Considere $P \to M$ um epimorfismo tal que $P$ é projetivo. O núcleo deste epimorfismo é denotado por $\Omega M$ e é chamado *módulo sizígias* de $M$. Pelo Lema de Schanuel's (Lema A.11), $\Omega M$ é definido unicamente a menos de equivalência projetiva. Porém, se $R$ admite coberturas projetivas, então pelo Lema C.7, $\Omega M$ é definido unicamente a menos de isomorfismo assumindo que $P \to M$ é uma cobertura projetiva de $M$. De agora em diante, a menos que seja explicitamente declarado o contrário, esta suposição sempre será feita.

$(ii)$ Seja $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ uma apresentação projetiva de $M$. Vimos na Definição 1.1 que a transposta, $\mathrm{Tr}M$, de $M$ é definida pela sequência exata

$$0 \to M^* \to P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0$$

obtida dualizando a apresentação projetiva acima. Pela Proposição 1.3, a transposta é definida unicamente a menos de equivalência projetiva. Porém, se assumirmos a existência de coberturas projetivas e que a apresentação projetiva de $M$ é minimal, então pelo Lema C.8, Tr$M$ é definida unicamente a menos de isomorfismo. De agora em diante, a menos que seja explicitamente declarado o contrário, essa suposição da minimalidade sempre será feita. Neste contexto, a transposta de um módulo projetivo será o módulo nulo.

Como um primeiro passo para generalizar a ligação horizontal, passamos dos ideais aos módulos. Uma maneira natural de ver um ideal como um módulo é passar para seu módulo cíclico correspondente. O significado preciso dessa afirmação é capturado no seguinte lema.

**Lema 2.6** *Dois ideais em um anel são iguais se, e somente se, os módulos cíclicos correspondentes são isomórficos.*

**Demonstração.** Sejam $I$ e $J$ dois ideais em um anel $R$. Mostraremos que $I = J$ se, e somente se, $R/I \cong R/J$ como $R$-módulos.

($\Rightarrow$) Suponha que $I = J$, então $R/I = R/J$. Como a aplicação identidade $Id : R/I \to R/I = R/J$ é um isomofismo segue que $R/I \cong R/J$.

($\Leftarrow$) Assuma agora que $R/I \cong R/J$, então existe um isomorfismo $\varphi : R/I \to R/J$. Sabemos que, $I = 0 : (R/I)$ e $J = 0 : (R/J)$. Seja $a \in I$. Por definição, $a(R/I) = 0$, isto é, $az = 0$ para todo $z \in R/I$. Considere agora, $y \in R/J$. Como $\varphi$ é um isomorfismo, existe $x \in R/I$ tal que $\varphi(x) = y$. Logo,

$$ay = a\varphi(x) = \varphi(ax) = \varphi(0) = 0.$$

Portanto, $a \in 0 : (R/J) = J$, donde $I \subseteq J$. De forma análoga, mostramos que $J \subseteq I$ e assim, $I = J$. ■

Agora, para descrever a ligação horizontal em termos de módulos precisaremos do seguinte resultado.

**Lema 2.7** *Sejam $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais em um anel local $R$, onde $\mathfrak{b}$ é um ideal próprio. Então, $\mathfrak{a} = 0 : \mathfrak{b}$ se, e somente se, $R/\mathfrak{a}$ é isomorfo a $\Omega \operatorname{Tr} R/\mathfrak{b}$.*

**Demonstração.** Se $\mathfrak{b} = 0$, então $\mathfrak{a} = 0 : \mathfrak{b}$ se, e somente se, $\mathfrak{a} = R$ se, e somente se, $R/\mathfrak{a} \cong \Omega \operatorname{Tr} R/\mathfrak{b}$ , pois $\Omega \operatorname{Tr} R/\mathfrak{b} \cong \Omega \operatorname{Tr} R \cong 0$.

Assuma agora que $\mathfrak{b} \neq 0$ e seja $R^n \to \mathfrak{b}$ uma cobertura projetiva de $\mathfrak{b}$. Note que $R/\mathfrak{b}$ não tem somando direto projetivo não nulo. Caso contrário, existiria uma injeção

$R \hookrightarrow R/\mathfrak{b}$. Daí, $R \cong \mathrm{Im}(R \hookrightarrow R/\mathfrak{b})$, donde $\mathfrak{b}R \cong \mathfrak{b}\mathrm{Im}(R \hookrightarrow R/\mathfrak{b}) = \overline{0}$, ou seja, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}R \cong \overline{0}$, absurdo, pois $\mathfrak{b} \neq 0$. Considere

$$R^n \to R \xrightarrow{\pi} R/\mathfrak{b} \to 0$$

uma apresentação projetiva minimal de $R/\mathfrak{b}$, onde $\pi$ é a projeção natural. Dualizando-a, temos a sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{b}, R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_R(R, R) \to \mathrm{Hom}_R(R^n, R) \to \mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b} \to 0$$

Pelo Teorema C.9,

$$\mathrm{Hom}_R(R, R) \to \mathrm{Hom}_R(R^n, R) \to \mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b} \to 0$$

é uma apresentação projetiva minimal de $\mathrm{Tr} R/\mathfrak{b}$. Como consequência, temos uma sequência exata

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{b}, R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_R(R, R) \to \Omega\, \mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b} \to 0$$

Seja $\varphi : \mathrm{Hom}_R(R, R) \to R$ o isomorfismo, dado por $\varphi(f) = f(1)$. Compondo $\varphi$ com $\pi^*$, obtemos a sequência exata

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{b}, R) \xrightarrow{\varphi\circ\pi^*} R \xrightarrow{\psi} \Omega\, \mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b} \to 0$$

onde $(\varphi \circ \pi^*)(\alpha) = \varphi(\pi^*(\alpha)) = \varphi(\alpha \circ \pi) = (\alpha \circ \pi)(1) = \alpha(\overline{1})$.
Mostraremos que $\mathrm{Im}(\varphi \circ \pi^*) = 0 : \mathfrak{b}$. De fato, seja $y \in \mathrm{Im}(\varphi \circ \pi^*)$, então existe $g \in \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{b}, R)$ tal que $\varphi \circ \pi^*(g) = y$, ou seja, $g(\overline{1}) = y$. Dado $x \in \mathfrak{b}$ arbitrário, temos que $yx = g(\overline{1})x = g(\overline{x}) = g(\overline{0}) = 0$, isto é, $y \in 0 : \mathfrak{b}$, e assim $\mathrm{Im}(\varphi \circ \pi^*) \subseteq 0 : \mathfrak{b}$.

Por outro lado, considere $z \in 0 : \mathfrak{b}$, então $zw = 0$ para todo $w \in \mathfrak{b}$. Defina $h : R/\mathfrak{b} \to R$ por $h(\overline{x}) = zx$. Como $zw = 0$ para todo $w \in \mathfrak{b}$, $h$ está bem definida e claramente $h$ é um homomorfismo. Logo, $z = z\,1 = h(\overline{1}) = (\varphi \circ \pi^*)(h) \in \mathrm{Im}(\varphi \circ \pi^*)$, isto é, $z \in \mathrm{Im}(\varphi \circ \pi^*)$, donde $0 : \mathfrak{b} \subseteq \mathrm{Im}(\varphi \circ \pi^*)$. Daí, $\mathrm{Im}(\varphi \circ \pi^*) = 0 : \mathfrak{b}$. Pelo Lema 2.6,

$$\mathfrak{a} = 0 : \mathfrak{b} \Leftrightarrow R/\mathfrak{a} \cong R/(0 : \mathfrak{b}) = R/\mathrm{Im}(\varphi \circ \pi^*) = R/\mathrm{Ker}(\psi) \cong \mathrm{Im}(\psi) = \Omega\, \mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b}.$$

Portanto, $\mathfrak{a} = 0 : \mathfrak{b}$ se, e somente se, $R/\mathfrak{a}$ é isomorfo a $\Omega\, \mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b}$. ∎

Retornando para ligação de ideais, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.8** *Seja $R$ um anel local Gorenstein. Então, dois ideais $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ não nulos de $R$, com um deles próprio, são ligados horizontalmente se, e somente se, $R/\mathfrak{a} \cong \Omega\, \mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b}$ e $R/\mathfrak{b} \cong \Omega\, \mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{a}$.*

**Demonstração.** Digamos que $\mathfrak{b}$ seja próprio e suponha que $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ligados horizontalmente. Pela Definição 2.3, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ligados pelo ideal nulo. Em particular, $\mathfrak{a} = 0 : \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} = 0 : \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{b} = 0 : \mathfrak{a}$, então $\mathfrak{a} \neq R$. Caso contrário, teríamos $\mathfrak{b} = 0 : R = 0$, absurdo, pois $\mathfrak{b} \neq 0$. Sendo $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ diferentes de $R$, segue pelo Lema 2.7 que

$$R/\mathfrak{a} \cong \Omega\,\mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b} \text{ e } R/\mathfrak{b} \cong \Omega\,\mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{a}.$$

Reciprocamente, assuma que $R/\mathfrak{a} \cong \Omega\,\mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{b}$ e $R/\mathfrak{b} \cong \Omega\,\mathrm{Tr}\, R/\mathfrak{a}$. Pelo Lema 2.7, $\mathfrak{a} = 0 : \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} = 0 : \mathfrak{a}$. Além disso, é imediato que $0 \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Portanto, por definição, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ligados horizontalmente. ■

A proposição recém provada indica a importância do operador $\Omega\,\mathrm{Tr}$ na teoria de ligação, de agora em diante ele será denotado por $\lambda$.

Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ligados horizontalmente, então cada um dos dois ideais é unicamente determinado pelo outro como seu anulador. Portanto, faz sentido dizer que o ideal $\mathfrak{a}$ é *ligado horizontalmente* (omitindo o $\mathfrak{b}$), ou seja, $\mathfrak{a} = 0 : (0 : \mathfrak{a})$ (neste caso, $\mathfrak{b} = (0 : \mathfrak{a})$). Nesta terminologia temos a seguinte consequência.

**Corolário 2.9** *Seja $\mathfrak{a}$ um ideal próprio não nulo de um anel local Gorentein $R$. Então, $\mathfrak{a}$ é ligado horizontalmente se, e somente se, $R/\mathfrak{a} \cong \lambda^2(R/\mathfrak{a})$.*

**Demonstração.** Suponha que $\mathfrak{a}$ é ligado horizontalmente, digamos que $\mathfrak{a}$ seja ligado a $\mathfrak{b}$. Pela Proposição 2.8, $R/\mathfrak{a} \cong \lambda\,(R/\mathfrak{b})$ e $R/\mathfrak{b} \cong \lambda\,(R/\mathfrak{a})$. Portanto, $R/\mathfrak{a} \cong \lambda^2(R/\mathfrak{a})$.

Por outro lado, por hipótese e pelo Lema 2.7 tem-se,

$$R/\mathfrak{a} \cong \lambda^2(R/\mathfrak{a}) = \lambda(\lambda(R/\mathfrak{a})) \cong \lambda(R/(0 : \mathfrak{a}))$$

e $R/(0 : \mathfrak{a}) \cong \lambda(R/\mathfrak{a})$. Pela Proposição 2.8, $\mathfrak{a}$ é ligado horizontalmente a $(0 : \mathfrak{a})$. ■

## 2.2 Ligação de módulos

Tendo em vista os dois últimos resultados da seção anterior, a ligação horizontal de ideais pode ser estendida para o contexto de módulos. Além disso, para que o operador $\lambda$ esteja bem definido a única condição necessária é a existência de coberturas projetivas. Desse modo, os operadores sizígias e transposta estão bem definidos a menos de isomorfismo e consequentemente o $\lambda$ está bem definido.

Desse modo, trabalharemos com anéis $R$ para os quais todo módulo (lembrando que estamos assumindo que todo módulo é finitamente gerado) possui uma cobertura projetiva. Esses anéis são chamados de *anéis semiperfeitos*. Todo anel local é semiperfeito. Para mais informações sobre essa classe de anéis veja Apêndice C.

Começaremos com a definição de ligação horizontal de módulos e, em seguida, apresentaremos algumas propriedades.

**Definição 2.10** Sejam $R$ um anel semiperfeito e $M, N$ $R$-módulos. Dizemos que $M$ é *ligado horizontalmente* a $N$ quando $M \cong \lambda N$ e $N \cong \lambda M$. Também dizemos que $M$ é ligado horizontalmente (a $\lambda M$) se, e somente se, $M \cong \lambda^2 M$.

**Exemplo 2.11** Sejam $k$ um corpo e $R = k[X]/(X^m)$ com $m > 1$ inteiro. Tome $n \in \{1, ..., m-1\}$ e denotamos por $x^n$ a classe residual de $X^n$ em $R$. Então, $R/(x^n)$ é ligado horizontalmente a $R/(x^{m-n})$.

**Demonstração.** Pelo Exemplo 2.4 os ideais $(x^n)$ e $(x^{m-n})$ são ligados horizontalmente. Pela Proposição 2.8, segue que $R/(x^n) \cong \lambda R/(x^{m-n})$ e $R/(x^{m-n}) \cong \lambda R/(x^n)$. Portanto, pela Definição 2.10, $R/(x^n)$ é ligado horizontalmente a $R/(x^{m-n})$. ■

Como consequência do resultado principal da Seção 2.3, mostraremos que todo módulo Cohen-Macaulay maximal e estável (veja Observação 2.12 abaixo para definição de estável) sobre um anel local Gorenstein é ligado horizontalmente (Veja Corolário 2.25).

**Observação 2.12** Segue desta definição que um módulo projetivo é ligado horizontalmente, se e somente se, ele é isomorfo ao módulo nulo. De fato, a transposta e o módulo sizígias de um módulo projetivo são nulos e assim, o $\lambda$ de um projetivo é também nulo. Além disso, todo módulo ligado horizontalmente é *estável*, ou seja, é um módulo que não possui somando direto projetivo não nulo (veja [25], Proposição 3).

Uma vez definida a ligação horizontal para módulos, podemos agora definir a ligação geral para módulos.

**Definição 2.13** Seja $R$ um anel semiperfeito. Um $R$-módulo $M$ é dito ser *ligado* a um $R$-módulo $N$ por um ideal $\mathfrak{c}$ se, $\mathfrak{c} \subseteq (0 :_R M) \cap (0 :_R N)$ e $M$ e $N$ são ligados horizontalmente como $R/\mathfrak{c}$-módulos. Nesta situação, denotamos $M \underset{\mathfrak{c}}{\sim} N$.

**Convenção 2.14** De agora em diante, além de Noetheriano comutativo e com unidade, iremos assumir que $R$ é semiperfeito.

