

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Invariantes de Tutte-Grothendieck em Grafos

por

Aluizio Freire da Silva Junior<sup>1</sup>

sob orientação do

Prof. Dr. Braulio Maia Junior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Março/2006

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo estabelecer algumas técnicas de T-G aplicadas a alguns problemas da teoria dos grafos, como: o problema da existência de um  $\phi$ -fluxo não-nulo, problemas relacionados a orientações acíclicas, coloração a duas variáveis, e percolação. Para isto, estaremos apresentando uma pequena introdução ao polinômio de Tutte para matróides com seus principais resultados.

# Abstract

This work has as objective to establish some T-G techniques applied to some problems of the graph theory, as: the problem of existence of a nowhere-zero 6-flow, problems concern to acyclic orientations, two-variable coloring, and percolation. To do this, we shall present a little introduction to Tutte polynomials to matroids with its main results.

# Invariantes de Tutte-Grothendieck em Grafos

por

**Aluizio Freire da Silva Junior**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Manoel José M. Soares Lemos**

---

**Prof. Dr. Jorge César Abrantes de Figueiredo**

---

**Prof. Dr. Braulio Maia Junior**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Março/2006**

# Agradecimentos

A Deus e ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, os quais são os responsáveis por todas as realizações da minha vida.

À minha amada esposa Nuara pelo seu companheirismo e incentivo.

Aos meus pais Aluizio e Josefa por sempre me estimularem a estudar, concebendo os estudos como a chave para a abertura de muitas portas. Sem esquecer da minha querida irmã Daniele pela torcida e orações.

Ao meu "pai" Prof. Braulio Maia, pela orientação desta dissertação e pelos seus vários conselhos que me acompanharão em toda minha vida profissional.

Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da UEPB pelo incentivo que me deram para que eu prosseguisse em meus estudos, dentre estes gostaria de destacar o Prof. Osmundo Alves, Prof. Aldo Maciel, e Prof. José Urânio.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFCG: Prof. Vânio Fragoso, Prof. Daniel Pellegrino, Prof. Marco Aurélio, Prof. Braulio Maia (mais uma vez!), e ao Prof. Chico pelas dicas para o L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

Aos meus queridos irmãos Lino Marcos e Marta Élid pelas dicas e correções no decorrer do estudo do artigo de onde originou-se esta dissertação.

Aos professores Manoel Lemos e Jorge Abrantes por aceitarem ao convite de participarem da banca.

Ao CNPq pelo apoio financeiro o qual possibilitou minha dedicação exclusiva a este mestrado.

Finalmente, a todos aqueles que, no decorrer desta jornada, contribuíram para a realização deste sonho.

# Dedicatória

Aos meus pais, a minha esposa,  
e a todos aqueles que de alguma  
forma contribuíram para realiza-  
ção deste sonho.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Grafos . . . . .	8
1.1.1 Conexão em série e em paralelo . . . . .	11
1.1.2 2-soma . . . . .	11
1.2 Matróides . . . . .	12
<b>2 Polinômio de Tutte</b>	<b>15</b>
2.1 Função de Möbius . . . . .	26
2.2 O Polinômio Característico . . . . .	27
<b>3 Coloração e Fluxo</b>	<b>32</b>
3.1 Coloração . . . . .	32
3.2 Fluxo . . . . .	35
3.3 Conjectura do 5-fluxo de Tutte . . . . .	43
3.4 Coloração à duas variáveis . . . . .	53
<b>4 Outras Aplicações</b>	<b>59</b>
4.1 Orientações em Grafos . . . . .	59
4.2 "Reliability" e Percolação . . . . .	64
4.2.1 Valor de $t(M; 1/p, 1/q)$ . . . . .	71
4.2.2 Grafos com arestas de probabilidades de retenção diferentes. . .	76
<b>Bibliografia</b>	<b>80</b>

# Introdução

A idéia de invariantes numéricos teve seu início na teoria dos grafos através de pesquisadores como Oswald Veblen, George Birkhoff, Hassler Whitney, e William Tutte, quando consideraram coloração e fluxo em grafos. Esta idéia foi então estendida para teoria das matróides, a qual fez surgir uma série de aplicações importantes; no entanto, neste trabalho nos restringiremos às aplicações em grafos. Para isto, introduziremos um invariante na classe das matróides chamado de invariante de Tutte-Grothendieck ou, simplesmente, T-G invariante; e mostraremos algumas aplicações em áreas da teoria dos grafos, tais como: coloração própria e monocromática de vértices, fluxos, orientação, e percolação. Com este objetivo, no capítulo 1 estaremos apresentando algumas definições e resultados das teorias dos grafos e das matróides que consideramos importantes para uma melhor compreensão deste trabalho.

No capítulo 2 procuraremos obter uma generalização dos T-G invariantes generalizados, a qual será a principal ferramenta que utilizaremos para as aplicações nos demais capítulos. Além desta generalização, alguns exemplos de T-G invariantes generalizados, como o polinômio característico e a função de Möbius, serão apresentados; os quais aparecerão em alguns resultados que serão abordados nos capítulos 3 e 4.

No capítulo 3, iniciaremos o estudo de colorações próprias de vértices de grafos, onde obteremos o polinômio cromático o qual será estabelecido através da técnica de T-G apresentada no capítulo 2. Além de colorações próprias, também faremos uma pequena abordagem sobre fluxos em grafos, com destaque para a prova do teorema do 6-fluxo não-nulo. Finalizando este capítulo, obteremos alguns resultados relacionados a colorações monocromáticas.

Finalmente, apesar da técnica de T-G ser comumente usada no contexto de co-



lorações e fluxos, no capítulo 4 apresentaremos alguns resultados ligados a orientações e percolação que também podem ser mostrados através desta técnica.

# Capítulo 1

## Preliminares

Para iniciarmos o nosso estudo especificamente, será necessário introduzir algumas definições e resultados importantes. No entanto, no desenvolver desta dissertação poderá surgir a necessidade de outras definições ou de outros resultados; neste caso, ou os apresentaremos, ou daremos referências de onde poderão ser encontrados.

### 1.1 Grafos

Apesar da teoria desenvolvida nesta dissertação ser relacionada a matróides, os resultados que almejamos são relacionados a grafos, portanto, algumas definições e resultados que dizem respeito a esta teoria também serão necessários.

**Definição 1.1** *Um grafo simples  $G$  é um par  $(V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto não vazio de elementos chamados **vértices**, e  $E(G)$  é um conjunto finito de pares não-ordenados de elementos distintos de  $V(G)$  chamados **arestas**.*

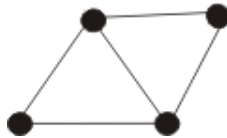


Figura 1.1: Grafo simples

Em alguns grafos poderemos ter a ocorrência de **arestas múltiplas**, isto é, dois vértices distintos que possuem mais de uma aresta unindo-os. Além disso, podemos

ter também arestas que unem um vértice a ele mesmo, as quais chamaremos de **laços**. Note que podemos definir grafos simples como grafos que não possuem arestas múltiplas nem laços. Se  $G'$  é um grafo tal que  $V(G') \subseteq V(G)$  e  $E(G') \subseteq E(G)$ , então diremos que  $G'$  é um **subgrafo** de  $G$ .

Uma aresta  $e$  é **incidente** a um vértice  $v$ , se  $e$  une  $v$  a algum outro vértice de  $G$ .

**Definição 1.2** Num grafo  $G$  um **caminho**  $C$  é uma seqüência  $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ , onde  $v_i \in V(G)$  e  $e_i \in E(G)$ , para todo  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , e tal que  $e_i$  é incidente a  $v_{i-1}$  e  $v_i$ .

Se no caminho  $C$  da definição acima não houver repetição de vértices, e ainda tivermos  $v_0 = v_n$ , então chamaremos este caminho de **ciclo**. Diremos ainda que um caminho  $C$  é um  $(s,t)$ -caminho, se este une os vértices  $s$  e  $t$ .

**Definição 1.3** Um grafo é chamado **conexo**, se para quaisquer dois vértices, existe um caminho que os une. Se um grafo não for conexo, diremos que ele é **desconexo**.

O seguinte resultado não é difícil de ser mostrado.

**Proposição 1.4** Seja  $G$  um grafo, e sejam  $v$  e  $w$  dois vértices de  $G$ . Então a seguinte relação binária é uma relação de equivalência:

$v \sim w$  se, e somente se, existe um caminho em  $G$  unindo-os. ■

Note que esta relação de equivalência particiona  $V(G)$  em classes de equivalências, digamos  $V_1, V_2, \dots, V_m$ . Temos ainda que qualquer aresta de  $G$  deve pertencer a uma única classe de equivalência  $V_i$ . Deste modo, existe uma partição  $E_1, E_2, \dots, E_m$  de  $E(G)$ , onde  $E_i$  é o conjunto de arestas de  $G$  que são incidentes apenas a vértices de  $V_i$ . Diremos, portanto que  $G_1, G_2, \dots, G_m$ , onde  $G_i = (V_i, E_i)$ , são as **componentes conexas** de  $G$ .

Existem duas operações para grafos que utilizaremos no decorrer desta dissertação, as quais definiremos agora.

**Definição 1.5** Dada uma aresta  $e$  de um grafo  $G$ , definimos por **eliminação** de  $e$  o grafo obtido de  $G$  pela eliminação da aresta  $e$ , e denotaremos por  $G - e$ . De modo mais geral, se  $X$  é um conjunto de arestas de  $G$ , denotaremos por  $G - X$  o grafo obtido de  $G$  pela eliminação das arestas de  $X$ . Analogamente, se  $v$  é um vértice de  $G$ , denotaremos por  $G - v$  o grafo obtido de  $G$  pela eliminação do vértice  $v$  juntamente com as arestas incidentes a  $v$ .

Se a eliminação de uma aresta  $e$  de um grafo  $G$  aumenta o número de componentes conexas deste, então diremos que esta aresta é uma **ponte**.

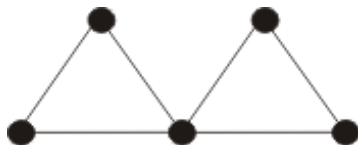
**Definição 1.6** Definimos por **contração** de uma aresta  $e$  que une os vértices  $v$  e  $w$  de um grafo  $G$ , o grafo obtido pela eliminação de  $e$  do grafo  $G$  e pela identificação dos vértices  $v$  e  $w$ , e denotaremos por  $G/e$ .

Figura 1.2:  $G$ Figura 1.3:  $G/e$ 

**Definição 1.7** Definimos a **vértice-conectividade**, ou simplesmente **conectividade**,  $k(G)$  de  $G$  como sendo o menor número de vértices que podemos eliminar de modo a desconectar  $G$ ; e diremos que  $G$  é  $k$ -conexo, se  $k(G) \geq k$ .

Tendo em vista o capítulo 3 e 4 onde tratamos de alguns resultados ligados a fluxos e orientações em grafos, consideramos importantes as seguintes definições.

**Definição 1.8** Um par ordenado de vértices  $(a, b)$  é dito um **aresta orientada** de  $a$  para  $b$ , ou uma **aresta iniciando em  $a$  e terminando em  $b$** , e é denotado por  $\vec{ab}$  ou simplesmente  $ab$ . Se as arestas de um grafo  $G$  são pares ordenados de vértices, então dizemos que  $G$  é um **grafo orientado**.

Figura 1.4: Grafo  $G$  sem orientaçãoFigura 1.5: Grafo  $G$  orientado

### 1.1.1 Conexão em série e em paralelo

Conexão em série e em paralelo são operações que podemos definir para grafos e que podem ser estendidas para matróides; estas aparecerão em alguns momentos neste trabalho, portanto fazem-se necessárias suas definições.

Para  $i = 1, 2$ , seja  $p_i$  uma aresta de um grafo  $G_i$ . Tome, arbitrariamente, uma direção para  $p_i$  e considere seu vértice inicial como sendo  $u_i$  e seu vértice final como sendo  $v_i$ . Daí para formarmos as conexões em **série** e **paralelo** de  $G_1$  e  $G_2$  com relação as arestas direcionadas  $p_1$  e  $p_2$ , inicialmente eliminamos  $p_1$  de  $G_1$  e  $p_2$  de  $G_2$  e identificamos  $u_1$  e  $u_2$  como o vértice  $u$ . Para completar a conexão em série, adicionamos uma nova aresta  $p$  unindo  $v_1$  e  $v_2$ . Por outro lado, a conexão em paralelo será completada identificando  $v_1$  e  $v_2$  como o vértice  $v$  e então adicionando uma nova aresta  $p$  unindo  $u$  e  $v$ . O seguinte exemplo mostra-nos um caso de conexão em série e paralelo.

**Exemplo 1.10** *Dados os grafos  $G_1$  e  $G_2$ , note que os grafos das figuras (1.6) e (1.7) são, respectivamente, as conexões em paralelo e série dos grafos  $G_1$  e  $G_2$ .*

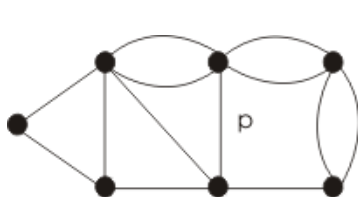
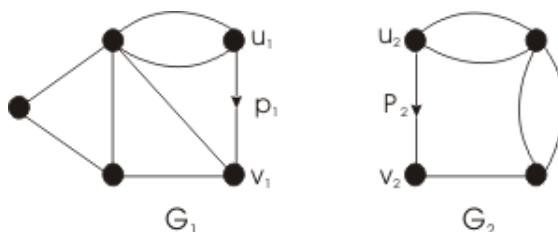


Figura 1.6: Conexão em paralelo de  $G_1$  e  $G_2$

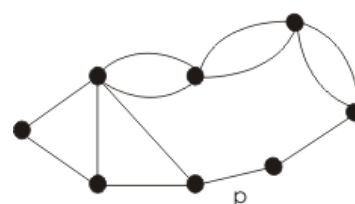
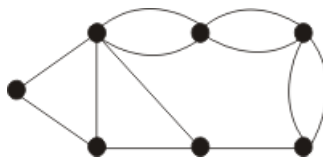


Figura 1.7: Conexão em série de  $G_1$  e  $G_2$

### 1.1.2 2-soma

Considere o seguinte grafo  $G$  da figura 1.8. Note que o grafo  $G$  pode ser obtido da conexão paralela de  $G_1$  e  $G_2$  eliminando  $p$ , além disso, podemos obter  $G$  através da contração de  $p$  na conexão em série de  $G_1$  e  $G_2$ . No entanto,  $G$  pode ser obtido ainda

Figura 1.8: Grafo  $G$ 

diretamente de  $G_1$  e  $G_2$  identificando as arestas rotuladas por  $p$  e então eliminando a aresta identificada. Definimos um grafo assim obtido de uma **2-soma** de  $G_1$  e  $G_2$ .

Outros resultados ou definições que eventualmente venhamos a omitir, poderão ser encontradas em [4], [5], [6], ou [17].

## 1.2 Matróides

Apesar da teoria desenvolvida neste trabalho ser relacionada a matróides gráficas, isto é, matróides cujos elementos são arestas de um grafo, estaremos apresentando algumas definições e resultados importantes de forma genérica. Vale salientar que todas as demonstrações de resultados apresentados nesta seção poderão ser encontrados em [11] ou [15].

**Definição 1.11** *Uma matróide  $M$  é um par ordenado  $(E, \mathcal{I})$ , onde  $E$  é um conjunto finito e  $\mathcal{I}$  é uma coleção de subconjuntos de  $E$  munidos das seguintes propriedades:*

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ;
- (ii) Se  $I \in \mathcal{I}$  e  $I' \subseteq I$ , então  $I' \in \mathcal{I}$ ;
- (iii) Se  $I_1$  e  $I_2$  pertencem a  $\mathcal{I}$  e  $|I_1| < |I_2|$ , então existe um elemento  $e$  pertencente a  $I_2 - I_1$  tal que  $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$ .

Dada uma matróide  $M$ , chamaremos o conjunto  $E$  de **conjunto base** de  $M$ , que denotaremos por  $E(M)$ ; os membros de  $\mathcal{I}$  chamaremos de **conjuntos independentes** de  $M$ , e denotaremos por  $\mathcal{I}(M)$ ; em particular, os membros maximais desta coleção chamaremos de **bases** e denotaremos por  $\mathcal{B}(M)$ . Um subconjunto de  $E$  que não está em  $\mathcal{I}$  será chamado de **dependente**, além disso, os conjuntos dependentes minimais serão chamados de **circuitos**.

**Proposição 1.12** *Se  $B_1$  e  $B_2$  são bases de uma matróide  $M$ , então  $|B_1| = |B_2|$ . ■*

**Definição 1.13** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas matróides. Dizemos que  $M_1$  é isomorfa a  $M_2$ , e denotamos  $M_1 \cong M_2$ , se existe uma bijeção  $\psi$  de  $E(M_1)$  em  $E(M_2)$  tal que, para todo  $X \subseteq E(M_1)$ ,  $X$  é independente em  $M_1$  se, e somente se,  $\psi(X)$  é independente em  $M_2$ .*

Note que podemos considerar base no lugar de independente, nesta última definição.

**Definição 1.14** *Seja  $M$  uma matróide, considere  $e$  um elemento de  $M$ . Se  $\{e\}$  for um circuito diremos que  $e$  é um laço. Por outro lado, se  $e \in B$ , para toda base  $B$  de  $M$ ; então diremos que  $e$  é um colaço.*

Chamamos a atenção ao seguinte fato: se na definição anterior a matróide  $M$  for gráfica, então seu colaço será uma ponte no grafo sobre o qual  $M$  está definida.

Seja  $M$  a matróide  $(E, \mathcal{I})$ , e suponha que  $X \subseteq E$ . Seja  $\mathcal{I}(X) = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$ . Então, note que  $(X, \mathcal{I}(X))$  é uma matróide. Diremos que esta matróide é a **restrição** de  $M$  a  $X$ ; que denotaremos por  $M(X)$ .

**Definição 1.15** *Chamaremos o **posto** de  $X$ , e denotaremos  $r(X)$  ou  $r_M(X)$ , a cardinalidade de uma base  $B$  de  $M(X)$ , e diremos que  $B$  é uma base de  $X$ .*

Note que esta última definição faz sentido, pois pela proposição 1.9, as bases de  $M(X)$  são equicardinais. Ainda considerando a última definição, definiremos  $|X| - r_M(X)$  como sendo a **nulidade** de um conjunto  $X$  em uma matróide  $M$ , a qual denotaremos por  $n(X)$ .

O próximo resultado facilita-nos o cálculo do posto de uma matróide, se esta for gráfica.

**Proposição 1.16** *Seja  $G$  um grafo com  $\omega(G)$  componentes, e seja  $M$  uma matróide definida sobre  $G$ . Então:*

$$r(M) = |V(G)| - \omega(G)$$

■

Como em grafos, as matróides possuem as operações de eliminação e contração, no entanto, antes de definirmos estas, precisamos definir dual de uma matróide.

Consideraremos  $M \setminus T$  como sendo a matróide sobre  $E - T$  e cujos conjuntos independentes são os conjuntos independentes de  $M$  que estão contidos em  $E - T$ .

**Teorema 1.17** *Seja  $M$  uma matróide e  $\mathcal{B}^*(M) = \{E(M) - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$ . Então  $\mathcal{B}^*(M)$  é o conjunto de bases de uma matróide sobre  $E(M)$ .*

■

A matr oide  $M$  com conjunto de bases  $\mathcal{B}^*(M)$  da defini o anterior,   chamada **dual de  $M$** , que passaremos a denotar por  $M^*$ . Vale salientar que existem algumas rela oes entre alguns subconjuntos de  $M$  e  $M^*$  que facilitam a determina o da dual de uma matr oide  $M$ ; maiores detalhes a respeito da dual de uma matr oide poder  o ser encontrados em [12].

Devido ao fato de que no capítulo 1 T-G invariante   definido sobre a classe das matr oides fechadas com rela o a isomorfismo e a tomar menores, apresentamos a seguinte defini o.

**Defini o 1.18** *Sejam  $M$  uma matr oide e  $T \subseteq E$ . Definimos por **contra o de  $T$  em  $M$** , e denotamos  $M/T$ , a seguinte rela o*

$$M/T = (M^* \setminus T)^*$$

Dada uma matr oide  $M_1$ , dizemos que uma matr oide  $M_2$    um menor de  $M_1$  se existem conjuntos disjuntos  $X$  e  $Y$  tais que  $M_2 = M_1 \setminus X/Y$ .

**Defini o 1.19** *Uma classe de matr oides  $\mathcal{K}$    fechada com rela o a isomorfismo, se para toda matr oide  $M_1$  pertencente a  $\mathcal{K}$  e para toda matr oide  $M_2$  isomorfa a  $M_1$ , tivermos  $M_2$  pertencente a  $\mathcal{K}$ ; e  $\mathcal{K}$    fechada com rela o a tomar menores, se todo menor de uma matr oide pertencente a  $\mathcal{K}$  também pertence a  $\mathcal{K}$ .*

Os seguintes resultados relacionados aos postos de uma matr oide e de sua dual, n  o ser  o demonstrados. No entanto, suas provas poder  o ser encontradas em [12].

**Proposi o 1.20** *Seja  $M$  uma matr oide. Ent  o:*

$$r(M) + r^*(M) = |E(M)|,$$

onde  $r^*$  denota o posto na matr oide dual. ■

**Proposi o 1.21** *Para todos os subconjuntos  $X$  do conjunto base  $E$  de uma matr oide  $M$ , temos*

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X).$$

■

**Proposi o 1.22** *Se  $T \subseteq E$ , ent  o, para todo  $X \subseteq E - T$ ,*

$$r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T)$$

■



## Capítulo 2

# Polinômio de Tutte

Neste capítulo nosso objetivo principal, como mencionamos na introdução, será obter uma caracterização de todos os T-G invariantes generalizados. Estaremos também apresentando outros resultados que serão importantes no decorrer deste trabalho.

**Definição 2.1** *Seja  $f$  uma função sobre a classe de todas as matróides. Dizemos que  $f$  é um isomorfismo invariante, se*

$$f(M_1) = f(M_2), \text{ sempre que } M_1 \cong M_2 \quad (2.1)$$

**Definição 2.2** *Seja  $f$  uma função sobre  $\mathcal{K}$ , onde  $\mathcal{K}$  é uma classe de matróides fechadas com relação a isomorfismo e a tomar menores, e seja  $M$  uma matróide. Dizemos que  $f$  é uma **Tutte-Grothendieck** ou **T-G invariante**, se  $f$  satisfaz (2.1) e as seguintes propriedades:*

(i)  $f(M) = f(M \setminus e) + f(M/e)$ , se  $e$  não é um laço nem um colaço.

(ii)  $f(M) = f(M(e))f(M \setminus e)$ , caso contrário.

Por outro lado, se nesta última definição no lugar de (ii) tivermos a seguinte generalização: para alguns números fixos  $\sigma$  e  $\tau$ , não -nulos,

$$f(M) = \sigma f(M \setminus e) + \tau f(M/e), \quad (2.2)$$

onde  $e$  não é um laço nem um colaço. Dizemos que  $f$  é um **T-G invariante generalizado**.

Mostraremos que o polinômio definido a seguir é um exemplo de um T-G invariante.

**Definição 2.3** *Sejam  $M(E)$  uma matr oide e  $r$  e  $n$  suas fun oes posto e nulidade, respectivamente. Chamamos de **polinômio de generaliza o de posto** o polinômio  $S(M; x, y)$  de  $M$  definido por*

$$S(M; x, y) = \sum_{X \subseteq E} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)}. \quad (2.3)$$

Observe que  $S(M; x, y)$    realmente um polinômio, pois  $r(X) \leq r(E)$ , para todo  $X \subseteq E$ , e  $r(X) \leq |X|$ , para todo  $X \subseteq E$ .

Por defini o,  $n(X) = |X| - r(X)$ ; portanto, podemos rescrever (2.3) da seguinte maneira:

$$S(M; x, y) = \sum_{X \subseteq E} x^{r(E)-r(X)} y^{|X|-r(X)}. \quad (2.4)$$

Se considerarmos as submatr ides de  $M$  de posto  $r(M) - i$  e nulidade  $j$ , poderemos escrever (2.4) da seguinte forma:

$$S(M; x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j, \quad (2.5)$$

onde  $a_{ij}$    o número de submatr ides de  $M$  de posto  $r(M) - i$  e nulidade  $j$ .

