

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Rubens Barreto Leal [†]

Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada Imersos em Produtos Warped com Densidade: Não Existência e Redução de Codimensão

Campina Grande - PB

2026

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Rubens Barreto Leal

Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada Imersos em Produtos Warped com Densidade: Não Existência e Redução de Codimensão

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa de Geometria Diferencial e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Campina Grande - PB

2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

L435s Leal, Rubens Barreto.

Sólitons do fluxo da curvatura média ponderada imersos em produtos warped com densidade: não existência e redução de codimensão / Rubens Barreto Leal. – 2026.

77 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antonio Lázaro Velásquez".

Referências.

1. Matemática. 2. Sólitons dos Fluxo da Curvatura Média Ponderada. 3. Produtos Warped com Densidade. 4. Tensor de Bark-Émery-Ricci. 5. Princípio do Máximo de Omori-Yau. 6. Redução de Codimensão. I. Velásquez, Marcos Antonio Lázaro. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada Imersos em Produtos Warped com Densidade: Não Existência e Redução de Codimensão

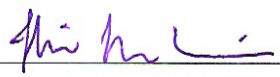
por

Rubens Barreto Leal

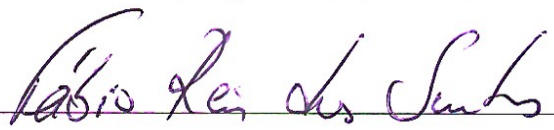
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:



Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG



Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos - UFPE



Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Julho - 2026

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar a minha imensa gratidão à minha família por tudo, especialmente por terem me proporcionado, com imensurável esforço, todo o suporte necessário para que eu pudesse chegar até aqui.

Meus sinceros agradecimentos ao professor Marco Antonio Lázaro Velásquez não somente pela orientação deste trabalho, mas também pelo constante incentivo, dedicação, paciência e apoio. Toda a sua ajuda foi e continua sendo de imensa importância para me manter motivado em meus estudos. Muito obrigado! Agradeço também ao professor Jefferson Abrantes dos Santos, que me orientou durante a primeira metade do mestrado e em grande parte da minha graduação. Sua orientação teve um papel fundamental em minha formação, e sou muito grato por todo o apoio e ensinamentos que me proporcionou.

Gostaria também de agradecer a todos os professores da UAMat que participaram, direta ou indiretamente, da minha formação. Em especial, aos professores Henrique Fernandes, Weiller Felipe, Antônio Brandão, José Lucas Galdino, Angelo Roncalli e Alânnio Barbosa. Agradeço por todos os ensinamentos e pelo apoio ao longo dessa trajetória.

Muito obrigado também ao professor Fábio Reis dos Santos por participar da banca examinadora desta dissertação.

Direciono também meus agradecimentos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por todo o importantíssimo suporte financeiro.

Agradeço a todos os funcionários da UAMat por toda a gentileza e acolhimento a mim demonstrados.

Por último, mas não menos importante, minha sincera gratidão a todos os amigos e colegas mais próximos, tanto da UAMat como de outros cursos, em especial da UAF. Muito obrigado pelo incentivo, acolhimento e momentos de descontração que também foram fundamentais durante toda a minha trajetória acadêmica.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a geometria de sólitons completos do fluxo da curvatura média ponderada imersos em produtos warped do tipo $I \times_\rho M^n$, munidos de uma função densidade φ que não depende do parâmetro real $t \in I \subset \mathbb{R}$. Sob uma restrição de curvatura adequada envolvendo a curvatura seccional da fibra M^n e a função warped $\rho : I \to \mathbb{R}$, aplicamos algumas ferramentas analíticas, tais como versões do princípio do máximo de Omori-Yau e técnicas envolvendo o tensor de Bakry-Émery-Ricci, para obter resultados de não existência e de redução de codimensão desses sólitons.

Palavras-chave: Produtos warped com densidade; sólitons do fluxo da curvatura média ponderada; tensor de Bakry-Émery-Ricci; resultados de não existência; redução de codimensão; princípio do máximo de Omori-Yau.

Abstract

In this work, we investigate the geometry of complete solitons of the weighted mean curvature flow immersed in warped products of the type $I \times_\rho M^n$ endowed with a density function φ that does not depend on the real parameter $t \in I \subset \mathbb{R}$. Under a suitable curvature constraint involving the sectional curvature of the fiber M^n and the warping function $\rho : I \to \mathbb{R}$, we apply some analytical tools, such as mild versions of the Omori-Yau's maximum principle and some techniques involving the Bakry-Émery-Ricci tensor, to derive nonexistence and codimension reduction results concerning these solitons.

Keywords: Warped products with density; weighted mean curvature flow solitons; Bakry-Émery-Ricci tensor; nonexistence results; codimension reduction; Omori-Yau's maximum principle.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares Seletos sobre Geometria Riemanniana **5**

1.1 Variedades Riemannianas 5

1.1.1 Métrica Riemanniana 5

1.1.2 Conexões Riemannianas 7

1.1.3 Curvaturas 8

1.1.4 Geodésicas e Variedades Completas 10

1.2 Operadores Diferenciais 12

1.3 Teoria Elementar de Imersões Isométricas 14

2 Produtos Warped com Densidade da Forma $I \times_\rho M^n_\varphi$ **19**

2.1 Produtos Warped Riemannianos 19

2.2 Produtos Warped da forma $I \times_\rho M^n$ 25

2.3 Subvariedades Imersas em $I \times_\rho M^n$ 29

2.4 Produtos Warped da Forma $I \times_\rho M^n_\varphi$ 34

2.5 Subvariedades Imersas em $I \times_\rho M^n_\varphi$ 37

3 Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada em Produtos Warped com Densidade **45**

3.1 Sólitons do Fluxo da Curvatura Média 45

3.2 Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada 46

4 Não Existência e Redução de Codimensão de Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada em Produtos Warped com Densidade **49**

4.1 Resultados utilizando uma Primeira Versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau 49
4.2 Resultados utilizando uma Segunda Versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau 58
4.3 Resultados utilizando Convergência para Zero no Infinito 64
4.4 Resultados utilizando Condições de Integrabilidade 66

Referências Bibliográficas **72**

Introdução

Este trabalho foi desenvolvido com base no artigo publicado por de Lima, Gomes e Velásquez [23], que apresenta, como principais objetos de estudo, os sólitons do fluxo da curvatura média ponderada imersos em produtos warped com densidade. Nosso objetivo é apresentar os principais resultados obtidos pelos autores, enfatizando as técnicas geométricas e analíticas empregadas em suas demonstrações.

Os chamados fluxos geométricos se tornaram uma ferramenta fundamental no contexto moderno da geometria diferencial, oferecendo uma abordagem poderosa no entendimento da evolução geométrica de subvariedades em variedades Riemannianas. Nesse cenário, o fluxo da curvatura média desempenha um papel central na compreensão das propriedades geométricas intrínsecas das subvariedades. Ainda sob essa perspectiva, destacam-se os sólitons do fluxo da curvatura média, que são soluções especiais que evoluem sem apresentar mudança de forma, a menos de isometrias. Essas soluções têm despertado atenção significativa devido à sua conexão com formação de singularidades, estabilidade de soluções e variedades de Einstein. Estes sólitons são fundamentais para o entendimento da geometria de espaços que evoluem sob fluxos de curvatura, particularmente em geometria Riemanniana.

Destacamos que o fluxo da curvatura média relacionado a uma subvariedade m-dimensional $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ em uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional $\overline{M}^{n+1}$ é definido como sendo uma família, a um parâmetro, constituída de imersões diferenciáveis $\Psi_t = \Psi(t, \cdot) : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ cujas imagens correspondentes $\Sigma_t^m = \Psi_t(\Sigma^m)$ satisfazem a seguinte equação de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \vec{H} \\ \Psi(0, p) = \psi(p) \end{cases} \tag{1}$$

em algum intervalo de tempo, onde $\vec{H}$ representa o vetor curvatura média não normalizado da subvariedade Σ_t^m imersa em $\overline{M}^{n+1}$.

O estudo dos fluxos da curvatura média sob a perspectiva das equações diferenciais parciais começou com Huisken [32] ao abordar os fluxos de hipersuperfícies convexas e, desde então, motivou vários trabalhos que investigam soluções especiais da equação (1), que são os sólitons do fluxo da curvatura média. Nesse contexto, quando o ambiente é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, a imersão $\psi : \Sigma^m \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ é denominada de *self-shrinker* se satisfaz a equação

$$\vec{H} = -\psi^{\perp},$$

onde $\psi^{\perp}$ denota a parte normal de ψ. Essa classe de imersões desempenha um papel importante no estudo do fluxo da curvatura média, pois auxiliam na descrição de singularidades e, como foi apontado por Colding e Minicozzi [19], as self-shrinkers são hipersuperfícies críticas para o funcional entropia. Essa linha de pesquisa tem se mostrado cada vez mais ativa após a publicação de Colding e Minicozzi [19], que inspirou uma quantidade impressionante de trabalhos relacionados à problemas de existência e classificação, resultados de rigidez, propriedades espectrais e de estabilidade. Podemos citar, por exemplo, as referências [12, 13, 16–18, 25, 26, 40].

Em [4], Alías, de Lira e Rigoli estenderam estes estudos ao introduzirem a definição geral de fluxo da curvatura média auto-similar em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ munida de um campo de vetores K, assim como estabeleceram a noção de sóliton do fluxo da curvatura média correspondente. Em particular, quando $\overline{M}^{n+1}$ é um produto warped da forma $I \times_\rho M^n$ e $K = \rho(t)\partial_t$, eles aplicaram princípios do máximo para garantir que um sóliton completo n-dimensional do fluxo da curvatura média é um slice $\{t\} \times M^n$ de $\overline{M}^{n+1}$, para algum $t \in I \subset \mathbb{R}$. Enquanto isso, Colombo, Mari e Rigoli [20] também estudaram algumas propriedades dos sólitons do fluxo da curvatura média em variedades Riemannianas mais gerais e em produtos warped, com ênfase em espaços de curvatura constante e de Schwarzschild. Eles se concentraram em resultados de decomposição e rigidez considerando várias condições geométricas diferentes. Mais recentemente, de Lima, Santos e Velásquez [24] estudaram sólitons m-dimensionais do fluxo da curvatura média imersos em $I \times_\rho M^n$, com $m \leq n$, e aplicaram princípios do máximo apropriados para garantir que tais sólitons são slices do espaço ambiente, assim como desenvolveram resultados de não existência desses sólitons.

Por outro lado, vale também destacar as chamadas variedades com densidade, as quais possuem importância notável no escopo da Análise Geométrica, aparecendo, por exemplo, no contexto dos fluxos das curvaturas média e de Ricci. Sabe-se que, dada uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ e uma função diferenciável $\varphi : \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}$, uma variedade com densidade $\overline{M}^{n+1}_{\varphi}$ associada a $\overline{M}^{n+1}$ e φ é a terna $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g}, e^{-\varphi} d\overline{M})$, onde $d\overline{M}$ denota o elemento de volume padrão de $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$. Dizemos que φ é a função densidade de $\overline{M}^{n+1}_{\varphi}$. Para uma discussão mais completa sobre variedades com densidade, indicamos, por exemplo, os artigos [28, 31, 37, 43]. Um modelo padrão conhecido de variedade com densidade é o denominado espaço Gaussiano $\mathbb{G}^{n+1}$, que corresponde ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido da medida de probabilidade Gaussiana

$$e^{-\varphi} dx^2 = (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx^2. \tag{2}$$

Em [9], Borisenko e Miquel estudaram o fluxo de uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{G}^{n+1}$, guiado pelo seu vetor curvatura média ponderado. Mais precisamente, eles consideraram o fluxo da curvatura média ponderada $\Psi : [0, T) \times \Sigma^n \to \mathbb{G}^{n+1}$ de uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{G}^{n+1}$, satisfazendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \vec{H}_{\varphi} \\ \Psi(0, p) = \psi(p) \end{cases} \tag{3}$$

onde $\vec{H}_{\varphi}$ é o vetor curvatura média ponderado não normalizado, que é dado por

$$\vec{H}_{\varphi} = \vec{H} + (\overline{\nabla}\varphi)^{\perp}.$$

Nessa configuração, eles forneceram um estudo detalhado da evolução de hipersuperfícies convexas sob a presença do fluxo (3).

Inspirados pelos trabalhos mencionados até aqui, de Lima, Gomes e Velásquez [23] investigaram a geometria de sólitons completos do fluxo da curvatura média ponderada imersos em produtos warped do tipo $I \times_{\rho} M^n$ munidos de uma função densidade φ que não depende do parâmetro $t \in I \subset \mathbb{R}$. Considerando uma restrição de curvatura apropriada, que envolve a curvatura seccional da fibra M^n e a função warped $\rho : I \to \mathbb{R}$, foram aplicadas ferramentas analíticas, tais como versões do princípio do máximo de Omori-Yau e algumas técnicas que utilizam o tensor de Bakry-Émery-Ricci, com o objetivo de obter resultados de não existência e redução de codimensão com relação aos sólitons do fluxo da curvatura média ponderada.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1, apresentamos as definições e resultados clássicos em geometria Riemanniana que são necessários para a compreensão dos capítulos posteriores. No Capítulo 2, abordamos os principais espaços ambientes deste trabalho, que são os chamados produtos warped. Buscamos dividir a exposição deste capítulo em produtos warped Riemannianos clássicos (veja Seções 2.1, 2.2 e 2.3) e produtos warped com densidade (Seções 2.4 e 2.5), focando, particularmente, em produtos da forma $I \times_\rho M^n_\varphi$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, M^n é uma variedade Riemanniana e φ é uma função densidade diferenciável. No Capítulo 3, faremos uma breve exposição sobre fluxos da curvatura média e seus sólitons correspondentes. Aqui também consideramos os contextos clássico (Seção 3.1) e com densidade (Seção 3.2). E por fim, no Capítulo 4, vamos estabelecer resultados de existência e redução de codimensão de sólitons do fluxo da curvatura média ponderada imersos em produtos warped com densidade. Para obter tais resultados, são aplicadas duas versões do princípio do máximo de Omori-Yau (ver Seções 4.1 e 4.2), um princípio do máximo que envolve a noção de convergência para zero no infinito (Seção 4.3) e condições apropriadas de integrabilidade (Seção 4.4).

Capítulo 1

Preliminares Seletos sobre Geometria Riemanniana

Este capítulo destina-se a estabelecer brevemente as noções mais básicas sobre Geometria Riemanniana que serão utilizadas no decorrer de todo o trabalho. Os resultados que aparecem neste capítulo serão apresentados sem demonstrações e têm como base principal as referências [10], [27], [21] e [39], as quais indicamos fortemente para um maior aprofundamento. Ao longo de todo o texto, M^n representará uma variedade diferenciável de dimensão n.

1.1 Variedades Riemannianas

Começaremos apresentando as noções fundamentais de métrica e variedade Riemannianas, seguidas de um importante exemplo e a definição de isometria.

1.1.1 Métrica Riemanniana

Definição 1.1. *Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável M^n é uma correspondência que associa a cada ponto p de M^n uma forma bilinear simétrica, positiva definida, denotada por $\langle\ ,\ \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente com p.*

Dizer que a métrica Riemanniana varia diferenciavelmente com $p \in M^n$ significa dizer que se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ é uma parametrização local em torno de p e

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}$ é uma base coordenada de T_pM associada a $\mathbf{x}$, então as aplicações

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right\rangle_p$$

são diferenciáveis.

Ao longo do texto, quando não houver possibilidade de confusão, vamos omitir o índice p e denotar a métrica $\langle\ ,\ \rangle_p$ simplesmente por $\langle\ ,\ \rangle$.

Uma variedade diferenciável M^n munida de uma métrica Riemanniana é chamada de ***variedade Riemanniana***. Frequentemente utilizamos o par $(M^n, \langle\ ,\ \rangle)$ ou (M^n, g) para nos referirmos a uma variedade Riemanniana.

Vamos agora apresentar um exemplo bastante importante de métrica Riemanniana que serve de base para os espaços ambientes que serão apresentados nos próximos capítulos.

Exemplo 1.2. (*A métrica produto*). Sejam $(M^n, \langle\ ,\ \rangle_M)$ e $(N^m, \langle\ ,\ \rangle_N)$ duas variedades Riemannianas e considere a variedade produto $M^n \times N^m$. Sejam $\pi_1 : M^n \times N^m \to M^n$ e $\pi_2 : M^n \times N^m \to N^m$ as projeções canônicas. Vamos munir a variedade produto da seguinte métrica:

$$\langle\ ,\ \rangle = \pi_1^*(\langle\ ,\ \rangle_M) + \pi_2^*(\langle\ ,\ \rangle_N). \tag{1.1}$$

Logo, dados $(p, q) \in M \times N$ e $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$, temos, no ponto (p, q),

$$\langle u, v\rangle = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_M + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_N.$$

Com a métrica (1.1), $M^n \times N^m$ é uma variedade Riemanniana. Pode-se também verificar que as projeções π_1 e π_2 são funções diferenciáveis, assim como, para cada $(p, q) \in M \times N$, os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}(M \times \{q\}) \quad e \quad T_{(p,q)}(\{p\} \times N)$$

são subespaços de $T_{(p,q)}(M \times N)$ e vale a soma direta

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_{(p,q)}(M \times \{q\}) \oplus T_{(p,q)}(\{p\} \times N). \tag{1.2}$$

Para mais detalhes, recomendamos [39, Lema 1.43].

Outra noção bastante importante neste contexto de métricas Riemannianas é o de isometria.

Definição 1.3. *Sejam M^n e N^m variedades Riemannianas. Dizemos que um difeomorfismo $f : M^n \to N^m$ é chamado de* ***isometria*** *se*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M$ e para todos $u, v \in T_pM$, onde $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é a aplicação diferencial de f no ponto p. Se existe uma isometria entre M e N, dizemos que estas variedades são isométricas.

1.1.2 Conexões Riemannianas

Vamos denotar por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M^n, isto é, o conjunto das seções diferenciáveis do *fibrado tangente* $TM = \bigcup_{p\in M^n} T_pM$ (ver [27, Exemplo 4.1 do Capítulo 0]). Denotamos também por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções reais diferenciáveis definidas em M^n.

Definição 1.4. *Uma* ***conexão afim*** ∇ *em uma variedade diferenciável* M^n *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, *que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$.

Vamos agora enunciar, sem demonstração, o teorema fundamental das conexões em uma variedade Riemanniana. Devido à sua importância, recomendamos consultar os detalhes em [27, Teorema 3.6 do Capítulo II].

Teorema 1.5 (Levi-Civita). *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana. Então, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M^n *satisfazendo as seguintes condições:*

(a) *A conexão* ∇ *é simétrica, ou seja,*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad \text{para todos} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

(b) *A conexão* ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana, ou seja,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad \text{para todos} \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

A conexão dada pelo teorema de Levi-Civita é denominada ***conexão de Levi-Civita***, ou simplesmente ***conexão Riemanniana*** de M^n.

Neste contexto, vale destacar a chamada ***fórmula de Koszul***, que caracteriza a conexão Riemanniana ∇ e que utilizaremos mais adiante:

$$2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = X\langle Y, V\rangle + Y\langle V, X\rangle - V\langle X, Y\rangle - \langle X, [Y, V]\rangle + \langle Y, [V, X]\rangle + \langle V, [X, Y]\rangle, \quad (1.3)$$

onde $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$.

1.1.3 Curvaturas

Vamos agora relembrar os principais conceitos sobre curvaturas em uma variedade Riemanniana. Começaremos definindo o chamado tensor curvatura, o qual aparecerá em vários momentos durante o texto.

Definição 1.6. *Seja ∇ a conexão Riemanniana de M^n. A* ***curvatura*** *ou* ***tensor curvatura*** *R de uma variedade Riemanniana M^n é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \;\; Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Vale destacar, por meio da próxima proposição, que o tensor curvatura R cumpre determinadas propriedades que o caracterizam, de fato, como um tensor. Neste trabalho não faremos uma discussão detalhada sobre tensores e suas propriedades de uma maneira geral. Para tal discussão, sugerimos a leitura de [39, Capítulo 2].

Proposição 1.7. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M^n cumpre as seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z,$$

onde $f \in C^\infty(M)$ e $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Para consultar os detalhes de uma demonstração da Proposição 1.7, indicamos a referência [27, Proposição 2.2 do Capítulo IV].

A partir da noção do tensor curvatura R, podemos definir a chamada curvatura seccional. No que se segue, a notação $|x \wedge y|$ representa a área do espaço vetorial 2-dimensional σ determinado por um par de vetores linearmente independentes.

Definição 1.8. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $p \in M^n$ e σ um subespaço bidimensional de T_pM. A* ***curvatura seccional*** *de M^n associada a σ é definida por*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2} = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2},$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ.

É comum denotar a curvatura seccional por $K(\sigma)$. Vale ressaltar que o conhecimento do número $K(\sigma)$ para todo σ determina completamente a curvatura R. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [27, Lema 3.3 do Capítulo IV].

Antes de falarmos sobre a chamada curvatura de Ricci, vamos definir a noção de referencial ortonormal local, que será utilizada em vários momentos durante o texto.

Definição 1.9. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $p \in M^n$ e $U \subset M^n$ uma vizinhança de p em M^n tal que é possível definir campos de vetores $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(M)$. Dizemos que o conjunto $\{E_1, ..., E_n\}$ é um* ***referencial ortonormal local*** *quando, para cada $q \in U$, os vetores $E_i(q)$, $i = 1, ...n$, formam uma base ortonormal de T_qM.*

Em geral, não há como garantir a existência do referencial da Definição 1.9 em toda a M^n. Porém, pode-se mostrar que, localmente, sempre é possível garantir a existência de tal referencial. Para mais detalhes, consultar [39, pág. 85].

Vamos agora utilizar a Definição 1.9 para apresentar a curvatura de Ricci, ou também, como chamaremos ao longo do texto, tensor de Ricci.

Definição 1.10. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal local em $\mathfrak{X}(M)$. Definimos a* ***curvatura de Ricci*** *ou* ***tensor de Ricci*** *como sendo a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to C^\infty(M) \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle \end{aligned}$$

Assim como ocorre com a curvatura R, temos que a curvatura de Ricci é também um tensor. Veremos, ao longo deste trabalho, que impondo determinadas condições sobre as curvaturas seccional e de Ricci, vamos obter lemas auxiliares e resultados geométricos importantes para os nossos objetivos (vide, por exemplo, o Lema 2.11).

