



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Thiago Ferreira da Cruz [†]

Uma Introdução aos quase-mínimos e a regularidade de Hölder em espaços de Sobolev

Campina Grande - PB

2026

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Thiago Ferreira da Cruz

Uma Introdução aos quase-mínimos e a regularidade de Hölder em espaços de Sobolev

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa de Equações Diferenciais Parciais e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande - PB

2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

C957i

Cruz, Thiago Ferreira da.

Uma introdução aos quase-mínimos e a regularidade de Hölder em espaços de Sobolev / Thiago Ferreira da Cruz. – 2026.

159 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.

“Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima”.

Referências.

1. Matemática. 2. Quase-Mínimos. 3. Hölder Continuidade. 4. Classes De Giorgi. 5. Regularidade. I. Lima, Romildo Nascimento de. II. Título.

UFCG/BC

CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Uma Introdução aos quase-mínimos e a regularidade de Hölder em espaços de Sobolev

por

Thiago Ferreira da Cruz

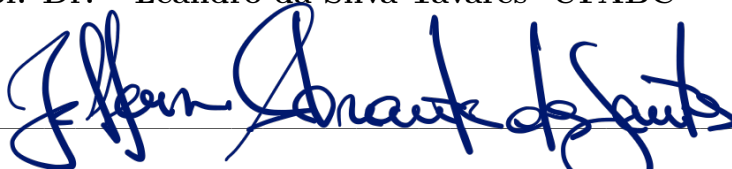
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

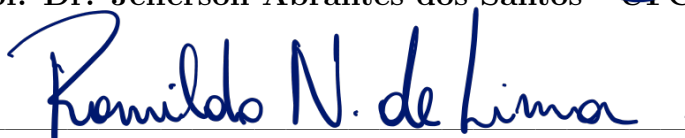
Aprovada em: 29/07/2026



Prof. Dr. - Leandro da Silva Tavares -UFABC



Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG



Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Julho - 2026

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, cuja força e coragem me sustentaram até este momento. Minha profunda gratidão estende-se também à minha família, aos amigos e aos professores, que caminharam ao meu lado, incentivando-me e contribuindo essencialmente para que eu chegasse até aqui.

Dedicatória

Pai e Mãe.

Resumo

Usando como principal referência o livro “*Direct Methods in the Calculus of Variations*”, de Enrico Giusti, estudamos os conceitos de quase-mínimos (Q -mínimos) de funcionais regulares no cálculo das variações. Nosso objetivo é mostrar que os quase-mínimos são funções Hölder contínuas, sem recorrer ao método das equações de Euler-Lagrange, tratando o problema com métodos diretos variacionais. Para isso, estudamos a teoria dos quase-mínimos introduzida por Giaquinta e Giusti em “*On the regularity of the minima of variational integral*”, estabelecendo diversas estimativas locais e desigualdades fundamentais. Ademais, embasamos nossos resultados de regularidade Hölder continuidade a partir do estudo das classes de De Giorgi, uma vez que os Q -mínimos pertencem a uma classe particular destas.

Palavras-chave: Quase-Mínimos; Hölder Continuidade; Classes De Giorgi; Regularidade.

Abstract

Using as the main reference the book "Direct Methods in the Calculus of Variations" by Enrico Giusti, we study the concepts of almost-minimizers (Q-minimizers) of regular functionals in the calculus of variations. Our goal is to show that almost-minimizers are Hölder continuous functions, without resorting to the Euler–Lagrange equation method, treating the problem via direct variational methods. To this end, we study the theory of almost-minimizers introduced by Giaquinta and Giusti in "On the regularity of the minima of variational integrals", establishing several local estimates and fundamental inequalities. Furthermore, we base our Hölder regularity results on the study of De Giorgi classes, since Q-minimizers belong to a particular subclass thereof.

Key Words: Almost-Minimizers; Hölder Continuity; De Giorgi Classes; Regularity.

Notações

$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais;
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano n dimensional;
Du	gradiente da função u ;
Δu	laplaciano de u ;
Ω	subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$;
$B \subset\subset \Omega$	o conjunto B é compacto e está contido em Ω ;
$Q(x_0, r)$	cubo de centro x_0 e lado $2r$;
$p^* = \frac{np}{n-p}$	expoente crítico de Sobolev para $n \geq 3$;
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno usual em $\mathbb{R}^n$;
$\rightharpoonup$	convergência fraca;
$L^p(\Omega)$	espaços de Lebesgue usual com $1 < p \leq \infty$;
$L^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$	espaços de Morrey, definido na subseção 1.2;
$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$	espaços de Campanato, definido na subseção 1.2;
$BMO(Q_0)$	subespaço de $L^1(Q_0, \mathbb{R}^N)$ tal que $[u]_*$ é finito;
$L_w^p(\Omega)$	espaço L^p -fraco;
DG_p	classe de De Giorgi, definido na subseção 3.2;
$\text{med}(E)$ ou $ E $	medida de Lebesgue de um conjunto E ;
q.t.p.	para quase todo ponto;
$\text{supp}(u)$	suporte da função u ;
$W^{m,p}(\Omega)$	espaços de Sobolev inteiros usual;
$\ \cdot\ _{p,\lambda}$	norma do espaço $L^{p,\lambda}$;
$[u]_{p,\lambda}$	seminorma do espaço $\mathcal{L}^{p,\lambda}$;
$ \cdot _{p,\lambda}$	norma do espaço $\mathcal{L}^{p,\lambda}$;
$[u]_*$	seminorma do espaço BMO ;
c	constante e pode variar de linha pra linha;
■	fim de uma demonstração.

Sumário

Introdução	1
1 Espaços L^p	6
1.1 Funções Teste e Suavizadores	11
1.2 Espaços de Morrey e Campanato	12
1.3 Os Lema de John e Nirenberg	28
1.4 Interpolação	41
2 Quase-Mínimos	54
2.1 Preliminares	54
2.2 Quase-Mínimos e Equações Diferenciais	57
2.3 Quase-Mínimos Cúbicos	69
2.4 Estimativas L^p para o gradiente	81
2.5 Estimativas de Fronteira	94
3 Hölder Continuidade	98
3.1 Desigualdade de Caccioppoli	98
3.2 Classes de De Giorgi	104
3.3 Quase-Mínimos	115
3.4 Regularidade na Fronteira	125
3.5 A Desigualdade de Harnack	127
3.6 O Caso Homogêneo	135
3.7 ω -Mínimos	137
A Definições e Resultados Utilizados	150

Lista de Figuras

2.1	Ilustração 3D do problema 1	82
2.2	Ilustração 3D do problema 2	91

Introdução

Os métodos diretos do Cálculo das Variações constituem uma das ferramentas mais importantes na teoria moderna da existência de soluções para problemas variacionais e equações diferenciais parciais elípticas. A ideia fundamental do método direto consiste em interpretar soluções de problemas elípticos como minimizantes de funcionais integrais definidos em espaços funcionais adequados. Para este trabalho iremos estudar o funcional integral

$$\mathcal{F}(u, \Omega) := \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx, \quad (0.1)$$

aqui temos $\mathcal{F} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. Quando não houver risco de ambiguidade na notação, denotaremos $\mathcal{F}(u, \Omega) = \mathcal{F}(u)$. A função u é uma função escalar, isto é, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ademais, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory.

Sob hipóteses adequadas de convexidade (ou quase-convexidade no caso de funções com valores vetoriais) da função $F(x, u, z)$ com respeito à variável z , mostra-se que o funcional atinge seu valor mínimo entre as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ que assumem valores dados na fronteira de Ω (problema de Dirichlet).

Assim, resta o problema de determinar se, e sob quais condições, a função minimizante $u(x)$ possui propriedades adicionais de regularidade, além daquelas derivadas do fato de pertencer à classe $W^{1,p}(\Omega)$. A este problema de regularidade dedicaremos este trabalho.

Para tratar o caso de regularidade dos mínimos o caminho “natural” passa pela equação de Euler de $\mathcal{F}$ e pelo teorema de regularidade de De Giorgi [6] para soluções de equações elípticas com coeficientes descontínuos. Um avanço importante na utilização de métodos diretos em problemas de regularidade, isto é, na obtenção de propriedades de

regularidade diretamente da condição de minimalidade, sem recorrer à equação de Euler–Lagrange, foi obtido por Giaquinta e Giusti [11]. No contexto de funcionais escalares, os autores demonstraram que os minimizantes do funcional (0.1), mesmo sem hipóteses de diferenciabilidade sobre F , pertencem às chamadas classes de De Giorgi e, consequentemente, satisfazem as condições do teorema de regularidade de De Giorgi, o que implica continuidade Hölder.

A ferramenta técnica aqui é a introdução das classes de De Giorgi, introduzidas em [6] e depois levadas à generalidade ótima em [15], e a prova da continuidade Hölder das funções desta classe. Outro resultado fundamental obtido utilizando as funções nestas classes foi a Desigualdade de Harnack que foi provada por Di Benedetto e Trudinger [7] para funções em classes de De Giorgi e, portanto, para quase-mínimos de funcionais integrais

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx.$$

Os autores Giaquinta e Giusti destacam que alguns resultados obtidos em [11] para mínimos se estendem em geral para **quase-mínimos**, em particular a continuidade de Hölder, isto é, para funções u para as quais

$$\mathcal{F}(u, K) \leq Q\mathcal{F}(u + \phi, K) \tag{0.2}$$

para todo ϕ com suporte compacto $K \subset \Omega$.

A noção de quase-mínimo inclui, naturalmente, a de mínimo, à qual se reduz quando $Q = 1$. Na verdade, é substancialmente mais geral, pois inclui soluções de equações e sistemas elípticos lineares e não lineares (e, no caso vetorial, aplicações quase-regulares). Temos assim, sob a noção geral de quase-mínimo, um tratamento unificado da regularidade dos mínimos de funcionais no cálculo das variações e das soluções de equações e sistemas elípticos na forma divergente.

Os espaços de Morrey e Campanato foram introduzidos por este último em [4] e [5], e têm se mostrado uma ferramenta importante na prova da continuidade Hölder das soluções de equações diferenciais parciais. Os espaços de Campanato medem oscilações médias locais e possuem estreita relação com os espaços Hölder. Um dos resultados fundamentais da teoria afirma que, sob condições adequadas sobre os parâmetros, garantimos um isomorfismo entre

$$\mathcal{L}^{p,\lambda} \simeq C^{0,\alpha}$$

isto é, os espaços de Campanato coincidem com os espaços de Hölder contínuos. Essa equivalência constitui uma das principais ferramentas utilizadas na obtenção de regularidade Hölder. Em particular, utilizamos estes espaços para a provar a Hölder continuidade dos ω -mínimos. Dada uma função contínua crescente $\omega(R)$, definida para $R \geq 0$, com $\omega(0) = 0$, chamamos de ω -**mínimo** de $\mathcal{F}$ uma função $u(x)$ tal que para todo cubo $Q_R = Q(x_0, R)$ de lado $2R$ e centro x_0 , e para toda função ϕ com suporte contido em Q_R , temos

$$\mathcal{F}(u, Q_R) \leq (1 + \omega(R))\mathcal{F}(u + \phi, Q_R). \quad (0.3)$$

Com base no que foi mencionado acima, este trabalho tem o objetivo de introduzir os conceitos de quase-mínimos e provar a regularidades advindas destas funções. Para isso, o presente trabalho foi dividido em três capítulos. A principal referência foi o livro “*Direct Methods in the Calculus of Variations*” de Enrico Giusti [12].

No primeiro capítulo foi inserido uma grande parte dos resultados nos espaços L^p que serão utilizados nos capítulos posteriores. No início do capítulo temos várias definições e resultados preliminares acerca de funções mensuráveis que geralmente são vistos no curso de Teoria da Medida. O principal objetivo deste capítulo é introduzir os espaços de Morrey e Campanato e provar alguns resultados que servirão de base para obter a Hölder continuidade de funções nestes espaços.

Neste capítulo ainda apresentamos alguns lemas e resultados interessantes como o teorema da cobertura de Calderon-Zygmund, os lemas de John-Nirenberg sobre funções BMO e os teoremas de interpolação de Marcinkiewicz e Stampacchia. Alguns desses são usados mais adiante. Como já mencionado, os espaços de Morrey e Campanato serão utilizados para provar a continuidade de Hölder para ω -mínimos através do seguinte teorema

Teorema 0.1 *Seja Ω um conjunto aberto limitado sem cúspides externas e seja $n < \lambda \leq n + p$. O espaço $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ é isomorfo a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$.*

No segundo capítulo, iniciamos a introdução dos quase-mínimos. O objetivo deste capítulo é apresentar a relação existente entre os quase-mínimos e equações elípticas em forma divergente, mais precisamente das soluções fracas destas equações. Neste capítulo vê-se que o estudo dos quase-mínimos permite unificar o tratamento de diferentes problemas, em primeiro lugar aqueles relativos aos mínimos de funcionais e às soluções de equações diferenciais parciais elípticas, mas também a aplicações quase-conformes e a

mínimos com obstáculos, cada um dos quais exigiria, de outra forma, uma discussão separada. Para cada um desses problemas temos um exemplo no decorrer deste capítulo.

Além disso, é introduzida a noção de quase-mínimo cúbico que se trata de um caso mais geral de quase-mínimo uma vez que as estimativas são feitas sobre cubos. Apresentamos um exemplo que permite distinguir os dois conceitos e que por tal motivo os resultados do capítulo posterior para quase-mínimos não pode ser estendido para todos os quase-mínimos cúbicos, uma vez que o método De Giorgi, sobre o qual se fundamentam os resultados de continuidade Hölder do capítulo posterior, requer estimativas sobre conjuntos completamente gerais. Provamos a L^p -somabilidade das derivadas de quase-mínimos cúbicos. Uma função $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ é chamada de Q -mínimo cúbico para o funcional $\mathcal{F}$ se para todo cubo $Q_R \subset \Omega$ e para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(Q_R)$ tivermos

$$\mathcal{F}(u, Q_R) \leq Q\mathcal{F}(u + \varphi, Q_R).$$

Aqui, como nos capítulos seguintes, o papel principal é desempenhado por uma desigualdade, que permite estimar as derivadas pela função, à qual se associa o nome de Caccioppoli [3].

Por fim, no terceiro capítulo fazemos o estudo (com $N = 1$) de regularidade para quase-mínimos e ω -mínimos de funcionais regulares do cálculo das variações, este último é um caso particular de quase-mínimo cúbico. O principal teorema a ser demonstrado neste capítulo é o seguinte

Teorema 0.2 *Seja $u(x)$ uma função limitada, satisfazendo (3.46) e (3.47) com $p > 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$. Então, u é (localmente) Hölder-contínua em Ω .*

Ou seja, provaremos que ambos os objetos ditos acima são funções Hölder-contínua. Para isso, foi provada uma variação da desigualdade de Caccioppoli para sub-quase-mínimos que consiste no Teorema 3.1. Com isso, foi introduzido uma nova classe de funções que é denominada de Classes de De Giorgi, que foi introduzida pelo mesmo em [6], e depois Giusti provou que as funções nessas classes são Hölder-contínuas. A regularidade dos quase-mínimos escalares é uma consequência do fato de pertencerem a classes adequadas de De Giorgi. Provamos também a regularidade na fronteira para soluções do problema de Dirichlet.

Além disso, seguindo Di Benedetto e Trudinger [7] (ver também Di Benedetto [2]), foi provada a desigualdade de Harnack para essas funções. Com esta desigualdade provamos

versões adaptadas de teoremas bastante conhecidos como o Princípio do Máximo Forte e o Teorema de Liouville.

Por fim, introduzimos o conceito de ω -mínimo. Com os estudos provenientes dos quase-mínimos cúbicos adaptamos a demonstração para essa classe de funções, já que como mencionado anteriormente, o método de De Giorgi não vale em geral para quase-mínimos cúbicos.

Capítulo 1

Espaços L^p

O objetivo deste capítulo é listar algumas definições e propriedades dos espaços L^p que serão úteis durante todo o decorrer do texto. Para as demonstrações, o leitor é remetido a um dos muitos livros sobre integrais de Lebesgue, como Royden [19] ou Saks [20].

É claro que, quando falamos de conjuntos e funções mensuráveis, estaremos sempre nos referindo à medida de Lebesgue; como de costume, não faremos distinção entre funções que diferem apenas em um conjunto de medida nula, de modo que, por exemplo, a afirmação “a função $f(x)$ é contínua em A ” significa estritamente “a função f coincide quase sempre com uma função $\tilde{f}$ contínua em A ”. Se E é um conjunto mensurável, indicaremos sua medida por $\text{med}(E)$, ou simplesmente por $|E|$.

Começamos recordando as definições de alguns espaços de funções bem conhecidos. Denotaremos por $C^k(\Omega)$ ($k = 0, 1, \dots$) o espaço das funções que possuem derivadas contínuas até (e incluindo) a ordem k (se $k = 0$, será o espaço das funções contínuas); e por $C^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em Ω , ou seja, a intersecção de todos os espaços $C^k(\Omega)$. Com $C^k(\bar{\Omega})$ indicaremos o espaço das funções em $C^k(\Omega)$ cujas derivadas até a ordem k podem ser estendidas a funções contínuas até a fronteira $\partial\Omega$, e com $C_0^k(\Omega)$ ($k = 0, 1, \dots$) o subespaço de $C^k(\bar{\Omega})$ formado pelas funções com suporte compacto contido em Ω .

Destacamos que, os espaços $C^k(\bar{\Omega})$ são espaços de Banach, com a norma

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\beta u(x)|.$$

Se $0 < \alpha \leq 1$, e se D é um domínio em $\mathbb{R}^n$ (ou seja, o fecho de um aberto limitado), denotaremos por $C^{0,\alpha}(D)$ o espaço das funções **Hölder-contínuas** em D , isto é, funções contínuas para as quais

$$[u]_{0,\alpha} := \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty. \quad (1.1)$$

Mais geralmente, denotaremos por $C^{k,\alpha}(D)$ o espaço das funções cujas derivadas até ordem k são Hölder-contínuas em D . Os espaços $C^{k,\alpha}(D)$ são espaços de Banach, com a norma

$$\|u\|_{k,\alpha} = \|u\|_{C^k} + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{0,\alpha}.$$

Finalmente, se Ω é um aberto em $\mathbb{R}^n$, indicaremos com $C^{k,\alpha}(\Omega)$ o espaço das funções que pertencem a $C^{k,\alpha}(D)$ para todo domínio $D \subset \Omega$.

Lembramos os seguintes resultados relativos à integral de Lebesgue, que podem ser encontrados em [19] ou [20].

Teorema 1.1 (*Lusin*) *Seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, com $f = 0$ fora de um aberto A de medida finita. Para todo $\epsilon > 0$ existe uma função $g_\epsilon \in C_0^0(A)$ tal que*

$$\text{med}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g_\epsilon(x)\} < \epsilon$$

e

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |g_\epsilon| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Teorema 1.2 (*Egorov*) *Seja E um conjunto mensurável com $|E| < +\infty$, e seja (f_j) uma sequência de funções mensuráveis em E , convergindo quase sempre para uma função f . Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto mensurável N com $|N| < \epsilon$ e tal que $f_j \rightarrow f$ uniformemente em $E \setminus N$.*

Teorema 1.3 (*Continuidade absoluta da integral*) *Se f é uma função somável em $\mathbb{R}^n$, isto é, a integral de Lebesgue de f é finita, então para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se E é mensurável e $|E| < \delta$, então*

$$\int_E |f| dx < \varepsilon.$$

Lembramos ainda, as seguintes definições bem conhecidas:

Definição 1.1 *Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e seja $1 \leq p < +\infty$. Denotamos por $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tais que*

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left\{ \int_\Omega |f|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (1.2)$$

Além disso, com $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ indicamos o espaço das funções mensuráveis limitadas em Ω .

Observação 1.1 Quando nenhuma confusão possa surgir, escreveremos simplesmente $L^p(\Omega)$ ou mesmo L^p , sem menção explícita do contradomínio $\mathbb{R}^N$.

Os espaços $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < +\infty$) e $L^\infty(\Omega)$ são espaços de Banach, respectivamente, com a norma (1.2) e

$$\|f\|_{\infty, \Omega} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad (1.3)$$

onde

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : |f| \leq \lambda \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Ainda podemos recordar que, como pode ser verificado em [19], temos

Teorema 1.4 Toda sequência (f_k) em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ¹ convergindo para uma função f em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (isto é, tal que $f_k \rightarrow f$ em $L^1(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$) podemos extrair uma subsequência convergindo para f quase sempre em Ω .

Agora, observemos que se f pertence a $L^p(\Omega)$, o conjunto

$$F_t = \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$$

é mensurável, e como

$$\int_{\Omega} |f|^p dx \geq \int_{F_t} |f|^p dx \geq t^p |F_t|,$$

temos

$$|F_t| \leq t^{-p} \|f\|_{p, \Omega}^p. \quad (1.4)$$

Finalmente, recordamos a fórmula bem conhecida:

$$\int_{\Omega} |f|^p dx = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} |F_t| dt. \quad (1.5)$$

Uma consequência imediata de (1.4) e dos Teoremas 1.1 e 1.3 pode ser encontrada em [19], que nos garante o resultado

Teorema 1.5 Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, e seja $p < +\infty$. Então $C_0^0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.

No que concerne à estrutura funcional dos espaços L^p , temos os seguintes resultados:

Teorema 1.6 Para $1 < p < +\infty$, L^p é um espaço de Banach reflexivo, cujo dual é isomorfo ao espaço L^q , com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. O espaço L^1 tem L^∞ como seu dual, mas não é reflexivo. Finalmente, L^2 é um espaço de Hilbert, com produto escalar dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx. \quad (1.6)$$

¹Lembramos que se $V(\Omega)$ é um espaço de funções em Ω , $V_{\text{loc}}(\Omega)$ é o espaço das funções que pertencem a $V(\Lambda)$ para todo aberto $\Lambda \subset \subset \Omega$ (ou seja, tal que $\bar{\Lambda}$ é um conjunto compacto contido em Ω).

Temos ainda:

Proposição 1.1 (*Desigualdade de Hölder*) *Sejam $p > 1$, $f \in L^p$ e $g \in L^q$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{p,\Omega} \|g\|_{q,\Omega}. \quad (1.7)$$

A desigualdade (1.7), que para $p = q = 2$ também recebe o nome de desigualdade de Schwartz, permanece válida para $p = 1$ e $q = +\infty$.

No caso particular em que Ω tem medida finita, se $1 \leq s < r \leq +\infty$, podemos tomar $f = |u|^s$, $g = 1$ e $p = r/s$ em (1.7), obtendo

$$\|u\|_{s,\Omega} \leq |\Omega|^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \|u\|_{r,\Omega} \quad (1.8)$$

de modo que, se $|\Omega|$ é finita e $r > s$, temos $L^r(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ algebricamente e topologicamente (isto é, a topologia de L^r é mais fina que a de L^s).

Observação 1.2 *A desigualdade (1.8) pode ser enunciada de modo mais sugestivo dizendo que, para $u \in L^r$, a função*

$$\gamma(p) = \left\{ \int_{\Omega} |u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} =: \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

cresce no intervalo $[1, r]$. A função $\gamma(p)$ é uma função contínua, e para $u \in L^\infty$ temos

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \gamma(p) = \|u\|_{\infty, \Omega}.$$

De fato, para mostrar a continuidade de γ basta mostrar a continuidade da função

$$p \mapsto \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Fixado $p_0 \in [1, r)$. Como $u \in L^r(\Omega)$ e $p < r$, por separação dos casos em que $|u| \geq 1$ e $|u| < 1$, vale

$$|u|^p \leq 1 + |u|^r \in L^1(\Omega).$$

Além disso, para quase todo x ,

$$|u(x)|^p \rightarrow |u(x)|^{p_0} \quad \text{quando } p \rightarrow p_0.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \longrightarrow \int_{\Omega} |u|^{p_0} dx.$$

Logo, a função $p \mapsto \int_{\Omega} |u|^p dx$ é contínua, e portanto, γ é contínua.

Agora, mostremos que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \gamma(p) = \|u\|_{\infty, \Omega}$. Temos $|u(x)| \leq M := \|u\|_{\infty, \Omega}$ q.t.p., logo

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq M^p |\Omega|.$$

Portanto,

$$\gamma(p) = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq M.$$

Assim, $\limsup_{p \rightarrow \infty} \gamma(p) \leq M$. Por outro lado, seja $\varepsilon > 0$ e defina

$$A_{\varepsilon} = \{x \in \Omega : |u(x)| \geq M - \varepsilon\}.$$

Como M é o ínfimo essencial, temos $|A_{\varepsilon}| > 0$ para todo $\varepsilon > 0$ (exceto se $M = 0$, caso trivial). Então

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \geq \int_{A_{\varepsilon}} |u|^p dx \geq (M - \varepsilon)^p |A_{\varepsilon}|,$$

logo

$$\gamma(p) \geq \left(\frac{|A_{\varepsilon}|}{|\Omega|} \right)^{1/p} (M - \varepsilon).$$

Quando $p \rightarrow \infty$, $\left(\frac{|A_{\varepsilon}|}{|\Omega|} \right)^{1/p} \rightarrow 1$, pois $|A_{\varepsilon}|/|\Omega|$ é constante positivo. Assim,

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \gamma(p) \geq M - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

portanto

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \gamma(p) \geq M.$$

Deste modo, concluímos que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \gamma(p) = \|u\|_{\infty, \Omega}.$$

Por fim, concluímos esta seção com o seguinte resultado que também pode ser encontrado nas referências já citadas

Teorema 1.7 (Lebesgue) *Seja f uma função em $L^1(\Omega)$. Para quase todo $x \in \Omega$ temos*

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \oint_{Q(x, R)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \tag{1.9}$$

e, portanto,

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \oint_{Q(x, R)} f(y) dy = f(x). \tag{1.10}$$

1.1 Funções Teste e Suavizadores

As funções da classe C_0^∞ são também chamadas de **funções teste**. Uma função teste típica é ²

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

cujos suporte é o fecho da bola unitária $B_1(0)$.

Definição 1.2 *Uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$(i) \quad \varphi(x) \geq 0,$$

$$(ii) \quad \text{supp } \varphi \subset B_1(0),$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$$

*é chamada de **suavizador** (ou **mollifier**).*

Dada uma função $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, chamamos de **regularização** de f a função

$$f_\epsilon(x) = \int f(y) \varphi_\epsilon(x-y) dy = \int f(x-z) \varphi_\epsilon(z) dz = \int f(x-\epsilon y) \varphi(y) dy, \quad (1.11)$$

onde

$$\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \quad (1.12)$$

Diferenciando sob o sinal de integral, segue imediatamente de (1.11) que, para todo $\epsilon > 0$, f_ϵ é uma função infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Além disso, se o suporte de f está contido em K , teremos

$$\text{supp } f_\epsilon \subset K^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}.$$

Os próximos resultados a seguir e suas respectivas demonstrações podem ser encontrados em [12]

Lema 1.1 *Se $u \in L^p$, então $u_\epsilon \in L^p$, e*

$$\|u_\epsilon\|_p \leq \|u\|_p. \quad (1.13)$$

Teorema 1.8 *Considere a função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função em $\mathbb{R}^n$. Quando ϵ tende a zero,*

²Temos que $\exp(t) = e^t$.

- (i) Se u é contínua, u_ϵ converge para u uniformemente em todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$;
(ii) se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, u_ϵ converge para u em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Em particular, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Com um argumento similar, podemos mostrar o seguinte:

Corolário 1.1 *Para qualquer aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e para qualquer p , com $1 \leq p < +\infty$, $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

1.2 Espaços de Morrey e Campanato

Os espaços aqui introduzidos por Morrey e Campanato, são espaços de funções integráveis, desenvolvidos e estudados por Morrey e Campanato, provaram ser particularmente úteis no estudo das equações diferenciais parciais elípticas.

Por $Q(x, R)$ denotamos o cubo de $\mathbb{R}^n$, com lados paralelos aos eixos coordenados, com centro em $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e lado de comprimento $2R$:

$$Q(x, R) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| < R \right\}.$$

Quando não houver risco de confusão, escreveremos simplesmente Q_R , sem indicar o centro.

Definição 1.3 (*Espaços de Morrey*) *Seja Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$, e sejam $1 \leq p < +\infty$ e $\lambda \geq 0$. Denotamos por $L^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tais que*

$$\|u\|_{p,\lambda}^p =: \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u|^p dx < +\infty, \quad (1.14)$$

onde $\Omega(x_0, \rho) = \Omega \cap Q(x_0, \rho)$.

Quando o centro x_0 já estiver bem indicado, escreveremos Ω_ρ para indicar $\Omega(x_0, \rho) = \Omega \cap Q(x_0, \rho)$. É claro que a condição (1.14) depende apenas do comportamento para raios pequenos, pois para $\rho > \epsilon$ temos

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u|^p dx \leq \epsilon^{-\lambda} \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Como no caso dos espaços L^p , frequentemente escreveremos $L^{p,\lambda}(\Omega)$ ou simplesmente $L^{p,\lambda}$, e omitiremos a indicação do contradomínio $\mathbb{R}^N$ sempre que não houver risco de confusão. A função $\|u\|_{p,\lambda}$ é uma norma e o espaço $L^{p,\lambda}$ é completo. De fato, temos que

- (i) Observe que $\|u\|_{p,\lambda} \geq 0$, pois o integrante é não negativo. Ademais, se $\|u\|_{p,\lambda} = 0$, então para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $\rho > 0$ temos

$$\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p dx = 0.$$

Logo $u = 0$ q.t.p. para cada $\Omega(x_0, \rho)$, como esses conjuntos cobrem Ω , então $u = 0$ q.t.p. em Ω .

- (ii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$\|\alpha u\|_{p,\lambda}^p = \sup_{x_0,\rho} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |\alpha u|^p dx = |\alpha|^p \sup_{x_0,\rho} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p dx = |\alpha|^p \|u\|_{p,\lambda}^p,$$

$$\text{logo } \|\alpha u\|_{p,\lambda} = |\alpha| \|u\|_{p,\lambda}.$$

- (iii) Por último, para provar a desigualdade triangular, usamos a desigualdade de Minkowski em $L^p(\Omega(x_0, \rho))$. Para cada x_0, ρ fixos:

$$\left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u+v|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |v|^p dx \right)^{1/p}.$$

Multiplicando por $\rho^{-\lambda/p}$:

$$\left(\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u+v|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p dx \right)^{1/p} + \left(\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |v|^p dx \right)^{1/p},$$

o lado direito é limitado por $\|u\|_{p,\lambda} + \|v\|_{p,\lambda}$, independente de x_0, ρ . Tomando supremo no lado esquerdo, obtemos

$$\|u+v\|_{p,\lambda} \leq \|u\|_{p,\lambda} + \|v\|_{p,\lambda}.$$

Agora, mostremos que $L^{p,\lambda}$ é completo. Seja (u_k) uma sequência de Cauchy em $L^{p,\lambda}(\Omega)$. Como Ω é limitado, existe $R_{\max} > 0$ e $x_0 \in \Omega$ tais que $\Omega \subset Q(x_0, R_{\max})$. Da definição da norma de Morrey, temos para quaisquer $k, m \in \mathbb{N}$, que

$$R_{\max}^{-\lambda} \int_{\Omega} |u_k - u_m|^p dx = R_{\max}^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, R_{\max})} |u_k - u_m|^p dx \leq \|u_k - u_m\|_{p,\lambda}^p.$$

Portanto,

$$\|u_k - u_m\|_p^p \leq R_{\max}^{\lambda} \|u_k - u_m\|_{p,\lambda}^p.$$

Como (u_k) é de Cauchy em $L^{p,\lambda}(\Omega)$, segue que é também de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Pela completude de L^p , existe $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, consequentemente, $u_k \rightarrow u$

em $L^p(\Omega(x_0, \rho))$, o que nos diz que $u_k(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em $\Omega(x_0, \rho)$. Usando a convergência e o Lema de Fatou temos

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u|^p dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u_k|^p dx \leq \sup_k \left(\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u_k|^p dx \right) \leq \sup_k \|u_k\|_{p, \lambda}^p \leq C^p,$$

onde C é a constante que limita a sequência de Cauchy (u_k) . Tomando o supremo em x_0 e ρ , obtemos

$$\|u\|_{p, \lambda} \leq C < \infty,$$

logo $u \in L^{p, \lambda}(\Omega)$. Para k fixo, usando que $|u_k(x) - u_m(x)| \rightarrow |u_k(x) - u(x)|$ q.t.p. em $\Omega(x_0, \rho)$, temos pelo lema de Fatou

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u_k - u|^p dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u_k - u_m|^p dx \right].$$

assim, segue que³

$$\|u_k - u\|_{p, \lambda} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_k - u_m\|_{p, \lambda}.$$

Como (u_k) é de Cauchy, o lado direito tende a zero quando $k \rightarrow \infty$. Assim,

$$\|u_k - u\|_{p, \lambda} \rightarrow 0,$$

logo, $L^{p, \lambda}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.3 Se u é uma função definida em $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e se as restrições de u a Ω_1 e a Ω_2 pertencem, respectivamente, a $L^{p, \lambda}(\Omega_1)$ e $L^{p, \lambda}(\Omega_2)$, então u está em $L^{p, \lambda}(\Omega)$. Basta notar que $\Omega(x_0, \rho) = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap Q(x_0, \rho)$.

Observação 1.4 Temos $\|u\|_{p, 0} = \|u\|_p$, de modo que $L^{p, 0} = L^p$. Mais geralmente, usando a desigualdade de Hölder, prova-se que, se $s \geq p$ e $\frac{n-\lambda}{p} \geq \frac{n-\mu}{s}$, então vale o seguinte

$$\|u\|_{p, \lambda} \leq \text{diam}(\Omega)^{\frac{n-\lambda}{p} - \frac{n-\mu}{s}} \|u\|_{s, \mu},$$

e, portanto, a imersão

$$L^{s, \mu} \hookrightarrow L^{p, \lambda} \tag{1.15}$$

é contínua.

Proposição 1.2 O espaço $L^{p, n}$ é isomorfo a L^∞ , e

$$\|u\|_{p, n} = 2^{\frac{n}{p}} \|u\|_\infty.$$

³Usamos um exercício de análise que nos diz $\sup_{m \rightarrow \infty} \liminf_i a_{m, i} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sup_{j \in I} a_{m, j}$.

Demonstração. Sabemos que $Q(x_0, \rho)$ é o cubo em $\mathbb{R}^n$ de centro x_0 e lado 2ρ . Assim, temos $|Q(x_0, \rho)| = 2^n \rho^n$. Se $u \in L^\infty$ temos

$$\int_{\Omega_\rho} |u|^p dx \leq |\Omega_\rho| \sup_{\Omega} |u|^p \leq |Q(x_0, \rho)| \sup_{\Omega} |u|^p = 2^n \rho^n \sup_{\Omega} |u|^p,$$

logo

$$\rho^{-n} \int_{\Omega_\rho} |u|^p dx \leq 2^n \sup_{\Omega} |u|^p,$$

e, portanto,

$$\|u\|_{p,n} \leq 2^{\frac{n}{p}} \|u\|_{\infty}.$$

Reciprocamente, seja $u \in L^{p,n}$. Pelo Teorema 1.7, para quase todo $x_0 \in \Omega$ temos

$$|u(x_0)| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{Q(x_0, \rho)} |u| dx.$$

Lembrando que

$$\oint_{Q(x_0, \rho)} |u| dx = \frac{1}{|Q(x_0, \rho)|} \int_{Q(x_0, \rho)} |u| dx,$$

e, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{Q(x_0, \rho)} |u| dx \leq \left(\int_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |Q(x_0, \rho)|^{\frac{1}{p'}},$$

chegamos que

$$\begin{aligned} \oint_{Q(x_0, \rho)} |u| dx &= \left(\frac{1}{|Q(x_0, \rho)|} \int_{Q(x_0, \rho)} |u| dx \right) \\ &\leq |Q(x_0, \rho)|^{\frac{-1}{p}} \left(\int_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\oint_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx = \frac{1}{|Q(x_0, \rho)|} \int_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx = \frac{1}{2^n \rho^n} \int_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx.$$

Pela definição da norma de Morrey quando $\lambda = n$, temos

$$\rho^{-n} \int_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx \leq \|u\|_{p,n}^p \quad \Rightarrow \quad \int_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx \leq \rho^n \|u\|_{p,n}^p.$$

Substituindo na igualdade anterior, obtemos

$$\oint_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx \leq \frac{1}{2^n \rho^n} \cdot \rho^n \|u\|_{p,n}^p = 2^{-n} \|u\|_{p,n}^p.$$

Tomando a raiz p -ésima,

$$\left(\int_{Q(x_0, \rho)} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq 2^{-n/p} \|u\|_{p,n},$$

e assim, segue que

$$\int_{Q(x_0, \rho)} |u| dx \leq 2^{-n/p} \|u\|_{p,n}$$

e, portanto, passando ao limite quando $\rho \rightarrow 0$

$$|u(x_0)| \leq 2^{-\frac{n}{p}} \|u\|_{p,n} \Rightarrow \|u\|_{\infty} \leq 2^{-n/p} \|u\|_{p,n}$$

o que prova a inclusão oposta. ■

Observação 1.5 Em particular, os espaços $L^{p,n}$ ($p \geq 1$) são todos isomorfos.

Definição 1.4 (Campanato) Denotamos por $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tais que

$$[u]_{p,\lambda}^p = \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^p dx < +\infty, \quad (1.16)$$

onde

$$u_{x_0, \rho} := \int_{\Omega(x_0, \rho)} u dx$$

é a média de u em $\Omega(x_0, \rho)$. Quando o centro estiver explícito, usaremos $u_{\rho} = u_{x_0, \rho}$.

Observação 1.6 Em vez dos cubos $Q(x, \rho)$, poderíamos definir os espaços de Campanato por meio de bolas $B(x, \rho)$, ou, de modo geral, por meio de qualquer família de vizinhanças $I(x, \rho)$. Todos esses espaços são isomorfos, desde que existam duas constantes α e β tais que, para todo $\rho < \text{diam}(\Omega)$, se tenha⁴

$$I(x, \alpha\rho) \subset Q(x, \rho) \subset I(x, \beta\rho). \quad (1.17)$$

De fato, supondo que essas relações sejam satisfeitas, temos para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ que vale

$$u_{x, \rho} - \xi = \int_{\Omega(x, \rho)} u(y) dy - \frac{1}{|\Omega(x, \rho)|} \xi |\Omega(x, \rho)| = \int_{\Omega(x, \rho)} (u(y) - \xi) dy,$$

logo

$$|u_{x, \rho} - \xi|^p = \left| \int_{\Omega(x, \rho)} (u(y) - \xi) dy \right|^p \leq \int_{\Omega(x, \rho)} |u - \xi|^p dy. \quad (1.18)$$

A desigualdade dois é obtida usando Hölder e seguindo os mesmos passos da Proposição 1.2. Ademais, sabemos que

$$|u(y) - u_{x, \rho}|^p \leq 2^p (|u(y) - \xi|^p + |u_{x, \rho} - \xi|^p).$$

⁴É suficiente que essas inclusões sejam válidas para ρ suficientemente pequeno

Integrando sobre $\Omega(x, \rho)$, segue que

$$\int_{\Omega(x, \rho)} |u - u_{x, \rho}|^p dy \leq 2^p \int_{\Omega(x, \rho)} |u - \xi|^p dy + 2^p |\Omega(x, \rho)| |u_{x, \rho} - \xi|^p.$$

Por outro lado, observando (1.18), obtemos

$$|\Omega(x, \rho)| |u_{x, \rho} - \xi|^p \leq \int_{\Omega(x, \rho)} |u - \xi|^p dy.$$

Substituindo na estimativa anterior, chegamos em

$$\int_{\Omega(x, \rho)} |u - u_{x, \rho}|^p dy \leq 2^p \int_{\Omega(x, \rho)} |u - \xi|^p dy + 2^p \int_{\Omega(x, \rho)} |u - \xi|^p dy,$$

isto é,

$$\int_{\Omega(x, \rho)} |u - u_{x, \rho}|^p dy \leq 2^{p+1} \int_{\Omega(x, \rho)} |u - \xi|^p dy.$$

Agora, tomando $\xi = u_{\Omega \cap I_\beta}$ e recordando (1.17), obtemos imediatamente

$$\int_{\Omega(x, \rho)} |u - u_{x, \rho}|^p dy \leq 2^{p+1} \int_{\Omega \cap I(x, \beta \rho)} |u - u_{\Omega \cap I(x, \beta \rho)}|^p dy,$$

observe que multiplicando por $\rho^{-\lambda}$ e usando que $\rho^{-\lambda} = \beta^\lambda (\beta \rho)^{-\lambda}$ temos

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x, \rho)} |u - u_{x, \rho}|^p dy \leq 2^{p+1} \beta^\lambda (\beta \rho)^{-\lambda} \int_{\Omega \cap I(x, \beta \rho)} |u - u_{\Omega \cap I(x, \beta \rho)}|^p dy.$$

Consequentemente,

$$[u]_{p, \lambda, Q}^p \leq 2^p \beta^\lambda [u]_{p, \lambda, I}^p.$$

Segue-se que a quantidade (1.16) pode ser estimada pela quantidade análoga, obtida substituindo os cubos pelas vizinhanças I_ρ . Trocando os papéis dessas duas famílias, obtemos a estimativa oposta e, em conclusão, o isomorfismo dos espaços relativos.

Observação 1.7 A quantidade $[u]_{p, \lambda}$ é um seminorma em $\mathcal{L}^{p, \lambda}$, equivalente a

$$\sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \rho^{-\lambda} \inf_{\xi \in \mathbb{R}^N} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - \xi|^p dx. \quad (1.19)$$

De fato, segue da justificativa da observação acima que

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^p dx \leq 2^{p+1} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - \xi|^p dx, \quad (1.20)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. Tomando primeiro o ínfimo sobre $\xi \in \mathbb{R}^N$ depois o supremo sobre x_0, ρ , segue que

$$[u]_{p, \lambda}^p \leq 2^{p+1} \left(\sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \rho^{-\lambda} \inf_{\xi \in \mathbb{R}^N} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - \xi|^p dx \right)$$

A outra desigualdade é imediata usando

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^N} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - \xi|^p dx \leq \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^p dx.$$

A norma que trabalharemos nos espaços de Campanato é dada por

$$|||u|||_{p,\lambda} = ||u||_p + [u]_{p,\lambda}$$

a qual $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach. Além disso, a imersão (1.15) permanece válida para os espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Observação 1.8 *Tomando $\xi = 0$ em (1.20), concluímos que a imersão de $L^{p,\lambda}$ em $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ é contínua.*

Com efeito, tomando $\xi = 0$, dado $u \in L^{p,\lambda}$ temos

$$\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u - u_{x_0,\rho}|^p dx \leq 2^{p+1} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p dx \Rightarrow [u]_{p,\lambda}^p \leq c \|u\|_{p,\lambda}^p.$$

Por outro lado, tomando ρ de forma que $\Omega \subset Q(x_0, \rho)$, obtemos que $\|u\|_p^p \leq c \|u\|_{p,\lambda}^p$. Assim, obtemos a imersão garantida por

$$|||u|||_{p,\lambda}^p \leq C \|u\|_{p,\lambda}^p.$$

Definição 1.5 *Dizemos que Ω não possui cúspides externas se existe uma constante $A > 0$ tal que, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo ρ , $0 < \rho \leq \text{diam } \Omega$, temos*

$$|\Omega(x_0, \rho)| \geq A |Q_\rho|.$$

Um conjunto aberto com fronteira Lipschitz-contínua não possui cúspides externas nem internas. Se Ω não possui cúspides externas, a norma

$$\left(\sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} |\Omega(x_0, \rho)|^{-\frac{\lambda}{n}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é equivalente a (1.14). Com efeito, como Ω não possui cúspides externas então

$$A 2^n \rho^n = A |Q_\rho| \leq |\Omega(x_0, \rho)| \leq |Q_\rho| = 2^n \rho^n,$$

assim, elevando ambos os lados a $-\lambda/n$, temos

$$c_1 \rho^{-\lambda} \leq |\Omega(x_0, \rho)|^{-\lambda/n} \leq c_2 \rho^{-\lambda}.$$

Tomando o supremo em cada uma das desigualdades acima obtemos o resultado.

Observação 1.9 *Também é possível substituir $\rho^{-\lambda}$ por $|\Omega(x_0, \rho)|^{-\frac{\lambda}{n}}$ em (1.16) e (1.19), obtendo seminormas equivalentes.*

Lema 1.2 *Suponha que Ω não possui cúspides externas, e seja u uma função em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Se $\tau = \frac{\lambda-n}{np}$, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho, R \in \mathbb{R}$, com $0 < \rho < R < \text{diam } \Omega$, temos*

$$|u_{x_0,R} - u_{x_0,\rho}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega(x_0, \rho)|^\tau \quad \text{se } \tau < 0, \quad (1.21)$$

e

$$|u_{x_0,R} - u_{x_0,\rho}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega(x_0, R)|^\tau \quad \text{se } \tau > 0. \quad (1.22)$$

Demonstração. Sejam $\rho \leq r < s \leq R$. Temos

$$u_r - u_s = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} u \, dx - u_s.$$

Observando que

$$\frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} u_s \, dx = u_s \cdot \frac{1}{|\Omega_r|} \cdot |\Omega_r| = u_s,$$

logo

$$u_r - u_s = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} u \, dx - \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} u_s \, dx = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} (u - u_s) \, dx.$$

Consequentemente, juntando esta informação e utilizando Hölder, obtemos

$$|u_s - u_r| \leq \int_{\Omega_r} |u - u_s| \, dx \leq \left(\int_{\Omega_r} |u - u_s|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

e daí, sabendo que $\Omega_r \subset \Omega_s$, temos

$$\begin{aligned} |u_s - u_r| &\leq |\Omega_r|^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_s} |u - u_s|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\Omega_r|^{-\frac{1}{p}} \left(|\Omega_s|^{\lambda/n} [u]_{p,\lambda}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Observação 1.9}) \\ &\leq |\Omega_s|^{\frac{\lambda}{pn}} |\Omega_r|^{-\frac{1}{p}} [u]_{p,\lambda}. \end{aligned}$$

Pela Definição 1.5, existe $A > 0$ tal que, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo ρ com $0 < \rho \leq \text{diam } \Omega$, temos

$$|\Omega(x_0, \rho)| \geq A|Q_\rho|, \quad (1.23)$$

onde $|Q_\rho| = (2\rho)^n$. Como $\rho \leq r < s \leq R \leq \text{diam } \Omega$, obtemos as seguintes estimativas

$$A(2r)^n \leq |\Omega_r| \leq (2r)^n \quad \text{e} \quad A(2s)^n \leq |\Omega_s| \leq (2s)^n.$$

Logo,

$$|\Omega_s| \leq (2s)^n = \left(\frac{s}{r}\right)^n (2r)^n \leq \left(\frac{s}{r}\right)^n \frac{|\Omega_r|}{A}.$$

Reciprocamente

$$|\Omega_s| \geq A(2s)^n = A\left(\frac{s}{r}\right)^n (2r)^n \geq A\left(\frac{s}{r}\right)^n |\Omega_r|.$$

Pelas desigualdades anteriores temos

$$A\left(\frac{s}{r}\right)^n |\Omega_r| \leq |\Omega_s| \leq A^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)^n |\Omega_r|, \quad (1.24)$$

e, portanto, chegamos que

$$|u_s - u_r| \leq c[u]_{p,\lambda} \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{\lambda}{p}} |\Omega_r|^\tau. \quad (1.25)$$

Escolha agora $r_i = R2^{-i}$ e $\Omega_i = \Omega_{r_i}$. Escrevendo (1.25) com $r = r_i$ e $s = r_{i-1}$, isto é,

$$\frac{s}{r} = \frac{r_{i-1}}{r_i} = \frac{R/2^{i-1}}{R/2^i} = 2,$$

obtemos

$$|u_{r_{i-1}} - u_{r_i}| \leq c[u]_{p,\lambda} \cdot 2^{\lambda/p} \cdot |\Omega_{r_i}|^\tau.$$

Denotando $c := c \cdot 2^{\lambda/p}$, temos

$$|u_{r_{i-1}} - u_{r_i}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_i|^\tau, \quad \text{onde } \Omega_i = \Omega_{r_i}. \quad (1.26)$$

Agora, observe que temos uma soma telescópica em

$$u_R - u_{r_k} = (u_{r_0} - u_{r_1}) + (u_{r_1} - u_{r_2}) + \cdots + (u_{r_{k-1}} - u_{r_k})$$

Usando a desigualdade triangular

$$|u_R - u_{r_k}| \leq \sum_{i=1}^k |u_{r_{i-1}} - u_{r_i}|.$$

Substituindo em (1.26) obtemos

$$|u_R - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} \sum_{i=1}^k |\Omega_i|^\tau. \quad (1.27)$$

Agora, usamos (1.24) com $s = r_i$ e $r = r_0 = R$

$$A\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^n |\Omega_0| \leq |\Omega_i| \leq A^{-1}\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^n |\Omega_0|.$$

Como $\frac{r_i}{r_0} = \frac{R2^{-i}}{R} = 2^{-i}$, temos

$$A \cdot 2^{-ni} |\Omega_0| \leq |\Omega_i| \leq A^{-1} \cdot 2^{-ni} |\Omega_0|. \quad (1.28)$$

Usando novamente (1.24) com $s = r_k$ e $r = r_i$ chegamos em

$$|\Omega_k| \leq A^{-1} (2^{i-k})^n |\Omega_i|,$$

o que nos garante

$$A2^{n(k-i)}|\Omega_k| \leq |\Omega_i|. \quad (1.29)$$

De (1.28) e (1.29), segue que

$$A^{-1}2^{-ni}|\Omega_0| \geq |\Omega_i| \geq A2^{n(k-i)}|\Omega_k|,$$

e portanto, se $\tau < 0$,

$$|u_R - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_k|^\tau.$$

Por outro lado, se $\tau > 0$

$$|u_R - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_R|^\tau.$$

De fato, por (1.29) temos

$$|\Omega_i| \geq A2^{n(k-i)}|\Omega_k|.$$

Se $\tau < 0$, obtemos

$$|\Omega_i|^\tau \leq [A2^{n(k-i)}|\Omega_k|]^\tau = A^\tau 2^{n\tau(k-i)} |\Omega_k|^\tau$$

daí,

$$\sum_{i=1}^k |\Omega_i|^\tau \leq A^\tau |\Omega_k|^\tau \sum_{i=1}^k 2^{n\tau(k-i)}.$$

Recordando que,

$$|u_R - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} \sum_{i=1}^k |\Omega_i|^\tau,$$

obtemos

$$|u_R - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_k|^\tau.$$

O caso para $\tau > 0$ é análogo. Finalmente, escolhendo k de modo que $r_k \leq \rho < r_{k-1}$, obtemos a partir de (1.25) tomando $r = r_k$ e $s = \rho$, a estimativa

$$|u_\rho - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_k|^\tau,$$

se $\tau < 0$, e

$$|u_\rho - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_\rho|^\tau,$$

se $\tau > 0$. De fato, façamos para o caso $\tau < 0$, o outro caso é análogo. Usando a desigualdade triangular e as desigualdades obtidas abaixo

$$|u_R - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_k|^\tau \quad \text{e} \quad |u_\rho - u_{r_k}| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_k|^\tau,$$

desta forma, obtemos a partir da soma

$$|u_R - u_\rho| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_k|^\tau.$$

Sendo $r_k \leq \rho < r_{k-1} = 2r_k$, temos $\frac{\rho}{r_k} < 2$. Aplicando (1.24) com $s = \rho$ e $r = r_k$

$$|\Omega_\rho| \leq A^{-1} \left(\frac{\rho}{r_k} \right)^n |\Omega_k| \leq A^{-1} 2^n |\Omega_k| \Rightarrow |\Omega_\rho| (A 2^{-n}) \leq |\Omega_k|$$

Como $\tau < 0$, então

$$|\Omega_k|^\tau \leq (A 2^{-n})^\tau |\Omega_\rho|^\tau.$$

Portanto

$$|u_R - u_\rho| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_\rho|^\tau,$$

o que mostra o resultado (1.21). Analogamente, é possível concluir a outra desigualdade. ■

Proposição 1.3 *Se Ω é um conjunto aberto limitado sem cúspides externas, e se $0 \leq \lambda < n$, então $L^{p,\lambda}(\Omega)$ é isomorfo a $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.*

Demonstração. É suficiente provar que $\|u\|_{p,\lambda} \leq c \| |u| \|_{p,\lambda}$, pois já sabemos que a imersão de $L^{p,\lambda}$ em $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ é contínua. Para $\rho < \text{diam}(\Omega)$ temos

$$|u| \leq |u - u_\rho| + |u_\rho|,$$

desta forma,

$$\int_{\Omega_\rho} |u|^p dx \leq \int_{\Omega_\rho} (|u - u_\rho| + |u|)^p dx.$$

Usando a desigualdade de Minkowski, segue que

$$\left(\int_{\Omega_\rho} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega_\rho} |u - u_\rho|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_\rho} |u_\rho|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $|u_\rho|$ é constante, conclui-se que

$$\left(\int_{\Omega_\rho} |u_\rho|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\Omega_\rho|^{\frac{1}{p}} |u_\rho|,$$

consequentemente, multiplicando a desigualdade anterior por $|\Omega_\rho|^{-\frac{\lambda}{np}}$ obtemos

$$\left(|\Omega_\rho|^{-\frac{\lambda}{n}} \int_{\Omega_\rho} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(|\Omega_\rho|^{-\frac{\lambda}{n}} \int_{\Omega_\rho} |u - u_\rho|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + |\Omega_\rho|^{-\tau} |u_\rho|, \quad (1.30)$$

onde $\tau = \frac{\lambda-n}{np}$. Como $\tau < 0$, tomando $R = \text{diam}(\Omega)$ obtemos do lema anterior

$$|u_\rho| - |u_R| \leq |u_\rho - u_R| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega_\rho|^\tau.$$

Logo,

$$|\Omega_\rho|^{-\tau} |u_\rho| \leq |\Omega_\rho|^{-\tau} |u_R| + c[u]_{p,\lambda}.$$

Por outro lado, como $|u_R| \leq c\|u\|_p$ (basta usar Hölder), temos

$$|\Omega_\rho|^{-\tau} |u_\rho| \leq |\Omega_\rho|^{-\tau} |u_R| + c[u]_{p,\lambda} \leq c(\|u\|_p + [u]_{p,\lambda}).$$

Assim, usando (1.30), a desigualdade acima e tomando o supremo, obtemos

$$\|u\|_{p,\lambda} \leq [u]_{p,\lambda} + c(\|u\|_p + [u]_{p,\lambda}) \leq c(\|u\|_p + [u]_{p,\lambda}) = c\|u\|_{p,\lambda}.$$

e a proposição segue imediatamente. ■

O isomorfismo entre $L^{p,\lambda}$ e $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ não se verifica se $\lambda \geq n$. Isto é evidente quando $\lambda > n$, pois neste caso a única função em $L^{p,\lambda}$ é a função nula. De fato, dado $x_0 \in \Omega$ podemos tomar um cubo Q_ρ tal que esteja contido em Ω , daí, usando o fato que Ω não tem cúspides externas, temos $|\Omega_\rho| \geq A|Q_\rho|$ e, assim,

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega_\rho} |u|^p dx \leq \|u\|_{p,\lambda}^p \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega_\rho} |u|^p dx \leq \frac{\rho^\lambda}{A|Q_\rho|} \|u\|_{p,\lambda}^p = \rho^{\lambda-n} A^{-1} 2^{-n} \|u\|_{p,\lambda}^p,$$

tomando o limite quando $\rho \rightarrow 0$ obtemos pelo Teorema 1.7

$$|u(x_0)|^p = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u|^p dy \leq 0.$$

Como x_0 é arbitrário, temos que $|u(x)| = 0$ q.t.p. em Ω .