Veremos através dos dois próximos lemas que  $S(M; x, y)$    um T -G invariante.

**Lema 2.1**  *$S(M; x, y)$    um isomorfismo invariante para a classe de todas as matr ides. Além disso, se  $\mathbf{I}$    um colaço e  $\mathbf{L}$    um laço,  $S(\mathbf{I}; x, y) = x + 1$  e  $S(\mathbf{L}; x, y) = y + 1$ .*

**Prova.** Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas matr ides isomorfas. Então existe uma bije o  $\psi : E(M_1) \rightarrow E(M_2)$  tal que  $X$    uma base em  $M_1$  se, e somente se,  $\psi(X)$    base em  $M_2$ ; e como  $\psi$    uma bije o,  $|X| = |\psi(X)|$ . Portanto, dada uma base  $B$  em  $M_1$ , temos

$$r_{M_1}(E(M_1)) = |B| = |\psi(B)| = r_{M_2}(E(M_2)).$$

Analogamente, dada uma base  $B_X$  em  $M_1(X)$ , temos que  $\psi(B_X)$    base em  $M_2(\psi(X))$ .

Deste modo,

$$r_{M_1}(X) = |B_X| = |\psi(B_X)| = r_{M_2}(\psi(X)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} S(M_1; x, y) &= \sum_{X \subseteq E(M_1)} x^{r_{M_1}(E(M_1))-r_{M_1}(X)} y^{|X|-r_{M_1}(X)} \\ &= \sum_{\psi(X) \subseteq E(M_2)} x^{r_{M_2}-r_{M_2}(\psi(X))} y^{|\psi(X)|-r_{M_2}(\psi(X))} = S(M_2; x, y); \end{aligned}$$

isto é,  $S(M; x, y)$  é um isomorfismo invariante.

Finalmente, se  $M = I$ , temos que  $r(E(M)) = 1$  e seus subconjuntos são  $E(M)$  e  $\emptyset$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} S(I; x, y) &= x^{r(E(M))-r(E(M))}y^{|E(M)|-r(E(M))} + x^{r(E(M))-r(\emptyset)}y^{|\emptyset|-r(\emptyset)} \\ &= x^0y^0 + x^{1-0}y^0 = x + 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $M = L$ , temos que  $r(E(M)) = 0$  e seus subconjuntos são  $E(M)$  e  $\emptyset$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} S(L; x, y) &= x^{r(E(M))-r(E(M))}y^{|E(M)|-r(E(M))} + x^{r(E(M))-r(\emptyset)}y^{|\emptyset|-r(\emptyset)} \\ &= x^0y^{1-0} + x^0y^0 = y + 1 \end{aligned}$$

■

**Lema 2.2**  $S(M; x, y)$  é um  $T$ - $G$  invariante para as classes de todas as matróides

**Prova.** No lema anterior, provamos que  $S(M; x, y)$  é um isomorfismo invariante; deste modo, basta- nos provar que  $S(M; x, y)$  satisfaz (i) e (ii) da definição 2.2. De fato, seja  $e$  um elemento da matróide  $M(E)$ . Então, podemos escrever  $S(M; x, y)$  da seguinte maneira:

$$S(M; x, y) = \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{r(E)-r(X)}y^{n(X)} + \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{r(M)-r(X)}y^{n(X)}. \quad (2.6)$$

Note que

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{r(E)-r(X)}y^{n(X)} = \sum_{X \subseteq E-e} x^{r(E)-r(X)}y^{n(X)}. \quad (2.7)$$

Temos ainda que se  $e$  é um colaço, então  $e \in B$ , para toda base  $B$  pertencente a  $\mathcal{B}(M)$ ; e portanto,

$$r(E - e) = r(E) - 1. \quad (2.8)$$

Por outro lado, se  $e$  não é um colaço, então  $e$  ou é um laço ou um independente. Deste modo, se  $e$  é um laço, então  $e \notin B$ , qualquer que seja  $B \in \mathcal{B}(M)$ ; e se  $e$  é um independente, então existe  $B' \in \mathcal{B}(M)$  tal que  $e \notin B'$ . Caso contrário,  $e \in B$ , para toda base  $B$  pertencente a  $\mathcal{B}(M)$ ; e deste modo,  $e$  é um colaço, o que contradiz nossa suposição. Logo,

$$r(E - e) = |B'| = r(E). \quad (2.9)$$

Deste modo, por (2.8) e (2.9), temos

$$r(E) = \begin{cases} r(E - e) + 1, & \text{se } e \text{ é um colaço.} \\ r(E - e), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Portanto,

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} x \sum_{X \subseteq E-e} x^{r(E-e)-r(X)} y^{n(X)}, & \text{se } e \text{ é um colaço.} \\ \sum_{X \subseteq E-e} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Logo,

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} xS(M - e; x, y), & \text{se } e \text{ é um colaço.} \\ S(M - e; x, y), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Agora, note que

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \sum_{Y \subseteq E-e} x^{r((E-e) \cup e)-r(Y \cup e)} y^{n(Y \cup e)}.$$

Considere  $r'$  e  $n'$  as funções posto e nulidade de  $M/e$ , respectivamente. Pela proposição 1.22 do capítulo 1, temos que se  $T \subseteq E$ , então, para todo  $Y \subseteq E - T$ ,  $r'(Y) = r(X \cup T) - r(T)$ . Portanto, se  $e$  é um laço, então

$$r'(Y) = r(Y \cup e) - r(e) = r(Y \cup e) \quad (2.13)$$

Daí, por (2.13) e pela definição de nulidade dada no capítulo 1, temos

$$|Y| - r'(Y) = |Y| - r(Y \cup e);$$

donde temos

$$n'(Y) = |Y| + 1 - r(Y \cup e) - 1 = |Y \cup e| - r(Y \cup e) - 1 = n(Y \cup e) - 1 \quad (2.14)$$

Por outro lado, se  $e$  não é um laço, então  $e$  é independente. Deste modo,

$$r'(Y) = r(Y \cup e) - r(e) = r(Y \cup e) - 1 \quad (2.15)$$

Temos ainda, que

$$r'(Y) - |Y| = r(Y \cup e) - 1 - |Y|,$$

donde temos que

$$|Y| - r'(Y) = |Y| + 1 - r(Y \cup e) = |Y \cup e| - r(Y \cup e)$$

Daí

$$n'(Y) = n(Y \cup e). \quad (2.16)$$

Logo, por (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16), temos

$$r'(Y) = \begin{cases} r(Y \cup e), & \text{se } e \text{ é um laço.} \\ r(Y \cup e) - 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$n'(Y) = \begin{cases} n(Y \cup e) - 1, & \text{se } e \text{ é um laço.} \\ n(Y \cup e), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Deste modo,

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{r(E)-r(X)} \cdot y^{n(X)} = \begin{cases} y \sum_{Y \subseteq E-e} x^{r'(E-e)-r'(Y)} y^{n'(Y)}, & \text{se } e \text{ é um laço.} \\ \sum_{Y \subseteq E-e} x^{r'(E-e)-r'(Y)} y^{n'(Y)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto,

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} yS(M/e; x, y), & \text{se } e \text{ é um laço.} \\ S(M/e; x, y), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Por (2.6), (2.12) e (2.17), temos

$$S(M; x, y) = \begin{cases} S(M \setminus e; x, y) + S(M/e; x, y), & \text{se } e \text{ não é um laço nem um colaço.} \\ xS(M \setminus e; x, y) + S(M/e; x, y), & \text{se } e \text{ é um colaço.} \\ yS(M/e; x, y) + S(M \setminus e; x, y), & \text{se } e \text{ é um laço.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Mas, pelo corolário 3.1.25 de [12], se  $e$  é um colaço ou um laço, então  $M \setminus e = M/e$ .

Portanto, podemos rescrever (2.18) da seguinte maneira:

$$S(M; x, y) = \begin{cases} S(M \setminus e; x, y) + S(M/e; x, y), & \text{se } e \text{ não é um laço nem um colaço.} \\ (x+1)S(M \setminus e; x, y), & \text{se } e \text{ é um colaço.} \\ (y+1)S(M \setminus e; x, y), & \text{se } e \text{ é um laço.} \end{cases}$$

Finalmente, pelo lema 2.1,  $S(I; x, y) = x + 1$  e  $S(L; x, y) = y + 1$ . Deste modo,

$$S(M; x, y) = \begin{cases} S(M \setminus e; x, y) + S(M/e; x, y), & \text{se } e \text{ não é um laço nem um colaço.} \\ S(M(e); x, y)S(M \setminus e; x, y), & \text{se } e \text{ é um colaço.} \\ S(M(e); x, y)S(M \setminus e; x, y), & \text{se } e \text{ é um laço.} \end{cases}$$



No próximo teorema e nos demais resultados, os conjuntos de classes de matróides isomorfas e de matróides não-vazias, serão denotados por  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}'$ , respectivamente. Além disso, uma matróide constituída apenas de um laço será denotada por  $L$ , enquanto que uma matróide constituída apenas de um colaço será denotada por  $I$ .

**Teorema 2.4** (Brylawski, 1972b) *Existe uma única função  $t$  de  $\mathcal{M}$  no anel de polinômios  $\mathbb{Z}[x, y]$ , tendo as seguintes propriedades:*

(i)  $t(I; x, y) = x$  e  $t(L; x, y) = y$ .

(ii) *Se  $e$  é um elemento da matróide  $M(E)$  e  $e$  não é um laço nem um colaço, então*

$$t(M; x, y) = t(M \setminus e; x, y) + t(M/e; x, y)$$

(iii) *Se  $e$  é um laço ou um colaço da matróide  $M(E)$ , então*

$$t(M; x, y) = t(M(e); x, y)t(M \setminus e; x, y)$$

Além disso, seja  $R$  é um anel comutativo e suponha que  $f$  é uma função qualquer de  $\mathcal{M}'$  em  $R$ . Se  $f$  satisfaz (ii) e (iii) da definição 2.2, sempre que  $|E| \geq 2$ , então, para todas as matróides  $M$ ,

$$f(M) = t(M; f(I), f(L))$$

**Prova.** Defina  $t(M; x, y) = S(M; x - 1, y - 1)$ . Então, pelo lema 2.2,  $t$  é um T-G invariante; e deste modo, satisfaz (ii) e (iii). Como as matróides  $I$  e  $L$  não podem ser decompostas usando (ii) e (iii), definimos  $t(I; x, y) = x$  e  $t(L; x, y) = y$ . Agora, falta-nos mostrar que  $t$  é única. De fato, suponha que existe outra função  $t'$  de  $\mathcal{M}$  em  $\mathbb{Z}[x, y]$ , distinta de  $t$ , satisfazendo (i), (ii) e (iii). Mostraremos, através de uma indução sobre o número de elementos da matróide, que  $t = t'$ . Com efeito, se  $|E| = 1$ , então  $M$  é um laço ou um colaço; portanto, por (i),  $t(M; x, y) = t'(M; x, y)$ . Suponha que  $t = t'$ , se  $|E| = k$ . Então se  $|E| = k + 1$  e  $e$  não é um laço nem um colaço, então  $t$  e  $t'$  satisfazem (ii) e  $|E(M \setminus e)| = |E(M/e)| = k$ . Deste modo, pela hipótese de indução,  $t(M \setminus e; x, y) = t'(M \setminus e; x, y)$  e  $t(M/e; x, y) = t'(M/e; x, y)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} t(M; x, y) &= t(M \setminus e; x, y) + t(M/e; x, y) \\ &= t'(M \setminus e; x, y) + t'(M/e; x, y) \\ &= t'(M; x, y) \end{aligned}$$

Agora, suponha que  $e$  é um laço. Então  $t$  e  $t'$  satisfazem (iii) e  $|E(M \setminus e)| = |E(M/e)| = k$ . Portanto, pela hipótese de indução,  $t(M \setminus e; x, y) = t'(M \setminus e; x, y)$ ; e ainda,  $t(M(e); x, y) = y = t'(M(e); x, y)$ . Logo,

$$\begin{aligned} t(M; x, y) &= t(M(e); x, y)t(M \setminus e; x, y) \\ &= t'(M(e); x, y)t'(M \setminus e; x, y) \\ &= t'(M; x, y). \end{aligned}$$

No caso em que  $e$  é um colaço, procedemos de modo análogo. Finalmente, mostraremos que  $f(M) = t(M; f(I), f(L))$ , para todas as matrôides  $M$ . De fato, suponha que  $e$  não é um laço nem um colaço. Então, se  $|E| = 2$ , temos que  $M \setminus e$  e  $M/e$  é um laço ou um colaço. Portanto, sem perda de generalidade, suponha que  $M \setminus e$  é um colaço. Então  $M/e$  é um laço; pois caso contrário,  $M \setminus e = M/e$ , donde temos que  $e$  é um laço ou um colaço de  $M$ ; o que é uma contradição. Deste modo,

$$\begin{aligned} t(M; f(M \setminus e), f(M/e)) &= t(M \setminus e; f(M \setminus e), f(M/e)) \\ &+ t(M/e; f(M \setminus e), f(M/e)) \\ &= f(M \setminus e) + f(M/e) = f(M) \end{aligned}$$

Agora, suponha que  $f(M) = t(M; f(I), f(L))$ , se  $|E| = k$ . Então, se  $|E| = k+1$ , temos que  $|E(M \setminus e)| = k$  e  $|E(M/e)| = k$ . Deste modo, pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} f(M) = f(M \setminus e) + f(M/e) &= t(M \setminus e; f(I), f(L)) + t(M/e; f(I), f(L)) \\ &= t(M; f(I), f(L)) \end{aligned}$$

No caso em que  $e$  é um laço ou um istmo, procedemos analogamente usando (iii). ■

Definimos como **O Polinômio de Tutte de  $M$** , a função  $t(M; x, y)$ . Deste modo, pela prova do último teorema, temos

$$t(M; x, y) = S(M; x-1, y-1). \quad (2.19)$$

Portanto,

$$t(M; x, y) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)} (y-1)^{n(X)} \quad (2.20)$$

Note que podemos escrever  $t(M; x, y)$  como  $\sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j$ , onde  $b_{ij} \geq 0$ , para todos  $i$  e  $j$ .

O polinômio de Tutte de uma matróide pode ser calculado através de (2.20), ou através dos recursos (i), (ii), e (iii) do teorema 2.4 como podemos ver no seguinte exemplo.

**Exemplo 2.5** Dada a seguinte matróide gráfica (figura 2.1), podemos calcular seu polinômio de Tutte através de (i), (ii), e (iii) do teorema 2.4; para isto,  $t(M(G); x, y)$  será representado por  $(M(G))$ .

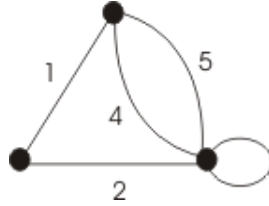


Figura 2.1:  $M(G)$

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) y \\
 &= \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) y \\
 &= \left[ \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) \right] y \\
 &= \left[ \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) y + \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) \right] y \\
 &= \left[ \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} \right) y + x \cdot x + x + y \right] y \\
 &= [xy \cdot y + x^2 + x + y]y \\
 &= [xy^2 + x^2 + x + y]y \\
 &= x^2y + xy^3 + xy + y^2
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$t(M(G); x, y) = x^2y + xy^3 + xy + y^2$$

O próximo resultado é o que mencionamos no início deste capítulo como sendo o principal, este é uma extensão do teorema 2.4 e caracteriza T-G invariantes generalizados.



**Corolário 2.6** (Oxley & Welsh, 1979b) *Sejam  $\sigma$  e  $\tau$  elementos não-nulos de um corpo  $F$ . Então existe uma única função  $t'$  de  $\mathcal{M}$  no anel de polinômio  $F[x, y]$  tendo as seguintes propriedades:*

(i)  $t'(I; x, y) = x$  e  $t'(L; x, y) = y$ ;

(ii) *Se  $e$  é um elemento da matróide  $M$  e  $e$  não é um laço nem um colaço, então*

$$t'(M; x, y) = \sigma t'(M \setminus e; x, y) + \tau t'(M/e; x, y)$$

(iii) *Se  $e$  é um laço ou um colaço da matróide  $M$ , então*

$$t'(M; x, y) = t'(M(e); x, y)t'(M \setminus e; x, y)$$

Além disso, esta função  $t'$  é dada por

$$t'(M; x, y) = \sigma^{|E|-r(E)} \tau^{r(E)} t(M; x/\tau, y/\sigma)$$

**Prova.** Defina  $t' : \mathcal{M} \rightarrow F[x, y]$  por  $t'(M; x, y) = \sigma^{|E|-r(E)} \tau^{r(E)} t(M; x/\tau, y/\sigma)$ . Portanto, se  $M = I$ , então  $|E| = 1$  e  $r(E) = 1$ ; deste modo,  $t'(I; x, y) = \sigma^0 \tau t(I; x/\tau, y/\sigma) = \tau.x/\tau = x$ . Por outro lado, se  $M = L$ , então  $|E| = 1$  e  $r(E) = 0$ ; deste modo,  $t'(L; x, y) = \sigma \tau^0 t(L; x/\tau, y/\sigma) = \sigma.y/\sigma = y$ .

Seja  $e$  um elemento da matróide  $M$  tal que  $e$  não é um laço nem um colaço. Então:

$$\begin{aligned} t'(M; x, y) &= \sigma^{|E|-r(E)} \tau^{r(E)} t(M; x/\tau, y/\sigma) \\ &= \sigma^{|E|-r(E)} \tau^{r(E)} [t(M \setminus e; x/\tau, y/\sigma) + t(M/e; x/\tau, y/\sigma)] \\ &= \sigma^{|E|-r(E)} \tau^{r(E)} t(M \setminus e; x/\tau, y/\sigma) + \sigma^{|E|-r(E)} \tau^{r(E)} t(M/e; x/\tau, y/\sigma) \end{aligned}$$

Agora, observe que: como  $e$  não é um colaço, podemos escolher uma base  $B$  de  $M$  tal que  $e \notin B$ ; e deste modo,  $r_{M \setminus e}(E - e) = |B| = r_M(E)$ . Temos ainda que  $r_{M/e}(E - e) = r_M(E) - 1$  e  $|E - e| + 1 = |E|$ . Portanto,

$$\begin{aligned} t'(M; x, y) &= \sigma^{|E-e|+1-r_{M \setminus e}(E-e)} \tau^{r_{M \setminus e}(E-e)} t(M \setminus e; x, y) \\ &+ \sigma^{|E-e|+1-r_{M/e}(E-e)-1} \tau^{r_{M/e}(E-e)+1} t(M/e; x/\tau, y/\sigma) \\ &= \sigma \sigma^{|E-e|-r_{M \setminus e}(E-e)} \tau^{r_{M \setminus e}(E-e)} t(M \setminus e; x/\tau, y/\sigma) \\ &+ \sigma^{|E-e|-r_{M/e}(E-e)} \tau^{r_{M/e}(E-e)} \tau t(M/e; x/\tau, y/\sigma) \\ &= \sigma t'(M \setminus e; x, y) + \tau t'(M/e; x, y) \end{aligned}$$

Seja  $e$  um laço da matróide  $M$ . Então:

$$\begin{aligned} t'(M, x, y) &= \sigma^{|E|-r(E)} \tau^{r(E)} t(M; x/\tau, y/\sigma) \\ &= \sigma^{|E|-r(E)} \tau^{r(E)} t(M(e); x/\tau, y/\sigma) t(M \setminus e; x/\tau, y/\sigma) \end{aligned}$$

Como  $e$  é um laço, segue que  $r_{M \setminus e}(E - e) = r_M(E)$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
t'(M; x, y) &= \sigma^{|E-e|+1-r_{M \setminus e}(E-e)} \tau^{r_{M \setminus e}(E-e)} t(M(e); x/\tau, y/\sigma) t(M \setminus e; x/\tau, y/\sigma) \\
&= \sigma t(M(e); x/\tau, y/\sigma) \sigma^{|E-e|-r_{M \setminus e}(E-e)} \tau^{r_{M \setminus e}(E-e)} t(M \setminus e; x/\tau, y/\sigma) \\
&= \sigma^{|e|-r_M(e)} \tau^{r(e)} t(M(e); x/\tau, y/\sigma) \sigma^{|E-e|-r_{M \setminus e}(E-e)} \tau^{r_{M \setminus e}(E-e)} t(M \setminus e; x/\tau, y/\sigma) \\
&= t'(M(e); x, y) t'(M \setminus e; x, y)
\end{aligned}$$

A unicidade de  $t'$  segue de  $t$  demonstrada no teorema 1.6. ■

Um exemplo de um T-G invariante generalizado é o polinômio característico, que será tratado mais adiante.

O próximo resultado caracteriza o polinômio de Tutte da matróide dual.

**Proposição 2.7** *Para todas as matróides  $M$ ,*

$$t(M^*; x, y) = t(M; y, x)$$

**Prova.** Basta-nos usar o fato de que se  $X \subseteq E$ , então  $r^*(E) = |E(M)| - r(E)$  e  $r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$ ; onde  $r^*$  denota a função posto de  $M^*$ . De fato,

$$\begin{aligned}
t(M^*; x, y) &= \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r^*(E)-r^*(X)} (y-1)^{|X|-r^*(X)} \\
&= \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{|E|-r(E)-|X|+r(E)-r(E-X)} (y-1)^{r(E)-r(E-X)} \\
&= \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{|E-X|-r(E-X)} (y-1)^{r(E)-r(E-X)} \\
&= \sum_{X \subseteq E} (y-1)^{r(E)-r(E-X)} (x-1)^{n(E-X)}
\end{aligned}$$

Fazendo  $Y = E - X$ , temos

$$t(M^*; x, y) = \sum_{Y \subseteq E} (y-1)^{r(E)-r(Y)} (x-1)^{n(Y)} = t(M; y, x)$$

■

**Definição 2.8** *Seja  $f$  uma função de  $\mathcal{M}$  num conjunto  $\Omega$ . Diremos que  $f$  é um invariante de Tutte, se  $f(M) = f(N)$ , sempre que  $M$  e  $N$  têm um mesmo polinômio de Tutte.*

Podemos notar que T-G invariante é um exemplo de invariante de Tutte. No próximo exemplo veremos outros tipos de invariantes de Tutte.

**Exemplo 2.9** Sejam  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$  funções, onde  $r$  e  $n$  são as funções posto e nulidade, respectivamente. Então  $f$  e  $g$  são invariantes de Tutte. De fato, uma vez que

$$t(M; x, y) = S(M; x-1, y-1) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)} (y-1)^{n(X)};$$

temos:

i) a maior potência de  $x$  em  $t(M; x, y)$  é para  $X = \emptyset$ , onde temos  $r(M) - r(X) = r(M)$ . Logo, a maior potência de  $x$  é  $r(M)$ .

ii) a maior potência de  $y$  em  $t(M; x, y)$  é para  $X = E$ , onde temos  $n(X) = n(M)$ . Logo, a maior potência de  $y$  é  $n(M)$ .

Portanto, se  $t(M_1; x, y) = t(M_2; x, y)$ , então  $r(M_1) = r(M_2)$  e  $n(M_1) = n(M_2)$ . Logo,  $f$  e  $g$  são invariantes de Tutte.

Como  $|E| = r(M) + n(M)$ , segue que a cardinalidade do conjunto base de uma matróide é um invariante de Tutte.

Apesar de não termos a garantia de sempre podermos explicitar uma fórmula para invariantes de Tutte em termos dos coeficientes do polinômio de Tutte, no próximo resultado mostraremos que isto será possível para os números de bases e independentes; e para isto, denotaremos estes números por  $b(M)$  e  $i(M)$ , respectivamente.

