



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Antonio Freitas Araújo Filho [†]

Classificação de solução para um problema sobredeterminado em 2D

Campina Grande - PB

2025

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Antonio Freitas Araújo Filho

Classificação de solução para um problema sobredeterminado em 2D

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa análise e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Campina Grande - PB

2025

A663c Araújo Filho, Antonio Freitas.
Classificação de solução para um problema sobredeterminado em 2D /
Antonio Freitas Araújo Filho. - Campina Grande, 2025.
58 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.
"Orientação: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos."
Referências.

1. Matemática. 2. Problema Sobredeterminado. 3. Classificação de
Solução. 4. Fronteira Livre. 5. Princípio do Máximo. 6. Lema de Hopf. I.
Santos, Jefferson Abrantes dos. II. Título.

CDU 51(043.3)

Classificação de solução para um problema sobredeterminado em 2D

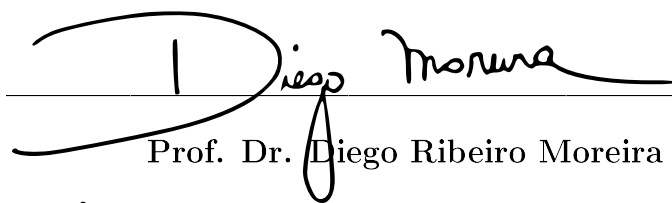
por

Antonio Freitas Araújo Filho

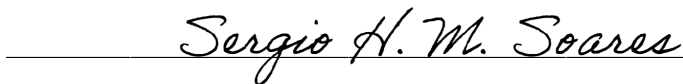
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

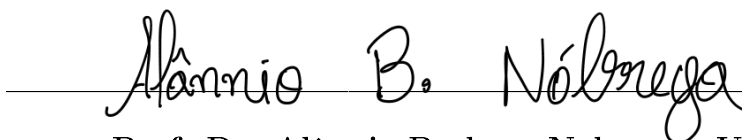
Aprovada em: 28/08/2025



Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira - UFC



Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari - USP



Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nobrega - UFCG

Lucas da Silva

Prof. Dr. Lucas da Silva - UFCG

Jefferson Abrantes dos Santos

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Agosto - 2025

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por toda a força e resiliência que me concedeu para enfrentar as adversidades ao longo desta jornada.

Agradeço também à minha família, pois foram eles que, um dia, caminharam para que eu pudesse correr e alcançar os meus sonhos. Em especial, sou profundamente grato aos meus pais Maria das Dores Araújo Pires e Antonio de Freitas Pires por todo o suporte e amor incondicional. Não sei se um dia serei metade do que vocês são, mas estarei sempre tentando me tornar um ser humano melhor e digno de tudo o que me dedicaram.

Sou igualmente grato aos meus amigos de vida e de caminhada, em especial: Guilherme, Michele, Kennedy, Leonardo, Ary, Valdyleide, Izabel, Victoria e a todos os amigos e funcionários do departamento, cuja presença tornou esta trajetória mais leve e significativa.

Agradeço de forma especial à minha namorada, Tereza, por toda a compreensão e paciência que teve comigo desde o dia em que chegou à minha vida - presença que considero essencial para o meu bem-estar emocional e desempenho acadêmico.

Aos professores com quem tive o privilégio de aprender, deixo minha gratidão por cada ensinamento e incentivo. Em especial, agradeço ao meu orientador, Jefferson Abrantes dos Santos, por sua paciência, dedicação e por tudo o que me ensinou. Acredito que evoluí imensamente graças à sua orientação.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante esses dois anos.

Dedicatória

À minha família, em especial
à minha mãe e ao meu pai,
que, com muito esforço e dedica-
ção, me proporcionaram todas as
oportunidades que um dia ousei
sonhar.

Resumo

Este trabalho estuda um problema sobredeterminado envolvendo um domínio ilimitado com duas fronteiras livres dadas por gráficos de funções. Sob condições específicas nas fronteiras, demonstra-se que as soluções do problema podem ser explicitadas e que as fronteiras do domínio são retas paralelas. Para concluir tal objetivo utiliza-se técnicas de análise, incluindo Princípio do Máximo, Lema de Hopf, funções barreiras e métodos de comparação, garantindo a classificação da solução e a simetria do domínio.

Palavras-chave: Problema Sobredeterminado, Classificação de Solução, Fronteira livre, Princípio do Máximo, Lema de Hopf.

Abstract

This work studies an overdetermined problem involving an unbounded domain with two free boundaries given by the graphs of functions. Under specific conditions on the boundaries, it is shown that the solutions to the problem can be explicitly described and that the domain boundaries are parallel straight lines. To achieve this goal, analytical techniques are employed, including Maximum Principles, Hopf Lemma, barrier functions, and comparison methods, ensuring the classification of the solution and the symmetry of the domain.

Key Words: Overdetermined Problem, Solution Classification, Free boundary, Maximum Principle, Hopf Lemma.

Sumário

Introdução	2
1 Resultados preliminares	6
1.1 Teoria de funções harmônicas	6
1.2 Condição do disco interior e exterior	13
2 Função Barreira	15
2.1 Construção da função Barreira	15
3 Problema sobredeterminado	21
3.1 Sobre o problema	21
3.2 Princípios de comparação	23
3.3 Estudo das fronteiras livres	35
3.4 Prova do Teorema 0.1	39
A Resultados de Análise no $\mathbb{R}^n$ e Medida e Integração	48
Bibliografia	50

Notação

Notações e Definições

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
- $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ denotam os vetores canônicos do $\mathbb{R}^2$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual do $\mathbb{R}^2$;
- $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ denota a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$;
- $[A, B] = \{Bt + (1 - t)A : t \in [0, 1]\}$ com $A, B \in \mathbb{R}^2$;
- $D_r(z)$ ou $D'_r(z)$ representam discos de raio $r > 0$ e centro $z \in \mathbb{R}^2$;
- $\text{dist}(Z, W) = \inf\{|z - w| : z \in Z \text{ e } w \in W\}$ onde Z, W são subconjuntos de $\mathbb{R}^2$;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ denota o vetor gradiente de u em $\mathbb{R}^2$;
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ denota o operador Laplaciano de u em $\mathbb{R}^2$;
- $f(x) = O_x(1)$ quando $x \rightarrow 0$, indica que $f(x)$ é limitada para $x \approx 0$;
- $\text{proj}_\nu \eta = \langle \eta, \nu \rangle \frac{\nu}{|\nu|^2}$ representa a projeção do vetor η sobre o vetor ν ;
- $V_\delta(Z) = \{w \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(w, Z) \leq \delta\}$ denota a vizinhança fechada de raio $\delta > 0$ do conjunto $Z \subset \mathbb{R}^2$;

Introdução

Problemas de classificação de soluções em equações diferenciais parciais tem despertado amplo interesse na literatura matemática, tanto pelas suas implicações teóricas quanto por suas aplicações em mecânica dos fluidos, elasticidade e física matemática.

Neste contexto, um exemplo clássico surge ao estudar o escoamento de um fluido viscoso mediante um tubo reto de comprimento l , submetido a uma pressão δ nas suas extremidades. Fixando-se as coordenadas espaciais (x, y, z) , com o eixo z orientado ao longo do tubo, seja Ω a seção transversal, no plano (x, y) , que contém a origem. Então, neste regime a velocidade u do fluido satisfaz a equação de Poisson

$$\Delta u = -\frac{\delta}{\eta l} \text{ em } \Omega, \quad (1)$$

onde η representa a viscosidade do fluido. Além disso, a condição de aderência a parede do tubo é dada por

$$u = 0, \text{ em } \partial\Omega \quad (2)$$

e a tensão tangencial por

$$\eta \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

onde ν denota o vetor normal interior a fronteira. Determinar, de forma precisa, o ponto de maior tensão tangencial constitui um problema bastante complexo. Por outro lado, uma questão natural que se coloca é a seguinte: quando a tensão tangencial assume o mesmo valor em todos os pontos da parede do tubo ?. Em outras palavras, pergunta-se se existe uma solução u do problema (1) – (2) que satisfaça, adicionalmente, a condição de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \text{const.} \text{ em } \partial\Omega.$$

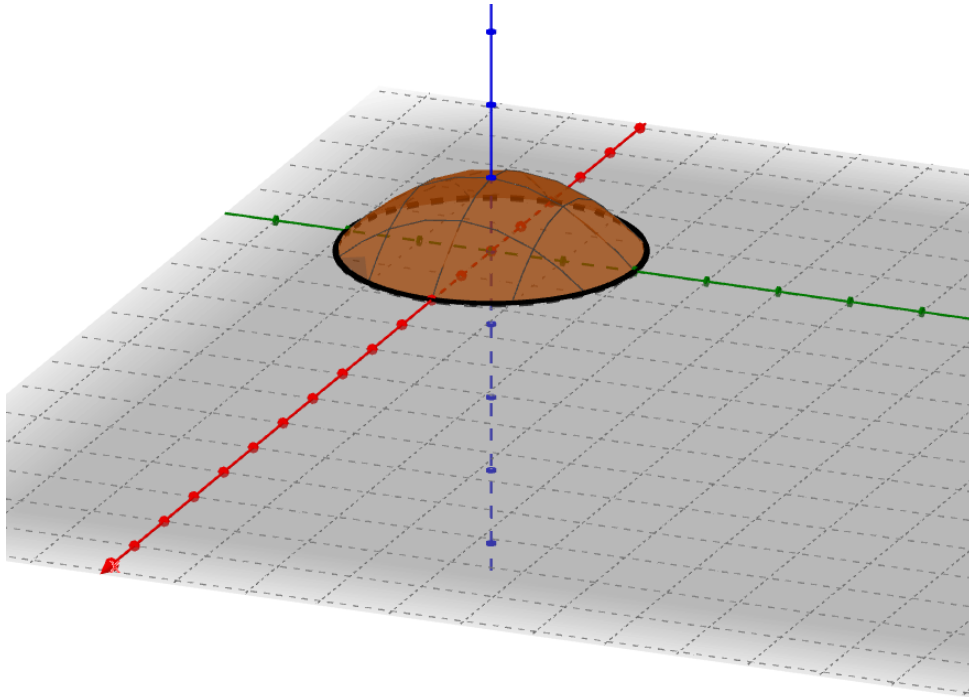
Um trabalho celebrado nessa direção é o clássico artigo de Serrin [8], no qual se demonstra que, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução do problema sobredeterminado:

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \\ |\nabla u| = \text{const}, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

então o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é uma bola de raio d e a função u admite uma representação explícita:

$$u(x) = \frac{d^2 - |x|^2}{2n}.$$

Figura 1: Solução de Serrin



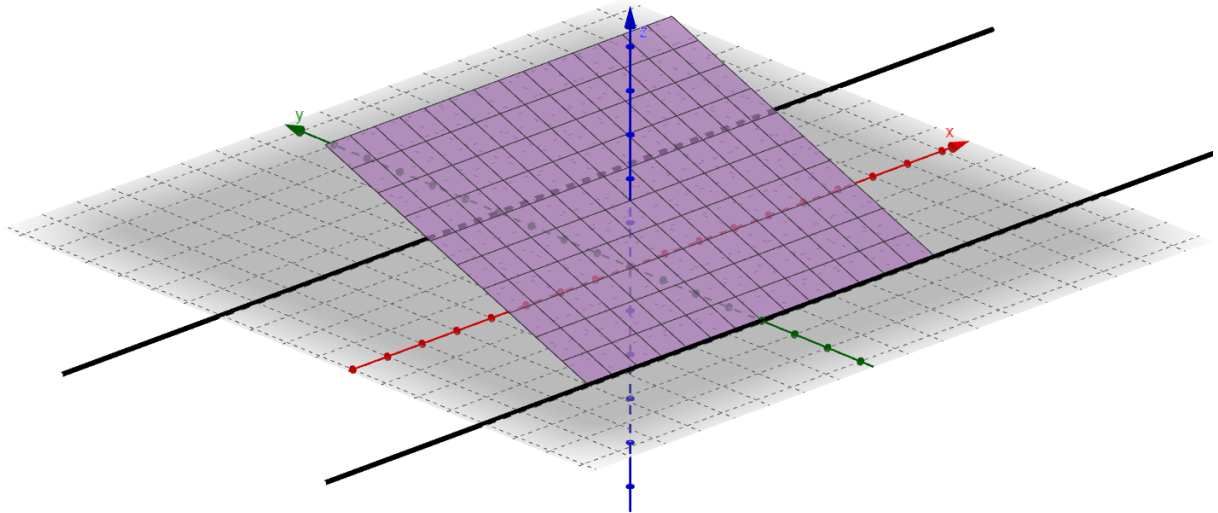
Fonte: Autoria própria, com o uso do GeoGebra.

Esse resultado conecta as propriedades geométricas do domínio com a estrutura da solução, revelando que a condição de Neumann no bordo força a simetria esférica do domínio.

Recentemente, assumindo $n = 2$, De Silva e Valdinoci [3] estudaram um problema sobredeterminado em um domínio ilimitado com fronteiras definidas por gráficos de funções. Nesse trabalho, os autores consideraram equações totalmente não lineares (*fully*

nonlinear) do tipo $F(D^2u) = 0$. Mostraram, sob hipóteses adequadas, que as fronteiras são retas paralelas e a solução é um plano, obtendo assim uma classificação das soluções.

