

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# PI-equivalências em Álgebras Matriciais

por

David Levi da Silva Macêdo <sup>†</sup>

sob orientação dos

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva  
Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

M141p Macêdo, David Levi da Silva.  
PI-equivalências em álgebras matriciais / David Levi da Silva  
Macêdo. – Campina Grande, 2015.  
116 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade  
Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia,  
2015.

"Orientação: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva,  
Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior".

Referências.

1. PI-Álgebra. 2. Álgebras Graduadas. 3. Identidades  
Graduadas. 4. PI-Equivalência. I. Silva, Diogo Diniz Pereira da  
Silva e. II. Brandão Júnior, Antônio Pereira. III. Título.

CDU 512.5(043)

# PI-equivalências em Álgebras Matriciais

por

David Levi da Silva Macêdo

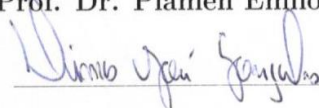
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

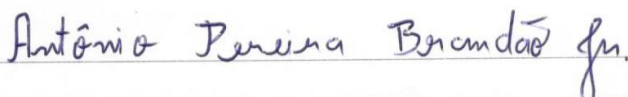
Aprovada por:



Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov - UNICAMP



Prof. Dr. Dimas José Gonçalves - UFSCAR



Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2015

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo que tem concedido em minha vida.

Aos meus pais, Maria José e Maurilo Macêdo, e toda minha família, que me apoiaram sempre desde o início dos meus estudos.

Em especial, aos professores do meu ensino fundamental e médio que contribuíram muito para minha formação, tanto acadêmica quanto pessoal. Em especial, os professores Neto, Samuel, Socorro e Valda, por terem organizado um cursinho pré-vestibular para nossa turma na época sem nenhum retorno financeiro.

Aos professores do CCET-UFRN que contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica durante a graduação. Principalmente à professora Débora que foi minha orientadora em alguns trabalhos de pesquisa e me influenciou bastante em ingressar no mestrado.

Em especial, aos grandes amigos do grupo PET-Matemática da UFRN. Em especial, os grandes amigos Léo, Ruan e Raphael Moreira.

Ao professor Diogo Diniz pela disposição e paciência em minha orientação por quase todo mestrado e mesmo longe continuar me ajudando e contribuindo para elaboração da presente dissertação.

Ao professor Antônio Brandão por ter aceito continuar com minha orientação, com a ausência do professor Diogo, e estar sempre a disposição para qualquer dúvida ou problema, colaborando para o presente trabalho.

Em especial, aos amigos do mestrado e do doutorado em Matemática. Em especial, os amigos Alan de Araújo, Claudemir Fideles, Antônio Marcos (Pajé) e José Luando.

Aos professores Plamen Koshlukov e Dimas José por fazerem parte da banca examinadora e deixarem sua contribuição para o nosso trabalho.

Por fim, à CAPES pelo apoio financeiro.

# Dedicatória

Aos meus pais Maria José e  
Maurilo Macêdo e meu irmão  
Efraim.

# Resumo

Nesta dissertação, considerando  $F$  um corpo de característica zero, são estabelecidas bases para identidades graduadas de  $M_n(F)$ ,  $M_{p,q}(E)$ , produtos tensoriais da forma  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$  ou  $M_{p,q}(E) \otimes E$  e alguns casos mais particulares das duas primeiras álgebras com  $n = 2$  e  $p = q = 1$ . Como consequência dos trabalhos de Kemer, as únicas álgebras T-primas em característica zero são  $M_n(F)$ ,  $M_n(E)$  e a subálgebra  $M_{p,q}(E)$  de  $M_{p+q}(E)$ , as quais, em alguns casos particulares, são PI-equivalentes a uma das álgebras  $E \otimes E$ ,  $M_{p,q}(E) \otimes E$  e  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ . Mostramos essas PI-equivalências utilizando argumentos diferentes dos usados na teoria de Kemer.

**Palavras-chave:** PI-Álgebra, Álgebras Graduadas, Identidades Graduadas, PI-equivalência.

# Abstract

In this work, considering  $F$  a field of characteristic zero, we establish bases to graded identities of  $M_n(F)$ ,  $M_{p,q}(E)$ , tensor products of form  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$  or  $M_{p,q}(E) \otimes E$  and some special cases of the first two algebras with  $n = 2$  and  $p = q = 1$ . As a result of Kemer's work, the only T-prime algebras in characteristic zero are  $M_n(F)$ ,  $M_n(E)$  and the subalgebra  $M_{p,q}(E)$  of  $M_{p+q}(E)$ , which, in specific cases, are PI-equivalent to one of the algebras  $E \otimes E$ ,  $M_{p,q}(E) \otimes E$  and  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ . Thus, these PI-equivalences are shown in this dissertation, using different arguments from the ones used in Kemer's theory.