**Proposição 2.10** Seja  $M(E)$  uma matróide. Então:

(i)  $b(M) = t(M; 1, 1) = S(M; 0, 0)$ ;

(ii)  $i(M) = t(M; 2, 1) = S(M; 1, 0)$ ;

(iii)  $2^{|E|} = t(M; 2, 2) = S(M; 1, 1)$

**Prova.** De fato, seja  $e$  um elemento da matróide  $M$  que não é um laço nem um colaço. Agora, considere a partição do conjunto de bases de  $M$  nos subconjuntos  $\mathfrak{B}'$  e  $\mathfrak{B}''$ ; onde  $\mathfrak{B}'$  é formado pelas bases que contêm  $e$ , e  $\mathfrak{B}''$  é formado pelas bases que não contêm  $e$ . Note que  $\mathfrak{B}''$  é igual ao conjunto de bases de  $M \setminus e$ , enquanto que, pelo corolário 3.1.9 de [12], o conjunto de bases de  $M/e$  é  $\{B - e : B \in \mathfrak{B}'\}$ . Deste modo,  $|\mathfrak{B}''| = b(M \setminus e)$  e  $|\mathfrak{B}'| = b(M/e)$ . Portanto,  $b(M) = b(M \setminus e) + b(M/e)$ . Finalmente, é fácil ver que  $b(M) = b(M(e))b(M \setminus e)$ . Além disso, como  $b(I) = b(L) = 1$ , pelo teorema 2.4, temos

$$b(M) = t(M; b(I), b(L)) = t(M; 1, 1) = S(M; 0, 0).$$

Logo, (i) segue.

Agora, para mostrar que  $i(M)$  satisfaz os recursos (ii) e (iii) do teorema 2.4, procedemos de modo análogo a  $b(M)$ . Além disso, note que  $i(I) = 2$  e  $i(L) = 1$ . Deste modo, novamente pelo teorema 2.4,

$$i(M) = t(M; i(I), i(L)) = t(M; 2, 1).$$

Logo, (ii) segue. Finalmente, por (1.17) e (1.18), temos

$$t(M; 2, 2) = S(M; 1, 1) = \sum_{X \subseteq E} 1^{r(E)-r(X)} 1^{n(X)} = 2^{|E|}$$

■

No capítulo 7 de [17] existe uma abordagem detalhada sobre o polinômio característico e a função combinatória de Möbius, no entanto, nosso objetivo nas duas próximas seções será relacionar o polinômio característico e a função de Möbius com o polinômio de Tutte; e para isto apresentaremos algumas definições e resultados que serão necessários.

## 2.1 Função de Möbius

Na próxima definição  $\delta$  denotará o delta de Kronecker.

**Definição 2.11** *Seja  $P$  um conjunto parcialmente ordenado, e considere as funções de  $P \times P$  em  $\mathbb{Z}$ . Então a função  $\mu$  (ou  $\mu_P$ ) tal que*

$$\sum_{x \leq y \leq z} \mu(x, y) = \delta(x, z) \text{ se } x \leq z, \quad (2.21)$$

*com a propriedade de ordem*

$$\mu(x, z) = 0 \text{ se } x \not\leq z;$$

*é chamada a função de Möbius de  $P$ .*

Note que se em (2.21)  $x = y < z$ , temos

$$\mu(x, x) = \delta(x, x) = 1.$$

Portanto, como

$$\delta(x, z) = \sum_{x \leq y \leq z} \mu(x, y) = \mu(x, x) + \sum_{x < y \leq z} \mu(x, y),$$

segue que  $\sum_{x < y \leq z} \mu(x, y) = -1$ . Deste modo, se  $x < z$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{x < y \leq z} \mu(x, y) &= \mu(x, z) + \sum_{x < y < z} \mu(x, y) = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(x, z) = - \sum_{x < y < z} \mu(x, y) - 1 \end{aligned}$$

Portanto, podemos rescrever (2.21) como as seguintes equações:

$$\mu(x, x) = 1, \quad (2.22)$$

$$\mu(x, z) = - \sum_{x \leq y < z} \mu(x, y) - 1, \text{ se } x < z \quad (2.23)$$

Note que podemos calcular  $\mu(x, y)$  primeiro para  $x = y$  usando (2.22), e então usamos sucessivamente (2.23) para a altura de  $z$  ao longo da cadeia de  $x$  a  $y$ . Deste modo, o valor de  $\mu_P$  depende apenas da ordem do intervalo  $[x, y]$ .

Agora restringiremos a definição da função de Möbius ao reticulado de conjuntos fechados de uma matróide  $M$ .

**Definição 2.12** *Seja  $M(E)$  uma matróide, e considere  $L$  e  $\mu_L$  como sendo o reticulado de conjuntos fechados de  $M$  e a função de Möbius de  $L$ , respectivamente. Então a função de Möbius de  $M$  é definida por*

$$\begin{aligned} \mu_M(X, F) &= \mu_L(X, F), & \text{se } X, F \in L, \\ \mu_M(X, F) &= 0 & , \text{ se } X \notin L, F \in L; \end{aligned}$$

$\mu_M(X, F)$  não está definida se  $F \notin L$ .

O próximo resultado não será demonstrado; no entanto, uma sugestão para sua demonstração pode ser encontrada em [17].

**Proposição 2.13** *Seja  $L$  o reticulado de conjuntos fechados da matróide  $M(E)$ . Considere  $W \subseteq E$  e  $F \in L$ . Então*

$$\mu_M(W, F) = \sum_{\substack{W \subseteq X \subseteq F \\ cl(X) = F}} (-1)^{|X-W|}$$

■

## 2.2 O Polinômio Característico

O polinômio característico é a analogia, para matróides, do polinômio cromático de um grafo. Apesar deste polinômio não ser propriamente para contar cores, ele possui propriedades algébricas análogas às do polinômio cromático.

**Definição 2.14** *Seja  $M(E)$  uma matróide, e considere o reticulado de conjuntos fechados  $L$ . Então o polinômio característico de  $M$  é definido por*

$$p(M; \lambda) = \sum_{F \in L} \mu_M(\emptyset, F) \lambda^{r(M)-r(F)} \quad (2.24)$$

A próxima proposição fornecerá uma fórmula alternativa de calcular  $p(M; \lambda)$ , e esta será constantemente utilizada.

**Lema 2.3** *O polinômio característico da matróide  $M(E)$  tem a seguinte expansão booleana:*

$$p(M; \lambda) = \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} \quad (2.25)$$

**Prova.** Basta-nos fazer  $W = \emptyset$  na proposição 2.13 e obter a soma sobre todo  $F \in L$ .

■

O próximo resultado mostrará que o polinômio característico é um exemplo de T-G invariante generalizado, como afirmamos anteriormente.

**Teorema 2.15**  *$p(M; \lambda)$  é um T-G invariante generalizado.*

**Prova.** De fato, seja  $e$  um elemento de  $M$  tal que  $e$  não é um laço nem um colaço. Note que podemos escrever (2.25) da seguinte maneira:

$$p(M; \lambda) = \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} + \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)}$$

Observe ainda que

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} = \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)}.$$

como  $e$  não é um colaço, podemos escolher  $B \in \mathcal{B}(M)$  tal que  $e \notin B$ ; e deste modo,  $r(M - e) = |B| = r(M)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} &= \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} \\ &= \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M-e)-r(X)} \\ &= p(M \setminus e; \lambda) \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} = \sum_{Y \subseteq E-e} (-1)^{|Y \cup e|} \lambda^{r((M-e) \cup e) - r(Y \cup e)}$$

Mas, temos  $r_{M/e}(Y) = r_M(Y \cup e) - r_M(e) = r_M(Y \cup e) - 1$ , para todo  $Y \subseteq E - e$ ; portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} &= \sum_{Y \subseteq E-e} (-1)^{|Y|+1} \lambda^{r_{M/e}(M)-1-r_{M/e}(Y)+1} \\ &= (-1) \sum_{Y \subseteq E-e} (-1)^{|Y|} \lambda^{r_{M/e}(M)-r_{M/e}(Y)} \\ &= (-1)p(M/e; \lambda) \end{aligned}$$

Deste modo,

$$p(M; \lambda) = p(M \setminus e; \lambda) - p(M/e; \lambda).$$

Agora, note que se  $e$  é um laço, temos

$$p(M; \lambda) = 0 = p(M(e); \lambda)p(M \setminus e; \lambda)$$

Por outro lado, se  $e$  é um colaço, temos

$$\begin{aligned} p(M; \lambda) &= \lambda p(M \setminus e; \lambda) - p(M \setminus e; \lambda) \\ &= (\lambda - 1)p(M \setminus e; \lambda) \\ &= p(M(e); \lambda)p(M; \lambda) \end{aligned}$$

Logo,  $p(M; \lambda)$  é um T-G invariante generalizado. ■

De posse deste último teorema e da caracterização de T-G invariantes generalizados 2.6, podemos escrever  $p(M; \lambda)$  em função do polinômio de Tutte como segue.

$$p(M; \lambda) = \sigma^{|M|+r(M)} \tau^{r(M)} t \left( M; \frac{p(I; \lambda)}{\tau}, \frac{p(L; \lambda)}{\sigma} \right)$$

Mas, pela prova do último teorema, temos que  $\sigma = 1$  e  $\tau = -1$ . Além disso,

$$\begin{aligned} p(I; \lambda) &= \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} = (-1)^{|\emptyset|} \lambda^{r(M)-r(\emptyset)} + (-1)^{|M|} \lambda^{r(M)-r(M)} \\ &= (-1)^0 \lambda^{1-0} + (-1) \lambda^0 = \lambda - 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p(L; \lambda) &= \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(M)-r(X)} = (-1)^{|\emptyset|} \lambda^{r(M)-r(\emptyset)} + (-1)^{|M|} \lambda^{r(M)-r(M)} \\ &= (-1)^0 \lambda^{0-0} + (-1) \lambda^0 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p(M; \lambda) &= 1^{|M|-r(M)} (-1)^{r(M)} t(M; -(\lambda - 1), 0) \\ &= (-1)^{r(M)} t(M; 1 - \lambda, 0) = (-1)^{r(M)} S(M; -\lambda, -1). \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\mu(M) = \mu_M(\emptyset; E) = p(M; 0).$$

De fato,

$$\begin{aligned} p(M; \lambda) &= \sum_{F \in L} \mu_M(\emptyset, F) \lambda^{r(M)-r(F)} \\ &= \mu_M(\emptyset, E) \lambda^{r(M)-r(E)} + \sum_{\substack{F \in L \\ F \neq E}} \mu_M(\emptyset; F) \lambda^{r(M)-r(F)} \\ &= \mu_M(\emptyset, E) \lambda^0 + \sum_{\substack{F \in L \\ F \neq E}} \mu(\emptyset, F) \lambda^{r(M)-r(F)} \\ &= \mu_M(\emptyset, E) + \sum_{\substack{F \in L \\ F \neq E}} \mu_M(\emptyset, F) \lambda^{r(M)-r(F)} \end{aligned}$$

Fazendo  $\lambda = 0$ , temos

$$p(M; 0) = \mu_M(\emptyset, E)$$

Deste modo, a função de Möbius  $\mu(M)$  é um T-G invariante, e

$$\mu(M) = p(M; 0) = (-1)^{r(M)} t(M; 1, 0) = (-1)^{r(M)} S(M; 0, 1) \quad (2.26)$$

No capítulo 4 estaremos aplicando uma técnica de T-G que necessitará de uma versão do Polinômio de Tutte a quatro variáveis, a qual é definida sobre a seguinte classe de matróides:

**Definição 2.16** *Definimos por  $\mathfrak{M}_p$  a classe das matróides pontuadas; isto é, matróides  $M_p$  tendo um ponto destacado  $d$*

Os próximos resultados relacionados à matróides pontuadas não serão demonstrados; no entanto, suas demonstrações poderão ser encontradas em [2].

**Proposição 2.17** *Existe uma única função  $t_p$  de  $\mathfrak{M}_p$  no anel de polinômios  $\mathbb{Z}[x', x, y', y]$  possuindo as seguintes propriedades:*

(i)  $t_p(M_p(d)) = x'$  se  $M_d(d)$  é um colaço; e  $t_p(M_p(d)) = y'$  se  $M_d(d)$  é um laço.

(ii) Se  $e$  é um elemento de um membro  $M_d$  de  $\mathfrak{M}_p$  e  $e \neq d$ , então

$$t_p(M_d) = t_p(M_d \setminus e) + t_p(M_d/e).$$

(iii) Se  $e$  é um laço ou um colaço de um membro  $M_d$  de  $\mathfrak{M}_p$  e  $e \neq d$ , então

$$t_p(M_d) = t_p(M_d \setminus e) t(M_d(e)).$$

Em particular,  $t_p(M_d(e)) = t(M_d(e))$ . ■



**Proposição 2.18** *Suponha que  $M_d \in \mathfrak{M}_p$ . Então*

(i) *para alguma  $f$  e  $g$  em  $\mathbb{Z}[x, y]$ ,*

$$t_p(M_d; x', x, y', y) = x'f(x, y) + y'g(x, y).$$

*Além disso, para  $f$  e  $g$ ,*

(ii)  $t(M_d; x, y) = xf(x, y) + yg(x, y)$ ;

(iii)  $t_p(M_d^*; x', x, y', y) = t_p(M_d; y', y, x', x) = x'g(y, x) + y'f(y, x)$ ;

(iv) *se  $d$  não é um laço nem um colaço de  $M_d$ , então*

$$t(M_d \setminus d; x, y) = (x - 1)f(x, y) + g(x, y)$$

$$t(M_d/d; x, y) = f(x, y) + (y - 1)g(x, y);$$

(v) *se  $d$  é um laço ou um colaço de  $M_d$ , então*

$$t(M_d \setminus d; x, y) = t(M_d/d; x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } d \text{ é um colaço,} \\ g(x, y), & \text{se } d \text{ é um laço.} \end{cases}$$

■

# Capítulo 3

## Coloração e Fluxo

### 3.1 Coloração

Uma vez que o polinômio de Tutte e seus principais resultados foram apresentados, podemos então partir para algumas aplicações. Iniciaremos com a coloração de vértices em grafos.

**Definição 3.1** *Sejam  $G$  um grafo e  $\lambda$  um número inteiro positivo. Então, uma  $\lambda$ -coloração própria de vértices de  $G$  é uma aplicação  $f : V(G) \rightarrow S$ , onde  $S = \{1, 2, \dots, \lambda\}$ , tal que  $f(v) \neq f(w)$  sempre que  $v$  e  $w$  forem adjacentes. Os elementos do conjunto  $S$  são chamados as cores disponíveis.*

Note que coloração não está definida para laços, pois o vértice de um laço é auto-adjacente. Finalmente, o número de colorações dos vértices de  $G$  será denotado por  $\chi_G(\lambda)$ .

O próximo resultado mostrará que  $\chi_G(\lambda)$  é um polinômio em  $\lambda$  que pode ser descrito através do polinômio de Tutte de  $M(G)$ .

**Proposição 3.2** *Para um grafo  $G$  que possui  $k(G)$  componentes conexas,*

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^{k(G)} p(M(G); \lambda) = \lambda^{k(G)} (-1)^{|V(G)| - k(G)} t(M(G); 1 - \lambda, 0)$$

**Prova.** Defina  $f(G; \lambda) = \lambda^{-k(G)} \chi_G(\lambda)$ . Então, a priori,  $f$  depende do grafo  $G$  dado. No entanto, mostraremos que  $f$  depende apenas de  $M(G)$ . De fato, se considerarmos  $f(M(G); \lambda) = f(G; \lambda)$ , então, através de uma indução sobre o número de elementos de  $E(G)$ , podemos mostrar que esta função está bem definida como uma função na

classe das matr ides; além disso,  $f$  é um T-G invariante generalizado. Com efeito, se  $|E(G)| = 1$ , então  $G$  possui apenas uma aresta  $e$  que é um laço ou uma ponte e, possivelmente, vértices isolados. Sem perda de generalidade, suponha  $G$  sem vértices isolados; então  $M(G)$  é  $L$  ou  $I$ . Deste modo, se  $e$  é uma ponte, então  $k(G) = 1$  e  $\chi_G(\lambda) = A_{\lambda,2} = \lambda(\lambda - 1)$ , onde  $A_{\lambda,2}$  é o arranjo de  $\lambda$  elementos tomados dois a dois; portanto,  $f(I; \lambda) = f(G; \lambda) = \lambda^{-1}\lambda(\lambda - 1) = \lambda - 1$ . Por outro lado, se  $e$  é um laço, então  $\chi_G(\lambda) = 0$ ; e deste modo,  $f(L; \lambda) = f(G; \lambda) = 0$ . Logo,  $f$  está bem definida para  $|E(G)| = 1$ . Agora, suponha que  $f$  está bem definida para  $|E(G)| = k$ . Então, resta-nos provar que  $f$  está bem definida para  $|E(G)| = k + 1$ . De fato, seja  $\mathbf{e} = uv$  uma aresta de  $G$ , e suponha que  $\mathbf{e}$  não é um laço nem uma ponte. Então, note que podemos particionar o conjunto de  $\lambda$ -colora es de  $G - e$  em dois subconjuntos: um no qual  $u$  e  $v$  têm a mesma cor, e outro no qual estes têm cores distintas; caso exista outra aresta  $e' = uv$  distinta de  $e$ , então o primeiro conjunto da parti ao será vazio. Como em  $G/e$   $u$  e  $v$  coincidem, nas  $\lambda$ -colora es de  $G/e$   $u$  e  $v$  têm a mesma cor; deste modo, o primeiro conjunto da parti ao acima possui uma correspondência biunívoca com as colora es de  $G/e$ . Perceba ainda que nas  $\lambda$ -colora es de  $G$   $u$  e  $v$  têm cores distintas, pois estes são adjacentes; deste modo, o segundo conjunto da parti ao acima possui uma correspondência biunívoca com as colora es de  $G$ . Além disso, uma vez que  $\mathbf{e}$  não é uma ponte,  $G$  e  $G - e$  têm o mesmo número de componentes. Deste modo,

$$\begin{aligned}
f(G; \lambda) + f(G/e; \lambda) &= \lambda^{-k(G)}\chi_G(\lambda) + \lambda^{-k(G/e)}\chi_{G/e}(\lambda) \\
&= \lambda^{-k(G-e)}\chi_G(\lambda) + \lambda^{-k(G-e)}\chi_{G/e}(\lambda) \\
&= \lambda^{-k(G-e)}[\chi_G(\lambda) + \chi_{G/e}(\lambda)] \\
&= \lambda^{-k(G-e)}\chi_{G-e}(\lambda) \\
&= f(G - e; \lambda)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(G - e; \lambda) = f(G; \lambda) + f(G/e; \lambda)$$

Pela hipótese de indu ao, temos que

$$f(G; \lambda) = f(M(G - e); \lambda) - f(M(G/e); \lambda) \quad (3.1)$$

Se  $\mathbf{e}$  é um laço de  $G$  e  $uv = e$ , então não existe uma colora ao para  $G$ , pois  $u = v$ ; e deste modo,  $f(G; \lambda) = f(L; \lambda) = 0$ , e assim

$$f(G; \lambda) = f(L; \lambda)f(M(G - e); \lambda) \quad (3.2)$$

Finalmente, se  $e$  é uma ponte de  $G$ , então o número de maneiras de  $\lambda$ -colorir  $G$  é igual ao número de maneiras de  $\lambda$ -colorir  $G - e$ , desde que  $u$  e  $v$  tenham cores distintas; isto porque em  $G - e$   $u$  e  $v$  podem ser coloridos igualmente. No entanto, numa  $\lambda$ -coloração de  $G - e$ , uma vez que uma cor é usada em  $u$ , existem  $\lambda$  possibilidades de cores para  $v$ ; visto que neste subgrafo  $u$  e  $v$  não são adjacentes. Destas possibilidades de cores para  $v$ ,  $\lambda - 1$  são diferentes da utilizada por  $u$ . Deste modo, o número de maneiras de  $\lambda$ -colorir  $G - e$ , de modo que  $u$  e  $v$  sejam coloridos diferentemente, é  $\frac{\lambda-1}{\lambda}\chi_{G-e}(\lambda)$ . Portanto,  $\chi_G(\lambda) = \frac{\lambda-1}{\lambda}\chi_{G-e}$ . Mas,  $f(I; \lambda) = \lambda - 1$  e  $k(G - e) = k(G) + 1$ , então

$$\begin{aligned} f(I; \lambda)f(G - e; \lambda) &= (\lambda - 1)\lambda^{-k(G-e)}\chi_{G-e}(\lambda) \\ &= (\lambda - 1)\lambda^{-k(G)-1}\frac{\lambda}{\lambda-1}\chi_G(\lambda) \\ &= \lambda^{-k(G)}\chi_G(\lambda) = f(G; \lambda) \end{aligned}$$

Logo,

$$f(G; \lambda) = f(I; \lambda)f(G - e; \lambda) \quad (3.3)$$

Através das equações (3.1), (3.2) e (3.3), concluímos que  $f$  está bem definida para  $|E(M)| = k + 1$ . Logo,  $f$  está bem definida como uma função de matróides. Além disso, ainda pelas equações (3.1), (3.2) e (3.3), concluímos que  $f$  é um T-G invariante generalizado tal que  $\sigma = 1$  e  $\tau = -1$ . Como  $f(I; \lambda) = \lambda - 1$  e  $f(L; \lambda) = 0$ , então, pelo corolário 2.6, temos

$$f(M(G); \lambda) = (-1)^{r(M(G))}t(M(G); 1 - \lambda, 0)$$

No entanto, temos que  $r(M(G)) = |V(G)| - k(G)$ ; deste modo,

$$f(M(G); \lambda) = (-1)^{|V(G)|-k(G)}t(M(G); 1 - \lambda, 0)$$

Portanto, pela definição de  $f$ ,

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^{k(G)}(-1)^{|V(G)|-k(G)}t(M(G); 1 - \lambda, 0)$$

Finalmente, vimos que  $p(M; \lambda) = (-1)^{r(M)}t(M; 1 - \lambda, 0)$ ; deste modo,

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^{k(G)}p(M(G); \lambda)$$

Logo, o resultado segue. ■

Um dos famosos problemas da matemática que até pouco tempo não havia sido solucionado, foi o "*o problema das Quatro Cores*". Visando a solução deste problema, Birkhoff em [4] introduziu o polinômio cromático; no entanto, este veio a ser solucionado por Appel & Haken [1] os quais usaram um método onde não foi necessário o polinômio cromático.

**Teorema 3.3** *Seja  $G$  um grafo planar sem laços. Então  $G$  possui uma 4-coloração.* ■

Pela nossa última proposição, o problema das quatro cores pode ser reformulado em termos do polinômio cromático da seguinte maneira:

**Teorema 3.4** *Seja  $G$  um grafo planar sem laços. Então  $\chi_G(4) > 0$ .* ■

Finalmente, maiores detalhes sobre o método usado por Appel & Haken podem ser encontrados em [3].

## 3.2 Fluxo

Nesta seção utilizaremos a caracterização de T-G invariantes generalizados para encontrarmos o polinômio de fluxos de um grafo. Além disso, estaremos apresentando alguns resultados que serão utilizados na demonstração do teorema do 6-fluxo não-nulo que demonstraremos na próxima seção.

**Definição 3.5** *Seja  $\theta$  uma orientação fixada de um grafo  $G$ , e seja  $G_\theta$  o grafo orientado associado. Considere  $H$  um grupo abeliano aditivo com identidade  $0$  e ordem  $|H|$ . Então um  $|H|$ -fluxo sobre  $G_\theta$  é uma função  $f$  definida sobre as arestas de  $G_\theta$  que associa a cada aresta um valor em  $H$ , e tal que, em cada vértice  $v$  de  $G_\theta$ , a soma em  $H$  dos valores das arestas que iniciam em  $v$  é igual a soma dos valores das arestas que terminam em  $v$ . Se nenhuma das arestas admitem custo zero, então o  $|H|$ -fluxo é chamado não-nulo.*

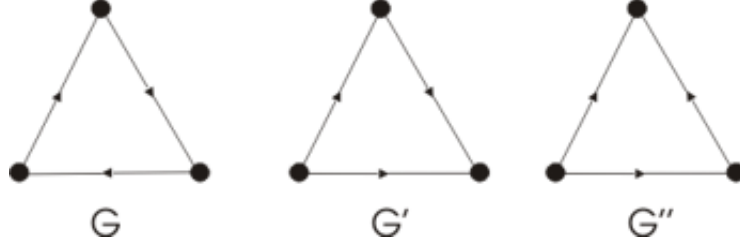
Denotaremos por  $\chi_{G_\theta}^*(H)$  o número de  $|H|$ -fluxos não-nulos sobre  $G_\theta$ .

