Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Codimensões e Cocaracteres de PI-Álgebras

por

Antonio Igor Silva de Oliveira [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Codimensões e Cocaracteres de PI-Álgebras

por

Antonio Igor Silva de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UnB)

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva (UFCG)

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2011

Agradecimentos

Inicialmente, a todos os meus familiares que contribuíram de maneira significativa com minha educação ao longo da minha vida. Mainha, uma mulher forte e batalhadora; painho, que sempre tem algo a me ensinar; meu irmão Wendell, um homem de inteligência mal aproveitada; tio Wilson, com toda sua atenção, carinho e apoio; tio Carlos e tia Socorro por criarem à mim e ao meu irmão em momento tão delicado de nossas vidas; e, especialmente, à minha véia, madrinha, tia, mãe, Toinha, mulher de coração enorme que sempre me acolheu com todo amor, carinho, dedicação e apoio incondicional desde meu primeiro choro na maternidade.

Ao meu orientador Brandão, um profissional no qual me espelho desde que assisti as primeiras aulas ministradas por ele no Curso de Verão em álgebra linear no ano de 2008. Tenho muito orgulho de ser orientado por alguém tão qualificado.

A Dimas e Diogo por aceitarem compor a banca e fizeram valiosas sugestões que só engrandeceram o trabalho.

Aos mestres que tanto contribuíram com minha formação, Fernando bigode e Jorge por me despertarem o prazer da Matemática; todos meus professores de graduação, em especial a Benedito, André Gustavo, Marcelo, Iran e Jonas com quem tive o prazer de trabalhar diretamente e a Viviane e Ronaldo pelos valiosos ensinamentos acadêmicos; aos professores do mestrado, em especial Brandão, Horácio, Henrique e Fernanda, onde tive valiosos cursos.

Aos amigos que fiz no decorrer dos anos acadêmicos, em especial a Stallone e Mateus, que tanto me ensinaram nos estudos coletivos; a todos meus copanheiros de PET; Désio, Joelson e Tatá, Rawlilson, Rodrigo Cohentro, Dayvid, Jailton, Otto, Rodrigo e Nocivo que tanto me aguentaram quando dividimos moradia; Jussiê e Marciel, valiosos irmãos acadêmicos; Annax, Denílson, Kelmen, Hildênio, Cláudio, Bruno, Eraldo, Taís, Renato, Maria, entre outros que dividiram as salas de aula e fizeram parte dos grupos de estudo no mestrado.

A todos os funcionários do departamento, D. Salete, Andrezza, D. Argentina (In Memorian), Du, Davi, Totinha, entre outros.

A família do Residencial Flamingo, onde tive o prazer de fazer ótimas amizades, em especial ao baitxa (Ramon), bimba (Batista), Vando, Jaqueline, Valdemar, Nildo, Socorro, Janaína, D. Lunga (Andressa), Laluna, a todos da família Sarmento (ê família boa!), Alice, Aline, Igor, Kita, Mateus, Milena, Thayana, Ajey, Isabeli, Fernanda, entre outros que me escapam nesse momento.

A todos meus atuais companheiros de trabalho no ECT - UFRN, os quais me ajudaram a terminar minha dissertação, Kaline, João, Tati, Deisy, Jefferson, Alysson, Diegão, Marcela, Edson, Ronaldo, Gustavo, Hugo, Simone, Paulo, André e Camila.

A todos meus amigos que mesmo estando longe me acompanharam nessa jornada, Tiago, Pedro, Adauto, Gabie, Jujubatatinha, Haniel, Cecília e seu milagroso zé gotinha, Sara, Nic, Bárbara (com suas valiosas sugestões textuais além de companhia intensa), entre outros que minha memória teima em não lembrar.

Aos meus alunos que tanto me deram apoio e torceram por esse resultado. Não tenham dúvida que foi de grande valia.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Para finalizar, às duas irmãs que ganhei aqui, Aline e Fabiana, que juntas me proporcionaram um ambiente de trabalho que nunca tive para que eu conseguisse o que já me parecia impossível, terminar a dissertação. Jamais irei me esquecer o que passamos juntos nesse período de dificuldade, esforço, convivência e sobretudo de alegria. Sem a participação de vocês, dificilmente essa dissertação existiria.

Tem vez que as coisas pesam mais do que a gente acha que pode aguentar
Nessa hora fique firme pois tudo isso logo vai passar
Você vai rir sem perceber, felicidade é só questão de ser
Quando chover, deixar molhar pra receber o sol quando voltar
Melhor viver, meu bem, pois há um lugar em que o sol brilha pra você
Chorar, sorrir também e depois dançar na chuva quando a chuva vem
Felicidade - Marcelo Jeneci / Chico César

And in the end the love you take is equal to the love you made
The End - Lennon / McCartney

Dedicatória

Aos meus pais, Bira e Fátima; à minha véia, mãe e tia, Toinha; e ao meu irmão, Wendell.

Resumo

As ideias de codimensões e cocaracteres de uma PI-álgebra são de grande importância e são centrais nas aplicações das representações dos grupos simétricos à PI-teoria (teoria das identidades polinomiais). Os conceitos de codimensão e cocaracter começaram a ser estudados em 1972 por Amitai Regev em seu importante trabalho sobre identidades polinomiais do produto tensorial de PI-álgebras. Ao longo das últimas décadas muitos resultados importantes surgiram com o uso das representações e dos métodos assintóticos na PI-teoria. Neste trabalho apresentaremos inicialmente ideias e resultados básicos da Teoria de Young sobre as representações dos grupos simétricos. De posse desses resultados, estudaremos as sequências limitadas de codimensões e as sequências de cocaracteres de álgebras que satisfazem alguma identidade de Capelli. Apresentaremos também os cálculos das codimensões e dos cocaracteres da álgebra de Grassmann.

Palavras-chave: Identidades polinomiais, grupo simétrico, representações, codimensões, cocaracteres.

Abstract

The ideas of codimensions and cocharacters of a PI-algebra are of great and central importance in the applications of representations of symmetric groups to PI-theory (theory of the polynomial identities). The study of the concepts of codimensions and cocharacters started in 1972 by Amitai Regev in his important work about polynomial identities of the tensor product of PI-algebras. During the last decades many important results arose with the use of representations and asymptotic methods in PI-theory. In this work we will present firstly ideas and basic results in the Young's theory about the representations of symmetric groups. With these results we shall study the limited sequences of codimensions and the cocharacter sequences of algebras that satisfy some of the Capelli identity. It will also be presented the calculation of the codimensions and cocharacters of the Grassmann Algebra.

Keywords: Polynomial identities, symmetric group, representations, codimensions, cocharacters.

Conteúdo

Introdução

Considerado um conceito importante da Teoria de Anéis, define-se *álgebra* sobre um corpo K (ou K-álgebra) como sendo um espaço vetorial munido de um produto que é uma aplicação bilinear. Um tipo especial de álgebras é constituído daquelas que satisfazem uma identidade polinomial (PI-álgebras), que é um polinômio não nulo e não comutativo que se anula em qualquer substituição de suas variáveis por elementos da álgebra. Como exemplos básicos de PI-álgebras, temos as álgebras comutativas, as nilpotentes, as de dimensão finita, entre outras.

A princípio, as identidades polinomiais eram estudadas com relação a anéis, como podemos ver nos artigos de Dubnov, Ivanov, Jacobson, Kaplansky e Levitzki ([9], [15], [24] e [17]). Mas foi com o artigo de Amitsur e Levitzki [2], em 1950, que a teoria das álgebras com identidades polinomiais (PI-teoria) ganhou força e notoriedade. Nesse trabalho foi provado, por métodos combinatórios, que o polinômio standard de grau $2n$ é identidade para a álgebra das matrizes quadradas $M_n(K)$.

Partindo do fato de que uma identidade polinomial diz muito sobre a estrutura de uma álgebra, um dos principais problemas da PI-teoria é descrever as identidades de uma álgebra determinando uma base para o seu T-ideal de identidades. Em 1950, Specht questionou se o T-ideal de uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero é finitamente gerado. Entretanto, foi somente em 1987 que Kemer (ver [18] e [19]) obteve uma resposta positiva para esta questão, conhecida como Problema de Specht. Mesmo com a grande profundidade de seu trabalho, Kemer só conseguiu provar que tal base finita existe, sem mostrar uma forma de obtê-la. Atualmente, algumas álgebras já possuem seus T-ideais de identidades descritos, como podemos ver em [22], [27], [7] e [20]. Por outro lado, o problema da descrição das identidades ainda está em aberto para muitas álgebras importantes, como por exemplo, $M_n(K)$, para $n \geq 3$, e $M_2(E)$, onde E é a álgebra de Grassmann (ou exterior).

Em 1972, Amitai Regev publicou um importante trabalho sobre identidades polinomiais do produto tensorial de PI-álgebras [29]. Nele foram apresentados os conceitos de codimensão e cocaracter de uma álgebra com o intuito de aplicar a Teoria de Young das representações dos grupos simétricos à PI-teoria. Sendo A uma K-álgebra associativa e $T(A)$ o seu T-ideal de identidades, definimos a n-ésima *codimensão* de A, denotada por $c_n(A)$, como sendo a dimensão (como K-espaço vetorial) do S_n-módulo $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$, e o n-ésimo *cocaracter* de A, denotado por $\chi_n(A)$, como sendo o caracter do S_n-módulo $P_n(A)$. Aqui S_n denota o grupo simétrico sobre o conjunto $\{1, 2, \ldots, \text{n}\}$ e P_n denota o K-espaço vetorial dos polinômios associativos multilineares de grau n, o qual tem uma estrutura natural de S_n-módulo. Por meio da aplicação da teoria das representações dos grupos simétricos podemos, por exemplo, obter o menor grau de uma identidade polinomial de uma álgebra ou determinar o crescimento da sequência de codimensões de um T-ideal, que pelo Teorema de Regev-Latyshev (ver [29] e [23]) é, no máximo, exponencial.

Ao longo das últimas décadas, as representações dos grupos simétricos mostraram-se uma poderosa e engenhosa ferramenta para o estudo de PI-álgebras. Importantes trabalhos foram desenvolvidos através da sua utilização, dentre os quais citaremos alguns. Em 1976, Olsson e Regev [25] caracterizaram as sequências limitadas de codimensões, e em 1979 Regev [30] apresentou um resultado sobre caracterização, através de sequências de cocaracteres, de álgebras que satisfazem uma identidade de Capelli (estes resultados serão apresentados neste trabalho). Posteriormente, Amitsur e Regev [3] provaram o Teorema do Gancho, o qual trata do comportamento da sequência de cocaracteres de uma PI-álgebra, e possui importantes consequências. Já no final da década de 1990, Giambruno e Zaicev (ver [12] e [13]) deram uma resposta positiva para uma conjectura de Amitsur feita na década anterior, provando que, para uma PI-álgebra A, o limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ (chamado de *expoente de* A) existe e é um número inteiro não negativo. Recentemente, Giambruno e La Mattina [11] obtiveram resultados acerca de PI-álgebras tais que sua sequência de codimensões possui um baixo crescimento.

Este trabalho tem como objetivo apresentar alguns resultados sobre T-ideais obtidos com aplicações da Teoria de Young de representações do grupo simétrico à PI-teoria. Para tanto, o texto está organizado em três capítulos, sendo o primeiro uma abordagem básica sobre álgebras e identidades polinomiais, contendo, entre outras coisas, resultados como o de que todo T-ideal de polinômios é um T-ideal de identidades para uma álgebra e de que, sobre um corpo de característica zero, um T-ideal é gerado por polinômios multilineares. Além disso, é apresentado um estudo sobre módulos e representações lineares de grupos com enfoque na relação biunívuca entre as K-representações lineares de um grupo G (onde K é um corpo) e os KG-módulos, e seus caracteres.

O segundo capítulo é iniciado com a Teoria de Young de representações do grupo simétrico, e sua ligação com os KS_n-módulos (ou simplesmente S_n-módulos), sempre considerando K um corpo de característica zero. Definiremos conceitos básicos como partição de um número natural n, diagrama de uma partição, tabela de Young de um diagrama, entre outros. Também apresentaremos resultados importantes acerca de decomposição de S_n-módulos, tabelas standard (um tipo importante de tabela de Young), codimensões e cocaracteres de PI-álgebras.

O terceiro e último capítulo é iniciado com um estudo do artigo de Olsson e Regev [26] sobre as codimensões, cocaracteres e cotamanhos (conceito que será definido no texto) da álgebra de Grassmann E. Com tais ferramentas, apresentaremos uma descrição detalhada do T-ideal de identidades de E. O capítulo segue com resultados baseados em outra publicação de Olsson e Regev [25], em que é demonstrado que se uma sequência de codimenções é limitada, então ela é eventualmente limitada por 1. Também será apresentado um estudo do T-ideal da álgebra

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\},$$

a qual possui sequência constante de cotamanhos.

Com base no artigo de Regev [30], finalizaremos o capítulo com uma caracterização das álgebras que satisfazem uma identidade de Capelli através de suas sequências de cocaracteres, incluindo resultados envolvendo a álgebra $M_n(K)$, a álgebra de Grassmann e o T-ideal gerado pelo polinômio standard de grau 3.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Álgebras

A menos que haja menção em contrário, K denotará um corpo qualquer.

Definição 1.1.1 *Uma K-álgebra é um par $(A, *)$, onde A é um K-espaço vetorial e "$*$" é uma operação binária em A, além de ser uma aplicação bilinear, ou seja, $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz:*

(i) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

(ii) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

(iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$

para quaisquer a, b, $c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, "$*$" é chamada de *produto* ou *multiplicação*. Para simplificar a notação, vamos denotar a álgebra $(A, *)$ simplesmente por A, deixando o produto subentendido, e $a*b$ simplesmente por ab, para a, $b \in A$. Uma K-álgebra também pode ser chamada de álgebra sobre K ou somente de álgebra, ficando subentendido o corpo K. Por simplicidade, a partir de agora usaremos o termo álgebra. Definimos $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, $a_1a_2...a_na_{n+1}$ como sendo $(a_1a_2...a_n)a_{n+1}$, para $a_i \in A$. Se um subconjunto β é uma base de A como espaço vetorial, dizemos que β é uma *base da álgebra A* e definimos a *dimensão de A*, denotada por $\dim A$ (ou $\dim_K A$), como sendo a dimensão de A como espaço vetorial.

Definição 1.1.2 *Dizemos que uma álgebra A é:*

(i) Associativa *se o produto de A é associativo, ou seja, se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer a, b, $c \in A$.*

(ii) Comutativa *se o produto de A é comutativo, ou seja, se $ab = ba$ para quaisquer a, $b \in A$.*

(iii) Unitária *(ou* com unidade*) se o produto de A possui elemento neutro, ou seja, se existe $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A$ para todo $a \in A$.*

(iv) Álgebra de Lie *se o produto de A satisfaz $a^2 = aa = 0$, ou seja, é anticomutativo, e satisfaz também a identidade de Jacobi, $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$, para quaisquer a, b, $c \in A$.*

A partir de agora, a menos de menção contrária, o termo álgebra significará álgebra associativa.

Exemplo 1.1.3 Considere o espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K. Munido do produto usual de matrizes, $M_n(K)$ é uma álgebra com unidade, que é exatamente a matriz identidade $I_{n\times n}$. Destacaremos nessa álgebra as *matrizes unitárias* E_{ij}, com $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. É fácil ver que as matrizes unitárias formam uma base para $M_n(K)$, donde dim $M_n(K) = n^2$.

Generalizando, se A é uma álgebra, considere o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. Definindo um produto em $M_n(A)$ análogo ao produto usual em $M_n(K)$, teremos uma estrutura de álgebra em $M_n(A)$.

Exemplo 1.1.4 Sejam V um espaço vetorial e $\mathcal{L}(V)$ o espaço vetorial dos operadores lineares sobre V. Munido da composição de funções, $\mathcal{L}(V)$ é uma álgebra com unidade (o operador identidade), chamada de *álgebra dos operadores lineares* sobre V. Para $T, S \in \mathcal{L}(V)$, denotaremos $T \circ S$ simplesmente por TS.

Exemplo 1.1.5 Um corpo K possui naturalmente uma estrutura de espaço vetorial sobre si mesmo. Ademais, se L é uma extensão do corpo K, então L também possui uma estrutura de K-espaço vetorial. É fácil ver que, vistos dessa forma, K e L são K-álgebras, comutativas e com unidade, cujos produtos são exatamente os produtos dos corpos K e L, respectivamente.

Definição 1.1.6 *Seja A uma álgebra.*

(i) Dizemos que um elemento $a \in A$ é nilpotente *se $a^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$. O menor número natural n com tal propriedade é denominado de* índice de nilpotência de a. *Se todos os elementos de A são nilpotentes, diremos que A é* nil. *Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$ para todo $a \in A$, dizemos que A é* nil de índice limitado.

(ii) Dizemos que A é nilpotente *se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} = 0$ para quaisquer a_1, a_2, ..., a_n, $a_{n+1} \in A$. Neste caso, dizemos que o menor n que satisfaz esta condição é o* índice (ou classe) de nilpotência de A.

Teorema 1.1.7 (Nagata-Higman) *Seja A uma álgebra sem unidade sobre um corpo de característica zero. Se A é uma álgebra nil de índice limitado m, então existe $d \in \mathbb{N}$ tal que A é nilpotente de índice $d - 1$. Além disso, $d \leq 2^m - 1$.*

Demonstração. Veja [8], Teorema 8.3.2, página 118. ∎

É fácil ver que toda álgebra nilpotente é nil. Porém, a recíproca não é verdadeira sem a hipótese de que a álgebra seja nil de índice limitado, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.1.8 Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$. Definimos a *álgebra de Grassmann* (ou *álgebra exterior*) de V, denotada por E, como sendo a álgebra com base $\{1,\ e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < ... < i_n,\ n \geq 1\}$ e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2 = 0$ e $e_i e_j = -e_j e_i$ para quaisquer i, $j \in \mathbb{N}$. Observa-se facilmente que se *char* $K = 2$, então E é uma álgebra comutativa.

Considere em E os subespaços vetoriais E_0, gerado por $\{1,\ e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$, e E_1, gerado por $\{e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$. Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. Segue de $e_i e_j = -e_j e_i$ que $(e_{i_1} ... e_{i_m})(e_{j_1} ... e_{j_k}) = (-1)^{mk} (e_{j_1} ... e_{j_k})(e_{i_1} ... e_{i_m})$ para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$. Podemos concluir então que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer b, $c \in E_1$.

Considerando agora E' como sendo a álgebra que tem como base o conjunto $\{e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < ... < i_n,\ n \geq 1\}$, temos que E' não tem unidade e é chamada de *álgebra exterior sem unidade.* E' é uma álgebra nil, mas não é de índice limitado, pois não é nilpotente, já que dado $n \in \mathbb{N}$ tem-se $e_1 e_2 ... e_n \neq 0$.

Observação 1.1.9 Sejam A um espaço vetorial, β uma base de A e $f : \beta \times \beta \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer. Então existe uma única aplicação bilinear $F : A \times A \longrightarrow A$ estendendo f. Com isso concluímos que, para definir uma estrutura de álgebra em A, basta definir o produto para os elementos de uma base. Com o produto definido, para que uma álgebra A seja associativa, é necessário e suficiente que $(v_1v_2)v_3 = v_1(v_2v_3)$ para quaisquer $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \beta$. Essa afirmação é válida porque a aplicação trilinear $h : A \times A \times A \longrightarrow A$, definida por $h(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ é nula se, e somente se, é nula em $\beta \times \beta \times \beta$.

Proposição 1.1.10 *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto gerador de A como espaço vetorial. Então:*

(a) A é associativa se, e somente se, $(uv)w = u(vw)$ para quaisquer $u, v, w \in S$.

(b) A é comutativa se, e somente se, $uv = vu$ para quaisquer $u, v \in S$.

(c) A possui unidade se, e somente se, existe $1 \in A$ tal que $1v = v1 = v$ para todo $v \in S$.

Demonstração. Segue da bilinearidade da multiplicação da álgebra. Os detalhes deixaremos a cargo do leitor. ■

Exemplo 1.1.11 Seja S um conjunto não vazio. Considere o conjunto KS de todas as somas formais do tipo $\sum_{s\in S} \alpha_s s$, onde $\alpha_s \in K$ e $\{s \in S \mid \alpha_s \neq 0\}$ é finito. Aqui, $\alpha_s s$ é um símbolo formal. Diremos que $\sum_{s\in S} \alpha_s s = \sum_{s\in S} \beta_s s$ em KS se $\alpha_s = \beta_s$ para todo $s \in S$. Agora, vamos definir a soma em KS como sendo

$$\sum_{s\in S} \alpha_s s + \sum_{s\in S} \beta_s s = \sum_{s\in S} (\alpha_s + \beta_s)s$$

e o produto por escalar como sendo

$$\lambda \sum_{s\in S} \alpha_s s = \sum_{s\in S} (\lambda\alpha_s)s, \text{ para } \lambda \in K.$$

Assim, munido destas operações, KS é um K-espaço vetorial, chamado de *K-espaço vetorial com base S*. Identificando $s_0 \in S$ com $\sum_{s\in S} \alpha_s s$, onde $\alpha_s = \begin{cases} 1, & \text{se } s = s_0 \\ 0, & \text{se } s \neq s_0 \end{cases}$, temos que S é, de fato, uma base de KS.

Se "$*$" é uma operação definida em S, pela Observação 1.1.9, "$*$" se estende a uma única operação bilinear em KS, que também denotaremos por "$*$". Assim, $(KS, *)$ é uma K-álgebra. Segue da Proposição 1.1.10 que se "$*$" é associativa, comutativa ou possui elemento neutro em S, a álgebra KS também terá tais características.

Um caso particular e importante de construção deste tipo aparece quando temos um grupo G. Adotando a notação multiplicativa em G e considerando, no espaço vetorial KG, o produto induzido pela operação de G, temos que KG é uma álgebra (associativa) unitária, chamada de *álgebra de grupo*. Vamos utilizar bastante no decorrer do nosso trabalho a álgebra KS_n, construída a partir de S_n, o grupo das permutações de n elementos.