Por outro lado, $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ contém todas as funções contínuas no sentido de Hölder em $\bar{\Omega}$, com expoente $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$. Com efeito, seja $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, isto é,

$$|u(x) - u(y)| \leq [u]_{0,\alpha} |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega,$$

onde $[u]_{0,\alpha}$ é a seminorma de Hölder. Para $x, y \in \Omega(x_0, \rho)$ temos $|x - y| \leq 2\rho$, logo

$$|u(x) - u(y)| \leq [u]_{0,\alpha} (2\rho)^\alpha.$$

Em particular, para todo $x \in \Omega(x_0, \rho)$,

$$|u(x) - u_{x_0,\rho}| \leq \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - u(y)| dy \leq 2^\alpha [u]_{0,\alpha} \rho^\alpha,$$

elevando à potência p e integrando em $\Omega(x_0, \rho)$, temos

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^p dx \leq (2^\alpha [u]_{0, \alpha})^p \rho^{\alpha p} |\Omega(x_0, \rho)|,$$

observando que, $|\Omega(x_0, \rho)| \leq 2^n \rho^n$, obtemos

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^p dx \leq C_1 [u]_{0, \alpha}^p \rho^{n + \alpha p}.$$

Agora, multiplicando por $\rho^{-\lambda}$

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^p dx \leq C_1 [u]_{0, \alpha}^p \rho^{n + \alpha p - \lambda}.$$

Daí, tomando o supremo sobre $x_0 \in \Omega$ e $\rho > 0$, com $\lambda = n + \alpha p$, a expressão será

$$[u]_{p, \lambda}^p = \sup_{x_0, \rho} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^p dx \leq C_1 [u]_{0, \alpha}^p,$$

logo

$$[u]_{p, \lambda} \leq c [u]_{0, \alpha}.$$

Como a norma em $C^{0, \alpha}$ é dada por

$$\|u\|_{0, \alpha} = \|u\|_\infty + [u]_{0, \alpha},$$

então segue que

$$|||u|||_{p, \lambda} \leq c \|u\|_{0, \alpha}$$

Quanto ao caso $\lambda = n$, observamos que a função $-\log x$ pertence a $\mathcal{L}^{1,1}((0, 1))$ mas não a $L^{1,1} = L^\infty((0, 1))$.

O interesse dos espaços de Campanato reside principalmente no seguinte resultado.

Teorema 1.9 *Seja Ω um conjunto aberto limitado sem cúspides externas e seja $n < \lambda \leq n + p$. O espaço $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ é isomorfo a $C^{0, \alpha}(\overline{\Omega})$, com $\alpha = \frac{\lambda - n}{p}$.*

Demonstração. Vimos anteriormente que $C^{0, \alpha} \subset \mathcal{L}^{p, \lambda}$. Para mostrar a inclusão oposta, comecemos da desigualdade (1.22), da qual decorre que o limite

$$\lim_{R \rightarrow 0} u_{x, R} =: v(x)$$

existe uniformemente em $x \in \Omega$. De fato, da desigualdade (1.22) para $x \in \Omega$ fixo

$$|u_{x, R} - u_{x, \rho}| \leq c [u]_{p, \lambda} |\Omega(x, R)|^\tau \leq c [u]_{p, \lambda} R^{\tau n}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ tomemos R_0 tal que $R_0^{\tau n} c[u]_{p,\lambda} < \epsilon$. Assim,

$$|u_{x,R_0} - u_{x,\rho}| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para} \quad 0 < \rho \leq R_0.$$

Desta forma,

$$|u_{x,\rho_1} - u_{x,\rho_2}| \leq |u_{x,R_0} - u_{x,\rho_2}| + |u_{x,R_0} - u_{x,\rho_1}| < \epsilon,$$

onde $0 < \rho_1 < \rho_2 < R_0$. Assim, $(u_{x,R})$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^N$ quando $R \rightarrow 0$. Desta forma, existe o limite. Ademais, o lado direito da desigualdade anterior não depende de x então

$$\sup_{x \in \Omega} |u_{x,R} - u_{x,\rho}| \leq c[u]_{p,\lambda} R^{\tau n}$$

portanto, o limite é uniforme em $x \in \Omega$.

A função $x \mapsto u_{x,R}$ sendo contínua, veja Observação A.2, temos que $v(x)$ também é contínua, e o mesmo vale para $u(x)$, que pelo Teorema de Lebesgue 1.7 coincide quase sempre com v .

Passando ao limite em (1.22) para $\rho \rightarrow 0$, e escrevendo $2R$ no lugar de R , obtemos

$$|u_{x,2R} - u(x)| \leq c[u]_{p,\lambda} |\Omega(x, 2R)|^\tau \leq c[u]_{p,\lambda} R^{n\tau} \quad (1.31)$$

onde $n\tau = \alpha$. Sejam agora $x, y \in \Omega$ e seja $R = |x - y|$, daí

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{x,2R}| + |u_{x,2R} - u_{y,2R}| + |u_{y,2R} - u(y)|.$$

Por outro lado,

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq |u(z) - u_{x,2R}| + |u(z) - u_{y,2R}|,$$

e, integrando em $z \in (\Omega(x, 2R) \cap \Omega(y, 2R)) \supset (\Omega(x, R) \cup \Omega(y, R))$, segue desta relação de inclusão as desigualdades

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq |\Omega(x, R)|^{-1} \int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x,2R}| dz + |\Omega(y, R)|^{-1} \int_{\Omega(y, 2R)} |u(z) - u_{y,2R}| dz.$$

Agora, analisemos uma das integrais acima, a outra é análoga. Note que

$$\int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x,2R}| dz \leq \left(\int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x,2R}|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} |\Omega(x, 2R)|^{\frac{1}{p'}}$$

consequentemente, multiplicando por $|\Omega(x, R)|^{-1}$ temos

$$\frac{1}{|\Omega(x, R)|} \int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x,2R}| dz \leq |\Omega(x, 2R)|^{1-\frac{1}{p}} \frac{1}{|\Omega(x, R)|} \left(\int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x,2R}|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pela definição de seminorma de Campanato

$$\int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x, 2R}|^p dz \leq (2R)^\lambda [u]_{p, \lambda}^p,$$

logo

$$\frac{1}{|\Omega(x, R)|} \int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x, 2R}| dz \leq \frac{1}{|\Omega(x, R)|} |\Omega(x, 2R)|^{1-\frac{1}{p}} ((2R)^\lambda [u]_{p, \lambda}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Pela desigualdade (1.24), tomando $r = R$ e $s = 2R$, obtemos

$$|\Omega(x, 2R)|^{1-\frac{1}{p}} \leq C |\Omega(x, R)|^{1-\frac{1}{p}},$$

o que implica

$$\frac{1}{|\Omega(x, R)|} \int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x, 2R}| dz \leq C R^{\frac{\lambda}{p}} [u]_{p, \lambda} |\Omega(x, R)|^{-\frac{1}{p}}.$$

Desta forma,

$$\frac{1}{|\Omega(x, R)|} \int_{\Omega(x, 2R)} |u(z) - u_{x, 2R}| dz \leq C [u]_{p, \lambda} R^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Portanto,

$$|u_{x, 2R} - u_{y, 2R}| \leq C [u]_{p, \lambda} R^\alpha,$$

em conjunto com (1.31) e lembrando que $R = |x - y|$, fica claro que

$$|u(x) - u(y)| \leq C [u]_{p, \lambda} R^\alpha = C [u]_{p, \lambda} |x - y|^\alpha \quad \Rightarrow \quad [u]_{0, \alpha} \leq C [u]_{p, \lambda}.$$

Finalmente, tomando $2R = \text{diam } \Omega$ em (1.31), obtemos

$$|u(x)| \leq |u_{x, 2R}| + |u(x) - u_{x, 2R}| \leq A \|u\|_p + B [u]_{p, \lambda} \leq c \|u\|_{p, \lambda},$$

daí,

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{p, \lambda}.$$

Portanto, concluímos

$$\|u\|_{C^{0, \alpha}} = \|u\|_\infty + [u]_{0, \alpha} \leq c \|u\|_{p, \lambda},$$

o que demonstra o resultado. ■

Concluimos esta seção com uma prova do isomorfismo dos espaços de Campanato (e, portanto, de Morrey) com respeito a difeomorfismos do aberto Ω .

Observação 1.10 Lembramos que, se $g : A \rightarrow B$ é um homeomorfismo entre dois abertos A e B , e se $\mathcal{M}(A)$ e $\mathcal{M}(B)$ são os espaços de funções mensuráveis respectivamente em A e B , a aplicação induzida g_* de $\mathcal{M}(B)$ em $\mathcal{M}(A)$ é definida por $g_*u = u \circ g$.

Proposição 1.4 Sejam $\Omega, \Lambda \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos limitados, ambos sem cúspides externas, e seja $g : \Lambda_1 \rightarrow \Omega_1$ um homeomorfismo bilipschitz, onde $\bar{\Lambda} \subset \Lambda_1$ e $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$, e cuja restrição satisfaz $g(\Lambda) = \Omega$. Considere a aplicação

$$g_* : \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Lambda, \mathbb{R}^N),$$

definida por $g_*u = u \circ g$. Então g_* é um isomorfismo de espaços de Banach.

Demonstração. Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, temos $U := u \circ g : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$. Devemos provar que $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ se, e somente se, $U \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Lambda)$. A priori, observe que $g_* : \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Lambda)$ é bijetora. Sejam $u, v \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, então

$$g_*u = g_*v \quad \Rightarrow \quad u \circ g = v \circ g \quad \Rightarrow \quad u = v.$$

Ademais, dado $U \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Lambda)$ defina $u = U \circ g^{-1}$, logo $g_*u = U$ e, portanto, g_* é uma bijeção.

Agora, como g é Lipschitz-contínua juntamente com sua inversa, existirá uma constante $L > 0$ tal que, para todo $x, x_0 \in \Lambda_1$,

$$L^{-1}|g(x) - g(x_0)| \leq |x - x_0| \leq L|g(x) - g(x_0)|,$$

daí, fazendo $y_0 = g(x_0)$ e tomando

$$R < R_0 := \min\{\text{dist}(\Omega, \partial\Omega_1), \text{dist}(\Lambda, \partial\Lambda_1)\},$$

temos

$$g(\Lambda(x_0, R)) \subset \Omega(y_0, LR) \quad \text{e} \quad g^{-1}(\Omega(y_0, R)) \subset \Lambda(x_0, LR).$$

Com efeito, seja $y \in g(\Lambda(x_0, R))$, então existe $x \in \Lambda(x_0, R)$ tal que $y = g(x)$. Agora, note que

$$|y - y_0| = |g(x) - g(x_0)| \leq L|x - x_0| \leq LR,$$

logo, $y \in \Omega(y_0, LR)$. O outro caso é análogo. Agora, trabalhem com $g^{-1} : \Omega \rightarrow \Lambda$, e note que $u(y) = U(g^{-1}(y))$. Se $R < R_0$, obtemos através da mudança de variável $y = g(x)$, isto é, $x = g^{-1}(y)$, e com $|J|$ sendo a norma do Jacobiano que é limitada pois g^{-1} é lipschitz, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\Omega(y_0, R)} |u(y) - \xi|^p dy = \int_{g^{-1}(\Omega(y_0, R))} |U(x) - \xi|^p |J| dx \leq c \int_{\Lambda(x_0, LR)} |U(x) - \xi|^p dx.$$

Assim, tomando o ínfimo sobre $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^N} \int_{\Omega(y_0, R)} |u - \xi|^p dy \leq C \inf_{\xi \in \mathbb{R}^N} \int_{\Lambda(x_0, LR)} |U - \xi|^p dx.$$

Usando a equivalência das seminormas dada em (1.19) tanto Λ quanto em Ω obtemos

$$[u]_{p, \lambda}^p \leq c[U]_{p, \lambda}^p.$$

Não é difícil ver que $\|u\|_{p, \Omega} \leq \|U\|_{p, \Lambda}$, basta usar mudança de variável e o fato do Jacobiano ser limitado. Logo,

$$|||u|||_{p, \lambda} \leq c|||U|||_{p, \lambda}.$$

Trocando g e g^{-1} obtemos a desigualdade oposta, e o teorema está demonstrado. ■

1.3 Os Lema de John e Nirenberg

Nesta seção, reunimos dois resultados relativos a estimativas para as medidas dos conjuntos de nível de uma função u , sujeita a condições adequadas. O primeiro destes está conectado com o espaço de Campanato $\mathcal{L}^{1, n}$, e será útil na demonstração do isomorfismo dos espaços $\mathcal{L}^{p, n}$.

A demonstração faz uso do seguinte teorema, que também é interessante por si só e será útil em outras ocasiões.

Teorema 1.10 (*Calderón–Zygmund*) *Seja Q_0 um cubo em $\mathbb{R}^n$, e seja $g(x)$ uma função positiva em $L^1(Q_0)$. Seja L um número real tal que*

$$\oint_{Q_0} g dx := \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} g dx \leq L.$$

Existe uma sequência (possivelmente um número finito) de cubos dois a dois disjuntos $Q_i \subset Q_0$, com faces paralelas às de Q_0 , tal que

$$(i) \quad L < \oint_{Q_i} g dx \leq 2^n L.$$

$$(ii) \quad g \leq L \text{ q.t.p. em } Q_0 - \bigcup Q_i.$$

Demonstração. Chamamos de *final* um cubo Q para o qual $\oint_Q g dx > L$. Seja Q_0 (que por hipótese não é final) subdividido em 2^n cubos iguais, cada um com lado igual à metade do lado de Q_0 . Se algum desses cubos não for final, subdividimo-lo novamente

em 2^n cubos iguais, e procedemos assim sucessivamente. Seja $\{Q_i\}_{i=1,2,\dots}$ a família dos cubos finais. Por definição, temos $\int_{Q_i} g \, dx > L$, o que nos garante uma desigualdade do item (i). Por outro lado, cada Q_i deve ter sido obtido por subdivisão de um cubo W (de lado duplo) que não é final. Assim,

$$\int_W g \, dx \leq L.$$

Considere $2R$ sendo o lado de W temos que $|W| = 2^n R^n$ e $|Q_i| = R^n$. Logo,

$$\int_{Q_i} g \, dx \leq \int_W g \, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^n R^n} \int_{Q_i} g \, dx \leq \frac{1}{2^n R^n} \int_W g \, dx,$$

ou seja,

$$\int_{Q_i} g \, dx \leq 2^n \int_W g \, dx \leq 2^n L,$$

isto prova (i). Para demonstrar (ii), observamos que cada ponto $x \in Q_0 \setminus \bigcup_i Q_i$ é a interseção de uma sequência decrescente de cubos W_s , nenhum dos quais é final. Segue-se que para cada s vale

$$\int_{W_s} g \, dx \leq L,$$

de modo que, pelo Teorema de Lebesgue 1.7, passando ao limite quando $s \rightarrow \infty$, obtemos $g(x) \leq L$ para quase todo $x \in Q_0 \setminus \bigcup_i Q_i$. ■

Observação 1.11 *Suponha que, não encontremos nenhum cubo que seja final. Então, dado $x \in Q_0$ e cubos $Q_k \subset Q_0$ contendo x tais que os lados de Q_k diminuem quando $k \rightarrow 0$, temos por 1.7*

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \int_{Q_k} g \, dy \leq L.$$

O que nos diz que $g \leq L$ q.t.p. em Q_0 , isso satisfaz (ii). O caso (i) é satisfeito por vacuidade.

Seja agora $u : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função somável (integrável) em Q_0 . Denote por Q um cubo genérico, com lados paralelos aos de Q_0 , e considere A_{Q_0} uma família desses cubos. Definimos

$$[u]_{*,Q_0} = \sup_{Q \in A_{Q_0}} \int_Q |u(x) - u_Q| \, dx, \quad (1.32)$$

onde $u_Q = \int_Q u \, dx$. Quando não houver ambiguidade, denotaremos $[u]_{*,Q_0}$ por $[u]_*$ para simplificar a notação. Finalmente, denotamos por $BMO(Q_0) = BMO(Q_0, \mathbb{R}^N)$ ⁵ o espaço das funções $u \in L^1(Q_0, \mathbb{R}^N)$ para as quais a quantidade $[u]_*$ é finita.

⁵Das iniciais de *Bounded Mean Oscillation*. Às vezes, o espaço BMO é chamado de $\mathcal{E}^0$.

Proposição 1.5 *O espaço BMO é isomorfo a $\mathcal{L}^{1,n}$.*

Demonstração. Temos que $[u]_* \leq [u]_{1,n}$. De fato, lembrando que

$$[u]_{1,n} = \sup_{\substack{x_0 \in Q_0 \\ \rho > 0}} \rho^{-n} \int_{Q_0(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^1 dx.$$

Note que cada $Q \subset Q_0$ pode ser visto como $Q(x_0, \rho)$, cubo de centro x_0 e raio 2ρ , para algum $x_0 \in Q_0$ e $\rho > 0$. Assim,

$$|Q|^{-1} \int_Q |u(x) - u_Q| dx = (2\rho)^{-n} \int_{Q(x_0, \rho)} |u(x) - u_{Q(x_0, \rho)}| dx \leq \rho^{-n} \int_{Q(x_0, \rho)} |u(x) - u_{Q(x_0, \rho)}| dx.$$

Desta forma,

$$[u]_{*, Q_0} = \sup_Q |Q|^{-1} \int_Q |u(x) - u_Q| dx \leq \sup_{\substack{x_0 \in Q_0 \\ \rho > 0}} \rho^{-n} \int_{Q(x_0, \rho)} |u - u_{x_0, \rho}|^1 dx = [u]_{1,n}.$$

Por outro lado, se Z é um cubo arbitrário de $\mathbb{R}^n$, com centro em Q_0 , existe um cubo $Q \subset Q_0$, com lados paralelos aos de Q_0 , tal que $P := Z \cap Q_0 \subset Q$ e $|Q| \leq c|P|$, onde c depende apenas de n . Segue que

$$\int_P |u - u_P| dx \leq 2 \int_P |u - u_Q| dx \leq 2 \frac{|Q|}{|P|} \int_Q |u - u_Q| dx \leq c \int_Q |u - u_Q| dx,$$

Com efeito, utilizando a desigualdade triangular

$$|u(x) - u_P| \leq |u(x) - u_Q| + |u_Q - u_P|,$$

daí, tomando a média em P obtemos

$$\int_P |u - u_P| dx \leq \int_P |u - u_Q| dx + |u_Q - u_P|.$$

Por outro lado, temos a seguinte estimativa

$$|u_Q - u_P| = \left| \int_P (u_Q - u) dx \right| \leq \int_P |u - u_Q| dx,$$

logo, obtemos a primeira desigualdade

$$\int_P |u - u_P| dx \leq 2 \int_P |u - u_Q| dx.$$

Agora, para a segunda desigualdade, pela definição de integral média

$$\int_P |u - u_Q| dx = \frac{1}{|P|} \int_P |u - u_Q| dx$$

como $P \subset Q$,

$$\int_P |u - u_Q| dx \leq \int_Q |u - u_Q| dx,$$

logo,

$$\int_P |u - u_Q| dx \leq \frac{1}{|P|} \int_Q |u - u_Q| dx = \frac{|Q|}{|P|} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q |u - u_Q| dx = \frac{|Q|}{|P|} \int_Q |u - u_Q| dx.$$

Por fim, utilizando $|Q| \leq c|P|$ chegamos nas desigualdades desejadas. Portanto, tomando o supremo sobre os cubos $Q \subset Q_0$

$$\int_P |u - u_P| dx \leq c[u]_* \quad \Rightarrow \quad \int_P |u - u_P| dx \leq c|P|[u]_* = c[u]_*.$$

Por outro lado, olhando $P = Z \cap Q_0 = Z(x_0, \rho) \cap Q_0$ com $x_0 \in Q_0$, e tomando o supremo sobre x_0 e ρ obtemos

$$[u]_{1,n} \leq c[u]_*$$

■

Para $v \in \text{BMO}(Q)$ e $\sigma > 0$, definimos

$$\Upsilon_{\sigma,Q}(v) := \{x \in Q : |v(x) - v_Q| > \sigma\}.$$

Teorema 1.11 (*John-Nirenberg I* [13]) *Existem duas constantes positivas A e α tais que, para toda $u \in \text{BMO}(Q_0, \mathbb{R}^N)$ e todo $\sigma > 0$, tem-se*

$$|\Upsilon_{\sigma,Q_0}(u)| \leq A \exp\left(\frac{-\alpha\sigma}{[u]_*}\right) |Q_0|. \quad (1.33)$$

Demonstração. Escrevendo $u/[u]_*$ no lugar de u , e $\sigma/[u]_*$ no lugar de σ , podemos supor $[u]_* = 1$. Podemos também supor que $u_{Q_0} = 0$. Para qualquer cubo Q e para $\sigma > 0$, definimos

$$\varphi(\sigma) = \sup \left\{ \frac{|\Upsilon_{\sigma,Q}(u)|}{|Q|} : [u]_{*,Q} = 1, u_Q = 0 \right\}.$$

A função φ não depende do cubo Q , já que tanto a razão

$$|\Upsilon_{\sigma}|/|Q|,$$

quanto a quantidade $[u]_{*,Q}$ são invariantes por homotetias. Além disso,

$$\varphi(\sigma) = \sup_{[u]_{*,Q} \leq 1} \frac{|\Upsilon_{\sigma,Q}(u)|}{|Q|}.$$

Se $[v]_{*,Q} \leq 1$, temos

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |v - v_Q| dx \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma} \int_Q |v - v_Q| dx \leq \frac{|Q|}{\sigma}$$

Por outro lado, por (1.4), concluimos

$$|\Upsilon_{\sigma,Q}(v)| \leq \frac{1}{\sigma} \int_Q |v - v_Q| dx \leq \frac{|Q|}{\sigma},$$

e portanto $\varphi(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma}$. Vamos provar que para $s > 1$ e $\sigma > 2^n s$ temos

$$\varphi(\sigma) \leq \frac{1}{s} \varphi(\sigma - 2^n s).$$

Para isso, seja w uma função em $\text{BMO}(Q_0)$, com $[w]_{*,Q_0} = 1$ e valor médio zero, e apliquemos o teorema de Calderón–Zygmund (Teorema 1.10) à função $|w|$. Temos

$$\oint_{Q_0} |w| dx \leq [w]_* = 1 < s,$$

e portanto existem cubos $Q_k \subset Q_0$, dois a dois disjuntos, tais que

$$s \leq \oint_{Q_k} |w| dx < 2^n s$$

e

$$|w| \leq s, \quad \text{em } Q_0 - \bigcup_k Q_k.$$

Em particular, da primeira desigualdade segue que

$$\sum_k |Q_k| \leq \frac{1}{s} \sum_k \int_{Q_k} |w| dx = \frac{1}{s} \int_{\bigcup_k Q_k} |w| dx \leq \frac{1}{s} \int_{Q_0} |w| dx.$$

Denotando por w_k a média de w em Q_k , temos $|w_k| < 2^n s$, e portanto, se $x \in Q_k$ e $|w(x)| > \sigma$, deduzimos $|w(x) - w_k| \geq |w(x)| - |w_k| > \sigma - 2^n s$, ou seja,

$$Q_k \cap \Upsilon_{\sigma,Q_0} \subset \Upsilon_{\sigma-2^n s, Q_k}.$$

Como $|w| \leq s < \sigma$ em $Q_0 - \bigcup_k Q_k$, então $\Upsilon_{\sigma,Q_0} \subset \bigcup_k Q_k$, assim

$$\Upsilon_{\sigma,Q_0} \subset \bigcup_k \Upsilon_{\sigma-2^n s, Q_k},$$

consequentemente,

$$|\Upsilon_{\sigma,Q_0}| \leq \sum_k |\Upsilon_{\sigma-2^n s, Q_k}|.$$

Por outro lado, $[w]_{*,Q_k} \leq [w]_{*,Q_0} = 1$, e portanto, pela definição de φ

$$\frac{|\Upsilon_{\sigma-2^n s, Q_k}|}{|Q_k|} \leq \varphi(\sigma - 2^n s).$$

Segue que

$$|\Upsilon_{\sigma, Q_0}(w)| \leq \varphi(\sigma - 2^n s) \sum_k |Q_k| \leq \frac{1}{s} \varphi(\sigma - 2^n s) \int_{Q_0} |w| dx \leq \frac{|Q_0|}{s} \varphi(\sigma - 2^n s),$$

deste modo

$$\frac{|\Upsilon_{\sigma, Q_0}(w)|}{|Q_0|} \leq \frac{1}{s} \varphi(\sigma - 2^n s),$$

e portanto

$$\varphi(\sigma) \leq \frac{1}{s} \varphi(\sigma - 2^n s) \quad (1.34)$$

para todo $s > 1$ e $\sigma > 2^n s$. Escolhamos agora $s = e$ e definamos $\alpha = 2^{-n} e^{-1}$. Se $0 < \sigma < 2^n e$ temos que $e^{1-\alpha\sigma} \geq 1$, assim

$$|\Upsilon_\sigma| \leq |Q_0| \leq e^{1-\alpha\sigma} |Q_0|,$$

isto é, (1.33) com $A = e$. Suponhamos agora que $2^n e k \leq \sigma < 2^n e(k+1)$, $k \geq 1$. De (1.34), obtemos por indução

$$\varphi(\sigma) \leq e^{-k} \varphi(\sigma - k 2^n e).$$

Por outro lado, $0 < \sigma - 2^n e k < 2^n e$, e portanto, pelo mesmo argumento do primeiro caso temos

$$|\Upsilon_{\sigma-2^n e k}| \leq |Q_0| \leq e^{1-\alpha(\sigma-2^n e k)} |Q_0|,$$

e daí

$$\varphi(\sigma - 2^n e k) \leq A e^{-\alpha(\sigma-2^n e k)} = A e^{k-\alpha\sigma},$$

o que, em combinação com a estimativa anterior, fornece novamente (1.33). ■

Observação 1.12 *As suposições iniciais do teorema acima segue das seguintes observações. Se você substitui u por $\tilde{u} := u/[u]_*$, então $\tilde{u}_Q = u_Q/[u]_*$*

$$[\tilde{u}]_* = 1 \quad e \quad |\tilde{u}(x) - \tilde{u}_Q| = \frac{1}{[u]_*} |u(x) - u_Q|.$$

Para $\tilde{u}$,

$$\Upsilon_{\sigma, Q}(\tilde{u}) = \{x : |u(x) - u_Q| > \sigma[u]_*\} = \Upsilon_{\sigma[u]_*, Q}(u).$$

Logo,

$$\frac{|\Upsilon_{\sigma, Q}(\tilde{u})|}{|Q|} = \frac{|\Upsilon_{\sigma[u]_*, Q}(u)|}{|Q|}.$$

Portanto, provar a desigualdade para funções com $[u]_* = 1$ implica automaticamente o caso geral, bastando trocar σ por $\sigma/[u]_*$.

Ademais, também podemos supor que $u_{Q_0} = 0$ pois temos uma invariância por adição de constantes. De fato, defina $\tilde{u} := u - u_{Q_0}$. Então, por definição,

$$[u]_* = \sup_{Q \in \mathcal{A}_{Q_0}} \int_Q |u(x) - u_Q| dx.$$

Calculando a média de $\tilde{u}$ em Q temos

$$\tilde{u}_Q = \int_Q \tilde{u}(x) dx = \int_Q (u(x) - u_{Q_0}) dx = \int_Q u(x) dx - u_{Q_0} = u_Q - u_{Q_0},$$

logo,

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}_Q = (u(x) - u_{Q_0}) - (u_Q - u_{Q_0}) = u(x) - u_Q.$$

Tomando módulo,

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}_Q| = |u(x) - u_Q|.$$

sendo assim,

$$\int_Q |\tilde{u}(x) - \tilde{u}_Q| dx = \int_Q |u(x) - u_Q| dx.$$

Como isso vale para todo cubo $Q \subset Q_0$, ao tomar o supremo obtemos

$$[\tilde{u}]_* = [u]_*.$$

Portanto, $\Upsilon_{\sigma,Q}(\tilde{u}) = \Upsilon_{\sigma,Q}(u)$. Ademais, provemos a seguinte desigualdade (a outra é imediata)

$$\varphi(\sigma) \geq \sup_{[u]_{*,Q} \leq 1} \frac{|\Upsilon_{\sigma,Q}(u)|}{|Q|}.$$

Seja u tal que $[u]_{*,Q} \leq 1$ e $u_Q = 0$. Se $[u]_{*,Q} = 0$, então u é constante q.t.p., logo

$$\Upsilon_{\sigma,Q}(u) = \emptyset$$

e não contribui para o supremo. Suponha agora $0 < [u]_{*,Q} < 1$. Defina $v := \frac{u}{[u]_{*,Q}}$. Com contas análogas as anteriores mostra-se que $v_Q = 0$ e $[v]_{*,Q} = 1$, e portanto,

$$\Upsilon_{\sigma,Q}(u) = \Upsilon_{\sigma/[u]_{*,Q},Q}(v).$$

Como $[u]_{*,Q} \leq 1$, temos

$$\frac{\sigma}{[u]_{*,Q}} \geq \sigma.$$

Logo, pela monotonicidade dos conjuntos de nível,

$$\Upsilon_{\sigma/[u]_{*,Q},Q}(v) \subset \Upsilon_{\sigma,Q}(v),$$

daí, $\Upsilon_{\sigma,Q}(u) \subset \Upsilon_{\sigma,Q}(v)$, e portanto

$$\frac{|\Upsilon_{\sigma,Q}(u)|}{|Q|} \leq \frac{|\Upsilon_{\sigma,Q}(v)|}{|Q|} \leq \varphi(\sigma).$$

Tomando o supremo sobre todas as funções com $[u]_{*,Q} \leq 1$,

$$\sup_{[u]_{*,Q} \leq 1} \frac{|\Upsilon_{\sigma,Q}(u)|}{|Q|} \leq \varphi(\sigma).$$

Corolário 1.2 *Se $u \in \text{BMO}(Q_0, \mathbb{R}^N)$, então $u \in L^p(Q_0, \mathbb{R}^N)$ para todo $p \geq 1$, e para todo cubo Q paralelo a Q_0 vale*

$$\int_Q |u - u_Q|^p dx \leq c[u]_*^p.$$

Demonstração. De fato, temos por (1.4) e (1.5)

$$\begin{aligned} \int_Q |u - u_Q|^p dx &= p \int_0^\infty \sigma^{p-1} |\Upsilon_{\sigma,Q}| d\sigma \\ &\leq pA \int_0^\infty \sigma^{p-1} \exp\left(-\frac{\alpha\sigma}{[u]_*}\right) |Q| d\sigma \\ &= pA \left(\frac{[u]_*}{\alpha}\right)^p |Q| \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \leq c|Q|[u]_*^p. \end{aligned}$$

Assim, observando que

$$\|u\|_p \leq \|u - u_Q\|_p + \|u_Q\|_p < \infty$$

concluimos que $u \in L^p(Q_0, \mathbb{R}^n)$. ■

Observação 1.13 *Em particular, se $u \in \text{BMO}(Q_0, \mathbb{R}^N)$, então $u \in \mathcal{L}^{p,n}(Q_0, \mathbb{R}^N)$. De fato, pois*

$$\int_{Q_0(x_0, \rho)} |u - u_{Q_0}|^p dx \leq C|Q_0(x_0, \rho)|[u]_*^p \leq c\rho^n [u]_*^p$$

logo

$$\rho^{-n} \int_{Q_0(x_0, \rho)} |u - u_{Q_0}|^p dx \leq c[u]_*^p.$$

Tomando o supremo sobre x_0 e $\rho > 0$ obtemos $[u]_{p,n} \leq c[u]_*$. Desta forma

$$|||u|||_{p,n} = \|u\|_p + [u]_{p,n} \leq \|u\|_p + c[u]_* < \infty.$$

Por outro lado, temos que $[u]_* \leq [u]_{1,n} \leq [u]_{p,n}$. De fato, a primeira desigualdade foi provada anteriormente no Teorema 1.5, enquanto para a segunda temos

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \int_{Q_0} |u - u_{Q_0}| dx &\leq \rho^{-n} \left(\int_{Q_0} |u - u_{Q_0}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |Q_0|^{\frac{1}{p'}} \\ &= \rho^{-n} |Q_0|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_0} |u - u_{Q_0}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\rho^{\frac{-n}{p}} \left(\int_{Q_0} |u - u_{Q_0}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \left(\rho^{-n} \int_{Q_0} |u - u_{Q_0}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

logo

$$\rho^{-n} \int_{Q_0} |u - u_{Q_0}| dx \leq C[u]_{p,n}.$$

Agora, tomando o supremo sobre x_0 e $\rho > 0$ obtemos

$$[u]_{1,n} \leq C[u]_{p,n},$$

e portanto BMO é isomorfo a $\mathcal{L}^{p,n}$ para todo $p \geq 1$. Como consequência, temos o seguinte:

Corolário 1.3 *Os espaços $\mathcal{L}^{p,n}(Q_0, \mathbb{R}^N)$ são todos isomorfos entre si para $p \geq 1$ e n fixo.*

O mesmo vale para $\mathcal{L}^{p,n}(\Omega)$, desde que a fronteira de Ω seja suficientemente regular, por exemplo, Lipschitz-contínua.

O próximo lema também é devido a John e Nirenberg, e tem sido amplamente usado na teoria das equações elípticas.

Lema 1.3 (*John–Nirenberg II* [13]) *Seja $u : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função somável em Q_0 , e suponha que existam duas constantes $K > 0$ e $p > 1$ tais que, para toda partição de Q_0 em uma quantidade enumerável de cubos Q_j , dois a dois sem pontos interiores comuns, tenhamos*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \left(\int_{Q_j} |u - u_{Q_j}| dx \right)^p \leq K^p. \quad (1.35)$$

Neste caso, denotando por $[u]_p$ a menor constante para a qual (1.35) se verifica, temos

$$|\Upsilon_{\sigma, Q_0}| \leq A \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^p \quad (1.36)$$

com uma constante A dependendo apenas de n e p .

Demonstração. Para $1 < p < +\infty$, seja q o expoente conjugado de p , isto é, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, e defina

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^k q^{-j} = \frac{1 - q^{-k-1}}{1 - q^{-1}} = p(1 - q^{-k-1}).$$

Temos $\lambda_k = \lambda_{k-1} + q^{-k}$, e portanto, $q^k \lambda_k = q^k \lambda_{k-1} + 1$. Defina ainda

$$\tau_k = \frac{1}{2^{n+k(n+1)} q^k \lambda_k} < 1.$$

Podemos sempre supor $u_{Q_0} = 0$. Afirmamos que se v tem média nula em algum cubo Q e se, para algum inteiro k , vale

$$\int_Q |v| dx \leq \sigma \tau_k, \quad (1.37)$$

então

$$|\Upsilon_{\sigma, Q}(v)| \leq A_k \left(\frac{\lambda_k |v|_p}{\sigma} \right)^{\lambda_k} \left(\frac{1}{|v|_p} \int_Q |v| dx \right)^{q^{-k}}, \quad (1.38)$$

com $A_0 = 1$ e

$$A_k = \prod_{j=1}^k (q^j 2^{n+j(n+1)})^{q^{-j}}.$$

Definimos por simplicidade $V_\sigma = \Upsilon_{\sigma,Q}(v) = \{x \in Q : |v(x)| > \sigma\}$. Uma vez que, por (1.4), temos

$$|V_\sigma| \leq \frac{1}{\sigma} \int_Q |v| dx,$$

a estimativa (1.38) é válida para $k = 0$, pois $A_0 = \lambda_0 = 1$. Suponhamos agora que (1.37) implique (1.38) para $k - 1$; provaremos que o mesmo vale para k . Admitamos, portanto, que (1.37) se verifica. Pelo Teorema 1.10, podemos concluir que existe uma sequência de subcubos Q_m de Q , dois a dois sem pontos interiores comuns, tais que

$$\sigma \tau_k \leq \int_{Q_m} |v| dx < 2^n \sigma \tau_k \quad (1.39)$$

e

$$|v(x)| \leq \sigma \tau_k < \sigma \text{ em } Q_0 - \bigcup_m Q_m. \quad (1.40)$$

Defina $w_m = v - v_{Q_m}$ em Q_m . A função w_m tem obviamente média nula em Q_m , pois

$$\int_{Q_m} w_m dx = \int_{Q_m} v(x) dx - v_{Q_m} = v_{Q_m} - v_{Q_m} = 0.$$

Além disso, pela definição de $[v]_p$, temos

$$\sum_{m=1} [w_m]_p^p \leq [v]_p^p. \quad (1.41)$$

De fato, para cada m , considere uma partição arbitrária $\{R_{m,k}\}_k$ de Q_m em subcubos disjuntos. Pela definição de $[w_m]_p$, temos

$$\sum_k |R_{m,k}| \left(\int_{R_{m,k}} |w_m - (w_m)_{R_{m,k}}| dx \right)^p \leq [w_m]_p^p.$$

A família $\mathcal{P} := \{R_{m,k} : m \geq 1, k \geq 1\}$ é uma partição de Q . Pela definição de $[v]_p$,

$$\sum_{m,k} |R_{m,k}| \left(\int_{R_{m,k}} |v - v_{R_{m,k}}| dx \right)^p \leq [v]_p^p. \quad (1.42)$$

Observe que, para $R_{m,k} \subset Q_m$,

$$w_m - (w_m)_{R_{m,k}} = (v - v_{Q_m}) - (v_{R_{m,k}} - v_{Q_m}) = v - v_{R_{m,k}}.$$

Portanto, (1.42) equivale a

$$\sum_m \sum_k |R_{m,k}| \left(\int_{R_{m,k}} |w_m - (w_m)_{R_{m,k}}| dx \right)^p \leq [v]_p^p.$$

Logo, concluimos

$$\sum_{m=1}^{\infty} [w_m]_p^p \leq [v]_p^p.$$

Agora, como $\tau_k < \frac{1}{2^n q^k \lambda^k}$ então

$$1 - 2^n \tau_k > 1 - \frac{1}{q^k \lambda_k} = \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \quad (1.43)$$

e, portanto,

$$2^{n+1} \tau_k = \frac{2^{-n-(k-1)(n+1)}}{q^{k-1} \lambda_{k-1}} \cdot \frac{\lambda_{k-1}}{q \lambda_k} < \tau_{k-1} (1 - 2^n \tau_k).$$

Consequentemente, levando em conta (1.39)

$$\int_{Q_m} |w_m| dx \leq 2 \int_{Q_m} |v| dx \leq 2^{n+1} \sigma \tau_k \leq \sigma (1 - 2^n \tau_k) \tau_{k-1},$$

de modo que podemos escrever (1.38) para w_m , com $k-1$ no lugar de k e $\sigma(1 - 2^n \tau_k)$ no lugar de σ . Definindo

$$W_{\sigma,k,m} = \{x \in Q_m : |w_m(x)| > \sigma(1 - 2^n \tau_k)\},$$

segue de (1.43) que $\lambda_{k-1} < \lambda_k(1 - 2^n \tau_k)$, e assim, aplicando a hipótese indutiva

$$|W_{\sigma,k,m}| \leq A_{k-1} \left(\frac{[w_m]_p \lambda_k}{\sigma} \right)^{\lambda_{k-1}} \left(\frac{1}{[w_m]_p} \int_{Q_m} |w_m| dx \right)^{q^{1-k}}.$$

Por outro lado, de (1.39) segue que $|v_{Q_m}| \leq 2^n \tau_k \sigma$, e portanto, se $x \in Q_m$ e $|v(x)| > \sigma$, obtemos $|w_m(x)| \geq |v(x)| - |v_{Q_m}| > \sigma(1 - 2^n \tau_k)$. Conclui-se que $V_\sigma \cap Q_m \subset W_{\sigma,k,m}$ e assim, considerando (1.40), obtemos que $V_\sigma \subset \bigcup_m Q_m$, logo $V_\sigma \subset \bigcup_m W_{\sigma,k,m}$ e, portanto,

$$|V_\sigma| \leq \sum_m |W_{\sigma,k,m}| \leq A_{k-1} \lambda_k^{\lambda_{k-1}} \sigma^{-\lambda_{k-1}} \sum_m [w_m]_p^{\lambda_{k-2}} a_m^{q^{1-k}}, \quad (1.44)$$

onde

$$a_m = \int_{Q_m} |w_m| dx.$$

Para avaliar a última soma, usamos a desigualdade de Hölder. Lembrando que $\lambda_{k-2} = p(1 - q^{1-k})$ temos

$$\sum_m [w_m]_p^{\lambda_{k-2}} a_m^{q^{1-k}} \leq \left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{1-q^{1-k}} \left(\sum_m a_m \right)^{q^{1-k}}$$

e além disso

$$\begin{aligned}
\sum_m a_m &= \sum_m |Q_m|^{\frac{1-p}{p}} a_m |Q_m|^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_m |Q_m|^{1-p} a_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_m |Q_m| \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_m |Q_m| \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Observe que para esta última desigualdade utilizamos a definição de $[w_m]_p^p$ para a partição trivial de Q_m . De fato,

$$\sum_m |Q_m|^{1-p} a_m^p = \sum_m |Q_m| \left(\int_{Q_m} |w_m| dx \right)^p$$

Pela definição de $[w_m]_p^p$, tomando a partição $\{Q_m\}$ de Q , temos

$$|Q_m| \left(\int_{Q_m} |w_m| dx \right)^p \leq [w_m]_p^p \quad \Rightarrow \quad \sum_m |Q_m|^{1-p} a_m^p \leq \sum_m [w_m]_p^p,$$

o que prova a última desigualdade de (1.45).

Por outro lado, o último termo em (1.45) pode ser estimado por meio de (1.39).

Temos

$$\sum_m |Q_m| \leq \frac{1}{\sigma \tau_k} \sum_m \int_{Q_m} |v| dx = \frac{1}{\sigma \tau_k} \int_{\bigcup_n Q_m} |v| dx \leq \frac{1}{\sigma \tau_k} \int_Q |v| dx.$$

Assim, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\sum_m [w_m]_p^{\lambda_{k-2}} a_m^{q^{1-k}} &\leq \left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{1-q^{1-k}} \left(\sum_m a_m \right)^{q^{1-k}} \\
&\leq \left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{1-q^{1-k}} \left(\left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_m |Q_m| \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{q^{1-k}} \\
&\leq \left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{1-q^{1-k}} \left(\left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\sigma \tau_k} \int_Q |v| dx \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{q^{1-k}} \\
&= \left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{\frac{q^{1-k}}{p} + 1 - q^{1-k}} \left(\frac{1}{\sigma \tau_k} \int_Q |v| dx \right)^{q^{-k}}.
\end{aligned}$$

Introduzindo essa estimativa em (1.44), e levando em conta (1.41), obtemos

$$\begin{aligned}
|V_\sigma| &\leq A_{k-1} \lambda_k^{\lambda_{k-1}} \sigma^{-\lambda_{k-1}} \sum_m [w_m]_p^{\lambda_{k-2}} a_m^{q^{1-k}} \\
&\leq A_{k-1} \lambda_k^{\lambda_{k-1}} \sigma^{-\lambda_{k-1}} \left(\sum_m [w_m]_p^p \right)^{\frac{q^{1-k}}{p} + 1 - q^{1-k}} \left(\frac{1}{\sigma \tau_k} \int_Q |v| dx \right)^{q^{-k}} \\
&\leq A_{k-1} \lambda_k^{\lambda_{k-1}} \sigma^{-\lambda_{k-1}} ([v]_p^p)^{\frac{\lambda_{k-1}}{p}} \left(\frac{1}{\sigma \tau_k} \int_Q |v| dx \right)^{q^{-k}} \\
&\leq A_{k-1} \lambda_k^{\lambda_{k-1}} \tau_k^{-q^{-k}} \left(\frac{[v]_p}{\sigma} \right)^{\lambda_k} \left(\frac{1}{[v]_p} \int_Q |v| dx \right)^{q^{-k}},
\end{aligned}$$

onde usamos que $\lambda_{k-1} = \lambda_k - q^{-k}$ e $\frac{q^{1-k}}{p} + 1 - q^{1-k} = \frac{\lambda_{k-1}}{p}$. Para obter a desigualdade desejada (1.38), precisamos apenas ajustar a constante A_k . Temos $\tau_k^{-1} = q^k \lambda_k 2^{n+k(n+1)}$, e portanto

$$\lambda_k^{\lambda_{k-1}} \tau_k^{-q^{-k}} \leq \lambda_k^{\lambda_k} [q^k 2^{n+k(n+1)}]^{q^{-k}},$$

de onde obtemos imediatamente (1.38) para k .

Voltando à função u , e observando que as constantes A_k e λ_k são limitadas, podemos concluir que se

$$\oint_{Q_0} |u| dx \leq \sigma \tau_k,$$

então

$$|\Upsilon_\sigma| \leq c \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^{\lambda_k} \left(\frac{1}{[u]_p} \int_{Q_0} |u| dx \right)^{q^{-k}}.$$

Lembrando-se que $\lambda_k = p(1 - q^{-k-1}) = p - pq^{-k-1}$, a última relação também pode ser escrita na forma

$$|\Upsilon_\sigma| \leq c \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^p \left(\frac{\sigma^{\frac{p}{q}} |Q_0|}{[u]_p^p} \oint_{Q_0} |u| dx \right)^{q^{-k}}. \quad (1.46)$$

Com efeito, observe que

$$\left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^{\lambda_k} = \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^p \left(\frac{\sigma}{[u]_p} \right)^{pq^{-k-1}}.$$

Desta forma

$$|\Upsilon_\sigma| \leq c \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^p \left(\frac{\sigma}{[u]_p} \right)^{pq^{-k-1}} \left(\frac{1}{[u]_p} \int_{Q_0} |u| dx \right)^{q^{-k}}$$

e, portanto,

$$|\Upsilon_\sigma| \leq c \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^p \left[\frac{\sigma^{p/q}}{[u]_p^{p/q}} \cdot \frac{1}{[u]_p} \int_{Q_0} |u| dx \right]^{q^{-k}}.$$

Seja agora $\int_{Q_0} |u| dx < 2^{-n}\sigma$, isto é, $\tau_0 = 2^{-n}$, e seja k tal que

$$\sigma\tau_{k+1} < \int_{Q_0} |u| dx \leq \sigma\tau_k.$$

Neste caso (1.46) se verifica, e estimando σ por $\tau_{k+1}^{-1} \int_{Q_0} |u| dx$, obtemos

$$\begin{aligned} |\Upsilon_\sigma| &\leq c \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^p \left(\left(\tau_{k+1}^{-1} \int_{Q_0} |u| dx \right)^{\frac{p}{q}} \frac{|Q_0|}{[u]_p^p} \int_{Q_0} |u| dx \right)^{q^{-k}} \\ &\leq c \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^p \tau_{k+1}^{-pq^{-k-1}} \left(\frac{|Q_0|}{[u]_p^p} \left(\int_{Q_0} |u| dx \right)^{\frac{p}{q}+1} \right)^{q^{-k}} \\ &\leq c \left(\frac{[u]_p}{\sigma} \right)^p \tau_{k+1}^{-pq^{-k-1}} \left(\frac{|Q_0|^{\frac{1}{p}}}{[u]_p} \int_{Q_0} |u| dx \right)^{pq^{-k}}. \end{aligned}$$

O último fator é menor que a unidade, e $\tau_{k+1}^{-pq^{-k-1}}$ é menor que uma constante fixa, de modo que, em conclusão, obtemos (1.36), desde que $\sigma > 2^n \int_{Q_0} |u| dx$.