1.1.4 Geodésicas e Variedades Completas

Antes de apresentar o conteúdo dessa sessão, vamos estabelecer a noção de derivada covariante, com base em [10, pág. 10]. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e considere uma curva diferenciável $c : I \to M^n$ em uma variedade Riemanniana M^n. Para $t_o \in I$ seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma extensão de $c'(t_0)$. Logo, para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(M)$, é possível mostrar que o vetor $(\nabla_X Y)_{t_0}$ só depende de $c'(t_0)$ e da restrição de Y a $c(I)$. Obtemos assim um campo ao longo de c, denotado por $\frac{DY}{dt}$ e denominado de ***derivada covariante*** de Y ao longo de c.

Diminuindo I, se necessário, pode-se mostrar que o campo $c'(t)$ pode ser estendido a um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Neste caso, denotamos $\frac{DY}{dt}$ por $\frac{Dc'}{dt}$.

Dessa forma, podemos agora apresentar a definição de geodésica. No que se segue, M^n é uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana ∇.

Definição 1.11. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M^n$ é uma **geodésica** em $t_0 \in I$ se $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ no ponto t_0. Se γ é uma geodésica em t, para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.*

Como consequência de Definição 1.11, vale mencionar que se $\gamma : I \to M^n$ é uma geodésica, o comprimento do vetor tangente γ' é constante. Consequentemente, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco.

As geodésicas têm a propriedade de serem curvas que, ao menos localmente, minimizam distâncias entre dois pontos em uma variedade Riemanniana. De um modo geral, esta propriedade não pode ser generalizada globalmente em uma variedade, ao menos que esta variedade cumpra uma condição especial que veremos mais adiante.

De posse da definição do que é uma geodésica, vamos agora apresentar o conceito de aplicação exponencial em uma variedade Riemanniana. No que se segue, vamos denotar por γ_v uma geodésica $\gamma : [0,1] \to M^n$ partindo de $p \in M^n$, ou seja, $\gamma(0) = p$, com $\gamma'(0) = v$, onde $v \in T_pM$.

Definição 1.12. *Sejam $U \subset T_pM$ e $v \in U$ tal que a geodésica γ_v está bem definida em $[0,1]$. Definimos a **aplicação exponencial** no ponto $p \in M^n$ por*

$$\begin{aligned} \exp_p : U &\to M^n \\ v &\mapsto \exp_p(v) = \gamma_v(1). \end{aligned}$$

Geometricamente, $\exp_p(v)$ é ponto de M^n obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de p, sobre a geodésica que passa por p com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Vamos agora apresentar a noção de variedade geodesicamente completa.

Definição 1.13. *Uma variedade Riemanniana M^n é **geodesicamente completa** se para todo $p \in M^n$, a aplicação exponencial $\exp_p$ está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

A Definição 1.13 abre caminho para estendermos a propriedade minimizante das geodésicas globalmente em uma variedade Riemanniana M^n. Para isso, vamos antes definir a noção de distância Riemanniana.

Definição 1.14. *Sejam dois pontos $p, q \in M^n$. A **distância Riemanniana** $d(p,q)$ é definida como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes que ligam p a q.*

É possível verificar que, munida da distância Riemanniana, M^n é um espaço métrico. Vale mencionar também que, fixado $p_0 \in M^n$, a função

$$\begin{aligned} f : M^n &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto f(p) = d(p, p_0) \end{aligned}$$

é contínua.

Então, podemos enunciar o principal teorema relacionado ao contexto de variedades geodesicamente completas, que é o Teorema de Hopf-Rinow. Para mais detalhes de uma demonstração deste teorema, sugerimos [27, Teorema 2.8 do Capítulo VII].

Teorema 1.15 (Hopf-Rinow). *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $p \in M^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\exp_p$ *está definida em todo o T_pM.*

(b) *Os limitados e fechados de M^n são compactos.*

(c) *M^n é completa como espaço métrico.*

(d) *M^n é geodesicamente completa.*

(e) *Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M^n$, $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = M^n$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \to \infty$.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(f) *Para todo $q \in M^n$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $\ell(\gamma) = d(p,q)$, onde $\ell(\gamma)$ é o comprimento de γ.*

Vale enunciar como principal consequência do Teorema 1.15 o seguinte corolário.

Corolário 1.16. *Se M^n é compacta, então M^n é completa.*

Dessa forma, temos a equivalência entre o conceito de variedade geodesicamente completa com o de variedade completa como espaço métrico. Estes conceitos serão de suma importância para estabelecermos as condições de integrabilidade do capítulo 5.

1.2 Operadores Diferenciais

Vamos apresentar os principais operadores diferenciais que utilizaremos ao longo deste trabalho, juntamente com suas principais propriedades. Esta apresentação baseia-se em [10, Capítulo 2]. Durante toda esta seção, M^n representa uma variedade Riemanniana de dimensão n com conexão Riemanniana ∇. Começaremos apresentando a definição de gradiente de uma função.

Definição 1.17. *Seja $f \in C^\infty(M)$. Definimos o* ***gradiente*** *de f, denotado por ∇f, como sendo o campo vetorial em M^n tal que*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Apresentamos também algumas propriedades operatórias do gradiente que serão úteis posteriormente.

Proposição 1.18. *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$. Então,*

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Outro operador diferencial que será parte fundamental do nosso texto é o divergente de um campo vetorial diferenciável.

Definição 1.19. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos o* ***divergente*** *do campo X como a aplicação diferenciável* $\mathrm{div}X : M^n \to \mathbb{R}$, *dada, para $p \in M^n$, por*

$$(\mathrm{div}X)(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

Considerando um referencial ortonormal local $\{E_1, ..., E_n\}$ em $\mathfrak{X}(M)$, segue diretamente da Definição 1.19 que o divergente de X pode ser escrito da forma

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle. \tag{1.4}$$

Seguem algumas propriedades operatórias do divergente que serão de grande utilidade.

Proposição 1.20. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Então,*

(i) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$.

(ii) $\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Ainda no contexto do operador divergente, vamos enunciar o Teorema da Divergência, o qual será utilizado posteriormente no capítulo 6, quando estivermos destacando os resultados associados às condições apropriadas de integrabilidade. Para mais detalhes sobre este Teorema, indicamos [33, Teorema 16.32].

Teorema 1.21 (da Divergência). *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta e orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se M^n tem bordo ∂M munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão $\iota : \partial M \to M^n$, e ν denota o campo de vetores normal unitário exterior a M^n ao longo de ∂M, então*

$$\int_{M^n} (\mathrm{div}X) dM^n = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\sigma,$$

onde $d\sigma$ é o elemento de integração ao longo de ∂M. Caso $\partial M = \emptyset$, interpretamos $\int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\sigma$ como sendo igual a 0.

Vamos agora apresentar o operador Laplaciano de uma função.

Definição 1.22. *Seja $f \in C^\infty(M)$. Definimos o **Laplaciano** de f, denotado por Δf, como sendo a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Podemos também destacar algumas propriedades operatórias do Laplaciano, que podem ser obtidas diretamente da Definição 1.22.

Proposição 1.23. *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$. Então,*

(i) $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

(ii) $\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2$.

Finalizamos esta seção com o operador Hessiano de uma função.

Definição 1.24. *Seja $f \in C^\infty(M)$. O **Hessiano** de f é o campo de operadores lineares $\mathrm{Hess} f : T_pM \to T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por*

$$(\mathrm{Hess} f)(v) = \nabla_u \nabla f.$$

A partir da Definição 1.24, pode-se mostrar que o operador linear $(\mathrm{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ é auto-adjunto.

Vale destacar que podemos associar ao Hessiano uma forma bilinear simétrica definida por

$$\mathrm{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X(Yf) - (\nabla_X Y) f, \tag{1.5}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

1.3 Teoria Elementar de Imersões Isométricas

Nesta seção vamos abordar os principais conceitos básicos sobre as chamadas imersões isométricas em variedades Riemannianas. A exposição será baseada principalmente nas referências [21] e [27], que são as nossas recomendações para um maior detalhamento do conteúdo apresentado.

Começaremos relembrando os conceitos de imersão, mergulho e subvariedade em uma variedade diferenciável.

Definição 1.25. *Sejam Σ^m e $\overline{M}^n$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ é uma **imersão** se $d\psi_p : T_p\Sigma \to T_{\psi(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in \Sigma^m$. Se, além disso, ψ é um homeomorfismo sobre $\psi(\Sigma^m) \subset \overline{M}^n$, onde $\psi(\Sigma^m)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}^n$, dizemos que ψ é um **mergulho**. Se $\Sigma^m \subset \overline{M}^n$ e a inclusão $\iota : \Sigma^m \to \overline{M}^n$ é um mergulho, dizemos que Σ^m é uma **subvariedade mergulhada** de $\overline{M}^n$. Se ψ for uma imersão que não é um mergulho, então Σ^m é uma **subvariedade imersa**. Por simplicidade, utilizaremos o termo subvariedade para nos referirmos a uma subvariedade imersa.*

Note que se $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $p = n - m$ é chamada de ***codimensão*** da imersão ψ.

De posse das Definições 1.25 e 1.3, podemos agora estabelecer a definição de imersão isométrica.

Definição 1.26. *Sejam Σ^m e $\overline{M}^n$ variedades Riemannianas. Dizemos que uma aplicação $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ é uma* ***imersão isométrica*** *se ψ é uma imersão ao mesmo tempo que é uma isometria, ou seja, se a aplicação $d\psi_p : T_p\Sigma \to T_{\psi(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in \Sigma^m$ e*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle d\psi_p(u), d\psi_p(v)\rangle_{\psi(p)},$$

para todo $p \in \Sigma^m$ e para todos $u, v \in T_pM$.

Perceba que mesmo que não seja exigida a hipótese de que Σ^m seja uma variedade Riemanniana, a estrutura Riemanniana de $\overline{M}^n$ induz, através da aplicação ψ, uma estrutura Riemanniana em Σ^m. Como $d\psi_p$ é injetiva, é possível verificar, pela igualdade da Definição 1.26, que $\langle , \rangle_p$ é de fato uma métrica em Σ^m induzida naturalmente por ψ.

Dessa forma, seja $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ uma imersão isométrica. Para cada $p \in \Sigma^m$, existe uma vizinhança $U \subset \Sigma^m$ de p tal que a restrição de ψ a U é um mergulho. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [27, Proposição 3.7 do Capítulo 0].

Então, podemos identificar U com sua imagem $\psi(U)$, pois ψ é localmente a aplicação inclusão. Por isso, vamos considerar o espaço tangente $T_p\Sigma$ como subespaço de $T_p\overline{M}$. Escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_p\Sigma \oplus (T_p\Sigma)^\perp,$$

onde $(T_p\Sigma)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p\Sigma$.

Desta decomposição, obtemos o chamado *fibrado normal* de Σ^m, denotado por $(T\Sigma)^\perp = \bigcup_{p\in\Sigma}(T_p\Sigma)^\perp$ (ver [21, pág. 2]). Nesse contexto, denotamos por $\mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis normais a Σ^m, de forma que temos a decomposição

$$\mathfrak{X}(\overline{M})\big|_{\psi(\Sigma)} = \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{X}^\perp(\Sigma), \tag{1.6}$$

onde $\mathfrak{X}(\overline{M})\big|_{\psi(\Sigma)}$ denota o conjunto de campos de vetores diferenciáveis de $\overline{M}^n$ definidos ao longo de Σ^m.

Com relação a decomposição (1.6), temos as projeções

$$(\ )^\top : \mathfrak{X}(\overline{M})\big|_{\psi(\Sigma)} \to \mathfrak{X}(\Sigma)$$

$$(\ )^\perp : \mathfrak{X}(\overline{M})\big|_{\psi(\Sigma)} \to \mathfrak{X}^\perp(\Sigma),$$

que são chamadas de *tangente* e *normal*, respectivamente.

Dado que $\overline{M}^n$ é uma variedade Riemanniana, a sua conexão de Levi-Civita será denotada por $\overline{\nabla}$. Sendo $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ uma imersão isométrica e $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Segue, da unicidade do Teorema 1.5, a conexão $(\overline{\nabla})^\top$ é a conexão de Levi-Civita de Σ^m, a qual vamos denotar por ∇. Logo,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp. \tag{1.7}$$

A igualdade (1.7) determina a chamada segunda forma fundamental de Σ^m, a qual apresentamos na próxima definição.

Definição 1.27. *Definimos a* ***segunda forma fundamental*** *de Σ^m como sendo a aplicação*

$$\begin{aligned} II : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) &\to \mathfrak{X}^\perp(\Sigma) \\ (X, Y) &\mapsto II(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp. \end{aligned}$$

Logo, pela Definição 1.27 e (1.7), obtemos a ***fórmula de Gauss***:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y) \tag{1.8}$$

Pela fórmula (1.8) e utilizando as propriedades da Definição 1.4, pode-se verificar que II é uma aplicação simétrica e bilinear sobre $C^\infty(\Sigma)$.

Ainda no mesmo contexto estabelecido até agora, vamos definir o chamado operador de Weingarten de Σ^m.

Definição 1.28. *Seja $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$. Definimos o* ***operador de Weingarten*** *ou* ***operador de forma*** *de Σ^m com respeito a ξ como sendo a aplicação*

$$\begin{aligned} A_\xi : \mathfrak{X}(\Sigma) &\to \mathfrak{X}(\Sigma) \\ X &\mapsto A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top. \end{aligned}$$

Existe uma relação muito importante entre o operador de Weingarten e a segunda forma fundamental. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$. Pela fórmula de Gauss (1.8) e a compatibilidade com a métrica do Teorema 1.5, temos

$$\begin{aligned} 0 = X\langle \xi, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^\top + (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp, Y\rangle + \langle \xi, \nabla_X Y + II(X, Y)\rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^\top, Y\rangle + \langle \xi, II(X, Y)\rangle, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle II(X, Y), \xi\rangle. \tag{1.9}$$

Denotando a componente normal $(\overline{\nabla}_X\xi)^\perp$ de $\overline{\nabla}_X\xi$ por $\nabla^\perp_X\xi$, obtemos a chamada ***fórmula de Weingarten***:

$$\overline{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi. \tag{1.10}$$

Denominamos a conexão $\nabla^\perp$ como sendo a *conexão normal* da imersão ψ.

Podemos agora enunciar a chamada equação de Gauss, que relaciona os tensores curvatura entre as variedades da imersão. Para mais detalhes da demonstração desta equação, indicamos [21, pág. 4].

Proposição 1.29. *Considere $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas Σ^m e $\overline{M}^n$. Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, a* ***equação de Gauss*** *é dada por*

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle - \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle,$$

onde R e $\overline{R}$ são os tensores curvatura de Σ^m e $\overline{M}^n$, respectivamente e II é a segunda forma fundamental de Σ^m.

De posse dos conceitos estabelecidos até agora, podemos apresentar as noções de imersões totalmente geodésicas e totalmente umbílicas.

Definição 1.30. *Seja $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas Σ^m e $\overline{M}^n$. Dizemos que ψ é* ***totalmente geodésica*** *quando a segunda forma fundamental de Σ^m é identicamente nula, ou seja, $II(X,Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.*

Note que, pela fórmula de Gauss (1.8), se a imersão ψ é totalmente geodésica,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y.$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Temos também que as geodésicas de Σ^m são geodésicas de $\overline{M}^n$ que estão totalmente contidas em Σ^m.

Definição 1.31. *Dizemos que a imersão isométrica $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ entre duas variedades Riemannianas Σ^m e $\overline{M}^n$ é* ***totalmente umbílica*** *quando*

$$A_\xi X = \lambda_\xi X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e para todo $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$, onde $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$.

Vamos finalizar este capítulo apresentando a definição do vetor curvatura média.

Definição 1.32. *Seja* $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^n$ *uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas* Σ^m *e* $\overline{M}^n$. *O* ***vetor curvatura média*** *de* Σ^m *é definido por*

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{m} II(E_i, E_i),$$

onde II *é a segunda forma fundamental de* Σ^m *e* $\{E_1, ..., E_m\}$ *é um referencial ortonormal local em* $\mathfrak{X}(\Sigma)$.

Note que, pela Definição 1.32, $\vec{H} = \mathrm{tr}(II)$, isto é, $\vec{H}$ é o traço da segunda forma fundamental de Σ^m.

Seja $\{N_1, ..., N_p\}$ um referencial ortonormal local em $\mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$, onde $p = n - m$ é a codimensão da imersão. Por simplicidade, vamos denotar A_{N_j} por A_j. Pela Definição 1.32 e (1.9), podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\langle II(E_i, E_i), N_j\rangle N_j \\ &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\langle A_j E_i, E_i\rangle N_j \\ &= \sum_{j=1}^{p}(\mathrm{tr}A_j)N_j = \sum_{j=1}^{p} H_j N_j, \end{aligned} \tag{1.11}$$

onde $H_j = \mathrm{tr}A_j,\ j = 1, ..., p$, são funções diferenciáveis definidas em Σ^m.

Capítulo 2

Produtos Warped com Densidade da Forma $I \times_\rho M^n_\varphi$

Neste capítulo, vamos apresentar os espaços ambientes principais do nosso trabalho, que são os chamados produtos warped. Dividiremos a nossa abordagem em cinco seções. Nas três primeiras, apresentaremos as noções básicas sobre produtos warped Riemannianos, com ênfase nos produtos da forma $I \times_\rho M^n$, onde I é um intervalo aberto real, M^n é uma variedade Riemanniana e ρ é uma função real positiva. Nas duas últimas seções, falaremos brevemente sobre variedades com densidade e algumas de suas características básicas, juntamente com os chamados produtos warped com densidade.

2.1 Produtos Warped Riemannianos

Vamos começar expondo os conceitos iniciais sobre produtos warped, adotando como referência principal a abordagem de [39, Capítulo 7], com as devidas adaptações para o contexto Riemanniano.

Definição 2.1. *Sejam $(B, \langle\,,\,\rangle_B)$ e $(F, \langle\,,\,\rangle_F)$ variedades Riemannianas e considere uma função positiva $\rho \in C^\infty(B)$. Denominamos* ***produto warped*** *de B e F com* ***função warped*** *ρ, denotado por $\overline{M} = B \times_\rho F$, a variedade produto $B \times F$ munida da métrica*

$$\langle\,,\,\rangle = \pi_B^*(\langle\,,\,\rangle_B) + (\rho \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(\langle\,,\,\rangle_F), \tag{2.1}$$

onde as aplicações π_B e π_F são as projeções canônicas do produto $B \times F$ sobre os fatores B e F, respectivamente.

Nas condições da Definição 2.1, dizemos que as variedades B e F são a ***base*** e a ***fibra*** de $\overline{M}$, respectivamente.

Como $\langle\,,\,\rangle_B$ e $\langle\,,\,\rangle_F$ são métricas Riemannianas, segue, diretamente da definição da métrica (2.1) que $\overline{M}$ é uma variedade Riemanniana.

Note que, se $(p,q) \in \overline{M}$ e $u \in T_{(p,q)}\overline{M}$, então

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle &= \langle d\pi_B(u), d\pi_B(u)\rangle_B + \rho^2(\pi_B(p,q))\langle d\pi_F(u), d\pi_F(u)\rangle_F \\ &= \langle d\pi_B(u), d\pi_B(u)\rangle_B + \rho^2(p)\langle d\pi_F(u), d\pi_F(u)\rangle_F.\end{aligned}$$

Dessa forma, se $\rho \equiv 1$, a métrica (2.1) passa a ser equivalente a métrica produto usual (1.1), fazendo com que o produto warped funcione como uma generalização da variedade produto.

Seja $(p,q) \in \overline{M}$. Denominamos de ***slices*** (ou ***fibras***) e ***folhas***, respectivamente, os conjuntos

$$\{p\} \times F = \pi_B^{-1}(\{p\}) \quad \text{e} \quad B \times \{q\} = \pi_F^{-1}(\{q\}). \tag{2.2}$$

Para cada $(p,q) \in \overline{M}$, os slices e as folhas são subvariedades mergulhadas de $\overline{M}$. De fato, basta observar que, no caso dos slices, fixado $p \in B$, a aplicação

$$\begin{aligned}\iota_p : \{p\} \times F &\to B \times F \\ (p,y) &\mapsto \iota_p(p,y) = (p,y)\end{aligned}$$

é um mergulho, ou seja, possui diferencial injetiva e é um homeomorfismo sobre sua imagem. Analogamente, fixado $q \in F$, a aplicação

$$\begin{aligned}\iota_q : B \times \{q\} &\to B \times F \\ (x,q) &\mapsto \iota_q(x,q) = (x,q)\end{aligned}$$

também é um mergulho.

Vamos agora definir a noção de levantamento.

Definição 2.2. *Seja $\overline{M} = B \times_\rho F$ um produto warped e $(p,q) \in \overline{M}$.*

(a) *Se $f \in C^\infty(B)$, o **levantamento** de f para $\overline{M}$ é $\tilde{f} = f \circ \pi_B \in C^\infty(\overline{M})$. Analogamente, $\tilde{g} = g \circ \pi_F$ é o levantamento de $g \in C^\infty(F)$.*

(b) *Se $u \in T_pB$ e $q \in F$, o levantamento $\tilde{u}$ de u para $\overline{M}$ é o único vetor $\tilde{u} \in T_{(p,q)}(B \times \{q\})$ tal que $(d\pi_B)_{(p,q)}(\tilde{u}) = u$. O levantamento $\tilde{v} \in T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$ de $v \in T_qF$ é o único vetor tal que $(d\pi_F)_{(p,q)}(\tilde{v}) = v$.*

(c) *Se $X \in \mathfrak{X}(B)$, o levantamento de X para $\overline{M}$ é o campo vetorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ que em cada (p,q) é o levantamento de X_p para $\overline{M}$. Equivalentemente, o levantamento $\tilde{X}$ de X para $\overline{M}$ é o único campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ tal que $d\pi_B(\tilde{X}) = X$ e $d\pi_F(\tilde{X}) = 0$. Neste caso, $\tilde{X}$ é dito* ***levantamento horizontal****. Analogamente, o levantamento $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ de $Y \in \mathfrak{X}(F)$ é o único campo $\tilde{Y}$ tal que $d\pi_F(\tilde{Y}) = Y$ e $d\pi_B(\tilde{Y}) = 0$. Dizemos que $\tilde{Y}$ é* ***levantamento vertical****. Os conjuntos de todos os levantamentos horizontais e de todos os levantamentos verticais são denotados, respectivamente, por $\mathscr{H}(B)$ e $\mathscr{V}(F)$.*

Note que, pela Definição 2.2 e por (1.2), dado $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$,

$$X = X_1 + X_2,$$

onde $X_1 \in \mathscr{H}(B)$ e $X_2 \in \mathscr{V}(F)$, com $X_1 = d\pi_B(X)$ e $X_2 = d\pi_F(X)$. A partir daqui, por simplicidade, vamos comumente omitir o "$\sim$" dos levantamentos.