Sejam A uma álgebra e a, $b \in A$. Definimos o *comutador de a e b* como sendo $[a,b] = ab - ba$ e o *produto de Jordan de a e b* como sendo $a \circ b = ab + ba$. É fácil ver que, para quaisquer a, b, $c \in A$, vale

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \; . \tag{1.1}$$

Além disso, se usarmos indução e a equação (1.1), podemos mostrar que

$$[a_1 a_2 ... a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1 ... a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} ... a_n \; . \tag{1.2}$$

Definimos também o *comutador de comprimento n* como sendo $[a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = [[a_1, ..., a_{n-1}], a_n]$ para $a_i \in A$, e o *comutador de A*, denotado por $[A, A]$, como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{[x, y] \mid x, y \in A\}$. Note que uma álgebra A é comutativa se, e somente se, $[A, A] = 0$.

Se A é uma álgebra e $a \in A$, definimos $aA = \{ax \mid x \in A\}$ e $Aa = \{xa \mid x \in A\}$.

Definição 1.1.12 *Seja A uma álgebra. Dizemos que um subespaço vetorial B de A é uma* subálgebra *de A se B é multiplicativamente fechado, ou seja, se $b_1 b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$. Dizemos também que um subespaço I de A é um* ideal à esquerda *(respectivamente* à direita*) de A se $ax \in I$ (respectivamente se $xa \in I$) para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$. Se I é um ideal à esquerda e à direita de A simultaneamente, dizemos que I é um* ideal bilateral *de A.*

Observação 1.1.13 Sejam A uma álgebra e W um subespaço de A. É de fácil demonstração que se S e X são subconjuntos geradores de A e W (como subespaços vetoriais), respectivamente, então:

1) W é uma subálgebra de A se, e somente se, $x_1 x_2 \in W$ para quaisquer $x_1, x_2 \in X$.

2) W é um ideal de A se, e somente se, $sx, xs \in W$ para quaisquer $x \in X$ e $s \in S$.

Exemplo 1.1.14 Considere a álgebra exterior E (Exemplo 1.1.8). Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos E_n como sendo o subespaço vetorial de E gerado pelo conjunto

$$\{1, \; e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n\}.$$

Definida assim, E_n é uma subálgebra de E de dimensão 2^n, e é a *álgebra exterior do espaço vetorial com base* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Exemplo 1.1.15 (Centro de uma álgebra) Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \ \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A que chamamos de *centro de A*. Sabemos da Álgebra Linear que, fixado $n \in \mathbb{N}$, as únicas matrizes que comutam com todas as demais são as matrizes escalares. Teremos então que $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in K\}$. Para a álgebra exterior E e *char* $K \neq 2$, temos que $Z(E) = E_0$ (veja o Exemplo 1.1.8).

Exemplo 1.1.16 Sejam K um corpo de característica zero, S_n o grupo das permutações de n elementos e $u_n = \sum_{\sigma\in S_n} \sigma$ e $s_n = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma \sigma$ elementos de KS_n. Considere os seguintes subespaços vetoriais de KS_n:

$$W_1 = \left\{ \sum_{\mu\in S_n} (-1)^\mu \lambda\mu \mid \lambda \in K \right\} = \langle s_n \rangle, \, W_2 = \left\{ \sum_{\mu\in S_n} \lambda_\mu \mu \in KS_n \mid \sum_{\mu\in S_n} (-1)^\mu \lambda_\mu = 0 \right\},$$

$$V_1 = \left\{ \sum_{\mu\in S_n} \lambda\mu \in KS_n \mid \lambda \in K \right\} = \langle u_n \rangle \text{ e } V_2 = \left\{ \sum_{\mu\in S_n} \lambda_\mu \mu \in KS_n \mid \sum_{\mu\in S_n} \lambda_\mu = 0 \right\}.$$

É de fácil percepção que $W_1 \cap W_2 = V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Vejamos que W_1, W_2, V_1 e V_2 são ideais bilaterais da álgebra KS_n. De fato, sendo $\rho \in S_n$, observe que $\rho s_n = s_n \rho = (-1)^\rho s_n$ e que $\rho u_n = u_n \rho = u_n$. Isso mostra que W_1 e V_1 são ideais bilaterais de KS_n. Tomando $\sum_{\mu\in S_n} \lambda_\mu \mu \in V_2$ e $\rho \in S_n$ temos

$$\rho \cdot \left(\sum_{\mu\in S_n} \lambda_\mu \mu \right) = \sum_{\mu\in S_n} \lambda_\mu \rho\mu = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma \qquad \text{e}$$

$$\left(\sum_{\mu\in S_n} \lambda_\mu \mu \right) \cdot \rho = \sum_{\mu\in S_n} \lambda_\mu \mu\rho = \sum_{\theta\in S_n} \alpha_\theta \theta,$$

onde $\sigma = \rho\mu$, $\theta = \mu\rho$, $\alpha_\sigma = \lambda_{\rho^{-1}\sigma}$ e $\alpha_\theta = \lambda_{\theta\rho^{-1}}$. Como $\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma = \sum_{\theta\in S_n} \alpha_\theta = 0$, temos que V_2 é ideal bilateral de KS_n. A demonstração para W_2 é análoga.

Proposição 1.1.17 *Seja $v = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma \in KS_n$, com $\alpha_\sigma \in K$. Considere os elementos $u_n = \sum_{\mu\in S_n} \mu$ e $s_n = \sum_{\mu\in S_n} (-1)^\mu \mu$ de KS_n. Então valem:*

(a) $u_n \in KS_n v \Longleftrightarrow \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \neq 0$.

(b) $s_n \in KS_n v \Longleftrightarrow \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma \neq 0$.

Demonstração. *(a)* Suponha inicialmente que $u_n \in KS_n v$ e considere V_1 e V_2 os ideais bilaterais vistos no Exemplo 1.1.16. Se $\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma = 0$, teremos que $v \in V_2$ e assim $KS_n v \subseteq V_2$, contradizendo o fato de que $u_n \notin V_2$. Portanto, $\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \neq 0$.

Reciprocamente, suponha que $\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \neq 0$. Como

$$\begin{aligned} u_n v &= \left(\sum_{\mu \in S_n} \mu\right)\left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right) = \left[\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \left(\sum_{\mu \in S_n} \mu\right)\sigma\right] \\ &= \left[\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \left(\sum_{\mu \in S_n} \mu\sigma\right)\right] = \left[\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \left(\sum_{\tau \in S_n} \tau\right)\right] \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma\right) u_n = \lambda u_n, \end{aligned}$$

onde $\tau = \mu\sigma$, temos que $u_n = \lambda^{-1}\lambda u_n = \lambda^{-1} u_n v \in KS_n v$.

(b) Considere os ideais bilaterais W_1 e W_2 vistos no Exemplo 1.1.16 e suponha que $s_n \in KS_n v$. Se $\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma = 0$, teremos que $v \in W_2$ e assim $KS_n v \subseteq W_2$, o que é uma contradição, pois observe que $s_n \notin W_2$. Portanto, teremos que $\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma \neq 0$. Reciprocamente, suponha que $\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma \neq 0$. Como

$$\begin{aligned} s_n v &= \left(\sum_{\mu \in S_n} (-1)^\mu \mu\right)\left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right) = \left[\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \left(\sum_{\mu \in S_n} \mu\right)(-1)^\mu \sigma\right] \\ &= \left[\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \left(\sum_{\mu \in S_n} (-1)^\sigma (-1)^\sigma (-1)^\mu \mu\sigma\right)\right] \\ &= \left[\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma \left(\sum_{\mu \in S_n} (-1)^{\mu\sigma} \mu\sigma\right)\right] = \left[\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma \left(\sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau \tau\right)\right] \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma\right) s_n = \lambda s_n, \end{aligned}$$

onde $\tau = \mu\sigma$, temos que $s_n = \lambda^{-1}\lambda s_n = \lambda^{-1} s_n v \in KS_n v$. ∎

Corolário 1.1.18 *Seja* $v = \mathrm{Id} - (n \;\; n-1 \;\; \ldots \;\; 2 \;\; 1) \in KS_n$. *Então* $u_n \notin KS_n v$ *e, se* n *for ímpar,* $s_n \notin KS_n v$.

Definição 1.1.19 *Sejam* A *uma álgebra e* S *um subconjunto não vazio de* A. *Definimos a* subálgebra de A gerada por S, *denotada por* $K\langle S\rangle$, *como sendo a interseção de todas as subálgebras de* A *que contêm* S *(e* 1_A, *no caso de* A *possuir unidade). Definimos também o* ideal de A gerado por S *como sendo a interseção de todos os ideais de* A *que contêm* S.

Podemos mostrar que a subálgebra de A gerada por S coincide exatamente com o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{s_1 s_2 \ldots s_k \mid k \in \mathbb{N},\ s_i \in S\}$ (no caso de A possuir unidade, acrescentamos 1_A a este conjunto). Além disso, o ideal de A gerado por S coincide com o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{asb \mid s \in S,\ a, b \in A\}$.

Definição 1.1.20 *Sejam* A *e* B *álgebras. Uma transformação linear* $\varphi : A \longrightarrow B$ *é um* homomorfismo de álgebras *se* $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ *para quaisquer* $x, y \in A$ *e, caso* A *e* B *sejam unitárias,* $\varphi(1_A) = 1_B$.

Chamamos φ de *mergulho* (ou *monomorfismo*) se φ é um homomorfismo injetivo, e de *isomorfismo* se φ é um homomorfismo bijetivo. Dizemos que φ é um *endomorfismo* de A se φ é um homomorfismo de A em A e que é um *automorfismo* de A se φ é um endomorfismo bijetivo de A.

Denotamos por $End\ A$ e $Aut\ A$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A. Quando existe um isomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Teremos que o conjunto $ker\ \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$, que chamamos de *núcleo de* φ, é um ideal de A, e o conjunto $Im\ \varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$, que chamamos de *imagem de* φ, é uma subálgebra de B.

Se A é uma álgebra e I é um ideal de A, considere o conjunto quociente A/I, cujos elementos são da forma $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$ com $a \in A$ (classes laterais de I). Definindo operações de soma e produto por escalar em A/I por $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$ e $\lambda(a+I) = (\lambda a)+I$, temos o *espaço vetorial quociente* A/I. Vamos definir agora a álgebra quociente A/I.

Definição 1.1.21 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Definimos a* álgebra quociente de A por I *como sendo o espaço vetorial quociente A/I munido do produto definido por $(a + I)(b + I) = ab + I$ para $a, b \in A$.*

Note que o produto de A/I está bem definido, pois não depende da escolha dos representantes das classes laterais. Denotaremos a classe lateral $a + I$ por $\overline{a}$. Sejam $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras e $I \subseteq ker\ \varphi$ um ideal de A. Então a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \overline{\varphi}: & A/I & \longrightarrow & B \\ & \overline{a} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a) \end{array}$$

é bem definida e é um homomorfismo de álgebras. Se $I = ker\ \varphi$, então $\overline{\varphi}$ é injetora e consequentemente $A/ker\ \varphi \simeq Im\ \varphi$. Esta última afirmação é conhecida como Teorema Fundamental dos Homomorfismos.

Exemplo 1.1.22 Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Temos que a aplicação $\pi : A \longrightarrow A/I$, definida por $\pi(a) = \overline{a}$, é um homomorfismo sobrejetivo (ou epimorfismo) de álgebras chamado de *projeção canônica*.

Exemplo 1.1.23 Seja A uma álgebra unitária. A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & K & \longrightarrow & A \\ & \lambda & \longmapsto & \varphi(\lambda) = \lambda 1_A \end{array}$$

é um mergulho de K em A. Com isso, K é isomorfo à $Im\ \varphi = \{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$, donde $Im\ \varphi$ é um corpo. É daí que fazemos a identificação natural entre K e $\{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$.

Seja A uma álgebra unitária. Dizemos que um elemento $a \in A$ é *inversível* se existe um elemento $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Note que se $a \in A$ é inversível, então seu inverso é único. Ademais, o conjunto $U(A) = \{a \in A \mid a \text{ é inversível}\}$ é multiplicativamente fechado. Observe que $U(A)$, munido do produto de A, é um grupo, chamado de *grupo multiplicativo de A*. É fácil ver que se $a \in U(A)$ e $\lambda \in K - \{0\}$, então $\lambda a \in U(A)$.

Exemplo 1.1.24 Sendo $a \in U(A)$, a aplicação $\psi_a : A \longrightarrow A$, definida por $\psi_a(x) = a^{-1}xa$, é um automorfismo de A, conhecido como *automorfismo interno determinado por a*.

Exemplo 1.1.25 Seja V um K-espaço vetorial de dimensão qualquer. Temos que $U(\mathcal{L}(V)) = \{T \in \mathcal{L}(V) \mid T \text{ é inversível}\}$. Este grupo é chamado de *grupo linear sobre V* e vamos denotá-lo por $GL(V)$.

Para $n \in \mathbb{N}$, temos que $U(M_n(K)) = \{X \in M_n(K) \mid det\ X \neq 0\}$. Este grupo é chamado de *grupo linear de grau n sobre K* e vamos denotá-lo por $GL_n(K)$. Observe que se dim $V = n$, então $GL(V) \simeq GL_n(K)$.

1.2 Identidades polinomiais

Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ um conjunto enumerável de símbolos que chamaremos de *variáveis*. Definimos uma *palavra* em X como sendo uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x_{i_j} \in X$ (para $n = 0$ temos a *palavra vazia*). Dizemos que n é o tamanho da palavra e ainda que $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} = x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}$ se $n = m$ e $x_{i_1} = x_{j_1}$, $x_{i_2} = x_{j_2}$, ..., $x_{i_n} = x_{j_n}$. Denotaremos por 1 a palavra vazia, $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X e $S_0(X)$ o conjunto $S(X) - \{1\}$.

Vamos considerar agora $K\langle X\rangle$ como sendo o K-espaço vetorial com base $S(X)$. Assim, os elementos de $K\langle X\rangle$, chamados de *polinômios*, são somas (formais) de termos (ou monômios), que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X.

Consideremos agora em $K\langle X\rangle$ a multiplicação definida por

$$(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}.$$

Munido deste produto, $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa com unidade, a qual é a palavra vazia 1. Observe que o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por $S_0(X)$, o qual denotaremos por $K_0\langle X\rangle$, é uma subálgebra (sem unidade) de $K\langle X\rangle$. Observe também que $K\langle X\rangle = K_0\langle X\rangle \oplus \langle 1\rangle$.

Definição 1.2.1 *Dizemos que uma álgebra F é* livre *(na classe das álgebras associativas) se existe um conjunto $S \subseteq F$ tal que S gera F (como álgebra) e, para cada álgebra A e cada aplicação $h : S \longrightarrow A$, existe um único homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow A$ estendendo h, ou seja, $\varphi|_S = h$. Neste caso, dizemos que F* é livremente gerada por *S.*

Sejam A uma álgebra e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação arbitrária, de modo que $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Considerando a aplicação linear $\varphi_h : K_0\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_n}$, temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único que satisfaz $\varphi_h|_X = h$. Dizemos então que $K_0\langle X\rangle$ é uma *álgebra livre (sem unidade) na classe das álgebras associativas, livremente gerada por X*. Dado $f = f(x_1, ..., x_n) \in K_0\langle X\rangle$, denotemos por $f(a_1, ..., a_n)$ a imagem de f por φ_h. Note que $f(a_1, ..., a_n)$ é um elemento de A obtido pela substituição de x_i por a_i em f.

Se A é unitária, analogamente ao que foi feito anteriormente e acrescentando a condição de que $\varphi_h(1) = 1_A$, teremos que $\varphi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras (unitárias) e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. Assim, $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras unitárias, e livremente gerada por X.

No nosso trabalho iremos lidar com álgebras não necessariamente unitárias.

Observação 1.2.2 Observe que se $f = f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle - K_0\langle X\rangle$ (ou seja, se f tem termo constante não nulo) a avaliação $f(a_1, a_2, ...a_n)$, para $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, só faz sentido se A for unitária.

Exemplo 1.2.3 Considere a álgebra polinomial $K[x]$. Temos que $K[x]$ é unitária e gerada pelo conjunto $X = \{x\}$. Sendo A uma álgebra unitária e $a \in A$, considere a aplicação $h : X \longrightarrow A$ tal que $h(x) = a$. Considere agora o homomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a & : & K[x] & \longrightarrow & A \\ & & f(x) & \longmapsto & \varphi_a(f(x)) = f(a) \end{array}.$$

Como $\varphi_a(x) = a$, temos que $\varphi_a|_X = h$. É de fácil verificação que φ_a é o único homomorfismo de álgebras de $K[x]$ em A estendendo h, e portanto $K[x]$ é uma álgebra livremente gerada por $\{x\}$.

A definição a seguir é de extrema importância para nosso trabalho, pois é o ponto de partida em qualquer estudo na área de PI-álgebras.

Definição 1.2.4 *Sejam A uma álgebra e $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K_0\langle X\rangle$. Diremos que f (ou a expressão $f = 0$) é* identidade polinomial de A *se $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Se A possuir uma identidade polinomial não nula, diremos que A é uma* PI-álgebra.

Não é difícil ver que um polinômio $f \in K_0\langle X\rangle$ é identidade polinomial de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K_0\langle X\rangle$ em A. Deixaremos os detalhes da verificação para o leitor.

Observação 1.2.5 É interessante observar que se A é unitária e $f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ é identidade polinomial de A (a definição é a mesma que a Definição 1.2.4), então

$$f(x_1, ..., x_n) = \lambda 1 + f'(x_1, ..., x_n)$$

com $\lambda \in K$ e $f'(x_1, ..., x_n) \in K_0\langle X\rangle$, e $0 = f(0, ..., 0) = \lambda 1_A + f'(0, ..., 0)$. Como $f'(0, ..., 0) = 0$, temos $\lambda = 0$ e daí $f(x_1, ..., x_n) \in K_0\langle X\rangle$.

Exemplo 1.2.6 *Se A é uma álgebra nilpotente de índice n, então A é uma PI-álgebra, pois $f(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = x_1 x_2 ... x_{n+1}$ é identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.2.7 Seja E a álgebra de Grassmann apresentada no Exemplo 1.1.8. Temos que $E = E_0 \oplus E_1$, com $Z(E) = E_0$. Note que $[E, E] \subseteq E_0$, e assim E satisfaz a identidade polinomial $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] = 0$.

Exemplo 1.2.8 Considere a subálgebra $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}$ de $M_n(K)$. Sejam $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$. Note que, como

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

segue que o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2]x_3$ é identidade polinomial de M.

Definição 1.2.9 *Considere os seguintes polinômios*

$$u_n = u_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \qquad e$$

$$s_n = s_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}.$$

Dizemos que u_n *é o* polinômio unitário de grau n *e que* s_n *é o* polinômio standard de grau n.

Exemplo 1.2.10 Considere a álgebra das matrizes $M_n(K)$ (ver Exemplo 1.1.3). O polinômio standard de grau $2n$, $s_{2n}(x_1, x_2, ..., x_{2n})$, é identidade polinomial para $M_n(K)$. Esse resultado é conhecido como Teorema de Amitsur-Levitzki e foi demonstrado primeiramente em [2], em 1950. Posteriormente, outras demonstrações foram dadas (veja [21], [33], [28] e [32]).

Definição 1.2.11 *Sejam* $y_1, y_2, ..., y_s$ *variáveis fixas. Definimos*

$$s_n(x_1, ..., x_k \overset{y_1}{\vee} x_{k+1}, ..., x_l \overset{y_s}{\vee} x_{l+1}, ..., x_n)$$

como sendo o polinômio $\sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(k)} y_1 x_{\sigma(k+1)} ... x_{\sigma(l)} y_s x_{\sigma(l+1)} ... x_{\sigma(n)}$.

Lema 1.2.12 *Sejam* $s_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ *o polinômio standard e* $a_1, a_2, ..., a_n$ *elementos de uma álgebra tais que* a_1 *comuta com* $a_2, a_3, ..., a_n$. *Então*

$$s_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{cases} 0, & se\ n\ é\ par \\ s_{n-1}(a_2, ..., a_n) \cdot a_1, & se\ n\ é\ ímpar \end{cases}.$$

Demonstração. Seguindo a notação da Definição 1.2.11, note que

$$\begin{aligned} s_n(a_1, a_2, ..., a_n) &= a_1 \cdot (s_{n-1}(a_2, ..., a_n)) - s_{n-1}(a_2 \overset{a_1}{\vee} a_3, ..., a_n) + ... \\ &\quad + (-1)^i s_{n-1}(a_2, ..., a_{i-1} \overset{a_1}{\vee} a_i, ..., a_n) + ... \\ &\quad + (-1)^n s_{n-1}(a_2, ..., a_{n-1} \overset{a_1}{\vee} a_n) + (-1)^{n+1} s_{n-1}(a_2, ..., a_n) \cdot a_1. \end{aligned}$$

Se a_1 comuta com $a_2, a_3, ..., a_n$, então cada termo da soma acima será igual a $s_{n-1}(a_2, ..., a_n) \cdot a_1$, a menos do sinal. Assim, para n par, temos que todos os termos se cancelam dois a dois e, para n ímpar, resta somente um dos termos. ∎

Definição 1.2.13 *Seja* I *um ideal de* $K_0\langle X\rangle$. *Dizemos que* I *é um* T-ideal de $K_0\langle X\rangle$ *se* I *é invariante por todos os endomorfismos de* $K_0\langle X\rangle$, *ou seja, se* $\psi(I) \subseteq I$ *para todo* $\psi \in End\ K_0\langle X\rangle$.

Proposição 1.2.14 *Seja I um ideal de $K_0\langle X\rangle$. Então I é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$ se, e somente se, $f(g_1,...,g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1,...,x_n) \in I$ e $g_1,...,g_n \in K_0\langle X\rangle$.*

Demonstração. Suponha que I é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$. Sejam $f(x_1,x_2,...,x_n) \in I$ e $g_1,g_2,...,g_n \in K_0\langle X\rangle$. Tome $\varphi : K_0\langle X\rangle \longrightarrow K_0\langle X\rangle$ o homomorfismo de álgebras tal que $\varphi(x_i) = g_i$, para $i = 1,2,...,n$, e $\varphi(x_j) = x_j$, para todo $j > n$. Como I é φ-invariante, temos que $f(g_1,...,g_n) = f(\varphi(x_1),...,\varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1,...,x_n)) \in I$.