Figura 2: Solução de De Silva e Valdinoci



Fonte: Autoria própria, com o uso do GeoGebra.

O nosso objetivo nesta dissertação é estudar o artigo de Lihe Wang e Lizhou Wang [9] que trata de um problema sobredeterminado sob domínios ilimitados com duas fronteiras dadas por gráficos de funções. Mais precisamente, considerando $a > 0$ estudamos o problema:

$$0 < u < a, \quad \Delta u = -1, \text{ em } \Omega, \quad (3)$$

sob as condições superdeterminadas

$$\begin{cases} u = 0, \quad |\nabla u(x)| = b, \quad x \in J_0; \\ u = a, \quad |\nabla u(x)| = 0, \quad x \in J_1. \end{cases} \quad (4)$$

onde

- $b > 0$;
- $\phi_0, \phi_1 \in C^2(\mathbb{R})$, com $\phi_0 < \phi_1$ em $\mathbb{R}$;

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi_0(x) < y < \phi_1(x)\};$
- $J_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \phi_i(x)\}, i = 0, 1.$

Verificamos, sob tais condições, que as fronteiras devem ser retas paralelas e a solução $u(x, y)$ é explicitamente dada por uma parábola com relação a variável y , a ver:

Teorema 0.1 *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução do problema (3), verificando as condições de contorno (4), então*

- (i) $b = \sqrt{2a};$
- (ii) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \sqrt{2a}\};$
- (iii) $u(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{2a}y, (x, y) \in \overline{\Omega},$ a menos de rotação e translação.

Na prova deste teorema, utilizaremos ferramentas clássicas da análise, tais como: Princípio do Máximo Forte (ver Teorema 1.2), Lema de Hopf (ver Lema 1.1) e o método do deslizamento (sliding method), evitando o uso de desigualdades do tipo Harnack (conforme usado em [3]) ou métodos dos planos móveis (conforme usado em [8], [2]).

A estrutura deste trabalho de dissertação é a seguinte: No Capítulo 1, revisitamos alguns conceitos de funções harmônicas e apresentamos ferramentas auxiliares; no Capítulo 2, construímos uma função barreira essencial para a análise comparativa com a solução; e, no Capítulo 3, faremos a prova do teorema principal por meio de princípios de comparação, finalizando com a caracterização precisa da solução e de seu domínio.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo revisitamos alguns resultados de equações diferenciais parciais em $\mathbb{R}^2$. Esses resultados são fundamentais para o estudo do problema sobredeterminado proposto neste trabalho (a ver (3) e (4)).

1.1 Teoria de funções harmônicas

O objetivo desta seção é revisar o Princípio do Máximo e o Lema de Hopf para funções harmônicas, baseado no livro do Evans [4]. Para isso, assuma que U é um domínio de $\mathbb{R}^2$, isto é, aberto e conexo, e suponha ainda que U seja limitado. Lembramos a seguir a definição de função harmônica.

Definição 1.1 *Uma função $u \in C^2(U)$ é dita harmônica (em U) sempre que*

$$\Delta u = 0, \text{ em } U.$$

Uma informação importante sobre as funções harmônicas é que elas verificam a propriedade da média, dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.1 *Seja $u \in C^2(U)$. Então u é harmônica se, e somente se,*

$$u(w) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(w)} u \, d\mathcal{H}^1 = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(w)} u \, dz$$

para cada disco $D_r(w) \subset U$.

Demonstração. Inicialmente, assuma

- u harmônica em U ;

- $D_{2r}(w) \subset U$,
- $z \in \partial D_1(0) \mapsto \nu(z)$ um campo de vetores normais exterior a $D_1(0)$.

Considerando

$$\eta(t) := \frac{1}{2\pi t} \int_{\partial D_t(w)} u \, d\mathcal{H}^1, \quad t \in (0, 2r),$$

observe que

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_1(0)} u(w + tz) \, d\mathcal{H}_z^1, \quad t \in (0, 2r),$$

e verifica a seguinte afirmação:

Afirmação 1.1 $\eta \equiv \text{const. em } (0, 2r)$.

Dados $t \in (0, 2r)$ e $h \in (0, 2r - t)$, vai existir $\xi \in (0, 1)$ (via Teorema do Valor Médio) tal que

$$u(w + (t + h)\nu) - u(w + t\nu) = h \langle \nabla u(w + (t + \xi h)\nu), \nu \rangle.$$

Deste fato, uma vez que as derivadas parciais são contínuas

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(w + (t + h)\nu) - u(w + t\nu)}{h} = \langle \nabla u(w + t\nu), \nu \rangle. \quad (1.1)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(w + (t + h)\nu) - u(w + t\nu)}{h} \right| &= |\langle \nabla u(w + (t + \xi h)\nu), z \rangle| \\ &\leq |\nabla u|_{L^\infty(U)}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

De (1.1) e (1.2), temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema A.7)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\partial D_1(0)} \frac{u(w + (t + h)\nu) - u(w + t\nu)}{h} d\mathcal{H}_\nu^1 &= \int_{\partial D_1(0)} \langle \nabla u(w + t\nu), \nu \rangle d\mathcal{H}_\nu^1 \\ &= \int_{\partial D_t(w)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mathcal{H}^1. \end{aligned}$$

Sabendo disto, segue da Fórmula de Green (ver Teorema A.6)

$$\begin{aligned} \eta'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\eta(t + h) - \eta(t)}{h} \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int_{D_t(w)} \Delta u \, dz \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Sendo u uma função contínua, tem-se que w é um ponto de Lebesgue (ver definição de ponto de Lebesgue, Teorema A.8) e portanto

$$\eta(r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \eta(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\partial D_\lambda(w)} u \, d\mathcal{H}^1 = u(w),$$

isto é,

$$u(w) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(w)} u \, d\mathcal{H}^1. \quad (1.4)$$

Agora, via coordenadas polares

$$\begin{aligned} u(w)\pi r^2 &= \int_0^r 2\pi t u(w) dt \\ &= \int_0^r 2\pi t \left(\frac{1}{2\pi t} \int_{\partial D_t(w)} u \, d\mathcal{H}^1 \right) dt \\ &= \int_0^r \left(\int_{\partial D_t(w)} u \, d\mathcal{H}^1 \right) dt \\ &= \int_{D_r(w)} u \, dz. \end{aligned} \quad (1.5)$$

De (1.3) e (1.4), concluimos que u verifica a propriedade da média.

Reciprocamente, assumamos agora que

$$u(w) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(w)} u \, d\mathcal{H}^1$$

para cada $D_r(w) \subset U$. Sendo u uma função de classe C^2 em U temos que Δu é contínuo em U . Logo, $\Delta u = 0$ em U . Com efeito, suponhamos por contradição que $\Delta u(w_0) \neq 0$, para algum $w_0 \in U$. Sem perda de generalidade, assumamos $\Delta u(w_0) < 0$, implicando por continuidade

$$\Delta u(w) < 0, \quad \forall w \in D_{r_0}(w_0),$$

para algum $r_0 > 0$ suficientemente pequeno. Mas, por outro lado, segue de (1.3)

$$0 = \frac{d}{dt}(u(w_0)) \Big|_{t=r} = \frac{d\eta}{dt}(t) \Big|_{t=r} = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(w_0)} \Delta u \, dz < 0,$$

uma contradição. ■

O resultado a seguir revela que os pontos de máximos e mínimos de uma função harmônica, pertencem à fronteira do domínio.

Teorema 1.2 (*Princípio do Máximo Forte*) *Assuma*

- U limitado;
- $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ uma função harmônica.

Então

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u. \quad (1.6)$$

Além disso, se

$$u(w_0) = \max_{\overline{U}} u,$$

para algum $w_0 \in U$, então

$$u = \text{const}, \text{ em } U. \quad (1.7)$$

Demonstração. Verificação de (1.7) : Assumindo que

$$u(w_0) = \max_{\overline{U}} u = M,$$

considere Λ o seguinte conjunto de pontos

$$\Lambda := \{w \in U : u(w) = M\}.$$

Mostraremos agora que Λ é um aberto e fechado relativo a U . Com efeito, dado $w \in \Lambda$ tome $r > 0$ tal que $D_r(w) \subset U$. Sendo u harmônica, segue do Teorema 1.1

$$M = u(w) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(w)} u(z) \, dz,$$

o que implica

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(w)} (M - u) \, dz = 0.$$

Portanto,

$$u(z) = M, \quad \forall z \in D_r(w),$$

mostrando que Λ é aberto, e consequentemente é um aberto relativo a U . Além disso, desde que

$$\Lambda = u^{-1}(\{M\}),$$

o conjunto Λ é um fechado relativo de U . Destes fatos,

$$\Lambda = U \text{ e } u \equiv M \text{ em } U,$$

provando assim o item (1.7).

Verificação de (1.6) : Primeiramente, assuma que

$$u(w_0) = \max_{\overline{U}} u = M.$$

Se $w_0 \in \partial U$, o resultado segue imediatamente. Agora, se $w_0 \in U$, então segue de (1.7) que $u \equiv M$ em U . E portanto, via continuidade de u em $\overline{U}$, podemos concluir (1.6). ■

O resultado a seguir garante que toda função super-harmônica ($\Delta u \leq 0$), não negativa e não trivial, toca a fronteira com ângulo no ponto onde ela mesma se anula.

Lema 1.1 (*Lema de Hopf*) *Assuma*

- $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$;
- $u \geq 0$, e $u \not\equiv 0$ em U ;
- $\Delta u \leq 0$ em U .

Então

$$u > 0 \text{ em } U.$$

Além disso, se

- $u(z_0) = 0$ para algum $z_0 \in \partial U$;
- existe $D_\ell(w_0) \subset U$, $\ell > 0$, tal que $\partial D_\ell(w_0) \cap \partial U = \{z_0\}$,

então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(z_0) < 0,$$

onde ν é vetor unitário normal exterior a ∂U .

Demonstração. Primeiramente, suponha por contradição que $u(z_0) = 0$ para algum $z_0 \in U$, ou seja,

$$u(z_0) = \inf_U u = 0.$$

Defina agora o seguinte conjunto

$$\Upsilon = \{z \in \mathbb{R}^n : u(z) = 0\}.$$

Note que Υ é um fechado relativo a U , pois u é contínua. Mostraremos agora que Υ , também, é um aberto relativo a U . Para isso, sejam $w \in \Upsilon$ e $r > 0$ tal que $D_r(w) \subset U$, pela Desigualdade da Média (ver Teorema A.4)

$$0 = -u(w) \leq \oint_{D_r(w)} -u \, dz \leq 0,$$

logo, pela continuidade

$$u = 0 \text{ em } D_r(w).$$

Consequentemente, Υ é aberto em U . Destes fatos, concluímos que

$$\Upsilon = U \text{ e } u \equiv 0 \text{ em } U,$$

uma contradição (pois $u \not\equiv 0$). Mostrando assim que $u > 0$ em U .

A título de simplificação, assuma

- $\widehat{u}(z) := u(z + w_0)$, para $z \in D_\ell := D_\ell(0)$;
- $\widehat{U} := U - w_0$;
- $\widehat{z}_0 := z_0 - w_0$.