**Lema 3.1** *Se  $f$  é um fluxo sobre um grafo orientado  $G_\theta$  e  $e$  é uma ponte de  $G_\theta$ , então  $f(e) = 0$ .*

**Prova.** De fato, suponha que  $e$  é a única aresta de  $V_1$  a  $V_2 = V(G) - V_1$ . Agora note que em um H-fluxo, o total de fluxo direcionado de  $V_1$  a  $V_2$  é 0; portanto, o fluxo em  $e$  é 0. ■

**Lema 3.2**  $\chi_{G_\theta}^*(H)$  não depende da orientação  $\theta$  de  $G$ .

**Prova.** Primeiramente note que uma orientação  $\theta'$  difere de  $\theta$  pela inversão de algumas orientações de  $\theta$ . Deste modo, mostraremos apenas o caso da inversão de orientação de uma aresta, e os demais casos serão extensões deste, como mostra a figura abaixo.



Seja  $\theta'$  uma orientação obtida de  $\theta$  invertendo a direção de uma aresta  $e$ . Então, dado um H-fluxo  $f$  não-nulo sobre  $G_\theta$ , podemos definir um H-fluxo não-nulo  $f'$  sobre  $G_{\theta'}$  tal que  $f'(e) = -f(e)$  e  $f'(e') = f(e)$  se  $e' \neq e$ . Note que a conservação do fluxo será preservada pelo inverso de  $f(e)$ . Deste modo, determinamos uma bijeção entre os conjuntos de H-fluxos não-nulos de  $G_\theta$  e  $G_{\theta'}$ . Logo,  $\chi_{G_\theta}^*(H) = \chi_{G_{\theta'}}^*(H)$ . ■

Visto que  $\chi_{G_\theta}^*(H)$  não depende da orientação  $\theta$ , podemos abreviá-lo para  $\chi_G^*(H)$ .

**Proposição 3.6** *Seja  $G$  um grafo. Então:*

$$\chi_G^*(H) = p(M^*(G); |H|) = (-1)^{|E(G)| - |V(G)| + k(G)} t(M(G); 0, 1 - |H|)$$

**Prova.** Seja  $g(M(G); H) = \chi_G^*(H)$ . Provaremos, através de uma indução sobre o número de arestas do grafo  $G$ , que  $g$  está bem definida e que esta é um T-G invariante generalizado. De fato, se  $|E(G)| = 1$ , então  $G$  possui uma aresta  $e$  que é um laço ou uma ponte e, possivelmente, vértices isolados. Sem perda de generalidade, suponha  $G$  sem vértices isolados; então  $M(G)$  é  $L$  ou  $I$ . Mas, pelo lema 3.1,  $g(I; H) = 0$ . Observe ainda, que  $g(L; H) = |H| - 1$ . Logo,  $g$  está bem definida para  $|E(G)| = 1$ .

Suponha que  $g$  está bem definida para  $|E(G)| < n$ . Então provaremos que  $g$  está bem definida para  $|E(G)| = n$ .

De fato, seja  $e = uv$  uma aresta de  $G$  que não é um laço nem uma ponte. Note que os conjuntos de arestas de  $E(G/e)$  e  $E(G - e)$  podem ser naturalmente considerados iguais desde que seja observado que em  $G/e$   $u = v$ . Deste modo, seja  $W$  o conjunto dos H-fluxos não-nulos sobre  $G/e$  e a partição de  $W$  nos subconjuntos  $W'$  e  $W''$ , onde  $W'$  consiste dos membros de  $W$  que são também os H-fluxos não-nulos sobre  $G - e$ . Deste

modo,  $|W'| = \chi_{G-e}^*(H)$ . Além disso, os demais  $H$ -fluxos não-nulos que não estão em  $W'$  são aqueles cuja ausência de  $e$  altera a conservação de entrada e saída de fluxos em  $u$  e  $v$ , e estes  $H$ -fluxos estão em correspondência biunívoca com o conjunto dos  $H$ -fluxos não-nulos sobre  $G$ . Com efeito, se  $W''$  é o conjunto dos  $H$ -fluxos não-nulos sobre  $G-e$ , então, em cada um dos vértices  $u$  e  $v$  em  $G-e$ , a soma dos valores das arestas que terminam em  $u$  e  $v$  não é igual a soma dos valores das arestas que iniciam em  $u$  e  $v$ ; isto contradiz a definição. Falta-nos mostrar como se dá a correspondência entre  $W''$  e os  $H$ -fluxos de  $G$ . Suponha, sem perda de generalidade, que o fluxo resultante que entra em  $u$  é  $n$ . Então, em  $G/e$  o fluxo resultante que sai de  $v$  é  $n$ , e se orientarmos  $e$  de  $u$  para  $v$  e associarmos a  $e$  o valor  $n$ , obtemos um  $H$ -fluxo não-nulo sobre  $G$ . Observe todo  $H$ -fluxo não-nulo sobre  $G$  é unicamente obtido deste modo; portanto  $|W''| = \chi_G^*(H)$  e assim  $\chi_{G/e}^*(H) = |W| = |W'| + |W''| = \chi_{G-e}^*(H) + \chi_G^*(H)$ , donde obtemos

$$\chi_G^*(H) = \chi_{G/e}^*(H) - \chi_{G-e}^*(H)$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\chi_G^*(H) = g(M(G/e); H) - g(M(G-e); H) \quad (3.4)$$

Se  $e$  é um laço em  $G$ , então, correspondendo a todo  $H$ -fluxo não-nulo sobre  $G-e$ , podemos tomar o valor de  $e$  como sendo qualquer elemento não-nulo de  $H$ ; isto devido ao fato que um laço não altera a conservação de entrada e saída de fluxo. Deste modo, obtemos um  $H$ -fluxo sobre  $G$ , e assim todo  $H$ -fluxo sobre  $G$  pode ser obtido do mesmo modo. Portanto, se  $e$  é um laço em  $G$ , então

$$\chi_G^*(H) = (|H| - 1)\chi_{G-e}^*(H) = g(L; H)\chi_{G-e}^*(H)$$

Pela hipótese de indução,

$$\chi_G^*(H) = g(L; H)g(M(G-e); H) \quad (3.5)$$

Finalmente, se  $e$  é uma ponte de  $G$ , então  $\chi_G^*(H) = 0 = g(I; H)$ , e deste modo,

$$\chi_G^*(H) = g(I; H)\chi_{G-e}^*(H)$$

Pela hipótese de indução

$$\chi_G^*(H) = g(I; H)g(M(G-e); H) \quad (3.6)$$

Podemos observar, através das equações (3.4), (3.5) e (3.6), que  $g$  está bem definida, e além disso, esta é um T-G invariante generalizado tal que  $\sigma = -1$  e  $\tau = 1$ . Deste modo, pelo corolário 2.6, temos

$$\begin{aligned}\chi_G^*(H) = g(M(G); H) &= (-1)^{|E(M(G))| - r(M(G))} t(M(G); g(I; H)/\tau, g(L; H)/\sigma) \\ &= (-1)^{|E(G)| - |V(G)| + k(G)} t(M(G); 0, 1 - |H|)\end{aligned}$$

Por outro lado,  $r^*(M(G)) = |E(M(G))| - r(M(G)) = |E(G)| - r(M(G))$ ; além disso, pela proposição 2.7,  $t(M(G); 0, 1 - |H|) = t(M^*(G); 1 - |H|, 0)$ . Portanto,

$$\chi_G^*(H) = (-1)^{r^*(M(G))} t(M^*(G); 1 - |H|, 0) = p(M^*(G); |H|).$$

Logo, o resultado segue. ■

Uma consequência imediata da última proposição é que  $\chi_G^*(H)$  não depende do grupo abeliano  $H$ , mas unicamente de sua ordem. Portanto, se  $|H| = n$ , podemos denotar  $\chi_G^*(H)$  por  $\chi_G^*(n)$ . Em particular,  $\chi_G^*(\mathbb{Z}_n) = \chi_G^*(n)$ .

No próximo resultado  $G^*$  denotará um dual geométrico do grafo planar  $G$ .

**Corolário 3.7** *O número de  $\lambda$ -colorações de  $G$  é igual ao produto de  $\lambda^{k(G)}$  pelo número de  $\mathbb{Z}_\lambda$ -fluxos não-nulos sobre  $G^*$ .*

**Prova.** Pela proposição 3.2, temos

$$\begin{aligned}\chi_G(\lambda) &= \lambda^{k(G)} p(M(G); \lambda) = \lambda^{k(G)} p((M^*(G))^*; \lambda) \\ &= \lambda^{k(G)} p(M^*(G^*); \lambda).\end{aligned}$$

Deste modo, pela proposição 3.6, temos

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^{k(G)} \chi_{G^*}^*(\lambda)$$
■

**Corolário 3.8** *Seja  $G$  um grafo planar que não possui ponte. Então  $G$  possui um  $\mathbb{Z}_4$ -fluxo não-nulo.*

**Prova.** Observamos na seção anterior que o teorema das quatro cores pode ser enunciado em termos do número de colorações, ou seja,  $\chi_G(4)$  existe. No entanto, pelo corolário anterior,  $\chi_G(4) = \lambda^{k(G)} \chi_{G^*}^*(\mathbb{Z}_4)$ . Deste modo, se  $\chi_G(4)$  existe, então  $\chi_{G^*}^*(\mathbb{Z}_4)$  existe. Mas, pela proposição 3.6,  $\chi_{G^*}^*(\mathbb{Z}_4)$  depende de  $t(M(G^*); 0, 1 - 4) = t(M(G); 1 - 4, 0)$ .



Portanto, como pela proposição 3.2  $\chi_G(4)$  depende de  $t(M(G); 1 - 4, 0)$ , segue que  $t(M(G); 1 - 4, 0) \neq 0$ ; e deste modo,  $\chi_{G^*}^*(4)$ . ■

No próximo resultado os símbolos  $0, 1, 2, \dots, k - 1$  denotarão números inteiros e elementos de  $\mathbb{Z}_k$ , e quando houver necessidade de distinção será chamada a atenção.

**Proposição 3.9** *Sejam  $k$  um inteiro maior que um,  $G$  um grafo sem ponte, e  $\theta$  uma orientação fixa de  $G$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $G_\theta$  possui um  $\mathbb{Z}_k$ -fluxo não -nulo;

(ii)  $G_\theta$  possui um  $\mathbb{Z}$ -fluxo não -nulo com valores em  $[-(k - 1), k - 1]$ .

**Prova.** (ii)  $\Rightarrow$  (i) Suponha que  $G_\theta$  possui um  $\mathbb{Z}$ -fluxo não-nulo com valores em  $[-(k - 1), k - 1]$ . Então, se considerarmos estes valores como elementos de  $\mathbb{Z}_k$ , obtemos um  $\mathbb{Z}_k$ -fluxo não-nulo em  $G_\theta$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Suponha que  $\psi$  é um  $\mathbb{Z}_k$ -fluxo não -nulo sobre  $G_\theta$ . Defina  $\phi : E(G_\theta) \rightarrow [-(k - 1), k - 1]$  tal que, considerada como um elemento de  $\mathbb{Z}_k$ ,  $\phi(e) = \psi(e)$ . Note que  $\phi$  não é unicamente determinada desta maneira, pois existem duas escolhas para  $\phi(e)$  para cada aresta  $e$ ; por exemplo, se  $\psi(e) = 1$ , então  $\phi(e) = 1$  ou  $\phi(e) = -(k - 1)$  (isto porque  $1 = -(k - 1) \pmod{k}$ ). Diremos que a aresta  $e$  é positiva se  $\phi(e)$  é positiva, e diremos que  $e$  é negativa caso contrário. Temos que  $\phi(e)$  é não -nula, pois  $\psi(e)$  é não -nula para toda aresta  $e$ .

Para cada vértice  $v$  de  $G$ , defina o custo de  $v$  por

$$w(v) = \sum_{e \in N^+(v)} \phi(e) - \sum_{e \in N^-(v)} \phi(e),$$

onde  $N^+(v)$  é o conjunto das arestas que entram em  $v$  e  $N^-(v)$  é conjunto das arestas que saem de  $v$ .

Diremos que  $v$  é positivo, negativo ou zero, se seu custo é positivo, negativo, ou zero. Note que  $w(v) \equiv 0 \pmod{k}$ , para todos os vértices  $v$ , uma vez que vistos como elementos de  $\mathbb{Z}_k$   $\phi(e) = \psi(e)$ . Agora, escolhamos a função  $\phi$  tal que  $\sum_{v \in V(G)} |w(v)|$  é mínimo.

Um caminho  $P$  em  $G$  de um vértice  $u$  a um vértice  $v$  será chamado positivo, se as arestas positivas de  $P$  são precisamente aquelas cuja orientação em  $G_\theta$  coincide com a sua direção em  $P$ . Mostraremos que não existe um caminho positivo em  $G_\theta$  com vértice inicial negativo e vértice final positivo. Com efeito, suponha que existe um caminho

positivo  $P'$  de  $x$  a  $x'$  tal que

$$w(x) < 0 \quad (3.7)$$

e

$$w(x') > 0. \quad (3.8)$$

Então defina  $\phi'$  como segue

$$\phi'(e) = \begin{cases} \phi(e) - k, & \text{se } e \text{ é uma aresta positiva de } P', \\ \phi(e) + k, & \text{se } e \text{ é uma aresta negativa de } P', \\ \phi(e), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, se  $w'$  é a função de custos de  $\phi'$ , então

$$w'(v) = w(v), \forall v \in V(G) - \{x, x'\}. \quad (3.9)$$

De fato, no caso em que  $v$  é externo a  $P'$ , o resultado segue trivialmente. Deste modo, suponha que  $v$  é interno a  $P'$ . Então existem  $e_1, e_2 \in P'$  tais que, em  $P'$ ,  $e_1 \in N^+(v)$  e  $e_2 \in N^-(v)$ . Agora, observe que se  $e_1$  e  $e_2$  são arestas positivas, então

$$\begin{aligned} w'(v) &= \sum_{e \in N^+(v)} \phi'(e) - \sum_{e \in N^-(v)} \phi'(e) = \phi(e_1) - k - \phi(e_2) + k \\ &+ \sum_{(e \in N^+(v)) - e_1} \phi(e) - \sum_{(e \in N^-(v)) - e_2} \phi(e) \\ &= w(v) \end{aligned}$$

Analogamente, se  $e_1$  e  $e_2$  são negativas, então

$$w'(v) = w(v)$$

Finalmente se, em  $P'$ ,  $e_1$  é positiva e  $e_2$  é negativa, então, em  $G_\theta$ ,  $e_2 \in N^+(v)$ ; deste modo,

$$\begin{aligned} w(v) &= \sum_{e \in N^+(v)} \phi(e) - \sum_{e \in N^-(v)} \phi(e) = \phi'(e_1) + k + \phi'(e_2) - k \\ &+ \sum_{(e \in N^+(v)) - e_1 - e_2} \phi'(e) - \sum_{e \in N^-(v)} \phi'(e) \\ &= w'(v) \end{aligned}$$

Agora considere  $w(x)$  e uma aresta  $e$  incidente em  $x$ . Se  $e \in P'$ , então  $e$  é única e pertence a  $N^-(x)$ ; portanto,

$$w(x) = -\phi(e)$$

Como  $w(x) < 0$ , temos que  $\phi(e) > 0$ . Logo,

$$\phi'(e) = \phi(e) - k \quad (3.10)$$

Se  $e \notin P'$ , então

$$\phi'(e) = \phi(e) \quad (3.11)$$

Portanto, por (3.10) e (3.11), temos

$$w'(x) = \sum_{e \in N^+(x)} \phi'(e) - \sum_{e \in N^-(x)} \phi'(e) = \sum_{e \in N^+(x)} \phi(e) - \sum_{e \in N^-(x)} \phi(e) + k = w(x) + k \quad (3.12)$$

Analogamente, considerando  $w(x')$  e uma aresta  $e$  incidente em  $x'$ , concluimos que

$$w'(x') = w(x') - k \quad (3.13)$$

Como  $w(v) \equiv 0 \pmod{k}, \forall v \in V(G)$ , então  $w(v)$  é múltiplo de  $k$ , e por (3.7) e (3.8), temos

$$w(x) \leq -k \quad (3.14)$$

e

$$w(x') \geq k \quad (3.15)$$

Deste modo, por (3.14), temos

$$|w'(x)| = |w(x) + k| = -(w(x) + k) = -w(x) - k < -w(x) = |w(x)| \quad (3.16)$$

Analogamente, por (3.13) e (3.15), temos

$$|w'(x')| = |w(x') - k| < |w(x')| \quad (3.17)$$

Logo, por (3.9), (3.16) e (3.17), temos

$$\sum_{v \in V} |w'(v)| < \sum_{v \in V} |w(v)|;$$

o que é uma contradição.

Sejam  $V_P$  e  $V_N$  os conjuntos de vértices positivos e negativos, respectivamente, de  $V(G)$ . Seja  $V_1$  a união de  $V_N$  com todos os vértices  $u$  para os quais existe um caminho positivo de um vértice de  $V_N$  a  $u$ . Note que não existe  $v \in V_P \cap V_1$ , pois, como mostramos, não existe um caminho positivo de um vértice negativo a um vértice

positivo; portanto,  $V - V_1 \supseteq V_P$ . Temos ainda que se  $v \in (V - V_1) - V_P$ , então  $w(v) = 0$ . Portanto,

$$\sum_{v \in V - V_1} w(v) = \sum_{v \in V_P} w(v) \quad (3.18)$$

Por outro lado,

$$\sum_{v \in V - V_1} w(v) = \sum_{v \in V - V_1} \left( \sum_{e \in N^+(v)} \phi(e) - \sum_{e \in N^-(v)} \phi(e) \right) \quad (3.19)$$

Se os vértices finais de  $e$  estão em  $V - V_1$ , então  $e \in N^+(v) \cap N^-(v)$ ; e deste modo, a contribuição do lado direito de (3.19) é nula. Além disso, por consequência da definição de  $V_1$ , todos os vértices em  $V_1$  são negativos e todos os vértices  $V - V_1$  são positivos. Deste modo, não existe uma aresta positiva com vértice inicial em  $V_1$  e vértice final em  $V - V_1$ , nem uma aresta negativa com vértice inicial em  $V - V_1$  e vértice final em  $V_1$ . Daí, se  $e$  possui um vértice em  $V_1$  e outro em  $V - V_1$ , segue que o lado direito de (3.19) é não-positivo. Mas, com todo vértice em  $V_P$  é positivo, temos

$$\sum_{v \in V_P} w(v) \geq 0,$$

com igualdade somente se  $V_P = \emptyset$ . Logo,  $G$  não possui vértices positivos.

Agora, seja  $V_2$  o conjunto formado por  $V_P$  juntamente com todos os vértices  $v$  tais que existe um caminho positivo de  $v$  a um vértice de  $V_P$ . Temos que  $V - V_2 \supseteq V_N$ . Com efeito, não existe  $w \in V_N \cap V_2$ , pois não existe um caminho positivo de um vértice negativo a um vértice positivo. Temos ainda que, se  $v \in (V - V_2) - V_N$ , então  $w(v) = 0$ . Portanto,

$$\sum_{v \in V - V_2} w(v) = \sum_{v \in V_N} w(v)$$

Mas

$$\sum_{v \in V - V_2} w(v) = \sum_{v \in V - V_2} \left( \sum_{e \in N^+(v)} \phi(e) - \sum_{e \in N^-(v)} \phi(e) \right)$$

Prosseguindo de modo análogo ao que fizemos para  $V_1$  e  $V - V_1$ , concluímos que  $G$  não possui vértices negativos.

Logo,  $w(v) = 0, \forall v \in V$ ; deste modo,  $\sum_{e \in N^+(v)} \phi(e) = \sum_{e \in N^-(v)} \phi(e), \forall v \in V$ , e o resultado segue.  $\blacksquare$

Diremos que  $f$  é um  $k$ -fluxo sobre um grafo  $G$ , se  $f$  é um  $\mathbb{Z}$ -fluxo com valores em  $[-(k - 1), k - 1]$ .

### 3.3 Conjectura do 5-fluxo de Tutte

Nas seções 2.1 e 2.2 observamos a ocorrência de T-G invariantes em colorações e em fluxos; abordamos ainda sobre o problema das quatro cores que por muitos anos foi o alvo das pesquisas relacionadas à colorações. No contexto de fluxos o problema tem sido demonstrar ou apresentar um contra-exemplo da seguinte conjectura de Tutte (1954):

**Conjectura 3.10** *Todo grafo sem ponte possui um 5-fluxo não-nulo.*

Temos ainda a seguinte conjectura, que é uma versão mais fraca de 3.10.

**Conjectura 3.11** *Existe um inteiro  $k$  tal que todo grafo sem ponte tem um  $k$ -fluxo não-nulo.*

Em [9], Jaeger provou que todo grafo sem ponte possui um 8-fluxo não-nulo. No entanto, em [14] Seymour apresentou um melhor resultado, o qual é o seguinte teorema que provaremos nesta seção.

**Teorema 3.12** *Todo grafo sem ponte possui um 6-fluxo não-nulo.*

Este teorema é o melhor resultado para conjectura 3.10. Temos ainda que se 3.10 for verdadeira, então esta não pode ser melhorada, veja o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.13** *O grafo de Petersen  $P_{10}$  ( figura 3.1 ) não possui 4-fluxo não-nulo. De fato, através de 3.6, temos que  $\chi_{P_{10}}^*(\lambda) = t(M(P_{10}); 0, 1 - \lambda)$ ; deste modo, procedendo como no exemplo 2.5, obtemos*

$$\chi_{P_{10}}^*(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda^2 - 5\lambda + 10).$$

Daí  $\chi_{P_{10}}^*(\lambda) = 0$ .

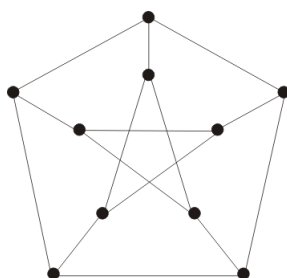


Figura 3.1:  $P_{10}$

A partir deste último exemplo, Tutte em [15] propôs a seguinte conjectura, onde  $P_{10}$  é admitido como a obstrução minimal para a existência de um 4-fluxo.

**Conjectura 3.14** *Se um grafo sem ponte não possui 4-fluxo, então ele possui um subgrafo contratível a  $P_{10}$ .*

A partir de agora passaremos a apresentar alguns lemas que serão utilizados para provar o teorema 3.12.

**Lema 3.3** *Se  $G$  é um grafo no qual o grau de todo vértice é pelo menos dois, então  $G$  contém um ciclo.*

**Prova.** Note que se  $G$  contém laços ou arestas múltiplas, o resultado segue trivialmente. Deste modo, suponha que  $G$  é simples. Seja  $v$  um vértice de  $G$ . Então podemos construir indutivamente a seguinte sequência de arestas

$$ve_1v_1e_2v_2\cdots \tag{3.20}$$

Escolhendo  $v_1$  um vértice adjacente a  $v$ , e, para  $i \geq 1$ , escolhendo  $v_{i+1}$  um vértice adjacente a  $v_i$  diferente de  $v_{i-1}$ . Note que isto é possível devido a escolha de  $G$ .

Agora, uma vez que  $G$  possui um número finito de vértices, deveremos, eventualmente, escolher um vértice que já foi escolhido anteriormente. Se  $v_k$  é o primeiro vértice a ser escolhido novamente, então a parte da sequência (2.20) que está entre as duas ocorrências de  $v_k$  é o ciclo que desejávamos. ■

**Lema 3.4** *Seja  $G$  um grafo sem ponte. Então as seguintes afirmações relacionadas a  $G$  são equivalentes:*

(i)  *$G$  possui um 2-fluxo não-nulo.*

(ii) *Todo vértice de  $G$  possui grau par.*

(iii)  *$E(G)$  é uma união disjunta de ciclos.*

**Prova.** (i)  $\implies$  (ii) Se  $G$  possui um 2-fluxo não-nulo, então existe uma aplicação  $f : \vec{E}(G) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  tal que  $f(e) = \bar{1}$ ,  $\forall e \in E(G)$ . Suponha que existe um vértice  $v' \in V(G)$  com grau ímpar. Então  $\sum_{e \in N^+(v')} f(e) - \sum_{e \in N^-(v')} f(e) \neq 0$ ; o que é uma contradição.