No caso oposto, temos

$$\sigma \leq 2^n \int_{Q_0} |u| dx \leq 2^n [u]_p |Q_0|^{-\frac{1}{p}},$$

e portanto

$$|\Upsilon_\sigma| \leq |Q_0| \leq \left(\frac{2^n [u]_p}{\sigma} \right)^p,$$

de modo que (1.36) também se verifica neste caso. ■

1.4 Interpolação

Já observamos que se u é uma função em $L^p(\Omega)$ e se para $\sigma > 0$ definirmos

$$U_\sigma = \{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\},$$

segue, por (1.4), que

$$\lambda(u, \sigma) := |U_\sigma| \leq \left(\frac{\|u\|_p}{\sigma} \right)^p.$$

A recíproca não é verdadeira, visto que, a função $u(x) = |x|^{-n/p}$ satisfaz $|U_\sigma| \leq c\sigma^{-p}$ na bola unitária B , mas não pertence a $L^p(B)$.

Definição 1.6 Dizemos que uma função mensurável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ pertence ao espaço $L^p(\Omega)$ -fraco (que denotaremos por $L_w^p(\Omega)$), se existe uma constante K tal que para todo $\sigma > 0$:

$$|U_\sigma| \leq \left(\frac{K}{\sigma} \right)^p. \quad (1.47)$$

Segue de (1.4) que $L^p \subset L_w^p$. Além disso, se Ω tem medida finita, temos $L_w^p(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ para todo $s < p$. De fato, temos de (1.5):

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^s dx &= s \int_0^{\infty} \sigma^{s-1} |U_{\sigma}| d\sigma \\
&= s \int_0^1 \sigma^{s-1} |U_{\sigma}| d\sigma + s \int_1^{\infty} \sigma^{s-1} |U_{\sigma}| d\sigma \\
&\leq |\Omega| + s \int_1^{\infty} \sigma^{s-1} |U_{\sigma}| d\sigma \\
&\leq |\Omega| + sK^p \int_1^{\infty} \sigma^{s-1-p} d\sigma \\
&= |\Omega| + \frac{sK^p}{p-s}.
\end{aligned}$$

Os espaços L^p -fracos podem ser caracterizados em termos de integrais sobre conjuntos arbitrários.

Definição 1.7 Para $0 \leq \vartheta \leq 1$ denotemos por $M^{\vartheta}(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tais que

$$\|u\|_{\vartheta} := \sup_E |E|^{-\vartheta} \int_E |u| dx < +\infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os conjuntos mensuráveis $E \subset \Omega$, com $|E| > 0$.

Observação 1.14 É comum que os espaços M^{ϑ} sejam chamados espaços de Lorentz. Temos que $\|u\|_{\vartheta}$ é uma norma e que M^{ϑ} é completo. Temos também $M^0 = L^1$ e $M^1 = L^{\infty}$; além disso, $M^{\vartheta} \subset L^{1,n\vartheta}$, já que neste último integramos apenas sobre cubos e suas interseções com Ω . Vejamos a última inclusão. Seja $u \in M^{\vartheta}$ então

$$\sup_E |E|^{-\vartheta} \int_E |u| dx < +\infty.$$

Assim,

$$\int_E |u| dx \leq \|u\|_{\vartheta} |E|^{\vartheta}.$$

Tomando o caso particular em que $E = \Omega(x_0, \rho)$ para algum $x_0 \in \Omega$ e $\rho > 0$, e sabendo que $|\Omega(x_0, \rho)|^{\vartheta} \leq (2^n \rho^n)^{\vartheta} \leq C \rho^{n\vartheta}$. Temos

$$\rho^{-n\vartheta} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u| dx \leq C \|u\|_{\vartheta}.$$

Consequentemente, tomando o supremo sobre x_0 e ρ segue

$$\|u\|_{1,n\vartheta} \leq C \|u\|_{\vartheta}$$

o que mostra a inclusão desejada.

Proposição 1.6 *Seja $1 < p < +\infty$ e seja $\vartheta = \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Então, $L_w^p = M^\vartheta$.*

Demonstração. Para $u \in L_w^p$ temos, por (1.5)

$$\begin{aligned} \int_E |u| dx &= \int_0^\infty |U_\sigma \cap E| d\sigma \\ &= \int_0^{|E|^{\vartheta-1}} |U_\sigma \cap E| d\sigma + \int_{|E|^{\vartheta-1}}^\infty |U_\sigma \cap E| d\sigma \\ &\leq |E|^\vartheta + \int_{|E|^{\vartheta-1}}^\infty |U_\sigma| d\sigma \\ &\leq |E|^\vartheta + K^p \int_{|E|^{\vartheta-1}}^\infty \sigma^{-p} d\sigma. \end{aligned}$$

Como $p > 1$, temos

$$\int_{|E|^{\vartheta-1}}^\infty \sigma^{-p} d\sigma = \left[\frac{\sigma^{-p+1}}{-p+1} \right]_{|E|^{\vartheta-1}}^\infty = \frac{1}{p-1} |E|^{(\vartheta-1)(-p+1)}.$$

Observando que $\vartheta = 1 - \frac{1}{p}$ e $-p+1 = -(p-1)$, obtemos

$$(\vartheta-1)(-p+1) = \left(-\frac{1}{p}\right) \cdot (-(p-1)) = \frac{p-1}{p} = \vartheta.$$

Portanto

$$\int_{|E|^{\vartheta-1}}^\infty \sigma^{-p} d\sigma = \frac{1}{p-1} |E|^\vartheta,$$

e conseqüentemente,

$$\int_E |u| dx \leq c |E|^\vartheta,$$

ou seja, $u \in M^\vartheta$. Reciprocamente, se $u \in M^\vartheta$ temos por (1.4)

$$\sigma |U_\sigma| \leq \int_{U_\sigma} |u| dx \leq \|u\|_\vartheta |U_\sigma|^\vartheta$$

e, portanto,

$$|U_\sigma| \leq \left(\frac{\|u\|_\vartheta}{\sigma} \right)^p.$$

■

Introduzimos agora uma notação. Para evitar complicações não essenciais, suporemos que Ω tem medida finita, de modo que $L^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para $p \leq s \leq +\infty$. Se T é uma aplicação de $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L^p(\Lambda, \mathbb{R}^M)$, diremos que T é **quasilinear** se existir uma constante Q tal que para quase todo $x \in \Omega$:

$$|T(u+v)(x)| \leq Q(|Tu(x)| + |Tv(x)|).$$

O primeiro resultado é um teorema de interpolação entre s e $+\infty$.

Teorema 1.12 (Marcinkiewicz I) *Sejam $1 \leq s < +\infty$, e T uma aplicação quasilinear de $L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$ no espaço das funções mensuráveis em Λ , com valores em $\mathbb{R}^\nu$. Suponha que T aplica $L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L_w^s(\Lambda, \mathbb{R}^\nu)$ e $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L^\infty(\Lambda, \mathbb{R}^\nu)$, com as estimativas:*

$$\lambda(Tf, \sigma) \leq \left(\frac{A_s \|f\|_s}{\sigma} \right)^s \quad (1.48)$$

e

$$\|Tg\|_\infty \leq A_\infty \|g\|_\infty \quad (1.49)$$

para todo $f \in L^s$, $g \in L^\infty$ e $\sigma > 0$. Então, T aplica $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L^p(\Lambda, \mathbb{R}^\nu)$ para todo $p > s$, e temos

$$\|Tu\|_p \leq c A_s^{\frac{s}{p}} A_\infty^{\frac{p-s}{p}} \|u\|_p \quad (1.50)$$

para todo $u \in L^p$.

Demonstração. Seja $u \in L^p$ e seja $\gamma > 0$. Definindo

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } |u(x)| > \gamma\sigma \\ 0, & \text{se } |u(x)| \leq \gamma\sigma \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |u(x)| > \gamma\sigma \\ u(x), & \text{se } |u(x)| \leq \gamma\sigma \end{cases}$$

temos $f \in L^s$, $g \in L^\infty$ e $u = f + g$, de modo que $|Tu(x)| \leq Q(|Tf(x)| + |Tg(x)|)$. Para que $|Tu(x)| > \sigma$, pelo menos uma das duas quantidades $|Tf(x)|$ e $|Tg(x)|$ deve ser maior que $\sigma/2Q$, caso contrário, teríamos

$$|Tf(x)| + |Tg(x)| \leq \frac{\sigma}{2Q} + \frac{\sigma}{2Q} = \frac{\sigma}{Q}$$

e daí, $|Tu(x)| \leq \sigma$, o que não queremos. Assim, lembrando que $\lambda(Tu, \sigma) = |\{x \in \Omega : |Tu(x)| > \sigma\}|$ e observando o argumento acima, temos

$$\{x \in \Omega : |Tu(x)| > \sigma\} \subset \left(\left\{ x \in \Omega : |Tf(x)| > \frac{\sigma}{2Q} \right\} \cup \left\{ x \in \Omega : |Tg(x)| > \frac{\sigma}{2Q} \right\} \right),$$

consequentemente

$$\lambda(Tu, \sigma) \leq \lambda\left(Tf, \frac{\sigma}{2Q}\right) + \lambda\left(Tg, \frac{\sigma}{2Q}\right), \quad (1.51)$$

assim, por (1.48) temos

$$\lambda\left(Tf, \frac{\sigma}{2Q}\right) \leq \left(\frac{2QA_s \|f\|_s}{\sigma} \right)^s \leq \left(\frac{2QA_s}{\sigma} \right)^s \int_{U_{\gamma\sigma}} |u|^s dx. \quad (1.52)$$

Por outro lado

$$\|Tg\|_\infty \leq A_\infty \|g\|_\infty \leq A_\infty \gamma \sigma,$$

de modo que, escolhendo $\gamma = \frac{1}{2QA_\infty}$ obtemos

$$\lambda\left(Tg, \frac{\sigma}{2Q}\right) = |\{x \in \Omega : |Tg(x)| > \sigma/2Q\}| = 0. \quad (1.53)$$

Definindo $a_s = (2QA_s)^s$, segue de (1.51) e (1.52)

$$\begin{aligned} \int_\Lambda |Tu|^p dx &= p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \lambda(Tu, \sigma) d\sigma \\ &\leq p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \left(\lambda\left(Tf, \frac{\sigma}{2Q}\right) + \lambda\left(Tg, \frac{\sigma}{2Q}\right) \right) d\sigma \\ &= p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \lambda\left(Tf, \frac{\sigma}{2Q}\right) d\sigma \\ &\leq pa_s \int_0^\infty \sigma^{p-s-1} d\sigma \int_{U_{\gamma\sigma}} |u|^s dx. \end{aligned}$$

Agora, observemos que, se $0 \leq \tau \leq \gamma\sigma$ então $|\{x \in U_{\gamma\sigma} : |u(x)| > \tau\}| = \lambda(u, \gamma\sigma)$, enquanto que se $\gamma\sigma \leq \tau$ então $|\{x \in U_{\gamma\sigma} : |u(x)| > \tau\}| = \lambda(u, \tau)$. Deste fato, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \int_{U_{\gamma\sigma}} |u|^s dx &= s \int_0^\infty \tau^{s-1} |\{x \in U_{\gamma\sigma} : |u(x)| > \tau\}| d\tau \\ &= s \int_0^{\gamma\sigma} \tau^{s-1} \lambda(u, \gamma\sigma) d\tau + s \int_{\gamma\sigma}^\infty \tau^{s-1} \lambda(u, \tau) d\tau \\ &= \lambda(u, \gamma\sigma)(\gamma\sigma)^s + s \int_{\gamma\sigma}^\infty \tau^{s-1} \lambda(u, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\int_\Lambda |Tu|^p dx \leq pa_s \int_0^\infty \sigma^{p-s-1} \left(s \int_{\gamma\sigma}^\infty \tau^{s-1} \lambda(u, \tau) d\tau + (\gamma\sigma)^s \lambda(u, \gamma\sigma) \right) d\sigma.$$

Podemos inverter a ordem de integração, para isso, reescrevemos o domínio D , originalmente descrito como uma região de Tipo I, em termos de uma região de Tipo II, para mais detalhes ver o livro de Cálculo de James Stewart sobre integração dupla em regiões gerais. Desta forma temos

$$\int_\Lambda |Tu|^p dx \leq pa_s \left(s \int_0^\infty \tau^{s-1} \lambda(u, \tau) \int_0^{\frac{\tau}{\gamma}} \sigma^{p-s-1} d\sigma d\tau + \gamma^s \int_0^\infty \sigma^{p-1} \lambda(u, \gamma\sigma) d\sigma \right).$$

Resolvendo com cuidado o termo em parênteses e utilizando a mudança de variável $\tau = \gamma\sigma$ na segunda parcela dentro do parênteses, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} |Tu|^p dx &\leq pa_s \left(\int_0^\infty \tau^{p-1} \lambda(u, \tau) d\tau \right) \left[\frac{s}{(p-s)\gamma^{p-s}} + \gamma^{p-s} \right] \\ &= pa_s \frac{1}{p-s} \gamma^{s-p} \left(p \int_0^\infty \tau^{p-1} \lambda(u, \tau) d\tau \right) \\ &= a_s \gamma^{s-p} \frac{p}{p-s} \int_{\Omega} |u|^p dx, \end{aligned}$$

donde obtemos a desigualdade desejada (1.49), levando em consideração as definições de a_s e de γ . ■

Consideramos agora a interpolação entre dois expoentes finitos s e r .

Teorema 1.13 (*Marcinkiewicz II*) *Sejam $1 \leq s < r < +\infty$, e seja T uma aplicação quasilinear de $L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$ no espaço das funções mensuráveis em Λ , com valores em $\mathbb{R}^\nu$. Suponha que T aplica $L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L_w^s(\Lambda, \mathbb{R}^\nu)$ e $L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L_w^r(\Lambda, \mathbb{R}^\nu)$, com as estimativas:*

$$\lambda(Tf, \sigma) \leq \left(\frac{A_s \|f\|_s}{\sigma} \right)^s \quad (1.54)$$

e

$$\lambda(Tg, \sigma) \leq \left(\frac{A_r \|g\|_r}{\sigma} \right)^r, \quad (1.55)$$

para todo $f \in L^s$, $g \in L^r$ e $\sigma > 0$. Então, para todo p entre s e r , T aplica $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L^p(\Lambda, \mathbb{R}^\nu)$, e temos

$$\|Tu\|_p \leq c A_s^\epsilon A_r^{1-\epsilon} \|u\|_p \quad (1.56)$$

para todo $u \in L^p$, onde $\epsilon \in (0, 1)$ é tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{\epsilon}{s} + \frac{1-\epsilon}{r}.$$

Demonstração. Procedendo como anteriormente obtemos (1.51) e (1.52), enquanto que em vez de (1.53) obtemos

$$\lambda\left(Tg, \frac{\sigma}{2Q}\right) \leq \left(\frac{2QA_r \|g\|_r}{\sigma} \right)^r = \left(\frac{2QA_r}{\sigma} \right)^r \int_{\Omega-U_{\gamma\sigma}} |u|^r dx.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} |Tu|^p dx &= p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \lambda(Tu, \sigma) d\sigma \\ &\leq p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \left(\lambda\left(Tf, \frac{\sigma}{2Q}\right) + \lambda\left(Tg, \frac{\sigma}{2Q}\right) \right) d\sigma \\ &\leq p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \left(\frac{2QA_s}{\sigma} \right)^s \int_{U_{\gamma\sigma}} |u|^s dx d\sigma + p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \left(\frac{2QA_r}{\sigma} \right)^r \int_{\Omega-U_{\gamma\sigma}} |u|^r dx d\sigma \\ &\leq p(2QA_s)^s \int_0^\infty \sigma^{p-s-1} \int_{U_{\gamma\sigma}} |u|^s dx d\sigma + p(2QA_r)^r \int_0^\infty \sigma^{p-r-1} \int_{\Omega-U_{\gamma\sigma}} |u|^r dx d\sigma. \end{aligned}$$

A primeira integral pode ser estimada observando a conta da demonstração do teorema anterior por

$$(2QA_s)^s \gamma^{s-p} \frac{p}{p-s} \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Para a segunda, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sigma^{p-r-1} \int_{\Omega-U_{\gamma\sigma}} |u|^r dx d\sigma &= \int_0^{\infty} \sigma^{p-r-1} \left(r \int_0^{\gamma\sigma} \tau^{r-1} \lambda(u, \tau) d\tau - (\gamma\sigma)^r \lambda(u, \gamma\sigma) \right) d\sigma \\ &= r \int_0^{\infty} \tau^{r-1} \lambda(u, \tau) \int_{\frac{\tau}{\gamma}}^{\infty} \sigma^{p-r-1} d\sigma d\tau - \gamma^r \int_0^{\infty} \sigma^{p-1} \lambda(u, \gamma\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Vamos resolver por partes esta última igualdade. Como $p < r$ então

$$\int_{\tau/\gamma}^{\infty} \sigma^{p-r-1} d\sigma = \left[\frac{\sigma^{p-r}}{p-r} \right]_{\tau/\gamma}^{\infty} = \frac{\tau^{p-r}}{(r-p)\gamma^{p-r}},$$

assim,

$$r \int_0^{\infty} \tau^{r-1} \lambda(u, \tau) \frac{\tau^{p-r}}{(r-p)\gamma^{p-r}} d\tau = \frac{r}{r-p} \gamma^{r-p} \int_0^{\infty} \tau^{p-1} \lambda(u, \tau) d\tau. \quad (1.57)$$

Agora, observando a outra parcela, podemos fazer a mudança de variável $\tau = \gamma\sigma$, obtendo assim

$$\begin{aligned} \gamma^r \int_0^{\infty} \sigma^{p-1} \lambda(u, \gamma\sigma) d\sigma &= \gamma^r \int_0^{\infty} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^{p-1} \lambda(u, \tau) \frac{d\tau}{\gamma} \\ &= \gamma^{r-p} \int_0^{\infty} \tau^{p-1} \lambda(u, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Daí, subtraindo (1.57) de (1.58), obtemos

$$\gamma^{r-p} \left(\frac{r}{r-p} - 1 \right) \int_0^{\infty} \tau^{p-1} \lambda(u, \tau) d\tau = \frac{p}{r-p} \gamma^{r-p} \int_0^{\infty} \tau^{p-1} \lambda(u, \tau) d\tau.$$

Assim, voltando a nossa igualdade principal obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sigma^{p-r-1} \int_{\Omega-U_{\gamma\sigma}} |u|^r dx d\sigma &= \frac{p}{r-p} \gamma^{r-p} \int_0^{\infty} \sigma^{p-1} \lambda(u, \sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{r-p} \gamma^{r-p} \int_{\Omega} |u|^p dx, \end{aligned}$$

temos portanto,

$$\int_{\Lambda} |Tu|^p dx \leq \left(\frac{1}{p-s} \gamma^{s-p} (2QA_s)^s + \frac{1}{r-p} \gamma^{r-p} (2QA_r)^r \right) \int_{\Omega} |u|^p dx,$$

e a conclusão segue se escolhermos

$$\gamma = \frac{1}{2Q} A_s^{\frac{s}{r-s}} A_r^{-\frac{r}{r-s}}.$$

■

Podemos agora provar um último teorema de interpolação, que usaremos posteriormente.

Teorema 1.14 *Seja Q_0 um cubo em $\mathbb{R}^n$, e seja T uma aplicação linear de $L^s(Q_0, \mathbb{R}^N)$ em $L^s(Q_0, \mathbb{R}^\nu)$, aplicando $L^\infty(Q_0, \mathbb{R}^N)$ em $BMO = \mathcal{L}^{s,n}(Q_0, \mathbb{R}^\nu)$, com as estimativas:*

$$\|Tf\|_s \leq A_s \|f\|_s \quad (1.59)$$

$$[Tg]_* \leq A_\infty \|g\|_\infty \quad (1.60)$$

para todo $f \in L^s$ e $g \in L^\infty$. Então, T aplica $L^p(Q_0, \mathbb{R}^N)$ em $L^p(Q_0, \mathbb{R}^\nu)$ para todo $p > s$, e temos

$$\|Tu - (Tu)_{Q_0}\|_p \leq A_p \|u\|_p, \quad (1.61)$$

onde

$$A_p = c A_s^{\frac{s}{p}} A_\infty^{\frac{p-s}{p}}. \quad (1.62)$$

Demonstração. Seja $\{Q_k\}$ uma partição de Q_0 em cubos dois a dois sem pontos internos em comum. Seja $\mathcal{T}$ a aplicação que a cada $u \in L^s$ associa a função $\mathcal{T}u$ que em cada cubo Q_k assume o valor constante, dado por

$$\mathcal{T}u(x) = \oint_{Q_k} |Tu - (Tu)_k| dy$$

para todo $x \in Q_k$, onde $(Tu)_k = \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} Tu dy$. A aplicação $\mathcal{T}$ é quasilinear, com $Q = 1$. De fato, em cada cubo Q_k temos

$$\mathcal{T}(u+v)(x) = \oint_{Q_k} |T(u+v) - (T(u+v))_{Q_k}| dy.$$

Pela linearidade de T temos

$$T(u+v) - (T(u+v))_k = (Tu - (Tu)_k) + (Tv - (Tv)_k),$$

daí, usando a desigualdade triangular, segue que

$$\oint_{Q_k} |T(u+v) - (T(u+v))_{Q_k}| dy \leq \oint_{Q_k} |Tu - (Tu)_k| dy + \oint_{Q_k} |Tv - (Tv)_k| dy,$$

o que nos diz que $\mathcal{T}$ é quasilinear, com $Q = 1$. Ademais, levando em consideração a definição de BMO , ela aplica $L^\infty(Q_0, \mathbb{R}^N)$ em $L^\infty(Q_0, \mathbb{R}^\nu)$. Com efeito, para todo $x \in Q_k$

$$\mathcal{T}g(x) = \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |Tg - (Tg)_k| dy \leq \sup_{Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tg - (Tg)_k| dy = [Tg]_* \leq A_\infty \|g\|_\infty.$$

Isso vale para todos os cubos Q_k , então para todo $x \in Q_0$

$$\mathcal{T}g(x) \leq A_\infty \|g\|_\infty,$$

consequentemente,

$$\|\mathcal{T}g\|_\infty \leq A_\infty \|g\|_\infty.$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} |\mathcal{T}u|^s dx &= \sum_k \int_{Q_k} \left(\oint_{Q_k} |Tu - (Tu)_k| dy \right)^s dx \\ &= \sum_k |Q_k| \left(\oint_{Q_k} |Tu - (Tu)_k| dy \right)^s. \end{aligned}$$

Agora, trabalhemos com a integral média entre parênteses. Temos, por Hölder, que

$$\left(\oint_{Q_k} |Tu - (Tu)_k| dy \right)^s \leq \oint_{Q_k} |Tu - (Tu)_k|^s dy,$$

porém

$$|Tu - (Tu)_k|^s \leq 2^{s-1} (|Tu|^s + |(Tu)_k|^s) \quad (1.63)$$

e, sabendo que,

$$|(Tu)_k| = \left| \oint_{Q_k} Tu dy \right| \leq \oint_{Q_k} |Tu| dy$$

podemos usar Hölder novamente para obter

$$|(Tu)_k|^s \leq \oint_{Q_k} |Tu|^s dy.$$

Assim, passando a integral média em (1.63) e usando a desigualdade anterior obtemos

$$\oint_{Q_k} |Tu - (Tu)_k|^s dy \leq 2^{s-1} \left(\oint_{Q_k} |Tu|^s + |(Tu)_k|^s \right) \leq 2^s \left(\oint_{Q_k} |Tu|^s dy \right).$$

Logo, usando a estimativa (1.59) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} |\mathcal{T}u|^s dx &\leq 2^s \sum_k |Q_k| \oint_{Q_k} |Tu|^s dy \\ &= 2^s \int_{Q_0} |Tu|^s dx \\ &\leq (2A_s)^s \int_{Q_0} |u|^s dy, \end{aligned}$$

de modo que $\mathcal{T}$ aplica L^s em L^s , com a estimativa adequada. Assim,

$$\lambda(\mathcal{T}u, \sigma) \leq \sigma^{-s} \|\mathcal{T}u\|_s^s \leq \left(\frac{2A_s \|u\|_s}{\sigma} \right)^s.$$

Pelo Teorema de Marcinkiewicz I 1.12, $\mathcal{T}$ aplica L^q em L^q para todo $q > s$, com a estimativa

$$\|\mathcal{T}u\|_q \leq c A_s^{\frac{s}{q}} A_\infty^{\frac{q-s}{q}} \|u\|_q =: A_q \|u\|_q.$$

Da definição de $\mathcal{T}$, obtemos

$$\sum_k |Q_k| \left(\int_{Q_k} |Tu - (Tu)_k| dy \right)^q \leq A_q^q \|u\|_q^q,$$

para toda partição $\{Q_k\}$. Aplicando o Lema 1.3, podemos concluir que para todo $\sigma > 0$,

$$|\{x \in Q_0 : |Tu(x) - (Tu)_{Q_0}| > \sigma\}| \leq c \left(\frac{A_q \|u\|_q}{\sigma} \right)^q. \quad (1.64)$$

Consequentemente, a aplicação $\Theta : u \rightarrow Tu - (Tu)_{Q_0}$ aplica L^s em L^s , com

$$\|\Theta u\|_s \leq 2A_s \|u\|_s \quad (1.65)$$

e L^q em L_w^q , com a estimativa (1.64). A segunda estimativa é imediata, vejamos a primeira.

Note que, temos a desigualdade

$$\|\Theta u\|_s = \|Tu - (Tu)_{Q_0}\|_s \leq \|Tu\|_s + \|(Tu)_{Q_0}\|_s.$$

Mas, $\|(Tu)_{Q_0}\|_s$ é a norma de uma função constante, dada por

$$\|(Tu)_{Q_0}\|_s = |(Tu)_{Q_0}| \cdot |Q_0|^{1/s},$$

e, pela desigualdade de Hölder,

$$|(Tu)_{Q_0}| = \left| \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} Tu dx \right| \leq \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |Tu| dx \leq \frac{1}{|Q_0|} \|Tu\|_s |Q_0|^{1-1/s} = \|Tu\|_s |Q_0|^{-1/s}.$$

Portanto

$$\|(Tu)_{Q_0}\|_s \leq \|Tu\|_s,$$

daí

$$\|\Theta u\|_s \leq \|Tu\|_s + \|Tu\|_s = 2\|Tu\|_s$$

e por (1.59), segue que

$$\|\Theta u\|_s \leq 2A_s \|u\|_s,$$

o que prova a afirmação (1.65). Pelo segundo teorema de Marcinkiewicz 1.13 concluimos que Θ aplica L^p em L^p , para $s < p < q$, e

$$\|\Theta u\|_p \leq A_p \|u\|_p.$$

Um cálculo com os expoentes s , p e q nos mostra que a constante A_p é dada por (1.62).

Finalmente, se quisermos estimar a norma $\|Tu\|_p$, será suficiente estimar a quantidade

$|(Tu)_{Q_0}|$. Observemos que,

$$|(Tu)_{Q_0}| \leq \int_{Q_0} |Tu| dy \leq \left(\int_{Q_0} |Tu|^s dy \right)^{\frac{1}{s}}$$

Por outro lado, pela estimativa (1.59)

$$\left(\int_{Q_0} |Tu|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \leq A_s \left(\int_{Q_0} |u|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \leq A_s \left(\int_{Q_0} |u|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = A_s \|u\|_p |Q_0|^{-\frac{1}{p}}$$

e, portanto,

$$\|Tu\|_p \leq \|\Theta u\|_p + |Q_0|^{\frac{1}{p}} |(Tu)_{Q_0}| \leq (A_p + A_s) \|u\|_p.$$

■

Observação 1.15 *O teorema acima permanece válido em abertos Ω mais gerais que os cubos, e em particular se Ω é a imagem de um cubo Q_0 sob uma aplicação g , restrição a Q_0 de um homeomorfismo bilipschitziano de um aberto $C \supset Q_0$ em $\Lambda \supset \Omega$*

De fato, seja T uma aplicação linear contínua de $L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L^s(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ bem como de $L^\infty(\Omega)$ em $BMO(\Omega)$, e defina

$$T_* = g_* T g_*^{-1}.$$

A aplicação T_ é linear, pois é a composição de funções lineares. Ademais, pela T_* aplica $L^s(Q_0)$ em $L^s(Q_0)$, pois g_* e g_*^{-1} são isomorfismos em L^s , ou seja, estamos com a seguinte situação,*

$$L^s(Q_0) \xrightarrow{g_*^{-1}} L^s(\Omega) \xrightarrow{T} L^s(\Omega) \xrightarrow{g_*} L^s(Q_0)$$

E, por fim, pela Proposição ??, T_ aplica $L^\infty(Q_0)$ em $BMO(Q_0)$, com as estimativas adequadas, neste caso, temos*

$$L^\infty(Q_0) \xrightarrow{g_*^{-1}} L^\infty(\Omega) \xrightarrow{T} BMO(\Omega) \xrightarrow{g_*} BMO(Q_0)$$

Pelo teorema anterior, T_ aplica $L^p(Q_0)$ em $L^p(Q_0)$ para todo $p \geq s$. Consequentemente, $T = g_*^{-1} T_* g_*$ aplica $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, com a estimativa*

$$\|Tu\|_p \leq c \|u\|_p.$$

O próximo lema é bastante útil.

Lema 1.4 *Seja $\mathcal{G}$ uma família arbitrária de cubos, tal que⁶ $M := \sup_{Q \in \mathcal{G}} r(Q) < +\infty$. Existe uma subfamília enumerável (ou finita) $\Gamma := \{\Pi_i\}$ de cubos dois a dois disjuntos, tal que*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_i \supset \bigcup \mathcal{G},$$

onde $\hat{\Pi}$ indica o cubo concêntrico com Π e com lado quintuplo.

⁶Se P é um cubo, indicamos por $r(P)$ o seu raio, isto é, metade do seu lado.

Demonstração. Para cada inteiro h , definimos

$$\mathcal{G}_h := \{P \in \mathcal{G} : 2^{-h}M < r(P) \leq 2^{1-h}M\}.$$

Seja $\tilde{\mathcal{G}}_1$ uma subfamília maximal de cubos dois a dois disjuntos de $\mathcal{G}_1$, isto é, tal que

- (i) para todo $P, Q \in \tilde{\mathcal{G}}_1$, $P \cap Q = \emptyset$;
- (ii) para todo $Q \in \mathcal{G}_1$ existe $P \in \tilde{\mathcal{G}}_1$ com $P \cap Q \neq \emptyset$.

A propriedade (i) é imediata. Agora, observe a propriedade (ii), seja $Q \in \mathcal{G}_1$, se $Q \in \tilde{\mathcal{G}}_1$, então tomamos $Q = P$, se $Q \notin \tilde{\mathcal{G}}_1$, então Q deve intersectar algum cubo já contido em $\tilde{\mathcal{G}}_1$, do contrário quebraríamos a maximalidade do conjunto.

A família $\tilde{\mathcal{G}}_1$ é no máximo enumerável, pois, sendo $M/2 < r(P) \leq M$ para todo $P \in \tilde{\mathcal{G}}_1$, no máximo um número finito de cubos de $\tilde{\mathcal{G}}_1$ pode intersectar qualquer conjunto compacto. Com efeito, seja K um compacto. Se $P \in \tilde{\mathcal{G}}_1$ é um cubo de raio no máximo M que intersecta K , então $P \subset K_{2M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq 2M\}$. Note que K_{2M} também é compacto, logo tem volume/medida finito. Como o volume de cada cubo em $\tilde{\mathcal{G}}_1$ é > 0 , então não podemos ter infinitas interseções com K , caso contrário, K_{2M} possuiria volume infinito. Desta forma, como temos $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} (B[0, m])$ então $\tilde{\mathcal{G}}_1$ é a união enumerável de uma quantidade finita de cubos que intersectam cada bola compacta $B[0, m]$.

Suponhamos agora que $\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_{h-1}$ já foram definidos indutivamente, e entre os cubos de $\mathcal{G}_h$ que não intersectam nenhum dos cubos de $\Gamma_{h-1} := \bigcup_{i=1}^{h-1} \tilde{\mathcal{G}}_i$ escolhamos uma família maximal $\tilde{\mathcal{G}}_h$ de cubos dois a dois disjuntos. Temos

- (i) para todo $P, Q \in \Gamma_h$, $P \cap Q = \emptyset$;
- (ii) para todo $Q \in \mathcal{G}_h$ existe $P \in \Gamma_h$ com $P \cap Q \neq \emptyset$.

A condição (i) é imediata. Averiguemos a condição (ii). Seja $Q \in \mathcal{G}_h$. Se $Q \in \Gamma_{h-1}$, então $Q \in \Gamma_h$, logo tomamos $Q = P \in \Gamma_h$. Agora, se $Q \notin \Gamma_{h-1}$, então Q é um candidato para estar em $\tilde{\mathcal{G}}_h$, daí, se $Q \in \tilde{\mathcal{G}}_h$ então $Q \in \Gamma_h$ bastando tomar $Q = P$ novamente. Se $Q \notin \tilde{\mathcal{G}}_h$ então para não contrariar a maximalidade deste conjunto, deve existir $P \in \tilde{\mathcal{G}}_h \subset \Gamma_h$ tal que $P \cap Q \neq \emptyset$. Assim, está provado a propriedade (ii).

Como acima, $\tilde{\mathcal{G}}_h$ é no máximo enumerável. A família $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}_i$ é o que procuramos. De fato, ela é no máximo enumerável, sendo a união de enumeráveis famílias de

conjuntos enumeráveis ou finitos. Além disso, se Q é um cubo de $\mathcal{G}$, portanto de $\mathcal{G}_h$ para algum h , então temos 2 possibilidades:

- (i) Se $Q \in \Gamma$, então $Q \subset \hat{Q}$.
- (ii) Se $Q \notin \Gamma$, existirá um cubo $P \in \Gamma_h$ com $P \cap Q \neq \emptyset$. Sabendo que $Q \in \mathcal{G}_h$ e $P \in \Gamma_h$ então

$$r(Q) \leq 2^{1-h}M = 2 \cdot 2^{-h}M \leq 2r(P).$$

Como $P \cap Q \neq \emptyset$, então os dois cubos se intersectam, logo a distância entre seus centros é controlada por seus raios

$$|x_Q - x_P| \leq r(Q) + r(P).$$

Como $r(Q) \leq 2r(P)$, temos

$$|x_Q - x_P| \leq 3r(P).$$

Agora, tome um ponto $y \in Q$, daí

$$|y - x_Q| \leq r(Q) \leq 2r(P),$$

logo

$$|y - x_P| \leq |y - x_Q| + |x_Q - x_P| \leq 2r(P) + 3r(P) = 5r(P).$$

Isso mostra que $y \in \hat{P}$, pois $\hat{P}$ é o cubo concêntrico com P e raio $5r(P)$. Como y era arbitrário $Q \subset \hat{P}$.

Portanto, para todo $Q \in \mathcal{G}$, ou $Q \in \Gamma$ ou existe $P \in \Gamma$ tal que $Q \subset \hat{P}$. Ou seja,

$$\bigcup_{P \in \Gamma} \hat{P} \supset \bigcup \mathcal{G}.$$

■

Capítulo 2

Quase-Mínimos

2.1 Preliminares

Sob hipóteses adequadas de convexidade (ou quase-convexidade no caso de funções com valores vetoriais) da função $F(x, u, z)$ com respeito à variável z , Giusti [12] mostra que o funcional

$$\mathcal{F}(u, \Omega) := \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx, \quad (2.1)$$

atinge seu valor mínimo entre as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ que assumem valores dados na fronteira de Ω . O autor faz uso de definições de semicontinuidade inferior sequencial, abreviadamente por (*LSC*), além de usar a convexidade de F para trocar a propriedade de ser fortemente *LSC* para ser fracamente *LSC*. O principal resultado do capítulo 4 do livro do Enrico nos diz:

Teorema. *Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, seja M um conjunto fechado em $\mathbb{R}^N$, e seja $\mathcal{F}(u)$ um funcional semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W_{loc}^{1,p}(\Omega, M)$, com $p > 1$. Seja V um subconjunto fracamente fechado de $W^{1,p}(\Omega, M)$, e suponha que $\mathcal{F}$ é coercivo em V , isto é*

$$\lim_{\|u\|_{1,p} \rightarrow \infty, u \in V} \mathcal{F}(u) = +\infty.$$

Então, $\mathcal{F}$ atinge seu mínimo em V .

Resta o problema de determinar se, e sob quais condições, a função minimizante u possui propriedades adicionais de regularidade, além daquelas derivadas do fato de pertencer à classe $W^{1,p}$. A este problema de regularidade dedicaremos este trabalho.

Daqui em diante, o nosso funcional $\mathcal{F} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. Quando não houver risco de ambiguidade na notação, denotaremos $\mathcal{F}(u, \Omega) = \mathcal{F}(u)$. A função u é uma função escalar, isto é, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com a ressalva que existem resultados para funções vetoriais mas que não iremos nos atentar a este tipo de função. Ademais, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory.

Para tornar os resultados independentes do problema de valor de fronteira (ou melhor, para separar a regularidade interior, que não depende dos dados de fronteira, da regularidade na fronteira), observamos em primeiro lugar que é possível considerar funções minimizantes que são integráveis apenas localmente. Mais precisamente, suponhamos que a função $F(x, u, z)$ satisfaz a desigualdade

$$|F(x, u, z)| \leq L|z|^p + b(x)|u|^\gamma + a(x) \quad (2.2)$$

com ¹ $1 < p \leq \gamma < p^*$, e seja $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$.

Definição 2.1 Dizemos que, $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ é um mínimo local do funcional $\mathcal{F}$ se para toda $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, com $K := \text{supp } \varphi \subset \subset \Omega$, tivermos

$$\mathcal{F}(u, K) \leq \mathcal{F}(u + \varphi, K). \quad (2.3)$$

Observação 2.1 Uma forma equivalente de (2.2), por vezes mais útil em cálculos, é

$$|F(x, u, z)| \leq L(|z| + \vartheta(x, u))^p, \quad (2.4)$$

onde

$$\vartheta(x, u)^p = b(x)|u|^\gamma + a(x). \quad (2.5)$$

Observação 2.2 No que se segue, assumiremos sempre que $p < n$. O caso $p \geq n$ é mais simples em muitos aspectos, pois pelas imersões de SOBOLEV a função u pertence a todo L^q (se $p = n$) ou é Hölder-contínua (quando $p > n$).

Como vemos de (2.3), as integrais são sempre calculadas em domínios estritamente contidos em Ω e, de modo geral, não se exige que um mínimo local satisfaça $\mathcal{F}(u, \Omega) < +\infty$. Por exemplo, uma função harmônica na bola unitária B é um mínimo local para a integral de Dirichlet

$$\mathcal{D}(u) = \int_B |Du|^2 dx,$$

¹A hipótese $\gamma \geq p$ não é restritiva, pois para $\gamma < p$ temos $|u|^\gamma \leq |u|^p + 1$.

pois, se u é harmônica temos $\Delta u = 0$. Daí, dado $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, pelo Teorema de Green, temos

$$\int_K Du \cdot D\varphi = - \int_K \varphi \Delta u = 0$$

observando que

$$\mathcal{D}(u + \varphi, K) = \int_K |D(u + \varphi)|^2 dx = \int_K |Du|^2 dx + \int_K Du \cdot D\varphi dx + \int_K |D\varphi|^2 dx,$$

segue que

$$\mathcal{D}(u + \varphi, K) = \int_K |Du|^2 dx + \int_K |D\varphi|^2 dx \geq \int_K |Du|^2 dx = \mathcal{D}(u, K).$$

No entanto, u pode não pertencer a $W^{1,2}(B)$. Isso é observado considerando a função de duas variáveis (dada em coordenadas polares)

$$u(x, y) = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2},$$

que é harmônica no disco unitário B , mas cuja integral de Dirichlet

$$\int_B |Du|^2 dx = \int_B \frac{dx dy}{[(x+1)^2 + y^2]^2}$$

é infinita. Portanto, embora u seja um mínimo local, $u \notin W^{1,2}(B)$, pois a norma em $L^2(B)$ do gradiente de u vai para infinito, ou seja, mínimos locais podem ter energia global infinita.

Por outro lado, se um mínimo local u pertence a $W^{1,p}(\Omega)$, então u minimiza $\mathcal{F}$ entre todas as funções v em $W^{1,p}(\Omega)$ que assumem na fronteira o mesmo valor que u , isto é, tais que $v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, seja $\varphi = v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, existe $(\varphi_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \rightarrow \varphi$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Para cada k temos

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \mathcal{F}(u, \text{supp } \varphi_k) + \mathcal{F}(u, \Omega \setminus \text{supp } \varphi_k).$$

Como $\varphi_k = 0$ fora do suporte, temos

$$\mathcal{F}(u + \varphi_k, \Omega) = \mathcal{F}(u + \varphi_k, \text{supp } \varphi_k) + \mathcal{F}(u, \Omega \setminus \text{supp } \varphi_k),$$

e, por u ser mínimo local, obtém-se

$$\mathcal{F}(u, \text{supp } \varphi_k) \leq \mathcal{F}(u + \varphi_k, \text{supp } \varphi_k),$$

ou seja, fica claro que

$$\mathcal{F}(u, \Omega) \leq \mathcal{F}(u + \varphi_k, \Omega).$$

Agora, usando a continuidade de F nas últimas entradas, temos a convergência q.t.p. abaixo

$$F(x, u + \varphi_k, D(u + \varphi_k)) \rightarrow F(x, u + \varphi, D(u + \varphi)),$$

e utilizando o crescimento de F , conseguimos uma majoração por uma função em $L^1(\Omega)$, daí usamos o Teorema da Convergência Dominada, que nos garante

$$\mathcal{F}(u + \varphi_k, \Omega) \rightarrow \mathcal{F}(u + \varphi, \Omega) = \mathcal{F}(v, \Omega) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Portanto, fica claro que $\mathcal{F}(u, \Omega) \leq \mathcal{F}(v, \Omega)$ para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$ que assume o mesmo valor de u na fronteira. Como os problemas de regularidade são essencialmente locais, podemos sempre supor, sem perda de generalidade, que u pertence a $W^{1,p}(\Omega)$.

2.2 Quase-Mínimos e Equações Diferenciais

Uma generalização útil da noção de mínimo local é a seguinte.

Definição 2.2 *Uma função $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ é um quase-mínimo do funcional $\mathcal{F}$, com constante $Q \geq 1$, por simplicidade Q -mínimo, se para toda $v \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$, com $K := \text{supp}(u - v) \subset\subset \Omega$, tivermos*

$$\mathcal{F}(u, K) \leq Q\mathcal{F}(v, K). \quad (2.6)$$

Se além disso $u \in W^{1,p}$, a relação anterior é verificada para toda v tal que $v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Fica claro pelo que foi dito que um mínimo local é um quase-mínimo, na verdade, os mínimos locais nada mais são do que 1-mínimos.

Observação 2.3 *Mais geralmente, pode-se supor que em vez de (2.6) tenhamos (Hong [17]):*

$$\mathcal{F}(u, K) \leq Q\mathcal{F}(v, K) + Q \int_K (|Dv| + \vartheta(x, v))^p dx,$$

ou, o que é o mesmo por (2.4):

$$\mathcal{F}(u, K) \leq Q \int_K (|Dv| + \vartheta(x, v))^p dx. \quad (2.7)$$

Poderíamos também tomar a constante Q dependente do conjunto compacto K , sem prejuízo para a maioria dos resultados que provaremos, uma vez que, como observamos, eles são essencialmente de caráter local. Naturalmente, neste caso, as várias constantes que aparecem nos enunciados dependeriam do conjunto compacto em questão.

A introdução dos quase-mínimos é justificada pelos seguintes resultados. Começemos por recordar a noção de solução fraca de uma equação diferencial parcial. Vamos considerar equações na forma de divergência:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, u(x), Du(x)) - B(x, u(x), Du(x)) = 0. \quad (2.8)$$

Observação 2.4 A equação (2.8) acima representa a soma de $i = 1$ até n . Ademais, a notação A_i representa uma entrada do vetor $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ assim como os D_i são as derivadas parciais do vetor gradiente $(D_1, D_2, \dots, D_n)$.

Definição 2.3 Uma função $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca, ou uma solução no sentido das distribuições da eq. (2.8) se, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tivermos

$$\int_{\Omega} \{A_i(x, u(x), Du(x)) D_i \varphi + B(x, u(x), Du(x)) \varphi\} dx = 0. \quad (2.9)$$

Formalmente, a eq. (2.9) é obtida de (2.8) multiplicando por φ e integrando o primeiro termo por partes. Isso é formal porque para fazer integração por partes supomos implicitamente que u tem derivadas suficientes e que A_i é diferenciável. Mas, no sentido fraco, não sabemos isso a priori. Por outro lado, em (2.9) não assumimos que a função u possui derivadas segundas, de modo que a equação faz sentido mesmo para funções $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$. É claro que, as duas formas da equação se tornam equivalentes se for possível integrar por partes em (2.9), isto é, quando a função u possui derivadas segundas e, naturalmente, os coeficientes A_i são diferenciáveis.

Para mostrar a relação entre soluções fracas e quasi-mínimos, começemos examinando o caso simples das equações lineares

$$\int a_{ij}(x) D_j u D_i \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad (2.10)$$

em que os coeficientes $a_{ij}(x)$ são funções limitadas, assim fixamos

$$\|A(x)\| := \sup_{|\xi|=1} |A(x)\xi| \leq M \quad (2.11)$$

onde $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ é a matriz dos coeficientes. Além disso, os coeficientes satisfazem as condições de elipticidade forte, dada por

$$a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \nu > 0. \quad (2.12)$$

Lembre-se que nas equações temos um somatório implícito, neste caso, um somatório duplo em i e j . Agora, seja $v \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ uma função que coincide com u fora de um

conjunto compacto $K \subset \Omega$. Escrevendo $\varphi = v - u$ em (2.10), obtemos

$$\int_K a_{ij} D_j u D_i u \, dx = \int_K a_{ij} D_j u D_i v \, dx$$

e, usando (2.11) e (2.12), chegamos

$$\nu \int_K |Du|^2 \, dx \leq M \int_K |Du| |Dv| \, dx \leq M \left(\int_K |Du|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_K |Dv|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

logo,

$$\int_K |Du|^2 \, dx \leq \frac{M^2}{\nu^2} \int_K |Dv|^2 \, dx$$

donde segue imediatamente que u é um Q -mínimo da integral de Dirichlet, com $Q = M^2 \nu^{-2}$. Mais geralmente, podemos considerar soluções fracas de (2.9), com os coeficientes $A_i(x, u, z)$ satisfazendo a condição de elipticidade uniforme

$$A_i(x, u, z) z_i \geq |z|^p - b_1(x) |u|^\gamma - a_1(x), \quad (2.13)$$

com $1 < p \leq \gamma < p^* = \frac{np}{n-p}$ e as estimativas

$$|A(x, u, z)| \leq L |z|^{p-1} + b_2(x) |u|^\sigma + a_2(x), \quad (2.14)$$

com $\sigma = \gamma \frac{p-1}{p}$. Em relação ao termo $B(x, u, z)$, podemos distinguir dois casos. O primeiro, mais simples em muitas abordagens, é o das condições de crescimento controlado, dada por

$$|B(x, u, z)| \leq H |z|^\tau + b_3(x) |u|^\delta + a_3(x), \quad (2.15)$$

com $\tau = p \frac{\gamma-1}{\gamma}$ e $\delta = \gamma \frac{p^*-1}{p^*}$. Suporemos que as funções b_i e a_i são positivas, com $a_1, a_2^{\frac{p}{p-1}}, a_3^{\frac{p^*}{p^*-1}} \in L^1$, e $b_1, b_2^{\frac{p}{p-1}}, b_3^{\frac{p^*}{p^*-1}} \in L^{\frac{p^*}{p^*-p}}$. Temos o seguinte resultado

Teorema 2.1 *Seja $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca da Eq. (2.8), com coeficientes A e B satisfazendo as condições (2.13), (2.14) e (2.15). Então, u é um quase-mínimo do funcional $\mathcal{J} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$\mathcal{J}(u, \Omega) = \int_\Omega (|Du|^p + b(x) |u|^\gamma + a(x)) \, dx, \quad (2.16)$$

com

$$b(x) = b_1 + b_2^{\frac{p}{p-1}} + b_3^{\frac{p^*}{p^*-1}} \in L^{\frac{p^*}{p^*-p}}$$

e

$$a(x) = a_1(x) + a_2(x)^{\frac{p}{p-1}} + a_3(x)^{\frac{p^*}{p^*-1}} + b^{\frac{p^*}{p^*-p}} \in L^1.$$

Demonstração. Seja $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}$, com $K = \text{supp}(u - v) \subset\subset \Omega$. Tomando $\varphi = u - v$ em (2.9), obtemos

$$\int_K A_i(x, u, Du) D_i u \, dx = \int_K A_i(x, u, Du) D_i v \, dx + \int_K B(x, u, Du)(v - u) \, dx$$

e, usando as relações (2.13)–(2.15):

$$\begin{aligned} \int_K |Du|^p \, dx &\leq \left(\int_K b_1 |u|^\gamma \, dx + \int_K a_1 \, dx \right) \\ &\quad + \left(L \int_K |Du|^{p-1} |Dv| \, dx + \int_K b_2 |u|^\sigma |Dv| \, dx + \int_K a_2 |Dv| \, dx \right) \\ &\quad + \left(H \int_K |Du|^\tau |u - v| \, dx + \int_K b_3 |u|^\delta |u - v| \, dx + \int_K a_3 |u - v| \, dx \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usaremos a desigualdade de Young e a desigualdade de Hölder para obter desigualdades adequadas para o nosso problema. Assim, usando Young na forma generalizada (A.2), tomando $\epsilon > 0$ e $q, p > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos

$$|Du|^{p-1} |Dv| \leq \epsilon |Du|^{(p-1)q} + c(\epsilon) |Dv|^p = \epsilon |Du|^p + c(\epsilon) |Dv|^p$$

daí

$$\int_K |Du|^{p-1} |Dv| \, dx \leq \epsilon \int_K |Du|^p \, dx + c(\epsilon) \int_K |Dv|^p \, dx. \quad (2.18)$$

Agora, passemos para outra parcela de (2.17). Usamos a desigualdade de Hölder com expoentes p e $\frac{p}{p-1}$, donde

$$\int_K b_2 |u|^\sigma |Dv| \, dx \leq \left(\int_K |Dv|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_K (b_2 |u|^\sigma)^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Agora, observando que

$$(b_2 |u|^\sigma)^{\frac{p}{p-1}} = b_2^{\frac{p}{p-1}} |u|^{\sigma \cdot \frac{p}{p-1}} = b_2^{\frac{p}{p-1}} |u|^\gamma$$

aplicamos a desigualdade de Young, com $a = \left(\int_K |Dv|^p \right)^{1/p}$ e $b = \left(\int_K b_2^{\frac{p}{p-1}} |u|^\gamma \right)^{\frac{p-1}{p}}$, temos

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{p} \int_K |Dv|^p + \frac{p-1}{p} \int_K b_2^{\frac{p}{p-1}} |u|^\gamma.$$

Daí, considerando $c = \max\{\frac{1}{p}, \frac{p-1}{p}\}$, obtemos

$$\int_K b_2 |u|^\sigma |Dv| \, dx \leq c \left\{ \int_K |Dv|^p \, dx + \int_K b_2^{\frac{p}{p-1}} |u|^\gamma \, dx \right\}. \quad (2.19)$$

Fazendo esse mesmo processo nas outras parcelas de (2.17), obtemos as desigualdades

$$\int_K a_2 |Dv| dx \leq c \left\{ \int_K |Dv|^p dx + \int_K a_2^{\frac{p}{p-1}} dx \right\}; \quad (2.20)$$

$$\int_K |Du|^\tau |u - v| dx \leq \epsilon \int_K |Du|^p dx + c(\epsilon) \int_K |u - v|^\gamma dx; \quad (2.21)$$

$$\int_K b_3 |u|^\delta |u - v| dx \leq \epsilon \int_K |u - v|^{p^*} dx + c(\epsilon) \int_K b_3^{\frac{p^*}{p^*-1}} |u|^\gamma dx; \quad (2.22)$$

$$\int_K a_3 |u - v| dx \leq \epsilon \int_K |u - v|^{p^*} dx + c(\epsilon) \int_K a_3^{\frac{p^*}{p^*-1}} dx. \quad (2.23)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Young na segunda desigualdade abaixo para os expoentes $\frac{\gamma}{p^*} = \frac{1}{b}$ e $\frac{p^* - \gamma}{p^*} = \frac{1}{a}$, com $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, segue que

$$b|u|^\gamma \leq c(\gamma)(b|v|^\gamma + b|u - v|^\gamma) \leq \epsilon|u - v|^{p^*} + c(\gamma, \epsilon)b^{\frac{p^*}{p^* - \gamma}} + c(\gamma)b|v|^\gamma,$$

e pelo Teorema de Sobolev A.1, sabemos que se $\varphi = u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\|u - v\|_{p^*} \leq C \|D(u - v)\|_p,$$

além disso, usando que $|Du - Dv|^p \leq c(|Du|^p + |Dv|^p)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_K |u - v|^{p^*} dx &\leq c \left\{ \int_K (|Du|^p + |Dv|^p) dx \right\}^{\frac{p^*}{p}} \\ &= c \left\{ \int_K (|Du|^p + |Dv|^p) dx \right\}^{\frac{p^*}{p} - 1} \int_K (|Du|^p + |Dv|^p) dx. \end{aligned}$$

Observamos agora que é possível supor que

$$\int_K (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx > \int_K |Dv|^p dx$$

pois, caso contrário, teríamos trivialmente $\mathcal{J}(u, K) \leq \mathcal{J}(v, K)$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \int_K |u - v|^{p^*} dx &\leq c \left\{ \int_K (2|Du|^p + b|u|^\gamma) dx \right\}^{\frac{p^*}{p} - 1} \int_K (|Du|^p + |Dv|^p) dx \\ &\leq c(\|Du\|_p, \|u\|_{p^*}, \|b\|_{\frac{p^*}{p^* - \gamma}}) \int_K (|Du|^p + |Dv|^p) dx. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Introduzindo (2.18)-(2.24) em (2.17) e adicionado a ambos os membros a quantidade

$$\int_K (b|u|^\gamma + a(x)) dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_K (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx &\leq c \epsilon \int_K |Du|^p dx + c(\epsilon) \int_K |Dv|^p dx \\ &\quad + c(\epsilon) \int_K b|v|^\gamma dx + c(\epsilon) \int_K a dx + c(\epsilon), \end{aligned}$$

logo

$$(1 - c\epsilon) \int_K (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx \leq C_\epsilon \int_K |Dv|^p + b|v|^\gamma + a dx.$$

Assim, tomando ϵ suficientemente pequeno, temos

$$\int_K (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx \leq Q \int_K |Dv|^p + b|v|^\gamma + a dx,$$

isto é,

$$\mathcal{J}(u, K) \leq Q\mathcal{J}(v, K).$$

Note que a constante Q depende de u , como é permitido, mas não de v .