Agora, note que $\widehat{z}_0 + t\nu \in \widehat{U}$ para $t < 0$, com $|t| < \ell$, e

$$\frac{\widehat{u}(\widehat{z}_0 + t\nu) - \widehat{u}(\widehat{z}_0)}{t} = \frac{\widehat{u}(\widehat{z}_0 + t\nu)}{t} < 0.$$

Logo, passando ao limite de $t \rightarrow 0^-$ segue que

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \nu}(\widehat{z}_0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\widehat{u}(\widehat{z}_0 + t\nu) - \widehat{u}(\widehat{z}_0)}{t} \leq 0.$$

Por outro lado, tomando $\lambda > 0$ (a ser definida), considere

$$v_\lambda(z) := e^{-\lambda|z|^2} - e^{-\lambda\ell^2}, \quad z \in \overline{D}_\ell.$$

Sendo v radial, observe que

$$\Delta v_\lambda(z) = v_\lambda''(r) + \frac{1}{r}v_\lambda'(r), \quad r = r(z) = |z| < \ell.$$

Deste fato,

$$\begin{aligned} \Delta v_\lambda(z) &= -2\lambda e^{-\lambda r^2} + 4\lambda^2 r^2 e^{-\lambda r^2} + \frac{1}{r}(-2\lambda r e^{-\lambda r^2}) \\ &= (-4\lambda + 4\lambda^2 r^2)e^{-\lambda r^2}, \quad |z| = r < \ell. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\Delta v_\lambda(z) \geq \lambda \left(-4 + 4\lambda \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right) e^{-\lambda \left(\frac{\ell}{2} \right)^2}, \quad z \in \Gamma_\ell := D_\ell \setminus \overline{D}_{\frac{\ell}{2}}.$$

Daí, se

$$-4 + 4\lambda \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{4}{\ell^2},$$

então

$$\Delta v_\lambda(z) \geq 0, \quad \forall z \in \Gamma_\ell. \quad (1.8)$$

Além disso, fixando $\lambda \geq \frac{4}{\ell^2}$, tome $\epsilon = \epsilon(\lambda) > 0$, suficientemente pequeno, de sorte que

$$\widehat{u}(z) \geq \min_{\partial D_{\frac{\ell}{2}}} \widehat{u} \geq \epsilon \max_{\partial D_{\frac{\ell}{2}}} v_\lambda \geq \epsilon v_\lambda(z), \quad \forall z \in \partial D_{\ell \setminus 2}, \quad (1.9)$$

Agora, observando que $v_\lambda = 0$ em ∂D_ℓ temos

$$\widehat{u}(z) \geq 0 = \epsilon v_\lambda(z), \quad z \in \partial D_\ell. \quad (1.10)$$

Assumindo

$$\sigma(z) := \widehat{u}(z) - \epsilon v_\lambda(z), \quad z \in \overline{\Gamma}_\ell,$$

segue de (1.8) - (1.10)

$$\begin{cases} \Delta \sigma(z) \leq 0, & z \in \Gamma_\ell \\ \sigma(z) \geq 0, & z \in \partial \Gamma_\ell. \end{cases}$$

Logo, pelo Princípio do Máximo Fraco (ver Teorema A.5)

$$\inf_{\Gamma_\ell} \sigma \geq \inf_{\partial \Gamma_\ell} \sigma^- = \inf_{\partial \Gamma_\ell} (\min\{\sigma, 0\}) = 0,$$

logo,

$$\sigma \geq 0, \quad \text{em } \Gamma_\ell.$$

Deste fato,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \nu}(\widehat{z}_0) - \epsilon \frac{\partial v_\lambda}{\partial \nu}(\widehat{z}_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial \nu}(\widehat{z}_0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sigma(\widehat{z}_0 + t\nu) - \sigma(\widehat{z}_0)}{t} \leq 0,$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \nu}(\widehat{z}_0) &\leq \epsilon \frac{\partial v_\lambda}{\partial \nu}(\widehat{z}_0) \\ &= \epsilon \langle \nabla v_\lambda(\widehat{z}_0), \widehat{z}_0 \rangle \\ &= -\epsilon (2\lambda e^{-\lambda \ell^2}) \langle \widehat{z}_0, \widehat{z}_0 \rangle \\ &= -2\epsilon \lambda e^{-\lambda \ell^2} \ell^2 \\ &< 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

1.2 Condição do disco interior e exterior

Nesta seção, mostraremos que gráficos de funções reais de classe C^2 satisfazem a condição do disco interior e exterior. Para isso, comecemos relembando a definição dessas condições.

Definição 1.2 *Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua, dividindo o plano em duas regiões π_1 e π_2 . Dizemos que α satisfaz a condição do disco interior (e/ou exterior) sempre que para cada $z_0 \in \alpha$, existir um disco $D_r \subset \pi_1$ (e/ou $D_r \subset \pi_2$), $r > 0$, tal que*

$$\overline{D_r} \cap \alpha = \{z_0\}.$$

Assumindo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , considere α uma curva suave definida da seguinte forma:

$$\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(x) = (x, f(x)). \quad (1.11)$$

Neste caso,

$$\alpha'(x) = (1, f'(x)) \text{ e } n_\alpha(x) := \frac{(-f'(x), 1)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

definem um campo de vetores velocidade e normal unitário para a curva α , respectivamente. Verificaremos agora que $n_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é localmente Lipschitz. Para isso, observe inicialmente que

$$n'_\alpha(x) = \left(\frac{-f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-f'(x)f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Por outro lado, dado $k \in \mathbb{N}$, tome $C_k > 2$ verificando

$$\max\{|f'(x)|, |f''(x)|\} \leq \left(\frac{C_k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para } |x| \leq k. \quad (1.13)$$

De (1.12) e (1.13)

$$|n'_\alpha(x)| \leq C_k, \quad \text{para } |x| \leq k.$$

Daí, segue pelo Teorema da Desigualdade do Valor Médio (ver Teorema A.2) que

$$|n_\alpha(x) - n_\alpha(y)| \leq C_k |x - y| \quad \forall x, y \in [-k, k]. \quad (1.14)$$

Mostrando assim que n_α é uma aplicação localmente Lipschitz em $\mathbb{R}$.

Tomando $r_k \in \left(0, \frac{1}{C_k}\right)$, obtemos de (1.14)

$$|n_\alpha(x) - n_\alpha(y)| \leq \frac{1}{r_k} |x - y| \quad \forall x, y \in [-k, k]. \quad (1.15)$$

A desigualdade (1.15) assegura que a curva α satisfaz a condição de $1/r_k$ -Lipschitz em $[-k, k]$ (ver p. 549 de [6]). Pelo Teorema 1 de [?], que estabelece a equivalência entre a condição $1/r_k$ -Lipschitz e a condição de existência de discos interiores e exteriores, concluimos que α satisfaz a condição do disco interior e exterior, com discos D_{r_k} , em $[-k, k]$.

Com esses fatos, estamos prontos para provar a seguinte proposição.

Proposição 1.1 *Gráficos de funções reais de classe C^2 satisfazem a condição do disco interior e exterior.*

Demonstração. Seja α uma curva suave dada por (1.11). Neste caso, dado

$$z_0 = (x_0, f(x_0)) \in \alpha,$$

escolha $k > 0$ suficientemente grande para que $|x_0| < k$. Como discutido anteriormente, existe $r_k > 0$ tal que a curva α satisfaz a condição do disco interior e exterior com discos D_{r_k} , de modo que

$$\overline{D}_{r_k} \cap \alpha = \{z_0\},$$

como queríamos demonstrar. ■

Capítulo 2

Função Barreira

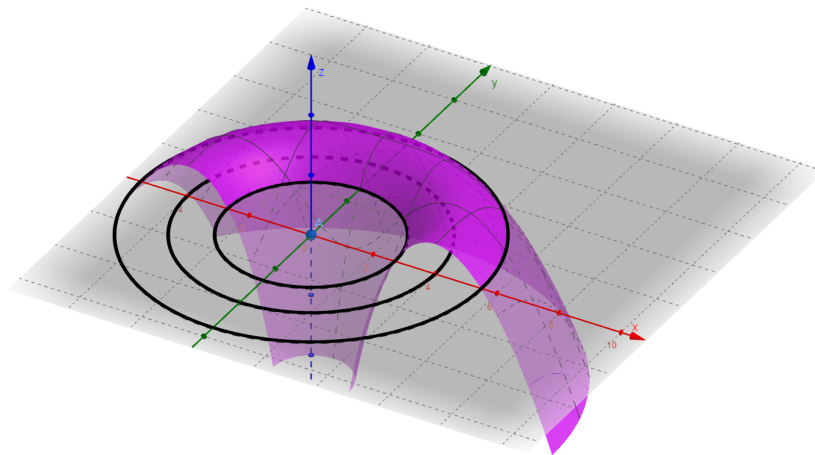
Neste capítulo iremos determinar um protótipo de solução radial $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ para o problema $\Delta\Psi = -1$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, com o objetivo de estudar algumas propriedades assintóticas.

2.1 Construção da função Barreira

Fixado $R > 0$, assumamos

$$\Psi_R(z) = 1 - \frac{|z|^2 - R^2}{4} + \frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{|z|}{R} \right), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Figura 2.1: Função Ψ_R



Fonte: Autoria própria, com o uso do GeoGebra.

Observando que Ψ_R é uma função radial, tem-se

$$\Delta \Psi_R(z) = \Psi_R''(r) + \frac{2-1}{r} \Psi_R'(r), \text{ para } r = |z| > 0,$$

e portanto

$$\Delta \Psi_R(z) = -\frac{1}{2} - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{1}{r} \left(-\frac{r}{2} + \frac{R^2}{2r} \right) = -1.$$

Neste caso, Ψ_R é uma solução radial para a equação $\Delta u = -1$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. A próxima proposição verifica algumas propriedades de Ψ_R .

Proposição 2.1 *Para cada $R > 0$, existem (únicos) γ_0^R e γ_1^R , positivos, de sorte que:*

- (i) $\gamma_0^R < R < \gamma_1^R$;
- (ii) $\Psi_R(R) = \max_{r>0} \Psi_R(r)$;
- (iii) $\Psi_R(\gamma_i^R) = 0$, $i = 0, 1$.

Demonstração. Primeiramente, observe que

- se $r \in (R, \infty)$,

$$\Psi_R'(r) = -\frac{r}{2} + \frac{R}{2r} < -\frac{R}{2} + \frac{R^2}{2R} = 0;$$

- se $r \in (0, R)$,

$$\Psi_R'(r) = -\frac{r}{2} + \frac{R}{2r} > -\frac{R}{2} + \frac{R}{2R} = 0,$$

ou seja

- Ψ_R é decrescente em (R, ∞) ;
- Ψ_R é crescente em $(0, R)$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_R(r) &= 1 - R^2 + \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{-r^2}{4} + \frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right) \\ &= 1 - R^2 + \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{-r^2}{4} + \frac{r^2}{2} \frac{\ln \left(\frac{r}{R} \right)}{\frac{r^2}{R^2}} \right) \\ &= 1 - R^2 + \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{2} \frac{\ln \left(\frac{r}{R} \right)}{\frac{r^2}{R^2}} \right) \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0^+} \Psi_R(r) &= 1 - R^2 + \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{-r^2}{4} + \frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right) \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Por esses fatos, uma vez que

$$\Psi_R(R) = 1 - \frac{R^2 - R^2}{4} + \frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{R}{R} \right) = 1,$$

e

$$\Psi'_R(R) = -\frac{R}{2} + \frac{R^2}{2R} = 0,$$

concluimos que Ψ_R , possui exatamente duas raízes, γ_0^R e γ_1^R (mostrando o item (iii)), verificando (i) e (ii). ■

A proposição a seguir nos dá informações sobre o comportamento assintótico de Ψ'_R em γ_i^R , $i = 0, 1$.

Proposição 2.2 *Sejam γ_0^R e γ_1^R números positivos dadas pela Proposição 2.1. Então,*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Psi'_R(\gamma_0^R) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \Psi'_R(\gamma_1^R) = \sqrt{2}.$$

Demonstração. Primeiramente, assuma

$$d_i^R := \gamma_i^R - R, \text{ e } k_i^R := \frac{d_i^R}{R}, \quad i = 0, 1.$$

Note que $k_i^R \neq 0$ (pois $|\gamma_i^R - R| > 0$) e $k_i^R > -1$ (pois $k_i^R + 1 = \frac{\gamma_i^R}{R} > 0$). Uma vez que

$$1 - \frac{1}{4} ((\gamma_i^R)^2 - R^2) + \frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{\gamma_i^R}{R} \right) = \Psi_R(\gamma_i^R) = 0,$$

temos,

$$\frac{1}{4} \left(\frac{(\gamma_i^R)^2 - R^2}{R^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma_i^R}{R} \right) = \frac{1}{R^2}.$$

Lembrando que $\gamma_i^R = d_i^R + R$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2} &= \frac{1}{4} \left(\frac{(\gamma_i^R)^2 - R^2}{R^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma_i^R}{R} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{(d_i^R + R)^2 - R^2}{R^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{d_i^R + R}{R} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{(d_i^R)^2}{R^2} + \frac{2Rd_i^R}{R^2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1 + k_i^R) \\ &= \frac{1}{4} (k_i^R)^2 + \frac{1}{2} k_i^R - \frac{1}{2} \ln(1 + k_i^R),\end{aligned}$$

isto é,

$$0 < \frac{1}{4}(k_i^R)^2 = \frac{1}{2} \ln(k_i^R + 1) - \frac{1}{2}k_i^R + \frac{1}{R^2}. \quad (2.1)$$

Afirmção 2.1 *Se $x > -1$, então $\ln(x + 1) \leq x$.*

De fato, seja

$$\begin{aligned} f : (-1, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \ln(x + 1) - x. \end{aligned}$$

Para cada $x > -1$, temos

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1} - 1 = \frac{-x}{x + 1}.$$

Neste caso

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1, 0]$;
- $f'(x) \leq 0, \forall x \in [0, \infty)$.