(ii)  $\implies$  (iii) Suponha, sem perda de generalidade, que  $G$  não possui vértices isolados. Então, como todo vértice de  $G$  possui grau par, segue que todo vértice de  $G$  possui pelo menos grau dois. Deste modo, pelo lema 3.3,  $G$  possui um ciclo  $C_0$ . Se eliminarmos todas as arestas de  $C_0$ , então no grafo resultante  $G_1$  todos os vértices possuem grau par, visto que para cada vértice de  $C_0$  são eliminadas duas arestas. Se  $G_1$  for um grafo nulo, o resultado segue; caso contrário, aplicando o argumento anterior a  $G_1$ , obtemos um grafo  $G_2$  no qual todos os vértices possuem grau par. Prosseguindo indutivamente até um grafo  $G_n$  nulo, obtemos uma partição de  $E(G)$  em ciclos.

(iii)  $\implies$  (i) Seja  $W = v_0e_0v_1e_1 \cdots e_{l-1}v_l$ , com  $v_l = v_0$ , um circuito de  $G$ . Então defina a direção  $\vec{e}_i = v_iv_{i+1}$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, l$ , e a seguinte aplicação  $f : W \longrightarrow \mathbb{Z}_2$  dada por  $f(e_i) = \bar{1}$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, l$ . Note que  $f$  é um 2-fluxo para  $W$ . Finalmente, como  $E(G)$  é uma união disjunta de ciclos, podemos construir, analogamente, um 2-fluxo para cada ciclo. ■

**Definição 3.15** *Seja um inteiro  $k \geq 2$ . Diremos que um grafo conexo  $G$  é um ciclo generalizado com partes  $G_1, G_2, \dots, G_k$  se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) *Cada  $G_i$  é um subgrafo conexo de  $G$  tendo um conjunto não-vazio de arestas, e, se  $k = 2$ , então  $G_1$  e  $G_2$  têm pelo menos três vértices.*

(ii) *Os conjuntos de arestas de  $G_1, G_2, \dots, G_m$  partionam o conjunto de arestas de  $G$ , e cada  $G_i$  separa exatamente dois vértices, os quais são seus vértices de contato com  $\cup_{i \neq j} G_j$ .*

(iii) *Se cada  $G_i$  for substituído por uma aresta unindo seus vértices de contato, então o grafo resultante será um ciclo.*

O grafo da figura 3.2 é um exemplo de um ciclo generalizado.

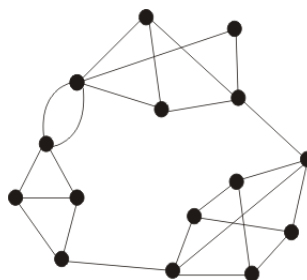


Figura 3.2:

Tendo em vista as constantes referências que faremos, a partir de agora, a blocos de um grafo, a seguinte definição será necessária.

**Definição 3.16** *Um subgrafo conexo maximal que não possui um corte-vértice é chamado de **bloco**.*

No entanto, faremos também uso da seguinte equivalência.

**Teorema 3.17** *Seja  $G$  um grafo tal que  $|E(G)| \geq 2$ . Então  $G$  é 2-conexo se, e somente se,  $G$  é um bloco. ■*

O próximo resultado não será demonstrado, no entanto, sua demonstração poderá ser encontrada em [12].

**Lema 3.5** *Seja  $G$  um bloco que possui pelo menos quatro vértices, e suponha que  $G$  não é 3-conexo. Então  $G$  possui uma representação como um ciclo generalizado, onde cada parte desta representação é um bloco. ■*

**Lema 3.6** *Seja um inteiro  $k \geq 3$ , e seja  $\mathfrak{C}$  o conjunto dos grafos sem pontes e sem  $k$ -fluxos não-nulos. Se  $G$  é o grafo pertencente a  $\mathfrak{C}$  tal que  $|V(G)| + |E(G)|$  mínimo. Então  $G$  é simples e 3-conexo.*

**Prova.** Suponha que  $G$  possui um laço  $e'$ . Então, como um laço não altera o fluxo, segue que  $G - e'$  não possui  $k$ -fluxo não-nulo; o que contradiz a escolha de  $G$ . Note que a ordem de  $G$  é pelo menos 3, deste modo, pelo teorema 2.10 de [5],  $G$  é 2-conexo. Além disso, se  $\{e_1, e_2\}$  é um ciclo de  $G$ , então  $E(G) \neq \{e_1, e_2\}$ , caso contrário  $G$  teria um  $k$ -fluxo não-nulo. Suponha que  $G - e_1$  possui uma ponte. Então esta ponte deve ser  $e_2$ . Deste modo, suponha  $v$  o vértice incidente a  $e_2$  que une esta aresta ao restante do grafo. Então, se eliminarmos  $v$  de  $G$ , aumentaremos o número de componentes conexas. Daí,  $G$  não é 2-conexo (contradição!). Pela escolha de  $G$ , temos que  $G - e_1$  possui um  $k$ -fluxo  $f'$  não-nulo. Temos ainda que, como  $k \geq 3$ , podemos modificar  $f'$  para obtermos um  $k$ -fluxo sobre  $G$ . Com efeito, suponha que  $e_1 = v_0\vec{v}_1$  e  $e_2 = v_1\vec{v}_0$ ; então basta-nos considerar  $f'(e_1) = f'(e_2)$ . Logo,  $G$  é simples.

Agora, suponha que  $G$  não é 3-conexo. Então, como  $G$  é 2-conexo,  $G$  possui pelos menos quatro vértices; deste modo, segue pelo lema 3.5 que  $G$  pode ser representado como um ciclo generalizado, onde cada parte deste é um bloco. Deste modo, pela definição de ciclo generalizado e pela escolha de  $G$ , para algum  $m \geq 2$ ,  $G$  possui



subgrafos  $G_1, G_2, \dots, G_m$  que satisfazem as seguintes condições:

- (1) cada  $G_i$  é conexo, sem laços, sem corte-vértices, e possui um conjunto não-vazio de arestas; e, se  $m = 2$ ,  $G_1$  e  $G_2$  possuem pelo menos três vértices;
- (2) o conjunto de arestas de  $G_1, G_2, \dots, G_m$  particiona o conjunto de arestas de  $G$ , e cada  $G_i$  separa exatamente dois vértices, os quais são seus vértices de contato com  $\cup_{i \neq j} G_i$ ;
- (3) se cada  $G_i$  for substituído por uma aresta unindo seus vértices de contato, então o grafo resultante será um ciclo.

Se nenhum dos  $G_1, G_2, \dots, G_m$  consiste de uma única aresta, então nenhum destes possui ponte, e como

$$|V(G_i)| + |E(G_i)| < |V(G)| + |E(G)|, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, m,$$

segue que  $G_i$  possui um  $k$ -fluxo não-nulo para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ . Portanto,  $G$  possui um  $k$ -fluxo não-nulo; uma contradição. Deste modo, suponha que  $G_1$  consiste de uma única aresta. Daí  $m \geq 3$ , visto que se  $m = 2$ , então  $G_1$  e  $G_2$  possuem pelo menos três vértices. Deste modo,  $G$  é uma conexão em série de dois grafos  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , nenhum dos quais possuem ponte. Portanto, pela proposição 7.1.14 de [12],  $M(G) = S(M(\Delta_1), M(\Delta_2)) = [P(M^*(\Delta_1), M^*(\Delta_2))]^*$ ; assim  $M^*(G) = P(M^*(\Delta_1), M^*(\Delta_2))$ .

Para concluirmos nossa prova utilizaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [17].

**Lema 3.7** *Seja  $M$  a conexão paralela de  $M_1$  e  $M_2$  com respeito ao ponto base  $p$ , e assumamos que  $p$  não é um laço em  $M_1$  ou em  $M_2$ . Então*

$$p(M; \lambda) = \frac{p(M_1; \lambda)p(M_2; \lambda)}{\lambda - 1}$$

■

Portanto,

$$p(M^*(G); \lambda) = \frac{p(M^*(\Delta_1); \lambda)p(M^*(\Delta_2); \lambda)}{\lambda - 1};$$

e pela proposição 3.6,

$$\chi_G^*(\lambda) = \frac{\chi_{\Delta_1}^*(\lambda)\chi_{\Delta_2}^*(\lambda)}{\lambda - 1}$$

Uma vez que  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  possuem um  $k$ -fluxo não-nulo,  $G$  também possui; o que é uma contradição. Logo,  $G$  é 3-conexo. ■

**Definição 3.18** Para  $X \subseteq E(G)$ , definimos **S-fecho** de  $X$  como sendo o menor subconjunto  $Y$  de  $E(G)$  com as seguintes propriedades:

(1)  $X \subseteq Y$ ; e

(2) não existe um circuito  $C$  de  $G$  tal que  $0 < |C - Y| \leq 2$ .

Denotaremos o S-fecho de um subconjunto  $X \subseteq E(G)$  por  $\langle X \rangle$ . Note que o S-fecho de  $X$  está bem definido. Com efeito, suponha que  $Y_1$  e  $Y_2$  sejam S-fechos de  $X$ . Então  $X \subseteq Y_1 \cap Y_2$ , ou seja,  $Y_1 \cap Y_2$  satisfaz (1). Agora, suponha que  $Y_1 \cap Y_2$  não satisfaz (2); ou seja, existe um circuito  $C$  de  $G$  tal que  $0 < |C - Y_1 \cap Y_2| \leq 2$ . Então, supondo  $C^* \not\subseteq Y_1$ , temos

$$0 < |C^* - Y_1| \leq |C^* - Y_1 \cap Y_2| \leq 2;$$

uma contradição. Logo,  $Y_1 \cap Y_2$  satisfaz (2). Portanto,  $Y_1 \cap Y_2$  é S-fecho de  $X$ ; o que é uma contradição, pois  $Y_1 \cap Y_2 \subset Y_1$

**Construção do S-fecho de um conjunto  $X$ :** se  $C$  é um circuito de  $G$  tal que  $0 < |C - X| \leq 2$ , então considere  $X_1 = X \cup C$ . Agora, se existir um circuito  $C_1$  tal que  $0 < |C_1 - X_1| \leq 2$ , repetimos o processo até a etapa  $X_n$ , onde  $n - 1$  circuitos foram adicionados e não existe um circuito  $C_n$  tal que  $0 < |C_n - X_n| \leq 2$ . Claramente,  $X_n$  satisfaz (1) e (2). Vamos mostrar que  $X_n$  é o S-fecho de  $X$ . De fato, suponha que  $X_n$  não é o S-fecho de  $X$ , e seja  $Y$  o S-fecho de  $X$ . Então  $|Y| < |X_n|$ . Como  $X_n$  e  $Y$  satisfazem as condições (1) e (2), então  $Y \cap X_n$  satisfaz (1) e (2). Por outro lado,  $|Y \cap X_n| \leq |Y|$ . Mas  $Y$  é o menor conjunto, e deste modo,  $Y \cap X_n = Y$ . Portanto,

$$Y \subseteq X_n;$$

o que é uma contradição, pois  $X_n$  não possui um subconjunto próprio que satisfaz as propriedades (1) e (2), caso contrário, sua construção teria finalizado neste subconjunto.

**Lema 3.8** Seja  $G$  um grafo, e seja  $X \subseteq E(G)$ . Então o S-fecho de  $X$  satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Se  $X \subseteq E(G)$ , então  $X \subseteq \langle X \rangle$ .

(ii) Se  $X \subseteq E(G)$ , então  $\langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle$ .

(iii) Se  $X \subseteq Y \subseteq E(G)$ , então  $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ .

**Prova.** De fato,

(i) segue por definição.

(ii) Temos que  $\langle\langle X \rangle\rangle$  é o menor conjunto tal que  $\langle X \rangle \subseteq \langle\langle X \rangle\rangle$  e que satisfaz (2). Por outro lado,  $\langle X \rangle$  satisfaz (2), pois é o S-fecho de  $X$ . Portanto, se  $\langle X \rangle \neq \langle\langle X \rangle\rangle$ , então  $\langle X \rangle$  é o menor conjunto que contém  $\langle X \rangle$  e satisfaz (2); o que é uma contradição. Logo,  $\langle X \rangle = \langle\langle X \rangle\rangle$ .

(iii) Das construções dos S-fechos de  $X$  e  $Y$ , obtemos  $X_n$  e  $Y_n$  os quais são, respectivamente,  $\langle X \rangle$  e  $\langle Y \rangle$ . Vamos provar, através de uma indução sobre  $n$ , que  $X_n \subseteq Y_n$ , isto é,  $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ . Com efeito, se  $n = 1$ , então  $X_1 = X \cup C_0$ . Suponha que  $C_0 \not\subseteq Y$ . Então,

$$0 < |C_0 - Y| \leq |C_0 - X| \leq 2.$$

Deste modo,

$$X_1 = X \cup C_0 \subseteq Y \cup C_0 = Y_1.$$

Agora, suponha que  $X_k \subseteq Y_k$ , com  $k < n$ . Então, dado um circuito  $C_k$  tal que

$$0 < |C_k - X_k| \leq 2 \text{ e } C_k \not\subseteq Y_k,$$

temos

$$0 < |C_k - Y_k| \leq |C_k - X_k| \leq 2.$$

Portanto,

$$X_{k+1} = X_k \cup C_k \subseteq Y_k \cup C_k = Y_{k+1},$$

e deste modo o resultado segue. ■

**Definição 3.19** *Seja  $f$  um  $\mathbb{Z}_n$ -fluxo sobre  $G$ . Então chamaremos de **suporte** de  $f$  o conjunto  $\{e \in E(G); f(e) \neq 0\}$ , e denotaremos  $S(f)$ .*

**Lema 3.9** *Seja  $G$  um grafo e  $X$  um subconjunto de  $E(G)$  tal que  $\langle X \rangle = E(G)$ . Então existe um  $\mathbb{Z}_3$ -fluxo  $f$  sobre  $G$  com  $E(G) - X \subseteq S(f)$ .*

**Prova.** Dado um grafo  $G$  é sempre possível definirmos um  $\mathbb{Z}_3$ -fluxo sobre ele. Queremos mostrar que  $E(G) - X \subseteq S(f)$ ; para isto faremos uma indução sobre  $|E(G) - X|$ . Com efeito, se  $|E(G) - X| = 0$ , então  $E(G) - X = \emptyset$ , e assim  $E(G) - X \subseteq S(f)$ , onde  $f$  pode ser um  $\mathbb{Z}_3$ -fluxo qualquer. Agora, assumamos que  $|E(G) - X| > 0$  e que o resultado vale para todo subconjunto  $X^*$  de  $E(G)$  tal que  $\langle X^* \rangle = E(G)$  e  $|E(G) - X^*| <$

$|E(G) - X|$ . Então  $X \neq \langle X \rangle$ , e assim existe um circuito  $C$  com  $0 < |C - X| \leq 2$ . Mas  $X \subseteq X \cup C$ , donde temos  $\langle X \rangle \subseteq \langle X \cup C \rangle \subseteq E(G)$ ; e como  $E(G) = \langle X \rangle$ , segue que  $\langle X \cup C \rangle = E(G)$ . Agora, como  $|E(G) - X \cup C| < |E(G) - X|$ , pela hipótese de indução, existe um  $\mathbb{Z}_3$ -fluxo  $g$  sobre  $G$  tal que  $E(G) - (C \cup X) \subseteq S(g)$ . Evidentemente, podemos um  $\mathbb{Z}_3$ -fluxo  $h$  sobre  $G$  tal que  $S(h) = C$ . Como  $|C - X| \leq 2$ , podemos escolher  $n$  em  $\mathbb{Z}_3$  tal que, para todo  $e$  em  $C - X$ ,  $n \neq -g(e)/h(e)$ . Seja  $f = g + nh$ . Então, como  $h(e) = 0, \forall e \in E(G) - C$ , e  $E(G) - (X \cup C) \subseteq S(g)$ , temos  $f(e) = g(e) \neq 0$ , para  $e \in E(G) - (X \cup C)$ . Deste modo, para concluirmos que  $E(G) - X \subseteq S(f)$ , falta-nos mostrar que  $f(e) \neq 0, \forall e \in C - X$ . De fato, para  $e \in C - X$ , temos  $f(e) = g(e) + nh(e)$ ; e observe que, pela escolha de  $n$ ,  $f$  é não-nula para todo  $e$  em  $C - X$ . Logo, para todo  $e$  em  $E(G) - X$ ,  $f(e)$  é não-nula. ■

No seguinte lema 3.11 estaremos nos referindo ao grafo de blocos de um grafo, portanto, a seguinte definição será necessária.

**Definição 3.20** *Seja  $\mathfrak{C}$  o conjunto dos corte-vértices de  $G$ , e seja  $\mathfrak{B}$  o conjunto formado pelos blocos de  $G$ . Então o grafo bipartido sobre  $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{B}$  formado pelas arestas  $e = aB$ , com  $B \in \mathfrak{B}$  e  $a \in B \cap \mathfrak{C}$ , é chamado de **grafo de blocos**.*

A figura 3.3 é um exemplo de um grafo e seu respectivo grafo de blocos.

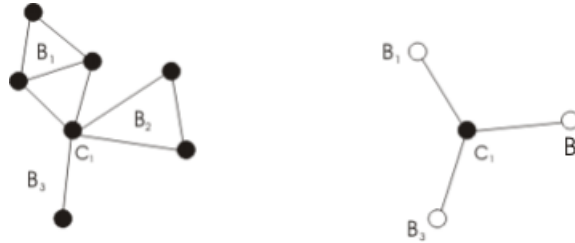


Figura 3.3:

**Lema 3.10** *O grafo de blocos de um grafo conexo é uma árvore.* ■

**Lema 3.11** *Seja  $G$  um grafo simples não-nulo tal que cada vértice possui pelo menos grau dois. Então  $G$  possui um bloco  $G'$ , com pelo menos três vértices, tal que no máximo um vértice de  $G'$  é adjacente a algum vértice de  $G$  que não está em  $G'$ .*

**Prova.** Seja  $bc(G)$  o grafo de blocos de  $G$ . Então, pelo lema (3.10),  $bc(G)$  é uma árvore se este for conexo e, evidentemente,  $bc(G)$  é uma floresta caso contrário. Seja  $v$  um vértice terminal de  $bc(G)$ . Então  $v$  deve ser um bloco, que denotaremos por  $G'$ .

Deste modo, como  $G$  é simples e não possui vértice de grau menor que dois, segue que  $G'$  possui pelo menos três vértices. Logo, por  $G'$  o resultado segue. ■

Antes de enunciarmos o próximo resultado será necessário salientar que um subconjunto  $X$  de  $E(G)$  será chamado **conexo** se o subgrafo de  $G$  formado por  $X$  e todos os vértices incidentes a  $X$  em  $G$  é conexo.

**Lema 3.12** *Seja  $G$  um grafo simples, sem vértices isolados, e 3-conexo. Então  $G$  possui uma coleção de ciclos disjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_m$  tais que  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle = E(G)$ .*

**Prova.** Temos que  $G$  possui um ciclo  $C$ , pois caso contrário não é 3-conexo. Note que o único caso para o qual  $\langle C \rangle$  não é conexo, é se existir um ciclo  $C_1$  formado por um laço ou um par de arestas paralelas, pois, neste caso,  $0 < |C_1 - C| \leq 2$ . Mas  $G$  é simples; portanto,  $\langle C \rangle$  é conexo. Deste modo, escolhamos o maior inteiro positivo  $m$  tal que existam ciclos disjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_m$  com  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$  conexo.

Seja  $U$  o conjunto dos vértices de  $G$  incidentes a  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ , e seja  $\Delta$  o subgrafo de  $G$  obtido pela eliminação de  $U$ . Se  $\Delta$  é um grafo nulo, então  $U = V(G)$ . De fato, suponha que existe  $v \in V(G) - U$ . Então, como  $G$  não possui vértices isolados e  $\Delta$  é nulo, segue que  $v$  é adjacente a um vértice  $w \in U$ , isto é, existe uma aresta  $e = vw$  que foi eliminada ao eliminarmos  $U$ . Por outro lado,  $w$  é incidente a  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ , deste modo, como  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$  é conexo, então  $w$  pertence a  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ . Logo,  $v$  é incidente a  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ ; donde temos que  $v \in U$  (absurdo!). Portanto,  $U = V(G)$ . Daí,  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle = E(G)$ . De fato, suponha que existe  $e = u_1u_2 \in E(G) - \langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ . Então, como  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$  é conexo e  $U = V(G)$ , existe um caminho unindo  $u_1$  e  $u_2$  apenas com arestas de  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ . Este caminho juntamente com  $e$  formam um ciclo  $C'$  que deve está em  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ , pois caso contrário  $|C' - \langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle| = 1$  (absurdo!). Portanto,  $e \in C' \subseteq \langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ ; o que é um absurdo. Logo,  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle = E(G)$

Agora, suponha que  $\Delta$  é não-nulo. Então nenhum vértice  $v$  de  $\Delta$  é adjacente em  $G$  a dois vértices  $u_1$  e  $u_2$  de  $U$ ; caso contrário, como  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$  é conexo, existe um caminho unindo  $u_1$  e  $u_2$  usando apenas arestas de  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$ . Note que este caminho juntamente com as arestas  $vu_1$  e  $vu_2$  formam um ciclo  $C'$  tal que  $|C' - \langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle| = 2$ ; o que é um absurdo! Por outro lado, sabemos que

todo vértice de um grafo 3-conexo simples possui pelo menos grau 3, deste modo, todo vértice de  $\Delta$  possui pelo menos grau 2, pois ao eliminarmos  $U$ , eliminamos, no máximo, uma aresta de cada vértice de  $\Delta$ . Portanto, pelo lema 3.11,  $\Delta$  possui um bloco  $\Delta'$  com pelo menos três vértices e com no máximo um vértice adjacente a algum vértice de  $\Delta$  que não está em  $\Delta'$ . Como  $G$  é 3-conexo e  $|V(\Delta')| \geq 3$ , existem pelo menos 3 vértices de  $\Delta'$  que são adjacentes, em  $G$ , a vértices que não estão em  $\Delta'$ ; caso contrário,  $G$  não é 3-conexo. Daí existem vértices distintos  $b_1$  e  $b_2$  de  $\Delta'$  os quais são adjacentes, em  $G$ , a vértices em  $U$ . Como  $\Delta'$  é um bloco com pelo menos 3 vértices, então  $\Delta'$  possui um ciclo  $C_{m+1}$  passando por  $b_1$  e  $b_2$ . Sejam  $e_1 = b_1v_1$  e  $e_2 = b_2v_2$  arestas de  $G$  unindo  $b_1$  e  $b_2$  a  $U$ . Como  $v_1$  e  $v_2$  estão em  $U$  e  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$  é conexo, existe um caminho  $P_1$  em  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$  unindo  $v_1$  e  $v_2$ . Agora, considere  $P_2$  um caminho em  $C_{m+1}$  unindo  $b_1$  e  $b_2$ . Então  $P_1, P_2, e_1$  e  $e_2$  formam um ciclo  $C''$  que deve está contido em  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{m+1} \rangle$ . Portanto,  $\{e_1, e_2\} \subseteq \langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{m+1} \rangle$ ; e deste modo temos que  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{m+1} \rangle$  é conexo; o que é uma contradição. Logo,  $\Delta$  é nulo e o resultado segue. ■

Tendo demonstrado todos os lemas necessários, podemos, agora, demonstrar o teorema 3.12.

*Demonstração do teorema 3.12:* Seja  $G$  um grafo que, entre todos os grafos  $\Delta$  sem ponte e que não possui um 6-fluxo não-nulo, tenha  $|V(\Delta)| + |E(\Delta)|$  mínimo. Então pelo lema 3.6,  $G$  é simples e 3-conexo; e deste modo, pelo lema 3.12,  $G$  possui um conjunto de circuitos disjuntos  $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  tais que  $\langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle = E(G)$ . Agora, pelo lema 3.9, existe um  $\mathbb{Z}_3$ -fluxo  $f_1$  sobre  $G$  com  $E(G) - (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m) \subseteq S(f_1)$ . Por outro lado, pelo lema 3.4, existe um  $\mathbb{Z}_2$ -fluxo não-nulo  $f_2$  sobre  $G$  com  $S(f_2) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$ . Deste modo, defina o  $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$ -fluxo  $f$  por  $f(e) = (f_1(e), f_2(e))$ ; mas, evidentemente,  $f(e) \neq 0, \forall e \in E(G)$ . Pela proposição 3.6,  $\chi_G^*(\lambda)$  depende apenas da ordem do grupo abeliano  $H$ ; deste modo,  $G$  possui um  $\mathbb{Z}_6$ -fluxo não-nulo. Logo, pela proposição 3.9,  $G$  possui um 6-fluxo não-nulo. ■

### 3.4 Coloração à duas variáveis

Na seção 3.1 quando falávamos a respeito de coloração de grafos, tínhamos em mente somente colorações próprias, isto é, dois vértices adjacentes deveriam ser coloridos com cores diferentes. No entanto, nesta seção procuraremos generalizar esta idéia, e com isto generalizar a relação instituída na proposição 3.2.