**Keywords:** PI-algebra, Graded Algebras, Graded Identities, PI-Equivalence.

# Conteúdo

<b>Resumo</b> . . . . .	viii
<b>Abstract</b> . . . . .	ix
<b>Introdução</b> . . . . .	6
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	<b>10</b>
1.1 Álgebras . . . . .	10
1.2 Módulos sobre Álgebras e Representações de Grupos . . . . .	18
1.3 Representações de $S_n$ . . . . .	27
1.4 Álgebra Associativa Livre . . . . .	32
1.5 Identidades polinomiais . . . . .	33
1.6 Polinômios Multi-homogêneos e Multilineares . . . . .	36
1.7 Álgebras G-graduadas e Identidades Polinomiais Graduadas . . . . .	39
<b>2 Identidades graduadas para <math>M_n(F)</math> e <math>M_{p,q}(E) \otimes E</math></b>	<b>50</b>
2.1 Identidades $\mathbb{Z}_n$ -graduadas para $M_n(F)$ . . . . .	50
2.2 O $T_n$ -ideal de $M_n(F)$ . . . . .	53
2.3 Identidades graduadas de $M_{p,q}(E) \otimes E$ . . . . .	59
<b>3 Identidades Graduadas de <math>M_{1,1}(E)</math></b>	<b>64</b>
3.1 Alguns conceitos . . . . .	64
3.2 Identidades graduadas de $M_2(F)$ . . . . .	66
3.3 O $T_2$ -ideal de $M_{1,1}(E)$ . . . . .	76
<b>4 Identidades Graduadas de <math>M_{p,q}(E)</math></b>	<b>84</b>
4.1 A álgebra $M_\alpha(E)$ . . . . .	85



4.2	Identidades $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas de $M_{p,q}(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ . . . . .	87
4.3	Identidades monomiais multilineares de $M_{p,q}(E)$ . . . . .	95
4.4	Gradações não isomorfas para $M_{p,q}(E)$ . . . . .	107
<b>Bibliografia</b>		<b>115</b>

# Introdução

Um dos objetos de estudo da álgebra moderna são as chamadas PI-Álgebras, ou Álgebras com Identidades Polinomiais, as quais formam uma classe estudada pela PI-Teoria. As álgebras de matrizes, as álgebras de dimensão finita e álgebras comutativas fazem parte dessa classe e o estudo destas classes de álgebras é significativo, tendo em vista as diversas aplicações dessas estruturas. Os principais objetos de estudo da PI-Teoria são as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra  $A$ , a estrutura de uma álgebra que satisfaz uma certa identidade polinomial, os T-ideais e as variedades de álgebras.

Dizemos que um polinômio  $f$  em variáveis não comutativas é identidade polinomial para uma álgebra  $A$  se ele anula para qualquer substituição por elementos desta álgebra. Se existe um polinômio não-nulo que é identidade para a álgebra  $A$  dizemos que  $A$  é uma PI-Álgebra. O polinômio  $f(x, y) = xy - yx$  é identidade para uma álgebra comutativa, a álgebra de Grassmann satisfaz a identidade  $[[x, y], z]$ , onde  $[x, y] = xy - yx$ , e o polinômio  $x_1x_2 \cdots x_n$  é identidade para uma álgebra  $A$  nilpotente, com  $A^n = 0$ . Subálgebras, imagens homomórficas e produtos diretos de PI-álgebras também são álgebras com identidades polinomiais.

A noção de identidade polinomial surge nos trabalhos de Dehn [6] e Wagner [27]. Mas foi a partir de 1948, com o artigo de Kaplansky [17], que se teve um interesse de forma mais intensa na área. Dois anos após o trabalho de Kaplansky, Amistur e Levitsky mostraram que o polinômio standard de grau  $2n$  é uma identidade de grau minimal para álgebra de matrizes de ordem  $n$  (ver [1]). Esse resultado contribuiu para um novo caminho dentro da PI-teoria, que seria descrever as identidades polinomiais satisfeitas por uma dada álgebra.

Denote por  $F\langle X \rangle$  a álgebra dos polinômios em variáveis associativas e não comutativas no conjunto  $X$  sobre o corpo  $F$ , também chamada de álgebra associativa livre em  $X$  sobre  $F$ . Quando um ideal em  $F\langle X \rangle$  é invariante por endomorfismos na álgebra livre ele é chamado de T-ideal. O conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra  $A$ , denotado por  $T(A)$ , é um T-ideal da álgebra livre, e todo T-ideal de  $F\langle X \rangle$  é o ideal das identidades de alguma álgebra. Portanto, determinar as identidades polinomiais de uma álgebra é equivalente a encontrar o T-ideal desta álgebra.

A correspondência entre T-ideais e álgebras não é bijetiva, pois álgebras não isomorfas podem ter o mesmo ideal de identidades, mas existe uma correspondência biunívoca entre T-ideais e variedades. Uma variedade de álgebras é uma classe de álgebras que satisfazem um dado conjunto de identidades. Esse conceito foi introduzido por Birkhoff [3] e Malcev [20], e se tornou uma linguagem natural na teoria de identidades.