Logo, 0 é ponto de máximo global para a função $f(x)$, e portanto

$$\ln(x + 1) - x = f(x) \leq f(0) = \ln(0 + 1) - 0 = 0, \forall x \in (-1, \infty),$$

ou seja,

$$\ln(x + 1) \leq x, \forall x \in (-1, \infty).$$

Sabendo que $k_i^R > -1$, segue de (2.1) e da Afirmção 2.1 que

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{4}(k_i^R)^2 &= \frac{1}{2} \ln(k_i^R + 1) - \frac{1}{2}k_i^R + \frac{1}{R^2} \\ &\leq \frac{k_i^R}{2} - \frac{k_i^R}{2} + \frac{1}{R^2} \\ &= \frac{1}{R^2}. \end{aligned}$$

Por este fato, podemos concluir:

$$0 < (d_i^R)^2 = (k_i^R R)^2 \leq 4 \text{ e } \lim_{R \rightarrow \infty} k_i^R = 0. \quad (2.2)$$

Agora, via expansão de Taylor, obtemos:

$$\begin{aligned}
\ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\
&= x - \frac{x^2}{2} + x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \dots \right) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + x^3 \mathcal{O}_x(1) \quad (\text{para } x \approx 0) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \quad (\text{para } x \approx 0).
\end{aligned}$$

Sabendo disto, segue de (2.1) e (2.2)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(k_i^R)^2 &= \frac{1}{2} \left(k_i^R - \frac{(k_i^R)^2}{2} + \mathcal{O}((k_i^R)^3) \right) - \frac{1}{2}k_i^R + \frac{1}{R^2} \\
&= -\frac{(k_i^R)^2}{4} + \frac{1}{R^2} + \mathcal{O}((k_i^R)^3)
\end{aligned}$$

Multiplicando esta expressão por R^2 , obtém-se

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{R^2(k_i^R)^2}{2} + R^2 \mathcal{O}((k_i^R)^3) \\
&= \frac{R^2(k_i^R)^2}{2} + R^2(k_i^R)^2 \mathcal{O}(k_i^R) \\
&= (d_i^R)^2 \left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(k_i^R) \right).
\end{aligned}$$

Neste caso, passando ao limite de $R \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |d_i^R| = \sqrt{2},$$

e como $d_0^R < 0$ e $d_1^R > 0$, segue que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} d_0^R = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} d_1^R = \sqrt{2}. \tag{2.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Psi'_R(\gamma_i^R) &= \frac{-\gamma_i^R}{2} + \frac{R^2}{2\gamma_i^R} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{(\gamma_i^R)^2 - R^2}{\gamma_i^R} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{(d_i^R + R)^2 - R^2}{d_i^R + R} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{(d_i^R)^2 + 2Rd_i^R}{d_i^R + R} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{(d_i^R)^2}{R} + \frac{2Rd_i^R}{R}}{\frac{d_i^R + R}{R}} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{k_i^R d_i^R + 2d_i^R}{k_i^R + 1} \right). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

De (2.2) – (2.4), podemos concluir finalmente que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Psi'_R(\gamma_0^R) = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \left(\frac{k_0^R d_0^R + 2d_0^R}{k_0^R + 1} \right) = \sqrt{2}$$

e

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Psi'_R(\gamma_1^R) = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \left(\frac{k_1^R d_1^R + 2d_1^R}{k_1^R + 1} \right) = -\sqrt{2}.$$

■

Capítulo 3

Problema sobredeterminado

O objetivo deste capítulo é classificar as possíveis soluções do problema sobredeterminado, conforme enunciado na Introdução (ver (3) e (4))

3.1 Sobre o problema

Conforme estabelecido na introdução, assuma:

- $a, b > 0$;
- $\phi_0, \phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 com $\phi_0 < \phi_1$;
- $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, \phi_0(x) < y < \phi_1(x)\}$;
- $J_i = \{(x, \phi_i(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, $i = 0, 1$

e suponha que exista $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de classe C^2 , para o problema

$$0 < u < a \text{ e } \Delta u = -1 \text{ em } \Omega, \quad (3.1)$$

verificando as seguintes condições sobredeterminadas:

$$\begin{cases} u = 0, \quad |\nabla u| = b, \text{ em } J_0, \\ u = a, \quad |\nabla u| = 0, \text{ em } J_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Neste caso, sendo

- $\widehat{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{a}}\Omega$,

- $\widehat{J}_i = \frac{1}{\sqrt{a}} J_i, i = 0, 1,$

o *rescaling* $\widehat{u} : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\widehat{u}(x, y) := \frac{u(\sqrt{a}(x, y))}{a}, \quad (x, y) \in \widehat{\Omega},$$

é uma solução para o problema:

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta \widehat{u} = -1, & \text{em } \widehat{\Omega}; \\ 0 < \widehat{u} < 1, & \text{em } \widehat{\Omega}; \\ \widehat{u} = 0, \quad |\nabla \widehat{u}| = a^{-\frac{1}{2}} b =: c, & \text{em } \widehat{J}_0; \\ \widehat{u} = 1, \quad |\nabla \widehat{u}| = 0, & \text{em } \widehat{J}_1. \end{cases}$$

Analogamente, suponha que exista $\widehat{u}$ uma solução do problema (P), então

$$u(x, y) = a\widehat{u}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{a}}\right)$$

verifica (3.1) e (3.2). Sabendo disto, nas próximas seções focaremos no problema (P) com o objetivo de mostrar que as fronteiras $\widehat{J}_0$ e $\widehat{J}_1$ são retas paralelas de sorte que

$$\widehat{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \sqrt{2}\},$$

e a solução do problema (P), se existir, é dada por

$$\widehat{u}(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{2}y, \quad (x, y) \in \widehat{\Omega},$$

a menos de translação e rotação. Neste caso, equivalente ao Teorema 0.1 temos o seguinte teorema auxiliar:

Teorema 3.1 *Assuma que $\widehat{u} \in C^2(\widehat{\Omega})$ é uma solução do problema (P). Então*

- (i) $c = \sqrt{2}$;
- (ii) $\widehat{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \sqrt{2}\}$;
- (iii) $\widehat{u}(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{2}y, (x, y) \in \widehat{\Omega}$, a menos de translação e rotação.

A título de simplificação, consideraremos ao longo do capítulo u, Ω e $J_i, i = 0, 1$ ao invés de $\widehat{u}, \widehat{\Omega}$ e $\widehat{J}_i, i = 0, 1$. Além disso, com intuito de facilitar as provas dos resultados das próximas seções, assumiremos que:

- $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \phi_0(x)\};$
- $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \phi_1(x)\};$
- $u = 0$ em Ω_0 ;
- $u = 1$ em Ω_1 .

Por fim, dizemos que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ está **acima** de J_0 se, $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0$ e diremos também que E está **estritamente acima** de J_0 se, $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_0$. De forma análoga, definimos que o conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ está **abaixo** e **estritamente abaixo** de J_1 , quando $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1$ e $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_1$, respectivamente.

3.2 Princípios de comparação

Primeiramente, definamos a seguinte função:

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ -\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{2}y, & 0 \leq y \leq \sqrt{2}, \\ 1, & y > \sqrt{2}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Dados $A_0, B_0 \in \mathbb{R}^2$, de sorte que

$$(B_0 - A_0) \cdot e_1 \neq 0,$$

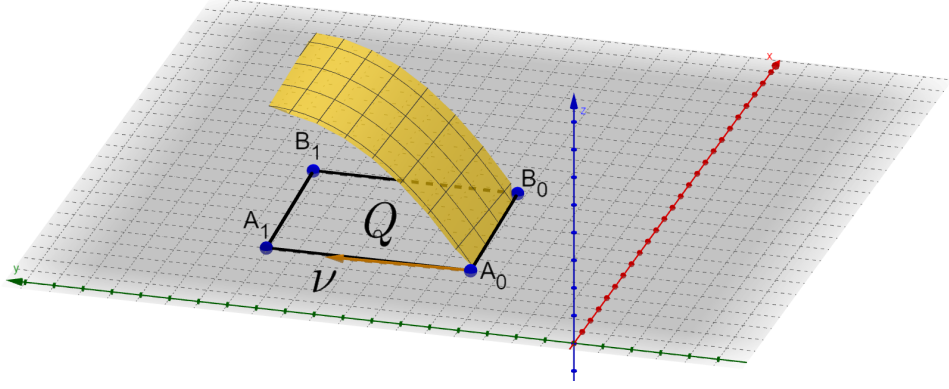
assuma

$$A_1 = A_0 + \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} e_2 \quad \text{e} \quad B_1 = B_0 + \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} e_2,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário ao segmento (A_0, B_0) com $\nu_2 > 0$. No que segue, assuma Q um paralelogramo aberto de vértices A_0, A_1, B_0, B_1 , e

$$\Phi(x, y) = \varphi(\langle (x, y) - A_0, \nu \rangle), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Figura 3.1: Função Φ



Fonte: Autoria própria, com o uso do GeoGebra.

Com esses fatos, o resultado a seguir estabelece um princípio de comparação da solução u com Φ sobre o paralelogramo Q .

Proposição 3.1 *Assumindo $c = \sqrt{2}$, temos:*

- (i) *Se $u \geq \Phi$ em $[A_0, A_1] \cup [B_0, B_1]$, então $u \geq \Phi$ em Q ;*
- (ii) *Se $u \leq \Phi$ em $[A_0, A_1] \cup [B_0, B_1]$, então $u \leq \Phi$ em Q .*

Demonstração. Verificação de (i) : Seja $(x, y) \in Q$. Sendo Q um conjunto aberto, $(x, y) \notin [A_1, B_1]$ e desta forma a projeção de $((x, y) - A_0)$ sobre o vetor ν é menor do que a projeção do vetor $(A_1 - A_0)$ sobre ν , isto é,

$$|proj_{\nu}((x, y) - A_0)| < |proj_{\nu}(A_1 - A_0)|.$$

E portanto,

$$\begin{aligned} 0 < \langle (x, y) - A_0, \nu \rangle &= |proj_{\nu}((x, y) - A_0)| \\ &< |proj_{\nu}(A_1 - A_0)| \\ &= |\langle A_1 - A_0, \nu \rangle| \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$0 < \Phi(x, y) = \varphi(\langle (x, y) - A_0, \nu \rangle) < 1, \quad (3.4)$$

e assumindo $A_0 = (a_1^0, a_2^0)$, tem-se

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \varphi(\langle (x, y) - A_0, \nu \rangle) \\ &= \frac{[\langle (x, y) - A_0, \nu \rangle]^2}{2} + \sqrt{2}\langle (x, y) - A_0, \nu \rangle \\ &= -\frac{[(x - a_1^0)\nu_1 + (y - a_2^0)\nu_2]^2}{2} + \sqrt{2}[(x - a_1^0)\nu_1 + (y - a_2^0)\nu_2].\end{aligned}\tag{3.5}$$

Logo,

$$\Delta\Phi(x, y) = -\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x, y)\right) = -(\nu_1^2 + \nu_2^2) = -1.\tag{3.6}$$

De (3.4) e (3.5), podemos concluir:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = -1 \text{ em } Q; \\ 0 < \Phi < 1 \text{ em } Q. \end{cases}\tag{3.7}$$

Além disso,

- $|\nabla\Phi| = 0$ em $[A_1, B_1]$;
- $|\nabla\Phi| = \sqrt{2}$ em $[A_0, B_0]$.

Agora, para cada $t \in \mathbb{R}$ vamos estabelecer as seguintes notações:

- $Q_t := Q + te_2$;
- $\Phi_t(x, y) := \Phi((x, y) - te_2), (x, y) \in \overline{Q}_t$.

Afim de provarmos que

$$u \geq \Phi \text{ em } Q,$$

deslizaremos o gráfico de Φ para cima. Neste intuito, definamos

$$t^* := \inf\{t : u > \Phi_s \text{ em } Q_s, \forall s > t\}.$$

Note que t^* está bem definido. De fato, se tomarmos $t_0 > 0$, suficientemente grande, de sorte que o conjunto Q_{t_0} esteja estritamente acima de J_1 , então $u > \Phi_{t_0}$ em Q_{t_0} e portanto $u > \Phi_s$ em Q_s para todo $s > t_0$. Deste fato, $t^* \leq t_0$.

Segue imediatamente da definição de t^* ,

$$u \geq \Phi_t \text{ em } Q_t, \forall t \geq t^*.$$

Para provarmos o item (i), é suficiente mostrar que $t^* \leq 0$. De fato, tomando $t = 0 \geq t^*$ tem-se

$$u \geq \Phi_0 = \Phi \text{ em } Q_0 = Q.$$

Sabendo disto, suponha por contradição que $t^* > 0$.

Afirmção 3.1 *Fixe $i \in \{0, 1\}$. Se*

$$[A_i, B_i] + te_2 \text{ está estritamente a cima de } J_i, \quad (3.8)$$

e

$$u > \Phi_t \text{ em } Q \cup (A_0, A_1) \cup (B_0, B_1) + te_2, \quad (3.9)$$

existe $\epsilon > 0$ tal que

$$u > \Phi_s \text{ em } Q_s, \quad \forall s \in [t - \epsilon, t].$$

Primeiramente, vamos provar que, dada uma sequência de números reais (α_n) tal que

$$\alpha_n \rightarrow \alpha_0 \in \mathbb{R},$$

temos

$$u(\cdot + \alpha_n e_2) \rightarrow u(\cdot + \alpha_0 e_2) \text{ uniformemente em } Q \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}. \quad (3.10)$$

Com efeito, dado $\delta > 0$, tome $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de sorte que

$$|\alpha_n - \alpha_0| < \delta, \quad \forall n \geq n_0.$$

Por outro lado, tendo em vista que $u \in C(\mathbb{R}^2)$, u é uniformemente contínua em uma vizinhança fechada $V_1(Q + \alpha_0 e_2)$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $\tau = \tau(\epsilon, \alpha_0) > 0$ tal que para todo $z, w \in V_1(Q + \alpha_0 e_2)$, temos

$$|z - w| < \tau \Rightarrow |u(z) - u(w)| < \epsilon.$$

Destes fatos, tomando $\delta \in (0, \min\{1, \tau\})$, temos para todo $(x, y) \in Q$:

$$(x, y) + \alpha_n e_2 \in V_1(Q + \alpha_0 e_2), \quad \forall n \geq n_0,$$

com

$$|((x, y) + \alpha_n e_2) - ((x, y) + \alpha_0 e_2)| = |\alpha_n - \alpha_0| < \delta < \tau, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$|u((x, y) + \alpha_n e_2) - u((x, y) + \alpha_0 e_2)| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0 \text{ e } \forall (x, y) \in Q,$$

mostrando assim (3.10).