Nosso principal objetivo é o estudo dos módulos ligados horizontalmente. Começaremos esse estudo com o seguinte resultado.

**Proposição 2.15** *Suponha que $M$ é ligado horizontalmente. Então, $\lambda M$ também é ligado horizontalmente e, em particular, $\lambda M$ é estável.*

**Demonstração.** Como $M$ é ligado horizontalmente, então $M \cong \lambda^2 M$. Logo, $\lambda^2(\lambda M) \cong \lambda(\lambda^2 M) \cong \lambda M$, ou seja, $\lambda M \cong \lambda^2(\lambda M)$. Portanto, $\lambda M$ é ligado horizontalmente e, pela Observação 2.12, $\lambda M$ é estável. ∎

A partir de agora, relacionaremos a ligação horizontal de módulos com a teoria de primos associados. Primeiro, vejamos a definição de módulo unmixed.

**Definição 2.16** Dizemos que um $R$-módulo $M$ é *unmixed* se todos os primos associados tem a mesma altura.

Seja $M$ um $R$-módulo unmixed. Já sabemos que $\mathrm{Min}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M)$. Agora, seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. Se $\mathfrak{p}$ não for minimal, então $\mathfrak{p}$ contém propriamente um minimal $\mathfrak{q}$. Daí, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) > \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$, absurdo. Portanto, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R(M)$ e assim $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Min}_R(M)$, donde $\mathrm{Ass}_R(M) = \mathrm{Min}_R(M)$, ou seja, se $M$ é unmixed, os primos associados de $M$ são iguais aos primos associados minimais de $M$.

Temos o seguinte resultado no contexto de ideais.

**Proposição 2.17** *Sejam $R$ um anel qualquer (não necessariamente semiperfeito), $\mathfrak{b}$ um ideal de $R$ e $\mathfrak{a} = 0 : \mathfrak{b}$. Então, $\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$ e se $R$ é unmixed e $\mathfrak{b} = 0 : \mathfrak{a}$, temos*

$$\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) \cup \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{b}) = \mathrm{Ass}(R).$$

**Demonstração.** Se $\mathfrak{b} = 0$, então $\mathfrak{a} = R$. Daí, $\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) = \emptyset \subseteq \mathrm{Ass}(R)$. Além disso, $\emptyset \cup \mathrm{Ass}(R) = \mathrm{Ass}(R)$ e assim a segunda afirmação é trivial. Assuma que $\mathfrak{b} \neq 0$ e seja $\mathfrak{b} = (b_1, ..., b_n)$. Considere a aplicação $f : R \to R^n$ definida por $f(x) = (b_1 x, ..., b_n x) \in R^n$. Afirmação: $0 : \mathfrak{b} = \mathrm{Ker}(f)$.

De fato, seja $x \in 0 : \mathfrak{b}$, então $xb = 0$ para todo $b \in \mathfrak{b}$. Daí, $f(x) = (b_1 x, ..., b_n x) = 0$, donde $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Agora, considere $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Logo, $f(y) = (0, ..., 0)$, ou seja, $(b_1 y, ..., b_n y) = (0, ..., 0)$. Sendo $b_1, ..., b_n$ os geradores de $\mathfrak{b}$, segue que $y \in 0 : \mathfrak{b}$.

Pelo Teorema do Isomorfismo, $R/(0 : \mathfrak{b}) = R/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow R^n$. Assim, $\mathrm{Ass}_R(R/(0 : \mathfrak{b})) \subseteq \mathrm{Ass}_R(R^n) = \mathrm{Ass}(R)$. Daí, $\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$. Usando agora que $\mathfrak{b} = 0 : \mathfrak{a}$ mostramos que $\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$. Portanto, $\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) \cup \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$.

Tome agora $\mathfrak{p}$ um primo associado de $R$. Como $\mathfrak{a} := 0 : \mathfrak{b}$, então $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0 \subseteq \mathfrak{p}$. Sendo $\mathfrak{p}$ primo, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Pela suposição de $R$ ser unmixed e $\mathfrak{p}$ um primo associado de $R$, então $\mathfrak{p}$ é um primo associado minimal de $R$ que contém $\mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}$.

Se $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} = 0 : (R/\mathfrak{a})$, então $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(R/\mathfrak{a})$, ou seja, $\mathfrak{p}$ é um primo minimal do suporte de $R/\mathfrak{a}$. Como $\mathrm{Min}_R(\mathrm{Supp}_R(R/\mathfrak{a})) = \mathrm{Min}_R(\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}))$, então $\mathfrak{p}$ é um primo associado minimal de $R/\mathfrak{a}$, em particular, é um primo associado de $R/\mathfrak{a}$. Agora, se supormos que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b} = 0 : (R/\mathfrak{b})$, obtemos que $\mathfrak{p}$ é um primo associado de $R/\mathfrak{b}$. Logo, $\mathfrak{p}$ é um primo associado de $R/\mathfrak{a}$ ou $R/\mathfrak{b}$, ou seja, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) \cup \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{b})$, donde $\mathrm{Ass}(R) \subseteq \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) \cup \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{b})$. Portanto, $\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) \cup \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{b}) = \mathrm{Ass}(R)$. ■

A generalização da Proposição 2.17 para módulos pode ser feita da seguinte forma.

**Teorema 2.18** *Sejam $R$ um anel local e $M$ um $R$-módulo. Então, $\mathrm{Ass}_R(\lambda M) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$. Se $R$ é unmixed e $M \neq 0$ é ligado horizontalmente, então*

$$\mathrm{Ass}_R(M) \cup \mathrm{Ass}_R(\lambda M) = \mathrm{Ass}(R).$$

**Demonstração.** Como $\lambda M$ é um módulo sizígias, então existe um $R$-módulo projetivo $P$ e uma injeção $\lambda M \hookrightarrow P$. Além disso, $P$ é livre, pois $R$ é local. Daí, $P \cong R^n$ para algum inteiro $n \geq 1$. Portanto, $\mathrm{Ass}_R(\lambda M) \subseteq \mathrm{Ass}(R^n) = \mathrm{Ass}(R)$.

Se $M$ é ligado horizontalmente, então $M \cong \lambda^2 M \cong \lambda(\lambda M)$. Daí, $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$. Logo, $\mathrm{Ass}_R(M) \cup \mathrm{Ass}_R(\lambda M) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$.

Seja $\mathfrak{p}$ um primo associado de $R$ e $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ uma apresentação livre minimal de $M$. Dualizando-a, temos a sequência exata

$$0 \to M^* \to P_0^* \to \lambda M \to 0.$$

Suponha que $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}_R(M) \cup \mathrm{Supp}_R(\lambda M)$, então $M_\mathfrak{p} = 0$ e $(\lambda M)_\mathfrak{p} = 0$. Localizando a sequência exata acima em $\mathfrak{p}$, obtemos a sequência exata

$$0 \to (M^*)_\mathfrak{p} \to (P_0^*)_\mathfrak{p} \to (\lambda M)_\mathfrak{p} \to 0$$

Como $M$ e $P_0$ são finitamente gerados, temos que a sequência

$$0 \to (M_\mathfrak{p})^* \to ((P_0)_\mathfrak{p})^* \to (\lambda M)_\mathfrak{p} \to 0$$

é também exata, donde $(P_0^*)_\mathfrak{p} \cong ((P_0)_\mathfrak{p})^* = 0$, absurdo, pois como $P_0^*$ é livre, então $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) = \mathrm{Ass}_R(R^n) = \mathrm{Ass}_R(P_0^*) \subseteq \mathrm{Supp}_R(P_0^*)$ para algum $n \geq 1$ inteiro e assim, $(P_0^*)_\mathfrak{p} \neq 0$. Portanto, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M) \cup \mathrm{Supp}_R(\lambda M)$, o que implica que

$$\mathrm{Ass}(R) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M) \cup \mathrm{Supp}_R(\lambda M).$$

Se $R$ é unmixed, então $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{Min}(R)$ e assim, $\mathfrak{p}$ é um primo associado minimal de $R$. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$, então $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\mathrm{Supp}_R(M)) = \mathrm{Min}(\mathrm{Ass}_R(M)) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M)$. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(\lambda M)$, então $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\mathrm{Supp}_R(\lambda M)) = \mathrm{Min}(\mathrm{Ass}_R(\lambda M)) \subseteq \mathrm{Ass}_R(\lambda M)$. Em todo caso, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M) \cup \mathrm{Ass}_R(\lambda M)$. Portanto, $\mathrm{Ass}(R) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M) \cup \mathrm{Ass}_R(\lambda M)$ e assim, $\mathrm{Ass}_R(M) \cup \mathrm{Ass}_R(\lambda M) = \mathrm{Ass}(R)$. ■

## 2.3 Critério para ligação horizontal

Nesta seção, demonstraremos uma caracterização para os módulos ligados horizontalmente e apresentaremos algumas de suas consequências. Começaremos com o seguinte lema fundamental.

**Lema 2.19** *Seja $M$ um $R$-módulo estável. Então a imagem do homomorfismo canônico $\sigma_M : M \to M^{**}$ é isomorfo a $\lambda^2 M$.*

**Demonstração.** Seja $P_1 \to P_o \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ uma apresentação projetiva minimal de $M$. Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_{P_0}", "\cong"'] & M \arrow[d, "\sigma_M"] \\ P_0^{**} \arrow[r, "\varphi^{**}"] & M^{**} \end{tikzcd}$$

ou seja, $\varphi^{**} \circ \sigma_{P_0} = \sigma_M \circ \varphi$. Note que,

$$\mathrm{Im}(\sigma_M) = \sigma_M(M) = \sigma_M(\mathrm{Im}(\varphi)) = \sigma_M(\varphi(P_0)) = \varphi^{**}(\sigma_{P_0}(P_0)) = \varphi^{**}(P_0^{**}) = \mathrm{Im}(\varphi^{**}).$$

Dualizando a apresentação projetiva minimal de $M$ acima temos as sequências exatas:

$$0 \to M^* \xrightarrow{\varphi^*} P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0 \text{ e } 0 \to M^* \xrightarrow{\varphi^*} P_0^* \to \lambda M \to 0$$

onde $P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0$ é uma apresentação projetiva minimal de $\mathrm{Tr}M$ pelo Teorema C.9. Em particular, $P_0^* \to \lambda M \to 0$ é uma cobertura projetiva de $\lambda M$. Considere $Q_0 \xrightarrow{\psi} M^* \to 0$ uma cobertura projetiva de $M^*$. Pela exatidão da sequência

$$0 \to M^* \xrightarrow{\varphi^*} P_0^* \to \lambda M \to 0$$

temos que $\mathrm{Ker}(P_0^* \to \lambda M) \cong M^*$. Logo,

$$\begin{tikzcd} Q_0 \arrow[rr, "\alpha:=\varphi^*\circ\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & P_0^* \arrow[r] & \lambda M \arrow[r] & 0 \\ & M^* \arrow[ur, "\varphi^*"'] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

é uma apresentação projetiva minimal de $\lambda M$. Aplicando $(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, R)$ a esta apresentação, temos a seguinte sequência exata:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\lambda M)^* \arrow[r] & P_0^{**} \arrow[rr, "\alpha*"] \arrow[dr, "\varphi^{**}"'] & & Q_0^* \arrow[r] & \mathrm{Tr}(\lambda M) \arrow[r] & 0 \\ & & & M^{**} \arrow[ur, "\psi^*"'] & & & \end{tikzcd}$$

Pela exatidão da sequência acima, junto com a Proposição C.10, $\mathrm{Im}(\alpha^*) \cong \Omega\mathrm{Tr}(\lambda M) = \lambda^2 M$. Por outro lado, como $\psi^*$ é um monomorfismo, isto é, um homomorfismo injetor, temos

$$\mathrm{Im}(\alpha^*) = \mathrm{Im}(\psi^* \circ \varphi^{**}) = \psi^*(\varphi^{**}(P_0^{**})) = \psi^*(\mathrm{Im}(\varphi^{**})) \cong \mathrm{Im}(\varphi^{**}).$$

Portanto, $\mathrm{Im}(\sigma_M) = \mathrm{Im}(\varphi^{**}) \cong \mathrm{Im}(\alpha^*) \cong \lambda^2 M$, ou seja, $\mathrm{Im}(\sigma_M) \cong \lambda^2 M$. ∎

Podemos agora caracterizar os módulos ligados horizontalmente.

**Teorema 2.20** *Seja $M$ um $R$-módulo. Então $M$ é ligado horizontalmente se, e somente se, $M$ é estável e* $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R) = 0$.

**Demonstração.** $(\Rightarrow)$ Suponha que $M$ é ligado horizontalmente, então $M \cong \lambda^2 M$. Digamos que $\psi$ seja tal isomorfismo. Em particular, $M$ é estável, pela Observação 2.12. Pela Proposição 1.7, temos que a sequência

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R) \to M \xrightarrow{g} \mathrm{Im}(\sigma_M) \to 0$$

é exata, e assim $\mathrm{Ker}(g) \cong \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R)$. Além disso, pelo Lema 2.19 existe um isomorfismo $f : \mathrm{Im}(\sigma_M) \to \lambda^2 M$. Como $f, g$ e $\psi$ são sobrejetoras, então $\varphi = \psi \circ f \circ g : M \to M$ é um endomorfismo sobrejetor. Portanto, $\varphi$ é um isomorfismo (veja [27], Teorema 2.4). Em particular, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$. Note que, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(g)$. De fato,

$$x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(f(g(x))) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(g).$$

Assim, $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R) \cong \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(\varphi) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Assuma agora que $M$ é estável e $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R) = 0$. Pelo Lema 2.19 e Proposição 1.7, a sequência

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R) \to M \to \lambda^2 M \to 0$$

é exata. Como $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R) = 0$, segue que $M \cong \lambda^2 M$. Portanto, $M$ é ligado horizontalmente. ∎

Vamos deixar registrado o seguinte fato utilizado na demonstração do teorema anterior.

**Observação 2.21** Dado um $R$-módulo estável $M$, existe uma sequência exata curta:

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}M, R) \to M \to \lambda^2 M \to 0 \tag{2.1}$$

Concluiremos a seção com algumas consequências do Teorema 2.20.

**Corolário 2.22** *Um $R$-módulo $M$ é ligado horizontalmente se, e somente se, $M$ é um módulo de sizígias estável.*

**Demonstração.** ($\Rightarrow$) Suponha que $M$ é ligado horizontalmente. Por definição, $M \cong \lambda^2 M = \Omega \mathrm{Tr} \lambda M$, o que mostra que $M$ é um módulo de sizígias. Pela Observação 2.12, $M$ é estável. Portanto, $M$ é um módulo de sizígias estável.