**Definição 3.21** *Numa coloração onde dois vértices adjacentes podem ser coloridos com a mesma cor, chamaremos de **monocromática** a aresta cujos pontos finais são coloridos com a mesma cor.*

Num grafo conexo  $G$ , o número de maneiras de colorir os vértices de  $G$  com  $\lambda$  cores, de modo que exatamente  $i$  arestas sejam monocromáticas, será denotado por  $c_i(\lambda, G)$  ou  $c_i(\lambda)$ . Note que  $c_i(\lambda)$  é um polinômio na variável  $\lambda$ . Além disso, se  $G$  tem  $n$  arestas, definimos

$$\bar{\chi}(G; \lambda, \nu) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^n c_i(\lambda) \nu^i \quad (3.21)$$

Veremos no próximo resultado que  $\bar{\chi}(G; \lambda, \nu)$  é determinado pelo polinômio de Tutte de  $M(G)$ .

**Proposição 3.22** *Se  $M(G)$  tem posto  $r$ , então*

$$\bar{\chi}(G; \lambda, \nu) = (\nu - 1)^r t \left( M(G); \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}, \nu \right)$$

**Prova.** Para provarmos esta relação entre o polinômio  $\bar{\chi}(G; \lambda, \nu)$  e o polinômio de Tutte, mostraremos que  $\bar{\chi}(G; \lambda, \nu)$  é um T-G invariante generalizado. De fato, seja  $e = vv'$  uma aresta de  $G$  que não é um laço nem uma ponte, e seja  $W$  o conjunto das  $\lambda$ -colorações de  $G$  que possuem  $i$  arestas monocromáticas, com  $i \geq 1$ . Considere ainda a partição de  $W$  nos conjuntos  $\mathcal{P}'$  e  $\mathcal{P}''$ , onde  $\mathcal{P}'$  é o conjunto das  $\lambda$ -colorações tais que  $v$  e  $v'$  são coloridos com mesma cor, e  $\mathcal{P}''$  é o conjunto das  $\lambda$ -colorações tais que  $v$  e  $v'$  são coloridos distintamente. Note que, como em  $\mathcal{P}'$   $v$  e  $v'$  têm a mesma coloração, uma coloração arbitrária em  $G/e$  pode ser associada biunivocamente a uma coloração arbitrária em  $G$ ; deste modo,  $\mathcal{P}'$  possui  $c_{i-1}(\lambda, G/e)$  membros. Note ainda que o número de membros de  $\mathcal{P}''$  é igual ao número de  $\lambda$ -colorações de  $G - e$  com  $i$  arestas monocromáticas, nas quais  $v$  e  $v'$  têm colorações diferentes. Mas este número é a diferença entre  $c_i(\lambda, G - e)$  e o número de  $\lambda$ -colorações de  $G - e$  com  $i$  arestas

monocromáticas nas quais  $v$  e  $v'$  têm a mesma cor; mas, evidentemente, este número é  $c_i(\lambda, G/e)$ . Portanto,

$$c_i(\lambda, G) = c_{i-1}(\lambda, G/e) + c_i(\lambda, G - e) - c_i(\lambda, G/e),$$

donde temos

$$c_i(\lambda, G)\nu^i = c_{i-1}(\lambda, G/e)\nu^{i-1}\nu + c_i(\lambda, G - e)\nu^i - c_i(\lambda, G/e)\nu^i \quad (3.22)$$

Multiplicando (3.22) por  $\frac{1}{\lambda}$  e passando o somatório, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(G; \lambda, \nu) &= \nu\bar{\chi}(G/e; \lambda, \nu) + \bar{\chi}(G - e; \lambda, \nu) - \bar{\chi}(G/e; \lambda, \nu) \\ &= \bar{\chi}(G - e; \lambda, \nu) + (\nu - 1)\bar{\chi}(G/e; \lambda, \nu) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Agora, suponha que  $e$  é um laço e que  $G$  possui apenas a aresta  $e$ . Então  $v = v'$ ,  $i = 1$ , e  $c_1(\lambda) = \lambda$ ; deste modo,  $\bar{\chi}(G; \lambda, \nu) = \nu$ . Mas, se  $G$  não possui apenas  $e$ , então, de cada  $\lambda$ -coloração com  $i - 1$  arestas monocromáticas de  $G - e$ , podemos obter uma coloração em  $G$ ; isto é,

$$c_i(\lambda, G) = c_{i-1}(\lambda - e, G)\nu;$$

donde temos

$$c_i(\lambda, G)\nu^i = c_{i-1}(\lambda, G - e)\nu^i\nu$$

Daí

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(G; \lambda, \nu) &= \nu\bar{\chi}(G - e; \lambda, \nu); \text{ ou melhor,} \\ \bar{\chi}(G; \lambda, \nu) &= \bar{\chi}(G(e); \lambda, \nu)\bar{\chi}(G - e; \lambda, \nu) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Finalmente, suponha que  $e$  é uma ponte. Então, se  $G$  possui apenas a aresta  $e$ , note que  $G$  pode ter no máximo uma aresta cromática, a qual é  $e$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(G; \lambda, \nu) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^1 c_i(\lambda, G)\nu^i = \frac{1}{\lambda}c_0(\lambda, G) + \frac{1}{\lambda}c_1(\lambda, G)\nu \\ &= \frac{1}{\lambda}A_{\lambda,2} + \frac{1}{\lambda}\lambda\nu \\ &= \frac{1}{\lambda}\lambda(\lambda - 1) + \nu \\ &= \lambda + \nu - 1 \end{aligned} ,$$

onde  $A_{\lambda,2}$  é o arranjo de  $\lambda$  elementos tomados dois a dois. Se  $G$  não possui apenas a aresta  $e$ , então particione as  $\lambda$ -colorações arbitrárias de  $G$  em dois subconjuntos, no



primeiro em todas as  $\lambda$ -colorações  $v$  e  $v'$  têm a mesma cor, enquanto que no segundo  $v$  e  $v'$  têm cores diferentes. Evidentemente, no primeiro conjunto existem  $\lambda c_{i-1}(\lambda, G - e)$ , e no segundo conjunto existem  $A_{\lambda,2}c_i(\lambda, G - e) = \lambda(\lambda - 1)c_i(\lambda, G - e)$ . Portanto,

$$\frac{1}{\lambda}c_i(\lambda, G)\nu^i = \nu c_{i-1}(\lambda, G - e)\nu^{i-1} + (\lambda - 1)c_i(\lambda, G - e)\nu^i;$$

donde temos

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(G; \lambda, \nu) &= (\nu + \lambda - 1)\bar{\chi}(G - e; \lambda, \nu); \text{ ou melhor} \\ \bar{\chi}(G; \lambda, \nu) &= \bar{\chi}(G(e); \lambda, \nu)\bar{\chi}(G - e; \lambda, \nu)\end{aligned}\tag{3.25}$$

Logo, as equações (3.23), (3.24), e (3.25) mostram que  $\bar{\chi}(G; \lambda, \nu)$  é um T-G invariante generalizado com  $\sigma = 1$  e  $\tau = (\nu - 1)$ . Deste modo, pela corolário 2.6, temos

$$\bar{\chi}(G; \lambda, \nu) = (\nu - 1)^{r(E)} t\left(M(G); \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}, \nu\right)$$

■

Mostraremos que 3.22 é invertível, isto é, podemos calcular  $t(M(G))$  a partir da distribuição de arestas monocromáticas entre todas as  $\lambda$ -colorações de  $G$ . Para isto, definiremos o polinômio colimitado.

**Definição 3.23** *Sejam  $M$  uma matróide e  $L(M)$  seu retulado de conjuntos fechados. Então definimos por **polinômio colimitado**, o seguinte*

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(M; \lambda, \nu) &= \sum_{X \in L(M)} \nu^{|X|} p(M/X; \lambda) \\ &= \sum_{\substack{X, Y \in L(M) \\ X \subseteq Y}} \nu^{|X|} \lambda^{r(M) - r(Y)} \mu(X; Y)\end{aligned}$$

**Lema 3.13**  $\bar{\chi}(M; \lambda, \nu) = (\nu - 1)^{r(E)} t\left(M; \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}, \nu\right)$

**Prova.**

$$\begin{aligned}(\nu - 1)^{r(E)} t\left(M; \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}, \nu\right) &= (\nu - 1)^{r(E)} \sum_{X \subseteq E} \left(\frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1} - 1\right)^{r(E) - r(X)} (\nu - 1)^{n(X)} \\ &= (\nu - 1)^{r(E)} \sum_{X \subseteq E} \left(\frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1} - \frac{\nu - 1}{\nu - 1}\right)^{r(E) - r(X)} (\nu - 1)^{n(X)} \\ &= (\nu - 1)^{r(E)} \sum_{X \subseteq E} \left(\frac{\lambda}{\nu - 1}\right)^{r(E) - r(X)} (\nu - 1)^{n(X)} \\ &= (\nu - 1)^{r(E)} \sum_{X \subseteq E} (\nu - 1)^{r(X) - r(E)} \lambda^{r(E) - r(X)} (\nu - 1)^{|X| - r(X)} \\ &= \sum_{X \subseteq E} (\nu - 1)^{r(E)} (\nu - 1)^{r(X) - r(E)} \lambda^{r(E) - r(X)} (\nu - 1)^{|X| - r(X)} \\ &= \sum_{X \subseteq E} (\nu - 1)^{|X|} \lambda^{r(E) - r(X)}\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(\nu - 1)^{|X|} &= \binom{|X|}{0} \nu^{|X|} + \binom{|X|}{1} \nu^{|X|-1} (-1)^1 + \binom{|X|}{2} \nu^{|X|-2} (-1)^2 + \dots + \\
&\quad \binom{|X|}{i} \nu^{|X|-i} (-1)^i + \dots + \binom{|X|}{|X|} (-1)^{|X|}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Deste modo, se, para cada parcela  $i$  do 2º membro da equação (3.26) tomarmos  $W \in E(M)$  tal que  $|W - X| = i$ , obtemos

$$(\nu - 1)^{|X|} = \sum_{X \subseteq W \subseteq Y} \binom{|X|}{|W - X|} \nu^{|X|-|W-X|} (-1)^{|W-X|},$$

onde  $Y = cl(W)$ . Daí

$$(\nu - 1)^{r(E)} t(M; \frac{\nu+\lambda-1}{\nu-1}, \nu) = \sum_{X \subseteq W \subseteq Y} \lambda^{r(E)-r(X)} \binom{|X|}{|W - X|} \nu^{|X|-|W-X|} (-1)^{|W-X|}$$

Portanto, pela proposição 2.13, temos

$$(\nu - 1)^{r(E)} t(M; \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}, \nu) = \sum_{X \subseteq W \subseteq Y} \lambda^{r(E)-r(X)} \binom{|X|}{|W - X|} \nu^{|X|-|W-X|} \mu(W, Y)$$

Como  $Y = cl(W)$ , então, para todo  $y \in Y - W$ ,  $r(W \cup y) = r(W)$ . Deste modo, pelo lema 1.3.3 de [12], temos  $r(Y) = r(W \cup Y) = r(W)$ .

Finalmente, fazendo  $W = X$  e obtendo a soma para todo  $X \in L(M)$ , temos

$$\begin{aligned}
(\nu - 1)^{r(E)} t(M; \frac{\nu+\lambda-1}{\nu-1}, \nu) &= \sum_{\substack{X, Y \in L(M) \\ X \subseteq Y}} \nu^{|X|-|W-X|} \lambda^{r(E)-r(Y)} \mu(X, Y) \\
&= \bar{\chi}(M; \lambda, \nu)
\end{aligned}$$

■

Observe que outra demonstração da proposição 3.22 pode ser obtida utilizando este último resultado, para isto basta-nos mostrar que  $\bar{\chi}(G; \lambda, \nu) = \bar{\chi}(M(G); \lambda, \nu)$ .

O próximo resultado mostra-nos que (3.22) é invertível, como dissemos que mostraríamos.

**Proposição 3.24**  $t(M; x, y) = \frac{1}{(y-1)^r} \bar{\chi}(M; (x-1)(y-1), y)$

**Prova.** Pelo lema 3.13, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(y-1)^r} \bar{\chi}(M; (x-1)(y-1), y) &= \frac{1}{(y-1)^r} (y-1)^r t(M; \frac{y+(x-1)(y-1)-1}{y-1}, y) \\
&= t(M; \frac{(x-1)(y-1)+y-1}{y-1}, y) \\
&= t(M; \frac{[(x-1)+1](y-1)}{y-1}, y) \\
&= t(M; x, y)
\end{aligned}$$

■

**Definição 3.25** Dada uma matr oide  $M$ , definimos o **dual do polinômio colimitado**,  $\bar{\chi}^*(M; \lambda, \nu)$ , por

$$\bar{\chi}^*(M; \lambda, \nu) = \bar{\chi}(M^*; \nu, \lambda). \quad (3.27)$$

Além disso, para um grafo  $G$ , consideremos

$$\bar{\chi}^*(G; \lambda, \nu) = \bar{\chi}^*(M(G); \lambda, \nu) \quad (3.28)$$

**Proposi o 3.26** Se  $M(G)$  tem  $n$  elementos e posto  $r$ . Então

$$\bar{\chi}^*(G; \nu, \lambda) = \frac{(\nu - 1)^n}{\lambda^r} \bar{\chi} \left( G; \lambda, \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1} \right)$$

**Prova.**

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^*(G; \nu, \lambda) &\stackrel{(3.28)}{=} \bar{\chi}^*(M(G); \nu, \lambda) \\ &\stackrel{(3.27)}{=} \bar{\chi}(M^*(G); \lambda, \nu) \\ &\stackrel{3.13}{=} (\nu - 1)^{n-r} t(M^*(G); \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}, \nu) \\ &\stackrel{2.27}{=} (\nu - 1)^{n-r} t(M(G); \nu, \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}) \\ &\stackrel{3.24}{=} (\nu - 1)^{n-r} \frac{1}{(\frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1} - 1)^r} \bar{\chi}(M(G); (\nu - 1)(\frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1} - 1), \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}) \\ &= (\nu - 1)^{n-r} \frac{(\nu - 1)^r}{\lambda} \bar{\chi}(M(G); (\nu - 1)(\frac{\lambda}{\nu - 1}), \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}) \\ &= \frac{(\nu - 1)}{\lambda^r} \bar{\chi}(M(G); \lambda, \frac{\nu + \lambda - 1}{\nu - 1}). \end{aligned}$$

Finalmente, falta-nos mostrar que  $\bar{\chi}(G; \lambda, \nu) = \bar{\chi}(M(G); \lambda, \nu)$ . De fato, pela defini o 3.23, temos

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(M(G); \lambda, \nu) &= \sum_{X \in L(M)} \nu^{|X|} p(M(G)/X; \lambda) \\ &= \sum_{X \in L(M)} \nu^{|X|} p(M(G/X); \lambda) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Seja  $X$  o conjunto das arestas monocromáticas. Então devemos mostrar que  $X$    fechado. De fato, se  $X$  não for fechado, então existe uma aresta  $e \in E(M) - X$  tal que  $r(X \cup \{e\}) = r(X)$ ; isto  ,  $X \cup \{e\}$  possui um circuito  $C_e$  contendo  $e$ . Deste modo,  $e$  deve ser monocromática, e portanto  $e \in X$  (absurdo!). Note ainda que a colora o induzida sobre  $G/X$    própria, pois estamos retirando, através de uma contra o, todas as arestas monocromáticas. Logo, pela proposi o 3.2, temos  $p(M(G/X); \lambda) = \frac{1}{\lambda^{k(G)}} \chi_G(\lambda)$ . Tomando  $|X| = i$ , temos por (3.29), que

$$\bar{\chi}(M(G); \lambda, \nu) = \sum_{i=0}^n \nu^i \frac{1}{\lambda^{k(G)}} \chi_G(\lambda)$$

Finalmente, pela proposição 1.2.8 de [12], podemos supor  $G$  conexo; e deste modo,

$$\bar{\chi}(M(G); \lambda, \nu) = \sum_{i=0}^n \nu^i \frac{1}{\lambda^{k(G)}} \chi_G(\lambda) = \bar{\chi}(G; \lambda, \nu)$$

■

Vale salientar que é possível mostrar que o coeficiente de  $\nu^j$  em  $\bar{\chi}^*(G; \lambda, \nu)$  é o número de  $\lambda$ -fluxos que são nulos sobre, precisamente,  $j$  arestas de  $G$ . Portanto, o último resultado mostra-nos a ligação existente entre coloração a duas variáveis e fluxos a duas variáveis em grafos.

# Capítulo 4

## Outras Aplicações

Apesar de todo o capítulo 3 ter sido dedicado a aplicações de T-G invariantes em colorações e fluxos em grafos, existem outras técnicas de aplicação de T-G invariantes relacionadas a outras áreas da teoria dos grafos. Particularmente, neste capítulo estaremos nos detendo a orientações em grafos e percolação.

### 4.1 Orientações em Grafos

**Definição 4.1** *Uma **orientação acíclica** de um grafo  $G$  é uma orientação de  $G$  na qual não existem ciclos orientados.*

Denotaremos o número das orientações acíclicas de  $G$  por  $a(G)$ .

**Proposição 4.2** *(Stanley, 1937b)  $a(G) = (-1)^{|V(G)|} \chi_G(-1) = t(M(G); 2, 0)$ .*

**Prova.** Seja  $e = uv$  uma aresta de  $G$  a qual não é um laço nem uma ponte. Considere ainda o conjunto  $\mathcal{A}$  de orientações acíclicas de  $G - e$ , e sua partição em  $\mathcal{A}'$  e  $\mathcal{A}''$ , onde  $\mathcal{A}'$  consiste dos membros  $\theta$  de  $\mathcal{A}$  para os quais  $(G - e)_\theta$  contém um caminho orientado de  $u$  a  $v$  ou de  $v$  a  $u$ . Note que se  $\theta \in \mathcal{A}'$ , então  $(G - e)_\theta$  não pode conter, simultaneamente, um caminho orientado de  $u$  a  $v$  e de  $v$  a  $u$ . De fato, suponha o contrário, ou seja, considere  $P_1$  e  $P_2$  caminhos orientados de  $u$  a  $v$  e de  $v$  a  $u$ , respectivamente. Se  $P_1$  e  $P_2$  são disjuntos, então estes formam um ciclo orientado (contradição!). Por outro lado, se existe um vértice  $w \in P_1 \cap P_2$ , então podemos obter, através de  $P_1$  e  $P_2$ , um ciclo orientado (contradição!). Portanto, para cada orientação  $\theta$  em  $\mathcal{A}'$ , existe uma

única orientação de  $e$  a qual pode estender  $\theta$  a uma orientação acíclica de  $G$ . Mas, se  $\theta \in \mathcal{A}''$ , então  $e$  pode assumir duas orientações, e cada uma destas orientações de  $e$  pode estender  $\theta$  a uma orientação acíclica de  $G$ . Como toda orientação acíclica de  $G$  pode ser obtida de um membro de  $\mathcal{A}$  associando uma orientação a  $e$ , temos

$$a(G) = |\mathcal{A}'| + 2|\mathcal{A}''|$$

Por outro lado,

$$a(G - e) = |\mathcal{A}'| + |\mathcal{A}''|$$

Note ainda que em  $G/e$  não deve existir um caminho orientado de  $u$  a  $v$  nem de  $v$  a  $u$ , pois caso contrário obteríamos um ciclo orientado. Deste modo, cada orientação  $\theta$  de  $G/e$  pode ser associada a um membro de  $\mathcal{A}''$ . Portanto,

$$a(G/e) = |\mathcal{A}''|$$

Logo, se  $e$  não é um laço nem uma ponte, segue que

$$a(G) = a(G - e) + a(G/e).$$

Agora, suponha que  $e$  é um laço. Então  $a(G) = 0$ , pois  $e$  é um ciclo, e deste modo, em qualquer orientação obteríamos um ciclo orientado. Finalmente, se  $e$  é uma ponte, então, dada uma orientação  $\theta$  de  $G - e$ , cada uma das duas orientações de  $e$  pode estender  $\theta$  a uma orientação em  $G$ , ou seja,  $a(G) = 2a(G - e)$ ; todavia, se  $G$  consiste de uma única aresta, segue que  $a(G) = 2$ .

Usando o teorema 2.4, temos

$$a(G) = t(M(G); a(I), a(L)) = t(M(G); 2, 0) \quad (4.1)$$

Temos, pela proposição 2.6, que

$$t(M(G); 1 - \lambda, 0) = \frac{\chi_G(\lambda)}{\lambda^{k(G)}(-1)^{|V(G)| - k(G)}}$$

Fazendo  $\lambda = -1$ , temos

$$t(M(G); 2, 0) = \frac{\chi_G(-1)}{(-1)^{k(G)}(-1)^{|V(G)| - k(G)}} = (-1)^{|V(G)|} \chi_G(-1)$$

Portanto,

$$t(M(G); 2, 0) = (-1)^{|V(G)|} \chi_G(-1) \quad (4.2)$$

Logo, por (4.1) e (4.2), o resultado segue. ■

**Definição 4.3** *Um vértice  $v$  em um grafo orientado é uma **fonte** se nenhuma aresta é direcionada para  $v$ , e é um **vertedouro** se nenhuma aresta é direcionada para fora de  $v$ .*

Denotaremos por  $N_v(G)$  o número de orientações acíclicas de  $G$  nas quais  $v$  é a única fonte.

**Proposição 4.4** *(Greene & Zaslavsky, 1983) Seja  $G$  um grafo e  $v$  uma aresta fonte. Então:*

(i)  $N_v(G) = (-1)^{r(M(G))} \mu(M(G))$ , se  $G$  é conexo;

(ii)  $N_v(G) = 0$ , caso contrário.