Reciprocamente, sejam I um ideal de $K_0\langle X\rangle$ com a propriedade apresentada no enunciado e ψ um endomorfismo de $K_0\langle X\rangle$. Se $f(x_1,...,x_n) \in I$, então $\psi(f(x_1,...,x_n)) = f(\psi(x_1),...,\psi(x_n)) = f(g_1,...,g_n) \in I$. Logo, I é ψ-invariante, e portanto I é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$. ■

Proposição 1.2.15 *Seja A uma álgebra e denote por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A. Então $T(A)$ é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$. Por outro lado, se I é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$, então $T(B) = I$ para alguma álgebra B.*

Demonstração. Sejam $f(x_1,...,x_n) \in T(A)$ e ψ um endomorfismo de $K_0\langle X\rangle$. Considere $g(x_1,...,x_m) = \psi(f)$ e suponha que $g(x_1,...,x_m) \notin T(A)$. Assim, deve existir um homomorfismo $h : K_0\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $h(g) \neq 0$. Tomando o homomorfismo $h \circ \psi : K_0\langle X\rangle \longrightarrow A$, teremos que $(h \circ \psi)(f) = h(\psi(f)) = h(g) \neq 0$, uma contradição ao fato de $f \in T(A)$. Portanto, $T(A)$ é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$.

Agora, seja I um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$. Tome $B = K_0\langle X\rangle/I$ e $f(x_1,...,x_n) \in T(B)$. Segue que $\overline{f(x_1,...,x_n)} = f(\overline{x_1},...,\overline{x_n}) = \overline{0}$, e daí $f \in I$, donde $T(B) \subseteq I$. Por outro lado, sejam $g(x_1,...,x_m) \in I$ e $\overline{b_1},...,\overline{b_m} \in B$. Como I é um T-ideal, $g(b_1,...,b_m) \in I$, e assim $g\left(\overline{b_1},...,\overline{b_m}\right) = \overline{g(b_1,...,b_m)} = \overline{0}$. Segue que $g \in T(B)$ e assim $I \subseteq T(B)$, o que conclui a demonstração. ■

De posse desse resultado, diremos que o conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais de A é *o T-ideal de identidades de A*. Além disso, todo T-ideal de $K_0\langle X\rangle$ é um T-ideal de identidades.

Citando algumas propriedades de T-ideais, temos que a soma, o produto e a interseção de uma família de T-ideais de $K_0\langle X\rangle$ é também um T-ideal.

Definição 1.2.16 *Seja $Q \subseteq K_0\langle X\rangle$. Chamaremos de* T-ideal de $K_0\langle X\rangle$ gerado por *Q o T-ideal obtido pela interseção de todos os T-ideais de $K_0\langle X\rangle$ que contêm Q, e o denotaremos por $\langle Q\rangle^T$.*

Nas condições da definição anterior e fazendo $I = \langle Q\rangle^T$, chamamos Q de *conjunto gerador do T-ideal* I, e, sendo A uma álgebra tal que $T(A) = I$, Q também é chamado de *base das identidades de* A. Em 1987, A. Kemer (veja [19]) provou que se A é uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero, então $T(A)$ é finitamente gerado (ou possui base finita). Como trabalharemos sempre com essas hipóteses, ao considerarmos Q como um conjunto gerador de um T-ideal I, tal conjunto será finito.

Observação 1.2.17 As definições de T-ideal e T-ideal gerado por um conjunto em $K\langle X\rangle$ são análogas às apresentadas para $K_0\langle X\rangle$, assim como as propriedades já citadas. Observe também que se A possui unidade, $T(A)$ é um T-ideal em $K\langle X\rangle$.

Uma grande motivação dos estudos em PI-teoria é encontrar os polinômios que geram as identidades de uma álgebra. A seguir, exemplos de descrições de alguns T-ideais de identidades.

Exemplo 1.2.18 Se A é uma álgebra comutativa e unitária sobre um corpo K infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$.

Exemplo 1.2.19 Considere a álgebra exterior E sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T$ (vide [22] e [10]).

Exemplo 1.2.20 Razmyslov [27] obteve em 1973 um conjunto gerador com 9 identidades para $T(M_2(K))$, com *char* $K = 0$. Posteriormente, em [7] Drensky melhorou o resultado de Razmyslov mostrando que $T(M_2(K)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3]\rangle^T$. Uma generalização do resultado de Drensky para K infinito de característica diferente de 2 e 3 foi obtida por Koshlukov [20] em 2001. Para *char* $K = 3$, foi provado em [5] que é necessário mais uma identidade para gerar $T(M_2(K))$. Para o caso de *char* $K = 2$, o problema ainda está em aberto.

1.3 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Nesta seção apresentaremos os conceitos de polinômios multi-homogêneos e multilineares, assim como alguns resultados a respeito de tais polinômios que serão importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Nesta seção, denotaremos por $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ um conjunto enumerável de variáveis.

Definição 1.3.1 *Sejam $m \in K\langle X\rangle$ um monômio e $f \in K\langle X\rangle$ um polinômio.*

(i) Dizemos que o número de vezes que x_i aparece no monômio m é o grau de m em x_i, *e o denotamos por $deg_{x_i} m$.*

(ii) O polinômio f é dito homogêneo em x_i *se o grau de x_i em todos os monômios de f é o mesmo. Se f é homogêneo em todas as suas variáveis, dizemos que f é* multi-homogêneo.

(iii) O monômio m é dito linear em x_i *se $deg_{x_i} m = 1$.*

(iv) Chamamos o polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ de linear em x_i *se todos os seus monômios são lineares em x_i. Se $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é multi-homogêneo e linear em todas as suas n variáveis, diremos que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é* multilinear (de grau n).

Exemplo 1.3.2 Os polinômios $[x_1, x_2]$, u_n, s_n são multilineares. Porém, o polinômio $x_1 + x_2x_1$ não o é, pois não é multi-homogêneo. Note que $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ é multilinear se, e somente se,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)},$$

onde $\lambda_\sigma \in K$.

Fixadas as variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, denotaremos por P_n o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ de todos os polinômios multilineares nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Observe que $\dim P_n = n!$. Agora, considere a transformação linear

$$\begin{array}{rcccl} T & : & KS_n & \longrightarrow & P_n \\ & & \sigma & \longmapsto & T(\sigma) = x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)} \end{array}.$$

Note que T é um isomorfismo de espaços vetoriais, e assim temos uma correspondência biunívoca entre KS_n e P_n. Note que as imagens dos elementos u_n e s_n de KS_n (Exemplo 1.1.16) pela T são, respectivamente, o polinômio unitário e o polinômio standard de grau n. Diante desse isomorfismo, a partir de agora podemos tratar elementos de KS_n como polinômios em P_n e vice-versa.

Proposição 1.3.3 *Sejam A uma álgebra, $\beta = \{b_i \mid i \in \Lambda\}$ uma base de A e f um polinômio multilinear de grau n. Então $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T(A)$ se, e somente se, $f(b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_n}) = 0$ para quaisquer $b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_n} \in \beta$.*

Demonstração. Sendo $f(x_1, ..., x_n) \in P_n$, note que f induz uma aplicação n-linear de A^n em A, e assim o resultado segue como uma generalização da Observação 1.1.9. ■

Exemplo 1.3.4 Considere a subálgebra da álgebra exterior E com base $\{e_1, e_2, e_1e_2\}$. Note que $s_2(x_1, x_2)$ não é identidade polinomial para essa subálgebra, pois $s_2(e_1, e_2) = 2e_1e_2$. Agora, note que $s_2(x_1 \overset{y}{\vee} x_2) = x_1yx_2 - x_2yx_1$ é identidade polinomial para essa subálgebra, pois $s_2(x_1 \overset{y}{\vee} x_2)$ é multilinear de grau 3 e o produto de quaisquer 3 elementos de $\{e_1, e_2, e_1e_2\}$ é igual a zero.

Teorema 1.3.5 *Se $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma identidade polinomial (não nula) de uma álgebra A, então existe $g(x_1, x_2, ..., x_d)$ multilinear com $d \leq n$ que é identidade polinomial de A. Em outras palavras, se A é uma PI-álgebra, então A satisfaz uma identidade multilinear.*

Demonstração. Ver [14], Teorema 1.3.7, página 7. ■

Teorema 1.3.6 *Sejam K um corpo infinito e I um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Então I é gerado pelos seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 1.3.2 em [14], página 6. ■

Teorema 1.3.7 *Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então I é gerado pelos seus polinômios multilineares.*

Demonstração. Ver [14], Corolário 1.3.9, página 9. ■

Teorema 1.3.8 *Sejam I um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$, com char $K = 0$ e Q um conjunto de geradores multilineares de I. Então o conjunto*

$$\{a \cdot f(M_1, ..., M_r) \cdot b \mid f \in Q,\ a, b, M_1, ..., M_r \text{ monômios, } a, b \in K\langle X\rangle,\ M_i \in K_0\langle X\rangle\}$$

gera I como espaço vetorial.

Demonstração. Primeiramente, vamos chamar de Q_1 o conjunto dado no enunciado. Não é difícil ver que o subespaço J gerado por Q_1 é um T-ideal e contém Q. Logo, $I = \langle Q\rangle^T \subseteq J$. Por outro lado, $Q_1 \subseteq \langle Q\rangle^T$ e assim $J \subseteq \langle Q\rangle^T = I$. ■

Exemplo 1.3.9 Seja M a álgebra vista no Exemplo 1.2.8. Agora, considere o polinômio $f(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_2 x_1$. Tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, teremos

$$f(A, B) = \lambda_1 AB + \lambda_2 BA = \lambda_1 B \neq 0,$$

para $\lambda_1 \neq 0$ e

$$f(B, A) = \lambda_1 BA + \lambda_2 AB = \lambda_2 B \neq 0,$$

para $\lambda_2 \neq 0$. Segue que M não possui nenhuma identidade multilinear de grau 2. Conforme visto no Exemplo 1.2.8, $g(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2]x_3 = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3$ é uma identidade multilinear de grau 3 de M.

Sendo I um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$, claramente $\langle I \cap P_n\rangle^T \subseteq I$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Apesar da inclusão contrária não ser válida em geral, é fácil ver que I e $\langle I \cap P_n\rangle^T$ possuem os mesmos polinômios multilineares de grau n. Como consequência da proposição a seguir, teremos que se I é gerado por polinômios multilineares de grau no máximo d, então, para $n \geq d$, I e $\langle I \cap P_n\rangle^T$ possuirão os mesmos polinômios multilineares de grau maior ou igual a n.

Proposição 1.3.10 *Seja I um T-ideal gerado por um conjunto de polinômios multilineares com grau no máximo d. Então, para $n \geq d$, vale*

$$I \cap P_{n+1} = \langle I \cap P_n\rangle^T \cap P_{n+1}.$$

Demonstração. É imediato que $\langle I \cap P_n\rangle^T \cap P_{n+1} \subseteq I \cap P_{n+1}$. Pelo Teorema 1.3.8, segue que um polinômio em $I \cap P_{n+1}$ é uma combinação linear de polinômios multilineares do tipo $a \cdot f(M_1, M_2, ..., M_r) \cdot b$, onde $r \leq d$, $f(x_1, x_2, ..., x_r)$ é um dos polinômios que geram I e $a, b, M_1, ..., M_r$ são monômios. Assim, basta-nos mostrar que $a \cdot f(M_1, M_2, ..., M_r) \cdot b$ está em $\langle I \cap P_n\rangle^T \cap P_{n+1}$. Se $a \neq 1$, podemos supor $a = x_{n+1}a'$, pois T-ideais são invariantes por permutações de variáveis. Então $a' \cdot f(M_1, M_2, ..., M_r) \cdot b \in I \cap P_n$ e assim, $x_{n+1}a' \cdot f(M_1, M_2, ..., M_r) \cdot b \in \langle I \cap P_n\rangle^T \cap P_{n+1}$. Analogamente, teremos o resultado para $b \neq 1$. Agora, suponha que $a = b = 1$. Por $f(M_1, ..., M_r)$ ser multilinear de grau $n + 1 > d \geq r$, temos que pelo menos um dos monômios M_i tem grau maior que 1. Suponha, sem perda de generalidade, que $M_1 = M_1' x_{n+1}$. Então $f(M_1', ..., M_r) \in I \cap P_n$ e, assim, $f(M_1' x_{n+1}, ..., M_r) \in \langle I \cap P_n\rangle^T \cap P_{n+1}$. ■

1.4 Módulos e representações de grupos

A menos que haja menção contrária, todas as álgebras e espaços vetoriais considerados nesta seção serão sobre um corpo K.

Definição 1.4.1 *Sejam A uma álgebra unitária e M um espaço vetorial. Considere o seguinte produto*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a,m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

satisfazendo as condições:

(i) $(a_1 + a_2) \cdot m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$

(ii) $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$

(iii) $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$

(iv) $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$

(v) $1_A \cdot m = m$

*para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in K$. Dizemos que M, munido desse produto, é um A-*módulo *(ou* módulo sobre *A).*

Observe que, pelos itens *(i)*, *(ii)* e *(iii)* da definição anterior, temos que o produto "$\cdot$" é uma aplicação bilinear. De agora em diante, vamos considerar todos os módulos como sendo de dimensão finita (como espaços vetoriais).

Exemplo 1.4.2 Seja A uma álgebra unitária. Pelo que acabamos de observar, A é um A-módulo, cujo produto é a sua multiplicação. Isso só é válido porque estamos trabalhando com álgebras associativas, pois se A não for associativa, não teremos o item *(iv)* da Definição 1.4.1 satisfeito.

Exemplo 1.4.3 Na definição de módulo, M é um K-espaço vetorial. Mas se em particular A for um corpo (uma extensão de K), então M será também um A-espaço vetorial.

Exemplo 1.4.4 Sejam G um grupo, V um espaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ um homomorfismo de grupos, onde $\varphi(g) = \varphi_g$. Considere o seguinte produto

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & KG \times V & \longrightarrow & V \\ & \left(\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right), v\right) & \longmapsto & \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \cdot v = \sum_{g \in G} \lambda_g \varphi_g(v) \end{array}.$$

Note que V, munido desse produto, é um KG-módulo (ou simplesmente, G-módulo), onde as cinco condições seguem da hipótese de que φ é um homomorfismo de grupos. Deixaremos os detalhes a cargo do leitor.

Definição 1.4.5 *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Definimos um* submódulo *(ou A-*submódulo*) N de M como sendo um subespaço vetorial N de M tal que $a \cdot n \in N$ para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$. Se os únicos submódulos de M são $\{0\}$ e M, então M é dito* irredutível *(ou* simples*). Dizemos que um submódulo N de M é* minimal *se não existe submódulo N_1 de M satisfazendo $0 \neq N_1 \subsetneq N$ (ou seja, se N, visto como módulo, é irredutível).*

Exemplo 1.4.6 Seja A uma álgebra. Considerando A como A-módulo, segue diretamente da definição que os submódulos de A são exatamente os ideais à esquerda da álgebra A.

Exemplo 1.4.7 Sejam M um módulo sobre uma álgebra A e $m \in M$. Note que o conjunto $A \cdot m = \{a \cdot m \mid a \in A\}$ é um submódulo de M.

Exemplo 1.4.8 Considere a álgebra de grupo KS_n, o subespaço vetorial P_n de $K\langle X\rangle$ dos polinômios multilineares de grau n e o seguinte produto bilinear

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & KS_n \times P_n & \longrightarrow & P_n \\ & (\alpha, f) & \longmapsto & \alpha \cdot f \end{array}$$

satisfazendo $\sigma \cdot (x_{i_1}...x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)}...x_{\sigma(i_n)}$, para quaisquer $\sigma \in S_n$ e $x_{i_1}...x_{i_n}$ monômio multilinear em P_n. Munido desse produto, P_n é um KS_n-módulo (ou simplesmente um S_n-módulo). Além disso, note que $\sigma \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$, e com isso $P_n \cap T(A)$ é um submódulo de P_n.

A seguir, enunciaremos algumas propriedades básicas de A-módulos.

Observação 1.4.9 Seja M um A-módulo.

(a) Se N é um submódulo de M, o espaço quociente M/N é um A-módulo, munido do produto definido por $a \cdot \overline{m} = \overline{a \cdot m}$, para $a \in A$ e $m \in M$. Chamamos M/N de *módulo quociente de M por N*.

(b) A soma e a interseção de uma família de submódulos de M é também um submódulo de M.

Definição 1.4.10 *Sejam M_1 e M_2 módulos sobre uma álgebra A. Definimos um* homomorfismo de A-módulos *como sendo uma transformação linear $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ tal que $\varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m)$ para quaisquer $a \in A$ e $m \in M_1$. Se φ é bijetivo, dizemos que φ é um* isomorfismo de A-módulos.

Exemplo 1.4.11 *Sejam M um A-módulo e $\gamma \in K$. Considere a seguinte transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} \gamma \mathrm{Id}_M : & M & \longrightarrow & M \\ & m & \longmapsto & \gamma \mathrm{Id}_M(m) = \gamma m \end{array}.$$

Tomando $a \in A$ e $m \in M$ arbitrários, teremos $\gamma \mathrm{Id}_M(a \cdot m) = \gamma(a \cdot m) = a \cdot (\gamma m) = a \cdot (\gamma \mathrm{Id}_M(m))$, e assim $\gamma \mathrm{Id}_M$ é um homomorfismo de A-módulos.

Seja M um módulo sobre uma álgebra A. Definimos um *endomorfismo do A-módulo M* como sendo um homomorfismo (de A-módulos) de M em M e denotaremos o conjunto de todos os endomorfismos do A-módulo M por $End_A(M)$. Nas condições do exemplo anterior, $\gamma \mathrm{Id}_M \in End_A(M)$.

Exemplo 1.4.12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathcal{L}(V)$ a álgebra das transformações lineares de V em V (ver Exemplo 1.1.4). Definindo o produto $\cdot : \mathcal{L}(V) \times V \longrightarrow V$ tal que $T \cdot v = T(v)$ para quaisquer $T \in \mathcal{L}(V)$ e $v \in V$, temos que V é um módulo sobre $\mathcal{L}(V)$. Observe agora que se f é um endomorfismo do $\mathcal{L}(V)$-módulo V, temos

$$f(T(v)) = f(T \cdot v) = T \cdot f(v) = T(f(v))$$

para quaisquer $T \in \mathcal{L}(V)$ e $v \in V$, e assim f é um múltiplo escalar da transformação identidade. Portanto, $End_{\mathcal{L}(V)}(V) = \{\lambda \mathrm{Id}_V \mid \lambda \in K\}$.

Vimos na seção 1.3 que

$$\begin{array}{rcccl} T & : & KS_n & \longrightarrow & P_n \\ & & \sigma & \longmapsto & T(\sigma) = x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais. Mais ainda, T, nas condições já apresentadas anteriormente, é um homomorfismo de S_n-módulos. Sendo assim, KS_n e P_n são S_n-módulos isomorfos. Com isso, podemos reescrever o Corolário 1.1.18 como

Corolário 1.4.13 *Seja $v = [x_1 x_2 \ldots x_{n-1}, x_n]$. Então $u_n(x_1, \ldots, x_n) \notin KS_n v$ e, se n for ímpar, então $s_n(x_1, \ldots, x_n) \notin KS_n v$.*

Proposição 1.4.14 *Sejam M um A-módulo de dimensão finita e M_1, M_2, ..., M_k, N_1, N_2, ..., N_m, J submódulos minimais de M. Então:*

(a) Se $J \subseteq N_1 + N_2 + \ldots + N_m$, então $J \simeq N_j$ (como A-módulos) para algum $j = 1, 2, \ldots, m$.

(b) Se N_1, N_2, ..., N_m são 2 a 2 não isomorfos (como A-módulos), então a soma $N_1 + N_2 + ... + N_m$ é direta.

(c) Se $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_k = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$, então $k = m$ e M_i e N_i são isomorfos para todo $i = 1, 2, ..., k$ (reodernando os N_i's, se necessário).

Demonstração. *(a)* Se existe algum N_i, digamos N_1, tal que $N_1 \cap (N_2 + ... + N_m) \neq 0$, então, pela minimalidade de N_1, devemos ter $N_1 \subseteq (N_2 + ... + N_m)$, e daí

$$N_1 + N_2 + ... + N_m = N_2 + ... + N_m.$$

Com isso, podemos supor que a soma é direta.

Agora, seja $n \in J$. Então, existem únicos $n_1, n_2, ..., n_m$ tais que $n = n_1 + ... + n_m$ e $n_j \in N_j$, com $1 \leq j \leq m$. Considere, para cada $j = 1, 2, ..., m$, o homomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{cccc} \varphi_j & : & J & \longrightarrow & N_j \\ & & n & \longmapsto & \varphi_j(n) = n_j \end{array}.$$

Como $J \neq \{0\}$, deve existir algum $j \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que φ_j é não nulo. Segue da minimalidade de J e N_j que $ker\ \varphi_j = \{0\}$ e $Im\ \varphi_j = N_j$. Logo, φ_j é um isomorfismo de A-módulos.

(b) Suponha que a soma não é direta. Assim, algum dos N_i's, digamos N_1, está contido na soma dos demais, ou seja, sem perda de generalidade, temos que $N_1 \subseteq N_2 + ... + N_m$. Segue do item *(a)* que N_1 é isomorfo a algum dos N_i's restantes, uma contradição.

(c) Este resultado é conhecido como Teorema de Krull-Schmidt. Uma demonstração pode ser encontrada em [16], Seção 3.4, página 115. ∎

Vamos introduzir agora conceitos e resultados básicos sobre representações lineares de grupos. A partir de agora, G denotará sempre um grupo finito.

Definição 1.4.15 *Definimos uma* representação linear de G em um espaço vetorial V *como sendo um homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array}.$$

Definimos o grau *da representação linear φ como sendo a dimensão do espaço vetorial V.*

Se $\dim V = n$, com $n \in \mathbb{N}$, temos que os grupos $GL(V)$ e $GL_n(K)$ são isomorfos, e assim, uma representação linear de G em V pode ser vista como um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL_n(K)$. Em particular, quando $n = 1$, podemos considerar como um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow K^*$, onde $K^* = K - \{0\}$ é o grupo multiplicativo do corpo K.

Exemplo 1.4.16 Seja V um espaço vetorial tomado arbitrariamente. Chamamos de *representação trivial* o homomorfismo

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & & g & \longmapsto & \varphi(g) = \mathrm{Id}_V \end{array}.$$

Exemplo 1.4.17 Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de G em V e H um subgrupo de G. Note que a restrição $\varphi|_H : H \longrightarrow GL(V)$ é uma representação linear de H em V. Além disso, $\varphi|_H$ e φ possuem o mesmo grau.