($\Leftarrow$) Assuma que $M$ é um módulo de sizígias estável. Pela Proposição 1.11, temos que $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr} M, R) = 0$. Como $M$ também é estável, tem-se pelo Teorema 2.20 que $M$ é ligado horizontalmente. ∎

**Corolário 2.23** *Todo $R$-módulo estável e reflexivo é ligado horizontalmente.*

**Demonstração.** Seja $M$ um $R$-módulo estável e reflexivo. Como $M$ é reflexivo, então o homomorfismo canônico $\sigma_M : M \to M^{**}$ é um isomorfismo. Logo, $\mathrm{Ker}(\sigma_M) = 0 = \mathrm{Coker}(\sigma_M)$. Pela Proposição 1.7, $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr} M, R) \cong \mathrm{Ker}(\sigma_M) = 0$. Portanto, pelo Teorema 2.20, $M$ é ligado horizontalmente. ∎

O próximo resultado relaciona G-dimensão zero com ligação horizontal.

**Corolário 2.24** *Seja $M$ um $R$-módulo estável de* G*-dimensão zero. Então $M$ é ligado horizontalmente e $\lambda M$ é um $R$-módulo estável de* G*-dimensão zero.*

**Demonstração.** Como $\mathrm{G}\text{-}\mathrm{dim}_R(M) = 0$, segue que $M$ é reflexivo. Pelo Corolário 2.23 e Proposição 2.15, $M$ é ligado horizontalmente e $\lambda M$ é estável. Pelo Lema 1.15($i$), $\mathrm{G}\text{-}\mathrm{dim}_R(\mathrm{Tr} M) = 0$. Portanto, $\mathrm{G}\text{-}\mathrm{dim}_R(\lambda M) = \mathrm{G}\text{-}\mathrm{dim}_R(\Omega \mathrm{Tr} M) = 0$, pelo Lema 1.15($iii$), como queríamos. ∎

Concluiremos a seção exibindo uma classe de módulos ligados horizontalmente sobre os anéis locais Gorenstein.

**Corolário 2.25** *Sejam $R$ um anel local Gorenstein e $M$ um $R$-módulo estável Cohen-Macaulay maximal. Então $M$ é ligado horizontalmente e $\lambda M$ é um $R$-módulo estável Cohen-Macaulay maximal.*

**Demonstração.** Desde que $R$ é um anel local Gorenstein e $M$ Cohen-Macaulay maximal, segue do Corolário 1.26 que $\mathrm{G}\text{-}\mathrm{dim}_R(M) = 0$. Agora pelo Corolário 2.24, $M$ é ligado horizontalmente e $\lambda M$ é um $R$-módulo estável de G-dimensão zero. Novamente pelo Corolário 1.26, $\lambda M$ é Cohen-Macaulay maximal. ∎

# Capítulo 3

# Ligação de módulos de dimensão de Gorenstein finita

Neste capítulo, estudaremos a teoria de ligação para módulos que possuem dimensão de Gorenstein finita. Trabalharemos com um importante invariante, o grade reduzido, discutiremos sua relação com a ligação horizontal e a propriedade $\tilde{S}_k$, e caracterizaremos o conjunto dos primos associados de certos módulos Ext, bem como forneceremos algumas consequências. A principal referência utilizada foi [9].

## 3.1 Grade reduzido, ligação e primos associados

O grade reduzido foi introduzido por Hyman Bass [4], que utilizou essa noção para descrever módulos que são uma $i$-ésima sizígias para algum $i$ (veja Definição 1.17). Começamos com a definição de grade reduzido.

**Definição 3.1** O *grade reduzido* de um $R$-módulo $M$ é definido por

$$\text{r.grade}_R(M) = \inf\{i > 0 \mid \text{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}.$$

**Observação 3.2** Lembramos que o *grade* de um $R$-módulo $M$ é dado por

$$\text{grade}_R(M) = \inf\{i \geq 0 \mid \text{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}.$$

$(i)$ É fácil ver que se $\text{grade}_R(M) > 0$, então $\text{grade}_R(M) = \text{r.grade}_R(M)$.

$(ii)$ Se $\text{G-dim}_R(M) = 0$, então $\text{r.grade}_R(M) = \infty$.

(*iii*) Se $M$ tem G-dimensão finita e positiva, então pelo Lema 1.19($vi$), segue a desigualdade $\mathrm{r.grade}_R(M) \leq \text{G-dim}_R(M)$. Em particular, $\mathrm{r.grade}_R(M)$ também é finito.

Note que todo módulo projetivo possui grade reduzido infinito pela Observação 3.2($ii$). Segue abaixo um exemplo com grade reduzido finito.

**Exemplo 3.3** Seja $M$ um $R$-módulo não nulo tal que $\mathrm{grade}_R(M) \geq 1$. Então, $\mathrm{Tr}M$ é um $R$-módulo com grade reduzido igual a 1.

**Demonstração.** Por definição, $\mathrm{r.grade}_R(\mathrm{Tr}M) \geq 1$. Pela Proposição 1.7, temos a sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}M, R) \to M \xrightarrow{\sigma_M} M^{**} \to \mathrm{Ext}^2_R(\mathrm{Tr}M, R) \to 0.$$

Como $\mathrm{grade}_R(M) \geq 1$, segue que $M^* = 0$. Logo, $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}M, R) \cong M \neq 0$. Portanto, $\mathrm{r.grade}_R(\mathrm{Tr}M) = 1$. ■

Sejam $M$ um $R$-módulo estável e $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ uma apresentação projetiva minimal de $M$. Então pelo Teorema C.9, $P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0$ é uma apresentação projetiva minimal de $\mathrm{Tr}M$. Consequentemente temos as seguintes sequências exatas induzidas

$$0 \to M^* \to P_0^* \to \lambda M \to 0 \tag{3.1}$$

$$0 \to \lambda M \to P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0 \tag{3.2}$$

Vamos agora relacionar o grade reduzido e a propriedade $\tilde{S}_k$ com a ligação horizontal de módulos.

**Proposição 3.4** *Seja $M$ um $R$-módulo estável de* G*-dimensão finita. Então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

(*i*) *Seja $k$ um inteiro positivo. Então, $M$ satisfaz a propriedade $\tilde{S}_k$ se, e somente se, $\mathrm{r.grade}_R(\lambda M) \geq k$ e $M$ é ligado horizontalmente.*

(*ii*) *Assuma que $M$ é ligado horizontalmente. Então $\text{G-dim}_R(M) \neq 0$ se, e somente se, $\mathrm{r.grade}_R(\lambda M) < \infty$.*

**Demonstração.** ($i$) ($\Rightarrow$) Assuma que $M$ satisfaz $\tilde{S}_k$. Desde que $\text{G-dim}_R(M) < \infty$, segue do Teorema 1.21(b) que $\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Tr}M, R) = 0$ , para todo $1 \leq i \leq k$. Como $M$ é estável e $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}M, R) = 0$, o Teorema 2.20 garante que $M$ é ligado horizontalmente. Considere a sequência exata (3.2)

$$0 \to \lambda M \to P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0$$

que induz a seguinte sequência exata longa (Proposição A.18($i$))

$$\cdots \to \operatorname{Ext}_R^i(P_1^*, R) \to \operatorname{Ext}_R^i(\lambda M, R) \to \operatorname{Ext}_R^{i+1}(\operatorname{Tr} M, R) \to \cdots$$

Pela exatidão da sequência longa acima e usando o fato que $\operatorname{Ext}_R^{i+1}(\operatorname{Tr} M, R) = 0$, para todo $0 \leq i \leq k-1$ e $\operatorname{Ext}_R^i(P_1^*, R) = 0$, para todo $i \geq 1$, segue que $\operatorname{Ext}_R^i(\lambda M, R) = 0$, para todo $1 \leq i \leq k-1$. Portanto, $\operatorname{r.grade}_R(\lambda M) \geq k$.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $M$ é ligado horizontalmente e $\operatorname{r.grade}_R(\lambda M) \geq k$. Segue do Teorema 2.20 junto com a definição de grade reduzido que $\operatorname{Ext}_R^1(\operatorname{Tr} M, R) = 0$ e $\operatorname{Ext}_R^i(\lambda M, R) = 0$, para todo $1 \leq i \leq k-1$. De forma análoga a ida, obtemos a sequência exata longa

$$\cdots \to \operatorname{Ext}_R^{i-1}(\lambda M, R) \to \operatorname{Ext}_R^i(\operatorname{Tr} M, R) \to \operatorname{Ext}_R^i(P_1^*, R) \to \cdots$$

Pela exatidão da sequência longa acima e usando o fato que $\operatorname{Ext}_R^{i-1}(\lambda M, R) = 0$, para todo $2 \leq i \leq k$ e $\operatorname{Ext}_R^i(P_1^*, R) = 0$, para todo $i \geq 1$, segue que $\operatorname{Ext}_R^i(\operatorname{Tr} M, R) = 0$, para todo $2 \leq i \leq k$. Portanto, pelo Teorema 1.21(a), $M$ satisfaz $\tilde{S}_k$.

($ii$) ($\Rightarrow$) Seja $\operatorname{G-dim}_R(M) \neq 0$, então pelo Lema 1.15($iv$) existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ tal que $\operatorname{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$. Pela fórmula de Auslander Bridger (Teorema 1.25),

$$\operatorname{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) - \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) > 0.$$

Daí, $\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) > \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. Suponhamos por absurdo que $\operatorname{r.grade}_R(\lambda M) = \infty$. Como $M$ é ligado horizontalmente, então pelo item (i), $M$ satisfaz $\tilde{S}_k$ para cada inteiro $k$. Desde que $R$ é Noetheriano e $R_\mathfrak{p}$ é local, então $\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) \leq \dim(R_\mathfrak{p}) < \infty$. Logo, podemos escolher um número inteiro $k$ tal que $k > \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p})$. Assim,

$$\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq \min\{k, \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p})\} = \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}),$$

o que é um absurdo. Portanto, $\operatorname{r.grade}_R(\lambda M) < \infty$.

($\Leftarrow$) Agora suponhamos que $\operatorname{r.grade}_R(\lambda M) < \infty$, então pela Observação 3.2($ii$), $\operatorname{G-dim}_R(\lambda M) \neq 0$, o que implica que $\operatorname{G-dim}_R(M) \neq 0$. Caso contrário, se $\operatorname{G-dim}_R(M) = 0$ e sendo $M$ estável, teríamos pelo Corolário 2.24 que $\operatorname{G-dim}_R(\lambda M) = 0$, absurdo. ■

**Observação 3.5** Seja $M$ um $R$-módulo. Note que:

($i$) Se $M$ é projetivo, então $\operatorname{Tr} M$ é zero. Agora, se $M$ não é projetivo, podemos escrever $M = M' \oplus P$, onde $M'$ é estável e $P$ é um módulo projetivo. Então, a sequência

$0 \to M' \to M \to P \to 0$ é exata. Pelo Lema 1.8, existe uma sequência exata longa $0 \to P^* \to M^* \to M'^* \to \mathrm{Tr}P \to \mathrm{Tr}M \to \mathrm{Tr}M' \to 0$. Como $P$ é projetivo, $\mathrm{Tr}P = 0$, e pela exatidão da sequência acima $\mathrm{Tr}M \cong \mathrm{Tr}M'$. Portanto, pelo Teorema C.9, $\mathrm{Tr}M \cong \mathrm{Tr}M'$ é estável. Portanto, a transposta de todo módulo é estável ou zero.

$(ii)$ Para $k > 0$, o operador $\mathcal{T}_k := \mathrm{Tr}\,\Omega^{k-1}$ foi introduzido por Auslander e Bridger em [2]. Por $(i)$, $\mathcal{T}_k M = \mathrm{Tr}\Omega^{k-1}M$ é estável. Substituindo $M$ por $\mathcal{T}_k M$ na sequência exata (2.1), temos $0 \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}\mathcal{T}_k M, R) \to \mathcal{T}_k M \to \lambda^2 \mathcal{T}_k M \to 0$. Pela Proposição 1.5 $(ii)$, $\mathrm{Tr}\,\mathcal{T}_k M = \mathrm{Tr}\mathrm{Tr}\Omega^{k-1}M \approx \Omega^{k-1}M$. Assim,

$$\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}\mathcal{T}_k M, R) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\Omega^{k-1}M, R) \cong \mathrm{Ext}^k_R(M, R),$$

onde o último isomorfismo se deu pela Proposição A.19. Portanto, a sequência

$$0 \to \mathrm{Ext}^k_R(M, R) \to \mathcal{T}_k M \to \lambda^2 \mathcal{T}_k M \to 0 \qquad (3.3)$$

é exata para todo $k > 0$.

Para demonstrar o resultado principal desta seção precisaremos de alguns lemas auxiliares.

**Lema 3.6** *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M \neq 0$ um $R$-módulo de* G*-dimensão finita e positiva. Se $M$ é um módulo de sizígias, então* $\mathrm{depth}_R(M) \neq 0$.

**Demonstração.** Suponha por absurdo que $\mathrm{depth}_R(M) = 0$. Pela fórmula de Auslander Bridger (Teorema 1.25)

$$\mathrm{depth}(R) = \text{G-dim}_R(M) + \mathrm{depth}_R(M) = \text{G-dim}_R(M) > 0.$$

Por outro lado, como $M$ é um módulo de sizígias, $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$. Pela Proposição B.13, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$, donde pela Proposição B.12, $\mathrm{depth}(R) = 0$, absurdo. Portanto, $\mathrm{depth}_R(M) \neq 0$. ∎

**Lema 3.7** *Sejam $M$ um $R$-módulo e $n$ um inteiro positivo. Se* $\mathrm{r.grade}_R(M) \geq n$, *então* $\mathrm{Tr}M \approx \Omega^{n-1}\mathcal{T}_n M$.