**Prova.** Suponha que  $G$  é um grafo conexo, e considere  $e$  uma aresta de  $G$  que possui  $v$  como um de seus pontos finais, e seja  $v'$  o outro ponto final de  $e$ . Se  $G$  possui uma única aresta que é  $e$ , então

$$N_v(G) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } e \text{ é um laço;} \\ 1 & , \text{ se } e \text{ é uma ponte.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Agora suponha que  $G$  possui pelo menos duas arestas. Evidentemente, se  $e$  é um laço, então  $N_v(G) = 0$ . Por outro lado, se  $e$  é uma ponte, então uma orientação  $\theta$  em  $G/e$  em que  $v$  é a única fonte pode ser estendida a  $G$  associando uma orientação a  $e$ ; no entanto, apenas uma das duas orientações de  $e$  tem  $v$  como fonte. Deste modo,  $N_v(G) = N_v(G/e)$ . Logo,

$$N_v(G) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } e \text{ é um laço;} \\ N_v(G/e) & , \text{ se } e \text{ é uma ponte.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Agora, assumamos que  $e$  não é um laço nem uma ponte. Então, considere a partição do conjunto  $\mathcal{P}$  das orientações acíclicas de  $G$  nas quais  $v$  é a única fonte, nos subconjuntos  $\mathcal{P}'$  e  $\mathcal{P}''$ , onde  $\theta \in \mathcal{P}'$  tem a condição de que a única aresta de  $G_\theta$  orientada em direção a  $v'$  é  $e$ . Note que em  $G/e$ , como  $v = v'$ , se  $v$  é a única fonte, então não existe aresta direcionada a  $v'$ . Deste modo, podemos estender uma orientação  $\theta$  de  $G/e$ , na qual  $v$  é a única fonte, a uma orientação  $\theta'$  em  $G$  tal que  $v$  é a única fonte, associando uma única orientação a  $e$ . Portanto,

$$|\mathcal{P}'| = N_v(G/e) \quad (4.5)$$

Por outro lado, as orientações pertencentes a  $\mathcal{P}''$  possuem outras arestas além de  $e$  que são dirigidas a  $v'$ . No entanto, note que uma orientação  $\theta$  de  $G - e$  em que  $v$  é a única fonte, pode ser estendida a  $G$  associando uma única direção a  $e$ . Deste modo,

$$|\mathcal{P}''| = N_v(G - e) \quad (4.6)$$

Logo, por (4.5) e (4.6), temos

$$N_v(G) = N_v(G - e) + N_v(G/e) \quad (4.7)$$

Embora tenhamos estabelecido (4.7) para uma aresta em particular, podemos determinar  $N_v(G)$  para qualquer grafo  $G$  aplicando (4.3), (4.4), e (4.7). Mostraremos, através de uma indução sobre  $|E(G)|$ , que  $N_v(G) = t(M(G); 1, 0)$ . De fato, suponha que  $|E(G)| = 1$ . Então  $G$  possui apenas uma aresta  $e$  que é um laço ou uma ponte. Se  $e$  é um laço, então  $M(G) = L$  e, por (4.3),  $N_v(G) = 0$ ; e se  $e$  é uma ponte, então  $M(G) = I$  e, ainda por (4.3),  $N_v(G) = 1$ . Portanto,  $N_v(G) = t(M(G); 1, 0)$ . Agora, suponha que se  $|E(G)| = k$ , então  $N_v(G) = t(M(G); 1, 0)$ . Então, se  $|E(G)| = k + 1$  e  $e$  não é um laço nem uma ponte, temos

$$\begin{aligned} N_v(G) &= N_v(G - e) + N_v(G/e) \\ &= t(M(G - e); 1, 0) + t(M(G/e); 1, 0) \\ &= t(M(G); 1, 0) \end{aligned}$$

Agora, por (2.26) do capítulo 1,  $N_v(G) = (-1)^{r(M(G))} \mu(M(G))$ .

Finalmente suponha que  $G$  é desconexo, e seja  $\theta$  uma orientação acíclica de  $G$  tal que exista uma única fonte  $v_1$  em uma componente  $K_1$  de  $G$  e um vertedouro  $v_2$  em outra componente  $K_2$ . Considere os subconjuntos  $V(K_1)$  e  $V_2 = V(G) - V(K_1)$  de  $V(G)$ . Então note que não existe fluxo de  $V(K_1)$  a  $V_2$ ; deste modo existe uma outra fonte  $v_3$  tal que existe um fluxo de  $v_3$  a  $v_2$  (contradição!). Logo,  $v_1$  não é única, portanto,  $N_v(G) = 0$ . ■

Note que podemos afirmar, pelo último resultado, que  $N_v(G)$  não depende da escolha de  $v$ .

**Definição 4.5** *Sejam  $G$  um grafo,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  seu conjunto de vértices, e  $\theta$  uma orientação deste. Então o **vetor de pontos** de  $G$  é a  $n$ -upla  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , onde  $s_i$  é o número de arestas de  $G_\theta$  que são direcionadas para fora de  $v_i$ . Chamaremos  $s_i$  de número de pontos de  $v_i$ ; além disso, o número dos vetores  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , distintos, será denotado por  $s(G)$ .*



**Lema 4.1** *Seja  $e$  uma aresta de  $G$  unindo  $v_1$  e  $v_2$ . Suponha que  $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$  e  $(s'_1, s'_2, s_3, s_4, \dots, s_n)$  são vetores de pontos de  $G$  com  $s_2 < s'_2$ . Então  $(s_1 - 1, s_2 + 1, s_3, s_4, \dots, s_n)$  é um vetor de pontos para  $G$ .*

**Prova.** Sejam  $\theta$  e  $\theta'$  orientações de  $G$  tendo  $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$  e  $(s'_1, s'_2, s_3, \dots, s_n)$ , respectivamente, como seus vetores de pontos. Note que se, em  $G_\theta$ , a aresta  $e$  é orientada de  $v_1$  a  $v_2$ , então, invertendo a orientação de  $e$ , obtemos uma nova orientação de  $G$  que possui  $(s_1 - 1, s_2 + 1, s_3, s_4, \dots, s_n)$  como seu vetor de pontos. Agora, suponha que  $e$  é orientada de  $v_2$  a  $v_1$  em  $G_\theta$ , e considere  $V_1$  como sendo o conjunto de vértices  $v$  tais que existe um caminho orientado, em  $G_\theta$ , de  $v_1$  a  $v$ . Deste modo, analisaremos dois casos:

- (1)  $v_2 \in V_1$ ; e
- (2)  $v_2 \notin V_1$ .

No caso (1), tomando o caminho orientado de  $v_1$  a  $v_2$  e adicionando a aresta  $e$ , obtemos um ciclo orientado contendo a aresta  $e$ . Deste modo, se invertermos a orientação de todas as arestas deste ciclo, exceto  $e$ , então  $v_1$  terá um ponto a menos,  $v_2$  terá um ponto a mais, e os pontos dos demais vértices deste ciclo não serão alterados; portanto, teremos  $(s_1 - 1, s_2 + 1, s_3, s_4, \dots, s_n)$  como um vetor de pontos de  $G_\theta$ .

No caso (2),  $v_2 \in V(G) - V_1$ . Note que toda aresta em  $G_\theta$ , unindo um vértice em  $V_1$  a um vértice em  $V(G) - V_1$ , deve ser orientada do vértice em  $V(G) - V_1$  ao vértice em  $V_1$ ; caso contrário, existe uma aresta  $\vec{e}^* = vw$ , com  $v \in V_1$  e  $w \in V(G) - V_1$ , deste modo, existe um caminho de  $v_1$  a  $v$  que, se adicionarmos  $\vec{e}^*$ , obtemos um caminho de  $v_1$  a  $w$  (contradição!). Portanto, para qualquer orientação de  $G$  e, em particular, para  $G_\theta$ , os pontos dos vértices em  $V(G) - V_1$  não podem exceder os pontos destes vértices em  $G_\theta$ . Mas, por hipótese,  $s'_2 > s_2$  (contradição!). Logo, o lema segue. ■

**Proposição 4.6** *(Stanley, 1980)  $s(G) = t(M(G); 2, 1) = i(M(G))$*

**Prova.** Temos, pela proposição 2.10, que  $t(M(G); 2, 1) = i(M(G))$ . Deste modo, mostraremos apenas que  $t(M(G); 2, 1) = s(G)$ .

De fato, seja  $e = v_1v_2$  uma aresta de  $G$  que não é um laço nem uma ponte. Suponha que  $(s'_1, s'_2, s_3, s_4, \dots, s_n)$  é um vetor de ponto para  $G - e$  e que  $\mathcal{P}$  é o conjunto dos vetores de pontos de  $G - e$  tendo  $(s_3, s_4, \dots, s_n)$  como as últimas  $n - 2$  entradas. Então, pelo lema 4.1, dados  $s_1$  e  $s_2$  de modo que  $s_2 < s'_2$ , existe  $k$  tal que

$$\mathcal{P} = \{(s_1 - j, s_2 + j, s_3, s_4, \dots, s_n) : 0 \leq j \leq k\}$$

Note que, dada uma orientação de  $G - e$ , podemos orientar a aresta  $e$  de duas maneiras para obtermos uma orientação para  $G$ . Deste modo, se  $\mathcal{P}'$  é o conjunto dos vetores de pontos de  $G$  tendo  $(s_3, s_4, \dots, s_n)$  como as últimas  $n - 2$  entradas, temos

$$\mathcal{P}'\{(s_1 + 1 - j, s_2 + j, s_3, \dots, s_n) : 0 \leq j \leq k + 1\}; \text{ ou}$$

$$\mathcal{P}'\{(s_1 - j, s_2 + 1 + j, s_3, \dots, s_n) : 0 \leq j \leq k + 1\}.$$

Portanto,  $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| + 1$ . Note ainda, que  $G/e$  possui apenas um vetor de pontos tendo  $(s_3, s_4, \dots, s_n)$  como as últimas  $n - 2$  entradas, o qual é  $(s_1 + s_2, s_3, s_4, \dots, s_n)$ . Portanto, temos

$$s(G) = s(G - e) + s(G/e)$$

Finalmente, se  $G$  possui apenas a aresta  $e$  e esta é um istmo, temos  $s(G) = 2$ ; se  $G$  não possui apenas  $e$ , temos

$$s(G) = 2s(G - e) = s(G(e))s(G - e).$$

Agora, se  $e$  é um laço e  $G$  possui apenas a aresta  $e$ , então  $s(G) = 1$ ; e se  $G$  não possui apenas a aresta  $e$ , temos

$$s(G) = s(G - e) = s(G(e))s(G - e)$$

Portanto, pelo teorema 2.4, temos

$$s(G) = t(M(G); s(I), s(L)) = t(M(G); 2, 1)$$

Logo, o resultado segue. ■

## 4.2 "Reliability" e Percolação

Nesta seção mostraremos como o polinômio de Tutte pode ser útil no estudo de grafos aleatórios; isto é, os problemas que serão atacados nesta seção são relacionados à maneiras eficientes de calcular a probabilidade  $Pr(\mathfrak{F})$  de um conjunto composto pelos elementos que não foram eliminados, após eliminarmos aleatoriamente os elementos de uma matróide  $M$ , estarem em alguma família  $\mathfrak{F}$ .

Seja  $M(E)$  uma matróide. Então consideraremos que todo elemento  $e_i$  de  $M(E)$ , independente de todos os outros elementos, possui uma probabilidade  $1 - p_i$  de ser

eliminado de  $M$  onde, exceto quando outra condição for estabelecida,  $0 < p_i < 1$ . Consideraremos ainda que se  $q_i = 1 - p_i$ , então a probabilidade  $Pr(A)$  de um subconjunto  $A$  de  $E$  ser composto pelos elementos que não foram eliminados é dada por

$$Pr(A) = \prod_{e_i \in A} p_i \prod_{e_i \notin A} q_i \quad (4.8)$$

Geralmente a família  $\mathfrak{F}$ , mencionada na introdução desta seção, possui a seguinte propriedade: se  $A \in \mathfrak{F}$  e  $B \supseteq A$ , então  $B \in \mathfrak{F}$ . Além disso, note que

$$Pr(\mathfrak{F}) = \sum_{A \in \mathfrak{F}} Pr(A)$$

**Exemplo 4.7** *Suponha que  $\mathfrak{F}$  é a família  $\mathcal{S}$  dos conjuntos geradores de uma matróide  $M$ , e que todas as probabilidades de retenção  $p_i$  sejam iguais a alguma constante  $p$ . Note que  $\mathfrak{F}$  preserva a propriedade citada acima, e que a probabilidade  $Pr(\mathfrak{F})$  do conjunto  $A$  está em  $\mathfrak{F}$  é a probabilidade  $Pr(M)$  que uma submatróide aleatória de  $M(E)$  seja um conjunto gerador; ou melhor, tenha o mesmo posto de  $M$ . Deste modo, temos que*

$$Pr(M) = q^{|E|-r(M)} p^{r(M)} t(M; 1, 1/q). \quad (4.9)$$

De fato, observe que se  $M = I$ , então  $M$  possui apenas um elemento e que é um colaço. Deste modo, para que  $A$  tenha o mesmo posto de  $M$ , e não pode ser eliminado. Portanto,

$$Pr(I) = p$$

Agora, se  $M = L$ ,  $M$  possui apenas um elemento  $f$  que é um laço; mas um laço não contribui para o posto. Portanto,

$$Pr(L) = 1$$

Por (4.8), temos

$$Pr(M) = \sum_{A \in \mathfrak{F}} p^{|A|} q^{|E-A|}$$

Seja  $e$  um elemento de  $M$  que não é um laço nem um colaço. Então

$$\begin{aligned} Pr(M) &= \sum_{\substack{A \in \mathfrak{F} \\ e \notin A}} p^{|A|} q^{|E-A|} + \sum_{\substack{A \in \mathfrak{F} \\ e \in A}} p^{|A|} q^{|E-A|} \\ &= \sum_{\substack{A \in \mathfrak{F} \\ e \notin A}} p^{|A|} q^{|(E-e) \cup e - A|} + \sum_{\substack{A' \subseteq E-e \\ A' \cup e \in \mathfrak{F}}} p^{|A' \cup e|} q^{|(E-e) - A'|} \\ &= q \sum_{\substack{A \in \mathfrak{F} \\ e \notin A}} p^{|A|} q^{|(E-e) - A|} + p \sum_{\substack{A' \subseteq E-e \\ A' \cup e \in \mathfrak{F}}} p^{|A'|} q^{|(E-e) - A'|}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $A' = A - e$

Agora, note que a primeira soma em (4.10) é sobre os subconjuntos de  $\mathfrak{F}(M - e)$ . Por

outro lado, percebe-se que  $A/e$  é não gerador de  $M$  se, e somente se,  $A' \cup e$  é gerador; portanto, a segunda soma é sobre os subconjuntos de  $\mathfrak{F}(M/e)$ . Daí, temos

$$\begin{aligned} Pr(M) &= qPr(M \setminus e) + pPr(M/e) \\ &= (1-p)Pr(M \setminus e) + pPr(M/e) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agora, suponha que  $e$  é um laço. Então, como um laço não contribui para o posto, temos

$$Pr(M) = Pr(M \setminus e) = Pr(M(e))Pr(M \setminus e) \quad (4.12)$$

Por outro lado, se  $e$  é um colaço, então, para que uma submatróide de  $M$  tenha o mesmo posto desta, e não pode ser eliminada. Portanto,

$$Pr(M) = pPr(M \setminus e) = Pr(M(e))Pr(M \setminus e) \quad (4.13)$$

Finalmente, pelas equações (4.11), (4.12), e (4.13), temos que  $Pr(M)$  é um  $T$ - $G$  invariante generalizado; deste modo, pelo corolário 2.3, o resultado segue.

Nosso objetivo, a partir deste momento, será mostrar um modo de modificar a matróide  $M$  de modo que esta última fórmula possa ser adaptada ao caso em que as probabilidades de retenção  $p_i$  são diferentes; para isto serão necessárias as seguintes considerações:

Dados dois vértices distintos  $s$  e  $t$  em um grafo  $G$ , estaremos interessados em determinar a probabilidade de um subgrafo aleatório de  $G$  conter um caminho entre  $s$  e  $t$ . Para isto, formaremos um novo grafo  $\overline{G}$  a partir de  $G$  adicionando um ponto-base, o qual é uma aresta  $d$  entre  $s$  e  $t$ . Seja  $\mathfrak{D}$  a família de subconjuntos  $A$  de  $E(G)$  para o qual  $A \cup d$  contém um ciclo de  $\overline{G}$  contendo  $d$ . Note que isto é equivalente a  $A \in \mathfrak{D}$  se, e somente se,  $d$  não é uma ponte no subgrafo de  $\overline{G}$  induzido por  $A \cup d$ . Com efeito, se  $A \in \mathfrak{D}$ , então  $A \cup d$  contém um ciclo de  $\overline{G}$  contendo  $d$ ; deste modo, como  $d$  está em um ciclo,  $d$  não pode ser uma ponte de  $A \cup d$ . Reciprocamente, se  $d$  não é uma ponte de  $A \cup d$ , então  $A \cup d$  possui um ciclo que contém  $d$ .

No próximo resultado determinaremos uma fórmula para  $Pr(\mathfrak{D})$  com relação a uma matróide pontuada  $M_d(E \dot{\cup} d)$ , onde  $A \in \mathfrak{D}$  se, e somente se,  $d$  não é um colaço de  $M_d(A \cup d)$ ; no caso em que, para todos os elementos  $e_i$  de  $E$ , a probabilidade de retenção  $p_i$  é igual a uma constante  $p$ . Finalmente, a partir de agora denotaremos o número de elementos da matróide  $M$  por  $|M|$ .

**Proposição 4.8** *Seja  $M$  a matróide  $M_d(E \dot{\cup} d)$  e assumamos que todo elemento de  $E$  tem, independentemente dos demais elementos, probabilidade  $1 - p$  de ser eliminado de  $M$ ,*

enquanto que o elemento  $d$  tem probabilidade 0 de ser eliminado. Então a probabilidade que, em uma submatróide aleatória  $\omega(M)$  de  $M$ , o elemento  $d$  não seja um colação é dada pelas fórmulas:

$$(i) Pr(\mathfrak{D}) = p^{r(M)} q^{|M|-r(M)-1} g(1/p, 1/q), \text{ e}$$

$$(ii) Pr(\mathfrak{D}) = 1 - p^{r(M)-1} q^{|M|-r(M)} f(1/p, 1/q);$$

onde  $x'f(x, y) + y'g(x, y) = t_p(M_d(E \dot{\cup} d); x', x, y', y)$ .

**Prova.** Mostraremos, primeiramente, que  $Pr(\mathfrak{D})$  satisfaz o seguinte recurso:

$$Pr(\mathfrak{D}(M)) = qPr(\mathfrak{D}(M \setminus e)) + pPr(\mathfrak{D}(M/e)), \quad (4.14)$$

onde  $e$  é um ponto de  $M \setminus d$  que não é um laço nem um colação. Como todas as probabilidades dos elementos de  $A$  serem eliminados são iguais a uma constante  $p$ , segue por (4.8) que

$$Pr(\mathfrak{D}(M)) = \sum_{A \in \mathfrak{D}} p^{|A|} q^{|E-A|}$$

Prosseguindo de modo análogo ao exemplo 4.7, temos

$$Pr(\mathfrak{D}(M)) = q \sum_{\substack{A \in \mathfrak{D} \\ e \notin A}} p^{|A|} q^{|(E-e)-A|} + p \sum_{\substack{A' \subseteq E-e \\ A' \cup e \in \mathfrak{D}}} p^{|A'|} q^{|(E-e)-A'|} \quad (4.15)$$

Observe que a primeira parcela de (4.15) é uma soma sobre os subconjuntos  $A$  de  $E-e$ , e como  $A \in \mathfrak{D}$ ,  $d$  não é um colação de  $A \cup d$  em  $M \setminus e$ . Deste modo, esta soma é sobre os membros  $A$  de  $\mathfrak{D}(M \setminus e)$ . Por outro lado, note que  $d$  é um colação de  $M_d(A' \cup d \cup e)$  se, e somente se,  $d$  é um colação de  $M_d(A' \cup d \cup e)/e$ ; portanto, a segunda parcela de (4.15) é sobre os membros  $A'$  de  $\mathfrak{D}(M/e)$ . Logo,

$$Pr(\mathfrak{D}(M)) = qPr(\mathfrak{D}(M \setminus e)) + pPr(\mathfrak{D}(M/e)) \quad (4.16)$$

Deste modo, se

$$h(M) = (1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}(M)),$$

então

$$\begin{aligned} h(M) &= (1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} [qPr(\mathfrak{D}(M \setminus e)) + pPr(\mathfrak{D}(M/e))] \\ &= q(1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}(M \setminus e)) + (1/q)^{|M|-r(M)} p(1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}(M/e)) \\ &= (1/q)^{|M|-1-r(M)} (1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}(M \setminus e)) + (1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)-1} Pr(\mathfrak{D}(M/e)) \end{aligned}$$

Temos que  $|M \setminus e| = |M| - 1$ ,  $r(M \setminus e) = r(M)$ , e  $r(M/e) = r(M) - 1$ . Portanto,

$$\begin{aligned} h(M) &= (1/q)^{|M \setminus e| - r(M \setminus e)} (1/p)^{r(M \setminus e)} Pr(\mathfrak{D}(M \setminus e)) \\ &+ (1/q)^{|M| - r(M/e) - 1} (1/p)^{r(M/e)} Pr(\mathfrak{D}(M/e)) \\ &= h(M \setminus e) + h(M/e), \end{aligned}$$

para todo elemento  $e$  de  $M \setminus d$  que não é um laço nem um colaço de  $M$ .

Se  $e$  é um colaço, então

$$h(M \setminus e) = (1/q)^{|M \setminus e| - r(M \setminus e)} (1/p)^{r(M \setminus e)} Pr(\mathfrak{D}(M \setminus e))$$

Como  $e$  é um colaço, então

$$Pr(\mathfrak{D}(M \setminus e)) = Pr(\mathfrak{D}(M))$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} h(M \setminus e) &= (1/q)^{|M| - 1 - r(M) + 1} (1/p)^{r(M) - 1} Pr(\mathfrak{D}(M)) \implies \\ (1/p)h(M \setminus e) &= (1/q)^{|M| - r(M)} (1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}(M)) = h(M) \end{aligned}$$

Agora, suponha que  $e$  é um laço. Então

$$h(M \setminus e) = (1/q)^{|M \setminus e| - r(M \setminus e)} (1/p)^{r(M \setminus e)} Pr(\mathfrak{D}(M \setminus e))$$

Como  $e$  é um laço, então  $r(M \setminus e) = r(M)$  e  $Pr(\mathfrak{D}(M \setminus e)) = Pr(\mathfrak{D}(M))$

Deste modo,

$$\begin{aligned} h(M \setminus e) &= (1/q)^{|M| - 1 - r(M)} (1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}(M)) \\ &= (1/q)^{-1} (1/q)^{|M| - r(M)} (1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}(M)) \end{aligned}$$

Daí

$$h(M) = (1/q)h(M \setminus e)$$

Logo,

$$h(M) = \begin{cases} (1/q)h(M \setminus e), & \text{se } e \text{ é um laço.} \\ (1/p)h(M \setminus e), & \text{se } e \text{ é um colaço.} \end{cases}$$

Agora, note que se  $M(d)$  é um laço, então  $Pr(\mathfrak{D}(M(d))) = 1$ ; e deste modo,

$$\begin{aligned} h(M(d)) &= (1/q)^{|M(d)|-r(M(d))} (1/p)^{r(M(d))} Pr(M(d)) \\ &= (1/q)^{1-0} (1/p)^{0} 1 \\ &= (1/q) \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $M(d)$  é um colaço, então  $Pr(M(d)) = 0$ ; deste modo,

$$h(M(d)) = 0$$

Logo,

$$h(M(d)) = \begin{cases} 1/q, & \text{se } M(d) \text{ é um laço.} \\ 0, & \text{se } M(d) \text{ é um colaço.} \end{cases}$$

Deste modo, pelas proposições 2.17 e 2.18, temos que  $h(M_d) = t_p(M_d; x', x, y', y)$ , onde  $x' = 0$ ,  $y' = 1/q$ ,  $x = 1/p$  e  $y = 1/q$ . Temos ainda, que  $t_p(M_d; x', x, y', y) = x'f(x, y) + y'g(x, y)$ ; portanto,  $h(M_d) = (1/q)g(1/p, 1/q)$ . Logo,  $Pr(\mathfrak{D}(M)) = q^{|M|-r(M)-1} p^{r(M)} g(1/p, 1/q)$ .

Para mostrar (ii), considere  $e$  um elemento de  $M \setminus d$  o qual não é um laço nem um colaço, e defina

$$\begin{aligned} j(M) &= (1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} [1 - Pr(\mathfrak{D})] \\ &= (1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} - (1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Note que

$$(1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} = (1/q)^{|M \setminus e|-r(M \setminus e)} (1/p)^{r(M \setminus e)} + (1/q)^{|M/e|-r(M/e)} (1/p)^{r(M/e)}$$

De fato,

$$\begin{aligned} (1/q)^{|M \setminus e|-r(M \setminus e)} (1/p)^{r(M \setminus e)} &+ (1/q)^{|M/e|-r(M/e)} (1/p)^{r(M/e)} \\ &= (1/q)^{|M|-1-r(M)} (1/p)^{r(M)} + (1/q)^{|M|-1-(r(M)-1)} (1/p)^{r(M)-1} \\ &= q(1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} + p(1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)} \\ &= (p+q)(1/q)^{|M|-r(M)} (1/p)^{r(M)}. \end{aligned}$$

Como  $p+q=1$ , a afirmação segue.