Outra terminologia importante é que denominamos de ***vetores horizontais*** e ***vetores verticais*** os vetores tangentes às folhas e aos slices, respectivamente.

Temos a seguinte proposição que enumera algumas características da métrica warped.

Proposição 2.3. *Seja $\overline{M} = B \times_\rho F$ um produto warped. Valem as seguintes afirmações:*

(i) *Para cada $q \in F$, a aplicação $\pi_B\big|_{B\times\{q\}}$ é uma isometria sobre B.*

(ii) *Para cada $p \in B$, a aplicação $\pi_F\big|_{\{p\}\times F}$ é uma homotetia positiva sobre F, com fator de homotetia $\frac{1}{\rho(p)}$.*

(iii) *Para cada $(p,q) \in \overline{M}$, a folha $B \times \{q\}$ e o slice $\{p\} \times F$ são ortogonais em (p,q).*

Demonstração.

(i) Para cada $q \in F$, a restrição $\pi_B\big|_{B\times\{q\}}$ é um difeomorfismo. Sejam $u, v \in T_{(p,q)}(B \times \{q\})$, ou seja, vetores horizontais. Logo, em (p,q),

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \langle (d\pi_B)(u), (d\pi_B)(v)\rangle_B + (\rho\circ\pi_B)^2\langle (d\pi_F)(u), (d\pi_F)(v)\rangle_F \\ &= \langle (d\pi_B)(u), (d\pi_B)(v)\rangle_B.\end{aligned}$$

(ii) Para cada $p \in B$, a restrição $\pi_F\big|_{\{p\}\times F}$ é um difeomorfismo. Sejam os vetores verticais $u, v \in T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$. Em (p,q) temos

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \langle (d\pi_B)(u), (d\pi_B)(v)\rangle_B + (\rho\circ\pi_B)^2\langle (d\pi_F)(u), (d\pi_F)(v)\rangle_F \\ &= (\rho\circ\pi_B)^2\langle (d\pi_F)(u), (d\pi_F)(v)\rangle_F.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle (d\pi_F)_{(p,q)}(u), (d\pi_F)_{(p,q)}(v)\rangle_F = \frac{1}{\rho^2(\pi_B(p,q))}\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \left(\frac{1}{\rho(p)}\right)^2 \langle u, v\rangle_{(p,q)}.$$

(iii) Sejam $(p,q) \in \overline{M}$, $u \in T_{(p,q)}(B \times \{q\})$ um vetor horizontal e $v \in T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$ um vetor vertical. Daí, em (p,q),

$$\langle u, v\rangle = \langle (d\pi_B)(u), \underbrace{(d\pi_B)(v)}_{=0}\rangle_B + (\rho \circ \pi_B)^2 \langle \underbrace{(d\pi_F)(u)}_{=0}, (d\pi_F)(v)\rangle_F = 0.$$

■

Na próxima proposição, vamos estabelecer relações bastante úteis entre as conexões Riemannianas do produto warped e de suas variedades componentes, no que diz respeito a campos que são levantamentos horizontais ou verticais. Mas antes, vamos enunciar o seguinte lema que versa sobre o levantamento do gradiente de uma função diferenciável no produto warped.

Lema 2.4. *Seja $\overline{M} = B \times_\rho F$ um produto warped e $h \in C^\infty(B)$. Então, o gradiente do levantamento $h \circ \pi_B$ de h para $\overline{M}$ é o levantamento do gradiente de h para $\overline{M}$.*

Demonstração. Primeiramente, considere $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões Riemannianas de $\overline{M}$ e B, respectivamente. Sejam $(p,q) \in \overline{M}$ e $v \in T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$ um vetor vertical. Daí, $(d\pi_B)_{(p,q)}(v) = 0$. Pela definição de gradiente 1.17, em (p,q) temos

$$\langle \overline{\nabla}(h \circ \pi_B), v\rangle = v(h \circ \pi_B) = (d\pi_B)(v)(h) = 0.$$

Logo, $\overline{\nabla}(h \circ \pi_B)$ é vetor horizontal. Seja agora $u \in T_{(p,q)}(B \times \{q\})$ um vetor horizontal. Como $\pi_B\big|_{B\times\{q\}}$ é uma isometria, segue que

$$\begin{aligned} \left\langle (d\pi_B)(\overline{\nabla}(h \circ \pi_B)), (d\pi_B)(u)\right\rangle_B &= \left\langle \overline{\nabla}(h \circ \pi_B), u\right\rangle \\ &= u(h \circ \pi_B) \\ &= (d\pi_B)(u)(h) = \langle \nabla h, (d\pi_B)(u)\rangle_B . \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla h = (d\pi_B)\left(\overline{\nabla}(h \circ \pi_B)\right)$.

■

No que se segue, por simplificação, vamos denotar $h \circ \pi_B$ por h e $\overline{\nabla}(h \circ \pi_B)$ por $\overline{\nabla} h$. De posse do Lema 2.4, podemos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.5. *Sejam um produto warped $\overline{M} = B \times_\rho F$ e as conexões de Levi-Civita ∇^B, ∇^F e $\overline{\nabla}$ de B, F e $\overline{M}$, respectivamente. Se $X, Y \in \mathscr{H}(B)$ e $V, W \in \mathscr{V}(F)$, então*

(i) $\overline{\nabla}_X Y \in \mathscr{H}(B)$ *é o levantamento de* $\nabla^B_X Y$ *em* B.

(ii) $\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X = \frac{X(\rho)}{\rho} V$.

(iii) $(\overline{\nabla}_V W)^{\perp} = II(V,W) = -\frac{\langle V,W\rangle}{\rho}\overline{\nabla}\rho$.

Demonstração.

(i) Sendo X e Y levantamentos horizontais e V um levantamento vertical, temos $[X,V]=0$ e $[Y,V]=0$. Logo, a fórmula de Koszul (1.3) se reduz a

$$2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = -V\langle X,Y\rangle + \langle V,[X,Y]\rangle.$$

Por outro lado, como $X,Y \in \mathscr{H}(B)$, então $\langle X,Y\rangle$ é constante nos slices. Como $V \in \mathscr{V}(F)$ então $V\langle X,Y\rangle = 0$. Além disso, $[X,Y] \in \mathscr{H}(B)$, acarretando que $\langle V,[X,Y]\rangle = 0$. Assim,

$$\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = 0, \quad \forall V \in \mathscr{V}(F).$$

Logo, $\overline{\nabla}_X Y \in \mathscr{H}(B)$. Pela Proposição 2.3, $\pi_B\big|_{B\times\{q\}}$ é isometria sobre B, então $\overline{\nabla}_X Y$ é o levantamento de $\nabla^B_X Y$.

(ii) Como $0 = [X,V] = \overline{\nabla}_X V - \overline{\nabla}_V X$, então $\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X$ e estes campos são verticais, pois, pelo item (i) temos

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y\rangle = X\underbrace{\langle V,Y\rangle}_{=0} - \langle V, \underbrace{\overline{\nabla}_X Y}_{\in\mathscr{H}(B)}\rangle = 0.$$

Assim, aplicando novamente a fórmula de Koszul, temos

$$2\langle \overline{\nabla}_X V, W\rangle = X\langle V,W\rangle.$$

Por outro lado, em $(p,q) \in \overline{M}$,

$$\langle V,W\rangle = \rho^2(p)\langle V_q, W_q\rangle_F.$$

Escrevendo $\rho := \rho\circ\pi_B$, segue que

$$\langle V,W\rangle = \rho^2\left(\langle V,W\rangle_F \circ \pi_F\right).$$

Observando que $\langle V,W\rangle_F \circ \pi_F$ é constante nas folhas onde X é tangente, então

$$\begin{aligned} X\langle V,W\rangle &= X\left[\rho^2\left(\langle V,W\rangle_F \circ \pi_F\right)\right] \\ &= 2\rho X(\rho)\left(\langle V,W\rangle_F \circ \pi_F\right) \\ &= 2\frac{X(\rho)}{\rho}\left[\rho^2\left(\langle V,W\rangle_F \circ \pi_F\right)\right] = 2\frac{X(\rho)}{\rho}\langle V,W\rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$2\langle \overline{\nabla}_X V, W\rangle = X\langle V,W\rangle = 2\frac{X(\rho)}{\rho}\langle V,W\rangle.$$

Portato, $\overline{\nabla}_X V = \dfrac{X(\rho)}{\rho}V$.

(iii) Pelo item (ii),

$$\langle \overline{\nabla}_V W, X\rangle = V\langle W,X\rangle - \langle W, \overline{\nabla}_V X\rangle = -\frac{X(\rho)}{\rho}\langle W,V\rangle.$$

Pelo Lema 2.4, $X(\rho) = \langle \overline{\nabla}\rho, X\rangle$ tanto em $\overline{M}$ como em B. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_V W, X\rangle &= -\frac{\langle \overline{\nabla}\rho, X\rangle}{\rho}\langle W,V\rangle \\ &= \left\langle -\frac{\langle W,V\rangle}{\rho}\overline{\nabla}\rho, X\right\rangle, \quad \forall\, X \in \mathscr{H}(B). \end{aligned}$$

Portanto,

$$-\frac{\langle W,V\rangle}{\rho}\overline{\nabla}\rho = \left(\overline{\nabla}_V W\right)^{\perp} = II(V,W).$$

■

Vamos finalizar esta seção enunciando, sem demonstração, a seguinte proposição que fornece como calcular os tensores curvatura de levantamentos horizontais e verticais. Para maiores detalhes, ver [39, Proposição 7.42].

Proposição 2.6. *Seja um produto warped $\overline{M} = B \times_\rho F$ com tensor curvatura $\overline{R}$. Se $X,Y,Z \in \mathscr{H}(B)$ e $U,V,W \in \mathscr{V}(F)$, então*

(i) $\overline{R}(V,X)Y = \dfrac{\operatorname{Hess}\rho(X,Y)}{\rho}V.$

(ii) $\overline{R}(X,Y)V = \overline{R}(V,W)X = 0.$

(iii) $\overline{R}(X,V)W = \dfrac{\langle V,W\rangle}{\rho}\overline{\nabla}_X\left(\overline{\nabla}\rho\right).$

(iv) $\overline{R}(V,W)U = R_F(V,W)U - \dfrac{\langle \overline{\nabla}\rho, \overline{\nabla}\rho\rangle}{\rho^2}\{\langle V,U\rangle W - \langle W,U\rangle V\},$

onde R_F é o tensor curvatura da fibra F.

2.2 Produtos Warped da forma $I \times_\rho M^n$

Conhecendo a noção generalizada de produtos warped Riemannianos, vamos agora particularizar a abordagem para um espaço ambiente mais específico. Considere I um intervalo aberto de $(\mathbb{R}, dt^2)$, onde dt^2 é a métrica Riemanniana usual de $\mathbb{R}$. Sejam $(M^n, \langle\, ,\, \rangle_M)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional e $\rho : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável positiva.

Então, a partir deste ponto, vamos considerar o produto warped $\overline{M}^{n+1} = I \times_\rho M^n$ que, como já vimos, é uma variedade Riemanniana munida da métrica

$$\langle\, ,\, \rangle = \pi_I^*(dt^2) + (\rho \circ \pi_I)^2 \pi_M^*(\langle\, ,\, \rangle_M), \tag{2.3}$$

onde $\pi_I : \overline{M}^{n+1} \to I$ e $\pi_M : \overline{M}^{n+1} \to M^n$ são as projeções canônicas.

Nesse contexto, vamos escolher em $\overline{M}^{n+1}$ a orientação de cada slice $\{t\} \times M^n$ como sendo o campo de vetores unitário

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,x)}, \quad (t,x) \in \overline{M}^{n+1}, \tag{2.4}$$

que é, a rigor, o levantamento a $\overline{M}^{n+1}$ do campo unitário ∂_t definido em I. Por simplicidade, vamos utilizar a mesma notação para os dois campos.

Como já vimos anteriormente em (2.2), os slices e as folhas são subvariedades mergulhadas do produto warped. Vamos verificar que, fixado um $t_* \in I$, o slice $\{t_*\} \times M^n$ é subvariedade totalmente umbílica.

Para isso, vamos primeiramente definir o chamado ***campo de vetores conforme fechado***

$$K(t,x) = \rho(t)\partial_t\big|_{(t,x)}, \quad (t,x) \in \overline{M}^{n+1}, \tag{2.5}$$

onde estamos atribuindo a notação ρ como sendo a mesma do levantamento $\rho \circ \pi_I$.

Campos da forma (2.5) serão de grande importância neste momento e nos próximos capítulos. Para uma discussão mais detalhada sobre campos conformes fechados em ambientes Riemannianos, indicamos a leitura de [11].

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}^{n+1}$. Vamos agora mostrar que

$$\overline{\nabla}_V K = \rho'(t)V, \quad \forall\, V \in \mathfrak{X}(\overline{M}). \tag{2.6}$$

Com efeito, seja $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Temos a decomposição

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1 \in \mathscr{H}(I),\ V_2 \in \mathscr{V}(M^n),$$

onde $V_1 = \langle V, \partial_t\rangle\partial_t$. Segue que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V K = \overline{\nabla}_{(\langle V,\partial_t\rangle\partial_t + V_2)}K &= \overline{\nabla}_{\langle V,\partial_t\rangle\partial_t}K + \overline{\nabla}_{V_2}K \\
&= \langle V,\partial_t\rangle\overline{\nabla}_{\partial_t}(\rho(t)\partial_t) + \overline{\nabla}_{V_2}(\rho(t)\partial_t) \\
&= \langle V,\partial_t\rangle\left(\rho(t)\underbrace{\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t}_{=0} + \partial_t(\rho(t))\partial_t\right) + \rho(t)\overline{\nabla}_{V_2}\partial_t + \underbrace{V_2(\rho(t))}_{=0}\partial_t \\
&= \rho'(t)\langle V,\partial_t\rangle\partial_t + \rho(t)\overline{\nabla}_{V_2}\partial_t \\
&= \rho'(t)\langle V,\partial_t\rangle\partial_t + \rho(t)\frac{\partial_t(\rho(t))}{\rho(t)}V_2 \\
&= \rho'(t)(\langle V,\partial_t\rangle\partial_t + V_2) \\
&= \rho'(t)V,
\end{aligned}$$

onde para calcular $\overline{\nabla}_{V_2}\partial_t$ foi utilizado o item (ii) da Proposição 2.5.

Seja agora $t_* \in I$ fixo. Considere o conjunto

$$M^n_{t_*} = \{t_*\} \times M^n, \tag{2.7}$$

que é um slice de $\overline{M}^{n+1}$. Vamos mostrar que (2.7) é uma subvariedade totalmente umbílica de $\overline{M}^{n+1}$.

Seja $N_{t_*} \in \mathfrak{X}^{\perp}(M_{t_*})$, de forma que $N_{t_*} = \partial_t$ é uma orientação de $M^n_{t_*}$. Pela Definição 1.28 do operador de Weingarten,

$$A_{N_{t_*}}V = -\left(\overline{\nabla}_V N_{t_*}\right)^{\top} = -\left(\overline{\nabla}_V \partial_t\right)^{\top}, \quad \forall\, V \in \mathfrak{X}(M^n_{t_*}). \tag{2.8}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V\partial_t = \overline{\nabla}_V\left(\frac{1}{\rho}K\right) &= \frac{1}{\rho}\overline{\nabla}_V K + V\left(\frac{1}{\rho}\right)K \\
&= \frac{\rho'}{\rho}V - \frac{1}{\rho^2}V(\rho)K \\
&= \frac{\rho'}{\rho}V - \frac{1}{\rho^2}\left\langle\overline{\nabla}(\rho\circ\pi_I), V\right\rangle K \\
&= \frac{\rho'}{\rho}V - \frac{\rho'}{\rho^2}\left\langle\overline{\nabla}\pi_I, V\right\rangle\rho\partial_t.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Para continuar, precisamos calcular $\overline{\nabla}\pi_I$. Para isso, considere $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ e vamos aplicar a decomposição

$$V = \langle V,\partial_t\rangle\partial_t + V^*, \quad V^* \in \mathscr{V}(M^n).$$

Pela definição 1.17 de gradiente, temos

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\nabla}\pi_I, V\right\rangle = V(\pi_I) &= (\langle V, \partial_t\rangle \partial_t + V^*)(\pi_I) \\ &= \langle V, \partial_t\rangle \underbrace{\partial_t(\pi_I)}_{=1} + \underbrace{V^*(\pi_I)}_{=0} \\ &= \langle \partial_t, V\rangle,\end{aligned}$$

pois $\pi_I(t,x) = t$, para todo $(t,x) \in \overline{M}^{n+1}$. Então,

$$\overline{\nabla}\pi_I = \partial_t. \tag{2.10}$$

Logo, se $V \in \mathfrak{X}(M^n_{t_*})$ e substituirmos (2.10) em (2.9), temos

$$\overline{\nabla}_V \partial_t = \frac{\rho'}{\rho} V - \frac{\rho'}{\rho}\underbrace{\langle \partial_t, V\rangle}_{=0}\partial_t = \frac{\rho'}{\rho} V.$$

Portanto, em (2.8),

$$A_{N_{t_*}} V = -\left(\frac{\rho'(t_*)}{\rho(t_*)} V\right)^\top = -\frac{\rho'(t_*)}{\rho(t_*)} V, \tag{2.11}$$

ou seja, o slice $M^n_{t_*}$ é subvariedade totalmente umbílica.

Podemos também calcular o vetor curvatura média de $M^n_{t_*}$, o qual vamos denotar por $\vec{H}_{t_*}$. Considere um referencial ortonormal local $\{E_1, ..., E_n\}$ em $\mathfrak{X}(M_{t_*})$. Note que a codimensão de $M^n_{t_*}$ é $p = (n+1) - n = 1$. Logo, por (2.11) e pela forma de calcular o vetor curvatura média em (1.11), temos

$$\begin{aligned}\vec{H}_{t_*} = \operatorname{tr}(A_{N_{t_*}}) &= \sum_{i=1}^{n} \langle A_{N_{t_*}} E_i, E_i\rangle N_{t_*} \\ &= -\frac{\rho'(t_*)}{\rho(t_*)} \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E_i\rangle \partial_t \\ &= -n\frac{\rho'(t_*)}{\rho(t_*)} \partial_t.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Vamos finalizar esta seção apresentando alguns exemplos, que serão retomados posteriormente, de produtos warped da forma $I \times_\rho M^n$.

Exemplo 2.7. (*Recuperando o produto simples* $I \times M^n$). Quando $\rho \equiv 1$, a métrica warped (2.3) se torna a métrica produto usual (1.1), fazendo com que recuperemos a variedade produto $I \times M^n$, cujo modelo mais generalizado foi abordado no Exemplo 1.2. Neste caso, temos o campo $K = \partial_t$ e, como caso particular, se $I = \mathbb{R}$ e $M^n = \mathbb{R}^n$, temos $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.8. (*Espaço pseudo-hiperbólico*). Seguindo a terminologia que foi apresentada por Tashiro [41], quando $\rho(t) = e^t$, o produto warped $I \times_{e^t} M^n$ é denominado de ***espaço pseudo-hiperbólico***. Esta denominação se deve ao fato de que o espaço hiperbólico $(n+1)$-dimensional $\mathbb{H}^{n+1}$ é isométrico ao produto warped $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$, tais que os slices $\{t\} \times \mathbb{R}^n$ são isométricos às chamadas horoesferas de $\mathbb{H}^{n+1}$. Mais detalhes sobre esses espaços podem ser consultados em [1, 2, 30, 36].

Exemplo 2.9. (*Espaços de Schwarzschild*). Considere um parâmetro $\mathfrak{m} > 0$ e o espaço produto

$$\overline{\mathfrak{S}}^{n+1} = (r_0(\mathfrak{m}), +\infty) \times \mathbb{S}^n,$$

onde $\mathbb{S}^n$ é a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$ munida da métrica Euclidiana induzida padrão e $r_0(\mathfrak{m}) = (2\mathfrak{m})^{\frac{1}{n-1}}$ é a única raíz positiva de $V_{\mathfrak{m}}(r) = 0$, com $V_{\mathfrak{m}}(r) = 1 - 2\mathfrak{m}r^{1-n}$. Este espaço é denominado de ***espaço de Schwarzschild*** e é munido da métrica

$$\overline{g} = V_{\mathfrak{m}}(r)^{-1}dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n},$$

onde dr^2 e $g_{\mathbb{S}^n}$ são as métricas padrões de $(r_0(\mathfrak{m}), +\infty)$ e $\mathbb{S}^n$, respectivamente. A função $V_{\mathfrak{m}}(r)$ é denominada função potencial do espaço $\overline{\mathfrak{S}}^{n+1}$.

A importância deste tipo de espaço reside no fato de que a variedade $\mathbb{R} \times \overline{\mathfrak{S}}^{n+1}$ munida da métrica Lorentziana $-V_{\mathfrak{m}}(r)dt^2 + \overline{g}$ é uma solução das chamadas equações de campo de Einstein no vácuo, com constante cosmológica zero (ver, por exemplo, a referência [39, Capítulo 13] para mais detalhes a respeito da geometria de Schwarzschild).