Um dos principais e mais difíceis problemas na PI-teoria é descrever um T-ideal. Nesse sentido, Specht, em 1950 [25], conjecturou que todo T-ideal próprio em  $F\langle X \rangle$  é finitamente gerado, quando o corpo base  $F$  tem característica zero. Esse problema, conhecido como Problema de Specht, juntamente com os resultados de Amistur e Levitsky, motivou um grande desenvolvimento na teoria de identidades polinomiais, onde inicialmente se considerava corpos de característica zero.

O Problema de Specht foi resolvido apenas em 1987 por Kemer, como pode ser visto em [18]. Sua prova é baseada em uma teoria sobre T-ideais que envolve os conceitos de superidentidades e alguns produtos tensoriais graduados com a álgebra de Grassmann, chamados de envelopes de Grassmann. Nesse trabalho, além da solução principal, Kemer também classificou, em característica zero, as álgebras geradoras de variedades primas não triviais, também chamadas de álgebras T-primas. Apesar de sua grande importância, o trabalho do Kemer nos garante apenas finitude da base dos T-ideais. Além disso, em característica positiva, o problema de Specht não é válido, pois existem contra exemplos como pode ser visto nos trabalhos de Belov [2], Grishin [13] e Shchigolev [24], bem como não temos uma classificação para as álgebras T-primas.

Como trabalhar com identidades ordinárias quase sempre é complicado, foram desenvolvidas outras ideias de identidades polinomiais como as identidades polinomiais com traço, as identidades polinomiais com involução e as identidades polinomiais

graduadas. A partir desta última podemos estabelecer vários resultados a respeito das identidades ordinárias, mais precisamente, se os ideais das identidades graduadas de duas álgebras coincidem, então o mesmo vale para os ideais das identidades ordinárias. Durante este trabalho vamos dar maior ênfase a este de tipo de identidade, com relação às álgebras matriciais  $M_n(F)$ ,  $M_n(E)$  e  $M_{p,q}(E)$ , onde  $E$  é a álgebra de Grassmann e  $M_{p,q}(E)$  são certas subálgebras de  $M_{p+q}(E)$  descritas no Capítulo 1 (ver Exemplo 1.1.17 na página 16), pois estas são as álgebras que possuem os únicos T-ideais T-primos não triviais em característica zero, pelos resultados de Kemer.

Duas álgebras  $A$  e  $B$  são PI-equivalentes se  $T(A) = T(B)$ , e denotamos  $A \sim B$ . Como consequência da teoria desenvolvida por Kemer, temos as seguintes PI-equivalências:

- (1)  $E \otimes E \sim M_{1,1}(E)$ ;
- (2)  $M_{p,q}(E) \otimes E \sim M_{p+q}(E)$ ;
- (3)  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E) \sim M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ .

Em característica zero, sabemos que existe uma base finita para  $T(M_n(F))$ , para todo  $n$ . Considerando identidades graduadas, o problema de descrever uma base finita para o ideal das identidades  $\mathbb{Z}_n$ -graduadas de  $M_n(F)$  foi resolvido por Vasilovsky em [26], para qualquer  $n$ . Esse mesmo resultado já havia sido resolvido para o caso  $n = 2$ , por Di Vincenzo em [7]. Além disso, usando argumentos semelhantes aos de Vasilovsky, Di Vincenzo e Nardoza em [8] e [9] encontraram geradores do ideal das identidades  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas para as álgebras  $M_{p,q}(E) \otimes E$  e  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ . A determinação dessas bases e demonstrações alternativas das PI-equivalências anteriores são os principais resultados apresentados nesta dissertação, a qual consiste de 4 capítulos e está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentaremos os resultados básicos necessários nos capítulos seguintes. Vamos assumir que, por parte do leitor, são conhecidos os conceitos e resultados de álgebra linear básica. Iniciamos com o conceito de álgebra e alguns exemplos que serão importantes ao longo do texto. Posteriormente, definimos módulo sobre uma álgebra e desenvolvemos a teoria de representações de grupos, tanto para um grupo qualquer quanto para o grupo  $S_n$ . Prosseguindo, estabelecemos o conceito de álgebra associativa livre, identidades polinomiais e polinômios multi-homogêneos e multiline-

ares. Por fim, definimos as álgebras graduadas e identidades polinomiais graduadas, que são os principais conceitos usados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 apresentamos a descrição feita por Vasilovsky em [26], considerando um corpo  $F$  de característica zero, das identidades  $\mathbb{Z}_n$ -graduadas para a álgebra  $M_n(F)$ . Mais precisamente, encontramos uma base para o ideal das identidades  $\mathbb{Z}_n$ -graduadas da álgebra de matrizes de ordem  $n$  sobre o corpo  $F$ . Além disso, também em característica zero, descrevemos uma base das identidades  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas da álgebra  $M_{p,q}(E) \otimes E$  e determinamos a segunda PI-equivalência de Kemer (equivalência (2) na página 8), como consequência dos resultados obtidos por Di Vincenzo e Nardoza em [9].