■

Consideremos agora o segundo caso, em que o termo $B(x, u, z)$ satisfaz hipóteses de crescimento natural ²

$$|B(x, u, z)| \leq H|z|^p + a_3(x), \quad (2.25)$$

com $0 \leq a_3 \in L^1(\Omega)$.

Neste caso, temos um teorema análogo ao anterior apenas para soluções limitadas da eq. (2.9). Isto explica porque omitimos o termo $b_3|u|^\delta$ em (2.25); podemos também assumir $b_1 = b_2 = 0$ em (2.13) e (2.14), e permitir que as constantes L, H e as funções a_i dependam de $M = \sup u$. Consideraremos o caso de uma equação ($N = 1$) e para o caso de um sistema de equações ($N > 1$) podemos obter um resultado análogo, desde que sejam dadas hipóteses adicionais.

Teorema 2.2 *Seja u uma solução limitada de (2.9), para $N = 1$, com as condições (2.13), (2.14) (com $b_1 = b_2 = 0$) e (2.25). Então, u é um quase-mínimo do funcional*

$$\mathcal{H}(u, \Omega) = \int_\Omega (|Du|^p + a(x)) dx, \quad (2.26)$$

onde

$$a(x) = a_1(x) + a_2(x)^{\frac{p}{p-1}} + a_3(x).$$

Demonstração Seja $v \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $K := \text{supp}(u - v) \subset\subset \Omega$, e suponha que $|v(x)| \leq M := \sup_\Omega |u|$. Tomando em (2.9)

$$\varphi = (u - v)^+ e^{\lambda(u-v)},$$

²A razão para esta terminologia reside no fato de que quando (2.8) é a equação de Euler de um funcional, temos $A = F_z$ e $B = F_u$. Se a função $F(z)$ cresce como $|z|^p$, é natural esperar que A cresça como $|z|^{p-1}$, enquanto o crescimento de B permanece o mesmo que o de F , isto é, $|z|^p$. Daí a distinção entre condições naturais e não-naturais (ou condições de crescimento controlado).

com $A^+ = \max\{A, 0\}$, e denotando por S o suporte de φ , obtemos através da regra do produto

$$\int_S A_i D_i u [1 + \lambda(u - v)] e^{\lambda(u-v)} dx = \int_S A_i D_i v [1 + \lambda(u - v)] e^{\lambda(u-v)} dx + \int_S B(u - v) e^{\lambda(u-v)} dx,$$

onde os coeficientes A_i e B são obviamente calculados em $(x, u(x), Du(x))$. Usando (2.13), (2.14) e (2.25), e lembrando que $u - v \geq 0$ em S , deduzimos

$$\begin{aligned} \int_S |Du|^p [1 + \lambda(u - v)] e^{\lambda(u-v)} dx &\leq \int_S a_1 [1 + \lambda(u - v)] e^{\lambda(u-v)} dx \\ &\quad + \int_S (L|Du|^{p-1} + a_2) [1 + \lambda(u - v)] e^{\lambda(u-v)} |Dv| dx \\ &\quad + \int_S (H|Du|^p + a_3)(u - v) e^{\lambda(u-v)} dx, \end{aligned}$$

daí, uma vez que $|u|$ e $|v|$ são ambos limitados por M , temos

$$\begin{aligned} \int_S |Du|^p [1 + \lambda(u - v)] e^{\lambda(u-v)} dx &\leq c \int_S a_1 dx + c \int_S (L|Du|^{p-1} + a_2) |Dv| dx \\ &\quad + c \int_S a_3 dx + \int_S H|Du|^p (u - v) e^{\lambda(u-v)} dx. \end{aligned}$$

Escolhendo agora $\lambda = H$, a última integral do lado direito pode ser subtraída do lado esquerdo. Além disso, pela estimativa usual

$$AB \leq \epsilon A^{\frac{p}{p-1}} + c(\epsilon) B^p,$$

obtemos

$$\int_S (L|Du|^{p-1} + a_2) |Dv| \leq c\epsilon \int_S |Du|^p + C(\epsilon) \int_S \left(|Dv|^p + a_2^{\frac{p}{p-1}} \right).$$

Substituindo na desigualdade principal e lembrando que $u - v$ é limitado, temos

$$(1 - c\epsilon) \int_S |Du|^p dx \leq C(\epsilon) \int_S |Dv|^p dx + C(\epsilon) \int_S a dx$$

daí, tomando ϵ suficientemente pequeno

$$\int_S |Du|^p dx \leq C \int_S |Dv|^p dx + C \int_S a dx.$$

Agora, somando na integral a ambos os membros

$$\int_S a dx$$

segue que

$$\int_S (|Du|^p + a) dx \leq c \int_S (|Dv|^p + a) dx. \quad (2.27)$$

Similarmente, escolhendo

$$\varphi = (v - u)^+ e^{\lambda(v-u)},$$

obtemos a desigualdade

$$\int_T (|Du|^p + a) dx \leq c \int_T (|Dv|^p + a) dx,$$

onde $T = \text{supp } \varphi$. A conclusão segue somando a desigualdade acima com (2.27).

Finalmente, se v não verifica a relação $|v| \leq M$, definimos $\bar{v} = \min\{M, \max\{v, -M\}\}$, ou seja,

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} M, & v(x) > M \\ v(x), & -M \leq v(x) \leq M \\ -M, & v(x) < -M. \end{cases}$$

Assim, note que $|\bar{v}| \leq M$ daí, como $\bar{v} \in W^{1,p}(\Omega)$, pois é a composição de funções Lipschitz, segue da primeira prova que

$$\mathcal{H}(u, K) \leq c\mathcal{H}(\bar{v}, K).$$

Por outro lado $|D\bar{v}| \leq |Dv|$. Desta forma concluímos imediatamente

$$\mathcal{H}(u, K) \leq c\mathcal{H}(\bar{v}, K) \leq c\mathcal{H}(v, K).$$

■

Exemplo 2.1 (Frehse [9]) Observamos que, no teorema acima, a hipótese de que u é limitada é essencial. Na verdade, como veremos mais adiante, no caso escalar ($N = 1$), todo quase-mínimo do funcional $\mathcal{H}$ (ou, mais geralmente, de qualquer funcional regular $\mathcal{F}$) é Hölder-contínuo e, portanto, em particular, é limitado.

Por outro lado, a função

$$u(x) = 12 \log \log |x|^{-1}$$

é uma solução da equação de Euler do funcional

$$\mathcal{F}(u) = \int_D \left\{ 1 + \frac{1}{1 + e^{u(\log |x|)^{-12}}} \right\} |Du|^2 dx$$

no disco $D \subset \mathbb{R}^2$ de raio e^{-1} , ou seja, temos um exemplo de uma solução que não é limitada, então pela explicação anterior, a solução não pode ser um quase-mínimo do funcional acima.

Observação 2.5 Se $N = 1$, podemos considerar uma subsolução de (2.9), isto é, uma função $u(x)$ que satisfaz a desigualdade

$$\int_{\Omega} \{A_i(x, u(x), Du(x)) D_i \varphi + B(x, u(x), Du(x)) \varphi\} dx \leq 0 \quad (2.28)$$

para toda $\varphi \geq 0$. Se u é uma subsolução limitada, podemos repetir a demonstração anterior,³ e concluir que u é um **sub-quase-mínimo do funcional $\mathcal{H}$** , ou seja, que

$$\mathcal{H}(u, K) \leq Q \mathcal{H}(v, K)$$

para toda $v \leq u$, com $K := \text{supp}(u - v) \subset \Omega$. Analogamente, uma supersolução limitada de (2.9) é um **super-quase-mínimo** de $\mathcal{H}$.

Quando passamos de uma única equação para sistemas de equações, a limitação da solução já não é mais suficiente. Na verdade, já para $N = n = 2$ existem sistemas satisfazendo as condições do teorema anterior, e que possuem soluções descontínuas limitadas, como se pode ver no exemplo seguinte.

Exemplo 2.2 (Frehse [8]) A função

$$u(x) = \begin{cases} \sin \left(\log \log \frac{1}{|x|} \right) \\ \cos \left(\log \log \frac{1}{|x|} \right) \end{cases}$$

é uma solução fraca em $\mathbb{R}^2$ do sistema

$$\Delta u^\alpha = B^\alpha(u, Du), \quad \alpha = 1, 2$$

com

$$B(u, z) = - \begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^2 - u^1 \end{pmatrix} |z|^2,$$

verificando condições de crescimento natural com $p = 2$. Veremos mais adiante neste capítulo que todo quase-mínimo pertence a $W_{\text{loc}}^{1,2+\epsilon}$ para algum $\epsilon > 0$. Portanto, se a função u acima fosse um quase-mínimo, ela pertenceria a $W_{\text{loc}}^{1,2+\epsilon}$, e pelo Teorema de Sobolev seria Hölder-contínua, no entanto, a função u não é contínua na origem.

Observação 2.6 Como destacado anteriormente, é possível obter um resultado análogo ao teorema anterior para o caso em que u é uma função vetorial, ou seja, para o caso em que $N > 1$. Para isso, é necessário uma hipótese adicional além da limitação. Para mais detalhes ver [12], pág. 182.

³Naturalmente, neste caso uma limitação inferior para o termo B é suficiente. Além disso, no caso de crescimento controlado, podemos omitir a hipótese de que u é limitada.

Um segundo exemplo de quase-mínimo surge de aplicações *quase-regulares*. Recordamos a definição deste conceito.

Definição 2.4 *Uma aplicação $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é quase-regular se existe uma constante $A > 0$ tal que*

$$|Du|^n \leq A \det(Du).$$

Se, além disso, u for um homeomorfismo, a aplicação é denominada quase-conforme.

Teorema 2.3 *Uma aplicação quase-regular $u \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é um quase-mínimo do funcional*

$$\mathcal{K}(u, \Omega) = \int_{\Omega} |Du|^n dx.$$

Demonstração. Seja φ uma aplicação de Ω em $\mathbb{R}^n$, com suporte $K \subset\subset \Omega$. Assim, como $u = \varphi + u$ na ∂K , então⁴

$$\int_K \det(Du) dx = \int_K \det(Du + D\varphi) dx.$$

Usando a desigualdade de Hadarmard A.9, onde $|D(u + \varphi)| = (\sum_{i,j} |D_{ij}(u + \varphi)|^2)^{1/2}$, segue

$$\int_K \det(Du) dx = \int_K \det(Du + D\varphi) dx \leq c \int_K |D(u + \varphi)|^n dx$$

Assim, pela definição de quase-regularidade temos

$$\mathcal{K}(u, K) = \int_K |Du|^n dx \leq C \int_K |D(u + \varphi)|^n dx = CK(u + \varphi, K)$$

onde concluímos que u é um quase-mínimo. ■

Exemplo 2.3 *Outro exemplo de quase-mínimo provém de mínimos com obstáculos. Seja $\psi(x)$ uma função em $W^{1,p}(\Omega)$, e suponha que $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ satisfaz a desigualdade $u(x) \geq \psi(x)$ em Ω e, além disso,*

$$\mathcal{F}(u, K) \leq \mathcal{F}(w, K),$$

para todo $w \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$, com $K = \text{supp}(u - w) \subset\subset \Omega$ e $w \geq \psi$. Em outras palavras, u minimiza o funcional $\mathcal{F}$ entre todas as funções cujo gráfico está acima do obstáculo ψ .

Agora seja v uma função genérica em $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$, que em geral não está acima do obstáculo, com $K = \text{supp}(u - v) \subset\subset \Omega$. Definindo $\Sigma = \{x \in \Omega : v(x) \geq \psi(x)\}$ e $w = \max\{v, \psi\}$, temos que $w \geq \psi$ e $\text{supp}(u - w) \subset K \subset\subset \Omega$, daí⁵

$$\mathcal{F}(u, K) \leq \mathcal{F}(w, K) = \mathcal{F}(v, K \cap \Sigma) + \mathcal{F}(\psi, K \setminus \Sigma)$$

⁴Se duas funções g e h coincidem em uma vizinhança de $\partial\Omega$, temos $\int_{\Omega} \det(Dg) dx = \int_{\Omega} \det(Dh) dx$. (Ver [12], pag. 146)

⁵Por simplicidade, assumimos que $F(x, u, z) \geq 0$. Veja, no entanto, a Observação 2.7.

$$\leq \mathcal{F}(v, K) + \mathcal{F}(\psi, K),$$

e, portanto, adicionando a ambos os membros o termo $\mathcal{F}(\psi, K)$, obtemos

$$\mathcal{F}(u, K) + \mathcal{F}(\psi, K) \leq \mathcal{F}(v, K) + \mathcal{F}(\psi, K) + \mathcal{F}(\psi, K),$$

donde, concluimos que

$$\mathcal{G}(u, K) \leq 2\mathcal{G}(v, K),$$

onde definimos

$$\mathcal{G}(u, A) = \int_A [F(x, u, Du) + \gamma(x)] dx$$

e

$$\gamma(x) = F(x, \psi(x), D\psi(x)).$$

É imediatamente verificável que $F(x, u, z) + \gamma(x)$ satisfaz as mesmas estimativas (2.2) que F , com $a + \gamma$ em vez de a . Em conclusão, um mínimo, e também um quase-mínimo, do funcional $\mathcal{F}$, com obstáculo ψ , é um quase-mínimo livre do funcional $\mathcal{G}$, isto é, não existe mais restrição $u \geq \psi$.

Observação 2.7 O funcional

$$\mathcal{J}(u, \Omega) = \int_{\Omega} (|Du|^p + b|u|^\gamma + a(x)) dx$$

é típico na teoria dos quase-mínimos, uma vez que é possível reduzir a ele todas as integrais do tipo

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx,$$

quando a função $F(x, u, z)$ satisfaz as desigualdades

$$|z|^p - b|u|^\gamma - a(x) \leq F(x, u, z) \leq L|z|^p + b|u|^\gamma + a(x), \quad (2.29)$$

com $L \geq 1$, $0 \leq a \in L^1(\Omega)$, $\gamma < p^*$ e $b \in L^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}}$.

Mais precisamente, se u é um Q -mínimo para $\mathcal{F}$, então ele é um Q -mínimo, com uma constante Q diferente, para o funcional $\mathcal{J}$. Reciprocamente, um Q -mínimo para $\mathcal{J}$ é também um Q -mínimo para $\mathcal{F} + \int (b|u|^\gamma + a) dx$.

A justificativa segue as mesmas linhas daquela do Teorema 2.1. Tomando qualquer função v tal que $u - v$ tem suporte $K \subset\subset \Omega$, temos

$$\begin{aligned} \int_K (|Du|^p - b|u|^\gamma - a) dx &\leq \int_K F(x, u, Du) dx \\ &\leq Q \int_K F(x, v, Dv) dx \\ &\leq Q \int_K (L|Dv|^p + b|v|^\gamma + a) dx \end{aligned}$$

e, portanto, adicionando os termos finitos necessários em ambos os lados temos

$$\mathcal{J}(u, K) \leq M \int_K (|Dv|^p + b|v|^\gamma + b|u|^\gamma + a) dx$$

e a conclusão segue como no Teorema 2.1, onde trabalhamos com a estimativa de $b|u|^\gamma$ para obter

$$\mathcal{J}(u, K) \leq Q' \mathcal{J}(v, K).$$

Reciprocamente, suponha que u é um Q -mínimo para $\mathcal{J}$, ou seja,

$$\int_K (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx \leq Q \int_K (|Dv|^p + b|v|^\gamma + a) dx.$$

Da desigualdade estrutural (2.29),

$$F(x, u, Du) \leq L|Du|^p + b|u|^\gamma + a$$

logo,

$$F(x, u, Du) + b|u|^\gamma + a \leq L|Du|^p + 2b|u|^\gamma + 2a.$$

Integrando sobre K e tomando $C = \max\{L, 2\}$ segue que

$$\int_K (F(x, u, Du) + b|u|^\gamma + a) \leq C \int_K (|Du|^p + b|u|^\gamma + a).$$

Portanto,

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, K) \leq C \mathcal{J}(u, K).$$

Usando a hipótese de quase-minimalidade de $\mathcal{J}$, temos

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, K) \leq CQ \int_K (|Dv|^p + b|v|^\gamma + a) dx.$$

Agora, usando a estimativa inferior de (2.29), obtemos

$$|Dv|^p + b|v|^\gamma + a \leq F(x, v, Dv) + 2b|v|^\gamma + 2a,$$

desta forma

$$\int_K (|Dv|^p + b|v|^\gamma + a) \leq C \int_K (F(x, v, Dv) + b|v|^\gamma + a),$$

ou seja,

$$\int_K (|Dv|^p + b|v|^\gamma + a) \leq C \tilde{\mathcal{F}}(v, K).$$

Substituindo na nossa estimativa encontrada anteriormente, segue

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, K) \leq Q' \tilde{\mathcal{F}}(v, K), \quad \text{com } Q' = C^2 Q.$$

2.3 Quase-Mínimos Cúbicos

Uma definição mais geral do que a de quase-mínimos é a seguinte, que envolve apenas integrais sobre cubos de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.5 *Seja $Q > 0$. Uma função $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ é chamada de Q -mínimo cúbico para o funcional $\mathcal{F}$ se para todo cubo $Q_R \subset \Omega$ e para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(Q_R)$ tivermos*

$$\mathcal{F}(u, Q_R) \leq Q\mathcal{F}(u + \varphi, Q_R).$$

De modo análogo, considerando bolas de $\mathbb{R}^n$ em vez de cubos, poderíamos definir quase-mínimos esféricos. Em geral, pode-se definir um quase-mínimo com respeito a uma família uniparamétrica de domínios homotéticos relativamente compactos.

Observação 2.8 *É claro que um Q -mínimo é também um Q -mínimo cúbico ou esférico. Como efeito, seja $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ um Q -mínimo do funcional $\mathcal{F}$. Dado $Q_R \subset \Omega$ e $\varphi \in W_0^{1,p}(Q_R)$, defina $v = u + \varphi$ em Q_R e $v = u$ fora deste cubo. Logo, $v \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$. Agora, note que $u - v = -\varphi$ em Q_R e $u - v = 0$ fora deste cubo. Então $K := \text{supp}(u - v) \subset \subset Q_R$. Pela definição de Q -mínimo, temos*

$$\mathcal{F}(u, K) \leq Q\mathcal{F}(v, K).$$

Mas, em $Q_R - K$, temos $u = v$, logo adicionando $\mathcal{F}(u, Q_R - K)$ em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\mathcal{F}(u, Q_R) \leq Q\mathcal{F}(v, Q_R) = Q\mathcal{F}(u + \varphi, Q_R).$$

Em dimensão $n > 2$, as duas noções não coincidem, vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 2.4 (Giaquinta e Giusti [11]) *Seja $n > 2$ e seja u uma função homogênea de grau β , $0 > \beta > 1 - \frac{n}{2}$, regular em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sem pontos estacionários⁶, e não constante na fronteira de qualquer cubo de $\mathbb{R}^n$.⁷ Mostraremos que u é um Q -mínimo cúbico da integral de Dirichlet*

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx.$$

Será suficiente provar que em qualquer cubo $Q_R = Q(x_0, R)$, temos⁸

$$R \int_{Q_R} |Du|^2 dx \leq c \int_{\partial Q_R} |u - u_{\partial Q_R}|^2 d\mathcal{H}_{n-1}, \quad (2.30)$$

⁶Dizemos que u não tem pontos estacionários se $Du(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$.

⁷Um exemplo de tal função é $u(x) = |x|^\beta$.

⁸Denotamos por $\mathcal{H}_{n-1}$ a medida de Hausdorff $(n-1)$ -dimensional em $\partial\Omega$, que coincide com a medida de superfície usual quando $\partial\Omega$ é Lipschitz-contínua.

pois, por (A.7), se $v = u$ em ∂Q_R temos

$$\int_{\partial Q_R} |u - u_{\partial Q_R}|^2 d\mathcal{H}_{n-1} = \int_{\partial Q_R} |v - v_{\partial Q_R}|^2 d\mathcal{H}_{n-1} \leq cR \int_{Q_R} |Dv|^2 dx.$$

Podemos reduzir ao cubo $Q = Q(0, 1)$ fazendo uma mudança de variável $x_0 = Ry_0$ e $x = R(y_0 + y)$, isto é, enquanto x varia em Q_R o y varia em $Q(0, 1)$. Levando em conta a homogeneidade de u , temos

$$u(\lambda x) = \lambda^\beta u(x) \quad \Rightarrow \quad Du(\lambda x) = \lambda^{\beta-1} Du(x)$$

assim, temos

$$Du(x) = Du(R(y_0 + y)) = R^{\beta-1} Du(y_0 + y).$$

Desta forma, no lado esquerdo de (2.30) temos a partir da mudança de variável que

$$R \int_Q R^{2(\beta-1)} |Du(y_0 + y)|^2 R^n dy = R^{n-1+2\beta} \int_Q |Du(y_0 + y)|^2 dy. \quad (2.31)$$

Agora, olhando para o lado direito de (2.30) temos

$$u_{\partial Q_R} = \frac{1}{|\partial Q_R|} \int_{\partial Q_R} u(x) d\mathcal{H}_{n-1}(x)$$

que quando aplicada a mudança de variável, escrevendo $|\partial Q_R| = R^{n-1} |\partial Q|$ obtemos

$$u_{\partial Q_R} = \frac{1}{R^{n-1} |\partial Q|} \int_{\partial Q} u(R(y_0 + y)) R^{n-1} d\mathcal{H}_{n-1}(y) = R^\beta \oint_{\partial Q} u(y_0 + y) d\mathcal{H}_{n-1}(y).$$

Desta forma, aplicando a mudança de variável no integrando do lado direito de (2.30) temos

$$|u(x) - u_{\partial Q_R}(x)|^2 = R^{2\beta} |u(y_0 + y) - u_{\partial Q}(y_0 + y)|^2.$$

Integrando em ambos os lados com relação a x e usando a mudança de variável, segue que

$$\int_{\partial Q_R} |u(x) - u_{\partial Q_R}(x)|^2 d\mathcal{H}_{n-1}(x) = R^{2\beta+n-1} \int_{\partial Q} |u(y_0 + y) - u_{\partial Q}(y_0 + y)|^2 d\mathcal{H}_{n-1}(y)$$

Fazendo a expansão do quadrado do integrando, não é difícil ver que

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} |u(y_0 + y) - u_{\partial Q}(y_0 + y)|^2 d\mathcal{H}_{n-1}(y) &= |\partial Q| \left(\oint_{\partial Q} |u(y_0 + y)|^2 d\mathcal{H}_{n-1}(y) \right. \\ &\quad \left. - \left(\oint_{\partial Q} u(y_0 + y) d\mathcal{H}_{n-1}(y) \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Portanto, juntando (2.30), (2.31) e (2.32), obtemos

$$\int_Q |Du(y_0 + y)|^2 dy \leq c \left\{ \oint_{\partial Q} |u(y_0 + y)|^2 d\mathcal{H}_{n-1}(y) - \left(\oint_{\partial Q} u(y_0 + y) d\mathcal{H}_{n-1}(y) \right)^2 \right\}. \quad (2.33)$$

Considere que

$$F(y_0) := \int_Q |Du(y_0 + y)|^2 dy$$

e

$$G(y_0) := \int_{\partial Q} |u(y_0 + y)|^2 d\mathcal{H}_{n-1}(y) - \left(\int_{\partial Q} u(y_0 + y) d\mathcal{H}_{n-1}(y) \right)^2.$$

Ambas F e G são funções positivas contínuas, uma vez que u não é constante na fronteira de qualquer cubo de $\mathbb{R}^n$. A razão F/G é, portanto, limitada em conjuntos compactos e devemos apenas investigar seu comportamento quando $y_0 \rightarrow \infty$, ou seja, em conjuntos além dos compactos. Como já vimos, se u é homogênea de grau β então Du é homogênea de grau $\beta - 1$, mas com um método indutivo vê-se que se u é homogênea de grau β então $D^k u$ é homogênea de grau $\beta - k$. Assim, utilizando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, temos para todo $y \in Q$ que

$$u(y_0 + y) = u(y_0) + \langle Du(y_0), y \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 u(y_0) y, y \rangle + O(|y_0|^{\beta-3}),$$

em que o resto é dado por $r_2(y) = O(|y_0|^{\beta-3})$. Enquanto para a função gradiente, temos a expansão de primeira ordem

$$Du(y_0 + y) = Du(y_0) + \langle D^2 u(y_0), y \rangle + O(|y_0|^{\beta-2}).$$

Além disso, observando que $y \in Q$ é limitado, temos

$$\langle D^2 u(y_0), y \rangle \leq |D^2 u(y_0)| |y| \leq |D^2 u| \left(\frac{|y_0| |y_0|}{|y_0|} \right) \leq |y_0|^{\beta-2} |D^2 u(y_0/|y_0|)| \leq C |y_0|^{\beta-2},$$

deste modo a igualdade anterior torna-se

$$Du(y_0 + y) = Du(y_0) + O(|y_0|^{\beta-2}).$$

Mostremos que da última equação acima obtemos

$$F(y_0) = |Q| |Du(y_0)|^2 + O(|y_0|^{2\beta-3}). \quad (2.34)$$

Com efeito, tomando a norma ao quadro e integrando, e definindo $R_0(y) := O(|y_0|^{2\beta-3})$ temos

$$F(y_0) = \int_Q |Du(y_0)|^2 dy + 2 \int_Q \langle Du(y_0), R_0(y) \rangle dy + \int_Q |R_0(y)|^2 dy.$$

Para o primeiro termo, observe que

$$\int_Q |Du(y_0)|^2 dy = |Q| |Du(y_0)|^2,$$

enquanto que no segundo termo, tem-se

$$\left| \int_Q \langle Du(y_0), R_0(y) \rangle dy \right| \leq |Du(y_0)| \int_Q |R_0(y)| dy.$$

Agora, usando que

$$|Du(y_0)| \leq C|y_0|^{\beta-1} \quad e \quad |R_0(y)| \leq C|y_0|^{\beta-2},$$

segue que

$$\left| \int_Q \langle Du(y_0), R_0(y) \rangle dy \right| \leq |Du(y_0)| \int_Q |R_0(y)| dy \leq C|y_0|^{2\beta-3}.$$

Por fim, para o terceiro termo temos

$$\int_Q |R(y)|^2 dy \leq C|y_0|^{2(\beta-2)}|Q| = C|y_0|^{2\beta-4},$$

observando que $2\beta - 3 > 2\beta - 4$, então o termo dominante é $2\beta - 3$, donde segue (2.34).

Agora, olhemos para expansão de Taylor de ordem 2 da função u . Tomando a norma ao quadro e trabalhando com homogeneidade de u e Du ganhamos

$$|u(y_0 + y)|^2 = |u(y_0)|^2 + \langle Du(y_0), y \rangle^2 + 2u(y_0)\langle Du(y_0), y \rangle + u(y_0)\langle D^2u(y_0)y, y \rangle + O(|y_0|^{2\beta-3}). \quad (2.35)$$

Por outro lado, passando a integral média sobre a expansão de u e usando a simetria do cubo Q com centro na origem tem-se⁹

$$\int_{\partial Q} \langle Du(y_0), y \rangle d\mathcal{H}_{n-1}(y) = 0$$

e assim, conquistamos

$$\oint_{\partial Q} u(y_0 + y) d\mathcal{H}_{n-1}(y) = u(y_0) + \frac{1}{2} \oint_{\partial Q} \langle D^2u(y_0)y, y \rangle d\mathcal{H}_{n-1} + O(|y_0|^{\beta-3}).$$

Agora, podemos tomar a integral média de (2.35) e calcular a diferença com o quadrado da igualdade acima para obter $G(y_0)$. Observando que alguns dos termos serão absorvidos pelo erro por conta do grau de homogeneidade, temos

$$G(y_0) = \oint_{\partial Q} \langle Du(y_0), y \rangle^2 d\mathcal{H}_{n-1}(y) + O(|y_0|^{2\beta-3}) \geq c|Du(y_0)|^2 + O(|y_0|^{2\beta-3}). \quad (2.36)$$

Note agora que, como Du é homogêneo de grau $\beta - 1$ e nunca se anula, temos $|Du(y_0)| \geq c|y_0|^{\beta-1}$ (nesse caso $c = \min$), de modo que, por (2.34) e (2.36), existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$F(y_0) \leq |Q| |Du(y_0)|^2 + C_1|y_0|^{2\beta-3}$$

e

$$G(y_0) \geq c_1 |Du(y_0)|^2 - C_2|y_0|^{2\beta-3}.$$

Além disso, pela homogeneidade de Du , obtemos

$$\frac{|y_0|^{2\beta-3}}{|Du(y_0)|^2} \leq \frac{|y_0|^{2\beta-3}}{c_0^2|y_0|^{2\beta-2}} = \frac{1}{c_0^2|y_0|}$$

⁹Basta observar que $f(y) = \langle Du(y_0), y \rangle$ é uma função ímpar em um domínio simétrico centrado na origem.

que vai a zero quando $y_0 \rightarrow \infty$. Assim, segue que para F

$$F(y_0) \leq |Du(y_0)|^2 \left(|Q| + \frac{C_1}{c_0^2 |y_0|} \right)$$

e, para G

$$G(y_0) \geq |Du(y_0)|^2 \left(c_1 - \frac{C_2}{c_0^2 |y_0|} \right).$$

Fazendo a razão, ganhamos

$$\frac{F(y_0)}{G(y_0)} \leq \frac{|Q| + \frac{C_1}{c_0^2 |y_0|}}{c_1 - \frac{C_2}{c_0^2 |y_0|}}.$$

Deste modo, quando $y_0 \rightarrow \infty$ temos que a razão é limitada. Em conclusão, a razão F/G é limitada tanto em compactos quanto para y_0 grande, portanto é limitada sempre, deste modo (2.33) vale, e conseqüentemente, (2.30) vale, isto implica que a função $u(x)$ é um Q -mínimo cúbico para a integral de Dirichlet.

Por outro lado, u não é um Q -mínimo, pois a função $v = \min\{u, 1\}$ é diferente de u na bola unitária B , pois, por ter grau de homogeneidade negativo, a função u obrigatoriamente explode para o infinito conforme chegamos perto do centro da bola unitária B . Desta forma

$$\int_B |Dv|^2 dx = 0,$$

enquanto que

$$\int_B |Du|^2 dx \neq 0.$$

Portanto, u é um Q -mínimo cúbico mas não é um Q -mínimo para o funcional de Dirichlet. ■

A desigualdade inferior em (2.29) é bastante restritiva, em particular quando lidamos com funções u com valores em $\mathbb{R}^N$. Por exemplo, se $n = N = 2$, ela não é satisfeita pela função

$$F(z) = |z|^2 + 2 \det(z). \quad (2.37)$$

De fato, a condição (2.29) é apropriada no caso de funções $F(x, u, z)$ convexas em z , mas muito menos quando F é apenas quase-convexa. Neste caso, será preferível introduzir uma condição menos simples, porém mais geral.

A definição seguinte é um reforço da quase-convexidade.

Definição 2.6 Dizemos que o funcional

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, \Omega) = \int_{\Omega} \tilde{F}(x, u, Du) dx$$

é estritamente quase-convexo em $(x_0, u_0, z_0) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, se existe uma constante $\nu > 0$ tal que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} [\tilde{F}(x_0, u_0, z_0 + D\varphi) - \tilde{F}(x_0, u_0, z_0)] dx \geq \nu \int_{\Omega} |D\varphi|^p dx. \quad (2.38)$$

Correspondentemente, a função $\tilde{F}(x, u, z)$ é dita estritamente quase-convexa em (x_0, u_0, z_0) . Finalmente, dizemos que $\tilde{F}$ é estritamente quase-convexa se o é em todos os pontos, com a constante ν independente do ponto (x_0, u_0, z_0) .

Consideremos agora uma função $F(x, u, z)$ satisfazendo a estimativa

$$|F(x, u, z)| \leq c(|z| + \vartheta(x, u))^p \quad (2.39)$$

com

$$\vartheta(x, u)^p = b(x)|u|^\gamma + a(x).$$

Em vez de (2.29), assumiremos que existe uma função $\tilde{F}(z)$, dependendo apenas de z e estritamente quase-convexa em 0, tal que para todo $(x, u, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ temos

$$F(x, u, z) \geq \tilde{F}(z) - \vartheta(x, u)^p. \quad (2.40)$$

Adicionando possivelmente uma constante à função ϑ , podemos supor que $\tilde{F}(0) = 0$. Observamos que, como $|z|^p$ é estritamente quase-convexo em 0, com $\nu = 1$, (2.40) é realmente mais geral do que (2.29), pois (2.29) acaba se tornando um caso particular quando $\tilde{F} = |z|^p$.

No que diz respeito aos expoentes p e γ , e às funções $b(x)$ e $a(x)$, faremos as hipóteses habituais:

$$1 < p \leq n, \quad p \leq \gamma < p^* = \frac{pn}{n-p} \quad (2.41)$$

e

$$b(x) \in L^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}}, \quad a(x) \in L^1. \quad (2.42)$$

O seguinte teorema é válido:

Teorema 2.4 (*Desigualdade de Caccioppoli*) *Suponha que a função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é um quase-mínimo cúbico para o funcional*

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx \quad (2.43)$$

com $F(x, u, z)$ satisfazendo (2.39) e (2.40) acima. Então, existe $R_0 > 0$, dependendo apenas de u , tal que para $R < R_0$ e $Q_R \subset\subset \Omega$, temos

$$\int_{Q_{R/2}} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx \leq c \left\{ \frac{1}{R^p} \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx + |Q_R| \left(\int_{Q_R} |u| dx \right)^{p^*} + \int_{Q_R} g dx \right\} \quad (2.44)$$

e, além disso,

$$\int_{Q_{R/2}} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx \leq c \left\{ \left(\int_{Q_R} (|Du|^p + |u|^{p^*})^m dx \right)^{\frac{1}{m}} + \int_{Q_R} g(x) dx \right\}, \quad (2.45)$$

onde $m = \frac{n}{p+n} < 1$ e $g = a + b \frac{p^*}{p^* - \gamma}$.

Para a demonstração do teorema acima, anteciparemos o seguinte:

Lema 2.1 *Seja $Z(t)$ uma função não negativa e limitada no intervalo $[\varrho, R]$. Suponha que, para $\varrho \leq t < s \leq R$, tenhamos*

$$Z(t) \leq [A(s-t)^{-\alpha} + B(s-t)^{-\beta} + C] + \vartheta Z(s) \quad (2.46)$$

com $A, B, C \geq 0, \alpha > \beta > 0$ e $0 \leq \vartheta < 1$. Então,

$$Z(\varrho) \leq c(\alpha, \vartheta) [A(R-\varrho)^{-\alpha} + B(R-\varrho)^{-\beta} + C]. \quad (2.47)$$

Demonstração. Considere a sequência t_i tal que $t_0 = \varrho$ e

$$t_{i+1} - t_i = (1 - \lambda) \lambda^i (R - \varrho)$$

com $0 < \lambda < 1$. De (2.46), por indução obtemos

$$Z(\varrho) \leq \vartheta^k Z(t_k) + \left[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha (R-\varrho)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta (R-\varrho)^\beta} + C \right] \times \sum_{i=0}^{k-1} \vartheta^i \lambda^{-i\alpha}.$$

Agora, escolha λ de tal forma que $\lambda^{-\alpha} \vartheta < 1$. Por hipótese, $Z(t)$ é limitada, além disso, $0 < \vartheta < 1$, ou seja, $\vartheta^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então $\vartheta^k Z(t_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Por outro lado, a série no lado direito é uma série geométrica com razão $r = \vartheta \lambda^{-\alpha} < 1$, então ela converge para $(1 - \vartheta \lambda^{-\alpha})^{-1}$ e, portanto, passando ao limite para $k \rightarrow \infty$, obtemos a conclusão com $c(\alpha, \vartheta) = (1 - \lambda)^{-\alpha} (1 - \vartheta \lambda^{-\alpha})^{-1}$.

Podemos agora provar o teorema.

Demonstração (Teorema 2.4). Seja Q_R um cubo estritamente contido em Ω , e seja

$R/2 < t < s \leq R$. Seja η uma função em $C_0^\infty(Q_s)$, com $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ em Q_t e $|D\eta| \leq \frac{2}{s-t}$. Denotando por u_s a média de u em Q_s , temos que

$$u_s = \fint_{Q_s} u \, dx,$$

fixamos $\varphi = \eta(u - u_s)$. Como $\tilde{F}$ depende apenas de z , é estritamente quase-convexa em 0 e $\tilde{F}(0) = 0$, então por (2.38) e (2.40) temos

$$\begin{aligned} \nu \int_{Q_s} |D\varphi|^p \, dx &\leq \int \tilde{F}(D\varphi) \, dx \\ &\leq \int_{Q_s} F(x, u, D\varphi) \, dx + \int_{Q_s} \vartheta(x, u)^p \, dx \\ &= \int_{Q_s} F(x, u, Du) \, dx + \int_{Q_s} [F(x, u, D\varphi) - F(x, u, Du)] \, dx \\ &\quad + \int_{Q_s} \vartheta(x, u)^p \, dx. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Agora seja $v = u - \varphi = u_s + (1 - \eta)(u - u_s)$. Observemos que $v = u_s$ em Q_t , pois $\eta = 1$ em Q_t , ademais $v = u$ perto da fronteira de Q_s , pois $\eta = 0$ já que $\eta \in C_0^\infty(Q_s)$. Da propriedade de quase-mínimo cúbico de u , tomando $-\varphi \in W_0^{1,p}(Q_s)$, temos

$$\mathcal{F}(u, Q_s) \leq \mathcal{F}(u - \varphi, Q_s) = \mathcal{F}(v, Q_s),$$

donde, observando (2.39), obtemos

$$\int_{Q_s} F(x, u, Du) \, dx \leq c \int_{Q_s} (|Dv| + \vartheta(x, v))^p \, dx. \tag{2.49}$$

Observamos agora que $D\varphi = Du$ em Q_t , e portanto,

$$\int_{Q_s} [F(x, u, D\varphi) - F(x, u, Du)] \, dx = \int_{Q_s - Q_t} [F(x, u, D\varphi) - F(x, u, Du)] \, dx$$

assim,

$$\begin{aligned} \int_{Q_s - Q_t} |F(x, u, D\varphi) - F(x, u, Du)| \, dx &\leq \int_{Q_s - Q_t} (|F(x, u, D\varphi)| + |F(x, u, Du)|) \, dx \\ &\leq \int_{Q_s - Q_t} c(|D\varphi| + \vartheta(x, u))^p + c(|Du| + \vartheta(x, u))^p \, dx \\ &\leq \int_{Q_s - Q_t} c(|Dv| + |Du|)^p + c(\vartheta(x, u))^p \\ &\quad + c(|Du| + \vartheta(x, u))^p \, dx \\ &\leq c \int_{Q_s - Q_t} (|Du|^p + |Dv|^p + \vartheta(x, u)^p) \, dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{Q_s-Q_t} |F(x, u, D\varphi) - F(x, u, Du)| dx \leq c \int_{Q_s-Q_t} (|Du|^p + |Dv|^p + \vartheta(x, u)^p) dx, \quad (2.50)$$

Introduzindo (2.50) e a desigualdade (2.49) em (2.48), e recordando que $D\varphi = Du$ em Q_t , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} |Du|^p dx &\leq c \int_{Q_s-Q_t} |Du|^p dx + c \int_{Q_s} |Dv|^p dx + c \int_{Q_s} (\vartheta(x, u)^p + \vartheta(x, v)^p) dx \\ &\leq c \int_{Q_s-Q_t} |Du|^p dx + c \int_{Q_s} |Dv|^p dx + c \int_{Q_s} [a(x) + b(x)(|v|^\gamma + |u|^\gamma)] dx, \end{aligned} \quad (2.51)$$

logo, adicionando a ambos os lados $\int_{Q_s} |u|^{p^*} dx$, usando a desigualdade

$$|Dv|^p = |(1 - \eta)Du + (u - u_s)D\eta|^p \leq c[(1 - \eta)^p |Du|^p + (s - t)^{-p} |u - u_s|^p],$$

as desigualdade obtidas por Young

$$b|u|^\gamma \leq c \left(|u|^{p^*} + b^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}} \right)$$

e

$$b|v|^\gamma \leq c \left(|v|^{p^*} + b^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}} \right),$$

bem como $|v| \leq |u - u_s| + |u_s|$ e $|u| \leq |u - u_s| + |u_s|$. Obtemos assim uma nova estimativa para (2.51)

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx &\leq c \left\{ \int_{Q_s-Q_t} |Du|^p dx + \frac{1}{(s - t)^p} \int_{Q_s} |u - u_s|^p dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q_s} |u - u_s|^{p^*} dx + |Q_s| |u_s|^{p^*} + \int_{Q_s} g dx \right\}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

com $g = a + b^{p^*/(p^*-\gamma)}$. Por outro lado, usando uma versão para médias da desigualdade de Sobolev-Poincaré, ver Teorema A.6, temos

$$\int_{Q_s} |u - u_s|^{p^*} dx \leq c \left(\int_{Q_s} |Du|^p dx \right)^{\frac{p^*}{p}} = c \left(\int_{Q_s} |Du|^p dx \right)^{\frac{n}{n-p}} = \chi(s) \int_{Q_s} |Du|^p dx, \quad (2.53)$$

onde

$$\chi(s) = \left(\int_{Q_s} |Du|^p dx \right)^{p/(n-p)}$$

é infinitesimal com s , isto é, $\chi(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$. Segue-se que, tomando R (e portanto s) suficientemente pequeno, a desigualdade (2.53) nos dá

$$\int_{Q_s} |u - u_s|^{p^*} dx \leq \epsilon \int_{Q_s} |Du|^p dx = \epsilon \int_{Q_t} |Du|^p dx + \epsilon \int_{Q_s-Q_t} |Du|^p dx.$$

Assim, podemos ter uma nova estimativa para (2.52).

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx \leq c \left\{ \int_{Q_s - Q_t} |Du|^p dx + \frac{1}{(s-t)^p} \int_{Q_s} |u - u_s|^p dx \right. \\ \left. + \epsilon \int_{Q_t} |Du|^p dx + \epsilon \int_{Q_s - Q_t} |Du|^p dx + |Q_s| |u_s|^{p^*} + \int_{Q_s} g dx \right\}, \end{aligned}$$

Escolhendo adequadamente $\epsilon > 0$, podemos subtrair $\epsilon \int_{Q_t} |Du|^p dx$ do lado esquerdo, restando no lado direito a quantidade $\epsilon \int_{Q_s - Q_t} |Du|^p dx$ que pode ser somada a parcela já existente. Chegamos assim à desigualdade

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx \leq c \left\{ \int_{Q_s - Q_t} |Du|^p dx + \frac{1}{(s-t)^p} \int_{Q_s} |u - u_s|^p dx \right. \\ \left. + |Q_s| |u_s|^{p^*} + \int_{Q_s} g dx \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Afirmamos que vale as duas estimativas abaixo:

$$\int_{Q_s} |u - u_s|^p dx \leq c \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx$$

e

$$|u_s| \leq 2^n \int_{Q_R} |u| dx.$$

Com efeito, para a primeira desigualdade observemos que

$$|u - u_s|^p \leq c(|u - u_R|^p + |u_R - u_s|^p)$$

desta forma, integrando em Q_s , obtemos

$$\int_{Q_s} |u - u_s|^p dx \leq c \int_{Q_s} |u - u_R|^p dx + c|Q_s| |u_s - u_R|^p. \quad (2.55)$$

Estimemos a segunda parcela a direita da desigualdade acima. Pela definição de média, claro que

$$u_s - u_R = \int_{Q_s} (u - u_R) dx$$

donde, aplicando Hölder, obtemos

$$|u_s - u_R| \leq \frac{1}{|Q_s|^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{Q_s} |u - u_R|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

como consequência, elevando ambos os lados a p

$$|Q_s| |u_s - u_R|^p \leq \int_{Q_s} |u - u_R|^p dx.$$

Logo, substituindo essa estimativa em (2.55), segue que

$$\int_{Q_s} |u - u_s|^p dx \leq c \int_{Q_s} |u - u_R|^p dx$$

e, como $Q_s \subset Q_R$,

$$\int_{Q_s} |u - u_s|^p dx \leq c \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx.$$

Para provarmos a segunda afirmação feita, lembre-se que $s \geq R/2$, observe que pela definição de média

$$|u_s| = \left| \oint_{Q_s} u dx \right| \leq \oint_{Q_s} |u| dx.$$

Agora, escrevemos

$$\oint_{Q_s} |u| = \frac{1}{|Q_s|} \int_{Q_s} |u| dx \leq \frac{1}{|Q_s|} \int_{Q_R} |u| dx = \frac{|Q_R|}{|Q_s|} \frac{1}{|Q_R|} \int_{Q_R} |u| dx = \frac{|Q_R|}{|Q_s|} \oint_{Q_R} |u|,$$

como $s \geq R/2$,

$$|Q_s| \geq |Q_{\frac{R}{2}}| = (R/2)^n = 2^{-n} |Q_R|$$

implica que,

$$\frac{|Q_R|}{|Q_s|} \leq 2^n,$$

desta forma

$$|u_s| \leq 2^n \oint_{Q_R} |u| dx.$$

Assim, substituindo essas duas desigualdades provadas acima em (2.54), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx &\leq c \left\{ \int_{Q_s - Q_t} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx + \frac{1}{(s-t)^p} \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx \right. \\ &\quad \left. + |Q_R| \left(\oint_{Q_R} |u| dx \right)^{p^*} + \int_{Q_R} g dx \right\}. \end{aligned}$$

Agora, pelo método de “preenchimento de buraco” (hole filling) de Widman [?]. Adicionando a ambos os lados a quantidade

$$c \int_{Q_t} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx$$

e dividindo por $c + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx &\leq \vartheta \int_{Q_s} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx + \frac{1}{(s-t)^p} \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx \\ &\quad + |Q_R| \left(\oint_{Q_R} |u| dx \right)^{p^*} + \int_{Q_R} g dx, \end{aligned}$$

onde $\vartheta := \frac{c}{c+1} < 1$. Aplicando o Lema 2.1, com

$$Z(t) = \int_{Q_t} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx$$

e

$$A = \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx, \quad B = 0, \quad C = |Q_R| \left(\int_{Q_R} |u| dx \right)^{p^*} + \int_{Q_R} g dx,$$

obtemos imediatamente a desigualdade (2.44). Para obter (2.45) devemos estimar o lado direito de (2.44). Definindo $q = \frac{np}{n+p}$, temos $q^* = \frac{nq}{n-q} = p$, e portanto, pela desigualdade de Sobolev-Poincaré A.6, claro que

$$\int_{Q_R} |u - u_R|^p dx \leq c \left(\int_{Q_R} |Du|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} = c \left(\int_{Q_R} |Du|^{pm} dx \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (2.56)$$

com $m = \frac{n}{p+n}$. Por outro lado, temos $p^*m > 1$ e, portanto, usando Hölder

$$\int_{Q_R} |u| dx \leq \left(\int_{Q_R} |u|^{p^*m} dx \right)^{\frac{1}{p^*m}}. \quad (2.57)$$

Introduzindo as desigualdades¹⁰ (2.56) e (2.57) em (2.44) obtemos facilmente a estimativa requerida (2.45). ■

Observação 2.9 *No que se segue, necessitaremos dos resultados acima também em uma forma ligeiramente diferente. Partindo de (2.51), temos*

$$\int_{Q_t} |Du|^p dx \leq c \int_{Q_s - Q_t} |Du|^p dx + c \int_{Q_s} |Dv|^p dx + c \int_{Q_s} [a(x) + b(x)(|v|^\gamma + |u|^\gamma)] dx.$$

Estimando $|Dv|^p$ exatamente como feito acima e lembrando que $v = u - \varphi$, em que $\varphi = \eta(u - u_s)$ e $0 \leq \eta \leq 1$, temos

$$|v| = |u - \varphi| \leq |u| + |\varphi| \leq |u| + |\eta||u - u_s| \leq |u| + |u - u_s|$$

e, elevando ambos os lados a γ , segue que

$$|v|^\gamma \leq c(|u|^\gamma + |u - u_s|^\gamma).$$

Precisamos fazer uma nova estimativa para $b|u - u_s|^\gamma$. Pela Desigualdade de Hölder com os expoentes de tal forma que $\frac{p}{p^} + \frac{p}{n} = 1$, temos a desigualdade*

$$\begin{aligned} \int_{Q_s} b(x)|u - u_s|^\gamma dx &= \int_{Q_s} b(x)|u - u_s|^p |u - u_s|^{\gamma-p} dx \\ &\leq \left(\int_{Q_s} |u - u_s|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{Q_s} (b(x)|u - u_s|^{\gamma-p})^{\frac{n}{p}} dx \right)^{\frac{p}{n}}, \end{aligned}$$

¹⁰Se $q < 1$, as desigualdades anteriores continuam válidas com $m = \frac{1}{p}$.

daí, usando a desigualdade de Sobolev-Poincaré [A.6](#) na primeira integral do lado direito temos a seguinte estimativa

$$\int_{Q_s} b(x)(|u - u_s|^\gamma) dx \leq c\xi(s) \int_{Q_s} |Du|^p dx$$

com

$$\xi(s) = \left(\int_{Q_s} (b(x)|u - u_s|^{\gamma-p})^{\frac{n}{p}} dx \right)^{\frac{p}{n}},$$

utilizando Hölder com os coeficientes $r = \frac{pp^*}{n(\gamma-p)}$ e $r' = \frac{pp^*}{n(p^*-\gamma)}$ e depois elevando a $\frac{p}{n}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_s} (b(x)|u - u_s|^{\gamma-p})^{\frac{n}{p}} dx \right)^{\frac{p}{n}} &\leq \left(\int_{Q_s} |u - u_s|^{p^*} dx \right)^{\frac{\gamma-p}{p^*}} \left(\int_{Q_s} b^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{p^*}} \\ &\leq c \left(\int_{Q_s} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{\gamma-p}{p^*}} \left(\int_{Q_s} b^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{p^*}} \\ &\leq c \|u\|_{p^*}^{\gamma-p} \|b\|_{\frac{p^*}{p^*-\gamma}}. \end{aligned}$$

Se escolhermos R (e portanto s) suficientemente pequeno, temos $c\xi(R) < \frac{1}{2}$ e assim podemos subtrair o termo correspondente do lado esquerdo de [\(2.51\)](#), obtendo

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} |Du|^p dx &\leq c \left(\int_{Q_s-Q_t} |Du|^p dx + \frac{1}{(s-t)^p} \int_{Q_s} |u - u_s|^p dx \right) \\ &\quad + c \int_{Q_s} (a(x) + b(x)|u|^\gamma) dx. \end{aligned}$$

Podemos agora argumentar como no Teorema [2.4](#) e usar o lema assim como foi usado no teorema sendo que neste caso vamos ter $C = \int_{Q_R} (a + b|u|^\gamma) dx$. Podemos concluir que

$$\int_{Q_{R/2}} |Du|^p dx \leq c \left\{ \frac{1}{R^p} \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx + \int_{Q_R} (a + b|u|^\gamma) dx \right\}. \quad (2.58)$$

2.4 Estimativas L^p para o gradiente

Definindo $f(x) = |Du|^p + |u|^{p^*}$ e $g(x) = a(x) + b(x)^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}}$, escrevendo $2R$ em vez de R , a desigualdade [\(2.45\)](#) torna-se

$$\int_{Q_R} f(x) dx \leq c \left\{ \left(\int_{Q_{2R}} f^m dx \right)^{\frac{1}{m}} + \int_{Q_{2R}} g(x) dx \right\}. \quad (2.59)$$

O objetivo desta seção é mostrar como [\(2.59\)](#) implica uma somabilidade mais alta da função f , e consequentemente das derivadas de u , sob a hipótese de que a função g pertence a algum L^r , com $r > 1$.