**Demonstração.** Suponha que $\mathrm{r.grade}_R(M) \geq n$. Pela Observação 3.5$(ii)$, temos a sequência

$$0 \to \mathrm{Ext}^i_R(M, R) \to \mathcal{T}_i M \to \lambda^2 \mathcal{T}_i M \to 0 \qquad (3.4)$$

para todo $i > 0$. Note que, pela Proposição 1.5$(ii)$,

$$\lambda^2 \mathcal{T}_i M = \Omega\mathrm{Tr}\Omega\mathrm{Tr}\mathrm{Tr}\Omega^{i-1}M \approx \Omega\mathrm{Tr}\Omega\Omega^{i-1}M \approx \Omega\mathrm{Tr}\Omega^i M = \Omega\mathcal{T}_{i+1}M.$$

isto é, $\lambda^2\mathcal{T}_iM$ é projetivamente equivalente a $\Omega\mathcal{T}_{i+1}M$. Como $\text{r.grade}_R(M) \geq n$, temos que $\text{Ext}^i_R(M,R) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Assim, por (3.4), $\mathcal{T}_iM \cong \lambda^2\mathcal{T}_iM \approx \Omega\mathcal{T}_{i+1}M$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Assim, obtemos:

- $\text{Tr}M = \mathcal{T}_1M \approx \Omega\mathcal{T}_2M$ ;
- $\mathcal{T}_2M \approx \Omega\mathcal{T}_3M \Rightarrow \Omega\mathcal{T}_2M \approx \Omega^2\mathcal{T}_3M$;

$$\vdots$$

- $\mathcal{T}_{n-1}M \approx \Omega\mathcal{T}_nM \Rightarrow \Omega^{n-2}\mathcal{T}_{n-1}M \approx \Omega^{n-1}\mathcal{T}_nM$.

Logo, $\text{Tr}M \approx \Omega\mathcal{T}_2M \approx \Omega^2\mathcal{T}_3M \approx \cdots \approx \Omega^{n-2}\mathcal{T}_{n-1}M \approx \Omega^{n-1}\mathcal{T}_nM$. Portanto, concluímos que $\text{Tr}M \approx \Omega^{n-1}\mathcal{T}_nM$. ■

Agora expressaremos os primos associados do $\text{Ext}_R^{\text{r.grade}(M)}(M,R)$ para $M$ um módulo ligado horizontalmente de G-dimensão finita e positiva em termos de $\lambda M$.

**Teorema 3.8** *Seja $M$ um $R$-módulo ligado horizontalmente de* G*-dimensão finita e positiva. Considere $n = \text{r.grade}_R(M)$ e $E = \text{Ext}^n_R(M,R)$. Então,*

$$\text{Ass}_R(E) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0, \text{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) = n = \text{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\}.$$

**Demonstração.** Seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(\text{Ext}^n_R(M,R))$. Daí, $\text{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \cong (\text{Ext}^n_R(M,R))_\mathfrak{p} \neq 0$ e assim $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$. Caso contrário, se $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$, então teríamos que $\text{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = 0$ para todo $i > 0$, o que seria um absurdo. Observe que $\text{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq n$, pois $\text{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \neq 0$. Por outro lado, como $\text{r.grade}_R(M) = n$, em particular, $\text{Ext}^i_R(M,R) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Localizando em $\mathfrak{p}$, temos $\text{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$, ou seja, $\text{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq n$. Logo, $\text{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = n$.

Desde que $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ é finita e positiva, a Observação 3.2$(iii)$ garante que

$$\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq \text{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = n.$$

Além disso, pelo Teorema 1.25 e Lema 3.6, $\text{depth}(R_\mathfrak{p}) - \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \text{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) > 0$, ou seja, $\text{depth}(R_\mathfrak{p}) > \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. Assim, $\text{depth}(R_\mathfrak{p}) > n$. Localizando em $\mathfrak{p}$ a sequência exata de $R$-módulos (3.2) , temos que

$$0 \to (\lambda M)_\mathfrak{p} \to (P_1^*)_\mathfrak{p} \to (\text{Tr}M)_\mathfrak{p} \to 0$$

é uma sequênca exata de $R_\mathfrak{p}$-módulos. Se $(\lambda M)_\mathfrak{p} = 0$, então $(\text{Tr}M)_\mathfrak{p} \cong (P_1^*)_\mathfrak{p}$ e assim, $(\text{Tr}M)_\mathfrak{p}$ seria projetivo e portanto livre. Pela Proposição 1.5$(iii)$, temos que $(\text{Tr}_RM)_\mathfrak{p} \approx$

$\mathrm{Tr}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$. Por definição, existem $P$ e $Q$ projetivos tais que $(\mathrm{Tr}_R M)_\mathfrak{p} \oplus P \cong \mathrm{Tr}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \oplus Q$. Assim, $\mathrm{Tr}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ é um somando direto de um módulo livre e portanto é projetivo, pelo Teorema A.4. Pelo Lema 1.15($ii$), $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(\mathrm{Tr}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}) = 0$, o que implica que $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$, pelo Lema 1.15($i$), o que é uma contradição. Logo, $(\lambda M)_\mathfrak{p} \neq 0$.

Tomando $k = n$ e localizando em $\mathfrak{p}$ a sequência exata (3.3), temos que

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p})) \subseteq \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}).$$

Pela Proposição B.12, $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}(\mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}) = 0$. Logo, $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}(\Omega^n_{R_\mathfrak{p}} \mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}) = n$, pelo Lema B.8.

Como $\mathrm{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = n$, o Lema 3.7 garante que $\lambda_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \approx \Omega^n_{R_\mathfrak{p}} \mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}$. Logo, pelo Lema B.7, $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}(\lambda_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}) = n$. Além disso, como $\lambda_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \approx (\lambda M)_\mathfrak{p}$, então novamente pelo Lema B.7 concluímos que $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) = n$.

Reciprocamente, seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, com $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$, e $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) = n = \mathrm{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. Logo, pelo Teorema 1.25 e Lema 3.6, $\mathrm{depth}(R_\mathfrak{p}) > \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq \mathrm{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = n$. Pelo Lema 3.7, $\Omega^n_{R_\mathfrak{p}} \mathcal{T}_n M_\mathfrak{p} \approx \lambda_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \approx (\lambda M)_\mathfrak{p}$. Daí, segue do Lema B.7 que

$$\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}(\Omega^n_{R_\mathfrak{p}} \mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}) = \mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) = n.$$

Assim, $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}(\mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}) = 0$, pelo Lema B.9. Como $\lambda^2_{R_\mathfrak{p}} \mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}$ é um módulo de sizígias e $\mathrm{depth}(R_\mathfrak{p}) > 0$, segue que $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}(\lambda^2_{R_P} \mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}) \neq 0$ e assim, $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\lambda^2_{R_\mathfrak{p}} \mathcal{T}_n M_\mathfrak{p})$. Pela sequência exata (3.3) localizada em $\mathfrak{p}$ e $k = n$, temos

$$\mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p})) \cup \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\lambda^2_{R_\mathfrak{p}} \mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}).$$

Como $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}(\mathcal{T}_n M_\mathfrak{p}) = 0$, segue que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\mathcal{T}_n M_\mathfrak{p})$. Portanto, concluímos que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}))$ o que implica que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(\mathrm{Ext}^n_R(M, R))$. ■

## 3.2 Grade reduzido, ligação e G-dimensão

Nesta seção, apresentaremos algumas consequências do Teorema 3.8 envolvendo grade reduzido, ligação horizontal e G-dimensão. Iniciamos caracterizando o grade reduzido de um módulo ligado horizontalmente com G-dimensão finita.

**Proposição 3.9** *Seja $M$ um $R$-módulo ligado horizontalmente de* G*-dimensão finita. Então,*

$$\mathrm{r.grade}_R(M) = \inf\{\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R), \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

**Demonstração.** Seja $n = \text{r.grade}_R(M)$ e assuma que $\text{G-dim}_R(M) > 0$. Logo, pelo Lema 1.15($iv$), existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ tal que $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$. Pela fórmula de Auslander Bridger (Teorema 1.25) $\text{depth}(R_\mathfrak{p}) > 0$. Como $M_\mathfrak{p}$ é um módulo de sizígias, então $\text{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) > 0$, pelo Lema 3.6.

Sendo $\text{r.grade}_R(M) = n$, temos que $\text{Ext}^i_R(M, R) = 0$ para todo $1 \leq i < n$. Daí, $\text{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = 0$ para todo $1 \leq i < n$, ou seja, $\text{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq n$. Logo, $n \leq \text{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) < \text{depth}(R_\mathfrak{p})$. Como $M$ é ligado horizontalmente, então pela Proposição 2.15, $\lambda M$ também é ligado horizontalmente. Pelo Teorema 2.20, $\text{Ext}^1_R(\text{Tr}\lambda M, R) = 0$. Além disso,

$$\text{Ext}^i_R(\text{Tr}\lambda M, R) \cong \text{Ext}^{i-1}_R(\Omega\text{Tr}\lambda M, R) \cong \text{Ext}^{i-1}_R(\lambda^2 M, R) \cong \text{Ext}^{i-1}_R(M, R) = 0$$

para todo $2 \leq i \leq n$, pois $n = \text{r.grade}_R(M)$. Logo, temos que $\text{Ext}^i_R(\text{Tr}\lambda M, R) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ e assim pelo Teorema 1.21(a), $\lambda M$ satisfaz $\tilde{S}_n$, isto é, $\text{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) \geq \min\{n, \text{depth}(R_\mathfrak{p})\} = n$. Como $\mathfrak{p}$ foi tomado de forma arbitrária, segue que

$$n \leq \inf\{\text{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R), \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

Por outro lado, como $\text{r.grade}_R(M) = n$, em particular, $\text{Ext}^n_R(M, R) \neq 0$, donde $\text{Ass}_R(\text{Ext}^n_R(M, R)) \neq \emptyset$. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(\text{Ext}^n_R(M, R))$. Pelo Teorema 3.8, segue que $n = \text{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p})$ com $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$. Logo,

$$n \geq \inf\{\text{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R), \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

Portanto,

$$\text{r.grade}_R(M) = \inf\{\text{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R), \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0\},$$

como queríamos. ■

Para um anel $R$, seja $X^i(R) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \text{depth}(R_\mathfrak{p}) \leq i\}$. O próximo resultado fornece uma caracterização de módulos ligados horizontalmente de G-dimensão zero.

**Proposição 3.10** *Seja $M$ um $R$-módulo ligado horizontalmente de* G-*dimensão finita. Então,* $\text{G-dim}_R(M) = 0$ *se, e somente se,* $\text{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + \text{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) > \text{depth}(R_\mathfrak{p})$ *para todo* $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \setminus X^0(R)$.

**Demonstração.** Assuma que $\text{G-dim}_R(M) = 0$ e suponha por contradição que

$$\text{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + \text{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) \leq \text{depth}(R_\mathfrak{p}) \tag{3.5}$$

para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus X^0(R)$. Note que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M)$. Caso contrário, teríamos $M_{\mathfrak{p}} = 0$, e assim por (3.5) $\infty \leq \operatorname{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \leq \dim(R_{\mathfrak{p}}) < \infty$, absurdo. Como $\operatorname{G-dim}_R(M) = 0$, então pelo Lema 1.15($iv$), $\operatorname{G-dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$. Pela fórmula de Auslander Bridger (Teorema 1.25), $\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{depth}(R_{\mathfrak{p}})$ e assim, $\operatorname{depth}(R_{\mathfrak{p}}) + \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}((\lambda M)_{\mathfrak{p}}) \leq \operatorname{depth}(R_{\mathfrak{p}})$, ou seja, $\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}((\lambda M)_{\mathfrak{p}}) \leq 0$. Logo, $\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}((\lambda M)_{\mathfrak{p}}) = 0$, donde pela Proposição B.13, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}((\lambda M)_{\mathfrak{p}})$. Além disso, como $(\lambda M)_{\mathfrak{p}}$ é um módulo de sizígias, $\operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}((\lambda M)_{\mathfrak{p}}) \subseteq \operatorname{Ass}(R_{\mathfrak{p}})$, o que implica que $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(R_{\mathfrak{p}})$. Pela Proposição B.12, $\operatorname{depth}(R_{\mathfrak{p}}) = 0$, absurdo, pois $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus X^0(R)$.

Reciprocamente, sejam $\operatorname{G-dim}_R(M) = n$ e assuma que

$$\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) + \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}((\lambda M)_{\mathfrak{p}}) > \operatorname{depth}(R_{\mathfrak{p}})$$

para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus X^0(R)$. Suponha por contradição que $n > 0$. Pela Proposição 3.9, existe $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ tal que $\operatorname{G-dim}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) \neq 0$ e $\operatorname{r.grade}_R(M) = \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{q}}}((\lambda M)_{\mathfrak{q}})$. Pelo Teorema 1.25, segue que $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus X^0(R)$. Logo,

$$\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) + \operatorname{r.grade}_R(M) > \operatorname{depth}(R_{\mathfrak{q}}).$$

Usando mais uma vez o Teorema 1.25, tem-se

$$\operatorname{G-dim}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) + \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) = \operatorname{depth}(R_{\mathfrak{q}}) < \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) + \operatorname{r.grade}_R(M)$$

ou seja, $\operatorname{G-dim}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) < \operatorname{r.grade}_R(M)$. Daí,

$$\operatorname{r.grade}_R(M) > \operatorname{G-dim}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) \geq \operatorname{r.grade}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) \geq \operatorname{r.grade}_R(M)$$

absurdo. Portanto, $\operatorname{G-dim}_R(M) = 0$. ■

A seguir temos uma classe particular de módulos ligados horizontalmente.

**Definição 3.11** Dizemos que um $R$-módulo $M$ é *autoligado horizontalmente* se $M \cong \lambda M$. Note que todo módulo autoligado horizontalmente é ligado horizontalmente. De fato, por definição, $M \cong \lambda M$. Daí, $\lambda M \cong \lambda^2 M$ e assim, $M \cong \lambda^2 M$, ou seja, $M$ é ligado horizontalmente.

**Exemplo 3.12** Sejam $k$ um corpo e $R = k[X]/(X^2)$. Denotamos por $x$ a classe residual de $X$ em $R$. Então, $R/(x)$ é auto ligado horizontalmente.

**Demonstração.** Segue do Exemplo 2.11 com $m = 2$ e $n = 1$ que $R/(x) \cong \lambda R/(x)$. ■

**Corolário 3.13** *Seja $M$ um $R$-módulo autoligado horizontalmente de* G*-dimensão finita. Então,* $\text{G-dim}_R(M) = 0$ *se, e somente se,* $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) > \frac{1}{2}\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p})$ *para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus X^0(R)$.

**Demonstração.** Pela Proposição 3.10, $\text{G-dim}_R(M) = 0$ se, e somente se, $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}((\lambda M)_\mathfrak{p}) > \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus X^0(R)$. Desde que $(\lambda M)_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p}$, a última desigualdade é equivalente a $2(\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) > \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus X^0(R)$. ■

Para o último resultado da seção precisaremos da seguinte definição.

**Definição 3.14** Seja $X$ um subconjunto de $\operatorname{Spec}(R)$. Dizemos que $M$ é de G-*dimensão zero em* $X$ se $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in X$.