Definição 1.4.18 *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Um subespaço W de V é dito* φ-invariante *se $\varphi_g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$. Se existe um subespaço W não trivial ($\{0_V\} \neq W \neq V$) de V que é φ-invariante, chamamos φ de* redutível. *Se não existe W nessas condições, chamamos φ de* irredutível.

Observe que os subespaços triviais de V, $\{0_V\}$ e V, são φ-invariantes. Assim, φ é irredutível se, e somente se, os únicos subespaços φ-invariantes são os triviais. Note que toda representação de grau 1 é irredutível.

Se W é um subespaço φ-invariante de V e $g \in G$, temos que $\varphi_g(W) \subseteq W$. Daí podemos definir

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_g|_W & : & W & \longrightarrow & W \\ & & w & \longmapsto & \varphi_g(w) \end{array}.$$

De $\varphi_g^{-1}(W) \subseteq W$ segue que $\varphi_g(\varphi_g^{-1}(W)) \subseteq \varphi_g(W)$, e assim $W \subseteq \varphi_g(W)$. Disso concluímos que $\varphi_g(W) = W$ e daí, $\varphi_g|_W \in GL(W)$. De posse disso, estamos aptos para a definição abaixo.

Definição 1.4.19 *Sejam V um espaço vetorial, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear e W um subespaço φ-invariante de V. Definimos a* restrição de φ a W *como sendo a representação linear*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_W & : & G & \longrightarrow & GL(W) \\ & & g & \longmapsto & \varphi_W(g) = \varphi_g|_W \end{array},$$

que também é chamada de sub-representação φ_W.

Definição 1.4.20 *Sejam V um espaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Se existem $W_1, W_2, ..., W_n$ subespaços vetoriais φ-invariantes de V tais que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ e a restrição de φ a W_i é irredutível, para todo $i = 1, 2, ..., n$, então dizemos que φ é* completamente redutível *(ou* semi-simples*).*

Exemplo 1.4.21 Observe que toda representação irredutível é completamente redutível.

Teorema 1.4.22 (Maschke) *Suponha que a característica de K não divide $|G|$, que $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação linear de grau finito e que W é um subespaço φ-invariante de V. Então $V = W \oplus W_1$, onde W_1 é um subespaço φ-invariante de V. Consequentemente, φ é completamente redutível.*

Demonstração. Ver [16], Seção 5.2, página 253. ∎

Definição 1.4.23 *Sejam V e W espaços vetoriais e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações lineares. Se existe $T : V \longrightarrow W$ isomorfismo de espaços vetoriais tal que $\psi_g T = T\varphi_g$ para todo $g \in G$, então φ e ψ são ditas* representações equivalentes.

Exemplo 1.4.24 Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações lineares equivalentes. Então φ é irredutível se, e somente se, ψ é irredutível. De fato, tome $T : V \longrightarrow W$ isomorfismo de espaços vetoriais tal que $\psi_g = T\varphi_g T^{-1}$ para todo $g \in G$. Suponha que ψ é irredutível e, por contradição, que V_1 é um subespaço não trivial de V φ-invariante. Considere agora o subespaço não trivial $W_1 = T(V_1)$ de W. Assim, teremos $\psi_g(W_1) = (T\varphi_g T^{-1})(W_1) = (T\varphi_g)(V_1) \subseteq T(V_1) = W_1$ para todo $g \in G$ e daí, W_1 é ψ-invariante, uma contradição. Portanto, φ é irredutível. A recíproca é análoga.

Exemplo 1.4.25 Considere as seguintes representações de grau 1 do grupo S_n

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S_n & \longrightarrow & K^* \\ & \sigma & \longmapsto & \varphi(\sigma) = 1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccl} \varepsilon : & S_n & \longrightarrow & K^* \\ & \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) = (-1)^\sigma \end{array},$$

chamadas de *representação trivial* e *representação sinal*, respectivamente. Se a característica de K é diferente de dois, φ e ε não são equivalentes.

Agora seja $\psi : S_n \longrightarrow K^*$ uma representação de grau 1 de S_n. Temos que $S_n/ker\ \psi$ é abeliano, pois é isomorfo a $Im\ \psi \subseteq K^*$ (Teorema Fundamental dos Homomorfismos). Assim, segue da teoria de grupos que $ker\ \psi \supseteq S_n' = A_n$. Com isso, $\psi(\mu) = 1$ para toda $\mu \in A_n$.

Fixemos agora $\sigma_0 \in S_n - A_n$ arbitrária. Teremos $S_n = A_n \cup \sigma_0 A_n$, $S_n - A_n = \sigma_0 A_n$ e $\sigma_0^2 \in A_n$, e assim $\psi(\sigma_0^2) = (\psi(\sigma_0))^2 = 1$, donde $\psi(\sigma_0) = \pm 1$. Logo, se $\psi(\sigma_0) = 1$, então

$\ker\psi = S_n$ e daí ψ coincide com a representação trivial. Por outro lado, se $\psi(\sigma_0) = -1$, supondo $\sigma \in S_n - A_n$, então $\sigma = \sigma_0\mu$ para alguma $\mu \in A_n$, donde $\psi(\sigma) = -1$, e assim ψ coincide com a representação sinal. Logo, as representações trivial e sinal são as únicas de grau 1 do grupo S_n.

Seja V um KG-módulo. Para cada $g \in G$, defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi_g & : & V & \longrightarrow & V \\ & & v & \longmapsto & \varphi_g(v) = g \cdot v \end{array}.$$

Observe que, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, teremos $\varphi_{g_1g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$. Denotando o elemento neutro de G por "1", note que $\varphi_1 = \mathrm{Id}_V$, e assim $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \mathrm{Id}_V$, logo, $\varphi_g \in GL(V)$. Concluímos que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array}$$

é uma representação linear de G em V. Agora, seja W um submódulo de V. Como $g \cdot w \in W$, temos que $\varphi_g(w) \in W$ para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Com isso, temos que W é um subespaço φ-invariante de V.

Por outro lado, considere V o KG-módulo obtido através da representação linear φ como visto no Exemplo 1.4.4. Veja que se W é um subespaço φ-invariante de V, teremos que $\varphi_g(w) = g \cdot w \in W$ para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Como G é um conjunto gerador da álgebra KG (como espaço vetorial), tomando $\alpha \in KG$ arbitrário, segue que $\alpha \cdot w \in W$, e assim W é um submódulo de KG.

Diante disso, as estruturas de KG-módulos em V e as representações lineares de G em V estão em correspondência biunívoca.

Agora iremos apresentar alguns resultados envolvendo representações lineares e KG-módulos.

Proposição 1.4.26 *Sejam V e W KG-módulos e φ e ψ, respectivamente, as representações lineares de G correspondentes. Então φ e ψ são equivalentes se, e somente se, V e W são KG-módulos isomorfos. Além disso, φ é irredutível se, e somente se, V é um KG-módulo irredutível.*

Demonstração. Segue do que vimos acima que os submódulos do KG-módulo V são exatamente os subespaços φ-invariantes de V. Logo, temos a segunda afirmação.

Agora, suponha que φ e ψ são representações equivalentes. Então existe um isomorfismo de espaços vetoriais $T : V \longrightarrow W$ tal que $\psi_g T = T\varphi_g$ para todo $g \in G$. Tomando $g \in G$ e $v \in V$ arbitrários, teremos

$$T(g \cdot v) = T(\varphi_g(v)) = \psi_g(T(v)) = g \cdot T(v).$$

Como G é uma base (como espaço vetorial) de KG e T é linear, temos, para quaisquer $\alpha \in KG$ e $v \in V$, que $T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$, e assim T é um isomorfismo de KG-módulos.

Reciprocamente, considere $T : V \longrightarrow W$ um isomorfismo de KG-módulos. Para $g \in G$ e $v \in V$ arbitrários, note que

$$(\psi_g T)(v) = \psi_g(T(v)) = g \cdot T(v) = T(g \cdot v) = T(\varphi_g(v)) = (T\varphi_g)(v).$$

Logo, $\psi_g T = T\varphi_g$ para todo $g \in G$, e assim φ e ψ são representações equivalentes. ∎

De posse desse resultado, podemos interpretar o Teorema de Maschke (1.4.22) em termos de KG-módulos. É o que apresentaremos a seguir.

Teorema 1.4.27 (Maschke) *Seja V um KG-módulo de dimensão finita. Suponha que a característica de K não divide $|G|$ e que W é um submódulo de V. Então existe W_1 submódulo de V tal que $V = W \oplus W_1$.*

Segue do Teorema de Maschke que se *char* K não divide $|G|$ e M é um KG-módulo de dimensão finita, então existem N_1, N_2, ..., N_m submódulos minimais de M tais que $M = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$. Segue da Proposição 1.4.14 que esta decomposição é única a menos de isomorfismo e da ordem em que os termos aparecem.

Exemplo 1.4.28 Para cada $g \in G$, considere $\rho_g : KG \longrightarrow KG$ tal que $\rho_g(\alpha) = g\alpha$. A representação linear definida por

$$\begin{array}{rccl} \rho & : & G & \longrightarrow & GL(KG) \\ & & g & \longmapsto & \rho(g) = \rho_g \end{array}$$

é chamada de *representação regular à esquerda de G sobre K*. Observe que ρ é injetora e corresponde a KG visto como um módulo sobre si mesmo. Pelo que foi visto no Exemplo 1.4.6, temos que os subespaços ρ-invariantes de KG são exatamente seus ideais à esquerda. Supondo agora que *char* K não divide $|G|$, segue do Teorema de Maschke (1.4.27) que se W é um ideal à esquerda de KG, então $KG = W \oplus W_1$, onde W_1 é um ideal à esquerda de KG.

Como os ideais minimais à esquerda de KG correspondem às sub-representações irredutíveis de ρ, segue novamente do Teorema de Maschke que KG pode ser escrito como uma soma direta finita de ideais minimais à esquerda.

Considere agora o grupo S_n e o S_n-módulo P_n conforme vimos no Exemplo 1.4.8. Como KS_n e P_n são S_n-módulos isomorfos, segue que a representação

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & S_n & \longrightarrow & GL(P_n) \\ & & \sigma & \longmapsto & \psi(\sigma) = \psi_\sigma \end{array},$$

onde $\psi_\sigma : P_n \longrightarrow P_n$ é definida por $\psi_\sigma(f) = \sigma \cdot f$, é uma representação equivalente à representação regular à esquerda de S_n sobre K. Ademais, se a característica de K não divide a ordem de G, segue que P_n pode ser escrito como soma direta de uma quantidade finita de submódulos minimais.

Para os próximos resultados, suponha que *char* K não divide $|G|$.

Proposição 1.4.29 *Todo KG-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de KG. Em termos de representações lineares, toda representação linear irredutível de G é equivalente a uma sub-representação da representação regular à esquerda de G.*

Demonstração. Veja [6], Teorema 25.10, página 166. ■

Segue das Proposições 1.4.29 e 1.4.14 que o número de representações irredutíveis de G sobre K é finito, a menos de equivalência. É possível mostrar (veja [16], Seção 5.3, página 261) que este número é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G.

Proposição 1.4.30 *Sejam n o número de representações irredutíveis (a menos de equivalência) de G sobre K e I_1, I_2, ... , I_n ideais minimais à esquerda de KG dois a dois não isomorfos (como KG-módulos). Para cada $i = 1, ..., n$, considere $\{I_{i_j} \mid j \in \Lambda_i\}$ como sendo a família de ideais minimais à esquerda de KG isomorfos a I_i. Então $J_i = \sum_{j \in \Lambda_i} I_{i_j}$ é um ideal bilateral minimal de KG, para cada $i = 1, ..., n$, e KG pode ser decomposto como*

$$KG = J_1 \oplus J_2 \oplus ... \oplus J_n.$$

Demonstração. Veja [6], Teorema 25.15, página 168. ■

Definição 1.4.31 *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de grau finito. A aplicação*

$$\begin{array}{cccc} \chi_\varphi & : & G & \longrightarrow & K \\ & & g & \longmapsto & \chi_\varphi(g) = tr\ \varphi_g \end{array}$$

é chamada de caracter de φ. *Se φ for uma representação irredutível, diremos que χ_φ é um* caracter irredutível *de G.*

A definição de caracter para uma representação da forma $\varphi : G \longrightarrow GL_n(K)$ é feita de maneira análoga, onde $\chi_\varphi(g)$ é o traço da matriz φ_g. Denotando por 1 o elemento neutro de G, temos que $\chi_\varphi(1) = tr\ \mathrm{Id}_V = \dim V$.

Exemplo 1.4.32 Seja $\varphi : G \longrightarrow K^*$ uma representação linear (de grau 1). Então $\chi_\varphi(g) = \varphi(g)$ para todo $g \in G$.

Do fato de matrizes semelhantes terem o mesmo traço, segue que representações equivalentes têm o mesmo caracter. Segue também deste fato que se $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação de grau finito e $g_1, g_2 \in G$ são conjugados ($g_1 = x^{-1}g_2x$ com $x \in G$), então $\chi_\varphi(g_1) = \chi_\varphi(g_2)$.

Teorema 1.4.33 *Seja K um corpo de característica zero. Se φ e ψ são representações lineares de G que têm o mesmo caracter, então φ e ψ são equivalentes.*

Demonstração. Veja [31], 8.3.7, página 230. ∎

Definição 1.4.34 *Definimos o* caracter de um KG-módulo M *como sendo o caracter da representação associada a esse módulo e o denotaremos por χ_M.*

Para finalizar a seção, falaremos rapidamente sobre soma direta de representações lineares e seu caracter.

Sejam $\varphi_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$, $\varphi_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$, ..., $\varphi_n : G \longrightarrow GL(V_n)$ representações lineares. Considere $V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ e a representação linear $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, definida por $\varphi(g) = \varphi_g$, onde

$$\begin{array}{cccc} \varphi_g & : & V & \longrightarrow & V \\ & & (v_1, v_2, ..., v_n) & \longmapsto & \varphi_g(v_1, v_2, ..., v_n) = ((\varphi_1)_g(v_1), (\varphi_2)_g(v_2), ..., (\varphi_n)_g(v_n)) \end{array}.$$

Nessas condições, dizemos que φ *é a soma direta de* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ e denotamos por $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus ... \oplus \varphi_n$. Observe que o subespaço $\{0_{V_1}\} \times ... \times V_i \times ... \times \{0_{V_n}\}$ de V é φ-invariante e, como KG-módulo, é isomorfo a V_i.

Considere agora $\psi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação completamente redutível e subespaços $W_1, W_2, ..., W_n$ ψ-invariantes de V tais que $\psi_i = \psi|_{W_i}$ é irredutível e $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$. Observe que para cada $g \in G$ e $w_i \in W_i$, com $1 \leq i \leq n$, temos

$$\begin{aligned}\psi_g(w_1 + w_2 + ... + w_n) &= \psi_g(w_1) + \psi_g(w_2) + ... + \psi_g(w_n) \\ &= (\psi_1)_g(w_1) + (\psi_2)_g(w_2) + ... + (\psi_n)_g(w_n).\end{aligned}$$

Observando o isomorfismo natural entre V e $W_1 \times W_2 \times ... \times W_n$, temos que

$$\psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus ... \oplus \psi_n.$$

Tomando agora β_i uma base de W_i, para cada $i = 1, 2, ..., n$, e $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup ... \cup \beta_n$, temos que β é base de V e $[\psi_g]_\beta$ é uma matriz diagonal em blocos, os quais são $[(\psi_1)_g]_{\beta_1}, [(\psi_2)_g]_{\beta_2}, ..., [(\psi_n)_g]_{\beta_n}$. Logo, $\chi_\psi = \chi_{\psi_1} + \chi_{\psi_2} + ... + \chi_{\psi_n}$.

Teorema 1.4.35 *Se char K não divide $|G|$, então todo caracter de G sobre K pode ser escrito como soma de caracteres irredutíveis.*

Demonstração. Segue do Teorema de Maschke (1.4.22) e do que foi feito acima. ■

Capítulo 2

Representações e PI-Álgebras

Neste capítulo, estudaremos um pouco sobre a teoria de Young sobre representações lineares dos grupos simétricos e a relacionaremos com a teoria das álgebras com identidades polinomiais, focando nos conceitos de codimensões e cocaracteres. Nosso objetivo aqui é obter o embasamento necessário para os resultados que iremos apresentar provenientes da junção dessas duas teorias.

Em todo o capítulo, K denotará um corpo de característica 0.

2.1 Representações do grupo simétrico

Nesta seção consideraremos $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

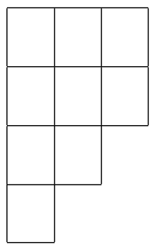
Definição 2.1.1 *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Definimos uma* partição de n *como sendo uma* r*-upla* $(n_1, n_2, ..., n_r)$ *de números naturais tais que* $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_r$ *e* $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, usaremos $(n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ para denotar que $(n_1, n_2, ..., n_r)$ é uma partição de n. Denotaremos por $Par(n)$ o conjunto das partições de n e por $p(n)$ o número de partições de n. Se $n_i = n_{i+1} = ... = n_k$, denotaremos $(n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ por $(n_1, ..., n_{i-1}, n_i^{k-i+1}, n_{k+1}, ..., n_r)$. É possível mostrar que o número de classes de conjugação do grupo simétrico S_n é igual a $p(n)$.

Se $\lambda_1 = (n_1, n_2, ..., n_r)$ e $\lambda_2 = (m_1, m_2, ..., m_s)$ pertecem a $Par(n)$ dizemos que $\lambda_1 > \lambda_2$ se $n_k > m_k$ para $k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid n_i \neq m_i\}$ (ordem lexicográfica). Com isso, temos uma relação de ordem total no conjunto das partições de n.

Definição 2.1.2 *Seja* $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$. *Definimos o* diagrama de Young D_λ da partição λ *como sendo o conjunto* $D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq n_i\}$.

Note que D_λ é um conjunto composto por n elementos. Na prática, representaremos D_λ por n quadrados (ou *células*) dispostos em r filas horizontais, chamadas de *linhas*, com a i-ésima linha composta por n_i quadrados. Da esquerda para a direita, os primeiros quadrados aparecem numa mesma fila vertical (*coluna*). Observe que o número de colunas é igual a n_1. A numeração das linhas é feita de cima para baixo e a das colunas da esquerda para a direita. Dado $(i,j) \in D_\lambda$, o quadrado correspondente a ele está na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Como exemplo, vejamos a representação do diagrama de Young da partição $\lambda = (3,3,2,1)$ do número 9:

$D_\lambda =$ 

Para $i \in \{1,2,...,r\}$ e $j \in \{1,2,...,n_1\}$, note que a i-ésima linha intersecta a j-ésima coluna se, e somente se, $n_i \geq j$. Assim, denotando o número de células da j-ésima coluna por c_j, temos que $c_j = \max\{i \in \{1,2,...,r\} \mid n_i \geq j\}$. Observe que $r = c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_{n_1}$.

Definição 2.1.3 *Seja* $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$. *Dizemos que* r *é a* altura de λ, *a qual é denotada por* $h(\lambda)$. *Dizemos também que* $h(\lambda)$ *é a* altura do diagrama de Young associado a λ.

Definição 2.1.4 *Denomina-se* diagrama retangular *o diagrama associado a uma partição da forma* (k^l). *Tal partição é chamada de* partição retangular.

Definição 2.1.5 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$. *Definimos uma* tabela de Young do diagrama D_λ *(ou* da partição λ*) como sendo uma bijeção* $T : D_\lambda \longrightarrow I_n$. *Dizemos que uma tabela de Young* T *é* standard *quando satisfaz as seguintes condições:*

(i) $T(i,j) < T(i,j+1)$ *para* $1 \leq i \leq r$ *e* $1 \leq j < n_i$;

(ii) $T(i,j) < T(i+1,j)$ *para* $1 \leq j \leq n_1$ *e* $1 \leq i < c_j$.

Note que para uma partição λ de n existem exatamente $n!$ tabelas de Young do diagrama D_λ. Representa-se uma tabela de Young T do diagrama D_λ colocando cada elemento $T(i,j)$ na célula (i,j) (i-ésima linha e j-ésima coluna) do diagrama D_λ. Quando dizemos que uma tabela de Young T é standard, significa dizer que as entradas na tabela crescem em cada linha da esquerda para a direita e em cada coluna de cima para baixo.

Seja $\sigma \in S_n$. Definimos σT como sendo a composta $\sigma \circ T : D_\lambda \longrightarrow I_n$, que também é uma tabela de Young do mesmo diagrama D_λ. Note que $\sigma T = T$ se, e somente se, $\sigma = Id$. Note também que, para cada par de tabelas T_1 e T_2 de um mesmo diagrama D_λ, existe $\mu \in S_n$ tal que $T_2 = \mu T_1$.

Exemplo 2.1.6 Considere as seguintes tabelas de Young

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 8 \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 4 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad e \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 5 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Observe que a segunda tabela é standard, mas a primeira não é. Considerando agora a permutação $\sigma = (1\ 7\ 8\ 3)(4\ 6\ 9\ 2) \in S_9$, temos

$$\sigma T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline 8 & 2 & 3 \\ \hline 7 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 6 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Definição 2.1.7 *Dada uma tabela de Young T, definimos o* grupo das permutações nas linhas de T, *denotado por $R(T)$, como sendo*

$$R(T) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(L) = L \text{ para toda linha } L \text{ de } T\}$$

e o grupo das permutações nas colunas de T, *denotado por $C(T)$, como sendo*

$$C(T) = \{\mu \in S_n \mid \mu(C) = C \text{ para toda coluna } C \text{ de } T\}.$$

Observação 2.1.8 Sejam $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ e T uma tabela de Young associada a D_λ.

- Sejam $L_1, L_2, ..., L_r$ as linhas de T. Definindo, para cada $i = 1, 2, ..., r$,

  $$H_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k,\ \forall\ k \in I_n - L_i\},$$

  teremos que

  $$R(T) = H_1 H_2 ... H_r \simeq H_1 \times H_2 \times ... \times H_r \simeq S_{n_1} \times S_{n_2} \times ... \times S_{n_r}.$$

  Note que, se $\sigma \in H_i$ e $\mu \in H_j$, então $\sigma\mu = \mu\sigma$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq r$ tais que $i \neq j$.