Para isso, comecemos considerando o caso das funções f e g definidas no cubo $Q := Q_{x_0,1}$. Seja $d(x) = \text{dist}(x, \partial Q)$, e para $k = 0, 1, 2, \dots$ defina

$$C_k = \left\{ x \in Q : \frac{3}{4}2^{-k-1} \leq d(x) \leq \frac{3}{4}2^{-k} \right\}.$$

Cada camada C_k pode ser dividida em uma família finita $\mathcal{G}_k$ de cubos iguais, cada um

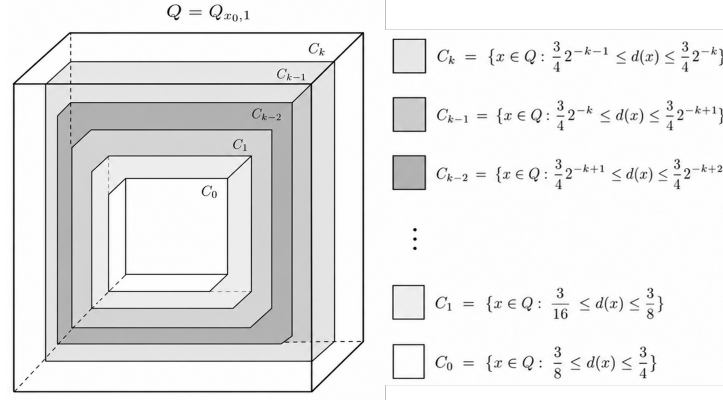


Figura 2.1: Ilustração 3D do problema 1

de lado $\delta_k = \frac{3}{4}2^{-k-1}$. Se à união desses cubos adicionarmos o cubo $Q_{1/4}$ concêntrico a Q , obtemos a totalidade de Q .

Suponha agora que (2.59) é satisfeita para todo cubo $Q_{2R} \subset \subset Q$. Se P é um cubo, denotamos por $\tilde{P}$ o cubo concêntrico a P e com lado duplo, de modo que (2.59) se torna

$$\int_P f(x) dx \leq c \left\{ \left(\int_{\tilde{P}} f^m dx \right)^{\frac{1}{m}} + \int_{\tilde{P}} g dx \right\} \quad (2.60)$$

para todo P tal que $\tilde{P} \subset \subset Q$. Se adicionalmente $P \subset C_k$, temos $\frac{3}{16}2^{-k} \leq d(x) \leq \frac{15}{16}2^{-k}$ para todo $x \in \tilde{P}$. De fato, pois tomando um cubo em C_k ele tem no máximo lado de comprimento $\delta_k = \frac{3}{4}2^{-k-1}$, assim, $\tilde{P}$ que tem lado duplo prolonga metade dos seus lados em todas as n direções, logo o novo intervalo é dado por

$$\frac{3}{4}2^{-k-1} - \left(\frac{3}{4}2^{-k-1} \right) \frac{1}{2} \leq d(x) \leq \frac{3}{4}2^{-k} + \left(\frac{3}{4}2^{-k-1} \right) \frac{1}{2},$$

logo, $\frac{3}{16}2^{-k} \leq d(x) \leq \frac{15}{16}2^{-k}$. Em particular $\tilde{P} \subset \subset Q$, e assim, elevando a n as desigualdades e multiplicando por $f(x)$ temos

$$d(x)^n f(x) \leq c_1 f(x) \leq f(x), \quad \text{para } x \in P$$

e

$$c_2 f(x) \leq d(x)^n f(x) \quad \text{e} \quad c_3 g(x) \leq d(x)^n g(x), \quad \text{para } x \in \tilde{P}.$$

Daí, passando as integrais médias e observando (2.60), claro que

$$\oint_P F(x) dx \leq B \left\{ \left(\oint_{\tilde{P}} F^m dx \right)^{\frac{1}{m}} + \oint_{\tilde{P}} G dx \right\}, \quad (2.61)$$

onde definimos

$$F(x) = d(x)^n f(x) \quad \text{e} \quad G(x) = d(x)^n g(x).$$

É fácil verificar que (2.61) também vale para $P \subset Q_{1/4}$, pois se isso ocorre, então $\tilde{P} \subset \subset Q_{1/2}$, consequentemente, $\tilde{P} \subset Q$. Com isso em mente, podemos enunciar e demonstrar o próximo resultado.

Lema 2.2 *Para todo t com*

$$t > t_0 := \oint_Q f(x) dx,$$

definindo

$$\Phi_t = \{x \in Q : F(x) > t\} \quad \text{e} \quad \Gamma_t = \{x \in Q : G(x) > t\}$$

temos

$$\int_{\Phi_t} F dx \leq c \left\{ t^{1-m} \int_{\Gamma_t} F^m dx + \int_{\Gamma_t} G dx \right\}. \quad (2.62)$$

Demonstração. Seja $s = \lambda t$, onde λ é uma constante que fixaremos durante a prova. Se $P \in \mathcal{G}_k$ temos

$$s = \lambda t > \lambda \oint_Q f(x) dx \geq \lambda \frac{|P|}{|Q|} \oint_P f(x) dx \geq \lambda 4^{-n} \oint_P F(x) dx \geq \oint_P F(x) dx, \quad (2.63)$$

sempre que $\lambda \geq 4^n$. Provemos com mais detalhes a penúltima desigualdade. Sabemos que $|Q| = 2^n$ e $|P| = \delta_k^n = \left(\frac{3}{8}2^{-k}\right)^n$, assim

$$\frac{|P|}{|Q|} = \frac{3^n}{2^{4n}} 2^{-kn}.$$

Como $P \in \mathcal{G}_k$ então $d(x) \leq \frac{3}{4}2^{-k}$, logo para $x \in P \subset \tilde{P}$,

$$F(x) = d(x)^n f(x) \leq \left(\frac{3}{4}2^{-k}\right)^n f(x),$$

consequentemente

$$f(x) \geq \left(\frac{4}{3}\right)^n 2^{kn} F(x) \quad \Rightarrow \quad \oint_P f(x) dx \geq \left(\frac{4}{3}\right)^n 2^{kn} \oint_P F(x) dx.$$

Desta forma

$$\frac{|P|}{|Q|} \oint_P f \geq \frac{3^n}{2^{4n}} 2^{-kn} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n 2^{kn} \oint_P F = 4^{-n} \oint_P F,$$

o que prova nossa penúltima desigualdade de (2.63). A relação (2.63) permanece válida se $P = Q_{1/4}$. A cada um dos cubos P podemos aplicar o Teorema de Calderón-Zygmund (Teorema 1.10). Dessa forma, obtemos uma família enumerável $\{Q_j\}$ de subcubos disjuntos de Q , tais que

$$s < \int_{Q_j} F(x) dx \leq 2^n s$$

e $F(x) \leq s$ em $Q - \bigcup Q_j$. De (2.61) inferimos que ou

$$\int_{Q_j} F(x) dx \leq 2B \left(\int_{\tilde{Q}_j} F^m dx \right)^{\frac{1}{m}} \quad (2.64)$$

ou

$$\int_{Q_j} F(x) dx \leq 2B \int_{\tilde{Q}_j} G dx. \quad (2.65)$$

No primeiro caso, temos

$$s \leq 2B \left\{ \int_{\tilde{Q}_j} F^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}$$

e, portanto, elevando ambos os lado a m

$$s^m |\tilde{Q}_j| \leq (2B)^m \int_{\tilde{Q}_j} F^m dx. \quad (2.66)$$

Além disso, observando que $\Phi_t = \{x \in Q : F(x) > t\}$ temos

$$\int_{\tilde{Q}_j} F^m dx = \int_{\tilde{Q}_j \cap \Phi_t} F^m dx + \int_{\tilde{Q}_j - \Phi_t} F^m dx \leq \int_{\tilde{Q}_j \cap \Phi_t} F^m dx + t^m |\tilde{Q}_j|, \quad (2.67)$$

daí, sabendo que $s = \lambda t$, temos por (2.66) e (2.67) que

$$|\tilde{Q}_j| \leq (2B)^m s^{-m} \left(\int_{\tilde{Q}_j \cap \Phi_t} F^m dx + t^m |\tilde{Q}_j| \right) = (2B)^m s^{-m} \int_{\tilde{Q}_j \cap \Phi_t} F^m dx + (2B)^m \lambda^{-m} |\tilde{Q}_j|$$

e, tomando λ suficientemente grande, de tal modo que $(2B)^m \lambda^{-m} \leq \frac{1}{2}$, temos

$$|\tilde{Q}_j| \leq 2(2B)^m s^{-m} \left(\int_{\tilde{Q}_j \cap \Phi_t} F^m dx \right). \quad (2.68)$$

Agora, caso (2.65) for válida, temos

$$s |\tilde{Q}_j| \leq 2B \int_{\tilde{Q}_j} G dx$$

e, conseqüentemente, olhando para o conjunto $\Gamma_t = \{x \in Q : G(x) > t\}$ e desde que $2B\lambda^{-1} \leq \frac{1}{2}$, segue de contas análogas que

$$|\tilde{Q}_j| \leq 4Bs^{-1} \int_{\tilde{Q}_j \cap \Gamma_t} G dx. \quad (2.69)$$

Em conclusão, temos em todo caso

$$|\tilde{Q}_j| \leq \frac{c}{s} \left(t^{1-m} \int_{\tilde{Q}_j \cap \Phi_t} F^m dx + \int_{\tilde{Q}_j \cap \Gamma_t} G dx \right). \quad (2.70)$$

Vamos agora avaliar a integral de F sobre Φ_s , usando as propriedades obtidas do Teorema de Calderón-Zygmund, temos

$$\int_{\Phi_s} F dx = \int_{\cup Q_j} F dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} F dx \leq 2^n s \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| = 2^n s \left| \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right| \leq 2^n s \left| \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j \right| \quad (2.71)$$

Queremos estimar a última quantidade por meio de (2.70). Para isso, aplicamos o Lema 1.4 à família $\{\tilde{Q}_j\}$, e obtemos uma subfamília enumerável de cubos disjuntos dois a dois $\{\Pi_i\}$ tais que, denotando por $\hat{P}$ o cubo concêntrico com P e de lado quádruplo,

$$\bigcup \tilde{Q}_j \subset \bigcup \hat{\Pi}_i.$$

Temos, portanto,

$$\left| \bigcup \tilde{Q}_j \right| \leq \left| \bigcup \hat{\Pi}_i \right| \leq 5^n \sum_{i=1}^{\infty} |\Pi_i|, \quad (2.72)$$

notando que cada Π_i é algum $\tilde{Q}_i$, então por (2.70)

$$|\Pi_i| \leq \frac{c}{s} \left(t^{1-m} \int_{\Pi_i \cap \Phi_t} F^m dx + \int_{\Pi_i \cap \Gamma_t} G dx \right).$$

Somando sobre i e usando que os Π_i são disjuntos, fica claro que

$$\sum_i |\Pi_i| \leq \frac{c}{s} \left(t^{1-m} \sum_i \int_{\Pi_i \cap \Phi_t} F^m dx + \sum_i \int_{\Pi_i \cap \Gamma_t} G dx \right).$$

Por outro lado, os Π_i são disjuntos, as integrais em Π_i são sobre partes disjuntas de Φ_t e Γ_t , isto é,

$$\sum_i \int_{\Pi_i \cap \Phi_t} F^m dx = \int_{\cup (\Pi_i \cap \Phi_t)} F^m \leq \int_{\Phi_t} F^m dx \quad \text{e} \quad \sum_i \int_{\Pi_i \cap \Gamma_t} G dx = \int_{\cup (\Pi_i \cap \Gamma_t)} G \leq \int_{\Gamma_t} G dx.$$

Portanto,

$$\sum_i |\Pi_i| \leq \frac{c}{s} \left(t^{1-m} \int_{\Phi_t} F^m dx + \int_{\Gamma_t} G dx \right),$$

donde juntando com (2.72) e (2.71), obtemos

$$\int_{\Phi_s} F dx \leq c \left\{ t^{1-m} \int_{\Phi_t} F^m dx + \int_{\Gamma_t} G(x) dx \right\}. \quad (2.73)$$

Por outro lado, como $s = \lambda t > 1t = t$, então $\Phi_s \subset \Phi_t$, pois $F(x) > s > t$. Assim, no conjunto $\Phi_t - \Phi_s$ temos

$$t < F(x) \leq s \quad \Rightarrow \quad F^{1-m} \leq s^{1-m} \quad \Rightarrow \quad F \leq s^{1-m} F^m,$$

lembrando que, pelas hipóteses anteriores, $0 < 1 - m$. Logo, integrando a última desigualdade acima sobre o conjunto $\Phi_t - \Phi_s$ temos

$$\int_{\Phi_t - \Phi_s} F \, dx \leq \int_{\Phi_t - \Phi_s} s^{1-m} F^m \, dx \leq s^{1-m} \int_{\Phi_t} F^m \, dx \leq ct^{1-m} \int_{\Phi_t} F^m \, dx \quad (2.74)$$

Agora, observando que

$$\int_{\Phi_t} F \, dx = \int_{\Phi_t - \Phi_s} F \, dx + \int_{\Phi_s} F \, dx$$

e usando (2.73) e (2.74), temos

$$\int_{\Phi_t} F \, dx \leq c \left\{ t^{1-m} \int_{\Phi_t} F^m \, dx + \int_{\Gamma_t} G \, dx \right\}.$$

■

Precisamos agora do seguinte:

Lema 2.3 *Sejam $h \geq m \geq 0$ e seja $F \in L^h(Q)$. Definindo*

$$\varphi(t) = \int_{\Phi(t)} F^m \, dx,$$

temos

$$\int_{\Phi_\tau} F^h \, dx = - \int_\tau^\infty t^{h-m} d\varphi(t).$$

Demonstração. Podemos supor que F é limitada e que $\varphi(t)$ é contínua no ponto τ , pois o resultado geral segue por aproximação. Note que, para $F(x) > \tau$ temos

$$F(x)^{h-m} = \tau^{h-m} + \int_\tau^{F(x)} (h-m)t^{h-m-1} \, dt$$

Multiplicando por $F(x)^m$, obtemos

$$F(x)^h = \tau^{h-m} F(x)^m + F(x)^m \int_\tau^{F(x)} (h-m)t^{h-m-1} \, dt,$$

agora, integramos sobre $x \in \Phi_\tau$ para chegarmos que

$$\int_{\Phi_\tau} F^h \, dx = \tau^{h-m} \int_{\Phi_\tau} F^m \, dx + (h-m) \int_{\Phi_\tau} F^m \, dx \int_\tau^{F(x)} t^{h-m-1} \, dt.$$

Trabalhemos com a última parcela. Usando Fubini e observando que o conjunto $\{ (x, y) : x \in \Phi_\tau, \tau \leq t < F(x) \}$ é equivalente a $\{ (x, y) : \tau \leq t, x \in \Phi_t \}$, claro que

$$\int_{\Phi_\tau} F^m \, dx \int_\tau^{F(x)} t^{h-m-1} \, dt = \int_\tau^\infty t^{h-m-1} \, dt \int_{\Phi_t} F^m \, dx.$$

Mas, por hipótese, temos $\varphi(t) = \int_{\Phi_t} F^m dx$, assim

$$\int_{\Phi_\tau} F^m dx \int_\tau^{F(x)} t^{h-m-1} dt = \int_\tau^\infty t^{h-m-1} \varphi(t) dt.$$

Portanto,

$$\int_{\Phi_\tau} F^h dx = \tau^{h-m} \varphi(\tau) + (h-m) \int_\tau^\infty t^{h-m-1} \varphi(t) dt, \quad (2.75)$$

daí, por integração por partes, segue que

$$(h-m) \int_\tau^\infty t^{h-m-1} \varphi(t) dt = [\varphi(t)t^{h-m}]_\tau^\infty - \int_\tau^\infty t^{h-m} d\varphi(t).$$

Notando que, o termo $[\varphi(t)t^{h-m}]$ vai para 0 quando $t \rightarrow \infty$, pois dado $x \in \Phi_t$, temos $F(x) > t$, ou seja,

$$F(x)^{h-m} > t^{h-m} \quad \Rightarrow \quad F(x)^m t^{h-m} \leq F(x)^h.$$

Podemos integrar, uma vez que $F \in L^h$, daí obtemos

$$\varphi(t)t^{h-m} \leq \int_{\Phi_t} F^h dx,$$

onde a integral vai para zero quando $t \rightarrow \infty$ pois F é limitada e, consequentemente, o conjunto Φ_t se torna vazio quando $t \rightarrow \infty$. Assim, a nossa integração por partes acaba em

$$(h-m) \int_\tau^\infty t^{h-m-1} \varphi(t) dt = -\varphi(\tau)\tau^{h-m} - \int_\tau^\infty t^{h-m} d\varphi(t),$$

que substituindo em (2.75) obtêm-se o resultado. ■

Com a notação precedente, (2.62) pode ser escrita na forma

$$-\int_t^\infty \tau^{1-m} d\varphi(\tau) \leq A[t^{1-m}\varphi(t) + \omega(t)], \quad (2.76)$$

onde

$$\omega(t) = \int_{\Gamma_t} G dx.$$

Proposição 2.1 (Gehring [10]) *Suponha que $\varphi(t)$ é uma função decrescente em $[a, +\infty)$, infinitesimal quando $t \rightarrow +\infty$, e que verifica (2.76) com $m < 1$ para todo $t \geq a$. Existe um número real $r > 1$ tal que*

$$-\int_a^\infty u^{r-m} d\varphi(u) \leq -2a^{r-1} \int_a^\infty u^{1-m} d\varphi(u) - 2A \int_a^\infty u^{r-1} d\omega(u). \quad (2.77)$$

Demonstração. Começemos supondo que $\varphi(s) \equiv 0$ e $\omega(s) \equiv 0$ para $s \geq k - 1$. Para $q > 0$ definimos

$$I_q(s) = - \int_s^k u^q d\varphi(u), \quad I_q = I_q(a) \quad \text{e} \quad \Omega_q = - \int_a^k u^q d\omega(u).$$

Claramente, pela definição acima

$$I_{r-m} = - \int_a^k u^{r-m} d\varphi(u) = - \int_a^k u^{r-1} u^{1-m} d\varphi(u). \quad (2.78)$$

Segue, por propriedades da Integral de Stieltjes (ver [1]), que a derivada de Stieltjes de uma integral do tipo

$$F(u) = \int_u^k f(\tau) d\alpha(\tau)$$

é

$$dF(u) = -f(u) d\alpha(u).$$

Assim, definindo $I_{1-m}(u) = - \int_u^k \tau^{1-m} d\varphi(\tau)$, tem-se

$$dI_{1-m}(u) = u^{1-m} d\varphi(u),$$

donde, substituindo em (2.78), obtemos

$$I_{r-m} = - \int_a^k u^{r-1} dI_{1-m}(u).$$

Aplicamos a fórmula de integração por partes para integrais de Riemann-Stieltjes (ver [1]), para chegarmos que

$$\begin{aligned} \int_a^k u^{r-1} dI_{1-m}(u) &= [u^{r-1} I_{1-m}(u)]_a^k - \int_a^k I_{1-m}(u) (r-1) u^{r-2} du \\ &= -a^{r-1} I_{1-m} - (r-1) \int_a^k u^{r-2} I_{1-m}(u) du. \end{aligned}$$

Substituindo, obtemos

$$I_{r-m} = a^{r-1} I_{1-m} + (r-1) \int_a^k u^{r-2} I_{1-m}(u) du. \quad (2.79)$$

A última integral pode ser estimada por meio de (2.76). De fato, lembrando que, por hipótese, se $\tau \geq k - 1$ então $\varphi(\tau) = 0$, daí

$$I_{1-m}(u) = - \int_u^k \tau^{1-m} d\varphi(\tau) = - \int_u^\infty \tau^{1-m} d\varphi(\tau) \leq A[u^{1-m}\varphi(u) + \omega(u)].$$

Usando a desigualdade acima em (2.79), claro

$$I_{r-m} \leq a^{r-1} I_{1-m} + A(r-1) \left(\int_a^k u^{r-m-1} \varphi(u) du + \int_a^k u^{r-2} \omega(u) du \right).$$

Por outro lado, integrando por partes, obtemos

$$\int_a^k u^{r-m-1} \varphi(u) du = \frac{I_{r-m}}{r-m} - \frac{a^{r-m}}{r-m} \varphi(a) \leq \frac{I_{r-m}}{r-m}$$

e, similarmente, integrando por partes

$$\int_a^k u^{r-2} \omega(u) du \leq \frac{\Omega_{r-1}}{r-1},$$

segue que

$$I_{r-m} \leq a^{r-1} I_{1-m} + A \frac{r-1}{r-m} I_{r-m} + A \Omega_{r-1}.$$

Se assumirmos agora que $A(r-1) \leq \frac{r-m}{2}$, concluimos que

$$I_{r-m} \leq a^{r-1} I_{1-m} + \frac{I_{r-m}}{2} + A \Omega_{r-1} \quad \Rightarrow \quad I_{r-m} \leq 2a^{r-1} I_{1-m} + 2A \Omega_{r-1}$$

assim, lembrando que

$$I_{r-m} = - \int_a^k u^{r-m} d\varphi(u), \quad I_{1-m} = - \int_a^k u^{1-m} d\varphi(u), \quad \text{e} \quad \Omega_{r-1} = - \int_a^k u^{r-1} d\omega(u),$$

e que, sob a hipótese de suporte compacto ($\varphi = \omega = 0$ para $s \geq k-1$), as integrais até k coincidem com as integrais até ∞ , obtemos exatamente

$$- \int_a^\infty u^{r-m} d\varphi(u) \leq -2a^{r-1} \int_a^\infty u^{1-m} d\varphi(u) - 2A \int_a^\infty u^{r-1} d\omega(u),$$

e (2.77) está provada quando $\varphi(t) = \omega(t) = 0$ a partir de algum ponto. No caso geral, observamos em primeiro lugar que como φ é decrescente então $d\varphi \leq 0$, daí para $s \geq k$ temos

$$-s^{1-m} \leq -k^{1-m} \quad \Rightarrow \quad -s^{1-m} d\varphi \geq -k^{1-m} d\varphi,$$

logo

$$- \int_k^T s^{1-m} d\varphi(s) \geq -k^{1-m} \int_k^T d\varphi(s) = k^{1-m} [\varphi(k) - \varphi(T)]$$

de modo que, fazendo $T \rightarrow +\infty$:

$$- \int_k^\infty s^{1-m} d\varphi(s) \geq k^{1-m} \varphi(k). \quad (2.80)$$

Agora, definindo

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{se } t \leq k \\ 0, & \text{se } t > k \end{cases}$$

e o análogo para ω_k , e levando em conta (2.76), obtemos para $t \leq k$:

$$\begin{aligned} - \int_t^\infty s^{1-m} d\varphi_k(s) &= - \int_t^k s^{1-m} d\varphi_k(s) - \int_k^\infty s^{1-m} d\varphi_k(s) \\ &= - \int_t^k s^{1-m} d\varphi(s) + k^{1-m}\varphi(k) \\ &\leq - \int_t^\infty s^{1-m} d\varphi(s) \leq A(t^{1-m}\varphi_k(t) + \omega_k(t)) \end{aligned}$$

em que o passo da segunda igualdade é garantido por [Teorema 7.9, 1].

A relação precedente obviamente permanece válida para $t > k$. Pelo que acabamos de provar, temos portanto, pelo caso particular já demonstrado, e lembrando que $d\varphi \leq 0$

$$\begin{aligned} - \int_a^\infty s^{r-m} d\varphi_k(s) &\leq -2a^{r-1} \int_a^\infty s^{1-m} d\varphi_k(s) - 2A \int_a^\infty s^{r-1} d\omega_k(s) \\ &\leq -2a^{r-1} \int_a^\infty s^{1-m} d\varphi(s) - 2A \int_a^\infty s^{r-1} d\omega(s), \end{aligned}$$

e a conclusão segue fazendo $k \rightarrow +\infty$.

■

Uma aplicação da proposição anterior ao Lema 2.2 pode ser feita observando que, com a notação do Lema 2.3, temos

$$- \int_a^\infty u^{r-m} d\varphi(u) = \int_{\Phi_a} F^r dx \quad - \int_a^\infty u^{1-m} d\varphi(u) = \int_{\Phi_a} F dx \quad \text{e} \quad - \int_a^\infty u^{r-1} d\omega(u) = \int_{\Gamma_a} G^r dx;$$

donde, usando o resultado da proposição, segue

$$\int_{\Phi_a} F^r dx \leq 2a^{r-1} \int_{\Phi_a} F dx + 2A \int_{\Gamma_a} G^r dx,$$

com $a = \int_Q f dx$. Por outro lado, em $Q - \Phi_a$ temos $F \leq a$ logo

$$\int_{Q-\Phi_a} F^r dx \leq a^{r-1} \int_{Q-\Phi_a} F dx,$$

e, portanto, juntando as duas desigualdades, temos a desigualdade sobre todo o cubo Q

$$\int_Q F^r dx \leq 2a^{r-1} \int_Q F dx + 2A \int_Q G^r dx. \quad (2.81)$$

Voltando às funções $f(x)$ e $g(x)$, trabalhamos com as desigualdades $F(x) = d(x)^n f(x) \geq cf(x)$ em $Q_{1/2}$ e $F(x) = d(x)^n f(x) \leq Cf(x)$ em Q , encontramos

$$\int_{Q_{1/2}} f^r dx \leq c \left(a^{r-1} \int_Q f dx + \int_Q g^r dx \right),$$

ou ainda, observando que $1 = |Q_{1/2}| = 2^{-n}|Q|$ temos

$$\int_{Q_{1/2}} f^r dx \leq c \left\{ \left(\int_Q f dx \right)^r + \int_Q g^r dx \right\}. \quad (2.82)$$

Se em vez do cubo Q de lado 1 considerarmos um cubo Q_R de lado $2R$, obtemos, por meio de uma simples homotetia (ou seja, uma redução ou ampliação do cubo):

Teorema 2.5 (Giaquinta e G. Modica [1]) *Seja $f \in L^1(Q_R)$, e suponha que para todo cubo $Q \subset \tilde{Q} \subset\subset Q_R$ tenhamos*

$$\int_Q f(x) dx \leq B \left\{ \left(\int_{\tilde{Q}} f^m dx \right)^{\frac{1}{m}} + \int_{\tilde{Q}} g dx \right\} \quad (2.83)$$

com $0 < m < 1$. Suponha que, a função g pertence a $L^s(Q_R)$ para algum $s > 1$. Então, existe um $r > 1$ tal que $f \in L^r(Q_{R/2})$, e além disso

$$\int_{Q_{R/2}} f^r dx \leq c \left\{ \left(\int_{Q_R} f dx \right)^r + \int_{Q_R} g^r dx \right\}. \quad (2.84)$$

Corolário 2.1 *A conclusão do teorema anterior é válida se substituirmos a hipótese (2.83) por*

$$\int_Q f(x) dx \leq \epsilon \int_{\lambda Q} f dx + B \left\{ \left(\int_{\lambda Q} f^m dx \right)^{\frac{1}{m}} + \int_{\lambda Q} g dx \right\}, \quad (2.85)$$

com $\lambda \geq 1$, desde que ϵ seja menor que um número ϵ_0 dependente apenas de n e λ .

Demonstração. Sejam $t < s \leq R$. O cubo Q_t pode ser coberto por cubos Q_i de lado $r = \frac{s-t}{\lambda}$, de modo que no máximo $N(n, \lambda)$ cubos λQ_i se intersectam, onde $\lambda Q_i \subset Q_s$ (Observe a figura abaixo). O número total de cubos Q_i não excede $c(s-t)^{-n}(\lambda t)^n$, pois

$$\frac{|Q_t|}{|Q_i|} = \frac{(2t)^n}{\frac{(s-t)^n}{\lambda^n}} = c(s-t)^{-n}(\lambda t)^n.$$

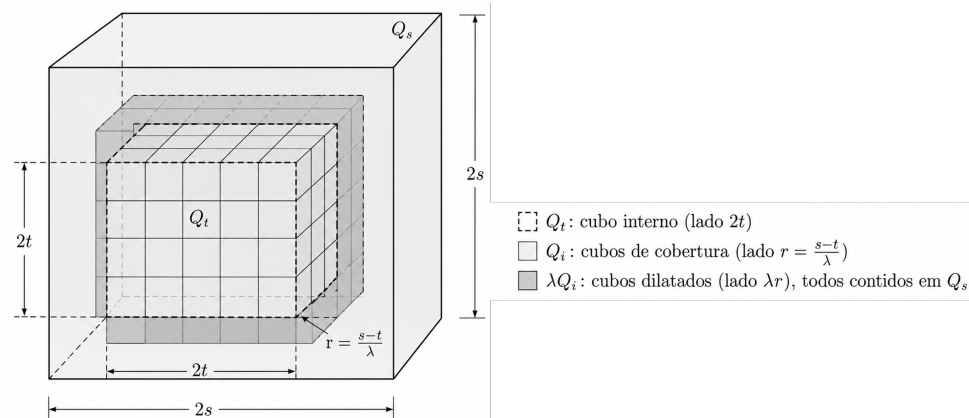


Figura 2.2: Ilustração 3D do problema 2

De (2.85) para Q_i segue que

$$\int_{Q_i} f \, dx \leq \epsilon \int_{\lambda Q_i} f \, dx + B \left\{ \left(\int_{\lambda Q_i} f^m \, dx \right)^{\frac{1}{m}} + \int_{\lambda Q_i} g \, dx \right\}.$$

Assim, multiplicando por $|Q_i|$ e majorando por $\frac{1}{\lambda} \leq 1$ temos

$$\int_{Q_i} f \, dx \leq \epsilon \int_{\lambda Q_i} f \, dx + c(\lambda)(s-t)^{n-\frac{n}{m}} \left(\int_{\lambda Q_i} f^m \, dx \right)^{\frac{1}{m}} + c \int_{\lambda Q_i} g \, dx.$$

Somando sobre i , e lembrando que $Q_t \subset \bigcup_i Q_i$, no lado esquerdo da desigualdade ficamos

$$\int_{Q_t} f \, dx \leq \int_{\bigcup_i Q_i} f \, dx \leq \sum_i \int_{Q_i} f \, dx,$$

deste modo, utilizando essa desigualdade obtemos

$$\int_{Q_t} f \, dx \leq \epsilon \sum_i \int_{\lambda Q_i} f \, dx + c(\lambda)(s-t)^{n-\frac{n}{m}} \sum_i \left(\int_{\lambda Q_i} f^m \, dx \right)^{\frac{1}{m}} + c \sum_i \int_{\lambda Q_i} g \, dx.$$

Agora, sabendo que N representa o número máximo de interseções dos cubos λQ_i e, consequentemente, $N \leq c(s-t)^{-n}(\lambda t)^n$, segue que

$$\int_{Q_t} f \, dx \leq \epsilon N \int_{Q_s} f \, dx + c(\lambda)t^n(s-t)^{-\frac{n}{m}} \left(\int_{Q_s} f^m \, dx \right)^{\frac{1}{m}} + cN \int_{Q_s} g \, dx$$

e, se $R < t < s < 2R$,

$$\int_{Q_t} f \, dx \leq \epsilon N \int_{Q_s} f \, dx + c(\lambda)R^n(s-t)^{-\frac{n}{m}} \left(\int_{Q_{2R}} f^m \, dx \right)^{\frac{1}{m}} + cN \int_{Q_{2R}} g \, dx.$$

Se $\epsilon N < 1$ podemos aplicar o Lema (2.1), obtendo

$$\int_{Q_R} f \, dx \leq c(n, \lambda) \left\{ \left(\int_{Q_{2R}} f^m \, dx \right)^{\frac{1}{m}} + \int_{Q_{2R}} g \, dx \right\}$$

de modo que ficamos reduzidos ao Teorema 2.5. ■

Aplicando o teorema anterior aos quase-mínimos, obtemos:

Teorema 2.6 *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um quase-mínimo cúbico para o funcional*

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) \, dx,$$

e suponha que as hipóteses do Teorema 2.4 são satisfeitas, em particular

$$\tilde{F}(z) - \vartheta(x, u)^p \leq F(x, u, z) \leq c(|z| + \vartheta(x, u))^p$$

com $\tilde{F}(z)$ estritamente quase-convexa em 0, $\vartheta(x, u)^p = b(x)|u|^\gamma + a(x)$, e com as funções $b \in L^\sigma$, $\sigma > \frac{p^*}{p^* - \gamma}$ e $a \in L^s$, $s > 1$.

Então, a função $|Du|^p + |u|^{p^*}$ pertence a $L_{loc}^r(\Omega)$ para algum $r > 1$, e além disso para todo cubo $Q_R \subset Q_{2R} \subset \subset \Omega$, temos:

$$\int_{Q_R} (|Du|^p + |u|^{p^*})^r dx \leq c \left\{ \left(\int_{Q_{2R}} (|Du|^p + |u|^{p^*}) dx \right)^r + \int_{Q_{2R}} g^r dx \right\}, \quad (2.86)$$

onde $g := a + b \frac{p^*}{p^* - \gamma}$.

Observação 2.10 Se usarmos a estimativa (2.58) em vez de (2.45), ou seja, com $f(x) = |Du|^p$, e levamos em conta que a função $g(x) = a(x) + b(x)|u|^\gamma$ pertence a L^r para algum $r > 1$, obtemos a desigualdade

$$\int_{Q_R} |Du|^{rp} dx \leq c \left(\int_{Q_{2R}} |Du|^p dx \right)^r + c \int_{Q_{2R}} (a(x) + b(x)|u|^\gamma)^r dx. \quad (2.87)$$

Observação 2.11 A estimativa (2.86) pode ser ainda melhorada. Temos, na verdade, que

$$\int_{Q_R} (|Du|^p + |u|^{p^*})^r dx \leq c(q) \left\{ \left(\int_{Q_{2R}} (|Du|^p + |u|^{p^*})^q dx \right)^{\frac{r}{q}} + \int_{Q_{2R}} g^r dx \right\}, \quad (2.88)$$

para todo $q \geq 1$ e todo cubo $Q_R \subset Q_{2R} \subset \subset \Omega$. Definindo $\psi(x) = |Du|^p + |u|^{p^*}$, seja $y \in Q_{\alpha\theta}$, e escreva (2.86) para o cubo de raio $\frac{1-\alpha}{2}\theta$ e centro em y . Temos

$$\int_{Q(y, \frac{1-\alpha}{2}\theta)} \psi^r dx \leq c \left\{ \left(\int_{Q(y, (1-\alpha)\theta)} \psi dx \right)^r + \int_{Q(y, (1-\alpha)\theta)} g dx \right\},$$

ou equivalentemente, multiplicando por $|Q(y, \frac{1-\alpha}{2}\theta)|$

$$\int_{Q(y, \frac{1-\alpha}{2}\theta)} \psi^r dx \leq c[(1-\alpha)\theta]^{n(1-r)} \left(\int_{Q(y, (1-\alpha)\theta)} \psi dx \right)^r + c \int_{Q(y, (1-\alpha)\theta)} g dx. \quad (2.89)$$

Usando o mesmo argumento do Corolário 2.45, o cubo $Q_{\alpha\theta}$ pode ser coberto por cubos $Q(y_i, \frac{1-\alpha}{2}\theta)$, de modo que apenas um número finito N de cubos de lado duplo $Q(y_i, (1-\alpha)\theta) \subset Q_\theta$ se intersectam, e desta forma, observe que

$$\int_{Q_{\alpha\theta}} \psi^r dx \leq \int_{\bigcup_i Q(y_i, \frac{1-\alpha}{2}\theta)} \psi^r \leq \sum_i \int_{Q(y_i, \frac{1-\alpha}{2}\theta)} \psi^r$$

somando sobre i a desigualdade (2.89), e absorvendo a constante N que irá aparecer no lado esquerdo de (2.89) ganhamos

$$\int_{Q_{\alpha\theta}} \psi^r dx \leq c[(1-\alpha)\theta]^{n(1-r)} \left(\int_{Q_\theta} \psi dx \right)^r + c \int_{Q_\theta} g dx. \quad (2.90)$$

Por outro lado, pela desigualdade de interpolação (A.1)

$$\int_{Q_\theta} \psi \, dx \leq \left(\int_{Q_\theta} \psi^r \, dx \right)^{\frac{1-q}{r-q}} \left(\int_{Q_\theta} \psi^q \, dx \right)^{\frac{r-1}{r-q}},$$

de modo que, definindo $s = \theta, t = \alpha\theta$ e

$$U_s = \int_{Q_s} \psi^r \, dx$$

temos, a partir de (2.90),

$$U_t \leq c(s-t)^{n(1-r)} U_s^{\frac{r(1-q)}{r-q}} \left(\int_{Q_s} \psi^q \, dx \right)^{\frac{r(r-1)}{r-q}} + c \int_{Q_s} g \, dx.$$

Usando a desigualdade de Young para $\epsilon = \frac{1}{2}$, $p = \frac{r-q}{r(1-q)}$ e $p' = \frac{r-q}{(r-1)q}$, segue que

$$U_t \leq \frac{1}{2} U_s + c(s-t)^{\frac{-n(r-q)}{q}} \left(\int_{Q_s} \psi^q \, dx \right)^{\frac{r}{q}} + c \int_{Q_s} g \, dx$$

e, se $R < t < s < 2R$, temos

$$U_t \leq \frac{1}{2} U_s + c(s-t)^{\frac{-n(r-q)}{q}} \left(\int_{Q_{2R}} \psi^q \, dx \right)^{\frac{r}{q}} + c \int_{Q_{2R}} g \, dx.$$

Podemos agora aplicar o Lema 2.1 entre R e $2R$, obtendo assim a estimativa desejada.

2.5 Estimativas de Fronteira

Um resultado análogo vale para quase-mínimos cúbicos que assumem valores prescritos na fronteira. Mais precisamente, suponha que $U(x)$ é uma função em $W^{1,t}(\mathbb{R}^n)$, com $t > p$, e seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ uma função tal que $u - U \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e que para todo cubo $Q_R \subset \mathbb{R}^n$ tenhamos

$$\mathcal{F}(u, \Omega_R) \leq c \int_{\Omega_R} (|Dv| + \vartheta(x, v))^p \, dx$$

para toda função v tal que $v - u \in W_0^{1,p}(\Omega_R)$, onde $\Omega_R = \Omega \cap Q_R$. Suponha ainda que a função $F(x, u, z)$ satisfaz as condições do teorema anterior, e que Ω não tem cúspides internas, isto é, que existe uma constante positiva α_0 tal que para todo cubo Q_R com centro em $\partial\Omega$ temos

$$|Q_R \cap \Omega| \geq \alpha_0 |Q_R|. \quad (2.91)$$

Em particular, a condição acima é satisfeita se $\partial\Omega$ é Lipschitz- contínua. Agora, como de costume, sejam $\varrho \leq t < s \leq R$, e seja $\eta \in C_0^\infty(Q_s)$, com $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ em Q_t e

$|D\eta| \leq 2/(s-t)$. Definindo $u = U$ em $\mathbb{R}^n - \Omega$, $\varphi = \eta(u - U)$ e $v = u - \varphi$, temos, como na demonstração do Teorema 2.4, as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{Q_s} |D\varphi|^p dx &\leq \int_{Q_s} F(D\varphi) dx \leq \int_{Q_s} F(x, u, D\varphi) dx + \int_{Q_s} \vartheta(x, u)^p dx \\ &= \int_{Q_s} F(x, u, Du) dx + \int_{Q_s} [F(x, u, D\varphi) - F(x, u, Du)] dx \\ &\quad + \int_{Q_s} \vartheta(x, u)^p dx \end{aligned} \quad (2.92)$$

Agora usando o Lema A.3, temos

$$|F(x, u, D\varphi) - F(x, u, Du)| \leq (|Du| + |D\varphi| + \vartheta(x, u))^{p-1} |Dv|$$

e, pela desigualdade (2.49), fica imediato que

$$\int_{Q_s} F(x, u, Du) dx \leq c \int_{Q_s} (|Dv| + \vartheta(x, v))^p dx,$$

daí, substituindo as duas desigualdades acima na desigualdade (2.92), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_s} |D\varphi|^p dx &\leq c \int_{Q_s} (|Dv| + \vartheta(x, v))^p dx + c \int_{Q_s} (|Du| + |D\varphi| + \vartheta(x, u))^{p-1} |Dv| dx \\ &\quad + \int_{Q_s} \vartheta(x, u)^p dx. \end{aligned}$$

Usamos agora a estimativa $A^{p-1}B \leq \epsilon A^p + c(\epsilon)B^p$ obtida por Young (A.2), para chegarmos em

$$|D\varphi|^{p-1} |Dv| \leq \epsilon |D\varphi|^p + c(\epsilon) |Dv|^p,$$

e

$$|Du|^{p-1} |Dv| \leq \epsilon |D(u - U)|^p + c(\epsilon) |Dv|^p + c |DU|^p.$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno, o termo com $|D\varphi|^p$ e $|D(u - U)|^p$ podem ser subtraídos do lado esquerdo, como no Teorema 2.4. Ademais, trabalhando com as mesmas desigualdades usadas para obter (2.52), e observando que $D\varphi = D(u - U)$ em Q_t obtemos a desigualdade semelhante a (2.52)

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} |D(u - U)|^p dx &\leq c \int_{Q_s - Q_t} |D(u - U)|^p dx \\ &\quad + c \int_{Q_s} (|Dv|^p + |DU|^p + |u - U|^{p^*} + |U|^{p^*} + g) dx, \end{aligned}$$

com $g = a + b \frac{p^*}{p^* - \gamma}$. Por outro lado, temos $v = U + (1 - \eta)(u - U)$, e portanto derivando e usando a desigualdade triangular

$$|Dv| \leq |DU| + (1 - \eta) |D(u - U)| + 2 \frac{|u - U|}{s - t},$$

e, inserindo-a na desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} |D(u - U)|^p dx &\leq c \int_{Q_s - Q_t} |D(u - U)|^p dx + \frac{c}{(s - t)^p} \int_{Q_s} |u - U|^p dx \\ &\quad + c \int_{Q_s} (|DU|^p + |u - U|^{p^*} + |U|^{p^*} + g) dx. \end{aligned}$$

Mais uma vez, o termo $|u - U|^{p^*}$ pode ser estimado como no Teorema 2.4, aplicando o Teorema A.5 à função $u - U$, que é nula em $Q_s - \Omega$, um conjunto de medida maior que $\alpha_0|Q_s|$. Segue-se que se R , e portanto s , é suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} |D(u - U)|^p dx &\leq c \int_{Q_s - Q_t} |D(u - U)|^p dx + \frac{c}{(s - t)^p} \int_{Q_s} |u - U|^p dx \\ &\quad + c \int_{Q_s} (|DU|^p + |U|^{p^*} + g) dx. \end{aligned}$$

Aplicamos neste ponto o método de “preenchimento de buraco” (*hole filling*), já usado anteriormente. Adicionamos a ambos os lados a quantidade

$$c \int_{Q_t} |D(u - U)|^p dx$$

e dividimos por $c + 1$, assim, escrevendo $\vartheta := c/(c + 1)$ temos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} |D(u - U)|^p dx &\leq \vartheta \int_{Q_t} |D(u - U)|^p dx + \frac{1}{(s - t)^p} \int_{Q_s} |u - U|^p dx \\ &\quad + \int_{Q_s} (|DU|^p + |U|^{p^*} + g) dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1 obtemos a desigualdade de Caccioppoli

$$\int_{Q_\vartheta} |D(u - U)|^p dx \leq \frac{c}{(R - \vartheta)^p} \int_{Q_R} |u - U|^p dx + c \int_{Q_R} g_1 dx,$$

na qual definimos $g_1 = a + b \frac{p^*}{p^* - \gamma} + |DU|^p + |U|^{p^*}$. Finalmente, para obter a segunda equação do Teorema 2.4, estimamos o primeiro termo do lado direito por meio da Desigualdade de Sobolev-Poincaré A.4, e escrevemos $2R$ no lugar de R , chegando à desigualdade semelhante¹¹ a (2.45)

$$\int_{Q_R} |D(u - U)|^p dx \leq c \left(\int_{Q_{2R}} |D(u - U)|^{pm} dx \right)^{\frac{1}{m}} + c \int_{Q_{2R}} g_1 dx,$$

com $m = \frac{n}{n+p}$ se $p_* \geq 1$, e $m = \frac{1}{p}$ se $p_* < 1$. Podemos agora repetir os argumentos da Seção 3.4, tomando $f(x) = |D(u - U)|$, e concluir que $D(u - U)$ (e portanto Du) pertence a $W^{1,pr}(\Omega_{R/2})$ para algum $r > 1$, com a estimativa correspondente. Cobrindo $\partial\Omega$ com um número finito de cubos, e depois o que resta de Ω com outros cubos estritamente contidos em Ω , obtemos finalmente o seguinte:

¹¹Pode-se também adicionar a ambos os membros o termo $|u|^{p^*}$, obtendo o análogo de (2.45).

Teorema 2.7 *Seja Ω um conjunto aberto com fronteira Lipschitz-contínua, e seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ um quase-mínimo cúbico para o funcional $\mathcal{F}$, verificando as hipóteses do Teorema 2.4, entre todas as funções que assumem em $\partial\Omega$ o valor $U(x) \in W^{1,t}(\Omega)$, $t > p$. Então, U pertence a $L^{pr}(\Omega)$ para algum $r > 1$.*

Observação 2.12 *Os teoremas que acabamos de provar, e aqueles que provaremos nos capítulos seguintes, continuam válidos se $p \geq n$, com as devidas alterações nas hipóteses e nas demonstrações. Em particular, se $p = n$, os Teoremas 2.6 e 2.7 implicam que a função $u(x)$ é Hölder-contínua em Ω , respectivamente em $\bar{\Omega}$.*

Capítulo 3

Hölder Continuidade

O objetivo deste capítulo é provar que, no caso escalar $N = 1$, os quase-mínimos e os ω -mínimos (veremos adiante) de funcionais regulares do cálculo das variações são funções Hölder-contínuas. O resultado principal é uma versão do teorema fundamental de De Giorgi [6] e Nash [18] sobre a regularidade de soluções de equações lineares elípticas com coeficientes descontínuos, um resultado que foi posteriormente generalizado, entre outros, por Ladyženskaya e Ural'ceva [16] para soluções limitadas de equações elípticas não lineares. Provaremos, seguindo Giaquinta e Giusti [11], que a mesma técnica se aplica a quase-mínimos de funcionais. Como mostramos no capítulo anterior, soluções fracas de equações elípticas na forma divergência são quase-mínimos de funcionais adequados.

3.1 Desigualdade de Caccioppoli

Consideremos o funcional

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx. \quad (3.1)$$

Como de costume, $F(x, u, z)$ é uma função de Carathéodory satisfazendo as desigualdades

$$|z|^p - b(x)|u|^\gamma - a(x) \leq F(x, u, z) \leq L|z|^p + b(x)|u|^\gamma + a(x), \quad (3.2)$$

onde¹ $1 < p \leq \gamma < p^* = \frac{pn}{n-p}$, e a e b são duas funções não negativas, pertencentes respectivamente a $L^s(\Omega)$ e $L^\sigma(\Omega)$, com $s > \frac{n}{p}$ e $\sigma > \frac{p^*}{p^*-\gamma}$. Assumiremos que $\frac{1}{s} = \frac{p}{n} - \epsilon$ e

¹Se $p \geq n$ podemos tomar γ arbitrariamente. Por outro lado, neste caso, levando em conta os resultados do capítulo anterior e do teorema de imersão de Sobolev, todo quase-mínimo do funcional $\mathcal{F}$ é automaticamente uma função Hölder-contínua, de modo que será suficiente discutir apenas o caso $p < n$.

$\frac{1}{\sigma} = 1 - \frac{\gamma}{p^*} - \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$.

Nosso primeiro resultado diz respeito a *sub-quase-mínimos* do funcional $\mathcal{F}$. Lembremos, que $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ é um sub-quase-mínimo se para toda função não positiva $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, com suporte $K \subset \Omega$, temos

$$\mathcal{F}(u, K) \leq Q\mathcal{F}(u + \varphi, K).$$

Analogamente, u é um *super-quase-mínimo* se a relação anterior vale para toda $\varphi \geq 0$. Um quase-mínimo é simultaneamente um super- e um sub-quase-mínimo.

Se u pertence a $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$, k é um número real, e Q_R é um cubo estritamente contido em Ω , definimos

$$A(k, R) = \{x \in Q_R : u(x) > k\} \quad (3.3)$$

e

$$B(k, R) = \{x \in Q_R : u(x) < k\}. \quad (3.4)$$

Temos $|A(k, R)| = |Q_R| - |B(k, R)|$ para quase todo k , de modo que, quando necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que todos os valores k considerados satisfazem esta relação.

O próximo teorema é uma variação da desigualdade de Caccioppoli.