Baseado em [20, Exemplo 1.3], o espaço $\overline{\mathfrak{S}}^{n+1}$ pode ser reduzido ao produto warped da forma $I \times_\rho \mathbb{S}^n$, com a métrica warped (2.3), aplicando a seguinte mudança de variáveis

$$t = \int_{r_0(\mathfrak{m})}^{r} \frac{d\sigma}{\sqrt{V_{\mathfrak{m}}(\sigma)}}, \quad \rho(t) = r(t) \in \mathbb{R}_+. \tag{2.13}$$

Como foi evidenciado em [20, Exemplo 4.1], a função $V_{\mathfrak{m}}(r)$ é estritamente crescente em $(r_0(\mathfrak{m}), +\infty)$. De fato,

$$\frac{dV_{\mathfrak{m}}}{dr} = \frac{2\mathfrak{m}(n-1)}{r^n} > 0$$

para todo $r > r_0(\mathfrak{m})$ e, como $V_{\mathfrak{m}}(r_0(\mathfrak{m})) = 0$, conclui-se que $V_{\mathfrak{m}}(r) > 0$ em $(r_0(\mathfrak{m}), +\infty)$. Dessa maneira, a função warped ρ obtida de (2.13) satisfaz

$$\rho'(t) = r'(t) = \sqrt{V_{\mathfrak{m}}(r(t))} > 0 \quad e \quad \rho''(t) = r''(t) = \frac{1}{2}\frac{dV_{\mathfrak{m}}}{dr}(r(t)) > 0. \tag{2.14}$$

Exemplo 2.10. (*Espaços de Reissner-Nordström*). Considere os parâmetros $\mathfrak{m} > 0$ e $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}$, com $|\mathfrak{q}| \leq \mathfrak{m}$. Definimos o ***espaço de Reissner-Nordström*** como sendo o espaço produto

$$\overline{\mathfrak{R}}^{n+1} = (r_0(\mathfrak{m}, \mathfrak{q}), +\infty) \times \mathbb{S}^n$$

munido da métrica

$$\overline{g} = V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r)^{-1}dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n},$$

onde dr^2 e $g_{\mathbb{S}^n}$ são, respectivamente, as métricas padrões de $(r_0(\mathfrak{m},\mathfrak{q}),+\infty)$ e $\mathbb{S}^n$, $V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r) = 1-2\mathfrak{m}r^{1-n}+\mathfrak{q}^2r^{2-2n}$ é a função potencial de $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}$ e a maior raiz positiva de $V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r)=0$ é

$$r_0(\mathfrak{m},\mathfrak{q}) = \left(\frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{m}-\sqrt{\mathfrak{m}^2-\mathfrak{q}^2}}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

De forma semelhante ao que vimos no Exemplo 2.9, a variedade $\mathbb{R}\times\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}$ munida da métrica Lorentziana $-V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r)dr^2+\overline{g}$ é também uma das soluções das Equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica zero (para mais detalhes, ver [14, Observação 4.5] e [42, Seção 12.3]).

Analogamente ao espaço de Schwarzschild, o espaço $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}$ pode ser reduzido à forma $I\times_\rho\mathbb{S}^n$ com a métrica (2.3) aplicando a mudança de variáveis

$$t=\int_{r_0(\mathfrak{m},\mathfrak{q})}^{r}\frac{d\sigma}{\sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(\sigma)}},\quad \rho(t)=r(t)\in\mathbb{R}_+. \tag{2.15}$$

A derivada da função potencial é

$$\frac{dV_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}}{dr}=2(n-1)r^{-n}(\mathfrak{m}-\mathfrak{q}^2r^{1-n}).$$

Então, $V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r)$ é estritamente crescente se

$$\mathfrak{q}^2r^{1-n}<\mathfrak{m}. \tag{2.16}$$

Se $\mathfrak{q}=0$, (2.16) é satisfeita. Considerando $\mathfrak{q}\neq 0$, reescrevemos (2.16) como

$$r>\left(\frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{m}}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Note que

$$\left(\frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{m}}\right)^{\frac{1}{n-1}}<\left(\frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{m}-\sqrt{\mathfrak{m}^2-\mathfrak{q}^2}}\right)^{\frac{1}{n-1}}=r_0(\mathfrak{m},\mathfrak{q}),$$

ou seja, $V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r)$ é estritamente crescente para todo $r>r_0(\mathfrak{m},\mathfrak{q})$.
Por (2.15), podemos calcular as derivadas de $\rho(t)$:

$$\rho'(t)=r'(t)=\sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t))}>0\quad e\quad \rho''(t)=r''(t)=\frac{1}{2}\frac{dV_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}}{dr}(r(t))>0. \tag{2.17}$$

2.3 Subvariedades Imersas em $I\times_\rho M^n$

Com base em todos os conceitos apresentados até agora, o nosso foco se voltará para o contexto de imersões em produtos warped. Mais especificamente, vamos lidar com uma subvariedade m-dimensional orientável $\psi:\Sigma^m\looparrowright\overline{M}^{n+1}$, onde $m\leq n$, imersa em um produto warped $\overline{M}^{n+1}=I\times_\rho M^n$.

A métrica de Σ^m será a de $\overline{M}^{n+1}$ induzida por ψ, que vamos denotar sempre por $\langle\ ,\ \rangle$. Vamos denotar por $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões Riemannianas de $\overline{M}^{n+1}$ e de Σ^m, respectivamente. Sendo $p = n+1-m$ a codimensão de Σ^m, podemos obter um referencial ortonormal local $\{N_1, ..., N_p\}$ em $\mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$, de forma que a fórmula de Gauss (1.8) pode ser expressa da forma

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^{p} \langle A_i X, Y\rangle N_i, \tag{2.18}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde $A_i = A_{N_i}$, com $i = 1, ..., p$.

Fazendo a restrição da projeção π_I à subvariedade Σ^m, podemos definir a chamada ***função altura*** de Σ^m:

$$\begin{array}{rccl} h := \pi_I\big|_{\Sigma^m} : & \Sigma^m & \to & I \\ & (t,x) & \mapsto & h(t,x) := \pi_I(t,x) = t. \end{array} \tag{2.19}$$

Afirmamos que o gradiente de h é dado por

$$\nabla h = \left(\overline{\nabla}\pi_I\right)^{\top} = \partial_t^{\top}, \tag{2.20}$$

onde $\partial_t^{\top}$ é a componente tangente do campo ∂_t ao longo de Σ^m. De fato, considere o campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Pela Definição 1.17,

$$\begin{aligned} \langle \nabla h, X\rangle = X(h) &= X(\pi_I \circ \psi) \\ &= (d\psi)(X)(\pi_I) \\ &= \left\langle \overline{\nabla}\pi_I, (d\psi)(X)\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\overline{\nabla}\pi_I\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}\pi_I\right)^{\perp}, X\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\overline{\nabla}\pi_I\right)^{\top}, X\right\rangle = \left\langle \partial_t^{\top}, X\right\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, (2.20) está verificado.

Vamos finalizar esta sessão com o seguinte lema (ver [7, Lema 3.3]) que oferece uma estimativa inferior para a curvatura de Ricci de Σ^m, dada uma restrição sobre a curvatura seccional da fibra M^n do produto warped $\overline{M}^{n+1} = I \times_\rho M^n$.

Lema 2.11. *Seja $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ uma subvariedade imersa em um produto warped $\overline{M}^{n+1} = I \times_\rho M^n$ obedecendo a seguinte restrição para a curvatura seccional*

$$K_M \geq \sup_I(\rho'^2 - \rho\rho''). \tag{2.21}$$

Então, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, a curvatura de Ricci de Σ^m satisfaz a seguinte estimativa inferior

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq -m\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2 - \sum_{i=1}^{n+1-m}\left|A_iX - \frac{H_i}{2}X\right|^2 + \frac{|\vec{H}|^2}{4}|X|^2,$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média de Σ^m e as funções $H_1, H_2, ..., H_{n+1-m}$ são definidas em (1.11).

Demonstração. Sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Pela Proposição 1.29, vale a equação de Gauss

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle - \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle, \quad (2.22)$$

onde R é o tensor curvatura de Σ^m, $\overline{R}$ é o tensor curvatura do espaço ambiente $I \times_\rho M^n$ e II é a segunda forma fundamental de Σ^m.

Sejam $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, os conjuntos $\{E_1, ..., E_m\}$ e $\{N_1, ..., N_p\}$ referenciais ortonormais locais em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$, respectivamente, onde $p = n + 1 - m$ é a codimensão de Σ^m. Segue de (2.22), que podemos escrever o tensor curvatura de Ricci da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,X) &= \sum_{i=1}^{m}\langle R(X,E_i)X,E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left[\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + \langle II(X,X), II(E_i,E_i)\rangle - \langle II(X,E_i), II(E_i,X)\rangle\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + \langle II(X,X), \sum_{i=1}^{m} II(E_i,E_i)\rangle - \sum_{i=1}^{m}|II(X,E_i)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + \langle II(X,X), \vec{H}\rangle - \sum_{i=1}^{m}|II(X,E_i)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{p}\langle A_kX,X\rangle N_k, \sum_{l=1}^{p} H_lN_l\right\rangle \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{p}\langle A_kX,E_i\rangle N_k\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + \sum_{k,l=1}^{p}\langle A_kX,X\rangle H_l \underbrace{\langle N_k,N_l\rangle}_{\delta_{kl}} \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}|\langle A_kX,E_i\rangle N_k|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + \sum_{k=1}^{p}\langle A_kX,X\rangle H_k - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}|\langle A_kX,E_i\rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle - \sum_{k=1}^{p}|A_kX|^2 + \sum_{k=1}^{p}\langle A_kX,X\rangle H_k - \frac{|\vec{H}|^2}{4}|X|^2 \\
&\qquad + \frac{|\vec{H}|^2}{4}|X|^2 + \sum_{k=1}^{p}|A_kX|^2 - \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\langle A_kX,E_i\rangle^2. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, afirmamos que

$$-\sum_{k=1}^{p}\left|A_kX-\frac{H_k}{2}X\right|^2=-\sum_{k=1}^{p}|A_kX|^2+\sum_{k=1}^{p}\langle A_kX,X\rangle H_k-\frac{|\vec{H}|^2}{4}|X|^2. \tag{2.24}$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{p}\left|A_kX-\frac{H_k}{2}X\right|^2 &= -\sum_{k=1}^{p}\left\langle A_kX-\frac{H_k}{2}X, A_kX-\frac{H_k}{2}X\right\rangle \\
&= -\sum_{k=1}^{p}\left(|A_kX|^2-2\left\langle A_kX,\frac{H_k}{2}X\right\rangle+\frac{H_k^2}{4}|X|^2\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{p}|A_kX|^2+\sum_{k=1}^{p}\langle A_kX,X\rangle H_k-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{p}H_k^2|X|^2 \\
&= -\sum_{k=1}^{p}|A_kX|^2+\sum_{k=1}^{p}\langle A_kX,X\rangle H_k-\frac{|\vec{H}|^2}{4}|X|^2,
\end{aligned}$$

obtendo a igualdade (2.24).

Vale também que

$$\sum_{k=1}^{p}|A_kX|^2=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\langle A_kX,E_i\rangle^2. \tag{2.25}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p}|A_kX|^2 &= \sum_{k=1}^{p}\langle A_kX,A_kX\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p}\left\langle\sum_{i=1}^{m}\langle A_kX,E_i\rangle E_i,\sum_{j=1}^{m}\langle A_kX,E_j\rangle E_j\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\langle A_kX,E_i\rangle\langle A_kX,E_j\rangle\underbrace{\langle E_i,E_j\rangle}_{\delta_{ij}} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\langle A_kX,E_i\rangle^2.
\end{aligned}$$

Então, segue de (2.23), (2.24) e (2.25) que

$$\mathrm{Ric}(X,X)=\sum_{i=1}^{m}\langle\overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle-\sum_{k=1}^{p}\left|A_kX-\frac{H_k}{2}X\right|^2+\frac{|\vec{H}|^2}{4}|X|^2. \tag{2.26}$$

Agora, precisamos mostrar que a primeira parcela após o sinal de igualdade em (2.26) é limitada inferiormente. Para isso, considere as seguintes decomposições

$$X=\langle X,\partial_t\rangle\partial_t+X^* \quad \text{e} \quad E_i=\langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t+E_i^*, \tag{2.27}$$

onde $X^*\in\mathscr{V}(M^n)$ e $E_i^*\in\mathscr{V}(M^n)$, para cada $i\in\{1,...,m\}$.

Aplicando as decomposições (2.27) e as propriedades da Proposição 1.7 repetidamente, temos

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,E_i)X &= \overline{R}\left(\langle X,\partial_t\rangle\partial_t + X^*, \langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t + E_i^*\right)\left(\langle X,\partial_t\rangle\partial_t + X^*\right)\\ &= -\langle X,\partial_t\rangle^2\overline{R}(E_i^*,\partial_t)\partial_t + \langle X,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,E_i^*)X^* - \langle E_i,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,X^*)X^*\\ &\quad +\langle X,\partial_t\rangle\langle E_i,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,\partial_t)\partial_t + \langle X,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,E_i^*)\partial_t + \overline{R}(X^*,E_i^*)X^*\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.6 e aplicando as Definições (1.17) e (1.24), segue que

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,E_i)X &= -\frac{\langle X,\partial_t\rangle^2\rho''}{\rho}E_i^* + \frac{\langle X,\partial_t\rangle\langle E_i^*,X^*\rangle\rho''}{\rho}\partial_t - \frac{\langle E_i,\partial_t\rangle|X^*|^2\rho''}{\rho}\partial_t\\ &\quad +\frac{\langle X,\partial_t\rangle\langle E_i,\partial_t\rangle\rho''}{\rho}X^* - \frac{\rho'^2}{\rho^2}\left(|X^*|^2E_i^* - \langle E_i^*,X^*\rangle X^*\right) + R_M(X^*,E_i^*)X^*,\end{aligned}$$

onde R_M é o tensor curvatura de M^n.

Sabendo que $\partial_t = \nabla h + \partial_t^\perp$ e

$$|E_i^*|^2 = \langle E_i^*,E_i^*\rangle = \langle E_i - \langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t, E_i - \langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t\rangle = 1 - \langle E_i,\partial_t\rangle^2,$$

$$|X^*|^2 = \langle X^*,X^*\rangle = \langle X - \langle X,\partial_t\rangle\partial_t, X - \langle X,\partial_t\rangle\partial_t\rangle = |X|^2 - \langle X,\partial_t\rangle^2,$$

$$\langle X^*,E_i^*\rangle = \langle X - \langle X,\partial_t\rangle\partial_t, E_i - \langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t\rangle = \langle X,E_i\rangle - \langle X,\partial_t\rangle\langle E_i,\partial_t\rangle,$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m\langle\overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle &= \sum_{i=1}^m\langle R_M(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle - \frac{\rho''}{\rho}|\nabla h|^2|X|^2\\ &\quad +\frac{\rho'^2}{\rho^2}\left(|\nabla h|^2 - (m-1)\right)|X|^2\\ &\quad +(m-2)\left(\frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2}\right)\langle X,\nabla h\rangle^2.\end{aligned}$$

Note também que, pela restrição (2.21),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m\langle R_M(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle &= \sum_{i=1}^m K_M(X^*,E_i^*)(|X^*|^2|E_i^*|^2 - \langle X^*,E_i^*\rangle^2)\\ &= \frac{1}{\rho^2}\sum_{i=1}^m K_M(X^*,E_i^*)(|X|^2 - \langle\nabla h,E_i\rangle^2|X|^2 - \langle X,\nabla h\rangle^2\\ &\quad -\langle X,E_i\rangle^2 + 2\langle X,\nabla h\rangle\langle X,E_i\rangle\langle\nabla h,E_i\rangle)\\ &\geq \frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2}(m|X|^2 - |\nabla h|^2|X|^2 - m\langle X,\nabla h\rangle^2 - |X|^2\\ &\quad +2\langle X,\nabla h\rangle^2).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle &\geq -\frac{\rho''}{\rho}|X|^2(m-1)\\ &\geq -\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2(m-1)\\ &= -m\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2+\underbrace{\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2}_{\geq 0}\\ &\geq -m\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Portanto, por (2.26) e (2.28), obtemos a estimativa inferior

$$\mathrm{Ric}(X,X)\geq -m\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2-\sum_{i=1}^{n+1-m}\left|A_iX-\frac{H_i}{2}X\right|^2+\frac{|\vec{H}|^2}{4}|X|^2.$$

■

2.4 Produtos Warped da Forma $I\times_\rho M^n_\varphi$

Nesta seção, vamos começar a introduzir no nosso trabalho as chamadas variedades com densidade. Faremos uma breve apresentação dos conceitos iniciais sobre este tipo de ambiente e, em seguida, vamos aplicar este conceito aos produtos warped $I\times_\rho M^n$. Para uma discussão mais aprofundada sobre as variedades com densidade, recomendamos as referências [28], [31], [37] e [43].

Vamos começar definindo o que é uma variedade com densidade.

Definição 2.12. *Sejam $(M^n,\langle\,,\,\rangle)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional e uma função diferenciável $\varphi: M^n\to\mathbb{R}$. Dizemos que a terna ordenada $(M^n,\langle\,,\,\rangle,e^{-\varphi}dM)$ é uma* ***variedade com densidade*** *associada a M^n e φ, a qual denotamos por M^n_φ, onde dM denota o elemento padrão de volume de $(M^n,\langle\,,\,\rangle)$. Nesse contexto, φ é denominada* ***função densidade*** *de M^n_φ.*

Note que, pela Definição 2.12, se φ é identicamente nula, teremos $e^{-\varphi}\equiv 1$, ou seja, teremos uma variedade Riemanniana convencional. Logo, as variedades com densidade funcionam como uma generalização das variedades Riemannianas. De certa forma, a função densidade φ atua como um modificador no cálculo de volume de domínios limitados nesses espaços, porém, sem alterar a métrica Riemanniana em questão.

Podemos citar como exemplo de variedade com densidade o chamado ***espaço Gaussiano*** $\mathbb{G}^{n+1}$, que corresponde ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido da chamada medida de probabilidade Gaussiana (2).

Vamos agora aplicar a Definição 2.12 ao contexto dos produtos warped. Mais precisamente, sejam o produto warped $\overline{M}^{n+1} = I \times_\rho M^n$, uma função diferenciável real φ em $\overline{M}^{n+1}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ a métrica warped (2.3). Então, a terna ordenada $(\overline{M}^{n+1}, \langle\ ,\ \rangle, e^{-\varphi}d\overline{M})$ é o nosso produto warped com densidade, o qual vamos denotar por $\overline{M}_\varphi^{n+1} = (I \times_\rho M^n)_\varphi$.

Contudo, vamos admitir, a partir deste momento, que a função densidade φ não depende do parâmetro $t \in I$. Isto significa que, se $\overline{\nabla}\varphi$ é o gradiente de φ na métrica do espaço $\overline{M}_\varphi^{n+1}$, e fizermos a decomposição

$$\overline{\nabla}\varphi = \langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle\partial_t + \left(\overline{\nabla}\varphi\right)^*, \quad \left(\overline{\nabla}\varphi\right)^* \in \mathscr{V}(M^n),$$

então $\langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle = 0$. De fato, pela Definição 1.17 e como φ não depende de t, temos

$$\langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle = \partial_t(\varphi) = 0. \tag{2.29}$$

Nesse cenário, vamos denotar o produto warped com densidade $(I \times_\rho M^n)_\varphi$ simplesmente por $I \times_\rho M_\varphi^n$. Uma motivação para considerar a não dependência do parâmetro t pela função densidade pode ser encontrada em [29, Teorema 1.1].

Baseado nos exemplos apresentados na seção 2.2, vamos evidenciar alguns exemplos de produtos warped com densidade.

Exemplo 2.13. (*Produto simples com densidade*). Considerando o produto simples dado no Exemplo 2.7, podemos obter a variedade com densidade $I \times M_\varphi^n$, onde $\varphi \in C^\infty(I \times M)$ e $\langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle = 0$.

Exemplo 2.14. (φ-*espaço pseudo-hiperbólico*). Seja $I \times_{e^t} M^n$ o espaço pseudo-hiperbólico do Exemplo 2.8. Associando a este espaço uma função densidade $\varphi \in C^\infty(I \times_{e^t} M)$, onde $\langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle = 0$, temos, ainda seguindo a terminologia adotada em [41], os chamados φ-***espaços pseudo-hiperbólicos*** $I \times_{e^t} M_\varphi^n$.

Exemplo 2.15. (*Espaços de Schwarzschild com densidade*). Considere o espaço $\overline{\mathfrak{S}}^{n+1}$ do Exemplo 2.9 associado a uma função densidade $\varphi \in C^\infty(\overline{\mathfrak{S}})$, com $\langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle = 0$. Temos

$$\overline{\mathfrak{S}}_\varphi^{n+1} = (r_0(\mathfrak{m}), +\infty) \times \mathbb{S}_\varphi^n,$$

que vamos denominar de φ-***espaço de Schwarzschild*** munido da mesma métrica, função potencial e valor de $r_0(\mathfrak{m})$ do Exemplo 2.9.

Assim como anteriormente, $\overline{\mathfrak{S}}^{n+1}_{\varphi}$ pode ser reduzido à forma $I \times_\rho \mathbb{S}^n_\varphi$ utilizando a transformação (2.13). Dessa forma, segue de (2.14) que

$$\rho'(t)^2 - \rho(t)\rho''(t) = 1 - 2\mathfrak{m}r^{1-n} - m(n-1)r^{1-n} = 1 - \underbrace{\frac{m(n+1)}{r^{n-1}}}_{>0} < 1.$$

Sabe-se que a curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$ é $K_{\mathbb{S}^n} = 1$. Logo,

$$\rho'(t) - \rho(t)\rho''(t) < K_{\mathbb{S}^n},$$

ou seja, o φ-espaço de Schwarzschild cumpre a restrição de curvatura (2.21).

Exemplo 2.16. (*Espaços de Reissner-Nordström com densidade*). Seja $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}$ o espaço de Reissner-Nordström do Exemplo 2.10. Denominamos o produto

$$\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi} = (r_0(\mathfrak{m}, \mathfrak{q}), +\infty) \times \mathbb{S}^n_\varphi$$

de φ-***espaço de Reissner-Nordström***, onde $\varphi \in C^\infty(\overline{\mathfrak{R}}_\varphi)$ é a uma função densidade, com $\langle \overline{\nabla}\varphi, \partial_t \rangle = 0$ e $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi}$ possui mesma métrica, parâmetros e função potencial do Exemplo 2.10.

Aplicando a mudança de variáveis (2.15), reduzimos o espaço $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi}$ à forma $I \times_\rho \mathbb{S}^n_\varphi$. Como $r(t) > r_0(\mathfrak{m}, \mathfrak{q})$, por (2.17) e (2.16) temos

$$\begin{aligned}
\rho'(t)^2 - \rho(t)\rho''(t) &= 1 - 2\mathfrak{m}r(t)^{1-n} + \mathfrak{q}^2 r(t)^{2-2n} - r(t)(n-1)r(t)^{-n}(\mathfrak{m} - \mathfrak{q}^2 r(t)^{1-n}) \\
&= 1 - \underbrace{\mathfrak{m}r(t)^{1-n}}_{>0} - \underbrace{n(\mathfrak{m} - \mathfrak{q}^2 r(t)^{1-n})r(t)^{1-n}}_{>0} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Então,

$$\rho'(t) - \rho(t)\rho''(t) < K_{\mathbb{S}^n}$$

e o espaço $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi}$ cumpre a restrição (2.21).

Com a presença da função densidade φ, podemos definir dois operadores diferenciais modificados que serão de crucial importância para os resultados que veremos mais adiante. O primeiro deles é operador φ-divergente.