**Proposição 3.15** *Seja $M$ um $R$-módulo ligado horizontalmente de* G*-dimensão finita e positiva. Considere* $t_M = \operatorname{r.grade}_R(M) + \operatorname{r.grade}_R(\lambda M)$, *então $M$ é de* G*-dimensão zero em* $X^{t_M - 1}(R)$.

**Demonstração.** Seja $\operatorname{r.grade}_R(\lambda M) = n$ e suponha por absurdo que $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$ para algum $\mathfrak{p} \in X^{t_M - 1}(R)$. Como $M$ é ligado horizontalmente e $\operatorname{r.grade}_R(\lambda M) = n$, temos pela Proposição 3.4($i$) que $M$ satisfaz $\tilde{S}_n$, ou seja, $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq \min\{n, \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p})\}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Se $\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) \leq n$, então $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p})$. Desde que $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) > 0$, segue da fórmula de Auslander Bridger (Teorema 1.25) que $\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) - \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) > 0$, ou seja, $\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) > \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, contradição.

Agora, se $\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) > n$, então $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq n$. Logo,

$$t_M - n = \operatorname{r.grade}_R(M) \leq \operatorname{r.grade}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq \text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) - \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}).$$

Note que como $\mathfrak{p} \in X^{t_M - 1}(R)$, então $\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) \leq t_M - 1$. Logo,

$$\operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) - \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq t_M - 1 - \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq t_M - n - 1.$$

Assim, $t_M - n \leq \operatorname{depth}(R_\mathfrak{p}) - \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq t_M - n - 1$, o que também gera uma contradição. ■

## 3.3 Ext diagonal e ligação horizontal

Nesta seção, demonstraremos um resultado envolvendo o Ext diagonal de módulos ligados horizontalmente. Para isso, precisaremos do seguinte lema.

**Lema 3.16** *Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos e $n$ um inteiro positivo com* $\mathrm{r.grade}_R(M) \geq n$. *Então,*

$$(i)\ \ \mathrm{Tor}_i^R(\mathcal{T}_n M, N) \cong \begin{cases} \mathrm{Ext}_R^{n-i}(M,N), & se\ 1 \leq i < n, \\ \mathrm{Tor}_{i-n}^R(\lambda M, N), & se\ i > n; \end{cases}$$

$$(ii)\ \ \mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_n M, N) \cong \begin{cases} \mathrm{Tor}_{n-i}^R(M,N), & se\ 1 \leq i < n, \\ \mathrm{Ext}_R^{i-n}(\lambda M, N), & se\ i > n. \end{cases}$$

**Demonstração.** Seja $\mathbb{P} : P_n \xrightarrow{\varphi} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$ uma parte de uma resolução projetiva truncada à direita de $M$. Dualizando $\mathbb{P}$, obtemos o co-complexo:

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}, R) : P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_{n-1}^* \xrightarrow{\varphi^*} P_n^* \to 0$$

Como $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}, R)$ é um co-complexo podemos convertê-lo em um complexo. E para tanto, considere a seguinte conversão de índices $F_i = P_{n-i}^*$ para $0 \leq i \leq n$. Logo, temos um complexo de módulos projetivos:

$$\mathbb{F} : F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi^*} F_0 \to 0$$

Considere a seguinte apresentação projetiva de $\Omega^{n-1}M$:

$$P_n \xrightarrow{\varphi} P_{n-1} \to \Omega^{n-1}M \to 0$$

Dualizando-a, temos:

$$0 \to (\Omega^{n-1}M)^* \to F_1 \xrightarrow{\varphi^*} F_0 \to \mathrm{Tr}\Omega^{n-1}M \to 0$$

Note que $\mathrm{Coker}(\varphi^*) \cong \mathrm{Tr}\Omega^{n-1}M = \mathcal{T}_n M$ e $\mathrm{H}_0(\mathbb{F}) = F_0/\mathrm{Im}(\varphi^*) = \mathrm{Coker}(\varphi^*)$. Logo, $\mathrm{H}_0(\mathbb{F}) \cong \mathcal{T}_n M$. Desde que $\mathrm{r.grade}(M) \geq n$, segue que $\mathbb{F}$ é uma resolução projetiva truncada a direita de $\mathcal{T}_n M$.

$(i)$ Pela Proposição A.9,

$$\mathbb{F} \otimes_R N = \mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}, R) \otimes_R N \cong \mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}, R \otimes_R N) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}, N)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_i^R(\mathcal{T}_n M, N) &\cong \mathrm{H}_i(\mathbb{F} \otimes N) \\ &\cong \mathrm{H}^{n-i}(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}, N)) \\ &\cong \mathrm{Ext}_R^{n-i}(M, R) \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq n-1$. Por outro lado, pelo Lema 3.7, $\lambda M \approx \Omega^n \mathcal{T}_n M$. Portanto, pela Proposição A.15,

$$\mathrm{Tor}_i^R(\mathcal{T}_n M, N) \cong \mathrm{Tor}_{i-n}^R(\Omega^n \mathcal{T}_n M, N) \cong \mathrm{Tor}_{i-n}^R(\lambda M, N)$$

para $i > n$.

$(ii)$ Pela Proposição A.7,

$$\mathbb{P} \otimes_R N \cong \mathbb{P} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(R, N) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}, R), N) = \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, N).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_n M, N) &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, N)) \\ &\cong \mathrm{H}_{n-i}(\mathbb{P} \otimes N) \\ &\cong \mathrm{Tor}_{n-i}^R(M, N) \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq n-1$. Então, de forma similar a parte $(i)$ temos,

$$\mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_n M, N) \cong \mathrm{Ext}_R^{i-n}(\Omega^n \mathcal{T}_n M, N) \cong \mathrm{Ext}_R^{i-n}(\lambda M, N)$$

para $i > n$. ■

**Teorema 3.17** *Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos. Então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

$(i)$ *Se $M$ é ligado horizontalmente, então $\mathrm{Ext}_R^i(M, M) \cong \mathrm{Ext}_R^i(\lambda M, \lambda M)$ para todo $1 \leq i < \inf\{\mathrm{r.grade}_R(M), \mathrm{r.grade}_R(\lambda M)\}$.*

$(ii)$ *Se $M$ e $N$ são autoligados horizontalmente, então $\mathrm{Ext}_R^i(M, N) \cong \mathrm{Ext}_R^i(N, M)$ para todo $1 \leq i < \inf\{\mathrm{r.grade}_R(M), \mathrm{r.grade}_R(N)\}$.*

**Demonstração.** $(i)$ Seja $m$ um inteiro positivo tal que

$$1 < m \leq \inf\{\mathrm{r.grade}_R(M), \mathrm{r.grade}_R(\lambda M)\}.$$

Se $1 \leq i < m$, então $1 \leq m - i < m \leq \mathrm{r.grade}_R(M)$. Logo, pela parte (i) do Lema 3.16, temos que $\mathrm{Tor}_{m-i}^R(\mathcal{T}_m M, M) \cong \mathrm{Ext}_R^{m-(m-i)}(M, M) \cong \mathrm{Ext}_R^i(M, M)$. Além disso, pela parte (ii) do Lema 3.16, segue que $\mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m M, \mathcal{T}_m M) \cong \mathrm{Tor}_{m-i}^R(M, \mathcal{T}_m M)$ para $1 \leq i < m$. Portanto,

$$\mathrm{Ext}_R^i(M, M) \cong \mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m M, \mathcal{T}_m M) \tag{3.6}$$

para todo $1 \leq i < m$. Novamente pelo item $(ii)$ do Lema 3.16, tem-se

$$\operatorname{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m M, R) \cong \operatorname{Tor}_{m-i}^R(M, R)$$

para todo $1 \leq i < m$. Como $R$ é livre e portanto projetivo, então $\operatorname{Tor}_{m-i}^R(M, R) = 0$, isto é, $\operatorname{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m M, R) = 0$ para todo $1 \leq i < m$, ou seja, $\text{r.grade}_R(\mathcal{T}_m M) \geq m$. Desde que $\text{r.grade}_R(M) \geq m$, segue do Lema 3.7 que $\operatorname{Tr} M \approx \Omega^{m-1}\mathcal{T}_m M$.

Logo, $\operatorname{Ext}_R^m(\mathcal{T}_m M, R) \cong \operatorname{Ext}_R^1(\Omega^{m-1}\mathcal{T}_m M, R) \cong \operatorname{Ext}_R^1(\operatorname{Tr} M, R) = 0$, pelo Teorema 2.20. Portanto, $\text{r.grade}_R(\mathcal{T}_m M) > m$. Assuma que $\text{r.grade}_R(\mathcal{T}_m M) < \infty$, digamos que $\text{r.grade}_R(\mathcal{T}_m M) = k > m$. Por definição, $\operatorname{Ext}_R^k(\mathcal{T}_m M, R) \neq 0$ e $\operatorname{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m M, R) = 0$ para todo $1 \leq i < k$. Como $\operatorname{Tr} M \approx \Omega^{m-1}\mathcal{T}_m M$, então $\lambda M \approx \Omega^m \mathcal{T}_m M$. Assim, $\operatorname{Ext}_R^l(\lambda M, R) \cong \operatorname{Ext}_R^l(\Omega^m \mathcal{T}_m M, R) \cong \operatorname{Ext}_R^{l+m}(\mathcal{T}_m M, R)$ para todo $l > 0$. Nosso objetivo é mostrar que $\text{r.grade}_R(\lambda M) = k - m$. Ora, $\operatorname{Ext}_R^{k-m}(\lambda M, R) \cong \operatorname{Ext}_R^k(\mathcal{T}_m M, R) \neq 0$. Agora, dado $1 \leq i < k - m$, temos que $1 \leq i + m < k$. Daí,

$$\operatorname{Ext}_R^i(\lambda M, R) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+m}(\mathcal{T}_m M, R) = 0.$$

Portanto, $\text{r.grade}_R(\lambda M) = k - m$. Logo, $\text{r.grade}_R(\mathcal{T}_m M) = \text{r.grade}_R(\lambda M) + m \geq 2m$, isto é, $\operatorname{Ext}_R^s(\mathcal{T}_m M, R) = 0$ para todo $1 \leq s < 2m$. Assim, $\operatorname{Ext}_R^s(\mathcal{T}_m M, P) = 0$ para todo $R$-módulo projetivo $P$ e todo inteiro $1 \leq s < 2m$.

Note ainda que, se $\text{r.grade}_R(\mathcal{T}_m M) = \infty$, então trivialmente obtemos a mesma conclusão.

Agora considere a sequência exata abaixo:

$$0 \to \Omega^{i+1}\mathcal{T}_m M \to P_i \to \Omega^i \mathcal{T}_m M \to 0$$

para todo $0 \leq i < m$, onde $P_i$ é um módulo projetivo para todo $0 \leq i < m$, que induz a seguinte sequência exata longa (Proposição A.18$(ii)$):

$$\cdots \to \operatorname{Ext}_R^j(\mathcal{T}_m M, P_i) \to \operatorname{Ext}_R^j(\mathcal{T}_m M, \Omega^i \mathcal{T}_m M) \to \operatorname{Ext}_R^{j+1}(\mathcal{T}_m M, \Omega^{i+1}\mathcal{T}_m M) \to$$

$$\to \operatorname{Ext}_R^{j+1}(\mathcal{T}_m M, P_i) \to \operatorname{Ext}_R^{j+1}(\mathcal{T}_m M, \Omega^i \mathcal{T}_m M) \to \operatorname{Ext}_R^{j+2}(\mathcal{T}_m M, \Omega^{i+1}\mathcal{T}_m M) \to$$

$$\to \operatorname{Ext}_R^{j+2}(\mathcal{T}_m M, P_i) \to \cdots \to \operatorname{Ext}_R^{j+m-1}(\mathcal{T}_m M, P_i) \to \operatorname{Ext}_R^{j+m-1}(\mathcal{T}_m M, \Omega^i \mathcal{T}_m M) \to$$

$$\to \operatorname{Ext}_R^{j+m}(\mathcal{T}_m M, \Omega^{i+1}\mathcal{T}_m M) \to \operatorname{Ext}_R^{j+m}(\mathcal{T}_m M, P_i) \to \cdots$$

Pela sequência exata longa e usando o fato que $\mathrm{Ext}_R^j(\mathcal{T}_m M, P_i) = 0$ para todo $1 \leq j < 2m$, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}_R^j(\mathcal{T}_m M, \Omega^i \mathcal{T}_m M) &\cong \mathrm{Ext}_R^{j+1}(\mathcal{T}_m M, \Omega^{i+1} \mathcal{T}_m M);\\
\mathrm{Ext}_R^{j+1}(\mathcal{T}_m M, \Omega^i \mathcal{T}_m M) &\cong \mathrm{Ext}_R^{j+2}(\mathcal{T}_m M, \Omega^{i+1} \mathcal{T}_m M);\\
&\vdots\\
\mathrm{Ext}_R^{j+m-1}(\mathcal{T}_m M, \Omega^i \mathcal{T}_m M) &\cong \mathrm{Ext}_R^{j+m}(\mathcal{T}_m M, \Omega^{i+1} \mathcal{T}_m M),
\end{aligned}$$

para todo $1 \leq j < m$ e para todo $0 \leq i < m$. Logo,

$$\mathrm{Ext}_R^j(\mathcal{T}_m M, \Omega^0 \mathcal{T}_m M) \cong \mathrm{Ext}_R^{j+1}(\mathcal{T}_m M, \Omega^1 \mathcal{T}_m M) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_R^{j+m}(\mathcal{T}_m M, \Omega^m \mathcal{T}_m M), \quad (3.7)$$

para todo $1 \leq j < m$. Portanto, por (3.6) e (3.7)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}_R^j(M, M) &\cong \mathrm{Ext}_R^j(\mathcal{T}_m M, \mathcal{T}_m M)\\
&\cong \mathrm{Ext}_R^{j+m}(\mathcal{T}_m M, \Omega^m \mathcal{T}_m M)\\
&\cong \mathrm{Ext}_R^{j+m}(\mathcal{T}_m M, \lambda M)\\
&\cong \mathrm{Ext}_R^j(\Omega^m \mathcal{T}_m M, \lambda M)\\
&\cong \mathrm{Ext}_R^j(\lambda M, \lambda M)
\end{aligned}$$

para todo $1 \leq j < m$.