Teorema 3.1 *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ um sub-quase-mínimo do funcional (3.1), e sejam válidas as condições (3.2). Então, existe $R_0 > 0$ (dependendo de $\|u\|_{p^*}$ e $\|b\|_\sigma$) tal que para todo $x_0 \in \Omega$, todo ϱ, R , com $0 < \varrho < R < \min(R_0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$ e todo $k \geq 0$ temos:*

$$\int_{A(k, \varrho)} |Du|^p dx \leq \frac{c}{(R - \varrho)^p} \int_{A(k, R)} (u - k)^p dx + c(\|a\|_s + k^p R^{-n\epsilon}) |A(k, R)|^{1 - \frac{p}{n} + \epsilon}. \quad (3.5)$$

Demonstração. Seja η uma função em $C_0^\infty(Q_R)$, com $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ em Q_ϱ e $|D\eta| \leq \frac{2}{R - \varrho}$. Definindo $w = (u - k)^+ = \max\{u - k, 0\}$, a função $v = u - \eta w$ não é maior que u , e difere de u no máximo em $A(k, R)$. De fato, basta observar que

$$v = u - \eta w = u - \eta(\max\{u - k, 0\}) = \begin{cases} u, & \text{se } \max\{u - k, 0\} = 0 \\ \leq u, & \text{se } u > k. \end{cases}$$

Segue que, tomando $\varphi = -\eta w \leq 0$, temos que o $\text{supp}(\varphi) = A(k, R)$, donde da definição de submínimo obtemos

$$\mathcal{F}(u, A(k, R)) \leq Q\mathcal{F}(v, A(k, R)).$$

Usando as desigualdades de (3.2), temos

$$\int_{A(k,R)} |Du|^p dx - \int_{A(k,R)} b|u|^\gamma + a dx \leq \int_{A(k,R)} F(x, u, Du) dx \quad (3.6)$$

e por outro lado

$$\int_{A(k,R)} F(x, v, Dv) dx \leq \int_{A(k,R)} L|Dv|^p dx + \int_{A(k,R)} b|v|^\gamma + a dx. \quad (3.7)$$

Por (3.6) e (3.7), obtemos

$$\int_{A(k,R)} |Du|^p dx \leq Q \left(\int_{A(k,R)} |Dv|^p dx + \int_{A(k,R)} [b(|u|^\gamma + |v|^\gamma) + a] dx \right). \quad (3.8)$$

Para $x \in A(k, R)$ temos $u = u(1 - \eta) + \eta(w + k)$, $v = u(1 - \eta) + \eta k$, e portanto $Dv = (1 - \eta)Du - (u - k)D\eta$, e usando que $(a + b)^s \leq c(s)(a^s + b^s)$ temos

$$|u|^\gamma + |v|^\gamma \leq c(\gamma)\{(\eta w)^\gamma + |u|^\gamma(1 - \eta)^\gamma + \eta^\gamma k^\gamma\}$$

e

$$|Dv|^p \leq c(p) \left\{ (1 - \eta)^p |Du|^p + \frac{1}{(R - \varrho)^p} (u - k)^p \right\}.$$

Adicionando a ambos os membros de (3.8) o termo $\int_{A(k,R)} b|u|^\gamma dx$, usando as desigualdades acima, e observando que $(1 - \eta)^\gamma \leq (1 - \eta)^p \leq 1$ e $\eta^\gamma \leq 1$, obtemos com os devidos agrupamentos

$$\begin{aligned} \int_{A(k,R)} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx &\leq c \left\{ \int_{A(k,R)} (1 - \eta)^p (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(R - \varrho)^p} \int_{A(k,R)} w^p dx + \int_{A(k,R)} (b(\eta w)^\gamma + bk^\gamma + a) dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por outro lado, escrevendo $b(\eta w)^\gamma = b(\eta w)^{\gamma-p}(\eta w)^p$, utilizando Hölder com os expoentes de modo que $\frac{p}{p^*} + \frac{p}{n} = 1$ e pela desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned} \int_{A(k,R)} b(\eta w)^\gamma dx &\leq \left(\int_{A(k,R)} (\eta w)^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{Q_R} [b(\eta w)^{\gamma-p}]^{\frac{n}{p}} dx \right)^{\frac{p}{n}} \\ &\leq c \int_{A(k,R)} |D(\eta w)|^p dx \left(\int_{Q_R} [b(\eta w)^{\gamma-p}]^{\frac{n}{p}} dx \right)^{\frac{p}{n}}. \end{aligned}$$

Observando que $0 \leq \eta \leq 1$ e $w = u - k$ em $A(k, R)$ segue que

$$D(\eta w) = (D\eta)w + \eta Dw \quad \Rightarrow \quad |D(\eta w)|^p = |(D\eta)w + \eta Dw|^p \leq c(|D\eta|^p w^p + |Du|^p).$$

Passando a integral na última desigualdade, obtemos da estimativa anterior

$$\int_{A(k,R)} b(\eta w)^\gamma dx \leq c \xi(R) \left(\int_{A(k,R)} |Du|^p dx + \frac{1}{(R-\varrho)^p} \int_{A(k,R)} w^p dx \right),$$

onde definimos

$$\xi(R) = \left(\int_{Q_R} [b(\eta w)^{\gamma-p}]^{n/p} dx \right)^{\frac{p}{n}}.$$

Utilizando Hölder com os coeficientes $r = \frac{pp^*}{n(\gamma-p)}$ e $r' = \frac{pp^*}{n(p^*-\gamma)}$ e elevando a $\frac{p}{n}$

$$\xi(R) \leq \left(\int_{Q_R} |\eta w|^{p^*} dx \right)^{\frac{\gamma-p}{p^*}} \left(\int_{Q_R} b^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{p^*}},$$

como $\eta \leq 1$ e $w = u - k \geq 0$, mas $k \geq 0$, então $w \leq u$ e, assim

$$\xi(R) \leq \left(\int_{Q_R} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{\gamma-p}{p^*}} \left(\int_{Q_R} b^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{p^*}}.$$

Agora, defina $q = \frac{p^*}{p^*-\gamma}$, trabalhemos com a última integral. Aplicando com Hölder com os expoentes $\frac{\sigma}{q}$ e $\frac{\sigma}{\sigma-q}$ e lembrando que $\frac{1}{\sigma} = 1 - \frac{\gamma}{p^*} - \epsilon = \frac{1}{q} - \epsilon$, segue que

$$\int_{Q_R} b^q dx \leq \left(\int_{Q_R} b^\sigma dx \right)^{\frac{q}{\sigma}} |Q_R|^{\frac{\sigma-q}{\sigma}},$$

elevando ambos os lados a $1/q$, temos

$$\left(\int_{Q_R} b^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{Q_R} b^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} |Q_R|^{(1-\frac{q}{\sigma})(1/q)} = \|b\|_\sigma |Q_R|^\epsilon.$$

Portanto,

$$\xi(R) \leq \|u\|_{p^*}^{\gamma-p} \|b\|_\sigma |Q_R|^\epsilon.$$

Se escolhermos R suficientemente pequeno (dependendo apenas de $\|u\|_{p^*}$ e $\|b\|_\sigma$), a quantidade $\int_{A(k,R)} |Du|^p$ pode ser parcialmente subtraída do lado esquerdo de (3.9), restando no lado direito o termo

$$\frac{c}{(R-\varrho)^p} \int_{A(k,R)} w^p dx.$$

Desta forma, fica claro que

$$\begin{aligned} \int_{A(k,R)} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx &\leq c \left\{ \int_{A(k,R)} (1-\eta)^p (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(R-\varrho)^p} \int_{A(k,R)} w^p dx + \int_{A(k,R)} (bk^\gamma + a) dx \right\}. \end{aligned}$$

Recordando que $\eta = 1$ em Q_ϱ e $A(k, \varrho) \subset A(k, R)$, pois $Q_\varrho \subset Q_R$, assim

$$\int_{A(k, \varrho)} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx \leq c \left\{ \int_{A(k, R) \setminus A(k, \varrho)} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx + \frac{1}{(R - \varrho)^p} \int_{A(k, R)} w^p dx + \int_{A(k, R)} (bk^\gamma + a) dx \right\}.$$

Neste ponto podemos argumentar como no capítulo anterior, utilizando o método de “preenchimento de buraco” (*hole filling*), somando a ambos os lados a quantidade do lado esquerdo multiplicada por c , e fazendo uso do Lema 2.1; chegamos desta forma à desigualdade

$$\int_{A(k, \varrho)} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx \leq \frac{c}{(R - \varrho)^p} \int_{A(k, R)} w^p dx + c \int_{A(k, R)} (bk^\gamma + a) dx. \quad (3.10)$$

Observamos agora que em $A(k, R)$ ocorre $u \geq k$, assim

$$\int_{A(k, R)} |u|^{p^*} dx \geq \int_{A(k, R)} k^{p^*} dx = k^{p^*} |A(k, R)|,$$

e, conseqüentemente, como $A(k, R) \subset Q_R$ obtemos

$$k^{p^*} |A(k, R)| \leq \int_{Q_R} |u|^{p^*} dx, \quad (3.11)$$

Agora, usando Hölder segue que

$$k^\gamma \int_{A(k, R)} b dx \leq k^\gamma \|b\|_\sigma |A(k, R)|^{1 - \frac{1}{\sigma}}. \quad (3.12)$$

Sabendo que $1 - \frac{1}{\sigma} = \frac{\gamma}{p^*} + \epsilon$, podemos escrever $k^\gamma |A(k, R)|^{1 - \frac{1}{\sigma}} = k^\gamma |A(k, R)|^{\frac{\gamma}{p^*}} |A(k, R)|^\epsilon$ e observar que

$$k^\gamma |A(k, R)|^{\frac{\gamma}{p^*}} = (k^{p^*})^{\frac{\gamma}{p^*}} |A(k, R)|^{\frac{\gamma}{p^*}} = (k^{p^*} |A(k, R)|)^{\frac{\gamma}{p^*}}.$$

Usando a decomposição $\frac{\gamma}{p^*} = \frac{\gamma - p}{p^*} + \frac{p}{p^*}$, então

$$(k^{p^*} |A(k, R)|)^{\frac{\gamma}{p^*}} = (k^{p^*} |A(k, R)|)^{\frac{\gamma - p}{p^*}} (k^{p^*} |A(k, R)|)^{\frac{p}{p^*}},$$

daí, ao simplificarmos o segundo fator

$$(k^{p^*} |A(k, R)|)^{\frac{p}{p^*}} = k^p |A(k, R)|^{\frac{p}{p^*}}.$$

Desta forma, juntando os dois fatores, podemos escrever

$$k^\gamma |A(k, R)|^{\frac{\gamma}{p^*}} = (k^{p^*} |A(k, R)|)^{\frac{\gamma - p}{p^*}} k^p |A(k, R)|^{\frac{p}{p^*}}.$$

Substituindo tudo em (3.12), é fato que

$$k^\gamma \int_{A(k,R)} b \, dx \leq k^\gamma \|b\|_\sigma |A(k,R)|^{1-\frac{1}{\sigma}} = \|b\|_\sigma (k^{p^*} |A(k,R)|)^{\frac{\gamma-p}{p^*}} k^p |A(k,R)|^{\frac{p}{p^*}} |A(k,R)|^\epsilon.$$

Desde que, $\frac{p}{p^*} = 1 - \frac{p}{n}$, fica evidente

$$k^\gamma \int_{A(k,R)} b \, dx \leq \|b\|_\sigma (k^{p^*} |A(k,R)|)^{\frac{\gamma-p}{p^*}} k^p |A(k,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}.$$

Escrevendo $1 = |Q_R|^\epsilon |Q_R|^{-\epsilon} = |Q_R|^\epsilon (2R)^{-n\epsilon}$, observando que $2^{-n\epsilon} \leq 1$ e usando (3.11), segue da desigualdade acima que

$$k^\gamma \int_{A(k,R)} b \, dx \leq \|b\|_\sigma \|u\|_{p^*}^{\gamma-p} |Q_R|^\epsilon k^p R^{-n\epsilon} |A(k,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}.$$

Uma vez que, tendo escolhido $R < R_0$, podemos assumir que $\|b\|_\sigma \|u\|_{p^*}^{q-p} |Q_R|^\epsilon \leq 1$, donde ficamos com

$$k^\gamma \int_{A(k,R)} b \, dx \leq k^p R^{-n\epsilon} |A(k,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}.$$

Temos ainda por Hölder,

$$\int_{A(k,R)} a \, dx \leq \|a\|_s |A(k,R)|^{1-\frac{1}{s}} = \|a\|_s |A(k,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon},$$

e o resultado segue imediatamente usando estas últimas estimativas em (3.10). ■

Observação 3.1 *Se u é um super-quase-mínimo para o funcional $\mathcal{F}$, então $-u$ será um sub-quase-mínimo para o funcional*

$$\bar{\mathcal{F}}(v, \Omega) = \int_{\Omega} \bar{F}(x, v, Dv) \, dx,$$

com $\bar{F}(x, u, z) = F(x, -u, -z)$. Uma vez que $\bar{F}$ satisfaz as condições (3.2), concluímos que a desigualdade de Caccioppoli (3.5) vale para a função $-u$, com k substituído por $-k$; temos portanto para todo $k < 0$:

$$\int_{B(k,\rho)} |Du|^p \, dx \leq \frac{c}{(R-\rho)^p} \int_{B(k,R)} (k-u)^p \, dx + c(\|a\|_s + |k|^p R^{-n\epsilon}) |B(k,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}, \quad (3.13)$$

relação válida para $0 < \rho < R < \min\{R_0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$.

Observação 3.2 *As desigualdades de Caccioppoli (3.5) e (3.13) são válidas se u pertence a $W_{loc}^{1,p}$. Naturalmente, neste caso deve-se assumir que $Q_R \subset \Sigma \subset\subset \Omega$, e o raio R_0 dependerá de Σ . Por outro lado, como temos repetido frequentemente, ao lidar com resultados locais as hipóteses $u \in W^{1,p}$ e $u \in W_{loc}^{1,p}$ são equivalentes, uma vez que é sempre possível nos restringirmos a um conjunto aberto fixo arbitrário $\Sigma \subset\subset \Omega$.*

Observação 3.3 *As mesmas desigualdades permanecem válidas se u é um sub-quase-mínimo (ou um super-quase-mínimo) com condições de Dirichlet em $\partial\Omega$; mais precisamente, se para toda função $v \leq u$, com $v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e $K = \text{supp}(v - u)$, temos*

$$\mathcal{F}(u, K) \leq Q\mathcal{F}(v, K).$$

Se o traço de u em $\partial\Omega$ é uma função limitada, podemos repetir a demonstração do teorema anterior, desde que tomemos $k > \sup_{\partial\Omega \cap Q_R} u$; de fato, neste caso a função $\eta(u - k)^+$ pertence a $W_0^{1,p}(Q_r)$. De modo análogo, (3.13) será válida para todo $k < \inf_{\partial\Omega \cap Q_R} u$.

3.2 Classes de De Giorgi

Os resultados da seção anterior sugerem a definição de novas classes de funções.

Definição 3.1 *Seja $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$, dizemos que u pertence à classe de De Giorgi $DG_p^+ = DG_p^+(\Omega, H, \chi, \epsilon, R_0, \kappa_0)$, com $H, \chi, \epsilon, R_0, \kappa_0 \in \mathbb{R}$, se para todo par de cubos concêntricos $Q_\varrho \subset Q_R \subset\subset \Omega$, com $R < R_0$, e para todo $k \geq \kappa_0 \geq 0$ tivermos*

$$\int_{A(k, \varrho)} |Du|^p dx \leq \frac{H}{(R - \varrho)^p} \int_{A(k, R)} (u - k)^p dx + H(\chi^p + k^p R^{-n\epsilon}) |A(k, R)|^{1 - \frac{p}{n} + \epsilon}. \quad (3.14)$$

Podemos definir similarmente DG_p^- como a classe das funções u tais que $-u \in DG_p^+$. Mais explicitamente, são as funções em $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ tais que para todo $\varrho < R \leq R_0$ e $k \leq -\kappa_0$ tem-se

$$\int_{B(k, \varrho)} |Du|^p dx \leq \frac{H}{(R - \varrho)^p} \int_{B(k, R)} (k - u)^p dx + H(\chi^p + |k|^p R^{-n\epsilon}) |B(k, R)|^{1 - \frac{p}{n} + \epsilon}. \quad (3.15)$$

É claro que se uma função u satisfaz (3.14) ou (3.15) com algum ϵ , então ela as verificará com qualquer $\epsilon' < \epsilon$ positivo, a menos de uma constante. Consequentemente, podemos sempre assumir que $\epsilon \leq \frac{p}{n}$.

Finalmente, indicaremos por DG_p a classe das funções que pertencem tanto a DG_p^+ quanto a DG_p^- , isto é,

$$DG_p := DG_p^+ \cap DG_p^-.$$

Uma característica surpreendente das classes de De Giorgi é que (3.14) e (3.15) contêm praticamente toda a informação proveniente das propriedades de mínimo da função u , pelo menos no que diz respeito à sua continuidade Hölder.

Antes de iniciar o estudo das propriedades das funções em $DG_p^\pm$, faremos alguns comentários que simplificarão consideravelmente as demonstrações seguintes.

Observação 3.4 Se definirmos $v = u + \chi R^\beta$ ($\beta = \frac{n\epsilon}{p}$) e $h = k + \chi R^\beta$ em (3.14), e $v = u - \chi R^\beta$ e $h = k - \chi R^\beta$ em (3.15), obtemos respectivamente:

$$\int_{A(h,\varrho)} |Dv|^p dx \leq \frac{H}{(R-\varrho)^p} \int_{A(h,R)} (v-h)^p dx + H(\chi^p + k^p R^{-n\epsilon}) |A(h,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}, \quad (3.16)$$

pois $u = v - \chi R^\beta > k = h - \chi R^\beta$, logo $v > h$, tendo assim, as equivalências entre $A(k,R)$ e $A(h,R)$, como também de $A(k,\varrho)$ e $A(h,\varrho)$. Além disso, pelas outras definições obtemos a segunda desigualdade

$$\int_{B(h,\varrho)} |Dv|^p dx \leq \frac{H}{(R-\varrho)^p} \int_{B(h,R)} (h-v)^p dx + H(\chi^p + |k|^p R^{-n\epsilon}) |B(h,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} \quad (3.17)$$

Para (3.16), fazemos a estimativa que

$$h = k + \chi R^\beta \geq \chi R^\beta \Rightarrow h^p \geq \chi^p R^{n\epsilon} \Rightarrow h^p R^{-n\epsilon} \geq \chi^p \quad (3.18)$$

adicionalmente, temos

$$h = k + \chi R^\beta \geq k \Rightarrow h^p \geq k^p \Rightarrow h^p R^{-n\epsilon} \geq k^p R^{-n\epsilon}. \quad (3.19)$$

Somando (3.18) e (3.19), temos

$$k^p R^{-n\epsilon} + \chi^p \leq 2h^p R^{-n\epsilon},$$

donde podemos substituir na primeira expressão e obter

$$\int_{A(h,\varrho)} |Dv|^p dx \leq \frac{H}{(R-\varrho)^p} \int_{A(h,R)} (v-h)^p dx + Hh^p R^{-n\epsilon} |A(h,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}, \quad (3.20)$$

Para (3.17) fazemos o mesmo passo, observando que, para $h = k - \chi R^\beta \leq k \leq 0$, temos $|h| = -h = -(k - \chi R^\beta) = |k| + \chi R^\beta$ e processo segue análogo, obtendo

$$\int_{B(h,\varrho)} |Dv|^p dx \leq \frac{H}{(R-\varrho)^p} \int_{B(h,R)} (h-v)^p dx + H|h|^p R^{-n\epsilon} |B(h,R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}. \quad (3.21)$$

É claro que a primeira relação será válida para $h \geq h_0 = \kappa_0 + \chi R^\beta$, pois $k \geq \kappa_0$, e a segunda para $h \leq -h_0 = -\kappa_0 - \chi R^\beta$, pois $k \leq -\kappa_0$.

Observação 3.5 Por meio de uma homotetia, podemos reduzir ao caso $R = 1$. Mais precisamente, sejam $s < r < R$ e escrevamos (3.20) e (3.21) (com y no lugar de x) para os raios s e r . Assim, temos

$$\int_{A(h,s)} |Dv|^p dy \leq \frac{H}{(r-s)^p} \int_{A(h,r)} (v-h)^p dy + Hh^p r^{-n\epsilon} |A(h,r)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}, \quad (3.22)$$

e

$$\int_{B(h,s)} |Dv|^p dy \leq \frac{H}{(r-s)^p} \int_{B(h,r)} (h-v)^p dy + H|h|^p r^{-n\epsilon} |B(h,r)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}. \quad (3.23)$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = Rx$ e definindo $s = \sigma R$, $r = \tau R$ e $w(x) = v(y) = v(Rx)$, temos que $\sigma < \tau < 1$, a função w está definida no cubo Q_1 e satisfaz as relações

$$\int_{A(h,\sigma)} |Dw|^p dx \leq \frac{H}{(\tau - \sigma)^p} \int_{A(h,\tau)} (w - h)^p dx + Hh^p \tau^{-n\epsilon} |A(h, \tau)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}, \quad (3.24)$$

e

$$\int_{B(h,\sigma)} |Dw|^p dx \leq \frac{H}{(\tau - \sigma)^p} \int_{B(h,\tau)} (h - w)^p dx + H|h|^p \tau^{-n\epsilon} |B(h, \tau)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}. \quad (3.25)$$

Com efeito, provemos que vale (3.24) e o caso para (3.25) segue analogamente. Para o gradiente temos pela regra da cadeia $Dw(x) = R Dv(Rx)$, logo

$$|Dv(y)|^p = |Dv(Rx)|^p = R^{-p} |Dw(x)|^p.$$

Além disso, para o elemento de volume tem-se $dy = R^n dx$. Desta forma, olhando para o lado esquerdo de (3.22), obtemos

$$\int_{A(h,s)} |Dv(y)|^p dy = \int_{A(h,\sigma)} R^{-p} |Dw(x)|^p \cdot R^n dx = R^{n-p} \int_{A(h,\sigma)} |Dw|^p dx.$$

Agora, vejamos o lado direito de (3.22), note que

$$\int_{A(h,r)} (v - h)^p dy = \int_{A(h,\tau)} (w - h)^p R^n dx = R^n \int_{A(h,\tau)} (w - h)^p dx$$

ademaís, como

$$r - s = R(\tau - \sigma) \quad \Rightarrow \quad (r - s)^p = R^p (\tau - \sigma)^p.$$

então o primeiro termo nos dá

$$H R^{n-p} \frac{1}{(\tau - \sigma)^p} \int (w - h)^p dx.$$

Por outro lado, observando que $|A(h, r)| = R^n |A(h, \tau)|$, ganhamos

$$|A(h, r)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} = R^{n(1-\frac{p}{n}+\epsilon)} |A(h, \tau)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon},$$

que juntamente com $r^{-n\epsilon} = R^{-n\epsilon} \tau^{-n\epsilon}$ nos fornece para o segundo termo do lado direito a igualdade

$$Hh^p r^{-n\epsilon} |A(h, r)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} = Hh^p R^{n-p} \tau^{-n\epsilon} |A(h, \tau)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}.$$

Assim, todos os termos têm fator R^{n-p} , cancelamos e conquistamos a desigualdade requerida

$$\int_{A(h,\sigma)} |Dw|^p dx \leq \frac{H}{(\tau - \sigma)^p} \int_{A(h,\tau)} (w - h)^p dx + Hh^p \tau^{-n\epsilon} |A(h, \tau)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}.$$

Como já mencionado, a desigualdade (3.25) é análoga. Em particular, se $\tau \geq \frac{1}{2}$:

$$\int_{A(h,\sigma)} |Dw|^p dx \leq \frac{H_1}{(\tau - \sigma)^p} \int_{A(h,\tau)} (w - h)^p dx + H_1 h^p |A(h, \tau)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} \quad (3.26)$$

$$e \quad \int_{B(h,\sigma)} |Dw|^p dx \leq \frac{H_1}{(\tau - \sigma)^p} \int_{B(h,\tau)} (h - w)^p dx + H_1 |h|^p |B(h, \tau)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}. \quad (3.27)$$

Em conclusão, podemos assumir que (3.26) é satisfeita para todo $h \geq h_0 = \kappa_0 + \chi R^\beta$, e (3.27) para $h \leq -h_0 = -\kappa_0 - \chi R^\beta$. Podemos retornar ao caso geral com uma homotetia adequada, escrevendo $u + \chi R^\beta$ ou $u - \chi R^\beta$ em vez de u .

O seguinte lema será bastante útil mais adiante.

Lema 3.1 *Seja $\alpha > 0$ e seja (x_i) uma sequência de números reais positivos, tal que*

$$x_{i+1} \leq C B^i x_i^{1+\alpha},$$

com $C > 0$ e $B > 1$. Se $x_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} B^{-\frac{1}{\alpha^2}}$, então

$$x_i \leq B^{-\frac{i}{\alpha}} x_0$$

e, em particular,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0.$$

Demonstração. Procedemos por indução. A desigualdade (7.15) é obviamente verdadeira para $i = 0$. Suponha agora que ela vale para i . Temos que

$$x_{i+1} \leq C B^i x_i^{1+\alpha} \leq C B^i \left(B^{-\frac{i}{\alpha}} x_0 \right)^{1+\alpha} = C B^i B^{-\frac{i(1+\alpha)}{\alpha}} x_0^{1+\alpha} = C B^{-\frac{i}{\alpha}} x_0^{1+\alpha}.$$

Escrevendo $B^{-\frac{i}{\alpha}} = B^{-\frac{i+1}{\alpha}} B^{\frac{1}{\alpha}}$, obtemos

$$x_{i+1} \leq C B^{\frac{1}{\alpha}} x_0^{1+\alpha} \cdot B^{-\frac{i+1}{\alpha}} = \left(C B^{\frac{1}{\alpha}} x_0^\alpha \right) B^{-\frac{i+1}{\alpha}} x_0.$$

Pela hipótese $x_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} B^{-\frac{1}{\alpha^2}}$, temos $C B^{\frac{1}{\alpha}} x_0^\alpha \leq 1$, logo

$$x_{i+1} \leq B^{-\frac{i+1}{\alpha}} x_0,$$

o que completa a indução. ■

Estamos agora em condições de provar o seguinte:

Teorema 3.2 *Seja u uma função de DG_p^+ . Então, u é localmente limitada superiormente em Ω , e para todo $x_0 \in \Omega$ e $R \leq \min\{R_0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$ temos:*

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}} u(x) \leq c \left\{ \left(\int_{Q_R} u_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \kappa_0 + \chi R^\beta \right\}. \quad (3.28)$$

Demonstração. Podemos supor $R = 1$, e que (3.26) é satisfeita para todo $h \geq h_0$. Para $\frac{1}{2} \leq \sigma < \tau \leq 1$, seja η uma função de classe $C_0^\infty(Q_{\frac{\sigma+\tau}{2}})$ com $\eta = 1$ em Q_σ e $|D\eta| \leq \frac{4}{\tau-\sigma}$. Definindo $\zeta = \eta(w-k)^+ = \eta \max\{w-k, 0\}$, com $k \geq h_0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{A(k,\sigma)} (w-k)^p dx &\leq \int_{A(k,\tau)} \zeta^p dx \\ &\leq \left(\int_{A(k,\tau)} \zeta^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} |A(k,\tau)|^{1-\frac{p}{p^*}} \quad (\text{Usando Hölder}) \\ &\leq c |A(k,\tau)|^{\frac{p}{n}} \int_{A(k,\tau)} |D\zeta|^p dx. \quad (\text{Usando Poincaré}) \end{aligned}$$

Agora, observe que em $A(k,\tau)$ temos $(w-k)^+ = w-k$, daí $|D\zeta| = |(D\eta)(w-k) + \eta(Dw)|$, donde segue

$$|D\zeta|^p \leq c(|D\eta|^p(w-k)^p + \|\eta\|_\infty^p |Dw|^p) \leq c(|D\eta|^p(w-k)^p + |Dw|^p).$$

Usando $|D\eta| \leq \frac{4}{\tau-\sigma}$, integrando e substituindo na nossa primeira desigualdade obtemos

$$\int_{A(k,\sigma)} (w-k)^p dx \leq c \left(\int_{A(k,\frac{\sigma+\tau}{2})} |Dw|^p dx + \frac{1}{(\tau-\sigma)^p} \int_{A(k,\frac{\sigma+\tau}{2})} (w-k)^p dx \right) |A(k,\tau)|^{\frac{p}{n}}.$$

Introduzindo a desigualdade (3.26) na anterior, obtemos para $k \geq h_0$,

$$\int_{A(k,\sigma)} (w-k)^p dx \leq \frac{c|A(k,\tau)|^{\frac{p}{n}}}{(\tau-\sigma)^p} \int_{A(k,\tau)} (w-k)^p dx + ck^p |A(k,\tau)|^{1+\epsilon}. \quad (3.29)$$

Observamos agora que se $h < k$, e sabendo que em $A(k,\tau)$ tem-se $w > k$, segue que $w-h > k-h$, daí

$$(k-h)^p |A(k,\tau)| \leq \int_{A(k,\tau)} (w-h)^p dx \leq \int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx \quad (3.30)$$

e, além disso, como $h < k$, então $-k < -h$ e

$$\int_{A(k,\tau)} (w-k)^p dx \leq \int_{A(k,\tau)} (w-h)^p dx \leq \int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx,$$

Trabalhando com as duas estimativas acima podemos ter uma estimativa para (3.29). De fato, primeiramente, observe que

$$\begin{aligned} ck^p |A(k,\tau)|^{1+\epsilon} &\leq ck^p \left[\int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx \frac{1}{(k-h)^p} \right]^{1+\epsilon} \\ &= c \left(\int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx \right)^{1+\epsilon} \left(\frac{1}{(k-h)^{p\epsilon}} \cdot \frac{k^p}{(k-h)^p} \right). \quad (3.31) \end{aligned}$$

Agora, usando a hipótese que $\epsilon \leq \frac{p}{n}$ e o fato de que $|A(k, \tau)| \leq |Q_1|$, temos

$$|A(k, \tau)|^{\frac{p}{n}} = |A(k, \tau)|^{\frac{p}{n}-\epsilon} |A(k, \tau)|^\epsilon \leq |Q_1|^{\frac{p}{n}-\epsilon} |A(k, \tau)|^\epsilon = c |A(k, \tau)|^\epsilon,$$

e, daí

$$\frac{c |A(k, \tau)|^{\frac{p}{n}}}{(\tau - \sigma)^p} \int_{A(k, \tau)} (w - k)^p dx \leq c \left(\int_{A(h, \tau)} (w - h)^p dx \right)^{\epsilon+1} \frac{1}{(k - h)^{p\epsilon}} \cdot \frac{1}{(\tau - \sigma)^p}. \quad (3.32)$$

Introduzindo (3.31) e (3.32) em (3.29), obtemos

$$\int_{A(k, \sigma)} (w - k)^p dx \leq c \left(\int_{A(h, \tau)} (w - h)^p dx \right)^{1+\epsilon} \times \frac{1}{(k - h)^{p\epsilon}} \left(\frac{1}{(\tau - \sigma)^p} + \frac{k^p}{(k - h)^p} \right). \quad (3.33)$$

Seja agora $d \geq h_0$ um número que fixaremos mais tarde, e consideremos as sequências

$$k_i = 2d(1 - 2^{-i-1}) \quad \text{e} \quad \sigma_i = \frac{1}{2}(1 + 2^{-i}).$$

Escrevendo (3.33) para $\sigma = \sigma_{i+1}$, $\tau = \sigma_i$, $k = k_{i+1}$ e $h = k_i$, temos

$$\int_{A(k_{i+1}, \sigma_{i+1})} (w - k_{i+1})^p dx \leq c \left(\int_{A(k_i, \sigma_i)} (w - k_i)^p dx \right)^{1+\epsilon} \frac{1}{(k_{i+1} - k_i)^{p\epsilon}} \left(\frac{1}{(\sigma_i - \sigma_{i+1})^p} + \frac{k_{i+1}^p}{(k_{i+1} - k_i)^p} \right),$$

e definindo

$$d^p \Phi_i = \int_{A(k_i, \sigma_i)} (w - k_i)^p dx,$$

obtemos

$$\Phi_{i+1} \leq c d^{p\epsilon} \Phi_i^{1+\epsilon} \cdot \frac{1}{(k_{i+1} - k_i)^{p\epsilon}} \left(\frac{1}{(\sigma_i - \sigma_{i+1})^p} + \frac{k_i^p}{(k_{i+1} - k_i)^p} \right).$$

Trabalhando com os valores de k_i e σ_i , obtemos a relação

$$\Phi_{i+1} \leq C 2^{ip(1+\epsilon)} \Phi_i^{1+\epsilon}.$$

Podemos agora aplicar o lema anterior com $B = 2^{p(1+\epsilon)}$. Se Φ_0 for menor que uma constante adequada, então poderemos aplicar o lema. A priori, note que

$$\Phi_0 = d^{-p} \int_{A(d, 1)} (w - d)^p dx,$$

em que $A(d, 1) = \{x \in Q_1 : w(x) > d\}$. Como $d \geq h_0 \geq 0$, e em $A(d, 1)$ temos $w > d \geq 0$, segue que $w_+ \geq w$ e, portanto,

$$\int_{A(d, 1)} (w - d)^p dx \leq \int_{Q_1} w_+^p dx.$$

Assim, fica claro que

$$\Phi_0 \leq d^{-p} \int_{Q_1} w_+^p dx.$$

Neste caso, a condição de $\Phi_0 \leq c$, onde c é a constante adequada, é satisfeita se

$$d^{-p} \int_{Q_1} w_+^p dx \leq c$$

ou seja, tomando d adequado tal que

$$d \geq c \left(\int_{Q_1} w_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

temos, pelo Lema 3.1

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_i = 0,$$

ou de outro modo,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{A(k_i, \sigma_i)} (w - k_i)^p dx = 0. \quad (3.34)$$

Pela definição de k_i e σ_i temos $k_i \rightarrow 2d$ e $\sigma_i \rightarrow 1/2$ quando $i \rightarrow \infty$. Ademais, note que $A(2d, 1/2) \subset A(k_i, \sigma_i)$ para todo i , uma vez que $k_i \leq 2q$ e $\sigma_i \geq 1/2$. Daí,

$$0 \leq \int_{A(2d, 1/2)} (w - k_i)^p dx \leq \int_{A(k_i, \sigma_i)} (w - k_i)^p dx.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{A(2d, 1/2)} (w - k_i)^p dx = \int_{A(2d, 1/2)} (w - 2d)^p dx.$$

Pelo Teorema do sanduíche, temos

$$\int_{A(2d, 1/2)} (w - 2d)^p dx = 0,$$

então,

$$(w - 2d) = 0, \quad q.t.p. \text{ em } A(2d, 1/2),$$

no entanto, sobre $A(2d, 1/2)$ temos que $w > 2d$, o que nos diz que $|A(2d, 1/2)| = 0$. Desta forma, podemos escrever na forma

$$\sup_{Q_{1/2}} w \leq 2d.$$

As condições impostas sobre d podem ser satisfeitas definindo

$$d = h_0 + c \left(\int_{Q_1} w_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

e, portanto

$$\sup_{Q_{1/2}} w \leq c \left(\int_{Q_1} w_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + 2h_0.$$

A conclusão segue retornando à função $u(x) = w\left(\frac{x}{R}\right) - \chi R^\beta$.

■

Se, em vez do cubo $Q_{\frac{R}{2}}$, quisermos uma estimativa sobre o cubo Q_{tR} , com $t < 1$, podemos usar o seguinte

Corolário 3.1 *Com as hipóteses do teorema anterior, temos*

$$\sup_{Q_{tR}} u(x) \leq c \left\{ \left(\frac{1}{(1-t)^n} \int_{Q_R} u_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \kappa_0 + \chi R^\beta \right\}. \quad (3.35)$$

Demonstração. Seja x_1 um ponto em Q_{tR} tal que

$$\sup_{Q_{tR}} u(x) = \sup_{Q(x_1, \frac{1-t}{2}R)} u(x).$$

Pelo teorema anterior, temos

$$\sup_{Q_{tR}} u(x) = \sup_{Q(x_1, \frac{1-t}{2}R)} u(x) \leq c \left\{ \left(\int_{Q_{(1-t)R}} u_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \kappa_0 + \chi[(1-t)R]^\beta \right\},$$

donde (3.35) segue com os devidos cálculos.

■

O seguinte resultado também é uma consequência do Teorema 3.2.

Teorema 3.3 *Com as hipóteses do Teorema 3.2, para todo $q > 0$ existe uma constante $c(q)$ tal que*

$$\sup_{Q_\varrho} u \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{(R-\varrho)^n} \int_{Q_R} u_+^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0 + \chi R^\beta \right\}, \quad (3.36)$$

para todo $\varrho < R \leq \min\{R_0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$.

Demonstração. Seja $U_\tau = \sup_{Q_\tau} u$. Para $\varrho \leq \sigma < \tau \leq R$, podemos tomar $t = \frac{\sigma}{\tau} < 1$ e aplicar a equação (3.35) usando $\sigma = t\tau$, obtendo

$$U_\sigma \leq c \left\{ \left(\frac{1}{(\tau-\sigma)^n} \int_{Q_\tau} u_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \kappa_0 + \chi \tau^\beta \right\}.$$

Escrevendo $u_+^p = u_+^q \cdot u_+^{p-q}$, obtemos

$$\int_{Q_\tau} u_+^q dx = \int_{Q_\tau} u_+^q \cdot u_+^{p-q} dx \leq U_\tau^{p-q} \int_{Q_\tau} u_+^q dx,$$

donde segue

$$U_\sigma \leq c \left\{ \left(\frac{1}{(\tau - \sigma)^n} \int_{Q_\tau} u_+^q dx \right)^{\frac{1}{p}} U_\tau^{1-\frac{q}{p}} + \kappa_0 + \chi \tau^\beta \right\}.$$

Agora, aplicando a desigualdade de Young [A.2](#), com $\epsilon = \frac{1}{2}$, e os expoentes $\frac{p}{p-q}$ e $\frac{p}{q}$, temos

$$U_\sigma \leq \frac{1}{2} U_\tau + c(q) \left(\frac{1}{(\tau - \sigma)^n} \int_{Q_R} u_+^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + c(\kappa_0 + \chi R^\beta).$$

Uma aplicação direta do Lema [2.1](#) leva à conclusão. ■

Resultados análogos valem para funções $u \in DG_p^-$. Será suficiente observar que, neste caso, tem-se $-u \in DG_p^+$, e escrever, por exemplo, [\(3.36\)](#) para $-u$. Além disso, se a função u pertence a $DG_p = DG_p^+ \cap DG_p^-$, temos

$$\sup_{Q_\varrho} |u| \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{(R - \varrho)^n} \int_{Q_R} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0 + \chi R^\beta \right\}, \quad (3.37)$$

para todo $\varrho < R \leq \min\{R_0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$.

Finalmente, se Σ é um conjunto aberto estritamente contido em Ω , cobrindo Σ com cubos de lado R , com $2R = \min\{R_0, \frac{1}{2} \text{dist}(\Sigma, \partial\Omega)\}$ e escrevendo [\(3.37\)](#) para raios R e $2R$, obtemos:

Teorema 3.4 *Seja u uma função na classe de De Giorgi DG_p , e seja $\Sigma \subset\subset \Omega$. Para todo $q > 0$ existe uma constante $c = c(q, \Sigma)$ tal que*

$$\sup_{\Sigma} |u| \leq c \left\{ \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0 + \chi \right\}. \quad (3.38)$$

Demonstração. Como $\Sigma \subset\subset \Omega$, existe $d := \text{dist}(\Sigma, \partial\Omega) > 0$. Escolhemos

$$2R = \min \left\{ R_0, \frac{d}{2} \right\}.$$

Isso nos garante que todo cubo de raio R centrado em algum $x \in \Sigma$ está contido em Ω , e além disso podemos aplicar os teoremas anteriores com $\varrho = R$ e o raio maior sendo $2R$ em vez de R . Como Σ é compacto, existe uma cobertura finita

$$\Sigma \subset \bigcup_{i=1}^N Q_{(x_i, R)}, \quad x_i \in \Sigma.$$

Fixando i e aplicando a desigualdade (3.37), ganhamos

$$\sup_{Q(x_i, R)} |u| \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{R^n} \int_{Q(x_i, 2R)} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0 + \chi R^\beta \right\}. \quad (3.39)$$

Como $Q(x_i, 2R) \subset \Omega$, claro que

$$\int_{Q(x_i, 2R)} |u|^q dx \leq \int_{\Omega} |u|^q dx$$

desta foma, substituindo em (3.39), obtemos

$$\sup_{(x_i, R)} |u| \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{R^n} \int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0 + \chi R^\beta \right\}.$$

Ademais, sabendo que $\Sigma \subset \bigcup Q_R(x_i)$, segue que

$$\sup_{\Sigma} |u| \leq \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{Q_R(x_i)} |u|$$

e, portanto,

$$\sup_{\Sigma} |u| \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{R^n} \int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0 + \chi R^\beta \right\}.$$

Lembrando que R depende apenas de Σ , então $\frac{1}{R^n}$ e R^β são absorvidos na constante $c = c(q, \Sigma)$. Portanto,

$$\sup_{\Sigma} |u| \leq c(q, \Sigma) \left\{ \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0 + \chi \right\}.$$

■

Podemos agora enunciar um primeiro resultado de regularidade para quase-mínimos de funcionais regulares do cálculo das variações, o qual segue imediatamente do que foi dito acima, se observarmos que, pela desigualdade de Caccioppoli, um sub-quase-mínimo pertence a DG_p^+ com $\kappa_0 = 0$.

Teorema 3.5 *Seja $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ um sub-quase-mínimo de um funcional $\mathcal{F}$ satisfazendo as condições (3.2). Então, u é localmente limitado superiormente em Ω . Além disso, para todo $q > 0$ existe uma constante $c(q)$, dependendo também de $\|u\|_{p^*}$ e $\|b\|_{\sigma}$, tal que para todo $\varrho < R < \min(R_0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$ temos*

$$\sup_{Q_{\varrho}} u \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{(R - \varrho)^n} \int_{Q_R} u_+^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \|a\|_s^{1/p} R^\beta \right\}. \quad (3.40)$$

Analogamente, todo super-quase-mínimo de $\mathcal{F}$ é localmente limitado inferiormente, com uma estimativa análoga a (3.40). Finalmente, todo quase-mínimo é localmente limitado em Ω , e temos

$$\sup_{Q_\varrho} |u| \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{(R-\varrho)^n} \int_{Q_R} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \|a\|_s^{1/p} R^\beta \right\}. \quad (3.41)$$

Demonstração. Dadas as hipóteses acima, como u é um sub-quase-mínimo então vale a desigualdade do Teorema 3.1, o que nos diz que $u \in DG_p^+$, e nos permite concluir a partir do Teorema 3.3 que u é localmente limitado superiormente em Ω . Para o caso de super-quase-mínimo, usamos a Observação 3.1 e concluimos o mesmo resultado. Se u é um quase-mínimo, então u é sub e super quase-mínimo, o que nos diz que $u \in DG_p$, e pelo teorema anterior segue o resultado. ■

Observação 3.6 Se uma função u na classe DG^+ (DG^-) pertence a $W^{1,p}(\Omega)$ e se seu traço em $\partial\Omega$ é uma função limitada superiormente (inferiormente), então u é limitada superiormente (inferiormente) em Ω . Na verdade, se Q_R é um cubo que intersecta $\partial\Omega$, e se definimos $\Omega_R = Q_R \cap \Omega$ e $\Sigma_R = Q_R \cap \partial\Omega$, a função

$$w = \eta(u - k)^+,$$

pertence a $W_0^{1,p}(Q_R)$ sempre que $k \geq \kappa_0 \geq \sup_{\Sigma_R} u$. Usando as mesmas linhas de raciocínio para demonstrar o teorema (3.2) e (3.3) chegamos a

$$\sup_{\Omega_\varrho} u \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{(R-\varrho)^n} \int_{\Omega_R} u_+^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \sup_{\Sigma_R} u + \chi R^\beta \right\}. \quad (3.42)$$

Uma desigualdade análoga vale para $u \in DG^-$:

$$\inf_{\Omega_\varrho} u \geq c(q) \left\{ - \left(\frac{1}{(R-\varrho)^n} \int_{\Omega_R} u_-^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \inf_{\Sigma_R} u - \chi R^\beta \right\}. \quad (3.43)$$

Em particular, se $u \in DG_p$, definindo $\text{osc}(u, A) = \sup_A u - \inf_A u$, temos

$$\text{osc}(u, \Omega_\varrho) \leq c(q) \left\{ \left(\frac{1}{(R-\varrho)^n} \int_{\Omega_R} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \text{osc}(u, \Sigma_R) + \chi R^\beta \right\}, \quad (3.44)$$

uma estimativa que será útil mais adiante.

3.3 Quase-Mínimos

Os resultados da seção anterior podem ser usados para provar a Hölder continuidade dos quase-mínimos de funcionais regulares do cálculo das variações e, portanto, das soluções de equações diferenciais parciais do tipo elíptico. Observamos primeiramente que, uma vez provada a limitação local dos Q -mínimos do funcional

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx,$$

pode-se assumir que a função $F(x, u, z)$ satisfaz, em vez de (3.2), as desigualdades

$$|z|^p - \alpha(x, M) \leq F(x, u, z) \leq L(M)|z|^p + \alpha(x, M), \quad (3.45)$$

onde $M \geq \sup |u|$ e $L(M)$ e $\alpha(x, M)$ são funções crescentes de M . No que segue, será suficiente tomar $M = 2 \sup |u|$. Em particular, seguindo a demonstração do Teorema (3.1), pode-se ver que os Q -mínimos de $\mathcal{F}$ satisfazem, para todo $\varrho < R \leq R_0$ e para todo $k \in \mathbb{R}$, as estimativas

$$\int_{A(k, \varrho)} |Du|^p dx \leq \frac{H}{(R - \varrho)^p} \int_{A(k, R)} (u - k)^p dx + H\chi^p |A(k, R)|^{1 - \frac{p}{n} + \epsilon} \quad (3.46)$$

e

$$\int_{B(k, \varrho)} |Du|^p dx \leq \frac{H}{(R - \varrho)^p} \int_{B(k, R)} (k - u)^p dx + H\chi^p |B(k, R)|^{1 - \frac{p}{n} + \epsilon}, \quad (3.47)$$

isto é, as desigualdades (3.14) e (3.15) sem o termo k^p , mas com H e χ dependendo de M . Como já observamos, é possível assumir que $\epsilon \leq \frac{p}{n}$. Segue-se que as estimativas anteriores valem com as mesmas constantes para $u - \vartheta$, pelo menos enquanto $|\vartheta| + \sup |u| \leq M$.

Observação 3.7 *Se a função $F(x, u, z)$ satisfaz as desigualdades (3.2), podemos tomar L independente de M e $\alpha(x, M) = a(x) + b(x)M^\gamma$ em (3.45), e portanto temos (3.46) e (3.47) com H independente de M e*

$$\chi^p = \|\alpha(x, M)\|_s = \|a(x) + b(x)M^\gamma\|_s. \quad (3.48)$$

Temos a seguinte proposição, análoga ao Teorema 3.2:

Proposição 3.1 *Seja $u(x)$ uma função limitada, verificando (3.46) para todo $k \in \mathbb{R}$. Então, se $|k_0| + \sup |u| \leq M$, temos*

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}} u \leq c \left(\frac{1}{R^n} \int_{A(k_0, R)} (u - k_0)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|A(k_0, R)|}{R^n} \right)^{\frac{\alpha}{p}} + k_0 + c\chi R^\beta, \quad (3.49)$$

onde α é a solução positiva da equação $\alpha^2 + \alpha = \epsilon$.

Demonstração. Podemos supor $k_0 = 0$. Repetindo com as modificações necessárias a demonstração do Teorema 3.2, e usando (3.46) em vez de (3.26), obtemos no lugar de (3.29) a estimativa

$$\int_{A(k, \varrho)} (u - k)^p dx \leq \frac{c|A(k, r)|^{\frac{p}{n}}}{(r - \varrho)^p} \int_{A(k, r)} (u - k)^p dx + c\chi^p |A(k, r)|^{1+\epsilon}, \quad (3.50)$$

para todo $\varrho < r \leq R$. Denote por

$$U(k, t) = \int_{A(k, t)} (u - k)^p dx.$$

Observe que $U(\cdot, r)$ é não-crescente e $U(k, \cdot)$ é não-decrescente. Além disso, para cada $h < k$ e todo $\varrho \leq r$, daí

$$U(h, r) = \int_{A(h, r)} (u - h)^p dx \geq \int_{A(k, r)} (u - h)^p dx \geq (k - h)^p |A(k, r)| \geq (k - h)^p |A(k, \varrho)|,$$

logo obtemos

$$|A(k, \varrho)| \leq (k - h)^{-p} U(h, r). \quad (3.51)$$

Lembrando que $n\epsilon = p\beta$, obtemos imediatamente de (3.50) e (3.51):

$$\begin{aligned} U(k, \varrho) &\leq c(r - \varrho)^{-p} U(k, r) |A(k, r)|^{\frac{p}{n}} + c\chi^p |A(k, r)| |A(k, r)|^\epsilon \\ &\leq c(r - \varrho)^{-p} U(h, r) |A(h, r)|^{\frac{p}{n}} + c\chi^p (k - h)^{-p} U(h, r) |A(h, r)|^\epsilon \\ &\leq c(r - \varrho)^{-p} U(h, r) |A(h, r)|^{\frac{\epsilon}{\beta}} + c\chi^p (k - h)^{-p} U(h, r) |A(h, r)|^\epsilon. \end{aligned}$$

Escrevendo $|A(h, r)|^{\frac{\epsilon}{\beta}} = |A(h, r)|^\epsilon |A(h, r)|^{\frac{\epsilon}{\beta} - \epsilon}$, observemos que

$$|A(h, r)|^{\frac{\epsilon}{\beta} - \epsilon} \leq c r^{n(\frac{\epsilon}{\beta} - \epsilon)}.$$

Porém, $n\left(\frac{\epsilon}{\beta} - \epsilon\right) = n\epsilon\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = p - n\epsilon$, pois $n\epsilon = p\beta$. Portanto,

$$|A(h, r)|^{\frac{\epsilon}{\beta}} \leq c r^{p - n\epsilon} |A(h, r)|^\epsilon.$$

e consequentemente, junto coma estimativa de $U(k, \varrho)$ temos

$$U(k, \varrho) \leq c \left[\left(\frac{r}{r - \varrho} \right)^p + \left(\frac{\chi r^\beta}{k - h} \right)^p \right] r^{-n\epsilon} U(h, r) |A(h, r)|^\epsilon.$$

Elevando ambos os membros de (3.51) à potência α , e multiplicando cada membro pelo membro correspondente da última desigualdade, obtemos

$$U(k, \varrho) |A(k, \varrho)|^\alpha \leq c \left[\left(\frac{r}{r - \varrho} \right)^p + \left(\frac{\chi r^\beta}{k - h} \right)^p \right] \frac{r^{-n\epsilon}}{(k - h)^{p\alpha}} U(h, r)^{1+\alpha} |A(h, r)|^\epsilon.$$

Escolhamos agora α de modo que $\alpha(1 + \alpha) = \epsilon$, e definamos

$$\varphi(k, t) = U(k, t)|A(k, t)|^\alpha.$$

Para $\varrho < r \leq R$ e $h < k$ temos

$$\varphi(k, \varrho) \leq c \left[\left(\frac{r}{r - \varrho} \right)^p + \left(\frac{\chi r^\beta}{k - h} \right)^p \right] \frac{r^{-n\epsilon}}{(k - h)^{p\alpha}} \varphi(h, r)^{1+\alpha}. \quad (3.52)$$

Seja agora $d \geq \chi R^\beta$ uma constante que fixaremos mais tarde, e definamos

$$k_i = d(1 - 2^{-i}), \quad \text{e} \quad r_i = \frac{R}{2}(1 + 2^{-i}).$$

De (3.52) com $\varrho = r_{i+1}$, $r = r_i$, $k = k_{i+1}$ e $h = k_i$ obtemos

$$\varphi_{i+1} \leq cd^{-p\alpha} 2^{pi(1+\alpha)} R^{-n\epsilon} \varphi_i^{1+\alpha},$$

onde $\varphi_i = \varphi(k_i, r_i)$. Podemos agora aplicar o Lema 3.1. De modo análogo a demonstração do Teorema 3.2, escolhemos

$$d \geq cR^{-\frac{n\epsilon}{\alpha p}} \varphi_0^{\frac{1}{p}},$$

com a constante c suficientemente grande, podemos concluir que a sequência φ_i tende a zero e, portanto,

$$\varphi\left(d, \frac{R}{2}\right) = 0.$$

mas temos

$$\varphi(d, R/2) = U(d, R/2)|A(d, R/2)|^\alpha.$$

então necessariamente

$$U(d, R/2) = 0 \quad \text{ou} \quad |A(d, R/2)| = 0.$$

No entanto,

$$U(d, R/2) = \int_{A(d, R/2)} (u - d)^p dx.$$

Isso só pode ser zero se $|A(d, R/2)| = 0$, ou seja, $u \leq d$ quase em todo $Q_{R/2}$. Portanto, $\sup_{Q_{R/2}} u \leq d$. As condições impostas sobre d serão satisfeitas tomando

$$d = \chi R^\beta + cR^{-\frac{n\epsilon}{\alpha p}} \varphi_0^{\frac{1}{p}},$$

e, assim, recordando que $\alpha(1 + \alpha) = \epsilon$, chegamos a

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}} u(x) \leq d = c \left(R^{-n} \int_{A(0, R)} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|A(0, R)|}{R^n} \right)^{\frac{\alpha}{p}} + \chi R^\beta.$$

A conclusão segue imediatamente escrevendo $u - k_0$ em vez de u . ■

Devemos agora avaliar a medida do conjunto $A(k, R)$, quando k está próximo do máximo de u . Para isso, precisamos do seguinte lema, que, com as devidas modificações, também será útil mais adiante.