Definição 2.17. *Sejam $\overline{M}^{n+1}_{\varphi} = I \times_\rho M^n_\varphi$ um produto warped com densidade $\varphi \in C^\infty(\overline{M}_\varphi)$ e $X \in \mathfrak{X}(\overline{M}_\varphi)$. Definimos o* ***operador φ-divergente*** *do campo X por*

$$\mathrm{div}_\varphi(X) = e^\varphi \mathrm{div}(e^{-\varphi}X).$$

A partir da Definição 2.17, vamos definir o operador φ-Laplaciano.

Definição 2.18. *Sejam* $\overline{M}_{\varphi}^{n+1} = I \times_{\rho} M_{\varphi}^{n}$ *um produto warped com densidade* $\varphi \in C^{\infty}(\overline{M}_{\varphi})$ *e uma função* $\zeta \in C^{\infty}(\overline{M}_{\varphi})$. *Definimos o* ***operador*** φ***-Laplaciano*** *ou* ***drift Laplaciano*** *da função* ζ *por*

$$\Delta_{\varphi}\zeta = \mathrm{div}_{\varphi}(\overline{\nabla}\zeta).$$

Note que, se aplicarmos a Definição 2.17 na igualdade da Definição 2.18 e utilizarmos a propriedade (ii) da Proposição 1.20, temos

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi}\zeta &= e^{\varphi}\mathrm{div}(e^{-\varphi}\overline{\nabla}\zeta) \\ &= e^{\varphi}\left(e^{-\varphi}\mathrm{div}(\overline{\nabla}\zeta) + \left\langle \overline{\nabla}e^{-\varphi}, \overline{\nabla}\zeta \right\rangle\right) \\ &= \Delta\zeta - \left\langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\zeta \right\rangle \end{aligned} \tag{2.30}$$

Observe que, se φ é constante, as Definições 2.17 e 2.18 se tornam, respectivamente, as Definições 1.19 e 1.22 de divergente e Laplaciano convencionais.

2.5 Subvariedades Imersas em $I \times_{\rho} M_{\varphi}^{n}$

Assim como na seção 2.3, vamos continuar trabalhando com imersões em produtos warped, mas desta vez com a presença de uma função densidade. Dessa maneira, seja $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ um produto warped com densidade φ e a subvariedade $\psi : \Sigma^{m} \looparrowright \overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ imersa em $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$. Vamos estabelecer uma generalização do vetor curvatura média da Definição 1.32.

De acordo com Gromov em [31], o chamado ***vetor curvatura média ponderado*** ou simplesmente φ***-vetor curvatura média*** de Σ^{m} é definido por

$$\vec{H}_{\varphi} = \vec{H} + \left(\overline{\nabla}\varphi\right)^{\perp}, \tag{2.31}$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média da Definição 1.32 e $\left(\overline{\nabla}\varphi\right)^{\perp} \in \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$ é a componente normal de $\overline{\nabla}\varphi$ ao longo de Σ^{m}. Observe mais uma vez que se a função densidade é constante, o vetor curvatura média ponderado se iguala ao vetor curvatura média convencional. Para uma discussão moderna e mais aprofundada sobre subvariedades imersas em produtos warped com densidade, ver [22, Capítulos 5,6 e 9].

Conhecendo a função altura (2.19) e as definições de φ-Laplaciano e vetor curvatura média ponderado, podemos enunciar o próximo lema que terá importância vital para os principais resultados deste trabalho. Com a premissa de que vale a condição (2.29), ou seja, a função densidade φ não depende do parâmetro t, vamos estabelecer fórmulas para

calcular o φ-Laplaciano da função altura h de uma subvariedade imersa em um produto warped com densidade, juntamente com φ-Laplaciano de uma primitiva da função warped ρ.

Lema 2.19. *Sejam $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ uma subvariedade imersa em um produto warped $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho M_\varphi^n$ com densidade e uma função densidade φ. Então*

(i) $\Delta_\varphi h = (\log\rho)'(h)[m - |\nabla h|^2] + \langle \vec{H}_\varphi, \partial_t\rangle$;

(ii) $\Delta_\varphi u = m\rho'(h) + \rho(h)\langle \vec{H}_\varphi, \partial_t\rangle$, *onde $u := v(h)$ para alguma primitiva v de ρ.*

Demonstração. Vamos provar o item (i). Pela definição de φ-Laplaciano e levando em conta que a função φ não depende do parâmetro t, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi h &= \Delta h - \langle \nabla h, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\
&= \Delta h - \langle \partial_t - \partial_t^\perp, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\
&= \Delta h - \langle \partial_t, \overline{\nabla}\varphi\rangle + \langle \partial_t^\perp, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\
&= \Delta h + \langle \overline{\nabla}\varphi, \partial_t^\perp\rangle. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, afirmamos que

$$\Delta h = (\log\rho)'(h)[m - |\nabla h|^2] + \langle \vec{H}, \partial_t\rangle. \qquad (2.33)$$

Para verificar esta afirmação, considere os conjuntos $\{E_1, ..., E_m\}$ e $\{N_1, ..., N_p\}$, que são referenciais ortonormais locais em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$, respectivamente, onde $p = n + 1 - m$ é a codimensão de Σ^m. Temos

$$\begin{aligned}
\Delta h = \operatorname{div}(\nabla h) &= \operatorname{div}(\partial_t - \partial_t^\perp) \\
&= \operatorname{div}\left(\partial_t - \sum_{i=1}^p \Theta_i N_i\right) \\
&= \operatorname{div}(\partial_t) - \sum_{i=1}^p \operatorname{div}(\Theta_i N_i), \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

onde $\Theta_i = \langle N_i, \partial_t\rangle$.

Pela definição de divergente, temos

$$\begin{aligned}
\rho(h)\operatorname{div}(\partial_t) &= \sum_{i=1}^m \left\langle \rho(h)\overline{\nabla}_{E_i}\partial_t, E_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}(\rho(h)\partial_t), E_i\right\rangle - \sum_{i=1}^m \langle (E_i\rho(h))\partial_t, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \langle \rho'(h)E_i, E_i\rangle - \sum_{i=1}^m \langle \rho'(h)E_i(h)\partial_t, E_i\rangle .
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\rho(h)\mathrm{div}(\partial_t) &= \rho'(h)\left[m - \sum_{i=1}^{m}\langle E_i(h)\partial_t, E_i\rangle\right] \\
&= \rho'(h)\left[m - \sum_{i=1}^{m}\langle\langle\nabla h, E_i\rangle\partial_t, E_i\rangle\right] \\
&= \rho'(h)\left[m - \sum_{i=1}^{m}\langle\nabla h, E_i\rangle\langle\partial_t, E_i\rangle\right] \\
&= \rho'(h)\left[m - \langle\nabla h, \partial_t^{\top} + \partial_t^{\perp}\rangle\right] \\
&= \rho'(h)\left[m - |\nabla h|^2\right]. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $i = 1, ..., p$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\Theta_i N_i) &= \sum_{j=1}^{m}\left\langle\overline{\nabla}_{E_j}(\Theta_i N_i), E_j\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m}\Theta_i\left\langle\overline{\nabla}_{E_j}N_i, E_j\right\rangle + \sum_{j=1}^{m}\langle(E_j\Theta_i)N_i, E_j\rangle \\
&= -\Theta_i\sum_{j=1}^{m}\langle A_{N_i}E_j, E_j\rangle \\
&= -\Theta_i H_i. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Logo, por (2.34), (2.35) e (2.36),

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}[m - |\nabla h|^2] + \sum_{i=1}^{p}\Theta_i H_i \\
&= (\log\rho)'(h)[m - |\nabla h|^2] + \sum_{i=1}^{p}\langle H_i N_i, \partial_t\rangle \\
&= (\log\rho)'(h)[m - |\nabla h|^2] + \langle\vec{H}, \partial_t\rangle.
\end{aligned}$$

Pelas igualdades (2.32), (2.33) e pela definição do vetor curvatura média ponderado, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi h &= (\log\rho)'(h)[m - |\nabla h|^2] + \langle\vec{H}, \partial_t\rangle + \langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t^{\perp}\rangle \\
&= (\log\rho)'(h)[m - |\nabla h|^2] + \langle\vec{H}, \partial_t\rangle + \langle(\overline{\nabla}\varphi)^{\perp}, \partial_t - \partial_t^{\top}\rangle \\
&= (\log\rho)'(h)[m - |\nabla h|^2] + \langle\vec{H} + (\overline{\nabla}\varphi)^{\perp}, \partial_t\rangle \\
&= (\log\rho)'(h)[m - |\nabla h|^2] + \langle\vec{H}_\varphi, \partial_t\rangle,
\end{aligned}$$

provando o item (i).

Vamos agora provar o item (ii). Utilizando a definição de φ-Laplaciano e sabendo que a função φ não depende do parâmetro t, temos

$$\begin{aligned}\Delta_\varphi u &= \Delta u - \langle \nabla u, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\ &= \Delta u - \rho(h)\langle \nabla h, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\ &= \Delta u - \rho(h)\langle \partial_t - \partial_t^\perp, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\ &= \Delta u + \rho(h)\langle \partial_t^\perp, (\overline{\nabla}\varphi)^\top + (\overline{\nabla}\varphi)^\perp\rangle \\ &= \Delta u + \rho(h)\langle (\overline{\nabla}\varphi)^\perp, \partial_t^\perp\rangle. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Com relação ao Laplaciano de u (ver [6, Lema 1]), vale que

$$\Delta u = m\rho'(h) + \rho(h)\langle \vec{H}, \partial_t\rangle. \tag{2.38}$$

Com efeito, note primeiramente que

$$\nabla u = \nabla(v(h)) = v'(h)\nabla h = \rho(h)\nabla h = \rho(h)\partial_t^\top = K^\top, \tag{2.39}$$

onde $K^\top$ é a componente tangente do campo conforme fechado K em $I \times_\rho M_\varphi^n$.
Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Utilizando as fórmulas de Gauss e Weingarten de Σ^m, temos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X K &= \nabla_X K + II(X, K) \\ &= \nabla_X(K^\top + K^\perp) + II(X, K^\top + K^\perp) \\ &= \nabla_X K^\top + \nabla_X K^\perp + II(X, K^\top) + II(X, K^\perp) \\ &= \nabla_X K^\top + \nabla_X K^\perp + II(X, K^\top) + \overline{\nabla}_X K^\perp - \nabla_X K^\perp \\ &= \nabla_X K^\top + II(X, K^\top) - A_{K^\perp} X + \nabla_X^\perp K^\perp. \end{aligned}$$

Então,

$$(\overline{\nabla}_X K)^\top = \nabla_X K^\top - A_{K^\perp} X. \tag{2.40}$$

Sabendo que $\overline{\nabla}_X K = \rho'(h)X$, obtemos

$$(\overline{\nabla}_X K)^\top = \rho'(h)X. \tag{2.41}$$

Assim, por (2.39), (2.40) e (2.41),

$$\nabla_X \nabla u = \nabla_X K^\top = \rho'(h)X + A_{K^\perp} X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma). \tag{2.42}$$

Considere um conjunto referencial ortonormal local $\{E_1, ..., E_m\}$ em $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Pela definição de Laplaciano, divergente e (2.42), concluímos que

$$\begin{aligned}
\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) &= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{E_i} \nabla u, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \rho'(h) E_i, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle A_{K^\perp} E_i, E_i \rangle \\
&= m\rho'(h) + \sum_{i=1}^{m} \langle II(E_i, E_i), K^\perp \rangle \\
&= m\rho'(h) + \left\langle \sum_{i=1}^{m} II(E_i, E_i), K - K^\top \right\rangle \\
&= m\rho'(h) + \langle \vec{H}, K \rangle \\
&= m\rho'(h) + \rho(h) \langle \vec{H}, \partial_t \rangle.
\end{aligned}$$

Por (2.37), (2.38) e pela definição do vetor curvatura média ponderado,

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi u &= m\rho'(h) + \rho(h)\langle \vec{H}, \partial_t \rangle + \rho(h) \langle (\overline{\nabla}\varphi)^\perp, \partial_t - \partial_t^\top \rangle \\
&= m\rho'(h) + \rho(h) \langle \vec{H}_\varphi, \partial_t \rangle,
\end{aligned}$$

provando o item (ii). ∎

Além da extensão do vetor curvatura média, pode-se também definir uma extensão da curvatura de Ricci, de acordo com o trabalho desenvolvido por Bakry e Émery em [8], cujas origens remontam aos trabalhos de Lichnerowicz [34, 35]. Definimos o ***tensor de Bakry-Émery-Ricci*** de Σ_φ^m como sendo

$$\operatorname{Ric}_\varphi = \operatorname{Ric} - \operatorname{Hess} \varphi, \tag{2.43}$$

onde Ric é o tensor de Ricci de Σ_φ^m e $\operatorname{Hess} \varphi$ é o Hessiano da função densidade φ, definidos em 1.10 e 1.24, respectivamente.

Observação 2.20. *A definição original encontrada na literatura para a equação (2.43) é feita com o sinal o sinal positivo "+". Porém, para os propósitos do nosso trabalho, tomamos o sinal negativo "−".*

De maneira semelhante ao que foi obtido no Lema 2.11, mas desta vez em um espaço ambiente com função densidade φ, vamos finalizar esta seção com uma proposição que oferece uma limitação inferior para os tensores de Ricci e de Bakry-Émery-Ricci.

Proposição 2.21. *Sejam $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho M_\varphi^n$ um produto warped com densidade φ e uma subvariedade imersa $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ tais que vale a restrição de curvatura (2.21).*

Suponha que o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente, a segunda forma fundamental de Σ^m é limitada e a razão $\dfrac{|\rho''|}{\rho}$ é limitada em Σ^m. Então, os tensores de Ricci, Ric*, e o de Bakry-Émery-Ricci de Σ^m,* Ric_φ*, são limitados inferiormente.*

Demonstração. Sejam $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $p = n + 1 - m$. Note primeiramente que

$$\frac{|\vec{H}|^2}{4}|X|^2 \geq 0.$$

Logo, pelo Lema 2.11,

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq -m\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2 - \sum_{i=1}^{p}\left|A_iX - \frac{H_i}{2}X\right|^2. \tag{2.44}$$

Como a segunda forma fundamental II é limitada, existe $C > 0$ tal que $|II| \leq C$.

Sejam $\{E_1, ..., E_m\}$ e $\{N_1, ..., N_p\}$ dois referenciais ortonormais locais em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$, respectivamente. Segue que

$$\begin{aligned}
C^2 \geq |II|^2 &= \sum_{i,j=1}^{m}|II(E_i,E_j)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}|II(E_i,E_i)|^2 + \underbrace{\sum_{i\neq j}|II(E_i,E_j)|^2}_{\geq 0} \\
&\geq \sum_{i=1}^{m}\langle II(E_i,E_i), II(E_i,E_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left\langle \sum_{j=1}^{p}\langle II(E_i,E_i),N_j\rangle N_j, \sum_{k=1}^{p}\langle II(E_i,E_i),N_k\rangle N_k \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j,k=1}^{p}\langle II(E_i,E_i),N_j\rangle\langle II(E_i,E_i),N_k\rangle \underbrace{\langle N_j,N_k\rangle}_{\delta_{jk}} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\langle II(E_i,E_i),N_j\rangle^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\langle A_jE_i,E_i\rangle^2.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Se solicitarmos que $\{E_1, ..., E_m\}$ seja tal que

$$A_jE_i = \lambda_i^jE_i, \quad \lambda_i^j \in \mathbb{R}, \quad \forall\, i \in \{1, ..., m\},$$

então, de (2.45),

$$\begin{aligned} C^2 \geq |II|^2 &\geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\langle \lambda_i^j E_i, E_i\rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i^j)^2 \underbrace{\langle E_i, E_i\rangle^2}_{=1} \\ &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\langle (\lambda_i^j)^2 E_i, E_i\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\langle A_j^2 E_i, E_i\rangle. \end{aligned}$$

Como o operador A_j é auto-adjunto, segue que

$$C^2 \geq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\langle A_j E_i, A_j E_i\rangle = \sum_{j=1}^{p}|A_j|^2.$$

Portanto, $|A_j| \leq C$, para cada $j \in \{1, ..., p\}$.

Note também que, para cada $j \in \{1, ..., p\}$,

$$\begin{aligned} |H_j| = |\mathrm{tr}A_j| = \left|\sum_{i=1}^{m}\langle A_j E_i, E_i\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^{m}|\langle A_j E_i, E_i\rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m}|A_j E_i||E_i| \leq \sum_{i=1}^{m}|A_j| \leq mC. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \left|A_j X - \frac{H_j}{2}X\right|^2 &= \left\langle A_j X - \frac{H_j}{2}X, A_j X - \frac{H_j}{2}X\right\rangle \\ &= |A_j X|^2 - H_j\langle A_j X, X\rangle + \frac{H_j^2}{4}|X|^2 \\ &\leq |A_j|^2|X|^2 + |H_j||A_j||X|^2 + \frac{|H_j|^2}{4}|X|^2 \\ &\leq \left(1 + m + \frac{m^2}{4}\right)C^2|X|^2. \end{aligned}$$

Somando de $j = 1$ a $j = p$,

$$\sum_{j=1}^{p}\left|A_j X - \frac{H_j}{2}X\right|^2 \leq C_1|X|^2, \tag{2.46}$$

onde $C_1 = p\left(1 + m + \frac{m^2}{4}\right)C^2 > 0$.

Por hipótese, a razão $\dfrac{|\rho''|}{\rho}$ é limitada. Logo, existe $C_2 > 0$ tal que $\dfrac{|\rho''|}{\rho} \leq C_2$. Daí,

$$-m\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2 \geq -mC_2|X|^2. \tag{2.47}$$

Logo, por (2.44), (2.46) e (2.47), temos

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq -m\frac{|\rho''|}{\rho}|X|^2 - \sum_{i=1}^{p}\left|A_iX - \frac{H_i}{2}X\right|^2 \geq -(mC_2 + C_1)|X|^2, \tag{2.48}$$

O que conclui que o tensor de Ricci é limitado inferiormente. O Hessiano de φ é limitado superiormente, ou seja, existe $C_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Hess}\,\varphi(X,X) \leq C_3|X|^2. \tag{2.49}$$

Portanto, de (2.43), (2.48) e (2.49),

$$\mathrm{Ric}_\varphi(X,X) = \mathrm{Ric}(X,X) - \mathrm{Hess}\,\varphi(X,X) \geq -(mC_2 + C_1 + C_3)|X|^2,$$

e temos o resultado. ∎

Capítulo 3

Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada em Produtos Warped com Densidade

Estabelecemos no capítulo anterior que os produtos warped são os principais espaços ambientes do nosso trabalho. Neste momento, vamos evidenciar quais são os principais objetos de estudo inseridos nesses espaços, que são os chamados sólitons do fluxo da curvatura média ponderada. Começaremos apresentando os fluxos da curvatura média em variedades Riemannianas convencionais, e, logo em seguida, em variedades com densidade. Com estas noções, vamos definir o que é um sóliton do fluxo da curvatura média que, de forma simplificada, é um tipo de solução especial conhecida para os problemas de fluxo que vamos estabelecer.

3.1 Sólitons do Fluxo da Curvatura Média

Baseado na noção apresentada por Alías, de Lira e Rigoli em [4], escrevemos a seguinte definição.

Definição 3.1. *Sejam Σ^m e $\overline{M}^{n+1}$ variedades Riemannianas e $\epsilon > 0$. Considere a aplicação diferenciável*

$$\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^m \to \overline{M}^{n+1},$$

*tal que, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $\Psi_t = \Psi(t, \cdot) : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão. Definimos o **fluxo da curvatura média** associado a subvariedade $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ como*

sendo a família de imersões $\Psi_t = \Psi(t, \cdot)$ *que satisfaz a seguinte equação de evolução*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \vec{H} \\ \Psi(0, p) = \psi(p) \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $p \in \Sigma^m$ *e* $\vec{H}$ *é o vetor curvatura média de* $\Sigma_t^m = \Psi_t(\Sigma^m)$.

Existe uma classe de soluções especiais conhecidas para o problema (3.1), que são os sólitons do fluxo da curvatura média.

Definição 3.2. *Seja o fluxo da curvatura média que satisfaz o problema* (3.1). *Dizemos que uma imersão isométrica* $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ *é um* ***sóliton do fluxo da curvatura média*** *com respeito ao campo de vetores* $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ *se*

$$\vec{H} = cX^{\perp},$$

ao longo de ψ *para alguma constante* $c \in \mathbb{R}$, *denominada de* ***constante sóliton***.

Nesse contexto, quando o espaço $\overline{M}^{n+1}$ é o produto warped $I \times_\rho M^n$ e o campo de vetores é o campo conforme fechado definido em (2.5), é possível garantir, como foi evidenciado em [4], que um sóliton n-dimensional completo do fluxo da curvatura média é um slice $\{t\} \times M^n$ de $\overline{M}^{n+1}$ para algum $t \in I$.

Destacamos que os sólitons do fluxo da curvatura média em variedades Riemannianas tem recebido considerável atenção na literatura recente, sendo investigados por diversos autores sob diferentes perspectivas geométricas. Para uma abordagem mais ampla deste tópico em variedades Riemannianas mais gerais como também em produtos warped da forma $I \times_\rho M^n$, recomendamos a leitura de [4, 15, 20, 24].

3.2 Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada

Nos principais resultados que vamos apresentar no nosso trabalho, os espaços ambientes serão os produtos warped com densidade. Analogamente ao que estabelecemos na seção anterior, vamos definir o chamado fluxo da curvatura média ponderada e seus sólitons correspondentes. De acordo com o que foi apresentado em [9], temos a seguinte definição para o fluxo da curvatura média ponderada em uma variedade Riemanniana com densidade.

Definição 3.3. *Sejam* $T > 0$, Σ^m *uma variedade Riemanniana e* $\overline{M}_\varphi^{n+1}$ *uma variedade Riemanniana com densidade. Considere a aplicação diferenciável*

$$\Psi : [0, T) \times \Sigma^m \to \overline{M}_\varphi^{n+1},$$

tal que, para cada $t \in [0,T)$*, a aplicação* $\Psi_t = \Psi(t,\cdot) : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ *é uma imersão. O* ***fluxo da curvatura média ponderada*** *associado a subvariedade* $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ *é a família de imersões* $\Psi_t = \Psi(t,\cdot)$ *que satisfaz a seguinte equação de evolução*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \vec{H}_\varphi \\ \Psi(0,p) = \psi(p) \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $p \in \Sigma^m$ *e* $\vec{H}_\varphi$ *é o vetor curvatura média ponderado de* $\Sigma_t^m = \Psi_t(\Sigma^m)$*.*

Dessa maneira, se o espaço ambiente considerado for o produto warped $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho M_\varphi^n$ com função densidade φ que não depende do parâmetro $t \in I$, então podemos definir os sólitons do fluxo da curvatura média ponderada de forma similar à Definição 3.2.