No Capítulo 3, considerando  $F$  um corpo de característica zero, apresentamos os resultados obtidos por Di Vincenzo em [7] para as álgebras  $M_2(F)$  e  $M_{1,1}(E)$ , onde descreveremos uma base do ideal das identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas de  $M_2(F)$ , e consequentemente, via isomorfismo graduado, obtemos uma base para o ideal das identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas de  $M_{1,1}(E)$ . Como corolário disto obtemos a primeira PI-equivalência de Kemer (equivalência (1) na página 8).

Por fim, no Capítulo 4, com base nos resultados de Di Vincenzo e Nardoza em [8], encontramos uma base das identidades  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas, tanto para álgebra  $M_{p,q}(E)$ , quanto para o tensorial de duas álgebras desse tipo, sobre um corpo de característica zero, e determinamos a terceira PI-equivalência de Kemer (equivalência (3) na página 8), com auxílio das álgebras matriciais  $M_\alpha(E)$ , estudadas ao longo do capítulo. Em seguida, definimos as identidades monomiais triviais e classificamos as álgebras da forma  $M_\alpha(E)$  que não possuem identidades monomiais não triviais. Finalmente, estabelecemos o conceito de graduações quase elementares não isomorfas de  $M_{p,q}(E)$  e determinamos uma fórmula para calcular o número total dessas graduações.

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão estabelecidas as notações, definições, conceitos e resultados que servem de base para o desenvolvimento deste trabalho. Em todo o capítulo,  $F$  será um corpo qualquer, a menos que se fale o contrário.

### 1.1 Álgebras

**Definição 1.1.1** *Uma  $F$ -álgebra (álgebra sobre  $F$  ou simplesmente álgebra) consiste de um par  $(A, *)$ , onde  $A$  é um  $F$ -espaço vetorial e  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$  satisfaz:*

$$i) a * (b + c) = a * b + a * c;$$

$$ii) (a + b) * c = a * c + b * c;$$

$$iii) (\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b),$$

para quaisquer  $a, b, c \in A$  e  $\lambda \in F$ .

Na definição acima,  $*$  é chamada multiplicação (ou produto) da álgebra  $A$ . Para simplificar a notação, denotaremos o produto  $a * b$  por justaposição  $ab$ , para quaisquer  $a, b \in A$ . Definimos  $a_1 a_2 a_3$  como sendo  $(a_1 a_2) a_3$  e, indutivamente, o produto  $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$  como sendo  $(a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) a_n$ , para  $a_i \in A$ . Um subconjunto  $\beta$  de  $A$  é uma **base** da álgebra se é uma base do espaço vetorial  $A$ , e definimos a **dimensão de  $A$**  como sendo a dimensão de  $A$  visto como  $F$ -espaço vetorial.

**Definição 1.1.2** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra. Dizemos que  $A$  é:*

- i) **Associativa** se  $(ab)c = a(bc)$ , para quaisquer  $a, b, c \in A$ ;
- ii) **Comutativa** se  $ab = ba$ , para quaisquer  $a, b \in A$ ;
- iii) **Unitária** (ou com unidade) se existe um elemento em  $A$ , denotado por  $1_A$  (ou simplesmente por  $1$ ), tal que  $a1_A = 1_Aa = a$ , para todo  $a \in A$ . O elemento  $1_A$  é chamado de unidade da álgebra  $A$ .

No caso em que a álgebra  $A$  for associativa teremos também uma estrutura de anel para  $A$ . Quando  $A$  for unitária, dado  $\lambda \in F$ , podemos identificar o elemento  $\lambda 1$  de  $A$  por  $\lambda$ . Desse modo  $F$  pode ser visto como o conjunto  $\{\lambda 1 : \lambda \in F\}$ , donde temos que  $F$  está contido em  $A$ .

Agora serão estabelecidos alguns exemplos que serão importantes ao longo do texto.

**Exemplo 1.1.3** Considere o espaço vetorial  $M_n(F)$  das matrizes de ordem  $n$  sobre o corpo  $F$ . Temos que  $M_n(F)$ , com a multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra associativa e unitária, cuja unidade é a matriz identidade  $I_n$ . Seja  $E_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , a matriz que possui entrada 1 na coordenada  $(i, j)$  e as demais entradas são nulas. Essas matrizes são chamadas de elementares, e claramente o conjunto  $\beta = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$  é uma base para a álgebra de matrizes  $M_n(F)$ . Logo, como  $\beta$  possui  $n^2$  elementos, a dimensão de  $M_n(F)$  é  $n^2$ . É fácil ver que  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ , onde  $\delta_{jk}$  é o delta de Kronecker.

De modo mais geral, dada uma álgebra  $A$ , considere  $M_n(A)$  o espaço das matrizes com entradas em  $A$ . Definindo o produto em  $M_n(A)$  analogamente ao produto em  $M_n(F)$  temos uma estrutura de álgebra para  $M_n(A)$ .