Agora, de (4.17), temos

$$\begin{aligned}
j(M) &= (1/q)^{|M \setminus e| - r(M \setminus e)} (1/p)^{r(M \setminus e)} + (1/q)^{|M/e| - r(M/e)} (1/p)^{r(M/e)} \\
&\quad - (1/q)^{|M| - r(M)} (1/p)^{r(M)} Pr(\mathfrak{D}) \\
&= (1/q)^{|M \setminus e| - r(M \setminus e)} (1/p)^{r(M \setminus e)} + (1/q)^{|M/e| - r(M/e)} (1/p)^{r(M/e)} - h(M) \\
&= (1/q)^{|M \setminus e| - r(M \setminus e)} (1/p)^{r(M \setminus e)} + (1/q)^{|M/e| - r(M/e)} (1/p)^{r(M/e)} - h(M \setminus e) - h(M/e) \\
&= j(M \setminus e) + j(M/e)
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao que fizemos para  $h$ , temos que

$$j(M) = \begin{cases} (1/q)j(M \setminus e), & \text{se } e \text{ é um laço.} \\ (1/p)j(M \setminus e), & \text{se } e \text{ é um colaço;} \end{cases}$$

e é fácil ver que

$$j(M(d)) = \begin{cases} 0, & \text{se } M(d) \text{ é um laço.} \\ 1/p, & \text{se } M(d) \text{ é um colaço.} \end{cases}$$

Finalmente, aplicando a proposição 2.17 de modo análogo ao que fizemos para  $h$ , temos

$$Pr(\mathfrak{D}(M)) = 1 - p^{r(M)-1} q^{|M| - r(M)} f(1/p, 1/q). \quad \blacksquare$$

Se fizermos  $M$  igual a  $M_d(E \dot{\cup} d)$ , por 4.8, temos

$$Pr(\mathfrak{D}(M)) = \sum_{i=0}^{|E|} a_i p^i q^{|E| - i};$$

onde o coeficiente  $a_i$  é o número de subconjuntos  $A$  de  $E$  com  $i$  elementos para os quais  $d$  não é um colaço de  $M_d(A \cup d)$ . Deste modo, uma vez que  $d$  não é um laço nem colaço de  $M$ ,  $a_i \geq 0$  para todo  $i$  e  $a_{|E|} = 1$ .

Agora, suponha que  $M_d$  é a matróide cíclica do grafo  $\overline{G}$ , e seja a aresta  $d$  o ponto-base que une os vértices distintos  $s$  e  $t$ . Seja  $k$  o menor  $j$  para o qual  $a_j$  é não-nulo. Então  $a_k$  é o número dos subconjuntos  $A$  de  $M$  de menor cardinalidade, para os quais  $d$  não é um colaço; isto é,  $d$  está contido num circuito de  $M$ . Note que  $A \cup d$  é um circuito de  $M_d(E \dot{\cup} d)$ , pois caso contrário  $A$  não teria a menor cardinalidade. Deste modo,  $A$  é um  $(s,t)$ -caminho em  $\overline{G} - d$ , e como  $A$  possui a menor cardinalidade,  $k$  é o comprimento dos menores caminhos de  $s$  a  $t$ .

Antes de partirmos para o próximo resultado, será necessário tratar de algumas particularidades do cálculo de  $t(M; 1/p, 1/q)$ .



### 4.2.1 Valor de $t(\mathbf{M}; 1/p, 1/q)$

Primeiramente, lembremos que  $t(M_d; x', x, y', y) = x'f(x, y) + y'g(x, y)$ . Mas, se  $M_d$  é vista como uma simples matrôide e não mais como uma matrôide pontuada, então  $d$  não é mais destacado; assim o polinômio de Tutte é reduzido à duas variáveis; ou seja,  $x = x'$ ,  $y = y'$ , e  $t(M; x, y) = xf(x, y) + yg(x, y)$ . Pela, proposição 2.17, temos que se  $d$  não é um laço nem um colaço, então

$$\begin{cases} t(M \setminus d) = (x - 1)f(x, y) + g(x, y), \text{ e} \\ t(M/d) = f(x, y) + (y - 1)g(x, y) \end{cases} \quad (4.18)$$

Note que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (4.18) é igual a  $xy - x - y$ ; no entanto, se  $(\frac{1}{x}) + (\frac{1}{y}) = 1$ , temos

$$\frac{y + x}{xy} = \frac{xy}{xy} \implies xy - x - y = 0$$

Deste modo, se  $x = 1/p$  e  $y = 1/q$ , então só será possível calcular  $Pr(\mathfrak{D})$  através de  $t(M \setminus d)$  e  $t(M/d)$ , com  $x = 1/p$  e  $y = 1/q$ , se  $p + q = 1$  nunca for envolvido. Por outro lado, note que, por (4.18),

$$t(M/d; 1/p, 1/q) = f(1/p, 1/q) + \frac{1 - q}{q}g(1/p, 1/q) \quad (4.19)$$

e

$$t(M \setminus d; 1/p, 1/q) = \frac{1 - p}{p}f(1/p, 1/q) + g(1/p, 1/q) \quad (4.20)$$

De (4.19) e (4.20), obtemos

$$\begin{aligned} qt(M/d; 1/p, 1/q) - pt(M \setminus d; 1/p, 1/q) &= qf(1/p, 1/q) + (1 - q)g(1/p, 1/q) \\ &+ (p - 1)f(1/p, 1/q) - pg(1/p, 1/q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daí

$$t(M/d; 1/p, 1/q) = \frac{p}{q}t(M \setminus d; 1/p, 1/q) \quad (4.21)$$

Deste modo, dada uma matrôide  $M'$ ,  $t(M''; 1/p, 1/q)$  é o mesmo para qualquer imagem  $M''$  de uma aplicação forte  $\varphi$  de  $M'$ . De fato, se  $\varphi(M') = M''$ , então existe uma matrôide  $M$  e um elemento  $d$  que não é um laço nem um colaço tal que  $M \setminus d = M'$

e  $M/d = M''$ ; e portanto, por (4.21), o resultado segue. Pela proposição (2.10)(iii), temos

$$t(M/d; 2, 2) = 2^{|M|-1}$$

Por outro lado, por (4.21), temos

$$t(M \setminus d; 2, 2) = t(M/d; 2, 2) = 2^{|M|-1}$$

O seguinte resultado generaliza esta consequência da proposição (2.10)(iii).

**Proposição 4.9** *Seja  $q(M) = t(M; 1/p, 1/q)$ , onde  $p + q = 1$ , e seja  $d$  um elemento de  $M$  que não é um laço nem um colaço. Então*

$$(i) \quad q(M/d) = (p/q)q(M \setminus d) = f(M; 1/p, 1/q) + (p/q)g(M; 1/p, 1/q);$$

(ii)  $q(M \setminus d)$  e  $q(M/d)$  são independentes do corte modular de  $M \setminus d$  determinado por  $d$  em  $M$ . ■

Maiores detalhes a respeito de corte modular de uma matróide poderão ser encontrados em [12].

O seguinte exemplo dar-nos-á uma ilustração da última proposição.

**Exemplo 4.10** *Seja  $M$  a matróide cíclica do grafo  $G$  da figura 4.1. Temos que*

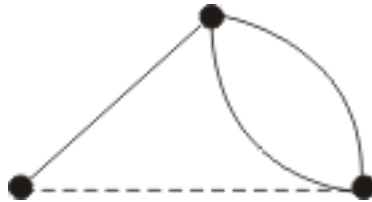


Figura 4.1: Grafo  $G$

$$\begin{aligned} t(M/d) + t(M \setminus d) &= f(x, y) + (y - 1)g(x, y) \\ &+ (x - 1)f(x, y) + g(x, y) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} &= \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + x \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \\
 &= y^2 + (x+1) \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \\
 &= y^2 + (x+1) \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) \\
 &= y^2 + (x+1)(y+x) \\
 &= y^2 + xy + x^2 + y + x \\
 &= y(y+1) + x(x+y+1)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

De (4.22) e (4.23), obtemos

$$y(y+1) + x(x+y+1) = yg(x, y) + xf(x, y)$$

Daí

$$f(x, y) = x + y + 1 \text{ e } g(x, y) = y + 1$$

Portanto,

$$t_p(M_d; x, y) = x'(x + y + 1) + y'(y + 1) \tag{4.24}$$

Por (4.8)(i), temos

$$Pr(\mathfrak{D}) = p^{r(M)} q^{|M| - r(M) - 1} g(1/p, 1/q);$$

deste modo,

$$\begin{aligned}
 Pr(\mathfrak{D}) &= p^2 q^{4-2-1} \left( \frac{1}{q} + 1 \right) \\
 &= p^2 q \left( \frac{1}{q} + 1 \right) \\
 &= p^2 q \left( \frac{p+q}{q} + 1 \right) \\
 &= \frac{p^3 q + p^2 q^2}{q} + p^2 q \\
 &= p^3 + p^2 q + p^2 q \\
 &= 2p^2 q + p^3 \\
 &= 2p^2(1-p) + p^3 \\
 &= 2p^2 - 2p^3 + p^3 \\
 &= 2p^2 - p^3
 \end{aligned}$$

Agora, por (4.18) e (4.24), temos

$$\begin{aligned}
 t(M \setminus d) &= (x-1)f(x, y) + g(x, y) \\
 &= (x-1)(x+y+1) + y+1 \\
 &= x^2 + xy + x - x - y - 1 + y + 1 \\
 &= x^2 + xy
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 t(M/d) &= f(x, y) + (y-1)g(x, y) \\
 &= x+y+1 + (y-1)(y+1) \\
 &= x+y+1y^2-1 \\
 &= y^2+y+x
 \end{aligned}$$

Como  $q(M/d) = t(M/d; 1/p, 1/q)$ , temos

$$\begin{aligned}
 q(M/d) &= \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \\
 &= \frac{p + pq + q^2}{pq^2} \\
 &= \frac{p + (1-q)q + q^2}{pq^2} \\
 &= \frac{p+q}{pq^2} \\
 &= \frac{p}{pq^2} + \frac{q}{pq^2} \\
 &= \frac{p}{pq^2} + \frac{1}{pq} \\
 &= \frac{p}{pq^2} + \frac{p}{p^2q} \\
 &= \frac{p}{q} \left( \frac{1}{pq} + \frac{1}{p^2} \right) \\
 &= \frac{p}{q} q(M-d)
 \end{aligned}$$

Agora, considere as figuras 4.2 e 4.3.

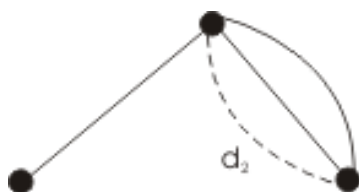


Figura 4.2: grafo  $G_1$

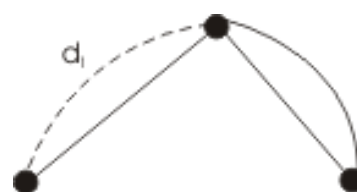


Figura 4.3: grafo  $G_2$

Se  $M_1$  e  $M_2$  são as matrôides cíclicas de  $G_1$  e  $G_2$ , então, prosseguindo analogamente ao que fizemos para  $G$ , obtemos

$$t_p(M_1; x, y) = x'(x + y) + y'(x + y)$$

e

$$t_p(M_2; x, y) = x'x + y'(x + xy)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} t(M_1/d_1) &= x + y + (y - 1)(x + y) \\ &= x + y + xy + y^2 - x - y \\ &= y(x + y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} t(M_2/d_2) &= x + (y - 1)(x + xy) \\ &= x + xy + xy^2 - x - xy \\ &= xy^2 \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} q(M_1/d_1) &= \frac{1}{q} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ &= \frac{1}{q} \left( \frac{q + p}{pq} \right) \\ &= \frac{1}{pq^2} \end{aligned}$$

e

$$q(M_2/d_2) = \frac{1}{pq^2}$$

Portanto,

$$q(M/d) = q(M_1/d_1) = q(M_2/d_2)$$

Finalmente, por (4.8)(i), obtemos

$$\begin{aligned} Pr(\mathfrak{D}(M_1)) &= p^2q \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ &= pq + p^2 \\ &= p(1 - p) + p^2 \\ &= p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Pr(\mathfrak{D}(M_2)) &= p^2q \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{pq} \right) \\ &= pq + p \\ &= p(1 - p) + p \\ &= 2p - p^2 \end{aligned}$$

Até este momento, calculamos  $Pr(\mathfrak{D})$  para o caso em que todas as probabilidades de retenção eram iguais. Nosso objetivo agora será determinar  $Pr(\mathfrak{D})$  quando  $M_d$  é uma matróide cíclica de um grafo  $\overline{G}$  no qual as probabilidades de retenção  $p_i$  podem variar de aresta para aresta.

### 4.2.2 Grafos com arestas de probabilidades de retenção diferentes.

Primeiramente, visto que a presença de laços não afeta  $Pr(\mathfrak{D})$ , suponhamos que  $\overline{G}$  não possui laços.

Agora, seja  $0, d_{i1}d_{i2} \cdots d_{ik}$  o decimal binário para  $p_i$ , onde  $d_{ik} = 1$ . Então construiremos um sistema  $N_i$  de  $(k+1)$ -arestas em série e paralelo como segue: iniciaremos com grafo consistindo da aresta  $e_i$  de  $\overline{G}$  e seus pontos finais. Daí, adicionando outras arestas em série ou paralelo usando o seguinte critério

$$\begin{cases} e_{ij} \text{ em paralelo com } e_i, & \text{se } d_{ij} = 1, \text{ e} \\ e_{ij} \text{ em série com } e_i, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

onde  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Após obtermos  $N_i$  adicionando uma aresta para dada  $j$ , formamos uma 2-soma de  $N_i$  com  $\overline{G}$  através do ponto-base  $e_i$ . O próximo exemplo ilustrará esta técnica.

**Exemplo 4.11** Se  $p_i = 0,0111001$ , então  $N_i$  é como está mostrado na figura 4.4.

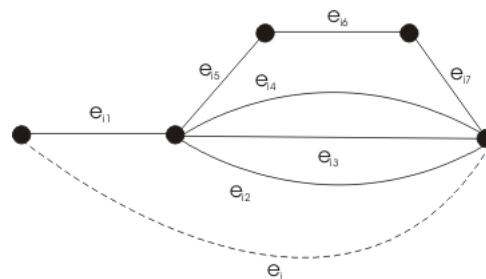


Figura 4.4:  $N_i$

Procedendo desta maneira para toda aresta de  $\overline{G}$ , com exceção de  $d$ , obtemos um novo grafo  $\tilde{G}$  que possui a matróide cíclica  $\tilde{M}_d$ . Note que, em  $\tilde{G}$ ,  $d$  continua sendo uma aresta destacada. Agora, associando a cada aresta  $e_{ij}$  de  $\tilde{G}$  a probabilidade de retenção  $\frac{1}{2}$ , temos que  $N_i \cup d$  possui um circuito contendo  $d$  se, e somente se,  $e_i$  está

contido em algum circuito de  $M_d(E \dot{\cup} d)$  contendo  $d$ . Logo,

$$Pr(\mathfrak{D}(M_d)) = Pr(\mathfrak{D}(\tilde{M}_d))$$

Deste modo, como  $\tilde{M}_d$  tem probabilidades de retenção constantes, temos, por 4.9, que

$$\begin{aligned} Pr(\mathfrak{D}(M_d)) &= (1/2)^{r(\tilde{M}_d)} (1/2)^{|\tilde{M}_d| - r(\tilde{M}_d) - 1} g(\tilde{M}_d; 2, 2) \\ &= (1/2)^{|\tilde{M}_d| - 1} g(\tilde{M}_d; 2, 2) \end{aligned}$$

Logo, esta técnica permite-nos encontrar  $Pr(\mathfrak{D}(M_d))$  para uma matróide pontuada arbitrária. Além disso, é possível obter a probabilidade que uma submatróide de  $M$  tenha o mesmo posto de  $M$ . Para isto, basta substituir cada elemento de  $M$  por um sistema em série e paralelo apropriado e então usar a fórmula (4.9).

Para finalizar esta seção, estenderemos a proposição 4.6 ao número de vetores de pontos que podem surgir orientando um grafo. Para isto, necessitaremos do seguinte lema:

**Lema 4.2** *Seja  $k$  um número inteiro positivo e  $M$  uma matróide. Seja  $M^{(k)}$  a matróide que é obtida de  $M$  pela substituição de cada elemento que não é um laço por  $k$  elementos paralelos, e substituindo cada laço por  $k$  laços. Então*

$$t(M^{(k)}; x, y) = (y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + y + 1)^{r(M)} t\left(M; \frac{y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + y + x}{y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + y + 1}, y^k\right)$$

**Prova.** Seja  $e$  um elemento de  $M$  que não é um laço nem um colaço, e considere  $f(M) = t(M^{(k)}; x, y)$ . Então:

$$f(M) = t(M^{(k)} \setminus e; x, y) + t(M^{(k)}/e; x, y).$$

Mostraremos que  $f(M) = f(M \setminus e) + (y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + y + 1)f(M/e)$ . Com efeito, note que ao contrair  $e$  em  $M^{(k)}$ , obtemos  $k - 1$  laços; e ao eliminarmos  $e$  de  $M^{(k)}$ , obtemos uma família de  $k - 1$  elementos paralelos. Portanto, usando (2.4)(i) para cada laço obtido em  $M^{(k)}/e$ , temos

$$t(M^{(k)}/e; x, y) = y^{k-1} t((M/e)^{(k)}; x, y) \tag{4.25}$$

Agora, escolha um elemento  $e_2$  da família de  $k - 1$  elementos paralelos. Daí, prosseguindo de modo análogo a (4.25), obtemos

$$\begin{aligned} t((M^{(k)} \setminus e); x, y) &= t((M^{(k)} \setminus e) \setminus e_2; x, y) + t((M^{(k)} \setminus e)/e_2; x, y) \\ &= t((M^{(k)} \setminus e) \setminus e_2; x, y) + y^{k-2} t((M/e)^{(k)}; x, y) \end{aligned}$$

Prosseguindo indutivamente até  $k - 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} t((M^{(k)} \setminus e); x, y) &= t((M^{(k)} \setminus e \setminus e_2 \cdots \setminus e_k; x, y) + y^{k-2}t(M/e; x, y)) + y^{k-3}t(M/e; x, y) \\ &+ \cdots + y^0t(M/e; x, y) \\ &= t((M \setminus e)^{(k)}; x, y) + (y^{k-2} + y^{k-3} + \cdots + y)t(M/e; x, y) \end{aligned}$$

Logo,

$$f(M) = t((M \setminus e)^{(k)}; x, y) + (y^{k-1} + y^{k-2} + \cdots + 1)t((M/e)^{(k)}; x, y) \quad (4.26)$$

Agora, suponha que  $e$  é um laço de  $M$ . Então

$$\begin{aligned} f(M) = t(M^{(k)}; x, y) &= t(M^k(e); x, y)t(M^{(k)} \setminus e; x, y) \\ &= y \cdot y^{k-1}t((M \setminus e)^{(k)}; x, y) \\ &= y^k t((M \setminus e)^{(k)}; x, y) \\ &= t((M(e))^{(k)}; x, y)t((M \setminus e)^{(k)}; x, y) \\ &= f(M(e))f(M \setminus e) \end{aligned}$$

Finalmente, suponha que  $e$  é um colaço de  $M$ . Então, em  $M^{(k)}$ ,  $e$  dá origem a uma família de  $k$  elementos paralelos; e deste modo,

$$f(M) = t(M^{(k)}; x, y) = t(M^{(k)} \setminus e; x, y) + t(M^{(k)}/e; x, y)$$

Daí prosseguimos de modo análogo a (4.26) até a  $k - 1$  eliminação, e então observamos que o elemento  $e_k$  remanescente é um colaço; e deste modo

$$\begin{aligned} f(M) &= t(M^{(k)} \setminus e \setminus e_1 \setminus \cdots \setminus e_{k-1} \setminus (e_k)t((M^{(k)} \setminus e \setminus e_1 \cdots \setminus e_k)) \\ &+ (y^{k-1} + y^{k-2} + \cdots + y)t((M/e)^{(k)}) \end{aligned}$$

Agora, como  $e$  é um colaço, temos

$$t((M/e)^{(k)}) = t((M \setminus e)^{(k)})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(M) &= xt((M \setminus e)^{(k)}) + (y^{k-1} + y^{k-2} + \cdots + y)t((M \setminus e)^{(k)}) \\ &= (y^{k-1} + \cdots + y + x)t((M - e)^{(k)}) \\ &= t((M(e))^{(k)})t((M \setminus e)^{(k)}) \\ &= f(M(e))f(M \setminus e) \end{aligned}$$



Logo,  $f$  é um T-G invariante generalizado, e pelo corolário 2.6 o resultado segue. ■

Na Liga Norte-americana de Hockey (LNH), as equipes precisam de 2 pontos para uma vitória, 1 ponto para um empate, e 0 pontos para uma derrota. Para calcular o número de possibilidades de vetores de pontos no final de uma temporada da LNH, é suficiente calcular o número de vetores de pontos para  $G^{(2)}$ ; onde  $G$  é o grafo correspondente a lista de jogos da LNH e  $G^{(k)}$  é obtido de  $G$  trocando cada aresta por  $k$  arestas em paralelo.

**Proposição 4.12** *Suponha que os vértices de um grafo sem laços  $G$  correspondam a equipes de alguma liga com cada aresta correspondendo a um jogo que deve ser jogado entre os dois pontos finais. Seja  $k$  um inteiro positivo fixo de modo que, em cada jogo de uma equipe, ela deve marcar qualquer número de pontos do conjunto  $\{0, 1, \dots, k\}$ , com a condição de que as duas equipes em qualquer jogo marque um total de  $k$  pontos. Então, quando todos os jogos forem realizados, o número de possibilidades de vetores de pontos é*

$$t(M_{G^{(k)}}; 2, 1) = k^{r(M_G)} t\left(M(G); \frac{k+1}{k}, 1\right)$$

**Prova.** Pela proposição 4.6 temos que o número vetores de pontos é  $t(M_{G^{(k)}}; 2, 1)$ . Por outro lado, pelo lema 4.2, temos  $t(M_{G^{(k)}}; 2, 1) = k^{r(M(G))} t\left(M(G); \frac{k+1}{k}, 1\right)$ , o que queríamos provar. ■

# Bibliografia

- [1] APPEL, K. & HAKEN, W. Every planar map is four-colorable, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82**, 711-712, (1976).
- [2] AMORIM, Marta Élid C. *O polinômio de Tutte*. Dissertação (Mestrado em matemática)-Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Campina Grande, 2006.
- [3] BIGGS, N. L., LLOYD, E. K. & WILSON, R. J. *Graph Theory: 1736-1936*, Oxford University Press.
- [4] BIRKHOFF, G. D. A determinant formula for the number of ways of coloring a map. *Ann. Math. (2)* **14**, 42-46, (1912-13).
- [5] BOLLOBÁS, Béla. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, 1976.
- [6] BOLLOBÁS, Béla. *Modern Graph Theory*. Springer, 1998.
- [7] DIESTEL, Reinhard. *Graph Theory*. Springer, 1997.
- [8] GREENE, C. & ZASLAVSKY, T. On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-Radon partitions and orientations of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **280**, 97-126, (1983).
- [9] JAEGER, F. On nowhere-zero flows in multigraphs, in C. Nash-williams & J. Sheehan (eds). *Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference*, Congressus Numerantium 15, pp. 373-379. Utilitas Mathematica, Winnipeg, (1976b).
- [10] JAEGER, F. On Tutte Polynomials and Cycles of Plane Graphs. *J. Comb. Theory Ser.* **B44**, 141-167 (1988a).

- [11] LAS VERGNAS, M. Acyclic and totally cyclic orientations of combinatorial geometries, *Discrete Math.* **20**, 51-61, (1977).
- [12] OXLEY, James G. *Matroid Theory*. Oxford University Press, 1992.
- [13] OXLEY, James. BRYLAWSKI, Thomas. The Tutte Polynomial and Its Applications. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications* **40**, 123-160, (1992).
- [14] SEYMOUR, P.D. Nowhere-zero 6-flows. *J. Comb. Theory Ser.B* **30**, 130-135, (1981a).
- [15] TUTTE, W. T. On the algebraic theory of graph colorings, *J. Comb. Theory* **1**, 15-50, (1966a).
- [16] WHITE, N. *Theory of Matroids*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **26**, Cambridge University Press, 1986.
- [17] WHITE, N. *Combinatorial Geometries*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **29**, 1987.
- [18] WILSON, Robin J. *Introduction to graph theory*. Longman, 1979.