De (3.9),

- $\Omega_1 \cap Q_t \neq \emptyset$;
- $\Omega \cap Q_t^C \neq \emptyset$;
- $\Omega \cap Q \neq \emptyset$.

Por outro lado, de (3.8)

$$\begin{aligned} \inf \{u((x, y) + te_2) - \Phi(x, y) : (x, y) \in \Omega \cap Q\} &= \inf \{(u - \Phi_t)((x, y) + te_2) : (x, y) \in \Omega \cap Q\} \\ &= \inf \{(u - \Phi_t)(z) : z \in \Omega \cap Q_t\} \\ &> \epsilon_0, \end{aligned}$$

para algum $\epsilon_0 > 0$. Daí,

$$u((x, y) + te_2) - \epsilon_0 > \Phi(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega \cap Q. \quad (3.11)$$

Seja (s_n) uma sequência tal que $s_n \rightarrow t^-$, então por (3.9) existe $n_0 > 0$ tal que

$$u((x, y) + te) - \epsilon_2 < u((x, y) + s_n e_2), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \forall (x, y) \in \Omega \cap Q. \quad (3.12)$$

Combinando (3.11) e (3.12)

$$u((x, y) + s_n e_2) > \Phi(x, y), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \forall (x, y) \in \Omega \cap Q.$$

Por este fato, a Afirmação 3.1 pode ser provada por contradição.

Afirmação 3.2 $\{A_i, B_i\} + t^* e_2$ está estritamente acima de J_i , para $i = 0, 1$.

De fato, observando que

$$u \geq \Phi, \quad \text{em } [A_0, A_1] \cup [B_0, B_1], \quad (3.13)$$

segue da continuidade de u e Φ que $\{A_i, B_i\}$ está acima de J_i , para $i = 0, 1$. E assim, $\{A_i, B_i\} + t^* e_2$ está estritamente acima de J_i , para $i = 0, 1$, provando a Afirmação 3.2.

Afirmação 3.3

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in (A_0, A_1) \cup (B_0, B_1).$$

De fato, analogamente ao feito em (3.5), tem-se

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = -\langle (x, y) - A_0, \nu \rangle \nu_2 + \sqrt{2} \nu_2, \quad \forall (x, y) \in (A_0, A_1) \cup (B_0, B_1).$$

Sem perda de generalidade, se $(x, y) = sA_1 + (1 - s)A_0$ com $s \in (0, 1)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) &= -\langle (sA_1 + (1 - s)A_0) - A_0, \nu \rangle \nu_2 + \sqrt{2}\nu_2 \\
&= -s\langle A_1 - A_0, \nu \rangle \nu_2 + \sqrt{2}\nu_2 \\
&= -s\langle \frac{\sqrt{2}}{\nu_2}, \nu \rangle \nu_2 + \sqrt{2}\nu_2 \\
&= (1 - s)\sqrt{2}\nu_2 > 0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

mostrando a Afirmação 3.3.

Afirmação 3.4

$$u > \Phi_{t^*} \text{ em } (A_0, A_1) \cup (B_0, B_1) + t^*e_2.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $w^* \in (A_0, A_1) + t^*e_2$, então existe um ponto $(x, y) \in (A_0, A_1)$ tal que

$$w^* = (x, y) + t^*e_2,$$

tendo em vista que $t^* > 0$, segue de (3.13) e (3.14)

$$\begin{aligned}
u(w^*) - \Phi_{t^*}(w^*) &= u((x, y) + t^*e_2) - \Phi(x, y) \\
&= (u((x, y) + t^*e_2) - \Phi((x, y) + t^*e_2)) + (\Phi((x, y) + t^*e_2) - \Phi(x, y)) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

mostrando a Afirmação 3.4.

Das Afirmações 3.1 e 3.4, podemos concluir que um dos itens é verificado:

(d₁) $[A_0, B_0] + t^*e_2$ toca J_0 acima ou $[A_1, B_1] + t^*e_2$ toca J_1 acima;

(d₂) Existe algum $z^* \in Q_{t^*} \cap \Omega$ tal que $u(z^*) = \Phi_{t^*}(z^*)$.

Inicialmente, suponha que $[A_0, B_0] + t^*e_2$ toca J_0 acima, então existe

$$z_0 \in ([A_0, B_0] + t^*e_2) \cap J_0,$$

tal que

- $u(z_0) = \Phi_{t^*}(z_0) = 0$,
- $|\nabla u(z_0)| = |\nabla \Phi_{t^*}(z_0)| = \sqrt{2}$.

Além disso, deve existir um disco de raio $r > 0$, D_r , tal que

$$D_r \cap J_0 = \{z_0\} \text{ e } D_r \subset Q_{t^*} \cap \Omega.$$

via condição da esfera interior (ver Proposição 1.1). Logo,

- $(\Phi_{t^*} - u)(z_0) = 0,$
- $\Delta(\Phi_{t^*} - u) = 0,$ em $D_r,$
- $\Phi_{t^*} - u < 0,$ em $D_r.$

Aplicando agora o Lema 1.1, temos

$$\frac{\partial \Phi_{t^*}}{\partial \eta}(z_0) > \frac{\partial u}{\partial \eta}(z_0),$$

onde o vetor η é o vetor unitário exterior e normal ao disco D_r em z_0 . Daí,

$$|\nabla \Phi_{t^*}(z_0)| \cos \theta(\nabla \Phi_{t^*}(z_0), \eta) > |\nabla u(z_0)| \cos \theta(\nabla u(z_0), \eta),$$

e conseqüentemente, pelo fato do conjunto J_0 ser a curva de nível zero da função u e $[A_0, A_1] + t^*e_2$ parte da curva de nível zero da função Φ_{t^*} , segue

$$\theta(\nabla u(z_0), \eta) = \theta(\nabla \Phi_{t^*}(z_0), \eta) = \pi.$$

Logo,

$$-|\nabla \Phi_{t^*}(z_0)| > -|\nabla u(z_0)|,$$

uma contradição, tendo em vista que

$$|\nabla u| = |\nabla \Phi_{t^*}| = \sqrt{2}, \text{ em } ([A_0, B_0] + t^*e_2) \cap J_0.$$

Agora, se $[A_1, B_1] + t^*e_2$ toca J_1 acima, em um dado ponto z_1 , consideremos D_r tocando J_1 abaixo em z_1 com $D_r \subset Q_{t^*} \cap \Omega$ via condição da esfera interior (ver Proposição 1.1). Analogamente, como feito no caso anterior,

$$|\nabla \Phi_{t^*}(z_1)| > |\nabla u(z_1)|,$$

contradizendo o fato de

$$|\nabla u| = |\nabla \Phi_{t^*}| = 0, \text{ em } ([A_1, B_1] + t^*e_2) \cap J_1.$$

Com estes fatos, (d_1) não é verificado. Assim, pelo item (d_2) o conjunto T , dado por

$$T := \{u = \Phi_{t^*}\} \cap (Q_{t^*} \cap \Omega),$$

é diferente do vazio. Mostraremos agora que T é um conjunto aberto e fechado relativamente a $Q_{t^*} \cap \Omega$. Com efeito, como u e Φ_{t^*} são funções contínuas,

$$\{u = \Phi_{t^*}\} = (u - \Phi_{t^*})^{-1}(\{0\})$$

é fechado em $\mathbb{R}^2$ e portanto T é um fechado relativo. Além disso, se $w \in T$, então existe $r > 0$ tal que

$$D_r(w) \subset \Omega \cap Q_{t^*}.$$

Neste caso, uma vez que

- $(\Phi_{t^*} - u)(w) = 0$;
- $\Delta(\Phi_{t^*} - u) = 0$, em $D_r(w)$;
- $\Phi_{t^*} - u \leq 0$, em $D_r(w)$,

temos pelo Princípio do Máximo (ver Teorema 1.2)

$$\Phi_{t^*} \equiv u \text{ em } D_r(w),$$

o que implica $D_r(w) \subset \{u = \Phi_{t^*}\}$. Mostrando que T é um aberto relativo. Por estes fatos, sendo $T \neq \emptyset$ e $Q_{t^*} \cap \Omega$ conexo,

$$T = Q_{t^*} \cap \Omega,$$

isto é,

$$u \equiv \Phi_{t^*} \text{ em } \overline{Q_{t^*} \cap \Omega},$$

contradizendo a Afirmação 3.4. Portanto, $t^* \leq 0$ e consequentemente

$$u \geq \Phi_0 = \Phi \text{ em } Q_0 = Q.$$

A verificação do item (ii) segue de maneira análoga ao feito anteriormente. ■

Na proposição a seguir, apresentaremos mais um resultado de comparação, agora com a função Barreira, Ψ_R , desenvolvida no Capítulo 2. Recorde que γ_0^R e γ_1^R são as raízes de Ψ_R , com $0 < \gamma_0^R < R < \gamma_1^R$, obtidas pela Proposição 2.1.

Proposição 3.2 *Temos:*

- (i) Se $D_{\gamma_0^R}$ está abaixo de J_0 , então $u \leq \Psi_R$ em $\overline{D_R} \setminus D_{\gamma_0^R}$;
- (ii) Se $D_{\gamma_1^R}$ está acima de J_0 , então $u \geq \Psi_R$ em $\overline{D_{\gamma_1^R}} \setminus D_R$.

Demonstração. Verificação do item (i) : Dado $t \in \mathbb{R}$, defina

- $\mathcal{D}_t := D_R \setminus \overline{D}_{\gamma_0^R} + te_2$;
- $\Gamma_t(w) := \Psi_R(w - te_2)$, em $w \in \overline{\mathcal{D}_t}$.

Conforme visto no Capítulo 2,

- $0 < \Gamma_t < 1$ em $\mathcal{D}_t$;
- $\Delta \Gamma_t = -1$ em $\mathcal{D}_t$.

Além disso, de (ii) Proposição 2.1, tem-se

$$|\nabla \Gamma_t| = 0, \text{ em } \partial D_R(te_2).$$

Conforme visto na demonstração da proposição anterior, utilizaremos novamente o método do deslizamento. Para isto, considere

$$t^* := \sup\{t : u < \Gamma_s \text{ em } \mathcal{D}_s, \forall s < t\}.$$

Note que t^* está bem definido. De fato, tomando $t_0 < 0$, com $|t_0|$ suficientemente grande, $\mathcal{D}_{t_0}$ está estritamente abaixo de J_0 , e portanto

$$u < \Gamma_s, \text{ em } \mathcal{D}_s \text{ para todo } s < t_0,$$

deste modo, $t_0 \leq t^*$. Além disso, por continuidade

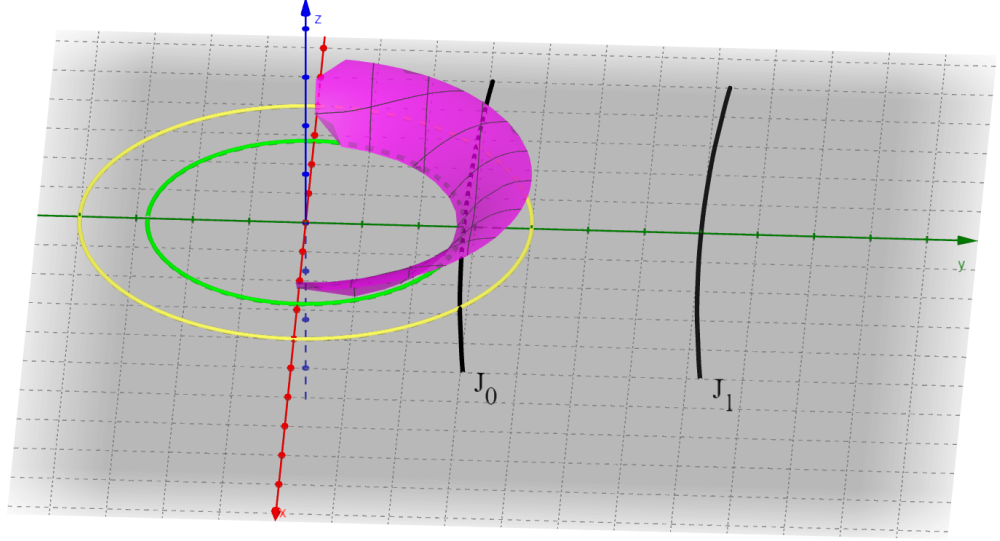
$$u \leq \Gamma_{t^*} \text{ em } \mathcal{D}_{t^*}. \tag{3.15}$$

Agora, observe que para provar o item (i) é suficiente mostrar que $t^* \geq 0$, pois assim

$$u \leq \Gamma_0 = \Psi_R \text{ em } \mathcal{D}_0 = D_R \setminus \overline{D}_{\gamma_0^R},$$

e por continuidade o item (i) é verificado.