$(ii)$ Seja $m$ um inteiro positivo tal que $1 < m \leq \inf\{\mathrm{r.grade}_R(M), \mathrm{r.grade}_R(N)\}$. Se $1 \leq i < m$, então $1 \leq m - i < m \leq \mathrm{r.grade}_R(M)$. Pela parte (i) do Lema 3.16, temos que $\mathrm{Tor}^R_{m-i}(\mathcal{T}_m M, N) \cong \mathrm{Ext}_R^{m-(m-i)}(M, N) = \mathrm{Ext}_R^i(M, N)$. Além disso, pela parte (ii) do Lema 3.16, $\mathrm{Tor}^R_{m-i}(N, \mathcal{T}_m M) \cong \mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m N, \mathcal{T}_m M)$ para $1 \leq i < m$. Logo,

$$\mathrm{Ext}_R^i(M, N) \cong \mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m N, \mathcal{T}_m M) \quad (3.8)$$

para todo $1 \leq i < m$. Como $\mathrm{r.grade}_R(M) \geq m$, o Lema 3.7 garante que $\lambda M \approx \Omega^m \mathcal{T}_m M$.

Desde que $M$ é autoligado horizontalmente, $M \cong \lambda M$ e assim, $M \approx \Omega^m \mathcal{T}_m M$. Em particular, $M$ é ligado horizontalmente. De forma análoga ao item anterior, concluímos que $\mathrm{r.grade}_R(\mathcal{T}_m M) \geq 2m$. Similarmente, temos $\mathrm{r.grade}_R(N) \geq m$, donde $N \approx \Omega^m \mathcal{T}_m N$ e $\mathrm{r.grade}_R(\mathcal{T}_m N) \geq 2m$. Daí, $\mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m N, R) = 0$ para todo $1 \leq i < 2m$, e assim, $\mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m N, P) = 0$ para todo $R$-módulo projetivo $P$ e para todo inteiro $1 \leq i < 2m$. Logo, usando a sequência exata $0 \to \Omega^{i+1} \mathcal{T}_m M \to P_i \to \Omega^i \mathcal{T}_m M \to 0$ junto com a sequência exata longa do Ext, obtemos o isomorfismo

$$\mathrm{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m N, \mathcal{T}_m M) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+m}(\mathcal{T}_m N, \Omega^m \mathcal{T}_m M) \quad (3.9)$$

Portanto, por (3.8) e (3.9), temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}_R^i(M,N) &\cong \operatorname{Ext}_R^i(\mathcal{T}_m N, \mathcal{T}_m M)\\
&\cong \operatorname{Ext}_R^{i+m}(\mathcal{T}_m N, \Omega^m \mathcal{T}_m M)\\
&\cong \operatorname{Ext}_R^{i+m}(\mathcal{T}_m N, M)\\
&\cong \operatorname{Ext}_R^i(\Omega^m \mathcal{T}_m N, M)\\
&\cong \operatorname{Ext}_R^i(N, M)
\end{aligned}$$

para todo $1 \leq i < m$. ■

Concluiremos o capítulo com a seguinte consequência do Teorema 3.17.

**Corolário 3.18** *Seja $M$ um $R$-módulo estável com* G*-dimensão zero. Então,*

$$\operatorname{Ext}_R^i(M,M) \cong \operatorname{Ext}_R^i(\lambda M, \lambda M)$$

*para todo $i > 0$.*

**Demonstração.** Como $M$ é estável e $\text{G-dim}_R(M) = 0$, então pelo Corolário 2.24, $M$ é ligado horizontalmente e $\text{G-dim}_R(\lambda M) = 0$. Em particular, $\text{r.grade}_R(M) = \infty = \text{r.grade}_R(\lambda M)$. Portanto, pelo Teorema 3.17($i$), $\operatorname{Ext}_R^i(M,M) \cong \operatorname{Ext}_R^i(\lambda M, \lambda M)$ para todo $i > 0$. ■

# Apêndice A

# Noções de Álgebra Homológica

Assim como nos capítulos dessa dissertação, ao longo dos apêndices assumiremos que todos os anéis são Noetherianos comutativos e com unidade. Vale mencionar que essas hipóteses não são necessárias em todos os resultados, porém iremos mantê-las para simplificar a exposição. Neste Apêndice, apresentaremos algumas definições e resultados de álgebra homológica.

**Definição A.1** Um *complexo* $\mathbb{D}$ é uma sequência de módulos e homomorfismos (chamados diferenciais) com índices decrescentes

$$\mathbb{D} : \cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n-1} \to \cdots$$

tal que a composição $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Denotamos $\mathbb{D}$ e suas diferenciais por $(\mathbb{D}, \alpha)$. Observe que $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$ é equivalente a $\mathrm{Im}(\alpha_{n+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha_n)$. Assim, podemos considerar o módulo quociente $\mathrm{Ker}(\alpha_n)/\mathrm{Im}(\alpha_{n+1})$.

**Definição A.2** Se $(\mathbb{D}, \alpha)$ é um complexo, então $\mathrm{H}_n(\mathbb{D}) = \mathrm{Ker}(\alpha_n)/\mathrm{Im}(\alpha_{n+1})$ é chamado de *$n$-ésimo módulo de homologia de* $\mathbb{D}$, onde $n$ é um inteiro.

Se $\mathrm{H}_n(\mathbb{D}) = 0$ para todo $n$, então o complexo $\mathbb{D}$ é dito *exato* ou *acíclico*. Isto é equivalente a dizer que $\mathrm{Ker}(\alpha_n) = \mathrm{Im}(\alpha_{n+1})$ para todo $n$. Portanto, a homologia de um complexo mede o quão "longe" ou o quão "perto" o complexo está de ser exato.

Da mesma forma, uma sequência de módulos e homomorfismos com índices crescentes

$$\mathbb{F} : \cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{\alpha^{n-1}} M^n \xrightarrow{\alpha^n} M^{n+1} \to \cdots$$

é dita ser um *co-complexo* se $\alpha^n \circ \alpha^{n-1} = 0$ para todo inteiro $n$. Dizemos que o co-complexo $\mathbb{F}$ é *exato* se $\mathrm{Im}(\alpha^{n-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha^n)$ para todo $n$. Para esses co-complexos definimos $\mathrm{H}^n(\mathbb{F}) = \mathrm{Ker}(\alpha^n)/\mathrm{Im}(\alpha^{n-1})$ como o *$n$-ésimo módulo de cohomologia de* $\mathbb{F}$.

**Definição A.3** Um $R$-módulo $P$ é *projetivo* se para qualquer homomorfismo sobrejetor $f : M \to N$ e para qualquer homomorfismo $g : P \to N$, existe um homomorfismo $h : P \to M$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

O próximo resultado nos fornece uma caracterização dos módulos projetivos.

**Teorema A.4** *Um $R$-módulo $P$ é projetivo se, e somente se, $P$ é um somando direto de um livre.*

**Demonstração.** Ver [34], Teorema 3.5(i). ∎

Dessa caracterização segue que o dual de um módulo projetivo, é também, projetivo. É claro que todo módulo livre é projetivo, e a recíproca vale, por exemplo, quando o anel é local (Ver [27], Teorema 2.5).

**Definição A.5** Um $R$-módulo $I$ é *injetivo* se dados um homomorfismo injetor $i : M \to N$ e um homomorfismo qualquer $f : M \to I$, existe um homomorfismo $g : N \to I$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & N \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

A seguir temos algumas caracterizações de módulos injetivos.

**Proposição A.6** *Seja $I$ um $R$-módulo finitamente gerado. As seguintes condições são equivalentes:*

*(i)* *$I$ é injetivo;*

*(ii)* $\mathrm{Ext}^i_R(M, I) = 0$ *para todo $R$-módulo finitamente gerado $M$ e para todo $i > 0$.*

**Demonstração.** Ver [5], Proposição 3.1.2. ∎

**Lema A.7** *Sejam $S$ uma $R$-álgebra, $M$ um $R$-módulo e $N$ e $P$ $S$-módulos (e portanto $R$-módulos). Então, o homomorfismo*

$$\varphi_1 : P \otimes_S \mathrm{Hom}_R(N, M) \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_S(P, N), M)$$

*dado por*

$$\varphi_1(p \otimes f)(g) = f(gp)$$

*é um isomorfismo, se satisfaz pelo menos uma das condições abaixo:*

$(i)$ *$P$ é finitamente gerado e projetivo;*

$(ii)$ *$P$ é finitamente gerado e $M$ é injetivo.*

**Demonstração.** Ver [6], Capítulo VI Proposições 5.2 e 5.3. ■

**Definição A.8** Um $R$-módulo $M$ é *$R$-plano*, ou simplesmente *plano*, se para toda sequência exata de $R$-módulos, $\mathbb{G}$, a sequência tensorizada $\mathbb{G} \otimes_R M$ é também exata.

**Lema A.9** *Sejam $S$ uma $R$-álgebra, $M$ um $R$-módulo e $N$ e $P$ $S$-módulos (e portanto $R$-módulos). Então, o homomorfismo*

$$\varphi_2 : \mathrm{Hom}_S(P, N) \otimes_R M \to \mathrm{Hom}_S(P, N \otimes_R M)$$

*dado por*

$$\varphi_2(\psi \otimes m)(p) = \psi(p) \otimes m$$

*é um isomorfismo, se satisfaz pelo menos uma das condições abaixo:*

$(i)$ *$P$ é finitamente gerado e projetivo;*

$(ii)$ *$P$ é finitamente gerado e $M$ é $R$-plano.*

**Demonstração.** Ver [20], Lema 1.1. ■

**Definição A.10** Uma *resolução projetiva* de um $R$-módulo $M$ é uma sequência exata

$$\mathbb{P} : \cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

onde $P_i$ é projetivo para todo $i \geq 0$.

Se omitirmos o $R$-módulo $M$, então o complexo

$$\cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$$

é chamado *resolução projetiva truncada à direita de $M$*.

Dizemos que $\mathbb{P}$ tem comprimento $n$ se $P_n \neq 0$ e $P_i = 0$ para todo $i > n$, isto é,

$$\mathbb{P} : 0 \to P_n \to \cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

Neste caso, $M$ tem *dimensão projetiva finita*, e escrevemos $\mathrm{pd}_R(M) = n$ se, $n$ for o menor inteiro tal que existe uma resolução projetiva de $M$ de comprimento $n$. Se tal $n$ não existe, então $\mathrm{pd}_R(M) = \infty$.

Sabemos que um $R$-módulo $F$ é dito livre se $F$ é isomorfo a uma soma direta de cópias do anel $R$. Além disso, todo módulo $M$ é o quociente de um módulo livre (Ver [34], Teorema 2.35), ou seja, para qualquer $R$-módulo $M$, existe um $R$-módulo livre $F$ e um epimorfismo $\varphi : F \to M$.

Uma *resolução livre* é definida de maneira totalmente análoga, substituindo módulos projetivos por módulos livres. Todo módulo tem uma resolução livre, e portanto, uma resolução projetiva. Uma resolução livre pode ser facilmente construída, como veremos a seguir.

Como todo módulo é o quociente de um livre, então para um $R$-módulo $M$, existe um $R$-módulo livre $F_0$ e um epimorfismo $\pi : F_0 \to M$. Logo, obtemos a sequência exata

$$0 \to K_0 \xrightarrow{i_0} F_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

onde $K_0$ é o núcleo de $\pi$, e $i_0$ é a injeção natural. Repetimos este procedimento com $K_0$ no lugar de $M$ e tomamos $d_1$ como sendo a composição $i_0 \circ \pi_1$,

$$\begin{tikzcd}
& & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\pi_1"] & & F_0 \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0 \\
& K_1 \arrow[ur] & & K_0 \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Este processo continua infinitamente ou até que se tenha $K_n = 0$ para algum $n$.

**Proposição A.11** *(Lema de Schanuel) Dadas as sequências exatas*

$$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

*e*

$$0 \to K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0$$

*onde $P$ e $P'$ são projetivos, então existe um isomorfismo $K \oplus P' \cong K' \oplus P$.*

**Demonstração.** Ver [34], Proposição 3.12. ■

**Proposição A.12** *(Lema da ferradura) Dado um diagrama de $R$-módulos*

$$\begin{tikzcd} & \arrow[d] & & \arrow[d] & \\ & P_1' \arrow[d] & & P_1'' \arrow[d] & \\ & P_0' \arrow[d, "\epsilon'"] & & P_0'' \arrow[d, "\epsilon''"] & \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "q"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

*onde as colunas são resoluções projetivas e a linha é exata, então existe uma resolução projetiva de $A$ e homomorfismos de modo que as três colunas formem uma sequência exata de complexos, fazendo com o que diagrama acima comute.*

**Demonstração.** Ver [34], Proposição 6.24. ■

**Definição A.13** Uma *resolução injetiva* de um $R$-módulo $M$ é uma sequência exata

$$\mathbb{I} : 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots$$

onde $I^i$ é injetivo para todo $i \geq 0$. A *dimensão injetiva*, denotada por $\mathrm{id}_R(M)$ é o menor inteiro $n$ tal que existe uma resolução injetiva de $M$ com $I^m = 0$ para todo $m > n$. Se tal $n$ não existe, $\mathrm{id}_R(M) = \infty$.

Todo módulo pode ser mergulhado em um módulo injetivo (Ver [5], Teorema 3.1.8), ou seja, para cada módulo $M$, existe um módulo injetivo $I$ e uma injeção $i : M \to I$. Usando um procedimento semelhante ao que fornece a existência de uma resolução livre, obtemos uma resolução injetiva de $M$.

**Definição A.14** Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos e suponha que

$$\mathbb{P} : \cdots \to P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$$

é uma resolução projetiva truncada à direita de $M$. Aplicando $- \otimes_R N$ a $\mathbb{P}$, temos o complexo

$$\mathbb{P} \otimes_R N : \cdots \to P_i \otimes_R N \xrightarrow{d_i \otimes N} P_{i-1} \otimes_R N \xrightarrow{d_{i-1} \otimes N} \cdots \to P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \otimes N} P_0 \otimes_R N \to 0$$

onde para cada $a \otimes b \in P_i \otimes_R N$ temos $d_i \otimes N(a \otimes b) = d_i(a) \otimes b$. O *$i$-ésimo Tor do par $M$, $N$* é o $R$-módulo

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) := \mathrm{H}_i(\mathbb{P} \otimes_R N)$$

Esta definição é independente da escolha da resolução projetiva (Ver [34], Corolário 6.21). Logo, $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)=0$ para todo $i>0$ quando $M$ é projetivo. Além disso, valem os seguintes isomorfismos $\mathrm{Tor}_0^R(M,N)\cong M\otimes_R N$ (Ver [34], Teorema 6.29) e $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)\cong \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$ para todo $i>0$ (Ver [34], Teorema 7.1).

**Proposição A.15** *Sejam $M$ um $R$-módulo e $n$ um inteiro positivo. Então, $\mathrm{Tor}_i^R(\Omega^n M,R)\cong \mathrm{Tor}_{i+n}^R(M,R)$ para todo $i\geq 1$.* (Veja notação na Definição 1.17).