**Exemplo 1.1.4 (Álgebra de Grassmann)** Seja  $V$  um espaço vetorial com base  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ . A **álgebra de Grassmann**, denotada por  $E$ , é definida como a álgebra associativa com base

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \cdots e_{i_l} : i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_l, l \geq 1\}$$

cujo produto é dado por

$$e_i^2 = 0 \quad e \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Podemos escrever  $E = E_0 \oplus E_1$ , onde  $E_0$  e  $E_1$  são os subespaços gerados pelos conjuntos  $\mathcal{E}_0 = \{1, e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \cdots e_{i_l} : l \text{ é par}\}$  e  $\mathcal{E}_1 = \{e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \cdots e_{i_k} : k \text{ é ímpar}\}$ , respectivamente. Temos que

$$(e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \cdots e_{i_l})(e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3} \cdots e_{j_k}) = (-1)^{lk}(e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3} \cdots e_{j_k})(e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \cdots e_{i_l}),$$

$l, k \in \mathbb{N}$ , já que  $e_i e_j = -e_j e_i$  e daí segue que  $ax = xa$ , para  $a \in E_0$  e  $x \in E$ , e  $yz = -zy$ , para  $z, y \in E_1$ . No caso em que a característica de  $F$  é 2, temos que  $1 = -1$ , donde  $e_i e_j = e_j e_i$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , e portanto  $E$  é uma álgebra comutativa.

**Exemplo 1.1.5** Se  $V$  é um  $F$ -espaço vetorial, considere o  $F$ -espaço vetorial  $\mathcal{L}(V)$  de todos os operadores lineares de  $V$ . Munido da composição de funções, temos que  $\mathcal{L}(V)$  é uma  $F$ -álgebra associativa e com unidade. Vamos denotar a composição  $T \circ S$ , por  $TS$ , para  $T, S \in \mathcal{L}(V)$ .

**Exemplo 1.1.6 (Álgebra de Grupo)** Seja  $G$  um grupo finito e considere o conjunto  $FG$  de todas as somas formais  $\sum_{g \in G} \lambda_g g$ , onde  $\lambda_g \in F$ . Considere em  $FG$  as operações de soma e produto por escalar

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} (\lambda_g + \alpha_g) g \quad \text{e} \quad \alpha \left( \sum_{g \in G} \lambda_g g \right) = \sum_{g \in G} \alpha \lambda_g g, \quad \alpha \in F.$$

Temos que  $FG$  com essas operações é um  $F$ -espaço vetorial. Fixado  $h \in G$ , identifique  $h$  com o elemento  $\sum_{g \in G} \lambda_g g$  de  $FG$ , onde

$$\lambda_g = \begin{cases} 1 & , \text{ se } g = h \\ 0 & , \text{ se } g \neq h \end{cases}.$$

Assim podemos dizer que  $G$  está contido em  $FG$ . Além disso,  $G$  é base de  $FG$ . Temos que a operação do grupo  $G$  induz uma multiplicação bilinear em  $FG$ , e portanto temos uma estrutura de  $F$ -álgebra em  $FG$ . Essa álgebra é chamada de **álgebra de grupo**.

Sejam  $V$  e  $W$   $F$ -espaços vetoriais. Considere então o  $F$ -espaço vetorial  $F(V \times W)$ , com base  $V \times W$ , e o subespaço  $\mathcal{U}$  de  $F(V \times W)$  gerado pelos elementos do tipo

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w) \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w), \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde  $v, v_1, v_2 \in V$ ,  $w, w_1, w_2 \in W$  e  $\lambda \in F$ . O espaço vetorial quociente  $F(V \times W)/\mathcal{U}$  é chamado de **produto tensorial** de  $V$  e  $W$ , e denotamos  $V \otimes_F W$  (ou simplesmente  $V \otimes W$ ). Dado  $(v, w) \in V \times W$ , denotamos o elemento  $\overline{(v, w)}$  de  $V \otimes_F W$  por  $v \otimes w$ . Esses elementos são chamados de **tensores**. Assim,  $V \otimes W$  é gerado pelo conjunto



$\{v \otimes w : v \in V, w \in W\}$  e temos

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w) \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2) \\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) \\ v \otimes (\lambda w) &= \lambda(v \otimes w),\end{aligned}$$

onde  $v, v_1, v_2 \in V$ ,  $w, w_1, w_2 \in W$  e  $\lambda \in F$ . Logo os elementos de  $V \otimes W$  são da forma  $\sum(v_i \otimes w_i)$ , com  $v_i \in V$ ,  $w_i \in W$ .