Figura 3.2: Função Ψ_R



Fonte: Autoria própria, com o uso do GeoGebra.

Suponha por contradição que $t^* < 0$.

Afirmção 3.5 *Fixe $i \in \{0, 1\}$. Se*

$$\partial D_{\gamma_i^R}(te_2) \text{ está estritamente abaixo de } J_i, \text{ para } i = 0, 1, \quad (3.16)$$

e

$$u < \Gamma_t \text{ em } \mathcal{D}_t. \quad (3.17)$$

Existe $\epsilon > 0$ tal que

$$u < \Gamma_t \text{ em } \mathcal{D}_s, \forall s \in [t, t + \epsilon].$$

A prova da Afirmção 3.5 segue de maneira análoga a prova da Afirmção 3.1.

Segue de (3.15) e da Afirmção 3.5 que um dos itens abaixo é verificado:

(h_1) $D_{\gamma_0^R} + t^*e_2$ toca J_0 por baixo ou $D_R + t^*e_2$ toca J_1 por baixo;

(h_2) Existe $w^* \in \mathcal{D}_{t^*}$ tal que $u(w^*) = \Gamma_{t^*}(w^*)$.

Vejamos agora que (h_1) não é verdadeiro. Com efeito, uma vez que $D_{\gamma_0^R}$ está abaixo de J_0 (por hipótese) e $t^* < 0$, temos

$$D_{\gamma_0^R} + t^*e_2 \text{ está estritamente abaixo de } J_0.$$

Afirmção 3.6 $D_R + t^*e_2$ está estritamente abaixo de J_1 .

De fato, suponha por contradição que exista $w_1 \in J_1 \cap \partial(D_R + t^*e_2)$. Daí, vai existir via condição da esfera interior (ver Proposição 1.1) $r > 0$, e $D'_r \subset \Omega \cap \mathcal{D}_{t^*}$, de sorte que

$$D'_r \cap J_1 = \{w_1\}.$$

Por estes fatos, tem-se que:

- $(u - \Gamma_{t^*})(w_1) = 0$;
- $\Delta(u - \Gamma_{t^*}) = 0$, em D'_r ;
- $u - \Gamma_{t^*} < 0$, em D'_r ,

de onde se segue pelo Lema de Hopf (ver Lema 1.1),

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(w_1) > \frac{\partial \Gamma_{t^*}}{\partial \eta}(w_1),$$

onde η é o vetor unitário normal ao disco D'_r em (x_1, y_1) . Logo,

$$|\nabla u(w_1)| > |\nabla \Gamma_{t^*}(w_1)|,$$

contradizendo o fato de

$$|\nabla u(w_1)| = |\nabla \Gamma_{t^*}(w_1)| = 0,$$

Provando assim a Afirmção 3.6, e conseqüentemente que (h_1) não é verificado.

Agora, segue de (h_2) que o conjunto

$$T = \{u = \Gamma_{t^*}\} \cap (\mathcal{D}_{t^*} \cap \Omega),$$

é diferente do vazio.

Afirmção 3.7 T é aberto e fechado, relativamente a $\mathcal{D}_{t^*} \cap \Omega$.

De fato, como $u - \Gamma_{t^*}$ é contínuo o conjunto

$$\{u = \Gamma_{t^*}\} = (u - \Gamma_{t^*})^{-1}(\{0\})$$

é fechado em $\mathbb{R}^2$ e por conseguinte fechado relativo. Agora, tomando $w \in T$, vai existir $r > 0$ tal que

$$D_r(w) \subset \Omega \cap \mathcal{D}_{t^*}.$$

Deste modo, uma vez que

- $(u - \Gamma_{t^*}) \leq 0$, em $D_r(w)$;
- $(u - \Gamma_{t^*})(w) = 0$;
- $\Delta(u - \Gamma_{t^*}) = 0$, em $D_r(w)$,

segue pelo Princípio do Máximo (ver Teorema 1.2)

$$u \equiv \Gamma_{t^*} \text{ em } D_r(w),$$

mostrando que w é um ponto interior de T . Logo, T é um aberto relativo de $\Omega \cap \mathcal{D}_{t^*}$, mostrando assim a Afirmação 3.7.

Sendo $T \neq \emptyset$ e $\mathcal{D}_{t^*} \cap \Omega$ conexo, podemos concluir pela Afirmação 3.7 que

$$u \equiv \Gamma_{t^*}, \text{ em } \mathcal{D}_{t^*} \cap \Omega. \quad (3.18)$$

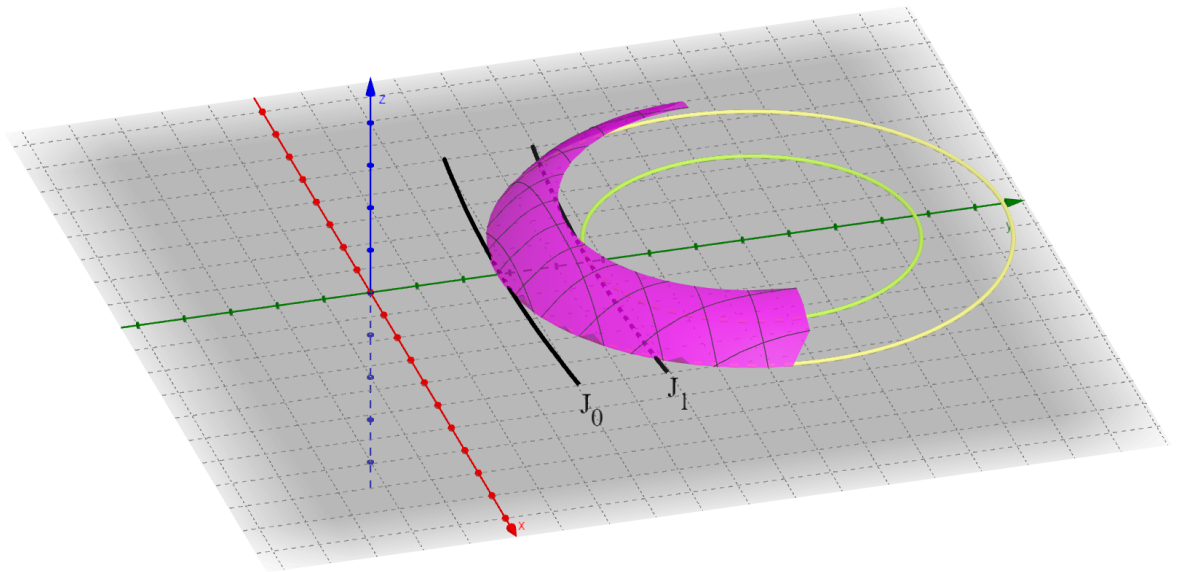
Por outro lado, como $J_0 \cap \mathcal{D}_{t^*} \neq \emptyset$ (pois $D_{\gamma_0^R}$ está abaixo de J_0), temos

$$0 = u(z) < \Gamma_{t^*}(z), \quad z \in J_0 \cap \mathcal{D}_{t^*},$$

contradizendo (3.18). Portanto, $t^* \geq 0$ como queríamos provar.

A prova do item (ii) segue de maneira análoga ao feito no item (i).

Figura 3.3: Função Ψ_R



Fonte: Autoria própria, com o uso do GeoGebra.

■

3.3 Estudo das fronteiras livres

Nesta seção, estamos interessados em determinar alguns resultados qualitativos sobre as fronteiras livres.

Proposição 3.3 $c = \sqrt{2}$.

Demonstração. Inicialmente, tome $z_0 \in \Omega_0$ tal que $\overline{D}_{\gamma_0^R}(z_0)$ toca por baixo J_0 via condição da esfera interior e exterior (ver Proposição 1.1). Deste modo, segue de (i) Proposição 3.2 que

$$u(z) \leq \Psi_R(z - z_0), \quad \forall z \in \overline{D}_R(z_0) \setminus D_{\gamma_0^R}(z_0).$$

Agora, assumindo

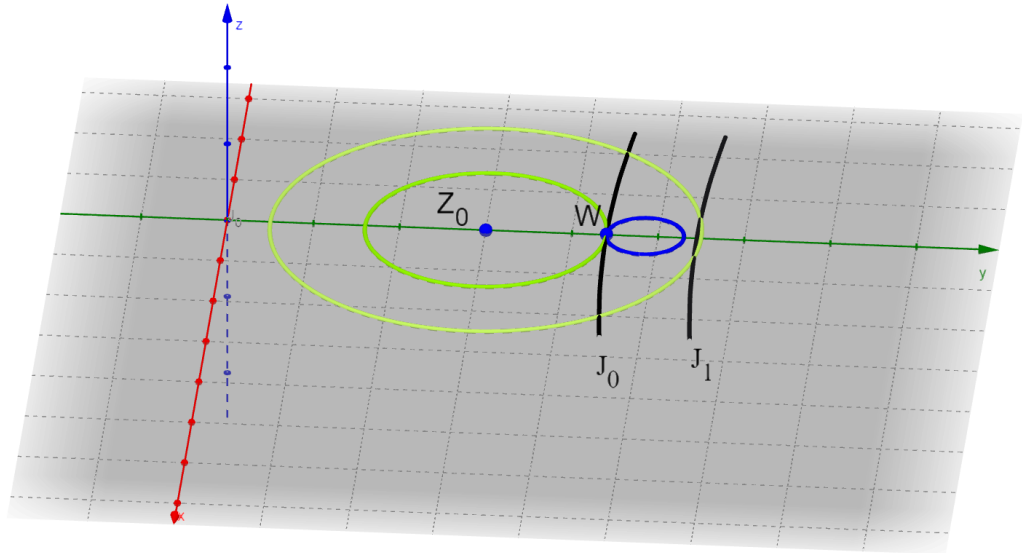
$$\{w\} = J_0 \cap \overline{D}_{\gamma_0^R}(z_0),$$

considere $r > 0$ de sorte

$$D_r \subset \Omega \cap \left(D_R(z_0) \setminus D_{\gamma_0^R}(z_0) \right) \text{ e } \overline{D}_r \cap J_0 = \{w\}$$

via condição da esfera interior e exterior (ver Proposição 1.1).

Figura 3.4: Anel $D_R(z_0) \setminus D_{\gamma_0^R}(z_0)$



Fonte: Autoria própria, com o uso do GeoGebra.

Destes fatos, temos

- $u - \Psi_R(\cdot - z_0) \leq 0$, em D_r ;
- $u(w) - \Psi_R(w - z_0) = 0$;
- $\Delta(u - \Psi_R(\cdot - z_0)) = 0$, em D_r .

Aplicando o Lema de Hopf (ver Lema 1.1), tem-se

$$\frac{\partial(u - \Psi_R(\cdot - z_0))}{\partial\nu}(w) > 0, \quad (3.19)$$

onde

$$\nu = \frac{z_0 - w}{\gamma_0^R},$$

é o vetor normal exterior unitário de D_r . Por outro lado, observe que

$$\theta(\nabla u(w), \nu) = \theta(\nabla \Psi_R(w - z_0), \nu) = \pi \quad (3.20)$$

pois o gradiente de uma função é sempre ortogonal a sua curva de nível. De (3.19) e (3.20)

$$-c = -|\nabla u(w)| > -|\nabla \Psi_R(w - z_0)|,$$

donde segue-se que

$$c < |\nabla \Psi_R(w - z_0)| = |\Psi'_R(\gamma_0^R)|.$$

Passando ao limite $R \rightarrow \infty$ obtemos pela Proposição 2.2

$$c \leq \sqrt{2}. \quad (3.21)$$

Para obtermos a outra desigualdade, faremos um raciocínio análogo ao feito anteriormente. Sendo assim, considere $\overline{D}_{\gamma_1^R}(z_1)$ um disco que toca J_0 por cima (via condição da esfera interior e exterior). Segue de (ii) Proposição 3.2 que

$$u(z) \geq \Psi_R(z - z_1), \quad z \in \overline{D}_{\gamma_1^R}(z_1) \setminus D_R(z_1).$$

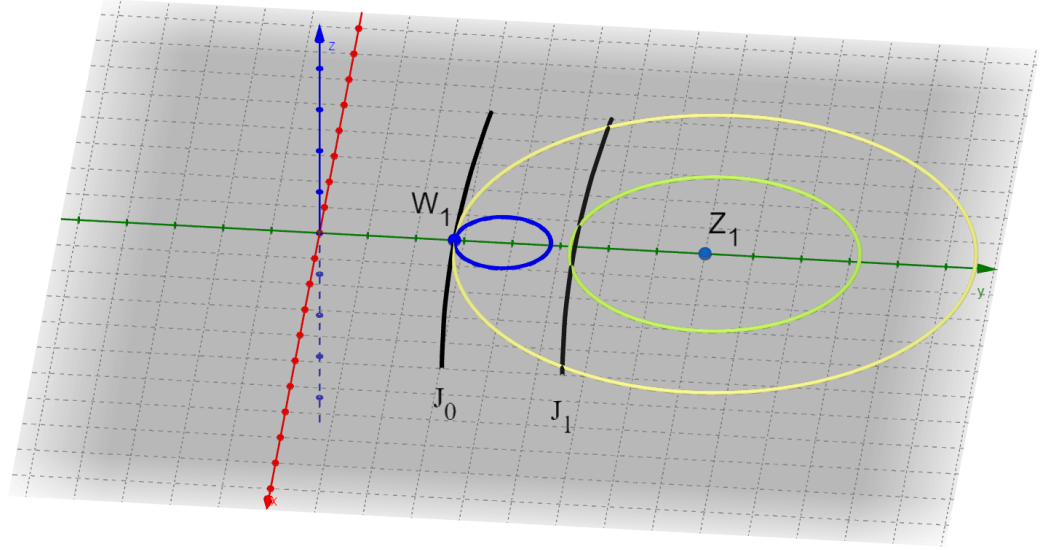
Assumindo

$$\{w_1\} = J_0 \cap \overline{D}_{\gamma_1^R}(z_1),$$

consideremos $s > 0$ tal que

$$D'_s \subset \Omega \cap \left(D_{\gamma_1^R}(z_1) \setminus D_R(z_1) \right) \text{ e } \overline{D}'_s \cap J_0 = \{w_1\}.$$

Figura 3.5: Anel $D_{\gamma_1^R}(z_1) \setminus D_R(z_1)$



Fonte: Autoria própria, com o uso do GeoGebra.