- Sejam $C_1, C_2, ..., C_{n_1}$ as colunas de T. Definindo, para cada $j = 1, 2, ..., n_1$,

$$K_j = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k, \ \forall \ k \in I_n - C_j\},$$

teremos que

$$C(T) = K_1 K_2 ... K_{n_1} \simeq K_1 \times K_2 \times ... \times K_{n_1} \simeq S_r \times S_{r_2} \times ... \times S_{r_{n_1}},$$

onde r_l, $l = 2, 3, ..., n_1$, é a quantidade de elementos de C_l. Note que, se $\sigma \in K_i$ e $\mu \in K_j$, então $\sigma\mu = \mu\sigma$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n_1$ tais que $i \neq j$.

É fácil ver que, se $\sigma \in R(T)$, então σT e T têm as mesmas linhas. Analogamente, se $\mu \in C(T)$, então μT e T têm as mesmas colunas. Logo, se $\sigma \in R(T) \cap C(T)$, então σT e T têm exatamente as mesmas linhas e as mesmas colunas, donde segue que $\sigma T = T$ e, portanto, $\sigma = Id$.

Seja T uma tabela de Young. Consideremos os seguintes elementos da álgebra de grupo KS_n:

$$P_T = \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma \quad , \quad Q_T = \sum_{\mu \in C(T)} (-1)^\mu \mu \quad \text{e} \quad E_T = P_T Q_T = \sum_{\substack{\sigma \in R(T) \\ \mu \in C(T)}} (-1)^\mu \sigma\mu,$$

onde $(-1)^\mu$ é o sinal da permutação μ.

Exemplo 2.1.9 Considere a tabela de Young T_2 do Exemplo 2.1.6

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 6 & \\ \cline{1-2} 5 & & \\ \cline{1-1} \end{array} .$$

As linhas de T_2 são $L_1 = \{1, 2, 4\}$, $L_2 = \{3, 6\}$ e $L_3 = \{5\}$, e as colunas de T_2 são $C_1 = \{1, 3, 5\}$, $C_2 = \{2, 6\}$ e $C_3 = \{4\}$. Assim, teremos que
$R(T_2) = \{Id, \ (1\,2), \ (1\,4), \ (2\,4), \ (1\,2\,4), \ (1\,4\,2), \ (3\,6), \ (1\,2)(3\,6), \ (1\,4)(3\,6), \ (2\,4)(3\,6), \ (1\ 2\ 4)(3\ 6), \ (1\ 4\ 2)(3\ 6)\}$
e que
$C(T_2) = \{Id, \ (1\,3), \ (1\,5), \ (3\,5), \ (1\,3\,5), \ (1\,5\,3), \ (2\,6), \ (1\,3)(2\,6), \ (1\,5)(2\,6), \ (3\,5)(2\,6), \ (1\ 3\ 5)(2\ 6), \ (1\ 5\ 3)(2\ 6)\}.$

Agora vamos apresentar uma série de resultados e comentários necessários para construírmos S_n-módulos irredutíveis a partir de tabelas de Young.

Observação 2.1.10 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e T uma tabela de Young de uma partição de n. Então valem:*

(a) Se $\sigma_1, \sigma_2 \in R(T)$*,* $\mu_1, \mu_2 \in C(T)$ *e* $\sigma_1\mu_1 = \sigma_2\mu_2$*, então* $\sigma_1 = \sigma_2$ *e* $\mu_1 = \mu_2$*.*

(b) $R(\sigma T) = \sigma R(T)\sigma^{-1}$ *e* $C(\sigma T) = \sigma C(T)\sigma^{-1}$ *para toda* $\sigma \in S_n$*.*

(c) $P_{\sigma T} = \sigma P_T \sigma^{-1}$*,* $Q_{\sigma T} = \sigma Q_T \sigma^{-1}$ *e* $E_{\sigma T} = \sigma E_T \sigma^{-1}$ *para toda* $\sigma \in S_n$*.*

(d) $P_T\sigma = \sigma P_T = P_T$ *e* $\sigma E_T = E_T$ *para toda* $\sigma \in R(T)$*.*

(e) $Q_T\mu = \mu Q_T = (-1)^\mu Q_T$ *e* $E_T\mu = (-1)^\mu E_T$ *para toda* $\mu \in C(T)$*.*

Lema 2.1.11 *Sejam* $\alpha \in S_n$*,* λ*,* λ_1 *e* λ_2 *partições de* n *e* T*,* T_1 *e* T_2 *tabelas de Young dos diagramas* D_λ*,* D_{λ_1} *e* D_{λ_2}*, respectivamente. Então valem:*

(a) Existe $\gamma \in K$ *tal que* $E_T\alpha E_T = \gamma E_T$*.*

(b) Se $\lambda_1 > \lambda_2$*, então* $E_{T_1}\alpha E_{T_2} = 0$*.*

Demonstração. Ver [4], capítulo IV, §2. ■

Pelo lema anterior, temos que $E_T^2 = aE_T$ para algum $a \in K$ (em [6], §28, página 195, é demonstrado que a é não nulo). Tomando então $e_T = a^{-1}E_T$, teremos

$$e_T^2 = (a^{-1}E_T)(a^{-1}E_T) = a^{-2}E_T^2 = a^{-2}(aE_T) = a^{-1}E_T = e_T.$$

Tomemos agora o ideal à esquerda de KS_n

$$M_T = KS_nE_T = \{\alpha E_T \mid \alpha \in KS_n\}.$$

Observe que $M_T = KS_ne_T$. Pelo Exemplo 1.4.6, M_T é um submódulo de KS_n (visto como S_n-módulo). Já vimos no Exemplo 1.4.11 que $\gamma Id_{M_T} \in End_{KS_n}M_T$ para todo $\gamma \in K$. Considere agora $\varphi \in End_{KS_n}M_T$ e $\alpha \in KS_n$ tais que $\varphi(e_T) = \alpha e_T$. Teremos, pelo Lema 2.1.11,

$$\varphi(e_T) = \varphi(e_Te_T) = e_T\varphi(e_T) = e_T\alpha e_T = \gamma e_T$$

para algum $\gamma \in K$. Assim, para $x \in M_T$, temos $x = \beta e_T$ para algum $\beta \in KS_n$, e daí segue que

$$\varphi(x) = \varphi(\beta e_T) = \beta\varphi(e_T) = \gamma\beta e_T = \gamma x.$$

Logo, $\varphi = \gamma Id_{M_T}$. Concluímos que $End_{KS_n}M_T = \{\gamma Id_{M_T} \mid \gamma \in K\}$, e assim $End_{KS_n}M_T$ é um corpo isomorfo a K.

Teorema 2.1.12 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \vdash n$ e T, T_1, T_2 tabelas de Young dos diagramas D_λ, D_{λ_1} e D_{λ_2}, respectivamente. Então:*

(a) M_T é um KS_n-módulo irredutível.

(b) M_{T_1} e M_{T_2} são KS_n-módulos isomorfos se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Demonstração. (a) Seja N um submódulo de M_T. Pelo Teorema de Maschke (1.4.27), existe N_1 submódulo de M_T tal que $M_T = N \oplus N_1$. Tomando a aplicação $\varphi : M_T \longrightarrow M_T$ tal que $\varphi(\alpha + \beta) = \alpha$ para $\alpha \in N$ e $\beta \in N_1$, teremos que $\varphi \in End_{KS_n} M_T$ e $\varphi^2 = \varphi$. Como $End_{KS_n} M_T$ é um corpo, devemos ter $\varphi = 0$ ou $\varphi = Id$, e com isso $N = \{0\}$ ou $N = M_T$. Logo, M_T é irredutível.
(b) Sejam M_{T_1} e M_{T_2} S_n-módulos isomorfos. Suponha por contradição que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 > \lambda_2$. Segue do Lema 2.1.11 que $e_{T_1} \alpha e_{T_2} = 0$ para todo $\alpha \in KS_n$. Seja $\varphi : M_{T_1} \longrightarrow M_{T_2}$ um homomorfismo de S_n-módulos. Tomando $\alpha_1 \in KS_n$ tal que $\varphi(e_{T_1}) = \alpha_1 e_{T_2}$, teremos

$$\varphi(e_{T_1}) = \varphi(e_{T_1} e_{T_1}) = e_{T_1} \varphi(e_{T_1}) = e_{T_1} \alpha_1 e_{T_2} = 0,$$

e daí, $\varphi = 0$. Logo, M_{T_1} e M_{T_2} não são isomorfos, contradizendo nossa suposição inicial.

Reciprocamente, suponha $\lambda_1 = \lambda_2$. Teremos $T_1 = \rho T_2$ para algum $\rho \in S_n$ e, pela observação 2.1.10, $e_{T_1} = a \rho e_{T_2} \rho^{-1}$ para algum $a \in K - \{0\}$. Com isso, temos que $M_{T_1} = M_{T_2} \rho^{-1}$. Portanto, M_{T_1} e M_{T_2} são KS_n-módulos isomorfos. ■

Seja $n \in \mathbb{N}$. Como consequência do teorema acima, temos que o número de S_n-módulos irredutíveis, a menos de isomorfismo, é maior ou igual ao número de diagramas de Young associados a n, que é igual a $p(n)$, o número de partições de n. Por outro lado, pelo apresentado na Seção 1.4, o número de K-representações irredutíveis de S_n, a menos de equivalência, é menor ou igual ao número de classes de conjugação de S_n. Como o número de K-representações irredutíveis de S_n coincide com o número de S_n-módulos irredutíveis e o número de classes de conjugação de S_n coincide com $p(n)$, podemos afirmar que *o grupo S_n possui, a menos de equivalência, exatamente $p(n)$ representações irredutíveis sobre K.*

Denotaremos por M_λ o S_n-módulo irredutível (a menos de isomorfismo) correspondente à partição $\lambda \vdash n$, por φ_λ a representação irredutível de S_n correspondente a M_λ, por d_λ a dimensão do módulo M_λ, que coincide com o grau da representação linear associada a λ, e por χ_λ o caracter irredutível de S_n associado a λ.

Pela Proposição 1.4.29, todo S_n-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de KS_n. Sendo $\lambda \vdash n$, denotemos por J_λ a soma de todos os ideais minimais à esquerda de KS_n isomorfos (como S_n-módulos) a M_λ. Segue da Proposição 1.4.30 que J_λ é um ideal bilateral minimal de KS_n e que $KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} J_\lambda$.

Proposição 2.1.13 *Seja $\lambda \vdash n$. Se T_1, ..., T_{l_λ} são todas as tabelas standard da partição λ, então J_λ, o ideal bilateral minimal de KS_n associado a λ, é decomposto como*

$$J_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{l_\lambda} KS_n E_{T_i}.$$

Demonstração. Veja [14], Proposição 2.2.14, página 49. ∎

Teorema 2.1.14 *Seja $\lambda \vdash n$. Então a dimensão d_λ do S_n-módulo irredutível M_λ é igual ao número de tabelas standard da partição λ.*

Demonstração. Ver [4], Capítulo IV, Teorema 4.6, §4, página 121.

Corolário 2.1.15 *Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p(n)}$ são as distintas partições de n, então*

$$|S_n| = d_{\lambda_1}^2 + d_{\lambda_2}^2 + ... + d_{\lambda_{p(n)}}^2.$$

Demonstração. Temos, pela conversa anterior, que $|S_n| = \dim_K KS_n = \sum_{\lambda \vdash n} \dim J_\lambda$. Segue da Proposição 2.1.13 e do Teorema 2.1.14 que $\dim J_\lambda = d_\lambda^2$. ∎

Observação 2.1.16 Sendo χ um caracter do grupo S_n, temos $\chi = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, pelo Teorema 1.4.35. Segue do Teorema 2.1.12 e da Proposição 2.1.13 que $KS_n \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} d_\lambda M_\lambda$, onde $d_\lambda M_\lambda$ denota a soma direta de d_λ módulos isomorfos a M_λ, e daí $\chi_{KS_n} = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \chi_\lambda$, onde χ_λ é o caracter irredutível associado a λ. Se M_1 e M_2 são submódulos de KS_n tais que $KS_n = M_1 \oplus M_2$, com $\chi_{M_1} = \sum_{\lambda \vdash n} \alpha_\lambda \chi_\lambda$ e $\chi_{M_2} = \sum_{\lambda \vdash n} \beta_\lambda \chi_\lambda$, então $\alpha_\lambda + \beta_\lambda = d_\lambda$ para todo $\lambda \vdash n$, pela Proposição 1.4.14, item *(c)*.

Uma maneira de obter o número de tabelas standard associadas a uma partição é pela Fórmula do Gancho. O *gancho* (i, j) em um diagrama D_λ é o conjunto das células à direita e abaixo da célula (i, j), incluindo ela própria.

Teorema 2.1.17 (Fórmula do Gancho) *Sejam $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ e $ST(\lambda)$ o número de tabelas standard do diagrama D_λ. Então*

$$ST(\lambda) = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}},$$

onde h_{ij} denota o número de células do gancho (i, j).

Demonstração. Veja [4], Capítulo VI, §3, página 211. ■

Exemplo 2.1.18 Considere a partição $\lambda = (3, 2) \vdash 5$ e o seu diagrama de Young

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}.$$

Na notação do teorema anterior (Fórmula do Gancho), temos $h_{11} = 4$, $h_{12} = 3$, $h_{13} = 1$, $h_{21} = 2$ e $h_{22} = 1$, e daí

$$ST(\lambda) = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 5.$$

Exemplo 2.1.19 Considere $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e as tabelas de Young

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & ... & n \\ \hline \end{array} \qquad e \qquad T_2 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}.$$

Temos $R(T_1) = C(T_2) = S_n$ e $C(T_1) = R(T_2) = \{Id\}$, donde

$$E_{T_1} = P_{T_1} = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma = u_n \qquad \text{e} \qquad E_{T_2} = Q_{T_2} = \sum_{\mu \in S_n} (-1)^\mu \mu = s_n$$

(veja o Exemplo 1.1.16). Assim, dado $\alpha \in S_n$, temos $\alpha u_n = \alpha E_{T_1} = E_{T_1} = u_n$ e $\alpha s_n = \alpha E_{T_2} = (-1)^\alpha E_{T_2} = (-1)^\alpha s_n$. Observe então que $M_{T_1} = \langle E_{T_1} \rangle$ e $M_{T_2} = \langle E_{T_2} \rangle$, donde os S_n-módulos M_{T_1} e M_{T_2} têm dimensão 1. Ademais, M_{T_1} é o S_n-módulo correspondente à representação trivial de grau 1 e M_{T_2} é o S_n-módulo correspondente à representação sinal. Essas são as únicas representações de grau 1 de S_n (ver Exemplo 1.4.25).

Proposição 2.1.20 *Os únicos submódulos de dimensão 1 de KS_n (respectivamente P_n) são Ku_n e Ks_n (respectivamente $Ku_n(x_1, ..., x_n)$ e $Ks_n(x_1, ..., x_n)$).*

Demonstração. Considere as partições $\lambda_1 = (n)$ e $\lambda_2 = (1^n)$. Temos $d_{\lambda_1} = d_{\lambda_2} = 1$, $Ku_n \subseteq J_{\lambda_1}$ e $Ks_n \subseteq J_{\lambda_2}$, donde $J_{\lambda_1} = Ku_n$ e $J_{\lambda_2} = Ks_n$. Suponha agora, por contradição, que KS_n possui algum submódulo M de dimensão 1 tal que $Ku_n \neq M$ e $Ks_n \neq M$. Assim, $M \cap Ku_n = M \cap Ks_n = \{0\}$ e M está associado a alguma representação de grau 1. Como as únicas representações de grau 1 do grupo S_n são a trivial e a sinal (veja Exemplo 1.4.25), segue do Exemplo 2.1.19 que $M \simeq Ku_n$ ou $M \simeq Ks_n$. Logo, $M \subseteq J_{\lambda_1}$ ou $M \subseteq J_{\lambda_2}$, o que é uma contradição. ■

Sejam $\mu = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ e $\lambda = (m_1, m_2, ..., m_k) \vdash m$. Observe que $D_\mu \subseteq D_\lambda$ se, e somente se, $r \leq k$ e $n_i \leq m_i$, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Geometricamente, se $D_\mu \subseteq D_\lambda$, então podemos cobrir D_μ com D_λ.

Se φ_λ é a representação irredutível associada a λ, a sua restrição a S_{n-1} não é necessariamente irredutível. A descrição dessa restrição é mostrada no próximo teorema.

Teorema 2.1.21 (Branching) *Sejam $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, $\lambda \vdash n$. Se φ_λ é a representação irredutível de S_n associada a λ, então*

$$\varphi_\lambda|_{S_{n-1}} = \bigoplus_{\substack{\mu \vdash n-1 \\ D_\mu \subseteq D_\lambda}} \psi_\mu,$$

onde ψ_μ é a representação irredutível de S_{n-1} associado à partição μ.

Demonstração. Ver [4], Capítulo IV, §5, Teorema 5.4, página 126. ■

Denotando por $M_\lambda|_{S_{n-1}}$ o KS_{n-1}-módulo associado a $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$, temos que $\chi_\lambda|_{S_{n-1}}$ é o seu caracter. Nas condições do Teorema Branching, teremos

$$M_\lambda|_{S_{n-1}} \simeq \bigoplus_{\substack{\mu \vdash n-1 \\ D_\mu \subseteq D_\lambda}} M_\mu.$$

Note que o número de termos nesta soma será igual ao número de diagramas de Young que pode ser obtido retirando uma célula de D_λ. Observando este último comentário, concluímos que $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ é irredutível se, e somente se, D_λ é retangular.

Observação 2.1.22 Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Os únicos diagramas dos quais podemos retirar alguma célula para obter diagramas associados a representações de grau 1 de

S_{n-1} são exatamente aqueles com no máximo uma linha com mais de uma célula. Observe que estes diagramas são associados às partições $(n), (1^n), (n-1, 1)$ e $(2, 1^{n-2})$.

Lema 2.1.23 *Considere $\lambda \vdash n$, $n \geq 5$, tal que $d_\lambda > 1$ e φ_λ a representação linear irredutível associada a λ. Se $\varphi|_{S_{n-1}}$ é irredutível, então $\varphi|_{S_{n-2}}$ não possui componente irredutível de grau* 1.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\varphi_\lambda|_{S_{n-2}}$ possui componente irredutível de grau 1. Já que $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ é irredutível, pelo Teorema Branching (2.1.21), segue que D_λ é retangular. Assim, existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $n = k \cdot l$ e $\lambda = (k^l)$. Como as componentes irredutíveis de grau 1 de $\varphi_\lambda|_{S_{n-2}}$ correspondem às partições (1^{n-2}) e $(n-2)$, então $k = l = 2$, pois esta é a única possibilidade que nos permite obter os diagramas dessas duas partições retirando duas células de D_λ. Com isso, $n = k \cdot l = 4$, uma contradição. ■

Teorema 2.1.24 *Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 7$.*

(a) O grau de uma representação irredutível de S_n é igual a 1 *ou é maior ou igual a $n - 1$.*

(b) Existem exatamente duas representações irredutíveis de S_n de grau $n - 1$, e elas correspondem às partições $(n - 1, 1)$ e $(2, 1^{n-2})$ de n.

Demonstração. Utilizando a Fórmula do Gancho (2.1.17), temos que o resultado é válido para $n = 7, 8$. Tomemos então $n \geq 9$. Supondo, por indução, que todo o teorema é válido para $n - 1$ e $n - 2$, mostremos sua validade para n, um item de cada vez. Para o item *(a)*, suponha, por contradição, que existe $\lambda \vdash n$ tal que $1 < d_\lambda < n - 1$, onde d_λ é o grau de φ_λ, a representação associada a λ. Como $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ tem grau d_λ, aplicando o Teorema Branching (2.1.21) e usando a hipótese de indução, temos que $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ é irredutível de grau $n-2$ ou $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ é redutível com todas as suas componentes de grau 1. Supondo a segunda possibilidade, pela observação anterior, as possíveis alternativas para λ são $(n - 1, 1)$ e $(2, 1^{n-2})$. Porém, se λ fosse uma dessas duas partições, pelo Teorema Branching, $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ teria componente de grau maior que 1. Logo, não podemos ter $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ redutível com todas as suas componentes de grau 1.

Sendo então $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ irredutível de grau $n-2$, pela hipótese de indução, $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ está associada à partição $(n-2,1)$ ou à partição $(2,1^{n-3})$, e assim, pelo Teorema Branching, teríamos uma representação de grau 1 na composição de $\varphi_\lambda|_{S_{n-2}}$, contradizendo o lema anterior. Com isso, concluímos a prova de *(a)* para n.

De posse da hipótese de indução (para todo o teorema), provemos o item *(b)* para n. Suponha que existe λ partição de n, com $\lambda \neq (n-1,1),(2,1^{n-2})$ tal que $d_\lambda = n-1$. Aplicando o Teorema Branching, temos que $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ é irredutível, pois, caso contrário, teríamos, por hipótese de indução e pela observação anterior, $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ com pelo menos duas componentes irredutíveis de grau maior ou igual a $n-2$. Assim, $2(n-2) \leq n-1$, e daí, $n \leq 3$ uma contradição. Como $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ é irredutível, λ é retangular, e assim $\varphi_\lambda|_{S_{n-2}}$ possui pelo menos duas componentes irredutíveis. Temos, pelo lema anterior e pela hipótese de indução, que os graus dessas componentes são no mínimo $n-3$. Assim, $2(n-3) \leq n-1$, uma vez que o grau de $\varphi_\lambda|_{S_{n-1}}$ é $n-1$. Daí, $n \leq 7$, contradizendo a suposição que $n \geq 9$, o que prova *(b)* para n. Logo, todo o resultado é válido para $n \geq 7$ e a demonstração está concluída. ■

Observação 2.1.25 A proposição anterior possui apenas duas exceções quando $n < 7$. O item *(a)* não é válido somente para $n = 4$ e o item *(b)* não é válido somente para $n = 6$. Isso pode ser verificado utilizando a Fórmula do Gancho (2.1.17).

Seja $\lambda = (m_1, m_2, ..., m_r) \vdash n$. Denotaremos por $T_{0,\lambda}$ a tabela

$$T_{0,\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & r+1 & ... & p+1 \\ \hline 2 & r+2 & ... & p+2 \\ \hline & & & \vdots \\ \cline{4-4} & \vdots & \ddots & n \\ \cline{4-4} \vdots & & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} & r+r_2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{2-2} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \hline r & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

onde r_j é o número de células da j-ésima coluna, com $2 \leq j \leq m_1$ e $p = r + \sum_{j=2}^{m_1-1} r_j$.