Definição 3.4. *Sejam o produto warped* $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho M_\varphi^n$ *com densidade e o fluxo da curvatura média que satisfaz* (3.2)*. Dizemos que uma imersão isométrica* $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ *é um* ***sóliton do fluxo da curvatura média ponderada*** *com relação ao campo de vetores conforme fechado* $K = \rho(t)\partial_t \in \mathfrak{X}(\overline{M}_\varphi)$ *se*

$$\vec{H}_\varphi = cK^\perp,$$

ao longo de ψ *para alguma constante sóliton* $c \in \mathbb{R}$*.*

Os estudos sobre os sólitons do fluxo da curvatura média ponderada tem ganhado destaque recente, tendo como base os conceitos estabelecidos para subvariedades imersas em produtos warped com densidade, dos quais podemos citar as referências [6] e [22]. A abordagem de Borisenko em [9] serviu como inspiração para o artigo feito por de Lima, Gomes e Velásquez em [23], que busca dar continuidade aos trabalhos contemporâneos sobre os sólitons do fluxo da curvatura média ponderada.

Vamos agora aplicar a Definição 3.4 para mostrar que, fixado $t_* \in I$, o slice $\{t_*\} \times M_\varphi^n$ é um sóliton do fluxo da curvatura média ponderada com respeito ao campo $K = \rho(t)\partial_t$, cuja constante sóliton é dada por

$$c = -n\frac{\rho'(t_*)}{\rho^2(t_*)}.$$

De fato, como já vimos anteriormente em (2.11), o slice $\{t_*\} \times M_\varphi^n$ é subvariedade totalmente umbílica e possui codimensão $p = 1$. Dessa forma, seja $\vec{H}_{t_*}$ o vetor curvatura média do slice calculado em (2.12) e $N_{t_*} \in \mathfrak{X}^\perp(\{t_*\} \times M_\varphi)$ a direção normal ao slice, de

forma que $N_{t_*} = \partial_t$. Sabendo que φ não depende de t, temos

$$\begin{aligned}\vec{H}_\varphi = \vec{H}_{t_*} + \left(\overline{\nabla}\varphi\right)^\perp &= \vec{H}_{t_*} + \langle\overline{\nabla}\varphi, N_{t_*}\rangle N_{t_*} \\ &= -n\frac{\rho'(t_*)}{\rho(t_*)}\partial_t + \underbrace{\langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle}_{=0}\partial_t \\ &= -n\frac{\rho'(t_*)}{\rho^2(t_*)}\rho(t_*)\partial_t^\perp \\ &= cK^\perp,\end{aligned}$$

onde $c = -n\dfrac{\rho'(t_*)}{\rho^2(t_*)}$ é a constante sóliton.

Note também que, no slice $\{t_*\} \times M^n_\varphi$, a função altura é constante, com $h = t_*$. Se $u = v(h)$, onde v é uma primitiva de ρ, temos, pelo item (ii) do Lema 2.19,

$$\begin{aligned}0 = \Delta_\varphi u &= m\rho'(t_*) + \rho(t_*)\langle\vec{H}_\varphi, \partial_t\rangle \\ &= m\rho'(t_*) + \rho(t_*)\langle c\rho(t_*)\partial_t^\perp, \partial_t\rangle \\ &= m\rho'(t_*) + c\rho^2(t_*). \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Logo, utilizando a notação e terminologias introduzidas em [4] e [20], temos a chamada ***função sóliton***

$$\begin{aligned}\zeta_c : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \zeta_c(t) := m\rho'(t) + c\rho^2(t),\end{aligned} \qquad (3.4)$$

que possui a interessante propriedade de detectar sólitons dados pelos slices $\{t_*\} \times M^n_\varphi$, pois, como vimos em (3.3), t_* é obtido implicitamente pela condição $\zeta_c(t_*) = 0$.

Capítulo 4

Não Existência e Redução de Codimensão de Sólitons do Fluxo da Curvatura Média Ponderada em Produtos Warped com Densidade

Com base em tudo que foi apresentado nos capítulos anteriores, vamos estabelecer resultados de não existência e redução de codimensão de sólitons do fluxo da curvatura média ponderada imersos em produtos warped com densidade. Utilizaremos duas versões do princípio do máximo de Omori-Yau, um princípio do máximo que aproveita a noção de convergência para zero no infinito e, finalmente, condições apropriadas de integrabilidade. Algumas aplicações dos resultados são também apresentadas neste capítulo.

4.1 Resultados utilizando uma Primeira Versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau

Começamos esta seção estabelecendo a seguinte definição, que aborda a noção do princípio do máximo de Omori-Yau (ver [38] e [44]). Neste trabalho, não apresentaremos uma discussão detalhada sobre este princípio. Uma abordagem mais profunda deste tópico pode ser encontrada em [5, Capítulo 2]. Para os nossos objetivos, a seguinte noção é suficiente.

Definição 4.1. *Sejam Σ^m uma variedade Riemanniana e $\varphi : \Sigma^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dizemos que o φ-Laplaciano Δ_φ satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau em Σ^m se, para qualquer função $f \in C^2(\Sigma)$ com $\sup_\Sigma f < +\infty$, existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em Σ^m satisfazendo*

$$\lim_{k\to\infty} f(p_k) = \sup_\Sigma f, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla f(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \Delta_\varphi f(p_k) \leq 0.$$

Equivalentemente, para qualquer função $f \in C^2(\Sigma)$ com $\inf_\Sigma f > -\infty$, existe uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em Σ^m satisfazendo

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_\Sigma f, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla f(x_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \Delta_\varphi f(x_k) \geq 0.$$

Vamos enunciar, sem demonstração, a seguinte versão do princípio do máximo de Omori-Yau com relação ao operador φ-Laplaciano, a partir uma limitação do tensor de Bakry-Émery-Ricci. Mais detalhes podem ser consultados em [15].

Lema 4.2. *Sejam Σ^m uma variedade Riemanniana e $\varphi : \Sigma^m \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ e Ric_φ é limitado inferiormente. Então, o φ-Laplaciano Δ_φ satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau.*

Antes de prosseguir, vamos estabelecer a seguinte noção que aparecerá durante todo este capítulo. Dizemos que um ***slab*** de $I \times_\rho M^n$ é uma região delimitada por dois slices, isto é, um conjunto da forma

$$[t_1, t_2] \times M^n = \{(t, q) \in I \times_\rho M^n \, : \, t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Vamos agora enunciar e demonstrar o primeiro resultado de não existência deste capítulo, utilizando a noção do princípio do máximo de Omori-Yau estabelecida no Lema 4.2.

Teorema 4.3. *Seja $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho M_\varphi^n$ um produto warped com densidade obedecendo a restrição de curvatura (2.21) tal que o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente. Então, não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c \neq 0$ e segunda forma fundamental limitada, contido em um slab $[t_1, t_2] \times M^n$ tal que a função sóliton $\zeta_c(t)$ tem sinal estrito em $[t_1, t_2]$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, a existência de um sóliton $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada com as características do enunciado.

Pelo item (i) do Lema 2.19 temos

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi h &= (\log\rho)'(h)[m-|\nabla h|^2]+\langle \vec{H}_\varphi, \partial_t\rangle \\
&= m\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2 + \frac{1}{\rho(h)}\langle cK^\perp, \rho(h)\partial_t\rangle \\
&= m\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2 + \frac{1}{\rho(h)}\langle c\rho(h)(\partial_t-\partial_t^\top), \rho(h)\partial_t\rangle \\
&= m\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2 + \frac{c\rho^2(h)}{\rho(h)}(1-\langle\nabla h, \partial_t\rangle) \\
&= \frac{1}{\rho(h)}(m\rho'(h)+c\rho^2(h)) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2 - \langle c\rho(h)\nabla h, \partial_t\rangle \\
&= \frac{\zeta_c(h)-\rho'(h)|\nabla h|^2}{\rho(h)} - \langle c\nabla u, \partial_t^\top + \partial_t^\perp\rangle \\
&= \frac{\zeta_c(h)-\rho'(h)|\nabla h|^2}{\rho(h)} - \langle \nabla(uc), \nabla h\rangle. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Segue, de (4.1), que

$$\Delta_\varphi h + \langle\nabla(uc), \nabla h\rangle = \frac{\zeta_c(h)-\rho'(h)|\nabla h|^2}{\rho(h)}.$$

Defina $\tilde{\varphi} := \varphi - uc$ como uma função densidade modificada onde $u = v(h)$ para alguma primitiva v de ρ. Pela definição de φ-Laplaciano, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{\varphi}} h = \Delta_{\varphi-uc} h &= \Delta h - \langle\nabla h, \overline{\nabla}(\varphi-uc)\rangle \\
&= \Delta h - \langle\nabla h, \overline{\nabla}\varphi\rangle + \langle\nabla h, \nabla(uc)\rangle \\
&= \Delta_\varphi h + \langle\nabla h, \nabla(uc)\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta_{\tilde{\varphi}} h = \frac{\zeta_c(h)-\rho'(h)|\nabla h|^2}{\rho(h)}. \qquad (4.2)$$

Como Σ^m está contido em um slab, a função altura h é limitada e, consequentemente, $\rho(h)$ e $u = v(h)$ também são limitadas, devido à diferenciabilidade de ρ. Logo, as derivadas de ρ são limitadas e $\operatorname{Hess} u$ é limitado.

Por hipótese, vale a restrição de curvatura (2.21), o Hessiano de φ é limitado superiormente e a segunda forma fundamental de Σ^m é limitada. Segue, pela Proposição 2.21, que o tensor $\operatorname{Ric}_\varphi$ é limitado inferiormente.

Assim, podemos aplicar a Definição (2.43) do tensor de Bakry-Émery-Ricci para obter

$$\operatorname{Ric}_{\tilde{\varphi}} = \operatorname{Ric}_{\varphi-uc} = \operatorname{Ric} - \operatorname{Hess}(\varphi-uc) = \operatorname{Ric}_\varphi + c\operatorname{Hess} u.$$

Dessa maneira, $\mathrm{Ric}_{\tilde{\varphi}}$ também é limitado inferiormente. Logo, pelo Lema 4.2, temos que o $\tilde{\varphi}$-Laplaciano $\Delta_{\tilde{\varphi}}$ satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau. Assim, pela Definição 4.1, existem sequências $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em Σ^m tais que

$$\lim_{k\to\infty} h(p_k) = \sup_{\Sigma} h =: h^*, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla h(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{k\to\infty} \Delta_{\tilde{\varphi}} h(p_k) \leq 0,$$

e

$$\lim_{k\to\infty} h(x_k) = \inf_{\Sigma} h =: h_*, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla h(x_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{k\to\infty} \Delta_{\tilde{\varphi}} h(x_k) \geq 0.$$

Podemos então obter, utilizando a expressão (4.2), que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_{k\to\infty} \Delta_{\tilde{\varphi}} h(p_k) \\ &= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{\zeta_c(h(p_k)) - \rho'(h(p_k))|\nabla h(p_k)|^2}{\rho(h(p_k))} \right) \\ &= \frac{\zeta_c(h^*)}{\rho(h^*)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{k\to\infty} \Delta_{\tilde{\varphi}} h(x_k) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{\zeta_c(h(x_k)) - \rho'(h(x_k))|\nabla h(x_k)|^2}{\rho(h(x_k))} \right) \\ &= \frac{\zeta_c(h_*)}{\rho(h_*)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\zeta_c(h^*) \leq 0 \leq \zeta_c(h_*),$$

com $t_1 \leq h_* \leq h^* \leq t_2$, contradizendo a hipótese de que $\zeta_c(t)$ tem sinal estrito em $[t_1, t_2]$.

■

Vamos agora apresentar algumas aplicações do Teorema 4.3. Considere primeiramente a variedade produto com densidade do Exemplo 2.13. Temos o seguinte corolário.

Corolário 4.4. *Seja $I \times M^n_\varphi$ um produto com densidade cuja fibra M^n tem curvatura seccional não-negativa, tal que o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente. Então, não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright I \times M^n_\varphi$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a ∂_t, com constante sóliton $c \neq 0$ e segunda forma fundamental limitada, contido em um slab $[t_1, t_2] \times M^n$.*

Demonstração. Basta observar que $\rho \equiv 1$. Deste modo,

$$\rho'^2 - \rho\rho'' = 0.$$

Logo, a restrição (2.21) é cumprida. Aplicando o Teorema 4.3, seque o resultado.

■

Quando a função warped é a função exponencial $\rho(t) = e^t$, obtemos o φ-espaço pseudo-hiperbólico do Exemplo 2.14 e mais um corolário do Teorema 4.3.

Corolário 4.5. *Seja $I \times_{e^t} M^n_\varphi$ um φ-espaço pseudo-hiperbólico cuja fibra M^n tem curvatura seccional não-negativa, tal que o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente. Então, não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright I \times_{e^t} M^n_\varphi$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = e^t\partial_t$, com constante sóliton $c < 0$ e segunda forma fundamental limitada, contido em um slab $[t_1, t_2] \times M^n$ onde $t_1 < \log\left(-\frac{m}{c}\right)$ ou $t_2 > \log\left(-\frac{m}{c}\right)$.*

Demonstração. Como $\rho(t) = e^t$,

$$\rho'^2 - \rho\rho'' = e^{2t} - e^t e^t = 0.$$

Então a restrição (2.21) é satisfeita. Pelo Teorema 4.3, não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright I \times_{e^t} M^n_\varphi$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = e^t\partial_t$, com constante sóliton $c \neq 0$, segunda forma fundamental limitada, contido em um slab tal que $\zeta_c(t) < 0$ ou $\zeta_c(t) > 0$ em $[t_1, t_2]$. Dessa forma, sendo $c < 0$,

$$\zeta_c(t) < 0 \;\Leftrightarrow\; e^t(m + ce^t) < 0 \;\Leftrightarrow\; m + ce^t < 0 \;\Leftrightarrow\; t > \log\left(-\frac{m}{c}\right).$$

Analogamente,

$$\zeta_c(t) > 0 \;\Leftrightarrow\; m + ce^t > 0 \;\Leftrightarrow\; t < \log\left(-\frac{m}{c}\right).$$

■

Considere agora o φ-espaço de Schwarzschild do Exemplo 2.15. Já vimos que este espaço satisfaz a restrição de curvatura (2.21). Dessa maneira, temos a seguinte consequência do Teorema 4.3.

Corolário 4.6. *Seja $\overline{\mathfrak{S}}^{n+1}_\varphi = I \times_\rho \mathbb{S}^n_\varphi$ o φ-espaço de Schwarzschild, onde a função warped ρ é obtida de (2.13) e o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente. Então, não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{\mathfrak{S}}^{n+1}_\varphi$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c < 0$ e segunda forma fundamental limitada, inserido em um slab $[t_1, t_2] \times \mathbb{S}^n$ onde $\rho(t) \geq \sqrt{-\frac{n}{c}}$ para $t \geq t_1$.*

Demonstração. Note que, como $r(t) = \rho(t) > 0$, temos

$$V_{\mathfrak{m}}(r(t)) = 1 - 2\mathfrak{m}\left(\frac{1}{r(t)}\right)^{n-1} < 1, \quad \forall t \in I.$$

Suponha que existe um sóliton $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{\mathfrak{S}}_\varphi^{n+1}$ nas condições do enunciado. Sendo $c < 0$, temos

$$\begin{aligned} \rho(t) = r(t) \geq \sqrt{-\frac{n}{c}} \quad &\Leftrightarrow \quad cr^2(t) \leq -n \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{n\sqrt{V_{\mathfrak{m}}(r(t))} + cr^2(t)}_{\zeta_c(t)} \leq n(\sqrt{V_{\mathfrak{m}}(r(t))} - 1) < 0, \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_1$, o que contraria o Teorema 4.3.

■

Como última decorrência do Teorema 4.3, vamos retornar ao φ-espaço de Reissner-Nordström do Exemplo 2.16 para lembrar que este espaço também satisfaz a restrição de curvatura (2.21).

Corolário 4.7. *Seja $\overline{\mathfrak{R}}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho \mathbb{S}_\varphi^n$ o φ-espaço de Reissner-Nordström, onde a função warped ρ é obtida de (2.15) e o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente. Então, não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{\mathfrak{R}}_\varphi^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c < 0$ e segunda forma fundamental limitada, inserido em um slab $[t_1, t_2] \times \mathbb{S}^n$ onde $V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t)) < \frac{c^2}{n^2} r(t)^4$ para todo $t \in [t_1, t_2]$.*

Demonstração. Suponha que existe um sóliton $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{\mathfrak{R}}_\varphi^{n+1}$ nas condições do enunciado. Como $c < 0$, segue que

$$\begin{aligned} V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t)) < \frac{c^2}{n^2} r(t)^4 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t))} < \frac{|c|}{n} r(t)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad n\sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t))} - |c| r(t)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{n\sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t))} + cr(t)^2}_{\zeta_c(t)} < 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_1, t_2]$, o que é uma contradição com o Teorema 4.3.

■

Observação 4.8. Se tomarmos $c > 0$ nos Corolários 4.5, 4.6 e 4.7, teremos $\zeta_c(t) > 0$. Nesse cenário, os resultados de não existência são obtidos imediatamente.

Ainda no contexto do princípio do máximo de Omori-Yau do Lema 4.2, se estabelecermos um controle adequado do gradiente da função altura h pela função sóliton ζ_c, podemos obter o seguinte resultado de redução de codimensão.

Teorema 4.9. *Seja $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho M_\varphi^n$ um produto warped com densidade obedecendo a restrição de curvatura (2.21) tal que o Hessiano da função densidade φ é limitado*

superiormente. Seja também $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ *um sóliton completo do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a* $K = \rho(t)\partial_t$*, com constante sóliton* $c \neq 0$*, segunda forma fundamental limitada e contido em um slab* $[t_1, t_2] \times M^n$*. Se a função sóliton* ζ_c *é não-negativa (resp. não-positiva) e a função altura* h *satisfaz*

$$|\nabla h| \leq \inf_{\Sigma^m} \zeta_c \qquad (resp.\ |\nabla h| \leq \inf_{\Sigma^m}(-\zeta_c)) \tag{4.3}$$

em Σ^m*, então* $\psi(\Sigma^m)$ *está contido em um slice* $\{t\} \times M^n$ *para algum* $t \in [t_1, t_2]$*.*

Demonstração. Seja $u := v(h)$ para alguma primitiva v de ρ. Pelo Lema 2.19, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi u &= m\rho'(h) + \rho(h)\langle \vec{H}_\varphi, \partial_t\rangle \\
&= m\rho'(h) + \langle cK^\perp, \rho(h)\partial_t\rangle \\
&= m\rho'(h) + \langle c\rho(h)(\partial_t - \partial_t^\top), \rho(h)\partial_t\rangle \\
&= m\rho'(h) + c\rho^2(h)\langle \partial_t - \nabla h, \partial_t\rangle \\
&= m\rho'(h) + c\rho^2(h)(1 - \langle \nabla h, \partial_t\rangle) \\
&= \zeta_c(h) - \rho(h)\langle c\rho(h)\nabla h, \partial_t\rangle \\
&= \zeta_c(h) - \langle \nabla(uc), \rho(h)(\nabla h + \partial_t^\perp)\rangle \\
&= \zeta_c(h) - \langle \nabla(uc), \nabla u\rangle
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Segue de (4.4) que

$$\Delta_\varphi u + \langle \nabla(uc), \nabla u\rangle = \zeta_c(h).$$

Definindo $\tilde{\varphi} := \varphi - uc$, temos, pela definição de φ-Laplaciano,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{\varphi}} u = \Delta_{\varphi - uc} u &= \Delta u - \langle \nabla u, \overline{\nabla}(\varphi - uc)\rangle \\
&= \Delta u - \langle \nabla u, \overline{\nabla}\varphi\rangle + \langle \nabla u, \nabla(uc)\rangle \\
&= \Delta_\varphi u + \langle \nabla u, \nabla(uc)\rangle.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\Delta_{\tilde{\varphi}} u = \zeta_c(h) \tag{4.5}$$

Por hipótese, Σ^m está contido em um slab de $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$, que obedece a restrição de curvatura (2.21), possui segunda forma fundamental limitada e o Hessiano da função φ é limitado superiormente. Logo, utilizando exatamente o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 4.3, podemos concluir que o tensor de Bakry-Émery-Ricci, $\mathrm{Ric}_{\tilde{\varphi}}$, é limitado inferiormente.

Assim, pelo Lema 4.2, $\Delta_{\tilde{\varphi}}$ satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau, ou seja, existem sequências $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em Σ^m tais que

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = \sup_{\Sigma} u, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla u(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \Delta_{\tilde{\varphi}} u(p_k) \leq 0.$$

e

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \inf_{\Sigma} u, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla u(x_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \Delta_{\tilde{\varphi}} u(x_k) \geq 0.$$

Se ζ_c é não-negativa, pela igualdade (4.5) temos

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} \Delta_{\tilde{\varphi}} u(p_k) = \lim_{k\to\infty} \zeta_c(h(p_k)) \geq 0.$$

Então, $\lim_{k\to\infty} \zeta_c(h(p_k)) = 0$, consequentemente, $\inf_{\Sigma} \zeta_c = 0$. Portanto, pela hipótese (4.3),

$$|\nabla h| \leq \inf_{\Sigma} \zeta_c = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma^m,$$

o que garante que $\nabla h = 0$ em Σ^m.

Concluímos que h é constante em Σ^m, acarretando que $\psi(\Sigma^m)$ está contido em um slice $\{t\} \times M^n$, para algum $t \in [t_1, t_2]$.

Por outro lado, se ζ_c é não-positiva,

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \Delta_{\tilde{\varphi}} u(x_k) = \lim_{k\to\infty} \zeta_c(h(x_k)) \leq 0.$$

Logo, $\lim_{k\to\infty} \zeta_c(h(x_k)) = 0$, o que implica que $\sup_{\Sigma} \zeta_c = 0$. Mas,

$$\inf_{\Sigma}(-\zeta_c) = -\sup_{\Sigma} \zeta_c = 0.$$

Por (4.3), $\nabla h = 0$ em Σ^m, donde segue o resultado.

■

Como aplicação do Teorema 4.9, temos o seguinte resultado no φ-espaço pseudo-hiperbólico.