Por estes fatos

- $(\Psi_R(\cdot - z_1) - u) \leq 0$, em D'_s ;
- $\Psi_R(w_1 - z_1) - u(w_1) = 0$;
- $\Delta(\Psi_R(\cdot - z_1) - u) = 0$, em D'_s ,

implicando do Lema de Hopf (ver Lema 1.1)

$$\frac{\partial(u - \Psi_R(\cdot - z_1))}{\partial\nu}(w_1) > 0.$$

onde

$$\nu = \frac{w_1 - z_1}{\gamma_1^R},$$

é o vetor normal unitário exterior a D'_s . Daí, analogamente ao feito em (3.20) podemos concluir que

$$|\Psi'_R(\gamma_1^R)| < c.$$

Passando ao limite de $R \rightarrow \infty$, temos pela Proposição 2.2

$$\sqrt{2} \leq c. \tag{3.22}$$

De (3.21) e (3.22) $c = \sqrt{2}$, como queríamos demonstrar.

■

Proposição 3.4 *Existe uma reta que esta acima de J_0 .*

Demonstração. Primeiramente, considere V a envoltória convexa de Ω_0 dado por:

$$V = \{tx + (1-t)y : x, y \in \Omega_0 \text{ e } t \in [0, 1]\}.$$

Afirmção 3.8 *V está abaixo de J_1 .*

Com efeito, assuma:

- $A'_1, B'_1 \in \Omega_0$, com $(B'_1 - A'_1) \cdot e_1 \neq 0$;
- $\nu' = (\nu'_1, \nu'_2)$ o vetor normal unitário ao segmento $[A'_1, B'_1]$, com $\nu'_2 > 0$;
- $A'_0 := A'_1 - \frac{\sqrt{2}}{\nu'_2} e_2 \in \Omega_0$;
- $B'_0 := B'_1 - \frac{\sqrt{2}}{\nu'_2} e_2 \in \Omega_0$;
- Q' o paralelogramo aberto de vértices A'_0, A'_1, B'_0, B'_1 .

Além disso, assuma

$$\Phi(x, y) = \varphi(\langle (x, y) - A'_0, \nu' \rangle), \quad (x, y) \in \overline{Q'},$$

onde φ dada por (3.3). Desde que

$$[A'_0, A'_1], [B'_0, B'_1] \subset \Omega_0$$

temos

$$u(z) = 0, \quad \forall z \in [A'_0, A'_1] \cup [B'_0, B'_1],$$

e consequentemente

$$0 = u \leq \Phi \text{ em } [A'_0, A'_1] \cup [B'_0, B'_1].$$

Segue do item (ii) Proposição 3.1

$$u \leq \Phi, \text{ em } Q'. \tag{3.23}$$

Agora, suponha por contradição que $[A'_1, B'_1]$ não esteja abaixo de J_1 . Neste caso, vai existir $w \in Q' \cap \Omega_1$ tal que

$$1 = u(w) > \Phi(w),$$

contradizendo (3.23). Portanto, qualquer segmento de extremos em Ω_0 está abaixo de J_1 , mostrando assim a Afirmação 3.8.

Segue da Afirmação 3.8 que $V \neq \mathbb{R}^2$, consequentemente dado uma reta tangente, ℓ_0 , de ∂V , temos que ℓ_0 está acima de J_0 (pois $\bar{V}$ está abaixo de ℓ_0 , por propriedade de envoltória convexa).

■

Proposição 3.5 *Existe uma reta que está acima de J_1 .*

Demonstração. Segue da Proposição 3.4 que existe uma reta ℓ_0 acima de J_0 . Assumindo

- $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ um vetor unitário normal a ℓ_0 com $\eta_2 > 0$;
- $z \in \ell_0$,

temos que

$$D_{\gamma_1^R}(z + \gamma_1^R \eta) \text{ está acima de } J_0,$$

donde segue-se de (ii) Proposição 3.2

$$u \geq \Psi_R(\cdot - (z + \gamma_1^R \eta)) \text{ em } \overline{D}_{\gamma_1^R}(z + \gamma_1^R \eta) \setminus D_R(z + \gamma_1^R \eta).$$

Logo, $D_R(z + \gamma_1^R \eta)$ está acima de J_1 . E pela arbitrariedade de $z \in \ell_0$, podemos concluir que

$$\ell'_0 := \ell_0 + \gamma_1^R \eta \text{ está acima de } J_1,$$

como queríamos demonstrar

■

3.4 Prova do Teorema 0.1

Com o objetivo de provarmos o Teorema 0.1, verificaremos inicialmente o seguinte lema:

Lema 3.1 *Sejam*

- φ a função dada em (3.3);
- $\nu = (\nu_2, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário, com $\nu_2 > 0$;
- $\Phi_\nu(x, y) := \varphi(\langle (x, y), \nu \rangle)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Se

$$(i) \ u \geq \Phi_\nu \text{ em } \mathbb{R}^2;$$

$$(ii) \ u \not\equiv \Phi_\nu \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

então, existe $\delta > 0$ tal que

$$u(x, y) \geq \Phi_\nu((x, y) + \delta e_2), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstração. A prova deste resultado se dará em quatro etapas:

Etapa 1. Assumindo

- $\ell_i = \partial\{\Phi_\nu = i\}$, $i = 0, 1$;
- $H = \{0 < \Phi_\nu < 1\}$,

temos

$$u > \Phi_\nu \text{ em } H, \tag{3.24}$$

e conseqüentemente

$$\ell_i \text{ está estritamente acima de } J_i, i = 0, 1. \tag{3.25}$$

Primeiramente, note que se $(\{u = \Phi_\nu\} \cap H) = \emptyset$, então de (i), (3.24) segue imediatamente.

Com efeito, assuma $(\{u = \Phi_\nu\} \cap H) \neq \emptyset$ e

$$T := \{u = \Phi_\nu\} \cap H.$$

Neste caso

- $0 < u(x, y) = \Phi_\nu(x, y) < 1$, $\forall (x, y) \in T$, ou seja, $T \subset \Omega$;
- T é um fechado relativo a H .

Verificaremos agora que T é, também, um aberto relativo a H . Dado $(x, y) \in T$, tome $r > 0$ de sorte que

$$D_r(x, y) \subset (\Omega \cap H).$$

Uma vez que,

- $\Phi_\nu - u \leq 0$, em $D_r(x, y)$;

- $(\Phi_\nu - u)(x, y) = 0$;
- $\Delta(\Phi_\nu - u) = 0$, em $D_r(x, y)$,

temos pelo Princípio do Máximo (ver Teorema 1.2)

$$u \equiv \Phi_\nu \text{ em } D_r(x, y),$$

ou seja, $D_r(x, y) \subset \{u = \Phi_\nu\}$. Logo $\{u = \Phi_\nu\}$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$ e por conseguinte T é um aberto relativo a H . Sendo H conexo, tem-se

$$T = H \text{ ou } T = \emptyset.$$

Se $T = H$, podemos concluir, por continuidade, que $\ell_0 = J_0$ e $\ell_1 = J_1$. Deste modo, $u \equiv \Phi_\nu$ em $\mathbb{R}^2$, contradizendo (ii). Logo $T = \emptyset$, mostrando (3.24).

Etapa 2: Dados $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ e $t \in \mathbb{R}$, defina

$$\Phi_{\mu,t}(x, y) := \varphi(\langle (x, y) - te_2, \mu \rangle), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Para algum $\delta > 0$,

$$u(0, y) \geq \Phi_{\mu,-\delta}(0, y), \quad \forall y \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \mu \in D_\delta(\nu).$$

Primeiramente, observe que

- $\ell_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), \nu \rangle = 0\}$;
- $\ell_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), \nu \rangle = \sqrt{2}\}$;
- $0 \in \ell_0$;
- $\frac{\sqrt{2}}{\nu_2}e_2 \in \ell_1$.

Destes fatos, segue de (3.25)

$$\phi_0(0) < 0 \text{ e } \phi_1(0) < \frac{\sqrt{2}}{\nu_2},$$

e consequentemente

$$t_0 := \frac{1}{2} \min \left\{ -\phi_0(0), \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} - \phi_1(0) \right\} > 0.$$

Além disso, por (3.24), temos

$$u(x, y) > \Phi_\nu(x, y), \quad \forall (x, y) \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} e_2\right) \subset H,$$

em particular,

$$u(0, y) > \Phi_\nu(0, y), \quad \forall y \in (0, \phi_1(0) + t_0]. \quad (3.26)$$

Por outro lado,

$$u(0, y) > 0 = \Phi_\nu(0, y), \quad \forall y \in [-t_0, 0]. \quad (3.27)$$

De (3.26) e (3.27), podemos considerar

$$c_0 := \min_{y \in I_0} [u(0, y) - \Phi_\nu(0, y)] > 0,$$

onde $I_0 := [-t_0, \phi_1(0) + t_0]$. Agora, dados $t \in (0, t_0)$ e $\mu \in D_t(\nu)$, temos os seguintes casos:

1° Caso. $y < -t_0$.

Neste caso,

$$u(0, y) \geq 0 = \Phi_{\mu, -t}(0, y).$$

2° Caso. $y > \phi_1(0) + t_0$.

Neste caso,

$$u(0, y) = 1 \geq \Phi_{\mu, -t}(0, y).$$

3° Caso. $y \in I_0$. Para este caso, observe inicialmente

$$\begin{aligned} u(0, y) - \Phi_{\mu, -t}(0, y) &= (u(0, y) - \Phi_\nu(0, y)) + (\Phi_\nu(0, y) - \Phi_{\mu, -t}(0, y)) \\ &\geq \min_{y \in I_0} [u(0, y) - \Phi_\nu(0, y)] + (\Phi_\nu(0, y) - \Phi_{\mu, -t}(0, y)) \\ &\geq c_0 - |(\Phi_\nu(0, y) - \Phi_{\mu, -t}(0, y))|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por outro lado, assumindo

$$\alpha = \min\{y\nu_2, (y+t)\mu_2\} \text{ e } \beta = \max\{y\nu_2, (y+t)\mu_2\}$$

observe que

$$|\varphi(y\nu_2) - \varphi((y+t)\mu_2)| = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta \leq 0; \\ (\varphi(\beta) - \varphi(0)), & \text{se } \alpha \leq 0 < \beta; \\ (\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)), & \text{se } 0 < \alpha < \beta. \end{cases}$$

Sabendo disto, uma vez que φ é de classe C^1 em $[0, \infty)$ e

$$\varphi'(s) \leq \sqrt{2}, \quad \forall s \geq 0,$$

temos pelo Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned} |\Phi_\nu(0, y) - \Phi_{\mu, -t}(0, y)| &= |\varphi(y\nu_2) - \varphi((y+t)\mu_2)| \\ &\leq \sqrt{2}|y\nu_2 - (y+t)\mu_2| \\ &\leq \sqrt{2}(|y(\nu_2 - \mu_2)| + t|\mu_2|) \\ &< \sqrt{2}|y|t + \sqrt{2}|\mu_2|t \\ &\leq \sqrt{2}(\phi_1(0) + t_0)t + \sqrt{2}t \quad (\text{pois } y \in I_0) \\ &\leq \sqrt{2} \left(\frac{\phi_1(0)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\nu_2} + 1 \right) t \quad \left(\text{pois } t_0 \leq \frac{1}{2} \left(-\phi_1(0) + \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} \right) \right). \end{aligned}$$

Deste modo, tomando

$$t_1 := \frac{c_0}{2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\phi_1(0)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\nu_2} + 1 \right)},$$

e $t \in (0, \min\{t_0, t_1\})$ tem-se

$$|\Phi_\nu(0, y) - \Phi_{\mu, -t}(0, y)| \leq \frac{c_0}{2}. \quad (3.29)$$

De (3.28) e (3.29)

$$u(0, y) - \Phi_{\mu, -t}(0, y) \geq \frac{c_0}{2} > 0.$$

Finalmente, fixando $\delta \in (0, \min\{t_0, t_1\})$, obtemos do 1°, 2° e 3° caso

$$u(0, y) - \Phi_{\mu, -\delta}(0, y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \mu \in D_\delta(\nu).$$

Com o objetivo de enunciar a Etapa 3 considere

- $A_0 := -\delta e_2$, onde δ é dado pela Etapa 2;
- $s \in \mathbb{R}$;
- $B_{0,s} \in \ell_1$, com $\langle B_{0,s}, e_1 \rangle = s$.