Lema 3.2 *Seja u uma função limitada, satisfazendo (3.46) (com $p > 1$) para todo $k \in \mathbb{R}$, e seja $2k_0 = M_{(2R)} + m_{(2R)} := \sup_{Q_{2R}} u + \inf_{Q_{2R}} u$. Suponha que $|A(k_0, R)| \leq \gamma|Q_R|$ para algum $\gamma < 1$. Se para um inteiro ν vale*

$$\text{osc}(u, 2R) \geq 2^{\nu+1} \chi R^\beta, \quad (3.53)$$

então, definindo $k_\nu = M_{(2R)} - 2^{-\nu-1} \text{osc}(u, 2R)$, temos

$$|A(k_\nu, R)| \leq c \nu^{-\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} |Q_R|. \quad (3.54)$$

Demonstração. Para $k_0 < h < k$ definamos

$$v(x) = \begin{cases} k - h, & \text{se } u(x) \geq k, \\ u - h, & \text{se } h < u(x) < k, \\ 0, & \text{se } u(x) \leq h. \end{cases}$$

Temos $v = 0$ em $Q_R - A(k_0, R)$, pois $u \leq k_0 < h$, e como a medida deste conjunto é maior que $(1 - \gamma)|Q_R|$, podemos aplicar a desigualdade de Sobolev A.5, obtendo

$$\left(\int_{Q_R} v^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \leq c \int_{Q_R} |Dv| dx.$$

Mas $v = 0$ em $Q_R - A(k_0, R)$ e $A(k_0, R) \supset A(h, R) \supset A(k, R)$, então o suporte de Dv está contido em $A(h, R) - A(k, R)$. Desta forma,

$$\left(\int_{Q_R} v^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \leq c \int_{\Delta} |Dv| dx = c \int_{\Delta} |Du| dx$$

em que $\Delta = A(h, R) - A(k, R)$. Temos portanto, da desigualdade acima e por Hölder

$$\begin{aligned} (k - h)|A(k, R)|^{1-\frac{1}{n}} &= \left(\int_{A(k, R)} v^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \leq \left(\int_{Q_R} v^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \\ &\leq c |\Delta|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{A(h, R)} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Por outro lado, de (3.46), estimando $|A(h, 2R)|, |A(k, 2R)| \leq cR^n$ e usando $M_{(2R)} = \sup_{Q_{2R}} u$ deduzimos

$$\begin{aligned} \int_{A(h,R)} |Du|^p dx &\leq \frac{c}{R^p} \int_{A(h,2R)} (u-h)^p dx + c\chi^p |A(k, 2R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} \\ &\leq cR^{n-p}(M_{(2R)}-h)^p + c\chi^p R^{n-p+n\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Para $h \leq k_\nu$, temos por (3.53) que $M_{(2R)} - h \geq M_{(2R)} - k_\nu \geq \chi R^\beta$, e portanto

$$(M_{(2R)} - h)^p \geq \chi^p R^{p\beta} = \chi^p R^{n\epsilon} \quad \Rightarrow \quad R^{n-p}(M_{(2R)} - h)^p \geq \chi^p R^{n-p+n\epsilon}.$$

Substituindo em (3.56), temos

$$\int_{A(h,R)} |Du|^p dx \leq cR^{n-p}(M_{(2R)} - h)^p. \quad (3.57)$$

Usando (3.57) em (3.55), obtemos

$$(k-h)|A(k, R)|^{1-\frac{1}{n}} \leq c|\Delta|^{1-\frac{1}{p}} R^{\frac{n-p}{p}} (M_{(2R)} - h).$$

Escrevendo a desigualdade acima para os níveis

$$k = k_i = M_{(2R)} - 2^{-i-1} \text{osc}(u, 2R)$$

e

$$h = k_{i-1} = M_{(2R)} - 2^{-i} \text{osc}(u, 2R),$$

fica claro que

$$(k_i - h_i)|A_{k_i,R}|^{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2^{i+1}} \text{osc}(u, 2R)|A_{k_i,R}|^{1-\frac{1}{n}} \leq c|\Delta_i|^{1-\frac{1}{p}} R^{\frac{n-p}{p}} \left(\frac{1}{2^i} \text{osc}(u, 2R) \right).$$

Para $1, \dots, i, \dots, \nu$ a desigualdade acima implica

$$|A_{k_\nu,R}|^{1-\frac{1}{n}} \leq |A_{k_i,R}|^{1-\frac{1}{n}} \leq c|\Delta_i|^{1-\frac{1}{p}} R^{\frac{n-p}{p}},$$

onde $\Delta_i = A_{k_{i-1},R} - A_{k_i,R}$. Elevando ambos os lados da desigualdade acima   potência $\frac{p}{p-1}$, obt m-se

$$|A_{k_\nu,R}|^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq |A_{k_i,R}|^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq cR^{\frac{n-p}{p-1}} |\Delta_i|.$$

Somamos agora sobre i de 1 a ν os extremos da desigualdade acima, obtendo

$$\nu |A(k_\nu, R)|^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq cR^{\frac{n-p}{p-1}} |A(k_0, R)| \leq cR^{\frac{p(n-1)}{(p-1)}},$$

e daí, segue que

$$|A(k_\nu, R)| \leq c \nu^{-\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} |Q_R|.$$

■

Finalmente, precisaremos do seguinte lema algébrico.

Lema 3.3 *Seja $\varphi(t)$ uma função positiva, e suponha que exista uma constante q e um número τ , $0 < \tau < 1$, tais que para todo $R < R_0$*

$$\varphi(\tau R) \leq \tau^\delta \varphi(R) + BR^\beta \quad (3.58)$$

com $0 < \beta < \delta$, e

$$\varphi(t) \leq q \varphi(\tau^k R)$$

para todo t no intervalo $(\tau^{k+1}R, \tau^k R]$.² Então, para todo $\rho < R \leq R_0$, temos

$$\varphi(\rho) \leq C \left\{ \left(\frac{\rho}{R} \right)^\beta \varphi(R) + B\rho^\beta \right\}, \quad (3.59)$$

onde C é uma constante que depende apenas de q, τ, δ e β .

Demonstração. Partindo de (3.58), provamos por indução que

$$\varphi(\tau^{k+1}R) \leq \tau^{(k+1)\delta} \varphi(R) + BR^\beta \tau^{k\beta} \sum_{i=0}^k \tau^{i(\delta-\beta)}$$

e, portanto, uma vez que a série no lado direito é convergente,

$$\varphi(\tau^{k+1}R) \leq \tau^{(k+1)\delta} \varphi(R) + cBR^\beta \tau^{k\beta}.$$

Escolhendo agora k de modo que $\tau^{k+1}R < \rho \leq \tau^k R$, chegamos imediatamente ao resultado desejado.

■

Teorema 3.6 *Seja u uma função limitada, satisfazendo (3.46) e (3.47) com $p > 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$. Então, u é localmente Hölder-contínua em Ω .*

Demonstração. Seja, como acima, $2k_0 = M_{(2R)} + m_{(2R)}$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $|A(k_0, R)| \leq \frac{1}{2}|Q_R|$, pois caso contrário teríamos $|B(k_0, R)| = |Q_R| - |A(k_0, R)| \leq \frac{1}{2}|Q_R|$, e será suficiente escrever $-u$ em vez de u , essa hipótese serve para usar o Lema 3.2 posteriormente.

²Em particular, esta desigualdade é válida com $q = 1$ se φ for não decrescente.

Definindo $k_\nu = M_{(2R)} - 2^{-\nu-1} \text{osc}(u, 2R)$, temos $k_\nu > k_0$. Podemos escrever (3.49) com k_ν em vez de k_0 :

$$\begin{aligned} \sup_{Q_{\frac{R}{2}}}(u - k_\nu) &\leq \left(\frac{c}{R^n} \int_{A(k_\nu, R)} (u - k_\nu)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|A(k_\nu, R)|}{R^n} \right)^{\frac{\alpha}{p}} + c\chi R^\beta \\ &\leq c \sup_{Q_R}(u - k_\nu) \left(\frac{|A(k_\nu, R)|}{R^n} \right)^{\frac{\alpha+1}{p}} + c\chi R^\beta. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Escolhamos agora o inteiro ν de modo que

$$c \nu^{-\frac{n(p-1)}{p(n-1)} \cdot \frac{\alpha+1}{p}} \leq \frac{1}{2},$$

sendo $\text{osc}(u, 2R) \geq 2^{\nu+1} \chi R^\beta$, deduzimos de (3.54), que

$$\begin{aligned} M_{(\frac{R}{2})} - k_\nu &\leq \frac{1}{2} (M_{(R)} - k_\nu) + c\chi R^\beta \\ &\leq \frac{1}{2} (M_{(2R)} - k_\nu) + c\chi R^\beta, \end{aligned}$$

de modo que, subtraindo de ambos os membros a quantidade $m_{(\frac{R}{2})}$ e usando a definição de k_ν temos

$$\begin{aligned} \text{osc}\left(u, \frac{R}{2}\right) &\leq k_\nu + \left(\frac{1}{2} (2^{-\nu-1} \text{osc}(u, 2R)) \right) + c\chi R^\beta - m_{(\frac{R}{2})} \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}} \right) \text{osc}(u, 2R) + c\chi R^\beta. \end{aligned}$$

Em conclusão, ou a função $\text{osc}(u, \frac{R}{2})$ satisfaz a relação acima, ou então

$$\text{osc}(u, 2R) \leq 2^{\nu+1} \chi R^\beta.$$

Em qualquer caso, temos

$$\text{osc}\left(u, \frac{R}{2}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}} \right) \text{osc}(u, 2R) + c2^\nu \chi R^\beta. \quad (3.61)$$

Podemos agora aplicar o Lema 3.3 com $\tau = 1/4$ e $\delta = \log_\tau(1 - 2^{-\nu-2})$. Diminuindo, se necessário, o valor de β , podemos assumir que $\beta < \delta$. Temos, portanto,

$$\text{osc}(u, \varrho) \leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^\beta \text{osc}(u, R) + \chi \varrho^\beta \right\}, \quad (3.62)$$

para todo $\varrho < R \leq \min\{R_0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$. ■

Observação 3.8 A desigualdade (3.62) é equivalente a Hölder continuidade. De fato, fixado R pequeno temos, pela desigualdade acima, que para $\varrho < R$

$$\text{osc}(u, \varrho) = \sup_{Q_\varrho} u(x) - \inf_{Q_\varrho} u(x) \leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^\beta \text{osc}(u, R) + \chi \varrho^\beta \right\} \leq C \varrho^\beta.$$

Tomando agora dois pontos quaisquer $x, y \in Q_{\frac{R}{4}}(x_0)$ definimos $\varrho := |x - y|$. Considere o cubo $Q_{\varrho}(\frac{x+y}{2}) \subset Q_R(x_0)$ contendo ambos os pontos. Então,

$$|u(x) - u(y)| \leq \text{osc}(u, \varrho),$$

como consequência, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C\varrho^\beta = C|x - y|^\beta$$

o que nos garante a Hölder continuidade.

Observação 3.9 Note que o expoente δ não depende do centro do cubo Q_R , e portanto $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$. É claro que a norma de u em $\Sigma \subset \subset \Omega$ pode divergir quando $\Sigma \rightarrow \Omega$.

O seguinte resultado será útil posteriormente.

Teorema 3.7 Seja $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (3.46) e (3.47) com $p > 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$, e seja $Q_{4R} \subset \Omega$. Então, para todo $\varrho < R$ temos

$$\int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p dx \leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n+p\beta} \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx + c\chi^p \varrho^{n+p\beta}, \quad (3.63)$$

e

$$\int_{Q_\varrho} |Du|^p dx \leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+p\beta} \int_{Q_R} |Du|^p dx + c\chi^p \varrho^{n-p+p\beta}. \quad (3.64)$$

Demonstração. Provaremos (3.63) primeiro. Seja $\vartheta < \sup |u|$. Observamos que as funções $u - \vartheta$ e $\vartheta - u$ satisfazem (3.46) e (3.47) e, portanto, pelo Teorema 3.2 temos

$$\sup_{Q_r} [u - \vartheta] \leq c \left\{ \left(\int_{Q_{2r}} (u - \vartheta)_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \chi r^\beta \right\}, \quad (3.65)$$

e

$$\sup_{Q_r} [\vartheta - u] \leq c \left\{ \left(\int_{Q_{2r}} (\vartheta - u)_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \chi r^\beta \right\}. \quad (3.66)$$

Usaremos a propriedade que $\text{osc}(u, r) = \sup_{Q_r} (u - \vartheta) + \sup_{Q_r} (\vartheta - u)$. Somando ambos os lados, se $\inf_{Q_r} u \leq \vartheta \leq \sup_{Q_r} u$, em particular se $\vartheta = u_r := \int_{Q_r} u dx$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{osc}(u, r) &\leq c \left\{ \left(\int_{Q_{2r}} |u - u_r|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + 2\chi r^\beta \right\} \\ &\leq c \left\{ \left(\int_{Q_{2r}} |u - u_{2r}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + 2\chi r^\beta \right\}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde na última passagem levamos em conta a Observação A.1, e em particular a equação (A.5), com $R = 2r$ e $\alpha = 1/2$. Por outro lado, observe que

$$u - u_t = u - \frac{1}{|Q_t|} \int_{Q_t} u \, dx \leq u - \inf u \leq \sup u - \inf u$$

e

$$-u + u_t = -u + \frac{1}{|Q_t|} \int_{Q_t} u \, dx \leq -u + \sup u \leq \sup u - \inf u$$

deste modo, podemos passar o módulo e obtemos

$$\oint_{Q_t} |u - u_t|^p \, dx \leq \text{osc}(u, t)^p$$

e, portanto, considerando (3.62) e (3.67), obtemos para $\varrho < r = \frac{R}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p \, dx &\leq \text{osc}(u, \varrho)^p \leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{p\beta} \text{osc}(u, r)^p + \chi^p \varrho^{p\beta} \right\} \\ &\leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{p\beta} \left(\oint_{Q_R} |u - u_R|^p \, dx + \chi^p R^{p\beta} \right) + \chi^p \varrho^{p\beta} \right\} \\ &\leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{p\beta} \oint_{Q_R} |u - u_R|^p \, dx + \chi^p \varrho^{p\beta} \right\}, \end{aligned}$$

e daí, sabendo que $|Q_\varrho| \leq c\varrho^n$ temos

$$\int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p \, dx \leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n+p\beta} \oint_{Q_R} |u - u_R|^p \, dx + \chi^p \varrho^{n+p\beta} \right\},$$

isto é, (3.63) para $\varrho < \frac{R}{2}$. Agora, provaremos (3.64) observando que, escrevendo (3.46) e (3.47) entre $\frac{\varrho}{2}$ e ϱ , com $k = u_\varrho$ chegamos a

$$\int_{A(u_\varrho, \varrho/2)} |Du|^p \, dx \leq \frac{c}{\varrho^p} \int_{A(u_\varrho, \varrho)} (u - u_\varrho)^p \, dx + c\chi^p |A(u_\varrho, \varrho)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}$$

e

$$\int_{B(u_\varrho, \varrho/2)} |Du|^p \, dx \leq \frac{c}{\varrho^p} \int_{B(u_\varrho, \varrho)} (u_\varrho - u)^p \, dx + c\chi^p |B(u_\varrho, \varrho)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}.$$

Somando ambos os lados, e multiplicando por ϱ^p obtemos

$$\varrho^p \int_{Q_{\varrho/2}} |Du|^p \, dx \leq c \left\{ \int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p \, dx + \chi^p \varrho^{n+p\beta} \right\}. \quad (3.68)$$

Por outro lado, temos por Poincaré A.6

$$\int_{Q_R} |u - u_R|^p \, dx \leq cR^p \int_{Q_R} |Du|^p \, dx. \quad (3.69)$$

Vamos introduzir estas relações em (3.63) para obtermos (3.64), desta vez para $\varrho < \frac{R}{4}$.

Usando (3.63) em (3.68) obtemos

$$\varrho^p \int_{Q_{\varrho/2}} |Du|^p dx \leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n+p\beta} \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx + \chi^p \varrho^{n+p\beta} \right\}.$$

Agora, utilizamos (3.69) na desigualdade anterior para obter

$$\varrho^p \int_{Q_{\varrho/2}} |Du|^p dx \leq c \left\{ \varrho^p \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+p\beta} \int_{Q_R} |Du|^p dx + \chi^p \varrho^{n+p\beta} \right\}.$$

Dividindo por ϱ^p chegamos

$$\int_{Q_{\varrho/2}} |Du|^p dx \leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+p\beta} \int_{Q_R} |Du|^p dx + \chi^p \varrho^{n-p+p\beta} \right\}.$$

Fazendo a mudança de $\varrho/2$ para ϱ , e lembrando que a nossa desigualdade é válida para $\varrho < R/2$, então obtemos (3.64) para $\varrho < \frac{R}{4}$.

Finalmente, observamos que ambas as estimativas valem para todo $\varrho < R$, possivelmente com uma constante diferente. Por exemplo, se $\varrho \geq \frac{R}{4}$ temos

$$\int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p dx \leq c \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx \leq c 4^{n+p\beta} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n+p\beta} \int_{Q_R} |u - u_R|^p dx,$$

em que a primeira desigualdade ocorre dos seguintes fatos

$$|u - u_\varrho|^p \leq c(|u - u_R|^p + |u_R - u_\varrho|^p)$$

e daí, integrando em Q_ϱ

$$\int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p dx \leq c \left\{ \int_{Q_\varrho} |u - u_R|^p dx + |Q_\varrho| |u_R - u_\varrho|^p \right\}. \quad (3.70)$$

Mas temos

$$|u_R - u_\varrho| = \left| \int_{Q_\varrho} (u - u_R) dx \right| \leq \int_{Q_\varrho} |u - u_R| dx.$$

aplicando Hölder

$$|u_R - u_\varrho| \leq \left(\int_{Q_\varrho} |u - u_R|^p dx \right)^{1/p}.$$

Elevando a p e multiplicando por $|Q_\varrho|$

$$|Q_\varrho| |u_R - u_\varrho|^p \leq \int_{Q_\varrho} |u - u_R|^p dx.$$

Substituindo em (3.70) segue que

$$\int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p dx \leq c \int_{Q_\varrho} |u - u_R|^p dx.$$

Daí, basta utilizar $Q_\varrho \subset Q_R$ que a desigualdade esta provada. Um argumento análogo prova (3.64) para todo $\varrho < R$.

■

3.4 Regularidade na Fronteira

Quando a função u é um quase-mínimo com condições de Dirichlet em $\partial\Omega$, e seu traço em $\partial\Omega$ é uma função Hölder-contínua, é possível estender o Teorema 3.6, provando a Hölder-continuidade de u até a fronteira.

Teorema 3.8 *Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz-contínua, e seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ um quasi-mínimo para o funcional $\mathcal{F}$. Suponha que o traço de u em $\partial\Omega$ seja uma função Hölder-contínua. Então, u é Hölder-contínua em $\bar{\Omega}$.*

Demonstração. Para $t < 1$ definimos

$$\begin{aligned} M(t) &= \sup_{\Omega_t} u, & M_S(t) &= \sup_{\partial\Omega \cap Q_t} u; \\ m(t) &= \inf_{\Omega_t} u, & m_S(t) &= \inf_{\partial\Omega \cap Q_t} u; \\ \text{osc}(u, t) &= M(t) - m(t), & \text{osc}_S(u, t) &= M_S(t) - m_S(t). \end{aligned}$$

Seja Q_R um cubo tal que Q_{2R} intersecta $\partial\Omega$. Não é restritivo supor que

$$M(2R) - M_S(2R) \geq m_S(2R) - m(2R),$$

pois, caso contrário, podemos reduzir a esse caso trocando u por $-u$. Suponhamos que

$$\text{osc}(u, 2R) \geq 2 \text{osc}_S(u, 2R), \quad (3.71)$$

daí, fica claro que

$$\begin{aligned} \text{osc}(u, 2R) &= M(2R) - M_S(2R) + \text{osc}_S(u, 2R) + m_S(2R) - m(2R) \\ &\leq 2[M(2R) - M_S(2R)] + \frac{1}{2} \text{osc}(u, 2R), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$M(2R) - \frac{1}{4} \text{osc}(u, 2R) \geq M_S(2R).$$

Segue-se que para $\nu \geq 1$ vale $k_\nu := M(2R) - 2^{-\nu-1} \text{osc}(u, 2R) \geq M_S(2R)$ e, portanto, levando em conta a Observação 3.3, temos a desigualdade de Caccioppoli (3.5) para todo $k \geq k_\nu$. Consequentemente, pela Proposição 3.1, temos

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}} u \leq c \left(\frac{1}{R^n} \int_{A(k_\nu, R)} (u - k_\nu)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|A(k_\nu, R)|}{R^n} \right)^{\frac{\alpha}{p}} + k_\nu + c\chi R^\beta. \quad (3.72)$$

Por outro lado, se $h > M_S(2R)$, a função $v(x)$ definida no Lema 3.2 é zero em $\partial\Omega \cap Q_{2R}$, de modo que pode ser estendida a uma função em Q_R definindo-a como zero em $Q_R - \Omega$.

Como o bordo de Ω é Lipschitz-contínuo, temos $v = 0$ em um conjunto cuja medida é maior que $\gamma|Q_R|$, de modo que a conclusão do Lema 3.2 também vale neste caso. Argumentando como no Teorema 3.6, chegamos à relação

$$\text{osc} \left(u, \frac{R}{2} \right) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}} \right) \text{osc}(u, 2R) + c2^\nu \chi R^\beta,$$

que é válida sempre que $\text{osc}(u, 2R) \geq 2\text{osc}_S(u, 2R)$. Em qualquer caso, temos

$$\text{osc} \left(u, \frac{R}{2} \right) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}} \right) \text{osc}(u, 2R) + c_2 \chi R^\beta + 2\text{osc}_S(u, 2R),$$

e, uma vez que por hipótese³ $\text{osc}_S(u, 2R) \leq BR^\beta$:

$$\text{osc} \left(u, \frac{R}{2} \right) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}} \right) \text{osc}(u, 2R) + c_2(2^\nu + \chi + B)R^\beta. \quad (3.73)$$

Comparando com (3.61), concluímos que a última desigualdade também é válida quando Q_{2R} não intersecta $\partial\Omega$, pois esta desigualdade torna-se mais geral do que (3.61) usada para mostrar o caso interior. A conclusão segue então argumentando como no Teorema 3.6. Em particular, supondo que $\beta < \delta := -\log_4(1 + 2^{-\nu-2})$, temos para todo $\varrho < R$:

$$\text{osc}(u, \varrho) \leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^\beta \text{osc}(u, R) + c(\chi + B)\varrho^\beta. \quad (3.74)$$

■

A partir da última desigualdade, podemos deduzir o análogo de (3.63) e (3.64) para o problema de Dirichlet com dados de contorno nulos. Neste caso, temos $B = 0$, e portanto

$$\int_{\Omega_\varrho} |u|^p dx \leq \text{osc}(u, \varrho)^p \leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{p\beta} \text{osc} \left(u, \frac{R}{2} \right)^p + c\chi^p \varrho^{p\beta}.$$

O lado direito pode ser estimado usando (3.44) com $\varrho = \frac{R}{2}$. Obtemos então o análogo de (3.63)

$$\int_{\Omega_\varrho} |u|^p dx \leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n+p\beta} \int_{\Omega_R} |u|^p dx + c\chi^p \varrho^{n+p\beta}. \quad (7.55)$$

A partir desta desigualdade, argumentando como no Teorema 3.7, obtemos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |Du|^p dx \leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+p\beta} \int_{\Omega_R} |Du|^p dx + c\chi^p \varrho^{n-p+p\beta}. \quad (7.56)$$

³Não é restritivo supor que o traço de u seja Hölder-contínuo com expoente β .

3.5 A Desigualdade de Harnack

Quando a função $u \in DG_p^-$ é **positiva**, podemos estimar seu ínfimo com maior precisão. Como de costume, podemos supor que u satisfaz as estimativas (3.27), isto é, (3.15) com $\chi = 0$ e⁴ $R = 1$.

Lema 3.4 *Seja $u \in DG_p^-$ com $\kappa_0 = 0$, e suponha que u seja positiva no cubo $Q = Q_1$. Existe uma constante positiva γ_0 tal que, se $|B(\vartheta, 1)| \leq \gamma_0|Q|$ para algum $\vartheta > 0$, então*

$$\inf_{Q_{1/2}} u \geq \frac{\vartheta}{2}.$$

Demonstração. Podemos argumentar como no Lema 3.2. Para $h < k < \vartheta$, definimos

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } u(x) \geq k, \\ k - u, & \text{se } h < u(x) < k, \\ k - h, & \text{se } u(x) \leq h. \end{cases}$$

Seja $\frac{1}{2} \leq \varrho \leq 1$; temos $v = 0$ em $Q_\varrho - B(k, \varrho)$, e como $|B(k, \varrho)| \leq |B(\vartheta, 1)| \leq \gamma_0|Q|$ e por outro lado de $1 \leq 2^n \varrho^n$ tem-se $|Q_\varrho| \geq 2^{-n}|Q|$, e daí obtemos,

$$|Q_\varrho - B(k, \varrho)| = |Q_\varrho| - |B(k, \varrho)| \geq |Q_\varrho| - \gamma_0|Q| \geq (2^{-n} - \gamma_0)|Q_\varrho|.$$

Segue que, se $\gamma_0 \leq 2^{-n-1}$, podemos aplicar a desigualdade de Sobolev, obtendo

$$\left(\int_{Q_\varrho} v^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \leq c \int_{\Delta} |Dv| dx,$$

onde $\Delta = B(k, \varrho) - B(h, \varrho)$ e $v = 0$ em $Q_\varrho - B(k, \varrho)$. Portanto, pela desigualdade acima e por Hölder

$$(k - h)|B(h, \varrho)|^{1-\frac{1}{n}} = \int_{B(h, \varrho)} (k - h)^{1-\frac{1}{n}} dx \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_{Q_\varrho} v^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \\ &\leq c|\Delta|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(k, \varrho)} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

⁴Como u é limitada, poderíamos usar (3.47), isto é, (3.15) sem o termo k^p , em vez de (3.27). Neste caso, no entanto, não poderíamos assumir $\chi = 0$, pois, com exceção do caso homogêneo, que discutiremos mais adiante, não é possível ao mesmo tempo eliminar o termo k^p e assumir $\chi = 0$.

Por outro lado, em (3.27) consideramos $R = \tau < 1$, daí

$$|B(k, R)| = |B(k, R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} |B(k, R)|^{\frac{p}{n}-\epsilon} \leq |B(k, R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} |Q|^{\frac{p}{n}-\epsilon} \leq c |B(k, R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}$$

e assim, pelo fato de $\frac{1}{2} \leq \varrho \leq R < 1$, temos que $\frac{1}{(R-\varrho)^p} \geq 1$ e daí, usando este fato e a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(k, \varrho)} |Du|^p dx &\leq \frac{c}{(R-\varrho)^p} \int_{B(k, R)} (k-u)^p dx + ck^p |B(k, R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} \\ &\leq \frac{c}{(R-\varrho)^p} k^p |B(k, R)| + ck^p |B(k, R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon} \\ &\leq \frac{c}{(R-\varrho)^p} k^p |B(k, R)|^{1-\frac{p}{n}+\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

uma vez que $u > 0$ e $\epsilon \leq \frac{p}{n}$. De (3.75), usamos a estimativa acima e deduzimos

$$(k-h) |B(h, \varrho)|^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{ck}{R-\varrho} |B(k, R)|^{1-\frac{1}{n}+\frac{\epsilon}{p}}. \quad (3.78)$$

Considere agora a sequência de raios $r_i = \frac{1}{2}(1+2^{-i})$ e os níveis correspondentes $k_i = \frac{\vartheta}{2}(1+2^{-i})$. Definindo $B_i = |B(k_i, r_i)|$, obtemos a partir de (3.78)

$$2^{-i-1} B_{i+1}^{1-\frac{1}{n}} \leq c 2^{i+1} B_i^{1-\frac{1}{n}+\frac{\epsilon}{p}}$$

e, em conclusão,

$$B_{i+1} \leq C 4^{\frac{n-i}{n-1}} B_i^{1+\alpha},$$

onde definimos $\alpha = \frac{\epsilon n}{p(n+1)}$. Aplicando o Lema 3.1, obtemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} B_i = 0,$$

isto é, $|B(\frac{\vartheta}{2}, \frac{1}{2})| = 0$, logo $u \geq \frac{\vartheta}{2}$ em $Q_{1/2}$, desde que como requerido para aplicar o Lema 3.1 tenhamos

$$B_0 = |B(\vartheta, 1)| \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} 4^{-\frac{n}{(n-1)\alpha^2}} =: \gamma_1 |Q|.$$

A conclusão do lema segue então definindo $\gamma_0 = \min(2^{-n-1}, \gamma_1)$. ■

O próximo lema é uma melhoria do anterior.

Lema 3.5 *Seja $u \in DG_p^-$ com $\kappa_0 = 0$, e suponha que u seja positiva no cubo Q_2 . Para todo γ , com $0 < \gamma < 1$, existe uma constante $\lambda(\gamma) > 0$ tal que se $|B(\vartheta, 1)| \leq \gamma |Q_1|$ para algum $\vartheta > 0$, então*

$$\inf_{Q_{1/2}} u \geq \lambda(\gamma) \vartheta.$$

Demonstração. Tomando $\varrho = 1$ e $R = 2$ na desigualdade (3.77) acima, obtemos

$$\int_{B(k,1)} |Du|^p dx \leq ck^p,$$

que, introduzida em (3.75), fornece

$$(k-h)|B(h,1)|^{\frac{(n-1)}{n}} \leq ck(|B(k,1)| - |B(h,1)|)^{\frac{p-1}{p}},$$

a qual podemos elevar ambos os lados a $\frac{p}{p-1}$

$$(k-h)^{\frac{p}{p-1}} |B(h,1)|^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq ck^{\frac{p}{p-1}} (|B(k,1)| - |B(h,1)|). \quad (3.79)$$

Considere agora a sequência de níveis $k_i = \vartheta 2^{-i}$ e $h_i = k_{i+1}$, com $i \leq \nu$. Definindo $b_i = |B(k_i, 1)|$ temos, uma vez que $b_{i-1} \geq b_i \geq b_\nu$,

$$(\vartheta 2^{-i-1})^{\frac{p}{p-1}} b_\nu^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq c(\vartheta 2^{-i})^{\frac{p}{p-1}} (b_i - b_{i+1}).$$

Simplificando e somando sobre i entre 0 e ν , obtemos

$$(\nu+1)b_\nu^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq c(b_0 - b_{\nu+1}),$$

lembrando que $b_0 - b_{\nu+1} \leq b_0 \leq c|Q|$ temos

$$(\nu+1)b_\nu^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq c|Q| = c|Q|^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}},$$

onde como de costume $Q = Q_1$, e portanto

$$b_\nu \leq \left(\frac{c}{\nu+1} \right)^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} |Q|.$$

Tomando ν suficientemente grande, temos então

$$b_\nu = |B(\vartheta 2^{-\nu}, 1)| \leq \gamma_0 |Q|,$$

com $\nu = \nu(\gamma_0)$, de modo que, pelo lema anterior, $u \geq \vartheta 2^{-\nu-1}$ em $Q_{1/2}$, ou seja,

$$\inf_{Q_{1/2}} u \geq \vartheta 2^{-\nu-1} = \lambda(\gamma)\vartheta.$$

■

O lema acima pode ser ainda mais generalizado. De fato, se $|B(\vartheta, 1)| \leq \gamma|Q|$ e se $T > 1/2$, temos

$$|A(\vartheta, 2T)| \geq |A(\vartheta, 1)| = |Q| - |B(\vartheta, 1)| \geq (1-\gamma)|Q| = \frac{1-\gamma}{(2T)^n} |Q_{2T}|$$

e, portanto,

$$|B(\vartheta, 2T)| = |Q_{2T}| - |A(\vartheta, 2T)| \leq \left(1 - \frac{1-\gamma}{(2T)^n} \right) |Q_{2T}|.$$

Podemos então aplicar o lema anterior e concluir o seguinte:

Lema 3.6 Para todo $\gamma \in (0, 1)$ e para todo $T > 1/2$ existe uma constante positiva $\mu(\gamma, T)$ tal que se $u > 0$ em Q_{2T} e se $|B(\vartheta, 1)| \leq \gamma|Q|$ para algum $\vartheta > 0$, então

$$\inf_{Q_T} u \geq \mu(\gamma, T)\vartheta.$$

Temos $\mu(\gamma, T) = \lambda \left(1 - \frac{1-\gamma}{(2T)^n}\right)$. A seguir, usaremos o lema acima com $T = 1$.

Observação 3.10 Os três lemas que acabamos de demonstrar valem obviamente para todo cubo Q_R com $R < R_0$. Em particular, se u é positivo em Q_{2TR} e se

$$|B(\vartheta, R)| \leq \gamma|Q_R|,$$

então

$$\inf_{Q_{TR}} u(x) \geq \mu(\gamma, T)\vartheta.$$

Finalmente, precisaremos do seguinte teorema de cobertura, cuja analogia com o Teorema de Calderón e Zygmund (Teorema 1.10) é evidente.

Proposição 3.2 (Krylov e Safonov [14]) Sejam $E \subset Q_R \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $0 < \delta < 1$. Além disso, seja

$$E_\delta = \bigcup_{\substack{x \in Q_R \\ \varrho > 0}} \{Q(x, 3\varrho) \cap Q_R : |Q(x, 3\varrho) \cap E| \geq \delta|Q_\varrho|\}.$$

Então, ou $|E| \geq \delta|Q_R|$, caso em que $E_\delta = Q_R$, ou então

$$|E_\delta| \geq \frac{1}{\delta}|E|.$$

Demonstração. Ver [12] página 238.

Podemos agora provar o teorema principal desta seção.

Teorema 3.9 (Di Benedetto e Trudinger [7]) Seja u uma função positiva, pertencente à classe de De Giorgi $DG_p^-(\Omega)$, com $\kappa_0 = 0$. Existem $R_0 > 0$, um expoente $q > 0$ e uma constante c tais que, se $x_0 \in \Omega$ e $R < \min \left\{ R_0, \frac{1}{6\sqrt{n}} \text{dist}(x_0, \partial\Omega) \right\}$, temos

$$\inf_{Q(x_0, \frac{R}{2})} u(x) \geq c \left\{ \left(\int_{Q(x_0, R)} u^q dx \right)^{\frac{1}{q}} - \chi R^\alpha \right\} \quad (3.80)$$

Demonstração. Podemos assumir $\chi = 0$ e $R = 1$. Para um δ fixo (por exemplo, $\delta = \frac{1}{2}$), aplicamos a proposição anterior ao conjunto

$$A_t^{i-1} = A(t\mu^{i-1}, 1) = \{x \in Q : u(x) > t\mu^{i-1}\},$$

onde $\gamma = 1 - 3^{-n}\delta$ e $\mu = \mu(\gamma, 2)$ é a constante do Lema 3.6. Suponha agora que para algum $z \in Q$ tenhamos $Q(z, 3\varrho) \cap Q \subset (A_t^{i-1})_\delta$, e portanto

$$|A(t\mu^{i-1}, 1) \cap Q(z, 3\varrho)| \geq \delta|Q_\varrho| = \frac{\delta}{3^n}|Q_{3\varrho}|.$$

Logo,

$$|A(t\mu^{i-1}, 3\varrho)| \geq \frac{\delta}{3^n}|Q_{3\varrho}|$$

e conseqüentemente, temos

$$|B(t\mu^{i-1}, 3\varrho)| \leq \left(1 - \frac{\delta}{3^n}\right) |Q(z, 3\varrho)|.$$

Pelo Lema 3.6 com $T = 2$, levando em conta a observação que se segue imediatamente a ele, temos $\inf_{Q(z, 6\varrho)} u \geq \mu\mu^{i-1}t = \mu^i t$ em $Q(z, 6\varrho)$ e em particular, $u \geq \mu^i t$ em $Q(z, 3\varrho)$, e assim, $u(z) > t\mu^{i-1}$, portanto sendo z arbitrário temos

$$(A_t^{i-1})_\delta \subset A_t^i. \quad (3.81)$$

Pela proposição anterior, temos dois casos possíveis devemos ter ou

$$|(A_t^{i-1})_\delta| \geq \delta|Q| \quad \Rightarrow \quad (A_t^{i-1})_\delta = Q$$

ou

$$|(A_t^{i-1})_\delta| \geq \frac{1}{\delta}|A_t^{i-1}|.$$

Utilizemos (3.81). Para o primeiro caso, concluíse que $Q \subset A_t^i$. Já pelo o segundo, observamos que $|A_t^i| \geq |(A_t^{i-1})_\delta|$. Concluimos então que $A_t^i = Q$ ou $|A_t^i| \geq \delta^{-1}|A_t^{i-1}|$. Em qualquer caso, podemos concluir que se para algum inteiro s tivermos

$$|A_t^0| = |A(t, 1)| > \delta^s|Q|, \quad (3.82)$$

então

$$|A_t^{s-1}| > \delta^{-1}|A_t^{s-2}| > \dots > \delta^{1-s}|A_t^0| > \delta|Q|$$

e, portanto, $A_t^s = Q$. De fato, caso exista $i < s$ tal que $A_t^i = Q$ então, pela monotonicidade de $A^i \subset A^{i+1}$, temos

$$A_t^j = Q, \quad \forall j \geq i,$$

em particular para $i = s$. Do contrário, a cadeia de desigualdades acima é formada, e daí, para $i = s$ temos que ou $A_t^s = Q$ ou $|A_t^s| \geq \delta^{-1}|A_t^{s-1}|$, para o segundo caso, concluimos pela cadeia que

$$|A_t^s| > |Q|$$

o que não ocorre pois $A_t^s \subset Q$, portanto, $A_t^s = Q$, em qualquer caso.

Em conclusão, $u(x) \geq \mu^s t$ em Q . Escolhemos s de modo que (3.82) seja satisfeita; por exemplo, seja s o menor inteiro tal que

$$s \geq \frac{1}{\log \delta} \log \left| \frac{A(t, 1)}{|Q|} \right|.$$

Com esta escolha de s obtemos

$$\inf_Q u(x) \geq \mu^s t = ct \left(\frac{|A(t, 1)|}{|Q|} \right)^{\frac{\log \mu}{\log \delta}},$$

ou equivalentemente, definindo $\xi = \inf_Q u(x)$ e $a = \frac{\log \delta}{\log \mu}$:

$$|A(t, 1)| \leq c|Q|\xi^a t^{-a}. \quad (3.83)$$

Por outro lado, por (1.5) sabemos

$$\int_Q u^q dx = q \int_0^\infty t^{q-1} |A(t, 1)| dt \leq q \int_\xi^\infty t^{q-1} |A(t, 1)| dt + |Q|\xi^q.$$

Introduzindo a estimativa (3.83), obtemos

$$\int_Q u^q dx \leq cq\xi^a \int_\xi^\infty t^{q-a-1} dt + \xi^q.$$

Se escolhermos $q < a$ a integral converge e, portanto,

$$\int_Q u^q dx \leq c\xi^q$$

de modo que, lembrando que $\xi = \inf_Q u(x)$ temos

$$\inf_{Q_{1/2}} u(x) \geq \inf_Q u(x) \geq c \left(\int_Q u^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

A conclusão segue voltando a um R genérico e escrevendo $u + \chi R^\alpha$ em vez de u . ■

Juntando o resultado acima com o Teorema 3.3 obtemos a seguinte desigualdade de Harnack:

Teorema 3.10 *Seja u uma função positiva pertencente à classe de De Giorgi $DG_p(\Omega)$ com $\kappa_0 = 0$, e seja ϱ um número menor que $\frac{R_0}{2}$, tal que o cubo de lado 6ϱ esteja contido em Ω . Então,*

$$\sup_{Q_\varrho} u \leq c \left(\inf_{Q_\varrho} u + \chi \varrho^\alpha \right). \quad (3.84)$$

Demonstração. Começamos mostrando que

$$u(x_0) \leq c \inf_{Q(x_0, R)} u(x), \quad (3.85)$$

ou, equivalentemente,

$$v(x) := \frac{u(x)}{u(x_0)} \geq c > 0$$

em $Q(x_0, R)$. Como de costume, podemos assumir $\chi = 0$ e $R = 1$.

A função v satisfaz as desigualdades (3.26) e (3.27) para todo $h > 0$, com as mesmas constantes que u . Em particular, o Teorema 3.6 vale para v , com a estimativa

$$\text{osc}_{Q(x, \varrho)} v \leq c \cdot \text{osc}_{Q(x, R)} v \left(\frac{\varrho}{R} \right)^\beta \leq c \|v\|_{\infty, Q(x, R)} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^\beta, \quad (3.86)$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $\varrho < R < \frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Agora seja $K_\tau = (1 - \tau)^{-\delta}$, onde $\delta > 0$ será escolhido mais tarde, e seja τ_0 o maior valor de τ para o qual $\|v\|_{\infty, Q(x_0, \tau)} \geq K_\tau$. Como o lado esquerdo da relação anterior é limitado e o lado direito diverge quando $\tau \rightarrow 1$, temos $0 \leq \tau_0 < 1$. De fato, pois para $\tau_0 = 0$ temos

$$K_{\tau_0} = 1$$

e por outro lado para $x = x_0$ temos que $v(x_0) = 1$ então, vale a desigualdade. Agora, para $\tau \rightarrow 1$ temos que $K_\tau \rightarrow \infty$, então tomamos $\tau < 1$.

Como o Teorema 3.6 faz de v Hölder-contínua, podemos tomar $\bar{x} \in \overline{Q}(x_0, \tau_0)$ tal que $v(\bar{x}) = \|v\|_{\infty, Q(x_0, \tau_0)} \geq (1 - \tau_0)^{-\delta}$. Assim, observando que $Q(\bar{x}, \frac{1-\tau_0}{2}) \subset Q(x_0, \frac{1+\tau_0}{2})$, temos pela maximalidade de τ_0 que

$$\|v\|_{\infty, Q(\bar{x}, \frac{1-\tau_0}{2})} \leq \|v\|_{\infty, Q(x_0, \frac{1+\tau_0}{2})} < K_{\frac{1+\tau_0}{2}} = 2^\delta (1 - \tau_0)^{-\delta}.$$

Por outro lado, usando (3.62) com $\chi = 0$, $R = \frac{1-\tau_0}{2}$ e $\varrho = \epsilon R$ ($\epsilon < 1$), obtemos

$$\text{osc}_{Q(\bar{x}, \frac{1-\tau_0}{2} \epsilon)} v \leq c \cdot \text{osc}_{Q(\bar{x}, \frac{1-\tau_0}{2})} v \epsilon^\beta \leq c \|v\|_{\infty, Q(\bar{x}, \frac{1-\tau_0}{2})} \epsilon^\beta \leq c 2^\delta (1 - \tau_0)^{-\delta} \epsilon^\beta$$

e, portanto, como

$$\text{osc}_{Q(\bar{x}, \frac{1-\tau_0}{2} \epsilon)} v \geq v(\bar{x}) - v(x), \quad \forall x \in Q(\bar{x}, \frac{1-\tau_0}{2} \epsilon).$$

então

$$v(x) \geq v(\bar{x}) - \text{osc}_{Q(\bar{x}, \frac{1-\tau_0}{2} \epsilon)} v \geq (1 - \tau_0)^{-\delta} (1 - c 2^\delta \epsilon^\beta).$$

Escolhendo $\epsilon = (c^{-1}2^{-\delta-1})^{\frac{1}{\beta}}$, obtemos

$$v(x) \geq \frac{1}{2}(1 - \tau_0)^{-\delta} \quad \text{em} \quad Q\left(\bar{x}, \frac{1 - \tau_0}{2}\epsilon\right). \quad (3.87)$$

Podemos agora aplicar a Observação 3.10 com $R = \frac{1-\tau_0}{2}\epsilon$, $T = 2$ e $\vartheta = \frac{1}{2}(1 - \tau_0)^{-\delta}$. Temos $\gamma = 0$, e portanto

$$v(x) \geq \frac{\mu}{2}(1 - \tau_0)^{-\delta} \quad \text{em} \quad Q(\bar{x}, (1 - \tau_0)\epsilon),$$

com $\mu = \mu(0, 2)$. Iterando o argumento acima, isto é, usando a Observação 3.10 da mesma forma na desigualdade acima, obtemos para todo inteiro ν

$$v(x) \geq \frac{\mu^\nu}{2}(1 - \tau_0)^{-\delta} \quad \text{em} \quad Q(\bar{x}, 2^{\nu-1}(1 - \tau_0)\epsilon). \quad (3.88)$$

Seja ν tal que $2 \leq 2^{\nu-1}(1 - \tau_0)\epsilon < 4$. Dividindo tudo por $(1 - \tau_0)\epsilon$

$$\frac{2}{(1 - \tau_0)\epsilon} \leq 2^{\nu-1} < \frac{4}{(1 - \tau_0)\epsilon},$$

temos, desta forma

$$\frac{4}{(1 - \tau_0)\epsilon} \leq 2^\nu < \frac{8}{(1 - \tau_0)\epsilon}.$$

Usando a propriedade de logaritmo, $\mu^\nu = (2^\nu)^{\log_2 \mu}$, e sabendo que $0 < \mu < 1$, temos $\log_2 \mu < 0$. Logo, elevando a $\log_2 \mu < 0$, obtemos

$$\mu^\nu = (2^\nu)^{\log_2 \mu} \geq \left(\frac{8}{(1 - \tau_0)\epsilon}\right)^{\log_2 \mu}$$

e, portanto,

$$v(x) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{8}{\epsilon}\right)^{\log_2 \mu} (1 - \tau_0)^{-\delta - \log_2 \mu} \quad \text{em} \quad Q(\bar{x}, 2).$$

Como $Q(\bar{x}, 2) \supset Q(x_0, 1)$, então a desigualdade acima vale para todo $Q(x_0, 1)$. Escolhemos agora $\delta = -\log_2 \mu$; temos $\epsilon = \left(\frac{\mu}{2c}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ e, portanto,

$$v(x) \geq \frac{1}{2} \left(8 \left(\frac{2c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\log_2 \mu}$$

em $Q(x_0, 1)$, o que fornece a estimativa (3.85). Seja agora $Q_\varrho = Q(x_1, \varrho)$ um cubo contido em Ω , com ϱ suficientemente pequeno, e seja $x_0 \in \bar{Q}_\varrho$ tal que $u(x_0) = \sup_{Q_\varrho} u(x)$. Tomando $R = 3\varrho$, obtemos de (3.85):

$$\sup_{Q_\varrho} u(x) \leq c \inf_{Q(x_0, R)} u(x) = c \inf_{Q(x_0, 3\varrho)} u(x) \leq c \inf_{Q_\varrho} u(x),$$

desde que $Q_\varrho \subset Q(x_0, 3\varrho)$ e, portanto, obtemos (3.84) com $\chi = 0$. O caso geral segue como de costume, escrevendo $u + \chi R^\beta$ em vez de u . ■

3.6 O Caso Homogêneo

De particular interesse é o caso em que a função u pertence a uma classe homogênea de De Giorgi DGO_p , isto é, quando satisfaz as relações

$$\int_{A(k,\varrho)} |Du|^p dx \leq \frac{H}{(R-\varrho)^p} \int_{A(k,R)} (u-k)^p dx \quad (3.89)$$

e

$$\int_{B(k,\varrho)} |Du|^p dx \leq \frac{H}{(R-\varrho)^p} \int_{B(k,R)} (k-u)^p dx. \quad (3.90)$$

Em particular, isso ocorre quando u é um quase-mínimo do funcional

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx$$

com

$$|z|^p \leq F(x, u, z) \leq L|z|^p.$$

O exemplo mais significativo dessa situação é o de funcionais quadráticos

$$F(x, u, z) = a_{ij}(x, u) z_i z_j,$$

com os coeficientes a_{ij} limitados e satisfazendo a condição de elipticidade

$$a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \nu > 0.$$

Para funções positivas $u \in DGO_p$ temos a estimativa (3.84) com $\chi = 0$, e portanto:

Teorema 3.11 (*Desigualdade de Harnack*) *Seja Ω um conjunto aberto, limitado e conexo em $\mathbb{R}^n$, e seja $\Sigma \subset \subset \Omega$. Seja u uma função positiva em $DGO_p(\Omega)$, ($p > 1$). Existe uma constante $C(\Sigma, \Omega)$ tal que*

$$\sup_{\Sigma} u \leq C \inf_{\Sigma} u. \quad (3.91)$$

Demonstração. Sejam $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ uma família finita de cubos tais que quaisquer dois cubos consecutivos Q_i e Q_{i+1} tenham interseção não vazia e que

$$\sup_{\Sigma} u = \sup_{Q_1} u; \quad \inf_{\Sigma} u = \inf_{Q_N} u.$$

Podemos supor que cada um desses cubos tenha lado $\varrho < R_0$, e que os cubos de lado 6ϱ estejam contidos em Ω . Para cada cubo Q_i podemos escrever a desigualdade (3.84) com $\chi = 0$:

$$\sup_{Q_i} u \leq C \inf_{Q_i} u.$$

Por outro lado, como quaisquer dois cubos consecutivos se intersectam, temos

$$\inf_{Q_i} u \leq \inf_{Q_i \cap Q_{i+1}} u \leq \sup_{Q_i \cap Q_{i+1}} u \leq \sup_{Q_{i+1}} u,$$

assim, juntando as duas desigualdades conquistamos

$$\sup_{\Sigma} u = \sup_{Q_1} u \leq c \inf_{Q_1} u \leq c \sup_{Q_2} u \leq \cdots \leq c \sup_{Q_N} u \leq c \inf_{Q_N} u = c \inf_{\Sigma} u.$$

Portanto,

$$\sup_{\Sigma} u \leq c \inf_{\Sigma} u.$$

■

Se além disso Ω for um cubo de lado R , e Σ for um cubo concêntrico de lado τR , a constante C depende apenas de τ mas é independente de R .