Proposição 2.1.26 *Sejam $\lambda \vdash n$ e T_λ uma tabela associada a λ.*

(a) Então existe $\eta \in S_n$ *tal que* $E_{T_\lambda} = \eta^{-1} E_{T_{0,\lambda}} \eta$.

(b) $Q_{T_{0,\lambda}} \cdot (x_1 x_2 ... x_n) = s_r(x_1, ..., x_r) s_{r_2}(x_{r+1}, ..., x_{r+r_2}) ... s_{r_{m_1}}(x_{p+1}, ..., x_n)$, *onde* r_j *é o número de células da* j*-ésima coluna, com* $2 \leq j \leq m_1$ *e* $p = r + \sum_{j=2}^{m_1-1} r_j$.

Demonstração. *(a)* Segue da Observação 2.1.10, item *(c)*.

(b) Pela Observação 2.1.8, temos que $(-1)^\mu \mu = (-1)^{\mu_1} \mu_1 (-1)^{\mu_2} \mu_2 ... (-1)^{\mu_{m_1}} \mu_{m_1}$, para todo $\mu \in C(T)$. Note que

$$Q_{T_{0,\lambda}} = \left(\sum_{\mu_1 \in K_1} (-1)^{\mu_1} \mu_1 \right) \left(\sum_{\mu_2 \in K_2} (-1)^{\mu_2} \mu_2 \right) ... \left(\sum_{\mu_{m_1} \in K_{m_1}} (-1)^{\mu_{m_1}} \mu_{m_1} \right)$$

e que $\left(\sum_{\mu_1 \in K_1} (-1)^{\mu_1} \mu_1 \right) \cdot (x_1 x_2 ... x_n) = s_r(x_1, ..., x_r) x_{r+1} ... x_n$, assim, segue que

$$Q_{T_{0,\lambda}} \cdot (x_1 x_2 ... x_n) = s_r(x_1, ..., x_r) s_{r_2}(x_{r+1}, ..., x_{r+r_2}) ... s_{r_{m_1}}(x_{p+1}, ..., x_n).$$

$\blacksquare$

2.2 Codimensões de PI-Álgebras

Nesta seção X denotará o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Como visto na Seção 1.3, dado $n \in \mathbb{N}$, P_n denotará o espaço dos polinômios multilineares de $K\langle X \rangle$ nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Vimos também que o conjunto $\{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base de P_n como espaço vetorial. Assim, $\dim P_n = n!$.

Seja A uma álgebra. Como P_n e $T(A)$ são KS_n-módulos, pela Observação 1.4.9, segue que $\frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$ também é um KS_n-módulo e a partir de agora o denotaremos por $P_n(A)$.

Definição 2.2.1 *Seja* A *uma álgebra. Para* $n \in \mathbb{N}$, *definimos a* n-ésima codimensão de A *como sendo*

$$c_n(A) = \dim P_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}.$$

Observação 2.2.2 *(i)* Temos $c_n(A) = n! - \dim(P_n \cap T(A)) \leq n!$.

(ii) A é uma PI-álgebra se, e somente se, para algum $n \in \mathbb{N}$, $\dim(P_n \cap T(A)) \geq 1$. Observe que se $c_n(A) < n!$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então existe $0 \neq f(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_n \cap T(A)$, e assim, $f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot x_{n+1} ... x_m \in P_m \cap T(A)$. Segue que $c_m(A) < m!$ para todo $m \geq n$.

(iii) Pela Proposição 1.2.15, temos que todo T-ideal é um T-ideal de identidades para alguma álgebra A. Assim, se Q é um conjunto de polinômios e $\langle Q \rangle^T$ é o T-ideal gerado por Q, diremos que

$$c_n(Q) = c_n(\langle Q \rangle^T) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap \langle Q \rangle^T}.$$

Definição 2.2.3 *Seja A uma álgebra. Definimos a* sequência de codimensões de A *como sendo a seguinte sequência numérica*

$$(c_n(A))_{n \in \mathbb{N}} = (c_1(A), c_2(A), c_3(A), ..., c_n(A), ...).$$

Exemplo 2.2.4 Seja A uma álgebra nilpotente de índice $n-1$ (Definição 1.1.6). Assim, $a_1 a_2 ... a_n = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Segue que $x_1 x_2 ... x_n \in T(A)$ e assim $x_1 x_2 ... x_m \in T(A)$ para todo $m \geq n$. Portanto, $P_m \cap T(A) = P_m$ e daí $c_m(A) = 0$ para todo $m \geq n$.

Reciprocamente, se $c_n(A) = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $P_n \cap T(A) = P_n$ e daí $x_1 x_2 ... x_n \in T(A)$. Logo, A é nilpotente.

Exemplo 2.2.5 Se A é uma álgebra comutativa, então $c_n(A) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para todo $\sigma \in S_n$, temos $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \equiv x_1 x_2 ... x_n (\text{mod } T(A) \cap P_n)$ e daí $\overline{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}} = \overline{x_1 x_2 ... x_n}$ em $P_n(A)$. Logo, $\overline{x_1 x_2 ... x_n}$ gera $P_n(A)$ como espaço vetorial, donde $\dim P_n(A) \leq 1$. Além disso, se A é unitária, temos $\overline{x_1 x_2 ... x_n} \neq 0$ em $P_n(A)$, uma vez que $x_1 x_2 ... x_n \notin T(A)$. Daí $c_n(A) = 1$.

Para finalizar a seção, apresentaremos rapidamente alguns conceitos e resultados para demonstrarmos o Teorema de Regev-Latyshev que nos mostra que um T-ideal de identidades tem sua sequência de codimensões com crescimento, no máximo, exponencial.

Definição 2.2.6 *Sejam $d, n \in \mathbb{N}$ tais que $2 \leq d \leq n$. Uma permutação $\sigma \in S_n$ é dita* d-ruim *se existem $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_d \leq n$ tais que $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > ... > \sigma(i_d)$. Se uma permutação não é d-ruim, dizemos que ela é* d-boa. *Chamamos um monômio $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}$ de* d-ruim *(respectivamente* d-bom*) se σ é uma permutação d-ruim (respectivamente d-boa).*

Exemplo 2.2.7 A permutação identidade é d-boa para $d = 2$ e todo $n \geq 2$. Não é difícil ver que, se uma permutação é d-ruim e $2 \leq d_1 \leq d$, então a permutação é d_1-ruim, e se uma permutação é d-boa e $d \leq d_2 \leq n$, então a permutação é d_2-boa.

Lema 2.2.8 *Sejam $d, n \in \mathbb{N}$, tais que $2 \leq d \leq n$. O grupo S_n possui, no máximo, $(d-1)^{2n}$ permutações d-boas.*

Demonstração. Vide [14], Seção 4.2, Lema 4.2.3, página 95. ∎

Teorema 2.2.9 (Regev-Latyshev) *Seja A uma PI-álgebra que satisfaz alguma identidade de grau d. Então sua n-ésima codimensão é limitada superiormente por $(d-1)^{2n}$. Em outras palavras, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.7, podemos supor $f(x_1, ..., x_d) \in P_d \cap T(A)$, e assim, $f(x_1, ..., x_d) = x_1x_2...x_d + \sum\limits_{\mu \in (S_n - \{\text{Id}\})} \alpha_\mu x_{\mu(1)}x_{\mu(2)}...x_{\mu(d)}$. Suponha, por contradição, que existe um monômio multilinear d-ruim que não seja combinação linear (mod $P_n \cap T(A)$) de monômios d-bons em P_n e considere $m = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}$ o menor monômio, pela ordem lexicográfica, com tais propriedades. Já que σ é d-ruim, existem $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_d \leq n$ tais que $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > ... > \sigma(i_d)$. Agora, façamos $m_0 = x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(i_1-1)}$, $m_1 = x_{\sigma(i_1)}...x_{\sigma(i_2)}$, ..., $m_d = x_{\sigma(i_d)}...x_{\sigma(n)}$, assim $m = m_0m_1...m_d$ e $m_1 > m_2 > ... > m_d$, pela ordem lexicográfica.

Note que, para toda $\mu \in (S_d - \{\text{Id}\})$, temos

$$m_0m_{\mu(1)}m_{\mu(2)}...m_{\mu(d)} < m_0m_1m_2...m_d = m,$$

com $m_0m_{\mu(1)}m_{\mu(2)}...m_{\mu(d)}$ combinação linear (mod $P_n \cap T(A)$) de monômios d-bons. Como $f(x_1, x_2, ..., x_d) \in P_d \cap T(A)$, teremos $m_0f(m_1, m_2, ..., m_d) \in P_n \cap T(A)$ e

$$m_0f(m_1, m_2, ..., m_d) = m - \sum_{\mu \in S_d - \{\text{Id}\}} \alpha_\mu m_0m_{\mu(1)}...m_{\mu(d)},$$

donde segue que $m \equiv \sum\limits_{\mu \in S_d - \{\mathrm{Id}\}} \alpha_\mu m_0 m_{\mu(1)} ... m_{\mu(d)} \pmod{P_n \cap T(A)}$, uma contradição. Portanto, os monômios d-bons geram $P_n(A)$ e, pelo lema anterior, $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.
■

2.3 Cocaracteres de PI-Álgebras

Nesta seção apresentaremos os conceitos e resultados básicos relacionados com cocaracteres de PI-álgebras.

Definição 2.3.1 *Sejam A uma álgebra e $n \in \mathbb{N}$.*

*(i) Definimos o n-*ésimo cocaracter de A *como sendo o caracter do S_n-módulo $P_n(A)$ e o denotaremos por $\chi_n(A)$.*

(ii) Definimos a sequência de cocaracteres de A *como sendo a seguinte sequência*

$$(\chi_n(A))_{n\in\mathbb{N}} = (\chi_1(A), \chi_2(A), \chi_3(A), ..., \chi_n(A), ...).$$

Observação 2.3.2 Como todo T-ideal I é um T-ideal de identidades, é coerente falarmos do *n-ésimo cocaracter de I*, denotado por $\chi_n(I)$, e o definimos como sendo o caracter do S_n-módulo $P_n/(P_n \cap I)$.

Denotando por χ_λ o caracter irredutível associado ao S_n-módulo M_λ, teremos, pelo Teorema 1.4.35, que $\chi_n(A) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, com $m_\lambda \geq 0$. Dizemos que m_λ é a *multiplicidade* do caracter χ_λ em $\chi_n(A)$. Escrevendo $P_n(A)$ como soma direta de submódulos irredutíveis, m_λ é exatamente o número de submódulos isomorfos a M_λ.

Observação 2.3.3 Sejam A uma álgebra e $n \in \mathbb{N}$. Segue do isomorfismo (como S_n-módulos) entre P_n e KS_n que $\chi_{P_n} = \chi_{KS_n} = \sum\limits_{\lambda \vdash n} d_\lambda \chi_\lambda$ (veja Observação 2.1.16). Pelo Teorema de Maschke (1.4.27), existe J_n tal que $P_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J_n$. Teremos então que $J_n \simeq P_n(A)$, e daí $\chi_{J_n} = \chi_n(A)$. Assim, $\chi_{P_n} = \chi_{P_n \cap T(A)} + \chi_n(A)$, e sendo $\chi_{P_n \cap T(A)} = \sum\limits_{\lambda \vdash n} l_\lambda \chi_\lambda$ e $\chi_n(A) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, teremos $l_\lambda + m_\lambda = d_\lambda$, para toda $\lambda \vdash n$. Por outro lado, teremos $c_n(A) = \dim P_n(A) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda$ e $\dim (P_n \cap T(A)) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} l_\lambda d_\lambda$. Segue então que $n! = \dim P_n = \sum\limits_{\lambda \vdash n} (m_\lambda + l_\lambda) d_\lambda = \sum\limits_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$.

Definição 2.3.4 *Diremos que* $\sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda$ *é o* n-ésimo cotamanho de A *e o denotaremos por* $l_n(A)$.

Lema 2.3.5 *Sejam* $\mu \vdash n$ *e* N *um* S_n*-submódulo irredutível com caracter* $\chi_N = \chi_\mu$. *Então existe algum* $m \in N$ *e alguma tabela de Young* T_1 *associada à partição* μ *de* n *tal que* $N = KS_nE_{T_1} \cdot m = \{\alpha E_{T_1} \cdot m \mid \alpha \in KS_n\}$. *Além disso, para qualquer tabela* T_μ *da partição* μ*, existe* $g \in N$ *tal que* $N = KS_nE_{T_\mu} \cdot g$.

Demonstração. Como

$$KS_n = \sum_{\substack{T \text{ tabela} \\ \text{de Young}}} KS_nE_T \quad \text{e} \quad KS_n \cdot N = N,$$

existem algum $m \in N$ e alguma tabela de Young T_1 associada a alguma partição λ de n tais que $E_{T_1} \cdot m \neq 0$. Pela irredutibilidade de N, segue que $KS_nE_{T_1} \cdot m = N$, e assim a aplicação $\varphi : KS_nE_{T_1} \longrightarrow N$ definida por $\varphi(\alpha) = \alpha \cdot m$ é um isomorfismo de S_n-módulos, donde teremos que $\chi_\mu = \chi_N = \chi_{KS_nE_{T_1}} = \chi_\lambda$ e daí $\lambda = \mu$.

Agora, seja T_μ uma tabela associada a $\mu \vdash n$. Tome $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma T_\mu = T_1$. Assim, pelo item *(c)* da Observação 2.1.10, temos $E_{T_1} = \sigma E_{T_\mu} \sigma^{-1}$. Tomando $g = \sigma^{-1} m$, temos que $N = KS_nE_{T_\mu} \cdot g$. ■

Teorema 2.3.6 *Sejam* A *uma PI-álgebra,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\mu \vdash n$. *Considere* $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. *São equivalentes:*

(i) $m_\mu = 0$;

(ii) $E_T \cdot f \in T(A)$ *para quaisquer* $f \in P_n$ *e* T *tabela de Young associada à partição* μ.

Demonstração. Seja J um submódulo do S_n-módulo P_n tal que $P_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J$. Então $J \simeq P_n(A)$ (como S_n-módulos) e assim $\chi_J = \chi_n(A)$. Supondo $m_\mu = 0$ temos que J não possui nenhum submódulo isomorfo a KS_nE_T, onde T é uma tabela de Young qualquer associada a μ. Supondo agora que existe $h \in J$ tal que $E_T \cdot h \neq 0$, temos que $\varphi : KS_nE_T \longrightarrow KS_nE_T \cdot h$, definida por $\varphi(\alpha) = \alpha \cdot h$, é um isomorfismo de S_n-módulos, contradizendo o fato de J não possuir nenhum submódulo isomorfo a KS_nE_T, já que $KS_nE_T \cdot h \subseteq J$. Segue que $E_T \cdot h = 0$ para todo $h \in J$.

Tome agora $f \in P_n$. Temos $f = g + h$, com $g \in P_n \cap T(A)$ e $h \in J$. Assim, $E_T \cdot f = E_T \cdot g + E_T \cdot h = E_T \cdot g \in T(A)$. Portanto, $E_T \cdot f \in T(A)$ para quaisquer $f \in P_n$ e T tabela de Young associada à partição μ.

Suponha agora que $m_\mu \neq 0$. Então J possui algum submódulo minimal N tal que $\chi_N = \chi_\mu$. Pelo Lema 2.3.5, $N = KS_nE_T \cdot f$ para algum $f \in N$ e alguma tabela de Young T associada a μ. Logo, $E_T \cdot f \in N - \{0\}$ e daí $E_T \cdot f \notin T(A)$. ■

Corolário 2.3.7 *Sejam A uma PI-álgebra e $\mu \vdash n$. Considere $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Se $\mu \vdash n$ é tal que $m_\mu = 0$ e M é um submódulo de P_n isomorfo a M_μ, então $M \subseteq T(A)$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.3.6 e do Lema 2.3.5.

Capítulo 3

Aplicações da Teoria de Representações a PI-Álgebras

Neste capítulo, apresentaremos nosso estudo sobre algumas aplicações da teoria de Young para obter informações sobre T-ideais de PI-álgebras através de suas codimensões, cocaracteres e cotamanhos.

Em todo o capítulo, K denotará um corpo de característica zero.

3.1 Codimensões, cocaracteres e cotamanhos da álgebra exterior

Nesta seção, iremos apresentar os resultados obtidos por Olsson e Regev em [26] sobre as codimensões, cocaracteres e cotamanhos da álgebra exterior.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \vdash n$ e $m_1, m_2, ..., m_k \in \mathbb{N}$. Denotaremos por

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1, & ..., & \lambda_k \\ m_1, & ..., & m_k \end{array} \right\}$$

o conjunto de todos os S_n-módulos isomorfos a $m_1 M_{T_1(\lambda_1)} \oplus ... \oplus m_k M_{T_k(\lambda_k)}$, onde $T_i(\lambda_i)$ é uma tabela do diagrama D_{λ_i} e $m_i M_{T_i(\lambda_i)} = M_{T_i(\lambda_i)} \oplus ... \oplus M_{T_i(\lambda_i)}$ (m_i vezes), para

$i \in \{1, 2, ..., k\}$. Note que se J é um S_n-módulo tal que

$$J \in \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1, & ..., & \lambda_k \\ m_1, & ..., & m_k \end{array} \right\},$$

então $l(J) = m_1 + m_2 + ... + m_k$ e $\chi_J = m_1\chi_{\lambda_1} + m_2\chi_{\lambda_2} + ... + m_k\chi_{\lambda_k}$.

Lema 3.1.1 *Considere S'_{n-k+1} como sendo o grupo das permutações dos elementos $\{1, k+1, k+2, ..., n\}$. O polinômio*

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S'_{n-k+1}} s_k(x_{\sigma(1)}, x_2, x_3, ..., x_k)x_{\sigma(k+1)}...x_{\sigma(n)},$$

para $0 \leq k \leq n$, não é identidade para a álgebra de Grassmann.

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$ ímpar. Substituindo x_i por e_i, para $i = 2, ..., k$, e x_j por a_j, para $j = 1, k+1, k+2, ..., n$, onde cada $a_j \in Z(E) = E_0$ e satisfazem $e_2...e_k a_1 a_{k+1}...a_n \neq 0$, teremos, pelo Lema 1.2.12, que

$$\begin{aligned} f_k(a_1, e_2, e_3, ..., e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n) &= \sum_{\sigma \in S'_{n-k+1}} s_k(a_{\sigma(1)}, e_2, e_3, ..., e_k)a_{\sigma(k+1)}...a_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S'_{n-k+1}} s_{k-1}(e_2, e_3, ..., e_k)a_{\sigma(1)}a_{\sigma(k+1)}...a_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S'_{n-k+1}} (k-1)!e_2e_3...e_k a_{\sigma(1)}a_{\sigma(k+1)}...a_{\sigma(n)} \\ &= (k-1)!(n-k+1)!e_2e_3...e_k a_1 a_{k+1}...a_n \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Agora, tome $k \in \mathbb{N}$ par. Substituindo x_i por e_i, para $i = 1, 2, ..., k$, e x_j por a_j, para $j = k+1, k+2, ..., n$, onde, novamente, cada $a_j \in Z(E) = E_0$ e satisfazem $e_1e_2...e_k a_{k+1}...a_n \neq 0$, teremos, pelo Lema 1.2.12 e considerando S'_{n-k} o conjunto das permutações dos elementos $\{k+1, k+2, ..., n\}$,

$$\begin{aligned} f_k(e_1, e_2, ..., e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n) &= \sum_{\sigma \in S'_{n-k}} s_k(e_1, e_2, ..., e_k)a_{\sigma(k+1)}...a_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S'_{n-k}} k!e_1e_2e_3...e_k a_{\sigma(k+1)}...a_{\sigma(n)} \\ &= k!(n-k)!e_1e_2e_3...e_k a_{k+1}...a_n \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ não é identidade polinomial para a álgebra de Grassmann. ∎

Corolário 3.1.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Os polinômios u_n e s_n não são identidades polinomiais para a álgebra de Grassmann.*

Lema 3.1.3 *Considere o comutador triplo $[x_1, x_2, x_3]$. Então $c_n([x_1, x_2, x_3]) \leq 2^{n-1}$.*

Demonstração. Façamos $C = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. Substituindo x_1 por xy, x_2 por y e x_3 por z em $[[x_1, x_2], x_3]$ e usando $[xy, y] = [x, y]y$ (da equação 1.2), obteremos

$$\begin{aligned}
[xy, y, z] &= [[xy, y], z] = [[x, y]y, z] = [x, y]yz - z[x, y]y \\
&= [x, y]yz - zy[x, y] - z[[x, y], y],
\end{aligned}$$

e assim $[x, y]yz - zy[x, y] \in C$. Por outro lado, $[[x, y], yz] = [x, y]yz - yz[x, y]$, e com isso

$$\begin{aligned}
[z, y][x, y] &= zy[x, y] - yz[x, y] \\
&= zy[x, y] - yz[x, y] + [x, y]yz - [x, y]yz \\
&= [x, y]yz - yz[x, y] - ([x, y]yz - zy[x, y]) \in C.
\end{aligned}$$

Substituindo y por $y_1 + y_2$ em $[z, y][x, y]$, teremos que

$$\begin{aligned}
[z, y_1 + y_2][x, y_1 + y_2] &= ([z, y_1] + [z, y_2])([x, y_1] + [x, y_2]) \\
&= [z, y_1][x, y_2] + [z, y_2][x, y_1] + [z, y_1][x, y_1] + [z, y_2][x, y_2],
\end{aligned}$$

e assim $[z, y_1][x, y_2] + [z, y_2][x, y_1] \in C$, já que $[z, y_1][x, y_1] + [z, y_2][x, y_2] \in C$. Segue que

$$[z, y_1][x, y_2] \equiv -[z, y_2][x, y_1] \qquad \text{e} \qquad [x_1, x_2, x_3] \equiv 0 \qquad (\text{mod } C).$$

Dessas relações de congruência, concluímos que qualquer polinômio multilinear de grau n é uma combinação linear (mod C) de monômios do tipo

$$x_{i_1} \ldots x_{i_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}]$$

com $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{2m}$ e $2m + k = n$. Isso porque, ao escrever um polinômio multilinear como combinação linear (mod C) de monômios formados pelo produto de algumas variáveis, ordenadas com índice crescente, por comutadores, nos restará somente os monômios com comutadores duplos, pois $\overline{[x_1, x_2, x_3]}$ é zero em $\frac{P_n}{P_n \cap C}$. A ordem crescente dos índices j_l's pode ser obtida pois $\overline{[x, y]} = -\overline{[y, x]}$ e $\overline{[z, y_1][x, y_2]} = -\overline{[z, y_2][x, y_1]}$ em $P_n/(P_n \cap C)$. Note que o número de polinômios com a forma $x_{i_1} \ldots x_{i_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}]$ onde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{2m}$ e $2m + k = n$ é igual a

$$s_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{2q}$$

onde $q = \left[\frac{n}{2}\right]$ é a parte inteira de $\frac{n}{2}$. Denotando por s_1 a soma dos coeficientes $\binom{n}{i}$ do binômio com $i \leq n$ ímpar, segue da fórmula do binômio de Newton que

$$2^n = (1+1)^n = s_0 + s_1, \qquad 0 = (1-1)^n = s_0 - s_1.$$

Portanto, $s_0 = 2^{n-1}$, e assim $c_n([x_1, x_2, x_3]) \leq 2^{n-1}$. ■

Observação 3.1.4 Sendo $\lambda = (k, 1^{n-k}) \vdash n$, temos

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & ... & \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \vdots & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},$$

onde a primeira linha é composta por k células e a primeira coluna é composta por $n-k+1$ células. Nessas condições, diremos que D_λ é um diagrama *em forma de L*. Observe que para obtermos uma tabela standard de D_λ, o número 1 deve estar na célula $(1,1)$, e assim resta-nos escolher $k-1$ números entre os $n-1$ restantes para ocupar a primeira linha. Uma vez escolhidos estes $k-1$ números, só haverá uma possibilidade para o preenchimento da primeira linha e da primeira coluna. Com isso, temos que o número de tabelas standard de D_λ, com $\lambda = (k, 1^{n-k})$, é igual a $\binom{n-1}{k-1}$. Segue do Teorema 2.1.14 que $\dim_K M_\lambda = \binom{n-1}{k-1}$.