Além disso, assuma

- $\mu_s = (\mu_{s,1}, \mu_{s,2})$ o vetor normal unitário a $[A_0, B_{0,s}]$, com $\mu_{s,2} > 0$;

- $A_{1,s} := A_0 + \frac{\sqrt{2}}{\mu_{s,2}}e_2;$
- $B_{1,s} := B_{0,s} + \frac{\sqrt{2}}{\mu_{s,2}}e_2;$
- Q_s o paralelogramo aberto de vértices $A_0, A_{1,s}, B_{0,s}, B_{1,s}$.

Etapla 3: Temos:

- (i) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \mu_s = \nu;$
- (ii) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \text{dist}(Q_s \cup Q_{-s} \cup (A_0, A_{1,s}), H - \delta e_2) = 0.$

Tendo em vista que

$$\ell_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), \nu \rangle = \sqrt{2}\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{-\nu_1}{\nu_2}x + \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} \right\},$$

o ponto $B_{0,s}$ pode ser dado por

$$B_{0,s} = \left(s, \frac{-\nu_1}{\nu_2}s + \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} \right).$$

Neste caso,

$$\vec{t}_s := B_{0,s} - A_0 = \left(s, \frac{-\nu_1}{\nu_2}s + \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} + \delta \right),$$

e seu vetor perpendicular é dado por

$$\vec{n}_s := \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}s - \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} - \delta, s \right).$$

Destes fatos, podemos escrever o vetor μ_s da seguinte forma:

$$\mu_s = \begin{cases} \frac{\vec{n}_s}{|\vec{n}_s|}, & \text{se } s > 0, \\ -\frac{\vec{n}_s}{|\vec{n}_s|}, & \text{se } s \leq 0. \end{cases}$$

Verificação de (i) : Observando que

$$\begin{aligned}
|\vec{n}_s| &= \left| \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} s - \frac{\sqrt{2}}{\nu_2} - \delta, s \right) \right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2} s - \left(\frac{\sqrt{2}}{\nu_2} + \delta \right) \right)^2 + s^2} \\
&= \sqrt{\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} s^2 - 2 \frac{\nu_1}{\nu_2} s \left(\frac{\sqrt{2}}{\nu_2} + \delta \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{\nu_2} + \delta \right)^2 + s^2} \\
&= \sqrt{s^2 \left(\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + 1 \right) - s^2 \left[\frac{2 \nu_1}{s \nu_2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\nu_2} + \delta \right) + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\nu_2} + \delta \right)^2 \right]} \\
&= |s| \sqrt{\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + 1 - \left[\frac{2 \nu_1}{s \nu_2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\nu_2} + \delta \right) + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\nu_2} + \delta \right)^2 \right]},
\end{aligned}$$

temos

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|\vec{n}_s|}{|s|} = \sqrt{\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} + 1} = \frac{1}{\nu_2}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\lim_{|s| \rightarrow \infty} \mu_s &= \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \frac{|s|}{|\vec{n}_s|} - \frac{s}{|s|} \left(\frac{\sqrt{2}}{\nu_2 |\vec{n}_s|} + \frac{\delta}{|\vec{n}_s|} \right), \frac{|s|}{|\vec{n}_s|} \right) \\
&= \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \nu_2, \nu_2 \right) = \nu,
\end{aligned}$$

mostrando o item (i).

Verificação de (ii) : Assumindo

$$\begin{aligned}
\bullet \ell_1^+ &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{-\nu_1}{\nu_2} x + \frac{\sqrt{2}}{\nu_2}, x \geq 0 \right\}; \\
\bullet \ell_1^- &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{-\nu_1}{\nu_2} x + \frac{\sqrt{2}}{\nu_2}, x < 0 \right\},
\end{aligned}$$

observe que

$$\lim_{s \rightarrow \pm \infty} \text{dist}([A_{1,s}, B_{1,s}], \ell_1^\pm - \delta e_2) = 0, \quad (3.30)$$

pois

$$\bullet \lim_{|s| \rightarrow \infty} |B_{1,s} - A_{1,s}| = \infty;$$

- $\lim_{|s| \rightarrow \infty} |A_{1,s} + \delta e_2| = 0;$
- $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{B_{1,s} - A_{1,s}}{|B_{1,s} - A_{1,s}|} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} (-\mu_{s,2}, \mu_{s,1}) = (-\nu_2, \nu_1).$

Analogamente, se

- $\ell_0^+ := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{-\nu_1}{\nu_2}x, x \geq 0 \right\};$
- $\ell_0^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{-\nu_1}{\nu_2}x, x < 0 \right\},$

então

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \text{dist}([A_0, B_{0,s}], \ell_0^\pm - \delta e_2) = 0. \quad (3.31)$$

De (3.30) e (3.31), podemos concluir o item (ii).

Etapa 4: Existe $s_0 > 0$, suficientemente grande, tal que

$$u \geq \Phi_{\mu_s, -\delta}, \quad \text{em } Q_s,$$

para todo $|s| \geq s_0$.

Inicialmente, observe que por (i) Etapa 3, vai existir $s_0 > 0$, suficientemente grande, de sorte que $\mu_s \in D_\delta(\nu)$. Por este fato, segue da Etapa 2:

$$u(0, y) \geq \Phi_{\mu_s, -\delta}(0, y), \quad \text{para } -\delta \leq y \leq \left(-\delta + \frac{\sqrt{2}}{\mu_{2,s}} \right) \text{ e } |s| \geq s_0,$$

isto é,

$$u \geq \Phi_{\mu_s, -\delta}, \quad \text{em } [A_0, A_{1,s}], \quad (3.32)$$

para todo $|s| \geq s_0$. Por outro lado, uma vez que ℓ_1 está acima de J_1 (ver (3.25)) e $B_{0,s} \in \ell_1$ (por construção), temos

$$u = 1 = \Phi_{\mu_s, -\delta}, \quad \text{em } [B_{0,s}, B_{1,s}], \quad (3.33)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. De (3.32) e (3.33), podemos concluir, via (i) Proposição 3.1, que a Etapa 4 é verificada.

Agora, segue da Etapa 4 e (3.32)

$$u \geq \Phi_{\mu_s, -\delta}, \quad \text{em } Q_s \cup Q_{-s} \cup (A_0, A_{1,s}),$$

para todo $|s| \geq s_0$. Fazendo $|s| \rightarrow \infty$, podemos concluir da Etapa 3 e da continuidade de $\Phi_{\mu_s, -\delta}$ que

$$u(x, y) \geq \Phi_{\nu, -\delta}(x, y) = \Phi_{\nu}((x, y) + \delta e_2), \text{ em } H - \delta e_2,$$

e conseqüentemente por continuidade

$$u(x, y) \geq \Phi_{\nu, -\delta}(x, y) = \Phi_{\nu}((x, y) + \delta e_2), \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

como queríamos demonstrar. ■

Demonstração do Teorema 0.1: Conforme vimos na Seção 3.1 basta provarmos o Teorema 3.1. Pela Proposição 3.5, existe uma reta ℓ'_1 acima de J_1 . Neste caso, fixe um vetor ν unitário e normal a ℓ'_1 , com $\nu \cdot e_2 > 0$. Agora, tomando $(x_0, y_0) \in \ell'_1$, defina

$$\Phi_{\nu}(x, y) := \varphi(\langle (x, y) - (x_0, y_0), \nu \rangle), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde φ é dado por (3.3). Destes fatos, note que

$$u(x, y) \geq \Phi_{\nu}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Com o objetivo de deslizar o gráfico de Φ_{ν} para baixo, assuma:

- $\Phi_{\nu, t}(x, y) = \Phi_{\nu}((x, y) - te_2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 + te_2;$
- $t^* := \inf\{t : u \geq \Phi_{\nu, t}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \forall s > t\}.$

Conforme visto na demonstração da Proposição 3.1, t^* está bem definido e além disso

$$u \geq \Phi_{\nu, t^*} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Suponha por contradição que $u \not\equiv \Phi_{\nu, t^*}$. Então, pelo Lema 3.1 existe $\delta > 0$ tal que

$$u(x, y) \geq \Phi_{\nu, t^*}((x, y) + \delta e_2) = \Phi_{\nu, (t^* - \delta)}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

contradizendo a minimalidade de t^* . Portanto,

$$u \equiv \Phi_{\nu, t^*} \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

como queríamos demonstrar. ■

Apêndice A

Resultados de Análise no $\mathbb{R}^n$ e Medida e Integração

Colecionamos aqui, neste apêndice, resultados clássicos da análise no $\mathbb{R}^n$ e teoria da medida e integração.

Teorema A.1 (Teorema do Valor Médio, ver [7]) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dada uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, se o segmento $[a, a+v]$ estiver contido em U então existe $\xi \in (0, 1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \langle \nabla f(a + \xi v), v \rangle,$$

onde $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Teorema A.2 (Desigualdade do Valor Médio, ver [7]) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuo, diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Se $|f'(t)| \leq M$ para todo $t \in (a, b)$, então*

$$|f(a) - f(b)| \leq M(b - a).$$

Teorema A.3 (Coordenadas Polares, ver [4]) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e integrável. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(y)} f dS \right) dr$$

onde $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $B_r(y) = \{z \in \mathbb{R}^n : |z - y| \leq r\}$.

Teorema A.4 (Ver [5]) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Dada $u \in C^2(U)$ satisfazendo $\Delta u \leq 0$ em U então*

$$u(z) \geq \oint_{\partial B_r(z)} f dS \text{ e } u(z) \geq \oint_{B_r(z)} f dx$$

para toda bola $B_r(z) = \{w \in \mathbb{R}^n : |w - z| \leq r\} \subset U$.

Teorema A.5 (*Princípio do Máximo Fraco, ver [5]*) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Assuma $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$, logo

(i) Se $\Delta u \leq 0$ em U então

$$\sup_{\bar{U}} u \leq \sup_{\partial U} u^+.$$

(ii) Se $\Delta u \geq 0$ em U então

$$\inf_{\bar{U}} u \geq \inf_{\partial U} u^- ,$$

Onde $u^+ = \max\{0, u\}$ e $u^- = \max\{0, -u\}$.

Teorema A.6 (*Fórmulas de Green, ver [4]*) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com fronteira suave e $u \in C^2(\bar{U})$. Então

$$\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

onde ν é o vetor unitário normal a fronteira de U .

Teorema A.7 (*Convergência Dominada de Lebesgue, ver [1]*) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e (f_n) uma sequência de funções em $L^1(U)$ que converge quase sempre para uma função mensurável f . Se existe uma função $g \in L^1(U)$ tal que $|f_n| \leq g$ quase sempre em U então, $f \in L^1(U)$ e $f_n \rightarrow f$ em $L^1(U)$.

Teorema A.8 (*Diferenciação de Lebesgue, ver [10]*) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então para quase todo ponto $z \in \mathbb{R}^n$

$$\oint_{B_r(z)} f dx \rightarrow f(z) \text{ quando } r \rightarrow 0.$$

Dizemos também que pontos de $\mathbb{R}^n$ que satisfazem esta propriedade são pontos de Lebesgue.

Referências Bibliográficas

- [1] BARTLE, R. G. The elements of integration and Lebesgue measure. New York: Wiley, 1996. [49](#)
- [2] BERESTYCKI, H.; NIRENBERG, L. On the method of moving planes and the sliding method. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, v. 22, p. 1–37, 1991. [5](#)
- [3] DE SILVA, D.; VALDINOCI, E. A fully nonlinear problem with free boundary in the plane. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, v. IX, p. 327–362, 2010. [3](#), [5](#)
- [4] EVANS, L. C. Partial differential equations. Providence: American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, v. 19, 2010. [6](#), [48](#), [49](#)
- [5] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. Elliptic partial differential equations of second order. New York: Springer-Verlag, 1977. [48](#), [49](#)
- [6] LEWICKA, M.; PERES, Y. Which domains have two-sided supporting unit spheres at every boundary point ?. Expositiones Mathematicae, v. 38, n. 4, p. 548–558, 2020. [14](#)
- [7] LIMA, E. L. Análise real: funções de n variáveis. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. [48](#)
- [8] SERRIN, J. A symmetry problem in potential theory. Archive for Rational Mechanics and Analysis, v. 43, p. 304–318, 1971. [3](#), [5](#)

- [9] WANG, L.; WANG, L. A symmetry result for the torsion equation in an unbounded domain in 2D. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 407, p. 550–556, 2013. [4](#)
- [10] STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton Lectures in Analysis, v. 3, 2005. [49](#)