Corolário 4.10. *Seja $I \times_{e^t} M^n_\varphi$ um φ-espaço pseudo-hiperbólico cuja fibra M^n tem curvatura seccional não-negativa, tal que o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente. Se $\psi : \Sigma^m \looparrowright I \times_{e^t} M^n_\varphi$ é um sóliton completo do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = e^t\partial_t$, com constante sóliton $c < 0$, segunda forma fundamental limitada e inserido em um slab $[t_1, t_2] \times M^n_\varphi$ onde $t_1 \leq \log\left(-\frac{m}{c}\right)$ ou $t_2 \geq \log\left(-\frac{m}{c}\right)$, então Σ^m está contido no slice $\{\log\left(-\frac{m}{c}\right)\} \times M^n_\varphi$.*

Demonstração. Observando que $\rho(t) = e^t$, temos

$$\rho'^2 - \rho\rho'' = e^{2t} - e^t e^t = 0.$$

Então, a restrição (2.21) é cumprida. Seja $\psi : \Sigma^m \looparrowright I \times_{e^t} M^n_\varphi$ um sóliton completo do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = e^t\partial_t$ cumprindo as condições do enunciado. Note que

$$\zeta_c(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; m + ce^t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \log\left(-\frac{m}{c}\right).$$

Logo, o próprio slice $\{\log\left(-\frac{m}{c}\right)\}\times M^n_\varphi$ é um sóliton do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = e^t\partial_t$.

Além disso, como $c < 0$,

$$\begin{aligned} t \leq \log\left(-\frac{m}{c}\right) &\Leftrightarrow e^t \leq -\frac{m}{c} \\ &\Leftrightarrow m + ce^t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow e^t(m + ce^t) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \zeta_c(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$t \geq \log\left(-\frac{m}{c}\right) \;\Leftrightarrow\; \zeta_c(t) \leq 0.$$

Pelo Teorema 4.9, segue o resultado.

■

No contexto dos φ-espaços de Schwarzschild e de Reissner-Nordström, temos os seguintes corolários do Teorema 4.9.

Corolário 4.11. *Seja $\overline{\mathfrak{S}}^{n+1}_\varphi = I\times_\rho \mathbb{S}^n_\varphi$ o φ-espaço de Schwarzschild, onde a função warped ρ é obtida de (2.13) e o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente. Se $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{\mathfrak{S}}^{n+1}_\varphi$ é um sóliton completo do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c < 0$, segunda forma fundamental limitada e inserido em um slab $[t_1, t_2]\times\mathbb{S}^n$ onde $\rho(t) \geq \sqrt{-\frac{n}{c}}$ para $t \geq t_1$, então Σ^n está contido em um slice $\{t\}\times\mathbb{S}^n$, para algum $t \in [t_1, t_2]$.*

Demonstração. Já vimos que, no φ-espaço de Schwarzschild, a função warped ρ cumpre a restrição (2.21). Considere $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{\mathfrak{S}}^{n+1}_\varphi$ um sóliton cumprindo as condições do enunciado. Como $c < 0$, temos

$$\rho(t) = r(t) \geq \sqrt{-\frac{n}{c}} \;\Leftrightarrow\; cr^2(t) \leq -n.$$

Logo,

$$\zeta_c(t) = n\sqrt{V_{\mathfrak{m}}(r(t))} + cr^2(t) \leq n\left(\sqrt{V_{\mathfrak{m}}(r(t))} - 1\right) < 0,$$

donde concluímos o resultado pelo Teorema 4.9.

■

Corolário 4.12. *Seja $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi} = I \times_{\rho} \mathbb{S}^n_{\varphi}$ o φ-espaço de Reissner-Nordström, onde a função warped ρ é obtida de (2.15) e o Hessiano da função densidade φ é limitado superiormente. Se $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi}$ é um sóliton completo do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c < 0$, segunda forma fundamental limitada, inserido em um slab $[t_1, t_2] \times \mathbb{S}^n$ onde $V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t)) < \frac{c^2}{n^2} r(t)^4$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, então Σ^n está contido em um slice $\{t\} \times \mathbb{S}^n$, para algum $t \in [t_1, t_2]$.*

Demonstração. No espaço $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi}$, a restrição (2.21) é satisfeita. Seja $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi}$ um sóliton cumprindo as condições do enunciado. Como $c < 0$, segue que

$$\begin{aligned} V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t)) < \frac{c^2}{n^2} r(t)^4 &\Leftrightarrow \sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t))} < \frac{|c|}{n} r(t)^2 \\ &\Leftrightarrow n\sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t))} - |c| r(t)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{n\sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t))} + cr(t)^2}_{\zeta_c(t)} < 0, \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.9, temos o resultado.

■

4.2 Resultados utilizando uma Segunda Versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau

Nesta seção continuaremos apresentando resultados de não existência e redução de codimensão, porém utilizando uma outra versão do princípio do máximo de Omori-Yau. Para isso, precisamos primeiramente estabelecer algumas condições.

Seja o espaço $\mathcal{H}$ formado pelas funções positivas $\Lambda \in C^1(\mathbb{R}^+_*)$ que satisfazem as seguintes propriedades.

(i) $\inf\limits_{\mathbb{R}^+_*} \dfrac{\Lambda'}{\Lambda^{3/2}} > -\infty$.

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}} \notin L^1(+\infty)$.

(iii) $(\sqrt{\Lambda})'(t) \geq -B(\log t + 1)$, para $t \gg 1$ e alguma constante positiva B.

Estas condições tem origem em [5, Corolário 8.3], que servirá de base para estabelecermos uma segunda versão do princípio do máximo de Omori-Yau com relação ao operador φ-Laplaciano. A ideia é trazer novamente uma limitação no tensor de Bakry-Émery-Ricci, mas desta vez utilizando funções radiais Λ, onde $\Lambda \in \mathcal{H}$. Para isso, vamos inicialmente enunciar o seguinte Lema.

Lema 4.13. *Seja Σ^m uma variedade Riemanniana completa munida de uma função densidade $\varphi : \Sigma^m \to \mathbb{R}$ tal que $|\nabla\varphi|$ é limitado. Se, para alguma função radial $\Lambda(r)$ com $\Lambda \in \mathcal{H}$, o tensor de Bakry-Émery-Ricci Ric_φ satisfaz*

$$\mathrm{Ric}_{-\varphi}(X, X) \geq -\Lambda(r)|X|^2,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então o φ-Laplaciano Δ_φ satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau.

Dessa forma, podemos agora enunciar e demonstrar a próxima Proposição que estabelece uma segunda versão do princípio do máximo de Omori-Yau.

Proposição 4.14. *Seja $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho M_\varphi^n$ um produto warped com densidade obedecendo a restrição de curvatura (2.21), cuja função densidade φ tem $|\overline{\nabla}\varphi|$ limitado e o Hessiano $\overline{\mathrm{Hess}}\,\varphi$ é limitado inferiormente por uma função radial $\Lambda(r)$ com $\Lambda \in \mathcal{H}$. Seja também $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ uma subvariedade completa contida em um slab de $\overline{M}_\varphi^{n+1}$. Se a segunda forma fundamental de Σ^m é limitada, então o φ-Laplaciano Δ_φ satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau.*

Demonstração. Vamos primeiramente calcular o Hessiano da função densidade φ. Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{N_1, ..., N_p\}$ um referencial ortonormal local em $\mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$, com $p = n + 1 - m$. Por (1.5), temos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Hess}}\,\varphi(X, X) = \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}\varphi, X\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X [(\overline{\nabla}\varphi)^\top + (\overline{\nabla}\varphi)^\perp], X\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X [\nabla\varphi + \sum_{i=1}^p \langle \overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle N_i], X\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \nabla\varphi, X\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_X \left(\sum_{i=1}^p \langle \overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle N_i \right), X \right\rangle \\
&= \langle (\overline{\nabla}_X \nabla\varphi)^\top + (\overline{\nabla}_X \nabla\varphi)^\perp, X\rangle \\
&\qquad + \left\langle \sum_{i=1}^p \overline{\nabla}_X \left(\langle \overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle N_i \right), X \right\rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla\varphi, X\rangle + \sum_{i=1}^p \langle \overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle \langle -A_i X, X\rangle \\
&= \mathrm{Hess}\,\varphi(X, X) + \sum_{i=1}^p \langle \overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle \langle -A_i X, X\rangle.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\operatorname{Hess}\varphi(X,X) = \overline{\operatorname{Hess}}\,\varphi(X,X) + \sum_{i=1}^{p}\langle\overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle\langle A_iX, X\rangle. \tag{4.6}$$

Observe que, para cada $i \in \{1,...,p\}$,

$$\langle\overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle\langle A_iX, X\rangle \geq -|\langle\overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle\langle A_iX, X\rangle|.$$

Somando de $i = 1$ até $i = p$ e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\langle\overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle\langle A_iX, X\rangle &\geq -\sum_{i=1}^{p}|\langle\overline{\nabla}\varphi, N_i\rangle||\langle A_iX, X\rangle| \\ &\geq -\sum_{i=1}^{p}|\overline{\nabla}\varphi||A_iX||X| \\ &\geq -\sum_{i=1}^{p}|\overline{\nabla}\varphi||A_i||X|^2. \end{aligned}\tag{4.7}$$

Por (4.6) e (4.7),

$$\operatorname{Hess}\varphi(X,X) \geq \overline{\operatorname{Hess}}\,\varphi(X,X) - \sum_{i=1}^{p}|\overline{\nabla}\varphi||A_i||X|^2. \tag{4.8}$$

Por hipótese, $|\overline{\nabla}\varphi|$ é limitado e $\overline{\operatorname{Hess}}\,\varphi$ é limitado inferiormente por uma função radial $\Lambda(r)$, com $\Lambda \in \mathcal{H}$. Logo, existe uma constante positiva C_1 tal que

$$|\overline{\nabla}\varphi| \leq C_1 \quad \text{e} \quad \overline{\operatorname{Hess}}\,\varphi(X,X) \geq -\Lambda(r)|X|^2. \tag{4.9}$$

Temos também que a segunda forma fundamental de Σ^m é limitada. Pela demonstração da Proposição 2.21, isso implica que existe uma constante positiva C_2 tal que

$$|A_i| \leq C_2, \tag{4.10}$$

para cada $i \in \{1,...,p\}$.
Logo, por (4.8), (4.9) e (4.10),

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}\varphi(X,X) &\geq -\Lambda(r)|X|^2 - \sum_{i=1}^{p}C_1C_2|X|^2 \\ &\geq -(\Lambda(r) + C_3)|X|^2, \end{aligned}\tag{4.11}$$

onde $C_3 = pC_1C_2 > 0$.

Por outro lado, Σ^m está contido em um slab de $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$. Vimos, na demonstração do Teorema 4.3, que isso implica que a função warped ρ e suas derivadas são limitadas, devido à diferenciabilidade de ρ. Consequentemente, a razão $\frac{|\rho''|}{\rho}$ é limitada.

Então, por (4.10) e pela demonstração da Proposição 2.21, existe uma constante positiva C_4 tal que

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq -C_4|X|^2. \tag{4.12}$$

Por (4.11), (4.12) e pela Definição (2.43), temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_{-\varphi}(X,X) &= \mathrm{Ric}(X,X) - \mathrm{Hess}(-\varphi)(X,X) \\ &= \mathrm{Ric}(X,X) + \mathrm{Hess}\,\varphi(X,X) \\ &\geq -\tilde{\Lambda}(r)|X|^2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde

$$\tilde{\Lambda}(r) = \Lambda(r) + C, \tag{4.14}$$

com $C = C_3 + C_4 > 0$.

É necessário mostrar que $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{H}$. Para isso, vamos verificar as propriedades (i), (ii) e (iii) do início desta Seção. De (4.14), temos

$$\frac{\tilde{\Lambda}'}{\tilde{\Lambda}^{3/2}} = \frac{\Lambda'}{(\Lambda + C)^{3/2}} = \frac{\Lambda'}{\Lambda^{3/2}} \frac{\Lambda^{3/2}}{(\Lambda + C)^{3/2}}. \tag{4.15}$$

Observe que

$$0 < \frac{\Lambda^{3/2}}{(\Lambda + C)^{3/2}} < 1.$$

Como $\Lambda \in \mathcal{H}$, existe $C_5 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda^{3/2}} \geq C_5.$$

Se $C_5 \geq 0$,

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda^{3/2}} \frac{\Lambda^{3/2}}{(\Lambda + C)^{3/2}} \geq 0. \tag{4.16}$$

Se $C_5 < 0$,

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda^{3/2}} \frac{\Lambda^{3/2}}{(\Lambda + C)^{3/2}} \geq C_5 \frac{\Lambda^{3/2}}{(\Lambda + C)^{3/2}} > C_5. \tag{4.17}$$

Segue, de (4.15), (4.16) e (4.17), que $\dfrac{\tilde{\Lambda}'}{\tilde{\Lambda}^{3/2}}$ verifica a propriedade (i), ou seja,

$$\inf_{\mathbb{R}_*^+} \frac{\tilde{\Lambda}'}{\tilde{\Lambda}^{3/2}} > -\infty.$$

Vamos verificar a propriedade (ii). Seja $\mathcal{M} = \max\{\Lambda(r), C\}$. Por (4.14), temos

$$\tilde{\Lambda}(r) = \Lambda(r) + C \leq 2\mathcal{M}.$$

Daí,

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{\Lambda}(r)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mathcal{M}}}.$$

Se $\mathcal{M} = \Lambda(r)$,

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{\Lambda}(r)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\Lambda(r)}}.$$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}} \notin L^1(+\infty)$, temos $\dfrac{1}{\sqrt{\tilde{\Lambda}}} \notin L^1(+\infty)$.
Por outro lado, se $\mathcal{M} = C$,

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{\Lambda}(r)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{C}}.$$

Sendo $a > 0$, segue que

$$\int_a^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{2}\sqrt{C}} = +\infty,$$

consequentemente, $\dfrac{1}{\sqrt{\tilde{\Lambda}}} \notin L^1(+\infty)$. Logo, $\tilde{\Lambda}$ verifica a propriedade (ii).
Para verificar a propriedade (iii), note primeiramente que, por (4.14),

$$\begin{aligned}(\sqrt{\tilde{\Lambda}})' = \frac{\tilde{\Lambda}'}{2\sqrt{\tilde{\Lambda}}} &= \frac{\Lambda'}{2\sqrt{\Lambda + C}} \\ &= \frac{\Lambda'}{2\sqrt{\Lambda}}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda + C}} \\ &= (\sqrt{\Lambda})'\frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda + C}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Como $\Lambda \in \mathcal{H}$,

$$(\sqrt{\Lambda})'(t) \geq -B(\log t + 1), \tag{4.19}$$

para $t \gg 1$ e alguma constante positiva B.

Observando que

$$0 < \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda + C}} < 1, \tag{4.20}$$

temos, de (4.18), (4.19) e (4.20), que

$$(\sqrt{\tilde{\Lambda}})'(t) \geq -B(\log t + 1),$$

para alguma constante $B > 0$ e $t \gg 1$.

Portanto, $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{H}$ e, por (4.13) e pelo Lema 4.13, temos o resultado.

■

Com a Proposição 4.14 demonstrada, podemos apresentar o seguinte resultado de não existência dessa seção.

Teorema 4.15. *Seja $\overline{M}_{\varphi}^{n+1} = I \times_{\rho} M_{\varphi}^{n}$ um produto warped com densidade obedecendo a restrição de curvatura (2.21), cuja função densidade φ tem $|\overline{\nabla}\varphi|$ limitado e o Hessiano $\overline{\mathrm{Hess}}\,\varphi$ é limitado inferiormente por uma função radial $\Lambda(r)$ com $\Lambda \in \mathcal{H}$. Então, não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c \neq 0$, contido em um slab $[t_1, t_2] \times M^n$ tal que $\zeta_c(t)$ tem sinal estrito em $[t_1, t_2]$ e cuja segunda forma fundamental é limitada.*

Demonstração. Suponha, por contradição, a existência de um sóliton $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada com as características do enunciado.

Pelo item (i) do Lema 2.19 temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\varphi} h &= m\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2 + \langle cK^{\perp}, \partial_t\rangle \\
&= m\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2 + \langle c\rho(h)(\partial_t - \partial_t^{\top}), \partial_t\rangle \\
&= m\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2 + c\rho(h)(1 - \langle \nabla h, \nabla h + \partial_t^{\perp}\rangle) \\
&= m\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2 + \frac{c\rho^2(h)}{\rho(h)}(1 - |\nabla h|^2) \\
&= \frac{\zeta_c(h)}{\rho(h)} - \left[\frac{\rho'(h) + c\rho^2(h)}{\rho(h)}\right]|\nabla h|^2. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Por hipótese, o espaço ambiente satisfaz a restrição de curvatura (2.21), a função densidade tem $|\overline{\nabla}\varphi|$ limitado, o Hessiano $\overline{\mathrm{Hess}}\,\varphi$ é limitado inferiormente por uma função radial $\Lambda(r)$ com $\Lambda \in \mathcal{H}$ e Σ^m está contido em um slab de $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$. Como a segunda forma fundamental é limitada, pela Proposição 4.14, o φ-Laplaciano Δ_{φ} satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau.

Logo, existem sequências $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em Σ^m tais que

$$\lim_{k\to\infty} h(p_k) = \sup_{\Sigma} h =: h^*, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla h(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{k\to\infty} \Delta_{\varphi} h(p_k) \leq 0,$$

e

$$\lim_{k\to\infty} h(x_k) = \inf_{\Sigma} h =: h_*, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla h(x_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{k\to\infty} \Delta_{\varphi} h(x_k) \geq 0.$$

Assim, podemos deduzir, utilizando a expressão (4.21), que

$$\begin{aligned}
0 &\geq \limsup_{k\to\infty} \Delta_{\varphi} h(p_k) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{\zeta_c(h(p_k))}{\rho(h(p_k))} - \left[\frac{\rho'(h(p_k)) + c\rho^2(h(p_k))}{\rho(h(p_k))}\right]|\nabla h(p_k)|^2 \right) \\
&= \frac{\zeta_c(h^*)}{\rho(h^*)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{k\to\infty} \Delta_\varphi h(x_k) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{\zeta_c(h(x_k))}{\rho(h(x_k))} - \left[\frac{\rho'(h(x_k)) + c\rho^2(h(x_k))}{\rho(h(x_k))} \right] |\nabla h(x_k)|^2 \right) \\ &= \frac{\zeta_c(h_*)}{\rho(h_*)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\zeta_c(h^*) \leq 0 \leq \zeta_c(h_*),$$

com $t_1 \leq h_* \leq h^* \leq t_2$, contradizendo a hipótese de que $\zeta_c(t)$ tem sinal estrito em $[t_1, t_2]$.

■

4.3 Resultados utilizando Convergência para Zero no Infinito

A partir desta seção, vamos apresentar uma abordagem diferente das seções anteriores. Com base no trabalho feito em [3] por Alías, Caminha e Nascimento, vamos utilizar um princípio do máximo no infinito para variedades Riemannianas completas e não-compactas, de forma a estabelecer um resultado de redução de codimensão.

Para isso, vamos primeiramente definir a noção de convergência para zero no infinito.

Definição 4.16. *Sejam (Σ^m, g) uma variedade Riemanniana completa e não-compacta e a aplicação $d(\cdot, o) : \Sigma^m \to [0, +\infty)$ que denota a distância Riemanniana em Σ^m, medida de um ponto fixo $o \in \Sigma^m$. Dizemos que a função $f \in C^\infty(\Sigma)$ converge para zero no infinito quando satisfaz a condição*

$$\lim_{d(x,o)\to+\infty} f(x) = 0.$$

Estabelecida a Definição 4.16, vamos enunciar o seguinte lema, que corresponde a [3, Teorema 2.2, item (a)]. Este resultado estabelece um princípio do máximo no infinito que vai nos auxiliar no próximo resultado de redução de codimensão.

Lema 4.17. *Sejam (Σ^m, g) uma variedade Riemanniana completa e não-compacta e $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ um campo diferenciável de vetores em Σ^m. Suponha que existe uma função $f \in C^\infty(\Sigma)$ não-negativa, não identicamente nula e que converge para zero no infinito tal que $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$. Se $\mathrm{div} X \geq 0$ em Σ^m, então $\langle \nabla f, X \rangle \equiv 0$ em Σ^m.*

Antes de enunciar o próximo resultado, vamos estabelecer a seguinte noção: dada uma variedade Riemanniana Σ^m completa e não-compacta e $t_* \in \mathbb{R}$, dizemos que uma

função $f \in C^\infty(\Sigma)$ converge superiormente (inferiormente) para t_* no infinito quando $f \geq t_*$ ($f \leq t_*$) e a função $\tilde{f} := f - t_*$ ($\tilde{f} := t_* - f$) cumpre a Definição 4.16, ou seja, converge para zero no infinito.

Teorema 4.18. *Seja $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times_\rho M_\varphi^n$ um produto warped com densidade, com fibra M^n completa e não-compacta e função densidade φ. Seja também $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ um sóliton completo e não-compacto do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c \neq 0$. Se a função altura h de Σ^m converge superiormente (resp. inferiormente) para algum $t_* \in I$ no infinito e a função sóliton $\zeta_c(h)$ associada a Σ^m satisfaz*

$$\rho'(h)|\nabla h|^2 \leq \zeta_c(h) \qquad (\textit{resp. } \rho'(h)|\nabla h|^2 \geq \zeta_c(h)\,),$$

então Σ^m está contido no slice M_{t_*}.

Demonstração. Suponha que Σ^m não está contido no slice M_{t_*}. Vamos lidar primeiramente com o caso em que a função altura h converge superiormente para $t_* \in I$ no infinito. Defina a função

$$f := h - t_*$$

e o campo de vetores

$$X = e^{-\tilde{\varphi}}\nabla f,$$

onde $\tilde{\varphi} := \varphi - uc$, com $u = v(h)$, sendo v uma primitiva de ρ.

Por hipótese, obtemos $f \geq 0$, f não identicamente nula e $f \in C^\infty(\Sigma)$. Segue que

$$\langle \nabla f, X\rangle = \langle \nabla f, e^{-\tilde{\varphi}}\nabla f\rangle = e^{-\tilde{\varphi}}|\nabla f|^2 \geq 0.$$

Pela definição de φ-divergente e (4.2), temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}X &= e^{-\tilde{\varphi}}e^{\tilde{\varphi}}\mathrm{div}(e^{-\tilde{\varphi}}\nabla f)\\
&= e^{-\tilde{\varphi}}\mathrm{div}_{\tilde{\varphi}}(\nabla f)\\
&= e^{-\tilde{\varphi}}\Delta_{\tilde{\varphi}}(h - t_*)\\
&= e^{-\tilde{\varphi}}\Delta_{\tilde{\varphi}}h\\
&= e^{-\tilde{\varphi}}\left(\frac{\zeta_c(h) - \rho'(h)|\nabla h|^2}{\rho(h)}\right).
\end{aligned}$$

Pela hipótese, temos $\rho'(h)|\nabla h|^2 \leq \zeta_c(h)$. Consequentemente, $\mathrm{div}X \geq 0$.