Teorema 3.1.5 *Seja E a álgebra de Grassmann (Exemplo 1.1.8) e considere $T(E)$, o seu T-ideal de identidades. Temos $c_n(E) = 2^{n-1}$ e*

$$P_n(E) \in \left\{ \begin{array}{cccccc} (n), & (n-1,1), & ..., & (n-k,1^k), & ..., & (1^n) \\ 1, & 1, & ..., & 1, & ..., & 1 \end{array} \right\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sejam $\chi_n(E) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ e J_n um S_n-submódulo de P_n tal que $P_n = (P_n \cap T(E)) \oplus J_n$. Observe que $J_n \simeq P_n(E)$. Para cada partição $\lambda_k = (n-k+1, 1^{k-1})$, com $k \in \{1, 2, ..., n\}$, considere a tabela

$$T_k = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & k+1 & k+2 & ... & n \\ \hline 2 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} \vdots & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} k & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Com isso, teremos

$$f_1(x_1, ..., x_n) = E_{T_1} \cdot (x_1...x_n) = u_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)},$$

o polinômio unitário de grau n,

$$f_n(x_1, ..., x_n) = E_{T_n} \cdot (x_1...x_n) = s_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)},$$

o polinômio standard de grau n, e em geral

$$f_k(x_1, ..., x_n) = E_{T_k} \cdot (x_1...x_n) = \sum_{\sigma \in S'_{n-k+1}} s_k(x_{\sigma(1)}, x_2, x_3, ..., x_k) x_{\sigma(k+1)}...x_{\sigma(n)},$$

onde S'_{n-k+1} é o grupo das permutações dos elementos $\{1, k+1, k+2, ..., n\}$.

Pelo Lema 3.1.1, para qualquer $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $f_k(x_1, ..., x_n)$ não é identidade para a álgebra de Grassmann, seja ela com ou sem unidade. Segue do Teorema 2.3.6 que $m_{\lambda_k} \neq 0$ e daí J_n possui algum submódulo minimal N_k isomorfo a M_{λ_k}. Como N_1, N_2, ..., N_n são dois a dois não isomorfos, temos, pela Proposição 1.4.14, que a soma $N = N_1 + N_2 + ... + N_n$ é direta. Além disso, $N \subseteq J_n$. Pela Observação 3.1.4, dim $N_k = \binom{n-1}{k-1}$ e daí dim $N = \sum\limits_{k=1}^{n}$ dim $N_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$. Logo, $c_n(E) \geq 2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segue do Exemplo 1.2.7 que $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T \subseteq T(E)$ e, do lema anterior, temos que $2^{n-1} \geq c_n([x_1, x_2, x_3]) \geq c_n(E) \geq 2^{n-1}$. Portanto, $c_n(E) = c_n([x_1, x_2, x_3]) = 2^{n-1}$. Concluímos também que $J_n = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_n$, e daí segue a segunda afirmação. ■

Corolário 3.1.6 *O n-ésimo cotamanho da álgebra de Grassman é n. Em símbolos, $l_n(E) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

3.2 Sequências de codimensões limitadas

Agora vamos apresentar, com base no estudo do artigo [25] de Olsson e Regev, uma série de resultados para demonstrar o principal teorema desta seção, que diz que se a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A é limitada, então ela é eventualmente limitada por 1, ou seja, vai existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $c_n(A) \leq 1$, para todo $n \geq m$.

Seja Q um conjunto de polinômios e considere $\langle Q \rangle^T$. Nos resultados a seguir, denotaremos $c_n(Q)$ simplesmente por c_n.

Lema 3.2.1 *Se $c_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $c_n \leq 2$ para $n > k+1$.*

Demonstração. Se $k \leq 2$, está feito. Suponhamos então $k \geq 3$ e façamos $P_n = (\langle Q\rangle^T \cap P_n) \oplus J_n$. Obviamente, segue direto da definição de codimensão que $c_n = \dim J_n$. Decompondo J_n como uma soma direta de submódulos irredutíveis de P_n, no máximo dois deles terão dimensão 1 (Proposição 2.1.20) e, pela Teorema 2.1.24 e Observação 2.1.25, os demais terão dimensão maior ou igual a $n-1$. Supondo que J_n possua algum submódulo de dimensão $n-1$ e, como $n-1 > k$, segue que $c_n > k$, contradizendo a hipótese. Com isso, para $n > k+1$, só podemos ter submódulos de dimensão 1 na decomposição de J_n e, assim, $c_n \leq 2$. ■

Lema 3.2.2 *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$.*

(a) Se $c_m = 0$, então $c_n = 0$ para todo $n \geq m$.

(b) Considere $c_n \neq 0$ para todo n. Se $c_m = 1$, então $c_n = 1$ para todo $n \geq m$.

Demonstração. Considere que $I = \langle Q\rangle^T$, $I_n = P_n \cap I$ e $C_n = P_n \cap \langle [x_1, x_2]\rangle^T$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Segue diretamente da definição que $c_m = 0$ se, e somente se, $I_m = P_m$, ou seja, $x_1 x_2 ... x_m \in I$. Como I é um T-ideal, teremos que $x_1 x_2 ... x_m x_{m+1} ... x_n \in I$ para todo $n \geq m$ e, portanto, $c_n = 0$.

(b) Façamos novamente $P_m = (I_m) \oplus J_m$. Assim, $\dim J_m = 1$. Existem exatamente dois submódulos de P_m de dimensão 1, o gerado pelo polinômio standard de grau m e o gerado pelo polinômio unitário de grau m, $u_m = \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(m)}$. Supondo que $J_m \neq K u_m$, pela Observação 2.1.16 e pela Proposição 2.1.20, temos que $K u_m \subseteq I_m$, e assim $u_m \in I_m$. Substituindo x_i por x, para todo $1 \leq i \leq m$ em u_m, teremos que $x^m \in I$. Mas, pelo Teorema de Nagata-Higman (1.1.7), para $l = 2^m - 1$, $x_1 x_2 ... x_l \in I$, ou seja, $P_l \subseteq I$ e, com isso, $c_l = 0$, gerando uma contradição.

Concluímos que $J_m = K u_m$. Segue que $I_m = C_m$. Observe que $\langle I_m\rangle^T \subseteq I$, que $I_m \subseteq \langle I_m\rangle^T \cap P_m$ e, como $\langle I_m\rangle^T$ é gerado por polinômios de grau m, temos pela Proposição 1.3.10 que $\langle I_m\rangle^T \cap P_{m+1} = \langle \langle I_m\rangle^T \cap P_m\rangle^T \cap P_{m+1}$. Segue que

$$\langle I_m\rangle^T \cap P_{m+1} = \langle \langle I_m\rangle^T \cap P_m\rangle^T \cap P_{m+1} \supseteq \langle I_m \cap P_m\rangle^T \cap P_{m+1} = \langle C_m \cap P_m\rangle^T \cap P_{m+1},$$

que por sua vez, pela Proposição 1.3.10 ($\langle [x_1, x_2] \rangle^T$ é gerado por um polinômio de grau 2) é igual a C_{m+1}, então $C_{m+1} \subseteq \langle I_m \rangle^T \cap P_{m+1}$. Note que $\langle I_m \rangle^T \subseteq I$ implica em $\langle I_m \rangle^T \cap P_{m+1} \subseteq I \cap P_{m+1} = I_{m+1}$, com isso, teremos que $C_{m+1} \subseteq I_{m+1}$ e assim $0 < c_{m+1} \leq c_{m+1}([x_1, x_2]) = 1$. Como $c_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $c_{m+1} = 1$. O resultado segue por indução. ∎

Lema 3.2.3 *Seja $d \geq 2$ e $R = \langle [x_1 ... x_d, x_{d+1}] \rangle^T$. Então $c_n(R) = 1$ se $n \geq d + 2$.*

Demonstração. Suponha $n \geq d + 2$. Se $\sigma \in S_n$, considere $M_\sigma = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}$. Definimos uma relação de equivalência "$\sim$" em S_n da seguinte forma:

$$\sigma \sim \rho \qquad \text{quando} \qquad M_\rho - M_\sigma \in R \cap P_n.$$

Agora, façamos $G = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \sim \mathrm{Id}\}$ e mostremos que G é um subgrupo de S_n. De fato, se $\sigma, \rho \in G$, então $M_{\sigma\rho} = \sigma M_\rho \equiv \sigma M_{\mathrm{Id}} = M_\sigma \equiv M_{\mathrm{Id}} \pmod{R \cap P_n}$. Assim, $\sigma\rho \in G$. Como S_n é finito, G deve ser um subgrupo.

Vamos mostrar que $G = S_n$. Para tanto, precisamos mostrar que $(k \;\; k+1) \in G$ para $k = 1, 2, ..., n-1$, pois o conjunto $\{(k \;\; k+1) \mid k = 1, ..., n-1\}$ gera o grupo S_n. Já que $n - 1 \geq d + 1$, temos, módulo $R \cap P_n$, que

$$\begin{aligned}
x_1 ... x_{n-1} x_n &\equiv x_n x_1 ... x_{n-1} \\
&\equiv ... \\
&\equiv x_k (x_{k+1} x_{k+2} ... x_n x_1 ... x_{k-1}) \\
&\equiv x_k (x_{k+2} ... x_n x_1 ... x_{k-1} x_{k+1}) \\
&\equiv x_{k+2} ... x_n x_1 ... x_{k-1} x_{k+1} x_k \\
&\equiv ... \\
&\equiv x_1 ... x_{k-1} x_{k+1} x_k x_{k+2} ... x_n
\end{aligned}$$

para qualquer $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Logo, $(k \;\; k+1) \in G$.

Já que $G = S_n$, então $c_n(R) \leq 1$. Ora, mas $\langle [x_1 ... x_d, x_{d+1}] \rangle^T \subseteq \langle [x, y] \rangle^T$ e a sequência de codimensões de $\langle [x, y] \rangle^T$ é constante igual a 1. Assim, $c_n(R) \geq 1$, e portanto $c_n(R) = 1$. ∎

Teorema 3.2.4 *Se a sequência de codimensões de uma PI-álgebra é limitada, então ela é eventualmente limitada por 1, ou seja, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$, $c_n(A) \leq 1$.*

Demonstração. Seja A uma PI-álgebra. Segue do Lema 3.2.1 e do Lema 3.2.2 que, se A é um contra-exemplo para o resultado, então a sequência de codimensões de A é eventualmente igual a 2. Suponha, por contradição, que isso acontece, ou seja, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c_n(A) = 2$ para todo $n \geq m$. Fazendo $P_n = (T(A) \cap P_n) \oplus J_n$ para $n \geq m$, segue do Teorema 2.1.24 e da Proposição 2.1.20 que $J_n = Ku_n \oplus Ks_n$. Logo, $\chi_n(A) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, com $m_\lambda = 0$ para $\lambda \neq (n), (1^n)$. Tomando $v = [x_1 x_2 ... x_{n-1}, x_n]$, com n ímpar, segue do Corolário 1.4.13 que $u_n, s_n \notin KS_n \cdot v$ e assim, pela Proposição 2.1.20, $KS_n \cdot v$ não possui submódulo de dimensão 1. Assim, $KS_n \cdot v$ é uma soma direta de S_n-módulos irredutíveis de P_n contidos em $T(A) \cap P_n$, pelo Corolário 2.3.7. Segue que $R = \langle [x_1 x_2 ... x_{n-1}, x_n] \rangle^T \subseteq T(A)$. Pelo Lema 3.2.3, $c_k(R) = 1$ para $k \geq n+1$. Como $c_k(R) \geq c_k(A) = 2$ para $k \geq n$, temos uma contradição. Portanto não existe A com sequência de codimensões limitada tal que sua sequência de codimensões seja eventualmente igual a 2. ■

Corolário 3.2.5 *Se a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A é limitada por m, então $c_n(A) \leq 1$ para $n \geq m+1$. Ou seja, para n suficientemente grande, $(T(A) \cap P_n) = P_n$ ou $(T(A) \cap P_n) = (\langle [x,y] \rangle^T \cap P_n)$.*

Proposição 3.2.6 *Sejam c_n as codimensões e l_n os cotamanhos de um T-ideal I. Se $c_n \leq (k+1)n - k$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 0$, então $l_n \leq k+2$ para $n \geq 5$. Em particular, se $c_n \leq n$, então $l_n \leq 2$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5$, e considere $\chi_n(I) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Suponha, por contradição, que $l_n \geq k+3$. Segue do item *(a)* do Teorema 2.1.24 e da Observação 2.1.25 que

$$
\begin{aligned}
c_n &= m_{(n)} \cdot 1 + m_{(1^n)} \cdot 1 + \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \neq (n), (1^n)}} m_\lambda d_\lambda \\
&\geq m_{(n)} + m_{(1^n)} + \left(\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \neq (n), (1^n)}} m_\lambda \right) (n-1).
\end{aligned}
$$

Como $\left(\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda\neq(n),(1^n)}} m_\lambda\right) = l_n - m_{(n)} - m_{(1^n)}$, $l_n \geq k+3$ e $m_{(n)} + m_{(1^n)} \leq 2$, teremos

$$\begin{aligned} c_n &\geq (l_n - m_{(n)} - m_{(1^n)})(n-1) + m_{(n)} + m_{(1^n)} \\ &= (l_n - 2)(n-1) + 2(n-1) + (n-2)(-m_{(n)} - m_{(1^n)}) \\ &\geq (l_n - 2)(n-1) + 2(n-1) - (2n-2) \\ &= (l_n - 2)(n-1) + 2 \\ &\geq (k+1)(n-1) + 2 \\ &= (k+1)n - k + 1, \end{aligned}$$

contradizendo que $c_n < (k+1)n - k$. Portanto, se $n \geq 5$, então $l_n \leq k+2$ e, em particular para $k = 0$, temos que se $c_n \leq n$, então $l_n \leq 2$. ■

Exemplo 3.2.7 Sejam $I = \langle [x,y]z \rangle^T$ e $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} \in P_n$, para $n \geq 3$. Note que $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} \equiv x_1...x_{i_n-1}x_{i_n+1}...x_nx_{i_n}$ (mod I), já que a única variável que não pode ser movida, módulo I, é a última. Com isso, $R = \{\overline{x_2x_3...x_nx_1}, \overline{x_3x_4...x_nx_1x_2}, ..., \overline{x_1x_2...x_n}\}$ é um conjunto gerador do espaço vetorial $P_n/(P_n \cap I)$. Assim, $c_n(I) \leq n$.

Considere agora a álgebra

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}.$$

Pelo Exemplo 1.2.8, temos que $[x,y]z$ é identidade para M, donde, $I \subseteq T(M)$. Agora, vamos mostrar que R é um conjunto linearmente independente. Se

$$\alpha_1\overline{x_2x_3...x_nx_1} + \alpha_2\overline{x_3x_4...x_nx_1x_2} + ... + \alpha_n\overline{x_1x_2...x_n} = \overline{0},$$

então $f = \alpha_1x_2x_3...x_nx_1 + \alpha_2x_3x_4...x_nx_1x_2 + ... + \alpha_nx_1x_2...x_n \in I \cap P_n$, e daí $f \in T(M)$. Fazendo as substituições $x_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $x_2 = x_3 = ... = x_n = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, como $A \cdot A = A$, $A \cdot B = B$ e $B \cdot A = 0$, teremos $\alpha_1 \cdot B = 0$ e daí, $\alpha_1 = 0$. Com processo análogo, $\alpha_i = 0$ para $i = 2, 3, ..., n$ e, com isso, R é linearmente independente. Segue que, para $n \geq 3$, $c_n(I) = n$.

É fácil ver que $P_1 \cap T(M) = \{0\}$ e, pelo Exemplo 1.3.9, $P_2 \cap T(M) = \{0\}$. Agora, seja $f \in T(M) \cap P_n$, com $n \geq 3$. Ora, pelo que já foi feito anteriormente,

$$f = \alpha_1x_2x_3...x_nx_1 + \alpha_2x_3x_4...x_nx_1x_2 + ... + \alpha_nx_1x_2...x_n + q,$$

onde $q \in I$. Fazendo substituições análogas às já feitas, teremos que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$, com isso, $f = q \in I$. Segue que $T(M) = I$. Portanto, $c_n(M) = c_n(I) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Façamos $P_n = (T(M) \cap P_n) \oplus J_n$. Segue da Proposição 3.2.6 que $l_n(M) \leq 2$, para $n \geq 5$. É claro que $l_n(M) \neq 0$ e $l_1(M) = 1$. Agora, suponha que existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$, tal que $l_m = 1$. Assim, J_m é irredutível de dimensão $c_m(M) = m$, não possuindo submódulo de dimensão 1. Pela Observação 2.1.16 e pela Proposição 2.1.20, $u_n \in T(M)$. Segue do Teorema de Nagata-Higman (1.1.7) que existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $x_1...x_d \in T(M)$ e daí $c_d = 0$, uma contradição. Com isso, concluímos que $l_n(M) = 2$, para todo $n \geq 5$.

3.3 Álgebras satisfazendo uma identidade de Capelli

Em toda esta seção, consideraremos os conjuntos de variáveis $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, ...\}$.

Identidades de Capelli foram usadas por Razmylov em 1973 para construir polinômios centrais para álgebras de matrizes. Posteriormente, foram usadas por Amitsur em 1975 para deduzir, entre outros resultados, o Teorema de Artin-Procesi em álgebras de Azumaya satisfazendo polinômios centrais e identidades de Capelli.

Nesta seção vamos caracterizar, tendo como base o artigo de Amitai Regev [30], K-álgebras que satisfazem uma identidade de Capelli pelas suas sequências de cocaracteres. Esse resultado pode ser aplicado no estudo das identidades de algumas álgebras específicas, como por exemplo, a álgebra $M_n(K)$.

Definição 3.3.1 *Chamamos o seguinte polinômio*

$$d_m(X, Y) = d_m(x_1, x_2, ..., x_m; y_1, y_2, ..., y_{m-1})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 x_{\sigma(3)} ... x_{\sigma(m-1)} y_m x_{\sigma(m)}$$

em $K\langle X \cup Y \rangle$ *de* polinômio de Capelli de tamanho m.

O polinômio de Capelli de tamanho m é multilinear de grau $2m - 1$. Através dele podemos obter 2^{m-1} polinômios substituindo alguns dos $y_i's \in Y$ por 1. Denotaremos o conjunto desses polinômios por $\{d_m(X, Y)\}$.

Exemplo 3.3.2 Para $m = 3$, e utilizando a Definição 1.2.11, teremos
$d_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2) = s_3(x_1 \overset{y_1}{\vee} x_2 \overset{y_2}{\vee} x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 x_{\sigma(3)}$,
$d_3(x_1, x_2, x_3; y_1, 1) = s_3(x_1 \overset{y_1}{\vee} x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}$,
$d_3(x_1, x_2, x_3; 1, y_2) = s_3(x_1, x_2 \overset{y_2}{\vee} x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} y_2 x_{\sigma(3)}$,
$d_3(x_1, x_2, x_3; 1, 1) = s_3(x_1, x_2, x_3)$ e, assim,
$\{d_3(X, Y)\} = \{d_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2), d_3(x_1, x_2, x_3; y_1, 1), d_3(x_1, x_2, x_3; 1, y_2), s_3(x_1, x_2, x_3)\}$.

Definição 3.3.3 *Dizemos que uma álgebra A* satisfaz $\{d_m(X, Y)\}$ *se todos os elementos de $\{d_m(X, Y)\}$ são identidades polinomiais para A.*

Note que se A é unitária e $d_m(X, Y)$ é uma identidade para A, então todos os elementos de $\{d_m(X, Y)\}$ também o são. Entretanto, se $1 \notin A$, isso não é válido. De fato, considere a subálgebra da álgebra exterior E com base $\{e_1, e_2, e_1e_2\}$. Temos que $d_2(X, Y)$ é identidade polinomial para essa álgebra, mas $s_2(x_1, x_2)$ não o é, conforme calculamos no Exemplo 1.3.4.

Dizemos que uma álgebra A unitária é algébrica de grau limitado n sobre K se cada elemento de A é algébrico de grau menor ou igual a n sobre K, isto é, para cada $a \in A$, existe um polinômio não nulo $f(x) \in K[x]$, com $\deg f \leq n$, tal que $f(a) = 0$.