**Teorema 1.1.7 (Propriedade Universal)** *Sejam  $V, W$  e  $U$   $F$ -espaços vetoriais e  $f : V \times W \rightarrow U$  uma aplicação bilinear. Então existe uma única transformação linear  $T_f : V \otimes W \rightarrow U$  tal que  $T_f(v \otimes w) = f(v, w)$ , para quaisquer  $v \in V$  e  $w \in W$ .*

**Demonstração:** Temos que  $V \times W$  é base de  $F(V \times W)$ , e daí existe uma transformação linear  $T : F(V \times W) \rightarrow U$ , tal que  $T((v, w)) = f(v, w)$ , para quaisquer  $v \in V$  e  $w \in W$ . Note que os elementos em (1.1) pertencem a  $\text{Ker}T$ , donde  $\mathcal{U} \subseteq \text{Ker}T$ . Defina então

$$\begin{aligned}T_f : V \otimes W &\longrightarrow U \\ \bar{\alpha} &\longmapsto T_f(\bar{\alpha}) = T(\alpha).\end{aligned}$$

Dados  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  em  $F(V \times W)$ , com  $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathcal{U}$ , temos que  $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$ , e portanto  $T_f$  está bem definida. Além disso  $T_f$  é linear e satisfaz  $T_f(v \otimes w) = T_f(\overline{(v, w)}) = T(\overline{(v, w)}) = f(v, w)$ . A unicidade de  $T_f$  segue do fato de  $\{v \otimes w : v \in V, w \in W\}$  ser um conjunto gerador de  $V \otimes W$ . ■

**Exemplo 1.1.8 (Produto tensorial de álgebras)** *Sejam  $V$  e  $W$  álgebras sobre  $F$ . Dados  $v \in V$  e  $w \in W$ , não é difícil ver que a aplicação  $f_{v,w} : V \times W \rightarrow V \otimes W$  dada por  $f_{v,w}(x, y) = vx \otimes wy$  é bilinear. Assim, pela propriedade universal, existe uma única  $T_{v,w} \in \mathcal{L}(V \otimes W)$  tal que  $T_{v,w}(x \otimes y) = vx \otimes wy$ . Considere a aplicação*

$$\begin{aligned}T : V \times W &\longrightarrow \mathcal{L}(V \otimes W) \\ (v, w) &\longmapsto T((v, w)) = T_{v,w}.\end{aligned}$$

*Temos que  $T$  é bilinear e, novamente pela propriedade universal, existe uma única  $H : V \otimes W \rightarrow \mathcal{L}(V \otimes W)$  tal que  $H(v \otimes w) = T_{v,w}$ . Portanto o produto*

$$\begin{aligned}\cdot : (V \otimes W) \times (V \otimes W) &\longrightarrow V \otimes W \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \cdot \beta = H(\alpha)(\beta)\end{aligned}$$

é bilinear. Além disso

$$(x_1 \otimes y_1) \cdot (x_2 \otimes y_2) = H(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = T_{x_1, y_1}(x_2 \otimes y_2) = x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$$

para quaisquer  $x_1, x_2 \in V$  e  $y_1, y_2 \in W$ . Munido deste produto temos que  $V \otimes W$  é uma álgebra. Se  $V$  e  $W$  são álgebras com bases  $\beta_1 = \{v_i : i \in I\}$  e  $\beta_2 = \{w_j : j \in J\}$ , respectivamente, então o conjunto  $\beta = \{v_i \otimes w_j : i \in I, j \in J\}$  é uma base de  $V \otimes W$ . Além disso, se  $V$  e  $W$  possuírem unidade, então  $1_V \otimes 1_W$  é a unidade do produto tensorial.

**Exemplo 1.1.9** Seja  $F[x]$  o  $F$ -espaço vetorial dos polinômios na variável  $x$  com coeficientes em  $F$ . Munido do produto usual de polinômios, temos que  $F[x]$  é uma  $F$ -álgebra associativa, comutativa e unitária. De modo geral podemos considerar a álgebra  $F[X]$  dos polinômios em várias variáveis. Nesse sentido  $X = \{x_i : i \in I\}$  é um conjunto de variáveis (comutativas), e no caso  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  denotamos  $F[X] = F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

**Definição 1.1.10** Sejam  $A$  uma  $F$ -álgebra e  $\mathcal{B}$  uma base de  $A$ . Dizemos que  $\mathcal{B}$  é uma **base multiplicativa** para  $A$  se satisfaz:

para quaisquer  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ , se  $b_1 b_2 \neq 0$  então existe  $c \in F$  tal que  $cb_1 b_2 \in \mathcal{B}$ .

**Exemplo 1.1.11** A álgebra de matrizes  $M_n(F)$  e a álgebra de Grassmann, com suas respectivas bases naturais  $\beta = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$  e  $\mathcal{E} = \{1, e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} \cdots e_{i_l} : i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_l, l \geq 1\}$ , são exemplos de álgebras com base multiplicativa.

**Definição 1.1.12** Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra. Dizemos que

- i) Um subespaço  $S$  de  $A$  é uma subálgebra se é fechado com respeito à multiplicação, ou seja, se dados  $a, b \in S$  temos  $ab \in S$ .
- ii) Um subespaço  $I$  de  $A$  é um ideal (bilateral) de  $A$  se  $IA \subseteq I$  e  $AI \subseteq I$ , ou seja, se dados  $a \in I$  e  $x \in A$  temos  $ax, xa \in I$ .