**Demonstração.** Ver [34], Corolário 6.23. ∎

Vamos definir agora os módulos Ext como segue.

**Definição A.16** Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos e suponha que

$$\mathbb{P}:\cdots\to P_i\xrightarrow{d_i}P_{i-1}\xrightarrow{d_{i-1}}\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\to 0$$

é uma resolução projetiva truncada á direita de $M$. Aplicando $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ a $\mathbb{P}$, temos o co-complexo

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},N):0\to\mathrm{Hom}_R(P_0,N)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(d_1,N)}\mathrm{Hom}_R(P_1,N)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(d_2,N)}\mathrm{Hom}_R(P_2,N)\to\cdots$$

onde para cada $f\in\mathrm{Hom}_R(P_i,N)$, temos $\mathrm{Hom}_R(d_i,N)(f)=f\circ d_i$. O *$i$-ésimo Ext de $M$* com respeito a $N$ é o $R$-módulo

$$\mathrm{Ext}_R^i(M,N):=\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},N)).$$

Esta definição é independente da escolha da resolução projetiva (Ver [34], Corolário 6.57). Assim, se $\mathrm{pd}_R(M)=d$, então $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$ para todo $R$-módulo $N$ e todo $i>d$. Temos também o isomorfismo $\mathrm{Hom}_R(M,N)\cong\mathrm{Ext}_R^0(M,N)$ (Ver [12], Capítulo 17, Proposição 3). De [34], Proposições 7.21 e 7.22, segue que o Ext comuta com somas diretas finitas tanto à esquerda quanto à direita.

**Proposição A.17** *Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos. Se $M$ é projetivo, então $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$ para todo $i\geq 1$.*

**Demonstração.** Ver [12], Capítulo 17 Proposição 11. ∎

**Proposição A.18** ***(Sequências exata longa dos Ext)***

(*i*) *Considere uma sequência exata curta de $R$-módulos*

$$0\to L\to M\to N\to 0$$

*Dado um $R$-módulo $K$, existe uma sequência exata longa*

$$0\to\mathrm{Hom}_R(N,K)\to\mathrm{Hom}_R(M,K)\to\mathrm{Hom}_R(L,K)\to\mathrm{Ext}_R^1(N,K)\to\cdots$$

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_R^i(N,K)\to\mathrm{Ext}_R^i(M,K)\to\mathrm{Ext}_R^i(L,K)\to\cdots$$

(*ii*) *Considere uma sequência exata curta de $R$-módulos*

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

*Dado um $R$-módulo $K$, existe uma sequência exata longa*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(K, L) \to \mathrm{Hom}_R(K, M) \to \mathrm{Hom}_R(K, N) \to \mathrm{Ext}^1_R(K, L) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_R(K, L) \to \mathrm{Ext}^i_R(K, M) \to \mathrm{Ext}^i_R(K, N) \to \cdots$$

**Demonstração.** Ver [12], Teoremas 8 e 10. ∎

**Proposição A.19** *Sejam $M$ um $R$-módulo e $n$ um inteiro positivo. Então, temos que $\mathrm{Ext}^i_R(\Omega^n M, R) \cong \mathrm{Ext}^{i+n}_R(M, R)$ para todo $i \geq 1$.* (Veja notação na Definição 1.17).

**Demonstração.** Ver [34], Corolário 6.55. ∎

**Proposição A.20** *Seja $U \subseteq R$ um conjunto multiplicativo. Se $M$ é um $R$-módulo finitamente gerado, então existem isomorfismos*

$$U^{-1}\mathrm{Ext}^i_R(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{U^{-1}R}(U^{-1}M, U^{-1}N)$$

*para todo $i \geq 0$ e para todo $R$-módulo $N$.*

**Demonstração.** Ver [34], Proposição 7.39. ∎

**Proposição A.21** *Seja $M$ um $R$-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

(*i*) $\mathrm{id}_R(M) \leq n$;

(*ii*) $\mathrm{Ext}^j_R(N, M) = 0$ *para todo $R$-módulo $N$ e para todo $j \geq n + 1$;*

**Demonstração.** Ver [34], Proposição 8.11. ∎

**Proposição A.22** *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Então,*

$$\mathrm{id}_R(M) = \sup\{i \geq 0 \,|\, \mathrm{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\}.$$

**Demonstração.** Ver [5], Proposição 3.1.14. ∎

# Apêndice B

# Profundidade, grade e anéis especiais

Neste apêndice, além das hipóteses sobre os anéis também assumiremos que todos os módulos são finitamente gerados. Denotamos por $\dim(R)$ a dimensão de Krull do anel $R$. Para um $R$-módulo $M$, definimos a dimensão de $M$ como sendo $\dim(M) := \dim(R/\mathrm{Ann}_R(M))$. Assim, $\dim(M) \leq \dim(R)$. Dizemos que $x \in R$ é um *elemento $M$-regular* se $xz = 0$ para $z \in M$, implica $z = 0$, em outras palavras, $x$ não é um divisor de zero de $M$. Sequências regulares são composições sucessivas de elementos regulares.

**Definição B.1** Seja $M$ um $R$-módulo. Uma sequência $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ de elementos de $R$ é chamada *sequência $M$-regular*, ou simplesmente *$M$-sequência*, se as seguintes condições são satisfeitas:

$(i)$ $x_1$ é $M$-regular e $x_i$ é $M/(x_1, ..., x_{i-1})$-regular para $i = 2, ..., n$;

$(ii)$ $M/\mathbf{x}M \neq 0$.

Uma *sequência regular* é uma $R$-sequência. Dizemos que $\mathbf{x}$ é uma *$M$-sequência fraca* se satisfaz a condição $(i)$.

Sejam $R$ um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e $M \neq 0$ um $R$-módulo. Se $\mathbf{x} \subseteq \mathfrak{m}$, então a condição $(ii)$ é automaticamente satisfeita devido ao Lema de Nakayama, que no caso local nos diz que: Se $M$ é um $R$-módulo e $I \subseteq \mathfrak{m}$ é um ideal tal que $IM = M$, então $M = 0$.

Uma $M$-sequência $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ contida em um ideal $I$ é dita ser *maximal em $I$*, se $x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ não é uma $M$-sequência para qualquer $x_{n+1} \in I$. O próximo resultado nos diz que toda $M$-sequência maximal em um ideal $I$ com $IM \neq M$ tem o mesmo comprimento. Isso nos permite introduzir a noção geral de grade e profundidade.

**Teorema B.2** *(**Rees**) Sejam $M$ um $R$-módulo e $I$ um ideal tal que $IM \neq M$. Então toda $M$-sequência maximal em $I$ tem o mesmo comprimento $n$ dado por:*

$$n = \min\{i \geq 0 \,|\, \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

**Demonstração.** Ver [5], Teorema 1.2.5. ∎

**Definição B.3** Sejam $M$ um $R$-módulo e $I$ um ideal tal que $IM \neq M$. Então o comprimento de uma $M$-sequência maximal em $I$ é chamado de *grade* de $I$ em $M$, denotado por $\mathrm{grade}(I, M)$. Pelo Teorema B.2, temos

$$\mathrm{grade}(I, M) = \min\{i \geq 0 \,|\, \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

**Definição B.4** Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual $k$ e $M \neq 0$ um $R$-módulo. Então, o grade de $\mathfrak{m}$ em $M$ é chamada de *profundidade* de $M$, denotada por $\mathrm{depth}_R(M)$. Em outras palavras, a profundidade de $M$ é o comprimento de uma $M$-sequência maximal em $\mathfrak{m}$, ou seja,

$$\mathrm{depth}_R(M) = \min\{i \geq 0 \,|\, \mathrm{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\}.$$

Por convenção, $\mathrm{depth}_R(0) = \infty$.

**Proposição B.5** *Sejam $R$ um anel local e $0 \to U \to M \to N \to 0$ uma sequência exata de $R$-móulos. Então,*

*(i)* $\mathrm{depth}_R(M) \geq \min\{\mathrm{depth}_R(U), \mathrm{depth}_R(N)\}$;

*(ii)* $\mathrm{depth}_R(U) \geq \min\{\mathrm{depth}_R(M), \mathrm{depth}_R(N) + 1\}$;

*(iii)* $\mathrm{depth}_R(N) \geq \min\{\mathrm{depth}_R(M), \mathrm{depth}_R(U) - 1\}$.

*Em particular, se* $\mathrm{depth}_R(M) > \mathrm{depth}_R(N)$ *ou* $\mathrm{depth}_R(M) > \mathrm{depth}_R(U)$, *então*

$$\mathrm{depth}_R(U) = \mathrm{depth}_R(N) + 1.$$

**Demonstração.** Ver [5], Proposição 1.2.9. ∎

**Corolário B.6** *Sejam $R$ um anel local e $M, N$ $R$-módulos. Então,*

$$\mathrm{depth}_R(M \oplus N) = \min\{\mathrm{depth}_R(M), \mathrm{depth}_R(N)\}.$$

**Demonstração.** Considere a sequência exata $0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0$. Pela Proposição B.5$(i)$, $\mathrm{depth}_R(M \oplus N) \geq \min\{\mathrm{depth}_R(M), \mathrm{depth}_R(N)\}$. Suponha que

$$\min\{\mathrm{depth}_R(M), \mathrm{depth}_R(N)\} = \mathrm{depth}_R(M)$$

então $\operatorname{depth}_R(N) \geq \operatorname{depth}_R(M)$. Por outro lado, pela Proposição B.5$(ii)$, $\operatorname{depth}_R(M) \geq \min\{\operatorname{depth}_R(M \oplus N), \operatorname{depth}_R(N)+1\} = \operatorname{depth}_R(M \oplus N)$, pois $\operatorname{depth}_R(N) \geq \operatorname{depth}_R(M)$, como queríamos. ∎

Lembramos que dois módulos $M$ e $N$ são projetivamente equivalentes se existem $P, Q$ projetivos com $M \oplus P \cong N \oplus Q$ e denotamos $M \approx N$.

**Lema B.7** *Seja $R$ um anel local. Considere $M$ e $N$ $R$-módulos tais que $M \approx N$. Se $\operatorname{depth}_R(M) < \operatorname{depth}(R)$, então $\operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}_R(N)$.*

**Demonstração.** Sejam $P$ e $Q$ projetivos tais que $M \oplus P \cong N \oplus Q$. Logo, temos que $\operatorname{depth}_R(M \oplus P) = \operatorname{depth}_R(N \oplus Q)$. Assim, pelo Corolário B.6

$$\min\{\operatorname{depth}_R(M), \operatorname{depth}_R(P)\} = \min\{\operatorname{depth}_R(N), \operatorname{depth}_R(Q)\} \tag{B.1}$$

Como $P$ e $Q$ são projetivos e portanto livres, temos que $\operatorname{depth}_R(P) = \operatorname{depth}(R) = \operatorname{depth}_R(Q)$. Desde que $\operatorname{depth}_R(M) < \operatorname{depth}(R)$, por (B.1) concluímos que $\operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}_R(N)$. ∎

**Lema B.8** *Sejam $R$ um anel local, $M$ um $R$-módulo e $n$ um inteiro positivo. Se*

$$\operatorname{depth}_R(M) = 0 \text{ e } \operatorname{depth}(R) > n$$

*então $\operatorname{depth}_R(\Omega^n M) = n$.*

**Demonstração.** Faremos indução em $n$. Suponha que $n = 1$ e considere a sequência exata

$$0 \to \Omega M \to Q_0 \to M \to 0$$

onde $Q_0$ é projetivo. Note que $\operatorname{depth}_R(Q_0) = \operatorname{depth}(R) > n > 0 = \operatorname{depth}_R(M)$. Pela Proposição B.5, $\operatorname{depth}_R(\Omega M) = \operatorname{depth}_R(M) + 1 = 1$. Assuma que $n > 1$ e que o resultado é valido para $n-1$. Considere agora a sequência exata:

$$0 \to \Omega^n M \to Q_{n-1} \to \Omega^{n-1} M \to 0$$

onde $Q_{n-1}$ é projetivo. Como $\operatorname{depth}_R(Q_{n-1}) = \operatorname{depth}(R) > n > n-1 = \operatorname{depth}_R(\Omega^{n-1}M)$, então pela Proposição B.5, $\operatorname{depth}_R(\Omega^n M) = \operatorname{depth}_R(\Omega^{n-1}M) + 1 = n - 1 + 1 = n$. ∎

**Lema B.9** *Sejam $R$ um anel local, $M$ um $R$-módulo e $n$ um inteiro positivo. Se*

$$\operatorname{depth}_R(\Omega^n M) = n \text{ e } \operatorname{depth}(R) > n$$

*então $\operatorname{depth}_R(M) = 0$.*

**Demonstração.** Considere a sequência exata abaixo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \Omega^n M \arrow[r] & Q_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & \Omega^{n-1} M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

onde $Q_i$ é projetivo para todo $i = 0, ..., n-1$. Como $0 \to \Omega^n M \to Q_{n-1} \to \Omega^{n-1} M \to 0$ é exata e $\operatorname{depth}_R(\Omega^n M) = n < \operatorname{depth}(R) = \operatorname{depth}_R(Q_{n-1})$, então pelo Proposição B.5, segue que $\operatorname{depth}_R(\Omega^{n-1} M) = \operatorname{depth}_R(\Omega^n M) - 1 = n - 1$. Continuamos com esse processo até chegar na sequência exata

$$0 \to \Omega M \to Q_0 \to M \to 0$$

com $\operatorname{depth}_R(\Omega M) = 1 \leq n < \operatorname{depth}(R) = \operatorname{depth}_R(Q_0)$. Logo,

$$\operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}_R(\Omega M) - 1 = 0,$$

como queríamos. ■

O próximo resultado fornece uma fórmula que será útil no cálculo de profundidades.

**Proposição B.10** *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local e* $M$ *um* $R$*-módulo. Se* $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ *é uma* $M$*-sequência em* $\mathfrak{m}$*, então*

$$\operatorname{depth}_{R/(\mathbf{x})}(M/\mathbf{x}M) = \operatorname{depth}_R(M/\mathbf{x}M) = \operatorname{depth}_R(M) - n.$$

**Demonstração.** Ver [5], Proposição 1.2.10(d). ■

**Definição B.11** Seja $M \neq 0$ um $R$-módulo. Então, o *grade* de $M$ é dado por

$$\operatorname{grade}_R(M) = \min\{i \geq 0 \,|\, \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}.$$

**Proposição B.12** *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local e* $M \neq 0$ *um* $R$*-módulo. Então temos que* $\operatorname{depth}_R(M) \leq \dim(M)$*. Além disso,* $\operatorname{depth}_R(M) \leq \dim(R/\mathfrak{p})$ *para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$*. Em particular, se* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R(M)$*, então* $\operatorname{depth}_R(M) = 0$.