Definição 3.3.4 *Seja $f = f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_t)$ um polinômio linear em cada uma das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Dizemos que f* é alternado em $x_1, x_2, ..., x_n$ *se, para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, o polinômio f se torna o polinômio nulo quando se substitui x_i por x_j.*

É fácil ver, pela linearidade de f em $x_1, x_2, ..., x_n$, que f é alternado em $x_1, x_2, ..., x_n$, se, e somente se, para $1 \leq i < j \leq n$,

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n, y_1, ..., y_t) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n, y_1, ..., y_t).$$

Mais ainda, como qualquer permutação de S_n pode ser escrita como um produto de transposições, temos que,

$$f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}, y_1, ..., y_t) = (-1)^\sigma f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_t).$$

No caso de f ser alternado em todas as suas variáveis, dizemos simplesmente que f é alternado.

Exemplo 3.3.5 O polinômio de Capelli de grau m, $d_m(X,Y)$, é um polinômio alternado nas variáveis $x_1, x_2, ...x_m$. O polinômio standard de grau n, s_n, é um polinômio alternado. O polinômio unitário de grau n, u_n, não é um polinômio alternado.

Proposição 3.3.6 *Sejam $f(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$ um polinômio alternado nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_m$, S um subconjunto não vazio de $\{1, ..., n\}$ tal que $|S \cap \{1, ..., m\}| \geq 2$ e H o subgrupo das permutações de S em S_n. Então $\left(\sum_{\sigma \in H} \sigma\right) \cdot f = 0$.*

Demonstração. Como H possui ao menos uma transposição, $H \nsubseteq A_n$ e assim, segue da teoria de grupos que $|H_n \cap A_n| = |H \cap (S_n - A_n)|$, donde $|H : H \cap A_n| = 2$. Tomando $\theta = (1 \quad j)$, onde $i, j \in S \cap \{1, ..., n\}|$, temos $H = (H \cap A_n) \cup (H \cap A_n) \cdot \theta$. Com isso, teremos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\sigma \in H} \sigma\right) \cdot f &= \left(\sum_{\rho \in H \cap A_n} \rho\right) \cdot f + \left(\sum_{\rho \in H \cap A_n} \rho\theta\right) \cdot f \\ &= \left(\sum_{\rho \in H \cap A_n} \rho\right) \cdot f + \left(\sum_{\rho \in H \cap A_n} \rho\right) \cdot (\theta \cdot f) \\ &= \left(\sum_{\rho \in H \cap A_n} \rho\right) \cdot f + \left(\sum_{\rho \in H \cap A_n} \rho\right) \cdot (-f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.3.7 *Sejam $f = f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_t)$ um polinômio alternado em $x_1, x_2, ..., x_n$ e A uma K-álgebra. Se $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset A$ é linearmente dependente sobre K, então $f(a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_t) = 0$ para quaisquer $b_1, b_2, ..., b_t \in A$.*

Demonstração. Por hipótese e sem perda de generalidade, digamos que $a_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_i$, com $\alpha_i \in K$. Mas

$$f(a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_t) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i f(a_i, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_t) = 0,$$

já que f é alternado em $x_1, x_2, ..., x_n$ e em cada termo $f(a_i, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_t)$ dois argumentos coincidem. ■

Teorema 3.3.8 *Seja A uma K-álgebra.*

(a) Se $\dim_K A = m$ finita, então A satisfaz a identidade de Capelli $d_{m+1}(X, Y)$;

(b) Se A é algébrica de grau limitado m sobre K, então o polinômio

$$d_{m+1}(y, xy, x^2y, ..., x^my; z_1, ..., z_{m+2})$$

é identidade polinomial da álgebra A.

Demonstração. (a) Como d_{m+1} é multilinear, basta que provemos que o polinômio se anula substituindo suas variáveis por elementos da base de A (vide Proposição 1.3.3). Como $\dim_K A = m$ e d_{m+1} é alternado em $m+1$ variáveis, o resultado segue da Proposição 3.3.7.

(b) Seja $a \in A$ e $f(x) \in K[x]$ não nulo, com $\deg f \leq m$ e tal que $f(a) = 0$. Para todo $b \in A$, $f(a)b = 0$ implica que o conjunto $\{b, ab, a^2b, ..., a^mb\}$ é linearmente dependente. Novamente pela Proposição 3.3.7, segue que $d_{m+1}(y, xy, x^2y, ..., x^my; z_1, ..., z_{m+2})$ é identidade polinomial de A. ■

Definição 3.3.9 *Sejam A uma PI-álgebra e $\chi_n(A)$ seu n-ésimo caracter. Dizemos que a sequência de cocaracteres de A é de* altura limitada por l *se, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq l}} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde $h(\lambda)$ é a altura da partição λ (vide Definição 2.1.3).

Observação 3.3.10 *Se a sequência de cocaracteres de A é de altura limitada por l, então $m_\lambda = 0$ para toda $\lambda \vdash n$ tal que $h(\lambda) > l$.*

Para o próximo resultado, precisaremos do conceito de ação à direita de S_n em P_n. Seja $\rho \in S_n$ e $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)} \in P_n$, onde $\alpha_\sigma \in K$. Definimos $f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \rho$ como sendo $\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(\rho(1))} ... x_{\sigma(\rho(n))}$. Para $\gamma = \sum_{\rho \in S_n} k_\rho \rho \in KS_n$, definimos $f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \gamma$ como sendo $\sum_{\rho \in S_n} k_\rho f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \rho$. Observe que

$$\mu\sigma(x_1 x_2 ... x_n) = x_{\mu(\sigma(1))} x_{\mu(\sigma(2))} ... x_{\mu(\sigma(n))} = (x_{\mu(1)} x_{\mu(2)} ... x_{\mu(n)}) \cdot \sigma,$$

para quaisquer $\mu, \sigma \in S_n$.

Teorema 3.3.11 *Uma álgebra A satisfaz $\{d_m(X, Y)\}$ se, e somente se, sua sequência de cocaracteres é de altura limitada por $m - 1$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\{d_m(X,Y)\} \subseteq T(A)$. Observe que $d_h(X,Y)$ ($h \geq m$) pode ser escrito como uma soma de $d_m(X,Y)$'s multiplicados por monômios pela esquerda e pela direita, e assim $\{d_h(X,Y)\} \subseteq T(A)$ para todo $h \geq m$. Queremos mostrar que a sequência de cocaracteres de A tem altura limitada por $m-1$, ou seja, que para qualquer $\lambda \vdash n$ com $h(\lambda) \geq m$, temos $m_\lambda = 0$. Pelo Teorema 2.3.6, $m_\lambda = 0$ equivale a $E_T \cdot f \in T(A)$ para toda tabela T de λ e para todo $f \in P_n$ (observe que podemos supor f monômio).

Fixemos $\lambda \vdash n$, com $h(\lambda) \geq m$, T uma tabela da partição λ e o monômio $f = x_{\theta(1)}x_{\theta(2)}...x_{\theta(n)} = \theta \cdot (x_1x_2...x_n)$. Considerando agora a tabela $T_{0,\lambda}$ (veja a Proposição 2.1.26), tomemos $\eta \in S_n$ tal que $\eta^{-1}E_{T_{0,\lambda}}\eta$. Sendo $\mu = \eta\theta$, mostremos que $E_{T_{0,\lambda}}\mu(x_1...x_n) \in T(A)$. Observe que $E_{T_{0,\lambda}}\mu(x_1...x_n) = E_{T_{0,\lambda}}(x_1...x_n) \cdot \mu$. Note que, pelo item *(b)* da Proposição 2.1.26, temos

$$E_{T_{0,\lambda}}(x_1x_2...x_n) = P_{T_{0,\lambda}}Q_{T_{0,\lambda}}(x_1x_2...x_n)$$

$$= P_{T_{0,\lambda}}(s_r(x_1,x_2,...,x_r)s_{r_2}(x_{r+1},x_{r+2},...,x_{r+r_2})...s_{r_{m_1}}(x_{p+1},x_{p+2},...,x_n))$$

$$= \sum_{\sigma \in R_{T_{0,\lambda}}} \sigma(s_r(x_1,x_2,...,x_r)s_{r_2}(x_{r+1},x_{r+2},...,x_{r+r_2})...s_{r_{m_1}}(x_{p+1},x_{p+2},...,x_n)).$$

Considere $(x_{r+1},...,x_n) = (y_{r+1},...,y_n)$ e

$$s_{r_2}(x_{r+1},...,x_{r+r_2})...s_{r_{m_1}}(x_{p+1},...,x_n) = g(y_{r+1},...,y_n),$$

onde $g(y_{r+1},...,y_n) = \sum_M \alpha_M M(y_{r+1},...,y_n)$, sendo os $M(y_{r+1},...,y_n)$'s monômios. Nos resta agora provar que, para cada monômio M,

$$s_r(x_1,...,x_r)M(y_{r+1},...,y_n) \cdot \mu \in T(A).$$

Observe que

$$s_r(x_1,...,x_r)M(y_{r+1},...,y_n) \cdot \mu$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_r} (-1)^\sigma \sigma\right) x_1...x_r M(y_{r+1},...,y_n) \cdot \mu$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_r} (-1)^\sigma \sigma\right) Y_0 x_{i_1} Y_1 x_{i_2} ... Y_{r-1} x_{i_r} Y_r,$$

onde cada Y_i é um monômio em algumas das variáveis $\{y_{r+1},...,y_n\}$, com cada y_j figurando em somente um dos Y_i's, e $(i_1,...,i_r)$ é uma permutação de $(1,...,r)$. Assim,

$$s_r(x_1,...,x_r)M(y_{r+1},...y_n) \cdot \mu$$

$$= (-1)^{\eta} \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\sigma} Y_0 x_{\sigma(1)} Y_1 ... Y_{r-1} x_{\sigma(r)} Y_r$$
$$= (-1)^{\eta} Y_0 d_r \left(x_1, ..., x_r; Y_1, ..., Y_{r-1}\right) Y_r \in T(A),$$

já que é consequência de um dos polinômios de $\{d_r(X,Y)\} \subseteq T(A)$. Finalmente, como $E_{T_{0,\lambda}} \mu(x_1 x_2 ... x_n) \in T(A)$, temos que

$$E_T \cdot f = \eta^{-1} E_{T_{0,\lambda}} \eta \theta(x_1 x_2 ... x_n) = \eta^{-1} E_{T_{0,\lambda}} \mu(x_1 x_2 ... x_n) \in T(A).$$

Reciprocamente, suponha $m_\lambda = 0$ sempre que $h(\lambda) \geq m$ e considere o polinômio

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_{2m-1}) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{m+1} x_{\sigma(2)} x_{m+2} ... x_{2m-1} x_{\sigma(m)}.$$

Queremos provar que f é uma identidade para A, ou seja, que $KS_{2m-1} f \subseteq T(A)$. Para tanto, como KS_{2m-1} é a soma dos seus ideais minimais à esquerda associados às tabelas das partições de $2m-1$, segue que é suficiente mostrar que $E_{T_\lambda} f \in T(A)$ para toda $\lambda \vdash 2m-1$ e para toda tabela T_λ de λ.

Tomando $\lambda \vdash 2m-1$ arbitrária, se $h(\lambda) \geq m$, então $m_\lambda = 0$ e, pelo Teorema 2.3.6, $E_{T_\lambda} f \in T(A)$. Suponha agora que $h(\lambda) < m$. Como f é alternado nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_m$, note que, para todo $\tau \in S_{2m-1}$, o polinômio

$$\tau f = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\sigma} x_{\tau(\sigma(1))} x_{\tau(m+1)} x_{\tau(\sigma(2))} x_{\tau(m+2)} ... x_{\tau(2m-1)} x_{\tau(\sigma(m))}$$

é alternado nas variáveis $x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, ..., x_{\tau(m)}$. Sendo $h(\lambda) = t$, temos $R(T_\lambda) = H_1 H_2 ... H_t$ de acordo com o que foi visto na Observação 2.1.8. Segue também da Observação 2.1.8 que $\sum_{\sigma \in R(T_\lambda)} \sigma = \left(\sum_{\sigma_1 \in H_1} \sigma_1\right) ... \left(\sum_{\sigma_t \in H_t} \sigma_t\right)$, sendo estes fatores comutativos.

Note que pelo menos dois números entre $\tau(1), ..., \tau(m)$ estarão em uma mesma linha de T_λ, digamos, na i-ésima linha. Teremos, pela Proposição 3.3.6, que

$$\left(\sum_{\sigma_i \in H_i} \sigma\right) \tau f = 0,$$

ou seja, é o polinômio nulo de $K\langle X \rangle$. Segue que $\left(\sum_{\sigma \in R(T_\lambda)} \sigma\right) \tau f = 0$ e consequentemente $E_{T_\lambda} f = 0$, já que $E_{T_\lambda} = \left(\sum_{\sigma \in R(T_\lambda)} \sigma\right) \left(\sum_{\tau \in C(T_\lambda)} (-1)^{\tau} \tau\right)$. Provamos assim que, para todo $\lambda \vdash n$ com $h(\lambda) < m$, $E_{T_\lambda} f \in T(A)$. Portanto $f \in T(A)$.

Finalmente, note que, para qualquer polinômio $g \in \{d_m(X,Y)\}$, teremos, de maneira análoga, que $g \in T(A)$. Portanto, $\{d_m(X,Y)\} \subseteq T(A)$. ■

Corolário 3.3.12 *Seja A uma álgebra tal que* $\dim_K A = k$. *Então, para todo $n \geq 1$,*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq k}} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Demonstração. Consequência imediata do resultado anterior com o Teorema 3.3.8. ■

Corolário 3.3.13 *Considere a álgebra $M_k(K)$ (ver Exemplo 1.1.3). Então*

$$\chi_n(M_k(K)) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq k^2}} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Demonstração. Em [1] foi demonstrado por Amitsur que $d_{k^2+1}(X, Y)$ é identidade para $M_k(K)$ e que $k^2 + 1$ é o menor índice com essa propriedade. Como $M_k(K)$ é unitária, segue que ela satisfaz a identidade de Capelli $d_{k^2+1}(X, Y)$, logo, pelo teorema anterior, temos o resultado. ■

Corolário 3.3.14 *A álgebra de Grassman não satisfaz nenhuma identidade de Capelli.*

Demonstração. Se E satisfizesse uma identidade de Capelli, então, pelo Teorema 3.3.11, $T(E)$ teria sua sequência de cocaracteres de altura limitada, o que seria uma contradição com o Teorema 3.1.5. ■

Exemplo 3.3.15 Considere o T-ideal gerado pelo polinômio standard de grau 3 que vamos denotar simplesmente por $\langle s_3 \rangle^T$. Queremos mostrar que $\{d_3(X, Y)\} \subseteq \langle s_3 \rangle^T$.

Seguindo a Definição 1.2.11, note que

$$\begin{aligned} s_4(x_1, x_2, x_3, y) &= -y \cdot s_3(x_1, x_2, x_3) + s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2, x_3) \\ &\quad - s_3(x_1, x_2 \overset{y}{\vee} x_3) + s_3(x_1, x_2, x_3) \cdot y, \end{aligned}$$

disso, segue que

$$s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2, x_3) - s_3(x_1, x_2 \overset{y}{\vee} x_3) \in \langle s_3 \rangle^T. \tag{3.1}$$

Agora, veja que

$$s_3(x_1, x_2, x_3 y) = s_2(x_1, x_2) \cdot x_3 y - s_2(x_1 \overset{x_3 y}{\vee} x_2) + x_3 y \cdot s_2(x_1, x_2).$$

Assim, teremos

$$
\begin{aligned}
& s_3(x_1,x_2,x_3y)+s_3(x_2,x_3,x_1y)+s_3(x_3,x_1,x_2y) \\
&= (x_1y\cdot s_2(x_2,x_3)-x_2y\cdot s_2(x_1,x_3)+x_3y\cdot s_2(x_1,x_2)) \\
&\quad + \Big(s_2(x_1 \overset{x_2y}{\vee} x_3)-s_2(x_2 \overset{x_1y}{\vee} x_3)-s_2(x_1 \overset{x_3y}{\vee} x_2)\Big) \\
&\quad + (s_2(x_1,x_2)\cdot x_3y-s_2(x_1,x_3)\cdot x_2y+s_2(x_2,x_3)\cdot x_1y) \\
&= s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2,x_3)+s_3(x_1,x_2 \overset{y}{\vee} x_3)+s_3(x_1,x_2,x_3)\cdot y,
\end{aligned}
$$

e, com isso,

$$s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2,x_3)+s_3(x_1,x_2 \overset{y}{\vee} x_3)\in \langle s_3\rangle^T. \tag{3.2}$$

Das equações 3.1 e 3.2, segue que $s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2,x_3), s_3(x_1,x_2 \overset{y}{\vee} x_3)\in\langle s_3\rangle^T$ e, como

$$
\begin{aligned}
s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2 \overset{x_4}{\vee} x_3) &= (x_1yx_2x_4x_3-x_2yx_1x_4x_3+x_3yx_1x_4x_2-x_1yx_3x_4x_2 \\
&\quad +x_2yx_3x_4x_1-x_3yx_2x_4x_1)+(x_4yx_1x_2x_3-x_4yx_2x_1x_3 \\
&\quad +x_2yx_4x_1x_3-x_1yx_4x_2x_3)-(x_4yx_1x_2x_3-x_4yx_2x_1x_3 \\
&\quad +x_2yx_4x_1x_3-x_1yx_4x_2x_3) \\
&= s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2,x_4)\cdot x_3-(x_1yx_3x_4x_2-x_3yx_1x_4x_2 \\
&\quad +x_3yx_4x_1x_2-x_1yx_4x_3x_2+x_4yx_1x_3x_2-x_4yx_3x_1x_2) \\
&\quad +(x_2yx_3x_4x_1-x_3yx_2x_4x_1+x_3yx_4x_2x_1-x_2yx_4x_3x_1 \\
&\quad +x_4yx_2x_3x_1-x_4yx_3x_2x_1)-(x_4yx_1x_2x_3-x_4yx_2x_1x_3 \\
&\quad +x_2yx_4x_1x_3-x_1yx_4x_2x_3)+(x_3yx_4x_1x_2-x_1yx_4x_3x_2 \\
&\quad +x_4yx_1x_3x_2-x_4yx_3x_1x_2)-(x_3yx_4x_2x_1-x_2yx_4x_3x_1 \\
&\quad +x_4yx_2x_3x_1-x_4yx_3x_2x_1) \\
&= s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2,x_4)\cdot x_3-s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_3,x_4)\cdot x_2+s_3(x_2 \overset{y}{\vee} x_3,x_4)\cdot x_1 \\
&\quad +(x_1yx_4x_2x_3-x_1yx_4x_3x_2+x_2yx_4x_3x_1-x_2yx_4x_1x_3 \\
&\quad +x_3yx_4x_1x_2-x_3yx_4x_2x_1)-(x_4yx_1x_2x_3-x_4yx_1x_3x_2 \\
&\quad +x_4yx_2x_3x_1-x_4yx_2x_1x_3+x_4yx_3x_1x_2-x_4yx_3x_2x_1) \\
&= s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2,x_4)\cdot x_3-s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_3,x_4)\cdot x_2+s_3(x_2 \overset{y}{\vee} x_3,x_4)\cdot x_1 \\
&\quad +s_3(x_1 \overset{yx_4}{\vee} x_2,x_3)-x_4y\cdot s_3(x_1,x_2,x_3),
\end{aligned}
$$

teremos $s_3(x_1 \overset{y}{\vee} x_2 \overset{x_4}{\vee} x_3)\in\langle s_3\rangle^T$. Portanto, $\{d_3(X,Y)\}\subseteq\langle s_3\rangle^T$. Segue do Teorema 3.3.11 que a sequência de cocaracteres de $\langle s_3\rangle^T$ é de altura limitada por 2.

Bibliografia

[1] S. A. Amitsur, *Identities and linear dependence*, Israel J. Math. **22**, 127–137 (1975).

[2] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449–463 (1950).

[3] S. A. Amitsur, A. Regev, *P.I. algebras and their cocharacters*, J. Algebra. **78**, 248–254 (1982).

[4] H. Boerner. *Representations of groups*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdan, 1967, 1970.

[5] J. Colombo, P. Koshlukov, *Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic p*, Israel J. Math. **146**, 337–355 (2005).

[6] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, John Wiley and Sons, New York-London, 1962.

[7] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20 (3)**, 188–194 (1981).

[8] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[9] J. Dubnov, V. Ivanov, *Sur l'abaissement du degré des polynômes en affineurs*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR **41**, 96–98 (1943).

[10] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic* $p > 0$, Israel J. Math. **122**, 305–316 (2001).

[11] A. Giambruno, D. La Mattina, *PI-algebras with slow codimensions growth*, J. Algebra. **284**, 371–391 (2005).

[12] A. Giambruno, M. Zaicev, *On codimension growth of finitely generated associative algebras*, Adv. Math., **140**, 145–155 (1998).

[13] A. Giambruno, M. Zaicev, *Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate*, Adv. Math., **142**, 221–243 (1999).

[14] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomials Identities and Asymptotic Methods*, Mathematical Surveys and Monographs 122, Amer. Math. Soc., 2005.

[15] N. Jacobson, *Structure theory of algebraic algebras of bounded degree*, Annals of Math. **46**, 695–707 (1945).

[16] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, 2ª edição, Dover, New York, 2009.

[17] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 575–580 (1948).

[18] A. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Math. USSR, Izv. **25**, 359–374 (1985).

[19] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic **26**, 362–397 (1987).

[20] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$*, J. Algebra **241**, 410–434 (2001).

[21] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7**, 237–264 (1958).

[22] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the American Mathematical Society **181**, 429–438 (1973).

[23] V. N. Latyshev, *On Regev‘s theorem on identities in tensor product of PI-algebras* (Russo), Ups. Mat. Nauk. **27**, 213–214 (1973).

[24] J. Levitzki, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1033–1035 (1946).

[25] J. B. Olsson, A. Regev, *An application of representation theory to PI-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **55**, 253–257 (1976).

[26] J. B. Olsson, A. Regev, *Colength sequence of some T-ideals*, J. Algebra., **38**, 100–111 (1976).

[27] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic **12**, 47–63 (1973).

[28] Yu. P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*, Math. USSR, Izv. **8**, 727–760 (1974).

[29] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel Journal of Mathematics, **11**, 131–152 (1972).

[30] A. Regev, *Algebras satisfying a Capelli identity*, Isral J. Math. **33**, 149–154 (1979).

[31] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2ª edição, Springer, NY, 1996.

[32] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math. **23**, 187–188 (1976).

[33] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc **14**, 367–373 (1963). Correção: **21**, 379–380 (1969).