**Observação 1.1** No caso em que  $I$  satisfaz apenas  $AI \subseteq I$  ou  $IA \subseteq I$ , dizemos que  $I$  é ideal à esquerda ou ideal à direita, respectivamente.

Sejam  $A$  uma álgebra e  $I$  um ideal de  $A$ . Dados dois elementos  $a$  e  $b$  em  $A$  dizemos que  **$a$  é congruente a  $b$  módulo  $I$** , se  $a - b \in I$ , e denotamos  $a \equiv b \pmod{I}$ . Obtemos assim uma relação de equivalência, e a classe de equivalência de  $a$  módulo  $I$  é dada por  $a + I = \{a + i : i \in I\}$ , a qual pode ser denotada por  $\bar{a}$ . Note que se  $a \in I$ , então  $\bar{a} = \bar{0}$ . O conjunto de todas as classes de equivalência será denotado por  $A/I$ .

Considerando o espaço vetorial quociente  $A/I$  e o produto

$$\begin{aligned} \cdot : A/I \times A/I &\longrightarrow A/I \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} \end{aligned}$$

em  $A/I$ , obtemos uma estrutura de álgebra para  $A/I$ , a qual é chamada **álgebra quociente** de  $A$  por  $I$ . Não é difícil ver que se  $\beta = \{v_j : j \in J\}$  é um conjunto gerador de  $A$  (como espaço vetorial), então o conjunto  $\beta' = \{v_j + I : j \in J\}$  é um conjunto gerador de  $A/I$ .

**Exemplo 1.1.13** *Seja  $UT_n(F)$  o conjunto das matrizes triangulares superiores com entradas em  $F$ . Dadas duas matrizes  $X, Y \in UT_n(F)$ , é fácil ver que  $XY \in UT_n(F)$ . Logo  $UT_n(F)$  é uma subálgebra de  $M_n(F)$ .*

**Exemplo 1.1.14 (Subálgebra gerada)** *Seja  $A$  uma álgebra associativa e  $S \subseteq A$  (não-vazio). Definimos a subálgebra gerada por  $S$ , denotada por  $\langle S \rangle$ , como sendo a interseção de todas as subálgebras de  $A$  que contêm  $S$ . Verifica-se que  $\langle S \rangle$  é gerado, como espaço vetorial, pelo conjunto  $\{s_1 s_2 \cdots s_k : k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$ .*

**Observação 1.2** *Quando estivermos considerando apenas o subespaço gerado por um subconjunto  $S$  de uma álgebra  $A$  vamos usar a notação  $\text{span}_F\{S\}$ . Observe que  $\text{span}_F\{S\} \subseteq \langle S \rangle$ .*

**Exemplo 1.1.15** *Dada uma álgebra  $A$  o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A : ax = xa, \forall x \in A\}$$

é chamado de **centro de  $A$** . Temos que  $Z(A)$  é um subespaço vetorial de  $A$  e, no caso em que  $A$  é associativa,  $Z(A)$  é uma subálgebra de  $A$ . Não é difícil ver que, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Z(M_n(F)) = \{\lambda I_n : \lambda \in F\}$ , isto é, o conjunto das matrizes escalares. E pelo o que foi feito no Exemplo 1.1.4, temos que  $Z(E) = E_0$ , quando  $\text{char}F \neq 2$ , e  $Z(E) = E$  se  $\text{char}F = 2$ , pois neste caso  $E$  é comutativa.

**Exemplo 1.1.16** *O conjunto*

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in E_0, c, b \in E_1 \right\}$$

com o produto usual de matrizes é uma álgebra associativa e unitária (uma subálgebra de  $M_2(E)$ ). Além disso, não é difícil ver que

$$Z(M_{1,1}(E)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in E_0 \right\}$$

**Exemplo 1.1.17** Tome  $p, q \in \mathbb{N}$  e seja  $n = p + q$ . O conjunto  $M_{p,q}(E)$  formado pelas matrizes da forma

$$\left( \begin{array}{c|c} E_0 & E_1 \\ \hline E_1 & E_0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{---} p \\ \text{---} q \end{array},$$

ou seja, por matrizes de ordem  $n$  em blocos com entradas em  $E_0$  e  $E_1$ , com o produto usual de matrizes é uma álgebra associativa. Observe que  $M_{1,1}(E)$  é o caso particular para  $p = q = 1$ . Além disso,  $M_{p,q}(E)$  é uma subálgebra de  $M_n(E)$ .

**Definição 1.1.18** Sejam  $A$  e  $B$  duas álgebras. Definimos um **homomorfismo de álgebras** como sendo uma aplicação  $\varphi : A \rightarrow B$  que é um homomorfismo de espaços vetoriais (transformação linear) e satisfaz

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \forall a, b \in A,$$

ou seja,  $\varphi$  preserva produto.