Logo, pelo Lema 4.17, $\langle \nabla f, X\rangle \equiv 0$ em Σ^m, ou seja, $e^{-\tilde{\varphi}}|\nabla f|^2 = 0$, o que equivale a $\nabla f = 0$. Então, $\nabla h = 0$ em Σ^m.

Assim, h é constante em Σ^m e, como h converge para t_* no infinito, concluímos que $h = t_*$, fazendo com que Σ^m esteja contido no slice M_{t_*}, o que é uma contradição.

Analogamente, se a função altura h converge inferiormente para $t_* \in I$ no infinito, definimos a função

$$g := t_* - h.$$

Logo, $g \geq 0$, g é não identicamente nula e $g \in C^\infty(\Sigma)$. Daí,

$$\langle \nabla g, X \rangle = e^{-\tilde{\varphi}} |\nabla g|^2 \geq 0$$

e

$$\mathrm{div} X = e^{-\tilde{\varphi}} \Delta_{\tilde{\varphi}} g = e^{-\tilde{\varphi}} \Delta_{\tilde{\varphi}} (t_* - h) = -e^{-\tilde{\varphi}} \Delta_{\tilde{\varphi}} h = -e^{-\tilde{\varphi}} \left(\frac{\zeta_c(h) - \rho'(h)|\nabla h|^2}{\rho(h)} \right) \geq 0,$$

pois, pela hipótese, $\rho'(h)|\nabla h|^2 \geq \zeta_c(h)$. Portanto, utilizando novamente o Lema 4.17, concluímos que h é constante em Σ^m e temos o resultado.

■

Se o espaço considerado for o produto simples com densidade, temos a seguinte consequência do Teorema 4.18.

Corolário 4.19. *Seja $\overline{M}_\varphi^{n+1} = I \times M_\varphi^n$ um produto com densidade φ, com fibra M^n completa e não-compacta. Seja também $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ um sóliton completo e não-compacto do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c \neq 0$. Se a função altura h de Σ^m converge superiormente (resp. inferiormente) para algum $t_* \in I$ no infinito com função sóliton $\zeta_c(h) \geq 0$ (resp. $\zeta_c(h) \leq 0$), então Σ^m está contido no slice M_{t_*}.*

Demonstração. Note que $\rho(h) = 1$ e $\rho'(h) = 0$. Logo, $\zeta_c(h) = c$.
Se h converge superiormente (resp. inferiormente) para algum t_* no infinito e $\zeta_c(h) \geq 0$ (resp. $\zeta_c(h) \leq 0$), então

$$0 = \rho'(h)|\nabla h|^2 \leq \zeta_c(h) \qquad (\text{resp. } 0 = \rho'(h)|\nabla h|^2 \geq \zeta_c(h)).$$

Pelo Teorema 4.18, Σ^m está contido no slice M_{t_*}.

■

4.4 Resultados utilizando Condições de Integrabilidade

Nesta última seção vamos obter mais resultados de não existência baseados em algumas condições de integrabilidade. Serão também apresentadas algumas aplicações. Vamos inicialmente demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.20. *Seja $\overline{M}_{\varphi}^{n+1} = I \times_{\rho} M_{\varphi}^{n}$ um produto warped com densidade. Não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c \in \mathbb{R}$, contido em um slab de $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$, cuja função sóliton modificada $\overline{\zeta}_c := h\zeta_c$ é estritamente positiva tal que*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \int_{B_r} |\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma = 0,$$

onde $\tilde{\varphi} := \varphi - uc$, com $u = v(h)$ para alguma primitiva v de ρ, B_r é a bola geodésica de raio $r > 0$ e $d\Sigma$ denota o elemento padrão de volume de Σ^m.

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista um sóliton $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada nas condições do enunciado. Da expressão (4.5), temos

$$h\Delta_{\tilde{\varphi}} u = h\zeta_c(h) = \overline{\zeta}_c(h).$$

Utilizando a definição de φ-Laplaciano, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{B_s} \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma &= \int_{B_s} (h\Delta_{\tilde{\varphi}} u) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma \\
&= \int_{B_s} h e^{\tilde{\varphi}} \mathrm{div}(e^{-\tilde{\varphi}} \nabla u) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma \\
&= \int_{B_s} h \mathrm{div} X \, d\Sigma,
\end{aligned}$$

onde $X = e^{-\tilde{\varphi}} \nabla u = e^{-\tilde{\varphi}} \rho(h) \nabla h$.

Sabendo que

$$\mathrm{div}(hX) = h\mathrm{div}X + \langle \nabla h, X \rangle,$$

e utilizando o Teorema da Divergência e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_s} \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma &= \int_{B_s} \mathrm{div}(hX) d\Sigma - \int_{B_s} \langle \nabla h, X \rangle d\Sigma \\
&= \int_{B_s} \mathrm{div}(h e^{-\tilde{\varphi}} \rho(h) \nabla h) d\Sigma - \int_{B_s} \langle \nabla h, e^{-\tilde{\varphi}} \rho(h) \nabla h \rangle d\Sigma \\
&= \int_{\partial B_s} \langle \nu, h e^{-\tilde{\varphi}} \rho(h) \nabla h \rangle d\sigma - \int_{B_s} \underbrace{\rho(h) e^{-\tilde{\varphi}} |\nabla h|^2}_{\geq 0} d\Sigma \\
&\leq \int_{\partial B_s} |\nu| |h e^{-\tilde{\varphi}} \rho(h) \nabla h| d\sigma \\
&= \int_{\partial B_s} \rho(h) |h| |\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\sigma.
\end{aligned}$$

Como Σ^m está contido em um slab de $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$, a altura h é limitada. Consequentemente, pela diferenciabilidade da ρ, $\rho(h)$ também é limitada. Então, para alguma constante

positiva $C \in \mathbb{R}$,

$$\rho(h)|h| \leq C.$$

Logo,

$$\int_{B_s} \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma \leq C \int_{\partial B_s} |\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\sigma. \tag{4.22}$$

Dessa forma, de (4.22), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{C}{r}\int_{B_r} |\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma &= \frac{C}{r}\int_0^r \left(\int_{\partial B_s} |\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\sigma\right) ds \\
&\geq \frac{1}{r}\int_{\frac{r}{2}}^r \left(C\int_{\partial B_s} |\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\sigma\right) ds \\
&\geq \frac{1}{r}\int_{\frac{r}{2}}^r \left(\int_{B_{\frac{r}{2}}} \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma\right) ds \\
&= \frac{1}{r}\left(\int_{\frac{r}{2}}^r ds\right)\left(\int_{B_{\frac{r}{2}}} \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_{\frac{r}{2}}} \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma \leq \frac{2C}{r}\int_{B_r} |\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma. \tag{4.23}$$

Sabendo que $\overline{\zeta}_c$ é estritamente positiva, pelas hipóteses e (4.23), concluímos que

$$\begin{aligned}
0 < \int_\Sigma \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma &= \lim_{r\to+\infty} \int_{B_{\frac{r}{2}}} \overline{\zeta}_c(h) e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma \\
&\leq 2C \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\int_{B_r} |\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma = 0,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição.

■

Antes de apresentar os últimos resultados, vamos considerar o espaço das funções φ-integráveis a Lebesgue, definido por

$$\mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma) := \left\{ f \,:\, \Sigma^m \to \mathbb{R} \;:\; \int_\Sigma |f| e^{-\varphi} d\Sigma < +\infty \right\}.$$

Vamos enunciar o seguinte lema auxiliar, que é uma consequência de [11, Proposição 2.1] (ver também [45, Corolário pág. 660].

Lema 4.21. *Sejam $(\Sigma^m; g; d\mu = e^{-\varphi} d\Sigma)$ uma variedade Riemanniana completa de dimensão m com densidade e $f \in C^\infty(\Sigma)$ uma função diferenciável tal que $\Delta_\varphi f$ não muda de sinal em Σ^m. Se $|\nabla f| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$, então $\Delta_\varphi f$ é identicamente nulo em Σ^m.*

Segue então o nosso último resultado de não existência.

Teorema 4.22. *Seja $\overline{M}_{\varphi}^{n+1} = I \times_{\rho} M_{\varphi}^{n}$ um produto warped com densidade. Não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, com constante sóliton $c \in \mathbb{R}$, contido em um slab de $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$, cuja função altura h satisfaz $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_{\varphi}(\Sigma)$ tal que*

(a) *$c\rho'(h) \geq 0$ em Σ^m e*

(b) *$c \neq 0$ ou o conjunto em que $\rho'(h) \neq 0$ é denso em Σ^m.*

Demonstração. Vamos supor, por contradição, a existência de um sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{M}_{\varphi}^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada cumprindo as hipóteses.

Considerando novamente a função densidade modificada $\tilde{\varphi} = \varphi - uc$, onde $u = v(h)$ para alguma primitiva v de ρ, vamos mostrar primeiramente que $\mathcal{L}^1_{\varphi}(\Sigma) \subset \mathcal{L}^1_{\tilde{\varphi}}(\Sigma)$.

De fato, seja $f \in \mathcal{L}^1_{\varphi}(\Sigma)$. Como Σ^m está contido em um slab de $\overline{M}_{\varphi}^{n+1}$, a função altura h é limitada em Σ^m e, consequentemente, as funções u e e^{-uc} são limitadas. Então, $\inf_{\Sigma} e^{-uc} < +\infty$. Logo,

$$(\inf_{\Sigma} e^{-uc}) \int_{\Sigma} |f| e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma \leq \int_{\Sigma} |f| e^{-\tilde{\varphi}} e^{-uc} d\Sigma = \int_{\Sigma} |f| e^{-(\tilde{\varphi}+uc)} d\Sigma = \int_{\Sigma} |f| e^{-\varphi} d\Sigma < +\infty$$

Assim, $f \in \mathcal{L}^1_{\tilde{\varphi}}(\Sigma)$.
Dessa forma, pela hipótese, obtemos que $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_{\tilde{\varphi}}(\Sigma)$.

Vamos agora analisar as possibilidades envolvendo os itens (a) e (b) do enunciado. De (a), temos $c\rho'(h) \geq 0$ em Σ^m. Segue que:

- $c \neq 0$: Caso $c > 0$, temos $\rho'(h) \geq 0$ e, consequentemente,

$$\zeta_c(h) = m\rho'(h) + c\rho^2(h) > 0.$$

  Analogamente, caso $c < 0$, temos $\rho'(h) \leq 0$ e $\zeta_c(h) < 0$.

- $\rho'(h) \neq 0$ em um subconjunto denso de Σ^m: Caso $\rho'(h) > 0$, temos $c \geq 0$ e $\zeta_c(h) > 0$. Se $\rho'(h) < 0$, temos $c \leq 0$ e $\zeta_c(h) < 0$.

Então, em qualquer caso, temos $\zeta_c(h) \neq 0$ em um subconjunto denso de Σ^m. Logo, de (4.5) concluímos que $\Delta_{\tilde{\varphi}} u \neq 0$ neste subconjunto.

Por outro lado, sabendo que $\rho(h)$ é limitada (pois h é limitada), $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_{\tilde{\varphi}}(\Sigma)$ e $\nabla u = \rho(h)\nabla h$, segue que

$$\int_\Sigma |\nabla u| e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma = \int_\Sigma |\rho(h)\nabla h| e^{-\tilde{\varphi}} d\Sigma < +\infty.$$

Ou seja, $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1_{\tilde{\varphi}}(\Sigma)$. Portanto, pelo Lema 4.21, obtemos que $\Delta_{\tilde{\varphi}} u = 0$ em Σ^m, o que é uma contradição.

■

Vamos agora apresentar algumas aplicações do Teorema 4.22. Quando o espaço ambiente é uma variedade produto com densidade da forma $I \times M^n_\varphi$, temos o seguinte Corolário.

Corolário 4.23. *Não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright I \times M^n_\varphi$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a ∂_t, com constante sóliton $c \neq 0$, contido em um slab de $I \times M^n_\varphi$, cuja função altura h satisfaz $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$.*

Demonstração. Basta observar que $\rho \equiv 1$. Como $c \neq 0$, temos $c\rho'(h) = 0$ em Σ^m, satisfazendo os itens (a) e (b) do Teorema 4.22.

■

No contexto dos φ-espaços pseudo-hiperbólicos, temos mais um corolário.

Corolário 4.24. *Não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright I \times_{e^t} M^n_\varphi$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = e^t\partial_t$, com constante sóliton $c \geq 0$, contido em um slab do φ-espaço pseudo-hiperbólico $I \times_{e^t} M^n_\varphi$, cuja função altura h satisfaz $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$.*

Demonstração. Note que $\rho(t) = e^t$. Logo, $\rho'(h) > 0$ em Σ^m e, consequentemente, $c\rho'(h) \geq 0$ em Σ^m, satisfazendo os itens (a) e (b) do Teorema 4.22.

■

Finalizamos o nosso trabalho com mais duas consequências do Teorema 4.22, desta vez envolvendo os φ-espaços de Schwarzschild e Reissner-Nordström.

Corolário 4.25. *Não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{\mathfrak{S}}^{n+1}_\varphi$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, onde ρ é obtida de (2.13), com constante sóliton $c \geq 0$, contido em um slab do φ-espaço de Schwarzschild $\overline{\mathfrak{S}}^{n+1}_\varphi$, cuja função altura h satisfaz $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$.*

Demonstração. Note que

$$\rho(t) = r(t) \quad \text{e} \quad \rho'(t) = r'(t) = \sqrt{V_{\mathfrak{m}}(r(t))} > 0.$$

Logo, como $c \geq 0$,

$$c\rho'(h) \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho'(h) > 0 \quad \text{em } \Sigma^m.$$

Então, as condições (a) e (b) do Teorema 4.22 são satisfeitas.

■

Corolário 4.26. *Não existe sóliton completo $\psi : \Sigma^m \looparrowright \overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi}$ do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $K = \rho(t)\partial_t$, onde ρ é obtida de (2.15), com constante sóliton $c \geq 0$, contido em um slab do φ-espaço de Reissner-Nordström $\overline{\mathfrak{R}}^{n+1}_{\varphi}$, cuja função altura h satisfaz $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_{\varphi}(\Sigma)$.*

Demonstração. Temos

$$\rho(t) = r(t) \quad \text{e} \quad \rho'(t) = r'(t) = \sqrt{V_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}}(r(t))} > 0.$$

Então,

$$c\rho'(h) \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho'(h) > 0 \quad \text{em } \Sigma^m,$$

satisfazendo as condições (a) e (b) do Teorema 4.22.

■

Referências Bibliográficas

[1] Alías, L. J., Caminha, A., and do Nascimento, F. Y. *Uniqueness of Constant Mean Curvature Surfaces Properly Immersed in a Slab.* Comment. Math. Helv. *81* (2006), 653–663. 28

[2] Alías, L. J., Caminha, A., and do Nascimento, F. Y. *Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces.* Proc. Edinburg Math. Soc. *50* (2007), 511–526. 28

[3] Alías, L. J., Caminha, A., and do Nascimento, F. Y. *A Maximum Principle at Infinity with Applications to Geometric Vector Fields.* J. Math. Anal. Appl. *474* (2019), 242–247. 64

[4] Alías, L. J., de Lira, J. H., and Rigoli, M. *Mean Curvature Flow Solitons in the Presence of Conformal Vector Fields.* Journal of Geometric Analysis *30* (2020), 1466–1529. 2, 45, 46, 48

[5] Alías, L. J., Mastrolia, P., and Rigoli, M. *Maximum Principles and Geometric Applications.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2016. 49, 59

[6] Araújo, J. G., de Lima, H. F., Gomes, W. F., and Velásquez, M. A. L. *Submanifolds immersed in a warped product with density.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin *27* (2020), 683–696. 40, 47

[7] Araújo, J. G., de Lima, H. F., Lima Jr., E. A., and Santos, M. S. *On the geometry of submanifolds in certain warped products.* Int. J. Math. *32*, 2150044 (2021). 30

[8] Bakry, D., and Émery, M. *Diffusions Hypercontractives.* Séminaire de probabilités (Strasbourg) *19* (1985), 177–206. 41

[9] Borisenko, A. A., and Miquel, V. *Gaussian Mean Curvature Flow.* J. Evol. Equ. *10* (2010), 413–423. 3, 46, 47

[10] Caminha, A. *Tópicos de Análise em Variedades.* Notas de Aula, Universidade Federal do Ceará, 2006. 5, 10, 12

[11] Caminha, A. *The Geometry of Closed Conformal Vector Fields on Riemannian Spaces.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series *42* (2011), 277–300. 25, 68

[12] Cao, H. D., and Li, H. *A gap theorem for self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension.* Calc. Var. PDE *46* (2013), 879–889. 2

[13] Cavalcante, M. P., and Espinar, J. M. *Halfspace type theorems for self-shrinkers.* Bull. London Math. Soc. *48* (2016), 242–250. 2

[14] Chen, B. Y. *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds. World Scientific*, London, 2017. 29

[15] Chen, Q., and Qiu, H. *Rigidity of Self-Shrinkers and Translating Solitons of Mean Curvature Flows.* Adv.Math. *294* (2016), 517–531. 46, 50

[16] Cheng, Q. M., and Peng, Y. *Complete self-shrinkers of the mean curvature flow.* Calc. Var. PDE *52* (2015), 497–506. 2

[17] Colding, T., Ilmanen, T., and Minicozzi, W. P. *Rigidity of generic singularities of mean curvature flow.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. *121* (2015), 363–382. 2

[18] Colding, T., Ilmanen, T., Minicozzi, W. P., and Pedersen, E. K. *Mean curvature flow.* Bull. Amer. Math. Soc. *52* (2015), 297–333. 2

[19] Colding, T., and Minicozzi, W. P. *Generic mean curvature flow I: Generic singularities.* Ann. Math. *175* (2012), 755–833. 2

[20] Colombo, G., Mari, L., and Rigoli, M. *Remarks on Mean Curvature Flow Solitons in Warped Products*. Discrete Cont. Dyn. Syst. *13* (2020), 1957–1991. 2, 28, 46, 48

[21] Dajczer, M., et al. *Submanifolds and Isometric Immersions*. Mathematics Lecture Series. Publish or Perish, Inc., Houston, 1990. 5, 14, 15, 17

[22] de Lima, H. F., Bisci, G. M., and Velásquez, M. A. L. *Immersions in Warped Product Spaces*. Frontiers in Mathematics. *Birkhäuser Cham, Springer Nature Switzerland AG*, 2025. 37, 47

[23] de Lima, H. F., Gomes, W. F., and Velásquez, M. A. L. *Solitons of the Weighted Mean Curvature Flow Immersed in Warped Products with Density: Nonexistence and Codimension Reduction*. Journal of Mathematical Analysis and Applications *557*, 1 (2026). 1, 3, 47

[24] de Lima, H. F., Santos, M. S., and Velásquez, M. A. L. *Mean curvature flow solitons in warped products: Nonexistence, rigidity and stability*. Rend. Circ. Mat. Palermo *73* (2024), 2653–2688. 2, 46

[25] Ding, Q., and Xin, Y. L. *The rigidity theorems of self-shrinkers*. Trans. Amer. Math. Soc. *366* (2014), 5067–5085. 2

[26] Ding, Q., Xin, Y. L., and Yang, L. *The rigidity theorems of self-shrinkers via Gauss maps*. Adv. Math. *303* (2016), 151–174. 2

[27] Do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*, 5 ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2015. 5, 7, 8, 9, 11, 14, 15

[28] Espinar, J. M. *Gradient Schrodinger operators, manifolds with density and applications*. Journal of Mathematical Analysis and Applications *455*, 2 (2017), 1505–1528. 3, 34

[29] FANG, F., LI, X.-D., and ZHANG, Z. *Two Generalizations of Cheeger-Gromoll Splitting Theorem via Bakry-Emery Ricci Curvature*. Annales de L'Institut Fourier *59* (2009), 563–573. 35

[30] García-Martínez, S. C., Impera, D., and Rigoli, M. *A sharp height estimate for compact hypersurfaces with constant k-mean curvature in warped product spaces.* Proc. Edinburg Math. Soc. *58* (2015), 403–419. 28

[31] Gromov, M. *Isoperimetry of Waists and Concentration of Maps.* GAFA, Geometric and Functional Analysis *13* (2003), 178–215. 3, 34, 37

[32] Huisken, G. *Flow by mean curvature convex surfaces into spheres.* J. Diff. Geom. *20* (1984), 237–266. 2

[33] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*, 2 ed. Springer, New York, 2012. 13

[34] Lichnerowicz, A. *Variétés Riemanniennes à tenseur C non négatif.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B *271* (1970), A650–A653. 41

[35] Lichnerowicz, A. *Variétés Kählériennes à première classe de Chern non negative et variétés Riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non negative.* J. Diff. Geom. *6* (1971), 47–94. 41

[36] Montiel, S. *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds.* Indiana Univ. Math. J. *48* (1999), 711–748. 28

[37] Morgan, F. *Manifolds with Density.* Notices of the American Mathematical Society *52* (2005), 853–858. 3, 34

[38] Omori, H. *Isometric immersions of Riemannian manifolds.* J. Math. Soc. Japan *19* (1967), 205–214. 49

[39] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* Academic Press, London, 1983. 5, 6, 8, 9, 19, 24, 28

[40] Pigola, S., and Rimoldi, M. *Complete self-shrinkers confined into some regions of the space.* Ann. Glob. Anal. Geom. *45* (2014), 47–65. 2

[41] Tashiro, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector felds.* Trans. Amer. Math. Soc. *117* (1965), 251–275. 28, 35

[42] Wald, R. M. *General Relativity. The University of Chicago Press*, Chicago and London, 1984. 29

[43] Wei, G., and Wylie, W. *Comparison Geometry for the Bakry-Emery Ricci Tensor.* J.Differ.Geom. *83* (2009), 377–405. 3, 34

[44] Yau, S. T. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds.* Comm. Pure Appl. Math. *28* (1975), 201–228. 49

[45] Yau, S. T. *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry.* Indiana Univ. Math. J. *25* (1976), 659–670. 68