Duas consequências da desigualdade de Harnack merecem particular destaque.

Teorema 3.12 (*Princípio do máximo forte*) *Seja Ω um conjunto conexo, e seja $u(x)$ uma função da classe $DGO_p^-(\Omega)$. Se u possui um ponto de mínimo interior, então u é constante em Ω .*

Demonstração. Notamos que (3.89) e (3.90) não se alteram se escrevemos $u + \lambda$ em vez de u . Como consequência, adicionando possivelmente uma constante a u , podemos supor que $\min_{\Omega} u = 0$, ou seja, $u \geq 0$. Seja E o conjunto dos pontos de Ω nos quais u atinge seu valor mínimo 0. Por hipótese, E é não vazio.

Para $\epsilon > 0$, a função $u + \epsilon$ é positiva, e podemos aplicar o Teorema 3.9. Se Q é um cubo com centro em um ponto de E e lado suficientemente pequeno, temos

$$\epsilon = \inf_Q (u + \epsilon) \geq c \left(\int_Q (u + \epsilon)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq c \left(\int_Q u^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, portanto, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, devemos ter $u = 0$ em Q . Da conta acima, segue que E é um conjunto aberto; ademais, pela continuidade de u ele também é fechado. Mas por hipótese Ω é conexo, concluímos, que $E = \Omega$. Portanto, u é constante.

■

De maneira análoga, pode-se provar que se $u \in DGO_p^+(\Omega)$ possui um ponto de máximo interior, então ela é constante. Finalmente, se $u \in DGO_p(\Omega)$, ela deve assumir tanto seu máximo quanto seu mínimo apenas na fronteira de Ω , a menos que seja constante.

Teorema 3.13 (*Liouville*) *Seja $u \in DGO_p(\mathbb{R}^n)$, e suponha que u seja limitada inferiormente. Então, u é constante.*

Demonstração. Seja $\lambda = \inf u > -\infty$. Escrevendo $v := u - \lambda$ em vez de u , temos que $v \in DGO_p(\mathbb{R}^n)$, $v \geq 0$ e $\inf v = 0$. Assim, pelo princípio do máximo forte, $v = 0$ ou $v > 0$ em $\mathbb{R}^n$. Caso o primeiro caso ocorra, então u é constante. Do contrário, $v > 0$ em $\mathbb{R}^n$. Da desigualdade de Harnack temos para todo $R > 0$

$$\sup_{Q_R} v \leq c \inf_{Q_R} v$$

Se fizermos R tender ao infinito, o lado direito tende a zero e, portanto, $v = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $v = 0$, consequentemente, u é constante. ■

3.7 ω -Mínimos

Como vimos anteriormente (Exemplo 2.4), a regularidade Hölder (continuidade) não vale para quasi-mínimos cúbicos. De modo geral, estimativas apenas em cubos não são suficientes para provar regularidade.

Pode-se perguntar se estimativas em cubos são suficientes em alguns casos especiais, naturalmente mais gerais do que 1-mínimos (isto é, quasi-mínimos com $Q = 1$), para os quais a diferença entre estimativas em cubos e em conjuntos gerais desaparece. A resposta é positiva para um tipo particular de quasi-mínimos cúbicos, os ω -mínimos, de acordo com o seguinte:

Definição 3.2 *Seja $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função contínua, limitada, crescente e côncava, com $\omega(0) = 0$. Dizemos que uma função $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ é um ω -**mínimo** para o funcional $\mathcal{F}$ se para todo cubo $Q_R \subset \Omega$ e toda $w \in W^{1,p}(Q_R)$ com $w = u$ em ∂Q_R , tivermos*

$$\mathcal{F}(u, Q_R) \leq [1 + \omega(R)] \mathcal{F}(w, Q_R). \quad (3.92)$$

É claro que um ω -mínimo é também um quasi-mínimo cúbico, e que a diferença entre eles está apenas no comportamento para lados muito pequenos. Não se sabe se um ω -mínimo é também um quasi-mínimo. No entanto, pode-se provar que ω -mínimos são funções Hölder contínuas. A presente seção será dedicada à demonstração desse resultado.

Como antes, assumiremos que o integrando $F(x, u, z)$ é uma função de Carathéodory satisfazendo as desigualdades

$$|z|^p - b(x)|u|^\gamma - a(x) \leq F(x, u, z) \leq L|z|^p + b(x)|u|^\gamma + a(x), \quad (3.93)$$

com $p < n$, $1 < p \leq \gamma < p^* = \frac{pn}{n-p}$, sendo $a(x)$ e $b(x)$ duas funções não negativas, pertencentes respectivamente a $L^s(\Omega)$ e $L^\sigma(\Omega)$, com $s > \frac{n}{p}$ e $\sigma > \frac{p^*}{p^*-\gamma}$.

Vimos no capítulo anterior (Observação 2.10) que as hipóteses acima implicam a existência de um $r > 1$ tal que todo quasi-mínimo esférico u pertence a $W_{\text{loc}}^{1,pr}(\Omega)$, com a estimativa

$$\int_{Q_R} |Du|^{rp} dx \leq c \left(\int_{Q_{2R}} |Du|^p dx \right)^r + c \int_{Q_{2R}} (a(x) + b(x)|u|^\gamma)^r dx. \quad (3.94)$$

É evidente que podemos tomar r tão próximo de 1 quanto desejarmos, de modo que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $r\gamma < p^*$.

Como acima, assumiremos que $\frac{1}{s} = \frac{p}{n} - \epsilon$ e $\frac{1}{\sigma} = 1 - \frac{\gamma}{p^*} - \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. É fácil ver que podemos tomar ϵ tão pequeno quanto desejarmos, sem prejuízo para os resultados das seções anteriores, sendo as constantes independentes de ϵ , desde que este permaneça limitado inferiormente longe de zero.

Uma vez que, como observamos, não se sabe se ω -mínimos são quasi-mínimos, não podemos aplicar diretamente o resultado de regularidade das seções anteriores aos ω -mínimos. A prova será obtida comparando ω -mínimos do funcional $\mathcal{F}$ em cubos de lado R com quase-mínimos do funcional

$$\mathcal{G}(v, Q_R) = \int_{Q_R} (|Dv|^p + a(x) + \Lambda + b(x)|v|^\gamma) dx \quad (3.95)$$

com uma constante apropriada Λ dependendo de R .

Começaremos com uma estimativa relativa a quasi-mínimos do funcional acima. Por simplicidade, definimos $\alpha(x) = a(x) + \Lambda$.

Teorema 3.14 *Seja v um Q -mínimo do funcional $\mathcal{G}$ em um cubo de lado R . Então, existe uma constante positiva R_0 , dependendo apenas de a, b e da norma de v em $W^{1,p}$, tal que para todo $\varrho < R \leq R_0$ temos*

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varrho} (|Dv|^p + \varrho^{-\mu}|v|^\gamma) dx &\leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+n\epsilon} \left\{ \int_{Q_R} (|Dv|^p + R^{-\mu}|v|^\gamma) dx + \|\alpha\|_s R^{n-p+n\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + (\|\alpha\|_s R^{n-p+n\epsilon})^{\frac{\gamma}{p}} R^{n\epsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (3.96)$$

onde $\mu = \frac{n}{\sigma}$, e c é uma constante dependendo de a, b e da norma de v em $W^{1,p}$.

Demonstração. Será mais simples provar a estimativa (3.96) com $2R$ em vez de R . Suponha primeiro que $\varrho < R$. Usamos a desigualdade (3.64)

$$\int_{Q_\varrho} |Dv|^p dx \leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+p\beta} \left\{ \int_{Q_R} |Dv|^p dx + \chi^p R^{n-p+p\beta} \right\},$$

onde, de acordo com a Observação 3.7,

$$\chi^p = \|\alpha + bM^\gamma\|_s \leq \|\alpha\|_s + \|b\|_s M^\gamma.$$

A quantidade $M = 2 \sup_{Q_R} |v|$ pode ser estimada por meio de (3.41) com $q = \gamma$:

$$\sup_{Q_R} |v|^\gamma \leq c \left\{ \int_{Q_{2R}} |v|^\gamma dx + \|\alpha\|_s^{\frac{\gamma}{p}} R^{\beta\gamma} \right\},$$

onde $\beta = \frac{n\epsilon}{p}$. Além disso, temos $\|b\|_s \leq c \|b\|_\sigma R^{n(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma})}$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_R} b^s dx \right) &\leq \left(\int_{Q_R} b^\sigma dx \right)^{\frac{s}{\sigma}} |Q_R|^{1 - \frac{s}{\sigma}} \\ &\leq c \left(\int_{Q_R} b^\sigma dx \right)^{\frac{s}{\sigma}} R^{ns(\frac{1}{s} - \frac{s}{\sigma})}, \end{aligned}$$

onde elevando ambos os lados a $1/s$, chegamos na estimativa requerida. Assim, juntando essas desigualdades obtemos a seguinte estimativa para χ^p

$$\chi^p \leq \|\alpha\|_s + c \|b\|_\sigma \left(R^{n(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma} - 1)} \int_{Q_{2R}} |v|^\gamma dx + \|\alpha\|_s^{\frac{\gamma}{p}} R^{n(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma} + \frac{\beta\gamma}{n})} \right).$$

Em conclusão,

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varrho} |Dv|^p dx &\leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+p\beta} \left\{ \int_{Q_{2R}} |Dv|^p dx + R^{-\mu} \int_{Q_{2R}} |v|^\gamma dx \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha\|_s R^{n-p+n\epsilon} + \|\alpha\|_s^{\frac{\gamma}{p}} R^{\frac{n\gamma}{p^*} + n\epsilon + \beta\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Por outro lado, lembrando que $-\mu = -n/\sigma$ e $|Q_\varrho| \leq c\varrho^n$, temos

$$\begin{aligned} \varrho^{-\mu} \int_{Q_\varrho} |v|^\gamma dx &\leq c \varrho^{n(1 - \frac{1}{\sigma})} M^\gamma = c \varrho^{n(\frac{\gamma}{p^*} + \epsilon)} M^\gamma \\ &\leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n(\frac{\gamma}{p^*} + \epsilon)} \left\{ R^{-\mu} \int_{Q_{2R}} |v|^\gamma dx + \|\alpha\|_s^{\frac{\gamma}{p}} R^{\frac{n\gamma}{p^*} + n\epsilon + \beta\gamma} \right\} \\ &\leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+n\epsilon} \left\{ R^{-\mu} \int_{Q_{2R}} |v|^\gamma dx + \|\alpha\|_s^{\frac{\gamma}{p}} R^{\frac{n\gamma}{p^*} + n\epsilon + \beta\gamma} \right\}, \end{aligned}$$

onde na última passagem usamos a desigualdade $\frac{n\gamma}{p^*} \geq \frac{n\beta}{p^*} = n - p$. Somando a última desigualdade a (3.97), obtemos (3.96) para $\varrho < R$. Por outro lado, se $R \leq \varrho < 2R$, (3.96) vale trivialmente. De fato, basta observar que como $Q_\varrho \subset Q_{2R}$, temos

$$\int_{Q_\varrho} |Dv|^p \leq \int_{Q_{2R}} |Dv|^p \quad \text{e} \quad \int_{Q_\varrho} |v|^\gamma \leq \int_{Q_{2R}} |v|^\gamma.$$

Além disso, como $\varrho \geq R$, então $\varrho^{-\mu} \leq R^{-\mu}$, o que nos garante

$$\varrho^{-\mu} \int_{Q_\varrho} |v|^\gamma \leq R^{-\mu} \int_{Q_{2R}} |v|^\gamma.$$

Somando as desigualdades, obtemos

$$\int_{Q_\varrho} (|Dv|^p + \varrho^{-\mu}|v|^\gamma) \leq \int_{Q_{2R}} |Dv|^p + R^{-\mu} \int_{Q_{2R}} |v|^\gamma.$$

Agora, observe o fator $\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-p+n\epsilon}$. Como $R \leq \varrho < 2R$, temos $1 \leq \frac{\varrho}{R} < 2$ e, portanto,

$$1 \leq \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-p+n\epsilon} \leq 2^{n-p+n\epsilon} =: C_0.$$

Daí,

$$\int_{Q_{2R}} (|Dv|^p + R^{-\mu}|v|^\gamma) \leq C_0 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-p+n\epsilon} \int_{Q_{2R}} (|Dv|^p + R^{-\mu}|v|^\gamma).$$

Adicionando os outros fatores positivos para chegar em (3.96), podemos concluir que o teorema esta provado. ■

Seja agora u um ω -mínimo do funcional $\mathcal{F}$. Obteremos uma estimativa semelhante a (3.96) comparando u com um Q -mínimo adequado v do funcional $\mathcal{G}$. Para a construção de tal v usaremos o princípio variacional de Ekeland A.8. Definimos um espaço métrico X como o conjunto de todas as funções $w \in W^{1,p}(Q_R)$ tais que $u - w \in W_0^{1,p}(Q_R)$ e

$$\int_{Q_R} (|Dw|^p + b|w|^\gamma) dx \leq \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx.$$

Dotamos X com a métrica

$$d(w, v) = C_R \int_{Q_R} |Dw - Dv| dx, \quad (3.98)$$

onde C_R é uma constante que escolheremos mais adiante. Mostremos que X é completo.

Seja $(w_k) \subset X$ uma sequência de Cauchy em (X, d) . Então

$$\int_{Q_R} |Dw_k - Dw_m| dx \rightarrow 0 \quad (k, m \rightarrow \infty).$$

Logo, (Dw_k) é de Cauchy em $L^1(Q_R)$, como este espaço é Banach, existe $G \in L^1(Q_R)$ tal que

$$Dw_k \rightarrow G \quad \text{em } L^1(Q_R).$$

Fixado u dado inicialmente, escreva

$$w_k = u - \varphi_k, \quad \text{com } \varphi_k \in W_0^{1,p}(Q_R),$$

então $D\varphi_k = Du - Dw_k$. Como $Dw_k \rightarrow G$ em L^1 , segue que

$$D\varphi_k \rightarrow Du - G \quad \text{em } L^1(Q_R).$$

Como $w_k \in X$, temos a partir da estimativa de energia que (φ_k) é limitada em $W_0^{1,p}(Q_R)$. Sendo $p > 1$, o espaço $W_0^{1,p}(Q_R)$ é reflexivo, portanto existe $\varphi \in W_0^{1,p}(Q_R)$ tal que, a menos de subsequência,

$$\varphi_k \rightharpoonup \varphi \quad \text{em } W^{1,p}(Q_R).$$

Em particular, $D\varphi_k \rightharpoonup D\varphi$ em $L^p(Q_R)$. No entanto, sabemos que

$$D\varphi_k \rightarrow Du - G \quad \text{em } L^1(Q_R),$$

segue que os limites coincidem

$$D\varphi = Du - G.$$

Defina $w := u - \varphi$. Então, sabendo que $u \in W^{1,p}(Q_R)$ e $\varphi \in W_0^{1,p}(Q_R)$ temos

$$w \in W^{1,p}(Q_R), \quad u - w = \varphi \in W_0^{1,p}(Q_R)$$

e, além disso,

$$Dw = Du - D\varphi = G.$$

Daí, como $Dw_k \rightarrow G = Dw$ em $L^1(Q_R)$, segue que

$$\int_{Q_R} |Dw_k - Dw| dx \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$d(w_k, w) \rightarrow 0.$$

Por fim, basta mostrarmos que w satisfaz a desigualdade de energia. Sabemos que

$$\int_{Q_R} (|Dw_k|^p + b|w_k|^\gamma) dx \leq \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx.$$

Como $Dw_k \rightarrow Dw$ em $L^1(Q_R)$, então, a menos de subsequência, converge q.t.p. em Q_R , logo pelo Lema de Fatou

$$\int_{Q_R} |Dw|^p dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_R} |Dw_k|^p dx.$$

Analogamente, da convergência fraca de $w_k \rightharpoonup w$ em $W^{1,p}(Q_R)$ e da imersão de Sobolev para $\gamma < p^*$ em conjunto limitado, temos por Fatou

$$\int_{Q_R} b|w|^\gamma dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_R} b|w_k|^\gamma dx.$$

Somando as desigualdades acima

$$\int_{Q_R} (|Dw|^p + b|w|^\gamma) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_R} (|Dw_k|^p + b|w_k|^\gamma) dx.$$

Portanto, $w \in X$, logo X é completo. ■

Para $\delta > 0$, seja v_δ uma função em X tal que

$$\mathcal{F}(v_\delta, Q_R) \leq \inf_X \mathcal{F} + \delta.$$

Segue do fato de u ser um ω -mínimo de $\mathcal{F}$ que

$$\mathcal{F}(u, Q_R) \leq (1 + \omega(R))\mathcal{F}(v_\delta, Q_R) \leq \inf_X \mathcal{F} + \delta + \omega[\mathcal{F}(u, Q_R) + \delta],$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos

$$\mathcal{F}(u) \leq \inf_X \mathcal{F} + \omega \mathcal{F}(u) \leq \inf_X \mathcal{F} + c\omega R^n \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx \leq \inf_X \mathcal{F} + \epsilon,$$

na qual escrevemos $\mathcal{F}(u)$ em vez de $\mathcal{F}(u, Q_R)$ e $\epsilon := c\omega R^n \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx$. Pelo princípio de Ekeland [A.8](#), existe uma função $v \in X$, em particular tal que

$$\int_{Q_R} (|Dv|^p + b|v|^\gamma) dx \leq \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx,$$

satisfazendo

$$\int_{Q_R} |Dv - Du| dx \leq C_R^{-1} \tag{3.99}$$

e tal que

$$\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(w) + c\omega R^n C_R \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx \int_{Q_R} |Dv - Du| dx.$$

Se escolhermos agora

$$C_R^{-1} = R^n \omega \left(\int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

a última desigualdade torna-se

$$\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(w) + \Lambda^{1-\frac{1}{p}} \int_{Q_R} |Dv - Du| dx, \tag{3.100}$$

com

$$\Lambda = \Lambda(R) = c \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx. \tag{3.101}$$

Observamos que, temos

$$\int_{Q_R} |Dv|^p dx \leq \int_{Q_R} |Dv|^p + b|v|^\gamma dx \leq \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx \leq c_1 \quad (3.102)$$

e também, usando o Teorema A.1, segue que

$$\begin{aligned} \int_{Q_R} |v|^{p^*} dx &\leq c \int_{Q_R} |v - u|^{p^*} dx + c \int_{Q_R} |u|^{p^*} dx \\ &\leq c \left(\int_{Q_R} (|Du| + |Dv|)^p dx \right)^{\frac{p^*}{p}} + c \int_{Q_R} |u|^{p^*} dx \leq c_2, \end{aligned} \quad (3.103)$$

com c_1 e c_2 independentes de R .

Vamos provar agora que v é um Q -mínimo do funcional $\mathcal{G}$. Seja $w \in W^{1,p}(Q_R)$, com $\varphi = v - w \in W_0^{1,p}$, e seja $K = \text{supp } \varphi$. Se $w \in X$, temos de (3.100)

$$\int_K (|Dv|^p - b|v|^\gamma - a) dx \leq \mathcal{F}(v, K) \leq \mathcal{F}(w, K) + \Lambda^{1-\frac{1}{p}} \int_K |D\varphi| dx$$

e, portanto, passando uma parte para o lado direito temos

$$\int_K |Dv|^p dx \leq \int_K (L|Dw|^p + b|w|^\gamma + a) dx + \int_K (b|v|^\gamma + a) dx + \Lambda^{1-\frac{1}{p}} \int_K |D\varphi| dx. \quad (3.104)$$

Estimamos utilizando Young A.2

$$\Lambda^{1-\frac{1}{p}} |D\varphi| \leq \epsilon |D\varphi|^p + c_\epsilon \Lambda \leq c\epsilon (|Dv|^p + |Dw|^p) + c_\epsilon \Lambda$$

de modo que, tomando ϵ suficientemente pequeno, podemos reordenar (3.104)

$$\int_K (|Dv|^p + b|v|^\gamma + a + \Lambda) dx \leq c \int_K (|Dw|^p + b|w|^\gamma + a + b|v|^\gamma + \Lambda) dx. \quad (3.105)$$

Por outro lado, se $w \notin X$, devemos ter

$$\int_K (|Dv|^p + b|v|^\gamma) dx \leq \int_K (|Du|^p + b|u|^\gamma) dx \leq \int_K (|Dw|^p + b|w|^\gamma) dx$$

de modo que a desigualdade acima vale para todo $w \in W^{1,p}(Q_R)$ com $w - v \in W_0^{1,p}(Q_R)$.

Neste último caso, v satisfaz a desigualdade desejada para Q -mínimo.

Argumentando como no Teorema 2.1, podemos estimar $b|v|^\gamma$ que aparece no caso em que $w \in X$, e concluímos que em ambos os casos

$$\int_K (|Dv|^p + b|v|^\gamma + a + \Lambda) dx \leq Q \int_K (|Dw|^p + b|w|^\gamma + a + \Lambda) dx$$

e, portanto, v é um Q -mínimo do funcional $\mathcal{G}$. A constante Q dependerá de v apenas através de sua norma $\|Dv\|_p + \|v\|_{p^*}$ e, portanto, em última instância, depende apenas de

u e é independente de R .

Estimemos agora a quantidade

$$\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^p dx.$$

Seja $r > 1$ o expoente em (2.87), e seja $\vartheta = \frac{r(p-1)}{rp-1}$. Temos, pela interpolação A.1, para $1 < p < rp$ e $\theta = 1 - \vartheta$

$$\left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^{rp} dx \right)^{\frac{\vartheta}{rp}} \left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv| dx \right)^{1-\vartheta}. \quad (3.106)$$

Estimamos os dois fatores separadamente. Para o primeiro, usamos (2.87) tanto para u quanto para v , e obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^{rp} dx \right)^{\frac{1}{rp}} &\leq c \left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du|^{rp} dx \right)^{\frac{1}{rp}} + c \left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Dv|^{rp} dx \right)^{\frac{1}{rp}} \\ &\leq c \left(\int_{Q_R} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma + a)^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} \\ &\quad + c \left(\int_{Q_R} |Dv|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c \left(\int_{Q_R} (b|v|^\gamma + a + \Lambda)^r dx \right)^{\frac{1}{rp}}, \end{aligned} \quad (3.107)$$

daí, usando (3.102) temos

$$c \left(\int_{Q_R} |Dv|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\int_{Q_R} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando Hölder no último termo da desigualdade acima chegamos

$$\left(\int_{Q_R} b|u|^\gamma dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{1/(rp)},$$

donde concluímos

$$c \left(\int_{Q_R} |Dv|^p dx \right)^{1/p} \leq c \left(\int_{Q_R} |Du|^p dx \right)^{1/p} + c \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{1/(rp)}$$

e portanto, substituindo em (3.107)

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^{rp} dx \right)^{\frac{1}{rp}} &\leq c \left(\int_{Q_R} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} \\ &\quad + c \left(\int_{Q_R} (b|v|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} + c \left(\int_{Q_R} a^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} + c\Lambda^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Da definição de Λ , temos

$$\Lambda^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\int_{Q_R} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma) dx \right)^{\frac{1}{p}} + c \left(\int_{Q_R} a dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando Hölder nos dois últimos termos da desigualdade acima, temos

$$\Lambda^{\frac{1}{p}} \leq c \left\{ \left(\int_{Q_R} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} + \left(\int_{Q_R} a^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} \right\},$$

logo, este termo será absorvido na desigualdade, restando

$$\left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq cM,$$

em que

$$\begin{aligned} M := c \left\{ \left(\int_{Q_R} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} \right. \\ \left. + c \left(\int_{Q_R} (b|v|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} + c \left(\int_{Q_R} a^r dx \right)^{\frac{1}{rp}} \right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para a segunda parte da desigualdade (3.106), obtemos da desigualdade (3.99) que

$$\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv| dx \leq cR^{-n}C_R^{-1} = c\omega(R)\Lambda^{\frac{1}{p}},$$

e da definição de Λ , temos

$$\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv| dx \leq c\omega(R)M.$$

Deste modo, aplicando essas estimativas em (3.106), temos

$$\left(\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^p dx \right)^{1/p} \leq (cM)^\vartheta (c\omega(R)M)^{1-\vartheta} = c\omega(R)^{1-\vartheta} M,$$

de modo que, em conclusão

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^p dx \leq c\omega(R)^\kappa \left\{ \int_{Q_R} |Du|^p dx + \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\ \left. + c \left(\int_{Q_R} (b|v|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} + R^{-p+n\epsilon} \|a\|_s \right\}, \end{aligned}$$

com algum expoente $\kappa > 0$.

Finalmente, estimamos as integrais contendo a função b . Temos

$$\left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\int_{Q_R} (b|u - u_R|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} + c \left(\int_{Q_R} (b|u_R|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (3.108)$$

Agora, usando Hölder em ambos os membros abaixo, temos

$$|u_R|^\gamma \left(\int_{Q_R} b^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{Q_R} b^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \int_{Q_R} |u|^\gamma dx \leq cR^{-\mu} \int_{Q_R} |u|^\gamma dx \quad (3.109)$$

onde foi utilizado Hölder para estimar $|u_R|^\gamma$. Agora, estimando o primeiro termo de (3.108). Utilizando Hölder, com $\frac{r\gamma}{p^*}$, temos

$$\left(\int_{Q_R} (b|u - u_R|^\gamma)^r dx \right) \leq \left(\int_{Q_R} (|u - u_R|^{p^*}) dx \right)^{\frac{r\gamma}{p^*}} \left(\int_{Q_R} b^{\frac{rp^*}{p^*-r\gamma}} dx \right)^{1-\frac{r\gamma}{p^*}},$$

daí,

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_R} (b|u - u_R|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\int_{Q_R} (|u - u_R|^{p^*}) dx \right)^{\frac{\gamma}{p^*}} \left(\int_{Q_R} b^{\frac{rp^*}{p^*-r\gamma}} dx \right)^{\frac{1}{r}-\frac{\gamma}{p^*}} \\ &= \left(\int_{Q_R} (|u - u_R|^{p^*}) dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{Q_R} (|u - u_R|^{p^*}) dx \right)^{\frac{\gamma-p}{p^*}} \\ &\quad \times \left(\int_{Q_R} b^{\frac{rp^*}{p^*-r\gamma}} dx \right)^{\frac{1}{r}-\frac{\gamma}{p^*}} \\ &\leq c \int_{Q_R} |Du|^p dx. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Observe que devemos justificar a última desigualdade. O primeiro termo é justificado pela desigualdade de Sobolev-Poincaré A.6. Já o segundo e terceiro são limitados por constantes. Com efeito, para o último termo, o fato que $\sigma > \frac{p^*}{p^*-r\gamma}$ implica que $\frac{\sigma p^*}{p^*+\sigma\gamma} > 1$, o que nos permite tomar $r \leq \frac{\sigma p^*}{p^*+\sigma\gamma}$, e consequentemente, obtemos $\frac{rp^*}{p^*-r\gamma} < \sigma$, assim o último termo fica controlado por uma constante que depende de $\|b\|_{L^\sigma}$. Por fim, no segundo termo, usamos novamente (A.6), e usamos que $u \in W^{1,p}(Q_R)$.

Assim, por (3.108), (3.109) e (3.110) obtemos

$$\left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \int_{Q_R} (|Du|^p + R^{-\mu}|u|^\gamma) dx. \quad (3.111)$$

De maneira análoga

$$\left(\int_{Q_R} (b|v|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\int_{Q_R} (b|u - v|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} + c \left(\int_{Q_R} (b|u|^\gamma)^r dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

O último termo do lado direito já foi tratado; o primeiro pode ser estimado como acima por

$$c \int_{Q_R} (|Du|^p + R^{-\mu}|u|^\gamma) dx.$$

Em conclusão, retirando a integral média, obtemos

$$\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |Du - Dv|^p dx \leq cw(R)^\kappa \left\{ \int_{Q_R} (|Du|^p + R^{-\mu}|u|^\gamma) dx + \|a\|_s R^{n-p+n\epsilon} \right\}. \quad (3.112)$$

Com a ajuda da estimativa acima, podemos transferir a desigualdade (3.96) para o ω -mínimo u . Então, para $\varrho < \frac{R}{2}$, somando e subtraindo os termos adequados e usando desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varrho} (|Du|^p + \varrho^{-\mu}|u|^\gamma) dx &\leq c \int_{Q_\varrho} (|Dv|^p + \varrho^{-\mu}|v|^\gamma) dx + c \int_{Q_\varrho} (|Du - Dv|^p + \varrho^{-\mu}|u - v|^\gamma) dx \\ &\leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+n\epsilon} \left\{ \int_{Q_R} (|Dv|^p + R^{-\mu}|v|^\gamma) dx + \Theta(R) \right\} \\ &\quad + c \int_{Q_\varrho} (|Du - Dv|^p + \varrho^{-\mu}|u - v|^\gamma) dx \\ &\leq c \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+n\epsilon} \left\{ \int_{Q_R} (|Du|^p + R^{-\mu}|u|^\gamma) dx + \Theta(R) \right\} \\ &\quad + c \int_{Q_{\frac{R}{2}}} (|Du - Dv|^p + \varrho^{-\mu}|u - v|^\gamma) dx, \end{aligned}$$

onde

$$\Theta(R) = \|\alpha\|_s R^{n-p+n\epsilon} + (\|\alpha\|_s R^{n-p+n\epsilon})^{\frac{\gamma}{p}} R^{n\epsilon}.$$

Vamos estimar os termos individuais no lado direito, começando com Θ . Lembre-se que $\alpha(x) = a(x) + \Lambda$, daí

$$\|\alpha\|_s \leq \|a\|_s + R^{\frac{n}{s}} \Lambda.$$

e desta forma, multiplicando por $R^{n-p+n\epsilon}$, obtemos

$$\|\alpha\|_s R^{n-p+n\epsilon} \leq \|a\|_s R^{n-p+n\epsilon} + R^n \Lambda := M.$$

Assim, obtemos

$$\Theta(R) \leq (\|a\|_s R^{n-p+n\epsilon} + R^n \Lambda) + (\|a\|_s R^{n-p+n\epsilon} + R^n \Lambda)^{\frac{\gamma}{p}} R^{n\epsilon}.$$

Agora, lembrando que

$$\Lambda R^n = c \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx \leq c,$$

então, $M^{\frac{\gamma}{p}} R^{n\epsilon} = M(M^{\frac{\gamma}{p}-1} R^{n\epsilon}) \leq cM$ e daí obtemos

$$\begin{aligned}\Theta(R) &\leq c(\|a\|_s R^{n-p+n\epsilon} + \Lambda R^n) \\ &\leq c \left(\|a\|_s R^{n-p+n\epsilon} + \int_{Q_R} (|Du|^p + b|u|^\gamma + a) dx \right)\end{aligned}$$

Fazendo uma estimativa semelhante a (3.111), com $r = 1$, temos

$$\int_{Q_R} b|u|^\gamma dx \leq c \int_{Q_R} (|Du|^p + R^{-\mu}|u|^\gamma) dx, \quad (3.113)$$

e, portanto,

$$\Theta(R) \leq c \left(\int_{Q_R} (|Du|^p + R^{-\mu}|u|^\gamma) dx + \|a\|_s R^{n-p+n\epsilon} \right). \quad (3.114)$$

O termo $\int_{Q_R} |Du - Dv|^p dx$ já foi considerado em (3.112). O termo restante pode ser tratado da seguinte forma, usando Hölder na primeira desigualdade, Sobolev-Poincaré na segunda desigualdade e as estimativas (3.113) e (3.102) para a terceira desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{Q_{\frac{R}{2}}} |u - v|^\gamma dx &\leq cR^n \left(\int_{Q_R} |u - v|^{p^*} dx \right)^{\frac{\gamma}{p^*}} \\ &\leq cR^{n(1-\frac{\gamma}{p^*})} \left(\int_{Q_R} |Du - Dv|^p dx \right)^{\frac{\gamma}{p}} \\ &\leq cR^{\mu+n\epsilon} \int_{Q_R} (|Du|^p + R^{-\mu}|u|^\gamma) dx\end{aligned}$$

uma vez que $\frac{1}{\sigma} + \epsilon = 1 - \frac{\gamma}{p^*}$.

Juntando todas essas desigualdades, obtemos o seguinte:

Teorema 3.15 *Seja u um ω -mínimo do funcional $\mathcal{F}$. Existe $R_0 > 0$ tal que para todo cubo $Q_R \subset \subset \Omega$, com $R < R_0$,*

$$\begin{aligned}\int_{Q_\epsilon} (|Du|^p + \varrho^{-\mu}|u|^\gamma) dx &\leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+n\epsilon} + \omega(R)^\kappa + \left(\frac{R}{\varrho} \right)^\mu R^{n\epsilon} \right\} \\ &\quad \times \int_{Q_R} (|Du|^p + R^{-\mu}|u|^\gamma) dx + c\|a\|_s R^{n-p+n\epsilon}.\end{aligned} \quad (3.115)$$

A desigualdade (3.115) é a principal ferramenta na demonstração da continuidade de Hölder de u . Escrevendo, por simplicidade,

$$\varphi(\varrho) = \int_{Q_\varrho} (|Du|^p + \varrho^{-\mu}|u|^\gamma) dx,$$

e $4\delta = n\epsilon$, ela se torna

$$\varphi(\varrho) \leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+4\delta} + \omega(R)^\kappa + \left(\frac{R}{\varrho} \right)^\mu R^{4\delta} \right\} \varphi(R) + c\|a\|_s R^{n-p+4\delta}.$$

Seja τ tal que $2c\tau^{2\delta} = 1$, e seja R_0 tal que

$$\omega(R)^\kappa + \tau^{-\mu} R^{4\delta} \leq \frac{1}{2} \tau^{n-p+2\delta},$$

para todo $R < R_0$. Escolhendo $\varrho = \tau R$, a desigualdade anterior se torna

$$\varphi(\tau R) \leq \tau^{n-p+2\delta} \varphi(R) + c\|a\|_s R^{n-p+\delta}.$$

Uma vez que para todo $t \in (\tau^{k+1}R, \tau^k R)$ temos $\varphi(t) \leq \tau^{-\mu} \varphi(\tau^k R)$, podemos aplicar o Lema 3.3, do qual obtemos

$$\varphi(\varrho) \leq c \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+\delta} \varphi(R) + \|a\|_s \varrho^{n-p+\delta} \right\}. \quad (3.116)$$

Seja agora $\Sigma \subset\subset \Omega$ um conjunto aberto com fronteira suave, e seja $R_0 < \text{dist}(\Sigma, \partial\Omega)$. Se Q_ϱ é um cubo qualquer centrado em Σ e de lado $\varrho < R_0$, obtemos de (3.116) e de (A.6)

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p dx &\leq c\varrho^p \int_{Q_\varrho} |Du|^p dx \\ &\leq c\varrho^p \varphi(\varrho) \\ &\leq c\varrho^p \left\{ \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n-p+\delta} \varphi(R) + \|a\|_s \varrho^{n-p+\delta} \right\} \\ &\leq c\varrho^{n+\delta} (\|u\|_{1,p} + \|a\|_s), \end{aligned}$$

assim,

$$\varrho^{-(n+\delta)} \int_{Q_\varrho} |u - u_\varrho|^p dx < \infty.$$

Consequentemente, isso nos diz que $u \in \mathcal{L}^{p,n+\delta}(\Sigma)$, e portanto, pelo Teorema 1.9, u é Hölder-contínua em Σ . Provamos então o seguinte:

Teorema 3.16 *Seja*

$$\mathcal{F}(u, A) = \int_A F(x, u(x), Du(x)) dx$$

com a função $F(x, u, z)$ satisfazendo as condições (3.93). Todo ω -mínimo de $\mathcal{F}$ pertence a $C^{0,\delta}(\Omega)$ para algum $\delta > 0$.

Observação 3.11 *Com argumentos similares aos da seção anterior, podemos provar a continuidade de Hölder até a fronteira para ω -mínimos com valores de fronteira prescritos. Para mais detalhes ver [12] pg. 255.*

Apêndice A

Definições e Resultados Utilizados

Definição A.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é convexa se, para quaisquer $x, y \in \Omega$ e para todo $t \in [0, 1]$, vale a desigualdade:*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Definição A.2 *Uma função de Carathéodory é uma função $F(x, y) : \Omega \times \mathbb{R}^s \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

- (i) $F(\cdot, y)$ é mensurável para todo $y \in \mathbb{R}^s$,
- (ii) $F(x, \cdot)$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$.

Definição A.3 [Quase-convexa] *O funcional*

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx$$

é chamado de quase-convexo se para todo $(x_0, u_0, z_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ e para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tivermos

$$F(x_0, u_0, z_0) \leq \int_{\Omega} F(x_0, u_0, z_0 + D\varphi(x)) dx.$$

Definição A.4 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que a função $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ é (se-
quencialmente) semicontínua inferiormente, abreviando por LSC, se, para toda sequência v_k convergente para algum $v \in X$, tivermos*

$$\mathcal{F}(v) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(v_k).$$

Definição A.5 *Dados $a \in \mathbb{R}^n$, com $a \neq 0$, e $b \in \mathbb{R}$, um **hiperplano** Π em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma*

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = b\}.$$

Definição A.6 Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Um **hiperplano de suporte** a C é um hiperplano

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}, \quad a \neq 0,$$

tal que

$$\langle a, x \rangle \leq b \quad \text{para todo } x \in C,$$

e existe pelo menos um ponto $x_0 \in C$ satisfazendo

$$\langle a, x_0 \rangle = b.$$

Lema A.1 [Desigualdade de Young] Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Lema A.2 [Desigualdade de Young com ε] Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\varepsilon > 0$ qualquer. Então,

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q, \quad \forall a, b \geq 0,$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

Teorema A.1 Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, e seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então

(i) Se $p < n$, u pertence a L^{p^*} , $p^* = \frac{np}{n-p}$, e

$$\|u\|_{p^*} \leq c \|Du\|_p.$$

(ii) Se $p > n$, u pertence a $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, e

$$[u]_\alpha \leq c \|Du\|_p.$$

Além disso, se Ω for limitado, temos

$$\sup |u| \leq c (\text{diam}(\Omega))^\alpha \|Du\|_p.$$

Teorema A.2 Seja Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz-contínua, e seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então:

(i) Se $p < n$, u pertence a L^{p^*} , $p^* = \frac{np}{n-p}$, e temos

$$\|u\|_{L^{p^*}, \Omega} \leq c \|u\|_{1,p, \Omega}.$$

(ii) Se $p > n$, u pertence a $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, e

$$\|u\|_\alpha \leq c \|u\|_{1,p, \Omega}.$$

Teorema A.3 [Desigualdade de Poincaré] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo e limitado, com fronteira Lipschitz-contínua $\partial\Omega$. Existe uma constante $c(n, p, \Omega)$ tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^p dx \leq c \int_{\Omega} |Du|^p dx,$$

onde

$$u_{\Omega} := \oint_{\Omega} u dx =: \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$$

é a média de u em Ω .

Teorema A.4 [Desigualdade de Sobolev–Poincaré] Com as hipóteses do teorema anterior, se $p < n$, temos

$$\|u - u_{\Omega}\|_{p^*} \leq c(n, p, \Omega) \|Du\|_p.$$

Teorema A.5 Seja Ω um conjunto aberto conexo e limitado em $\mathbb{R}^n$, com fronteira Lipschitz-contínua. Para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p < n$, que assume o valor zero em um conjunto A de medida positiva, temos

$$\|u\|_{p^*, \Omega} \leq c \left(\frac{|\Omega|}{|A|} \right)^{\frac{1}{p^*}} \|Du\|_{p, \Omega},$$

onde c é o dobro da constante na desigualdade de Sobolev–Poincaré.

Teorema A.6 [Desigualdade de Sobolev–Poincaré para médias sobre cubos] Para toda função $u \in W^{1,p}(Q_R)$ vale que

$$\|u - u_R\|_{p^*, Q_R} \leq c(n, p) \|Du\|_{p, Q_R} \quad (\text{A.1})$$

e, portanto,

$$\int_{Q_R} |u - u_R|^p dx \leq c(n, p) R^p \int_{Q_R} |Du|^p dx, \quad (\text{A.2})$$

onde $u_R = u_{Q_R}$.

Além disso, se a função u é nula em um conjunto $A \subset Q_R$ de medida positiva, temos

$$\|u\|_{p^*, Q_R} \leq c(n, p) \left(\frac{|Q_R|}{|A|} \right)^{\frac{1}{p^*}} \|Du\|_{p, Q_R}, \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{Q_R} |u|^p dx \leq c(n, p) \left(\frac{|Q_R|}{|A|} \right)^{\frac{1}{p^*}} R^p \int_{Q_R} |Du|^p dx. \quad (\text{A.4})$$

Observação A.1 Podemos substituir o lado esquerdo de (A.1) e (A.2) respectivamente pelas quantidades:

$$\inf_{\xi} \|u - \xi\|_{p^*, Q_R}$$

e

$$\inf_{\xi} \int_{Q_R} |u - \xi|^p dx.$$

As desigualdades resultantes são equivalentes a (A.1) e (A.2), em virtude de (1.20).

Além disso, a média em Q_R pode ser substituída pela média em qualquer cubo $Q_{\alpha R}$, com $\alpha < 1$, uma vez que

$$\begin{aligned} \int_{Q_R} |u - u_{\alpha R}|^s dx &\leq c \left\{ \int_{Q_R} |u - u_R|^s dx + |Q_R| |u_R - u_{\alpha R}|^s \right\} \\ &\leq c \left\{ \int_{Q_R} |u - u_R|^s dx + \alpha^{-n} \int_{Q_{\alpha R}} |u - u_R|^s dx \right\} \\ &\leq c(1 + \alpha^{-n}) \int_{Q_R} |u - u_R|^s dx. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Proposição A.1 [Desigualdade de Interpolação] Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} \quad (\text{A.6})$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Teorema A.7 Seja Ω um conjunto aberto limitado, com fronteira $\partial\Omega$ conexa e Lipschitz-contínua. Existe uma constante $c(p, n, \Omega)$ tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} |u(x) - u_{\partial\Omega}|^p d\mathcal{H}_{n-1} \leq c \int_{\Omega} |Du|^p dx. \quad (\text{A.7})$$

Além disso, se Ω é o cubo Q_R de lado $2R$, temos

$$\int_{\partial Q_R} |u(x) - u_{\partial Q_R}|^p d\mathcal{H}_{n-1} \leq c(p, n) R^{p-1} \int_{Q_R} |Du|^p dx. \quad (3.43)$$

Definição A.7 Uma função $F(x, u, z)$ definida em $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ é convexa de posto um se para todo $(x_0, u_0, z_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ a função

$$g(\xi, \eta) = F(x_0, u_0, z_0 + \xi \otimes \eta)$$

é separadamente convexa em $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in \mathbb{R}^N$.

Lema A.3 Seja $F(z)$ uma função convexa de posto um, tal que

$$|F(z)| \leq c(\lambda + |z|)^p, \quad \lambda \geq 0.$$

com $p \geq 1$. Então,

$$|F(z) - F(w)| \leq c(\lambda + |z| + |w|)^{p-1} |z - w|.$$

Além disso, se F possui primeiras derivadas, temos

$$|F_z| \leq c(\lambda + |z|)^{p-1}.$$

Teorema A.8 [Princípio Variacional de Ekeland] *Seja (V, d) um espaço métrico completo, e seja $\mathcal{F} : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente (na topologia métrica), limitada inferiormente e assumindo um valor finito em algum ponto.*

Suponha que para algum $u \in V$ e algum $\epsilon > 0$ tenhamos

$$\mathcal{F}(u) \leq \inf_V \mathcal{F} + \epsilon.$$

Então, existe um ponto $v \in V$ tal que:

$$(i) \quad d(u, v) \leq 1;$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(u);$$

$$(iii) \quad \mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(w) + \epsilon d(v, w) \quad \forall w \in V.$$

Teorema A.9 [Desigualdade de Hadamard] *Seja $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$. Então,*

$$|\det(A)|^2 \leq \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |A_{ij}|^2,$$

sendo A_{ij} o elemento ij da matriz A . Segue disso que

$$|\det(A)| \leq C|A|^n,$$

para toda matriz $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$.

Observação A.2 *Provemos a continuidade da função $x \mapsto u_{x,R}$ que aparece na demonstração do Teorema (1.9). Queremos provar que, se $x_k \rightarrow x$, então $u_{x_k,R} \rightarrow u_{x,R}$. Escreva*

$$u_{x_k,R} - u_{x,R} = \frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} \int_{\Omega(x_k, R)} u(y) dy - \frac{1}{|\Omega(x, R)|} \int_{\Omega(x, R)} u(y) dy.$$

Somando e subtraindo o termo

$$\frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} \int_{\Omega(x, R)} u(y) dy,$$

obtemos

$$u_{x_k,R} - u_{x,R} = A_k + B_k,$$

onde

$$A_k = \frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} \left(\int_{\Omega(x_k, R)} u(y) dy - \int_{\Omega(x, R)} u(y) dy \right),$$

e

$$B_k = \left(\frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} - \frac{1}{|\Omega(x, R)|} \right) \int_{\Omega(x, R)} u(y) dy.$$

Vamos mostrar que ambos tendem a zero.

1. O termo A_k Como $Q(x_k, R) = x_k + Q_R$, fazemos a mudança de variável $y = x_k + z$. Então

$$\int_{\Omega(x_k, R)} u(y) dy = \int_{Q_R} u(x_k + z) dz,$$

entendendo $u = 0$ fora de Ω . Analogamente,

$$\int_{\Omega(x, R)} u(y) dy = \int_{Q_R} u(x + z) dz,$$

logo

$$A_k = \frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} \int_{Q_R} (u(x_k + z) - u(x + z)) dz.$$

Agora faça $h_k = x_k - x$, obtemos

$$A_k = \frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} \int_{Q_R} (u(x + z + h_k) - u(x + z)) dz.$$

Mudando novamente a variável $y = x + z$, obtemos

$$A_k = \frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} \int_{Q(x, R)} (u(y + h_k) - u(y)) dy.$$

Tomando módulo,

$$|A_k| \leq \frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} \int_{Q(x, R)} |u(y + h_k) - u(y)| dy.$$

Como Ω não tem cúspides externas, existe $c > 0$ tal que

$$|\Omega(x_k, R)| \geq cR^n,$$

desta forma,

$$|A_k| \leq \frac{1}{cR^n} \int_{Q(x, R)} |u(y + h_k) - u(y)| dy.$$

Agora usamos a continuidade das translações em L^1_{loc}

$$\int_{Q(x, R)} |u(y + h_k) - u(y)| dy \rightarrow 0,$$

pois $h_k \rightarrow 0$. Assim, $A_k \rightarrow 0$.

2. O termo B_k Temos

$$|B_k| = \left| \frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} - \frac{1}{|\Omega(x, R)|} \right| \left| \int_{\Omega(x, R)} u(y) dy \right|.$$

Precisamos mostrar que $|\Omega(x_k, R)| \rightarrow |\Omega(x, R)|$. Observe

$$|\Omega(x_k, R)| - |\Omega(x, R)| = \int_{\Omega(x_k, R)} 1 dy - \int_{\Omega(x, R)} 1 dy.$$

Como $Q(x_k, R) = Q(x, R) + h_k$, temos

$$|\Omega(x_k, R)| - |\Omega(x, R)| = \int_{Q(x, R)} (\chi_\Omega(y + h_k) - \chi_\Omega(y)) dy.$$

Tomando módulo,

$$||\Omega(x_k, R)| - |\Omega(x, R)|| \leq \int_{Q(x, R)} |\chi_\Omega(y + h_k) - \chi_\Omega(y)| dy.$$

Agora usamos novamente continuidade por translação em L^1 , mas para a função $\chi_\Omega \in L^1_{loc}$:

$$\int_{Q(x, R)} |\chi_\Omega(y + h_k) - \chi_\Omega(y)| dy \rightarrow 0.$$

Desta maneira,

$$|\Omega(x_k, R)| \rightarrow |\Omega(x, R)|.$$

Portanto,

$$\frac{1}{|\Omega(x_k, R)|} \rightarrow \frac{1}{|\Omega(x, R)|},$$

e daí,

$$B_k \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$u_{x_k, R} - u_{x, R} = A_k + B_k \rightarrow 0.$$

e dessa forma, $x \mapsto u_{x, R}$ é contínua.

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, T. M., AND ABLOW, C. *Mathematical analysis*. American Institute of Physics, 1958. [88](#), [90](#)
- [2] BENEDETTO, D. $C^{1,\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Anal* 115, 7 (1989), 173–182. [4](#)
- [3] CACCIOPPOLI, R. Limitazioni integrali per le soluzioni di un’equazione lineare ellittica a derivate parziali. *Giorn. Mat. Battaglini (4)* 4, 80 (1951), 186–212. [4](#)
- [4] CAMPANATO, S. Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche* 17, 1-2 (1963), 175–188. [2](#)
- [5] CAMPANATO, S. Proprietà di una famiglia di spazi funzionali. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche* 18, 1 (1964), 137–160. [2](#)
- [6] DE GIORGI, M. D. E. *Sulla differenziabilità e l’analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, vol. 167. 1957. [1](#), [2](#), [4](#), [98](#)
- [7] DI BENEDETTO, E., AND TRUDINGER, N. S. Harnack inequalities for quasi-minima of variational integrals. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* (1984), vol. 1, Elsevier, pp. 295–308. [2](#), [4](#), [130](#)
- [8] FREHSE, J. A discontinuous solution of a mildly nonlinear elliptic system. *Mathematische Zeitschrift* 134, 3 (1973), 229–230. [65](#)

- [9] FREHSE, J. A note on the hölder continuity of solutions of variational problems. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (1975), vol. 43, Springer, pp. 59–63. [64](#)
- [10] GEHRING, F. W. *The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*. 1973. [87](#)
- [11] GIAQUINTA, M., AND GIUSTI, E. On the regularity of the minima of variational integrals. *Acta Math* 148 (1982), 31–46. [2](#), [69](#), [98](#)
- [12] GIUSTI, E. *Direct methods in the calculus of variations*. World Scientific, 2003. [3](#), [11](#), [54](#), [65](#), [66](#), [130](#), [149](#)
- [13] JOHN, F., AND NIRENBERG, L. On functions of bounded mean oscillation. *Communications on pure and applied Mathematics* 14, 3 (1961), 415–426. [31](#), [36](#)
- [14] KRYLOV, N. V., AND SAFONOV, M. V. A certain property of solutions of parabolic equations with measurable coefficients. *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 16, 1 (1981), 151–164. [130](#)
- [15] LADYZHENSKAYA, O. A., AND URAL'TSEVA, N. N. Linear and quasilinear elliptic equations. *Academic Press* (1968). [2](#)
- [16] LADYZHENSKAYA, O. A., AND URAL'TSEVA, N. N. Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 23, 4 (1970), 677–703. [98](#)
- [17] MIN-CHUN, H. Existence and partial regularity in the calculus of variations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 149, 1 (1987), 311–328. [57](#)
- [18] NASH, J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *American Journal of Mathematics* 80, 4 (1958), 931–954. [98](#)
- [19] ROYDEN, H. *Real Analysis* Mc. Millan, Toronto, Canada, 1968. [6](#), [7](#), [8](#)
- [20] SAKS, S. *Theory of the Integral*. Dover, New York, 1964. [6](#), [7](#)