**Demonstração.** Ver [5], Proposições 1.2.12 e 1.2.13. ■

**Proposição B.13** *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local e* $M \neq 0$ *um* $R$*-módulo. Se* $\operatorname{depth}_R(M) = 0$*, então* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R(M)$.

**Demonstração.** Como $\operatorname{depth}_R(M) = 0$ não existe elemento $M$-regular $x \in R$ tal que $M/xM \neq 0$. Dado $x \in \mathfrak{m}$, pelo Lema de Nakayama temos que $M/xM \neq 0$. Logo, $x$ não pode ser $M$-regular, donde $x \in z_R(M)$ e assim, $\mathfrak{m} \subseteq z_R(M)$. Sendo $R$ Noetheriano e $M \neq 0$ um $R$-módulo, $z_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$. Pelo Lema da Esquiva $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$. Como $\mathfrak{m}$ é maximal $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Portanto, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R(M)$. ■

**Proposição B.14** *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local e* $M \neq 0$ *um* $R$*-módulo. Se* $\operatorname{depth}_R(M) > 0$ *e* $\operatorname{depth}(R) > 0$*, então* $\mathfrak{m}$ *contém um elemento* $R$ *e* $M$*-regular.*

**Demonstração.** Como $R$ é Noetheriano e $M \neq 0$ é finitamente gerado, $z_R(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ com $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}_R(M)$ e $z(R) = \bigcup_{j=1}^{m} \mathfrak{q}_j$ com $\mathfrak{q}_j \in \operatorname{Ass}(R)$. Logo, $z_R(M) \cup z(R)$ é uma finita de primos, logo está contida propriamente em $R$. Como $\operatorname{depth}_R(M) > 0$ e $\operatorname{depth}(R) > 0$, então pela Proposição B.12, $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}_R(M) \cup \operatorname{Ass}(R)$, donde $\mathfrak{m} \not\subseteq z_R(M) \cup z(R)$. Portanto, $\mathfrak{m} \cap R \backslash (z_R(M) \cup z(R)) \neq \emptyset$ e assim $\mathfrak{m}$ contém um elemento $R$ e $M$-regular. ■

O próximo teorema é um instrumento eficaz para o cálculo da profundidade de um módulo.

**Teorema B.15** ***(Fórmula de Auslander-Buchsbaum)*** *Sejam* $R$ *um anel local e* $M \neq 0$ *um* $R$*-módulo. Se* $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$*, então* $\operatorname{pd}_R(M) + \operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}(R)$*.*

**Demonstração.** Ver [5], Teorema 1.3.3. ■

**Definição B.16** Seja $R$ um anel local. Um $R$-módulo $M \neq 0$ é um *módulo Cohen-Macaulay* se $\operatorname{depth}_R(M) = \dim(M)$. Se o próprio $R$ é um módulo Cohen-Macaulay, então ele é chamado de *anel Cohen-Macaulay*. Um *módulo Cohen-Macaulay maximal* é um módulo Cohen-Macaulay $M$ tal que $\dim(M) = \dim(R)$.

Vamos agora introduzir uma outra importante classe de anéis locais.

**Definição B.17** Um anel local $R$ é dito ser *Gorenstein* se $\operatorname{id}(R) < \infty$.

**Teorema B.18** *Seja* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel local tal que* $\dim(R) = n$*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

*(i)* *$R$ é Gorenstein;*

*(ii)* $\operatorname{id}(R) < \infty$*;*

*(iii)* $\operatorname{id}(R) = n$*;*

*(iv)* $\operatorname{Ext}_R^i(k, R) = 0$ *para* $i \neq n$ *e* $\operatorname{Ext}_R^n(k, R) \cong k$*;*

(*v*) $\mathrm{Ext}^i_R(k, R) = 0$ *para algum* $i > n$;

(*vi*) $\mathrm{Ext}^i_R(k, R) = 0$ *para* $i < n$ *e* $\mathrm{Ext}^n_R(k, R) \cong k$.

**Demonstração.** Ver [27], Teorema 18.1. ∎

**Proposição B.19** *Todo anel local Gorenstein é um anel Cohen-Macaulay.*

**Demonstração.** Ver [5], Proposição 3.1.20. ∎

# Apêndice C

# Anéis Semiperfeitos

O foco deste apêndice é apresentar uma importante classe de anéis utilizada ao longo do texto. Vimos no Capítulo 2 que para termos a operação $\lambda := \Omega\mathrm{Tr}$ bem definida é necessário que o anel em questão admita coberturas projetivas, tais anéis são chamados de *anéis semiperfeitos*. Mais detalhes podem ser encontrados em [3], [14], [22] e [34].

**Definição C.1** Um submódulo $N$ de um módulo $M$ é *supérfluo* se $L \subseteq M$ for um submódulo com $L + N = M$, então $L = M$. Neste caso, denotamos $N \ll M$.

**Definição C.2** Uma *cobertura projetiva* de um módulo $M$ é um par ordenado $(P, \varphi)$, onde $P$ é projetivo e $\varphi : P \to M$ um epimorfismo com $\mathrm{Ker}(\varphi) \ll P$.

**Definição C.3** Dizemos que um anel $R$ é *semiperfeito* se todo módulo finitamente gerado tem uma cobertura projetiva.

**Teorema C.4** *Todo anel local é semiperfeito.*

**Demonstração.** Ver [34], Teorema 4.62. ■

**Definição C.5** Uma sequência exata de $R$-módulos $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0$ é chamada *apresentação projetiva minimal* de $M$ se $P_1$ e $P_0$ são projetivos finitamente gerados com $\mathrm{Ker}(f) \ll P_1$ e $\mathrm{Im}(f) \ll P_0$.

**Observação C.6** $(i)$ Quando $R$ é semiperfeito todo módulo finitamente gerado tem uma apresentação projetiva minimal. (Ver [3], pág 354). Tomando $J = J(R)$ (o radical de Jacobson de $R$), a minimalidade significa apenas que $\mathrm{Ker}(f) \leq JP_1$ e $\mathrm{Im}(f) \leq JP_0$.

$(ii)$ Uma sequência exata de $R$-módulos

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{f_n} \cdots \to P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

é chamada resolução projetiva minimal de $M$ caso $P_i$ é projetivo finitamente gerado e $\mathrm{Ker}(f_i) \leq JP_i$ para todo $i \geq 0$.

$(iii)$ Usando coberturas projetivas, é fácil ver que todo módulo finitamente gerado sobre um anel semiperfeito tem uma resolução projetiva minimal.

O próximo resultado nos mostra que as coberturas projetivas são únicas quando existem.

**Lema C.7** *Assuma que $P \xrightarrow{g} M$ é uma cobertura projetiva de um $R$-módulo $M$. Se $Q \xrightarrow{f} M$ é uma cobertura projetiva, então $Q \cong P$.*

**Demonstração.** Ver [14], Lema 22.11. ■

As apresentações projetivas minimais são essencialmente únicas como mostra o seguinte resultado.

**Lema C.8** *Se $M$ e $N$ têm apresentações projetivas minimais*

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0$$

*e*

$$Q_1 \xrightarrow{g} Q_0 \to N \to 0$$

*então $M \cong N$ se, e somente se, existem isomorfismos $\varphi_1$ e $\varphi_0$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & P_0 \arrow[d, "\varphi_0"] \\ Q_1 \arrow[r, "g"] & Q_0 \end{tikzcd}$$

*comuta.*

**Demonstração.** Ver [3], Lema 32.11. ■

**Teorema C.9** *Sejam $R$ um anel semiperfeito e $M$ um $R$-módulo estável finitamente gerado. Se*

$$P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

*é uma apresentação projetiva minimal de $M$, então*

$$P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0$$

*é uma apresentação projetiva minimal de $\mathrm{Tr}M$. Além disso, $\mathrm{Tr}M$ é estável.*

**Demonstração.** Ver [3], Teorema 32.13. ■

**Proposição C.10** *Sejam $R$ um anel semiperfeito, $M$ um $R$-módulo finitamente gerado com apresentação projetiva minimal $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ e*

$$0 \to M^* \to P_0^* \to P_1^* \xrightarrow{\omega} \mathrm{Tr}M \to 0$$

*a correspondente apresentação projetiva da* $\mathrm{Tr}M$*. Então, $\omega : P_1^* \to \mathrm{Tr}M$ é uma cobertura projetiva.*

**Demonstração.** Ver [26], Proposição 3(a). ∎

# Referências Bibliográficas


[1] Auslander, M., *Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative*, Secrétariat mathématique, Paris, 1967, Séminaire d'Algèbre Commutative dirigé par Pierre Samuel, 1966/1967. Texte rédigé, d' après des exposés de Maurice auslander, par Marquerite Mangeney, Christian Peskine et Lucien Szpiro. École Normale Supérieure de Jeunes Filles. 10

[2] Auslander, M. e Bridger, M., *Stable module theory*, American Mathematical Society, Providence, R.I., (1969). 10, 18, 33

[3] Anderson, F.W., Fuller, K.R., *Rings and Categories of Modules*, 2ª edição, Springer-Verlag, Berlin, (1992). 57, 58

[4] Bass, H., *On the ubiquity of Gorenstein rings* , Math. Zeitschr., 82 (1963), 8-28. 30

[5] Bruns, W. e Herzog, J., *Cohen-Macaulay rings*, Revised edition, Cambridge University Press, (1998). 45, 48, 50, 52, 54, 55, 56

[6] Cartan, H. e Eilenberg, S., *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1956). 46

[7] Celikbas, O., Dibaei, M. T., Gheibi, M., Sadeghi, A, Takahashi, R., *Associated primes and syzygies of linked modules*, J. Commut. Algebra, 11 (2019), 301-323. 3

[8] Dehghani-Zadeh, F., Dibaei, M.T., Sadeghi, A. , *Linkage of modules by reflexive morphisms*, J. Math. Soc. Japan, 74 (2022), 25-77. 3

[9] Dibaei, M.T., Sadeghi, A., *Linkage of finite Gorenstein dimension modules*, J. Algebra, 376 (2013) 261-278. 3, 4, 30

[10] Dibaei, M.T., Sadeghi, A., *Linkage of modules and the Serre conditions*, J. Pure Appl. Algebra, 219 (2015), 4458-4478. 3

[11] Dibaei, M.T., Sadeghi, A., *Linkage of modules with respect to a semidualizing module*, Pacific J. Math., 294 (2018), 307-328. 3

[12] Dummit, David S., Foote, Richard M., *Abstract Algebra*, 3ª edição, Wiley, (2004). 49, 50

[13] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, (1995). 3

[14] Faith, C., *Algebra II*, Ring Theory, Springer-Verlag, Berlin, (1976). 57, 58

[15] Huneke, C., *Linkage and the Koszul homology of ideals*, American J. Mathematics, 104 (1982), 1043-1062. 3

[16] Huneke, C., Ulrich, B., *The structure of linkage*, Annals of Math, 126 (1987), 277-334. 3

[17] Huneke, C., Ulrich, B., *Algebraic linkage*, Duke Math. J., 56 (1988) 415-429. 3

[18] Huneke, C., Ulrich, B., *Minimal linkage and the Gorenstein locus of an ideal*, Nagoya Math. J., 109 (1988), 159-167. 3

[19] Iima, K.-I., Takahashi, R., *Perfect linkage of Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, J. Algebra, 458 (2016), 134-155. 3

[20] Ishikawa, T., *On injective modules and flat modules*, J. Math. Soc. Japan, 17 (1965), 291-296. 46

[21] Jahangiri, M., Sayyari, K., *Attached and associated primes of local cohomology modules via linkage*, J. Algebra Appl., 22 (2023), 2350211. 3

[22] Lam, T.Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, Berlin, (1991). 57

[23] Maşiek, V., *Gorenstein dimension and torsion of modules over commutative Noetherian rings*, Commun. Algebra, 28 (2000), 5783-5811. 4, 5, 6, 10, 11, 14, 15

[24] Martin, H. M., *Linkage and the generic homology of modules* , Commun. Algebra, 28 (2000), 4285-4301. 3

[25] Martsinkovsky, A., Strooker, J.R., *Linkage of modules* , J. Algebra, 271 (2004), 587-626. 3, 4, 18, 24

[26] Martsinkovsky, A., *1-Torsion of finite modules over semiperfect rings*, J. Algebra, 324 (2010), 2595-2607. 59

[27] Matsumura, H., *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, (1986). 28, 45, 56

[28] Migliore, J.C., *Introduction to Liaison Theory and Deficiency Modules*, Progress in Mathematics, Birkhauser, Boston, 165, (1998). 3

[29] Miranda-Neto, C.B., Souza, T.S., *On reduced G-perfection and horizontal linkage*, Commun. Algebra, 52 (2024), 978-999. 3

[30] Nagel, U., *Liaison classes of modules*, J. Algebra, 284 (2005), 236-272. 3

[31] Nagel, U., *Even liaison classes generated by Gorenstein linkage*, J. Algebra, 209 (1998), 543-584. 3

[32] Nishida, K., *Linkage and duality of modules*, Math. J. Okayama Univ, 51 (2009), 71-81. 3

[33] Peskine, C., Szpiro, L., *Liasion des variétés algébriques. I* , Invent. Math, 26 (1974), 271-302. 3

[34] Rotman, J., *An introduction to homological algebra*, Academic Press, (1979). 45, 47, 48, 49, 50, 57

[35] Schenzel, P., *Notes on liaison and duality* , J. Math. Kyoto Univ., 22 (1982), 485-498. 3

[36] Sadeghi, A., *Linkage of finite $G_C$-dimension modules*, J. Pure Appl. Algebra, 221 (2017), 1344-1365. 3

[37] Sadeghi, A., *Notes on linkage of modules*, Proc. Edinb. Math. Soc., 62 (2019), 1045-1062. 3

[38] Souza, T.S., *Notes on linkage of modules with respect to a semidualizing module*, Commun. Algebra, 51 (2023), 2114-2128. 3

[39] Souza, T.S., *Theory of linkage, Gorenstein dimension and two semidualizing modules*, J. Algebra Appl., (2023). DOI: 10.1142/S0219498824501330. 3

[40] Ulrich, B., *Lectures on linkage and deformation*, in: Workshop on Commutative Algebra, ICTP, Trieste, (1992). 3

[41] Yoshino, Y., Isogawa, S., *Linkage of Cohen Macaulay modules over a Gorenstein ring*, J. Pure Appl. Algebra, 149 (2000), 305-318. 3