**Observação 1.3** Quando  $A$  e  $B$  são álgebras com unidade, exigimos também que  $\varphi(1_A) = 1_B$  para que  $\varphi$  seja homomorfismo de álgebras.

Na definição acima, dizemos que  $\varphi$  é um **monomorfismo** se for injetor, um **epimorfismo** se for sobrejetor e um **isomorfismo** quando for bijetor. Se  $\varphi$  é um homomorfismo de  $A$  em  $A$  chamamos de **endomorfismo**, e se além disso for bijetor chamamos de **automorfismo**. O conjunto dos endomorfismos de  $A$  é denotado por  $End(A)$ . Se existir um isomorfismo  $\varphi : A \rightarrow B$  entre as álgebras  $A$  e  $B$ , dizemos que as duas são isomorfas e denotamos por  $A \simeq B$ .

Se  $\varphi : A \rightarrow B$  é um homomorfismo de álgebras, então o conjunto  $Ker(\varphi) = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$ , chamado de **núcleo de  $\varphi$** , é um ideal de  $A$ , e  $Im(\varphi) = \{\varphi(a) : a \in A\}$  (**imagem de  $\varphi$** ) é uma subálgebra de  $B$ . Além disso, não é difícil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} T : A/Ker(\varphi) &\longrightarrow Im(\varphi) \\ \bar{x} &\longmapsto T(\bar{x}) = \varphi(x) \end{aligned}$$

está bem definida e é um isomorfismo de álgebras. Em particular se  $\varphi$  é um epimorfismo temos  $A/Ker(\varphi) \simeq B$ .

**Exemplo 1.1.19 (Projeção)** Considere a álgebra quociente  $A/I$ . Existe um epimorfismo natural entre  $A$  e  $A/I$  dado por

$$\begin{aligned}\varphi: A &\longrightarrow A/I \\ a &\longmapsto \bar{a} = a + I\end{aligned}$$

chamado de **projeção canônica**.

**Exemplo 1.1.20** Sendo  $A$  uma  $F$ -álgebra, temos que  $M_n(F) \otimes A \simeq M_n(A)$ . De fato, sendo  $\beta$  base de  $A$ , então o conjunto  $\{E_{ij} \otimes a : 1 \leq i, j \leq n, a \in \beta\}$  é uma base de  $M_n(F) \otimes A$ . Além disso, vemos facilmente também que o conjunto  $\{aE_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, a \in \beta\}$  é base de  $M_n(A)$ , onde  $aE_{ij}$  é a matriz de  $M_n(A)$  que possui o valor  $a$  na entrada  $(i, j)$  e 0 nas demais entradas. Considere então a aplicação bilinear  $T : M_n(F) \times A \rightarrow M_n(A)$  que satisfaz  $T(E_{ij}, a) = aE_{ij}$ ,  $a \in \beta$ . Então, pela propriedade universal, existe transformação linear

$$\begin{aligned}\psi: M_n(F) \otimes A &\longrightarrow M_n(A) \\ E_{ij} \otimes a &\longmapsto \psi(E_{ij} \otimes a) = aE_{ij}\end{aligned}$$

Considere então a transformação linear

$$\begin{aligned}\varphi: M_n(A) &\longrightarrow M_n(F) \otimes A \\ aE_{ij} &\longmapsto \varphi(aE_{ij}) = E_{ij} \otimes a\end{aligned},$$

onde  $a \in \beta$ . Temos que

$$\psi(\varphi(aE_{ij})) = \psi(E_{ij} \otimes (a)) = aE_{ij}$$

e

$$\varphi(\psi(E_{ij} \otimes a)) = \varphi(aE_{ij}) = E_{ij} \otimes a.$$

Assim,  $\psi = \varphi^{-1}$  e  $\varphi$  são isomorfismos de espaços vetoriais. Agora vamos mostrar que  $\varphi$  é isomorfismo de álgebras. Observe que

$$(aE_{ij})(bE_{kl}) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } j \neq k \\ (ab)E_{il} & , \text{ se } j = k \end{cases}.$$

Assim, se  $j \neq k$ , temos

$$\begin{aligned}\varphi((aE_{ij})(bE_{kl})) &= \varphi(0) = 0 = 0 \otimes (ab) = (E_{ij}E_{kl}) \otimes (ab) \\ &= (E_{ij} \otimes a)(E_{kl} \otimes b) = \varphi(aE_{ij})\varphi(bE_{kl}),\end{aligned}$$

e se  $j = k$  temos

$$\begin{aligned}\varphi((aE_{ij})(bE_{kl})) &= \varphi((ab)E_{il}) = E_{il} \otimes (ab) = (E_{ij}E_{kl}) \otimes (ab) \\ &= (E_{ij} \otimes a)(E_{kl} \otimes b) = \varphi(aE_{ij})\varphi(bE_{kl}).\end{aligned}$$

Logo, pela bilinearidade da multiplicação em  $M_n(A)$ , segue que  $\varphi(XY) = \varphi(X)\varphi(Y)$ , para quaisquer  $X, Y \in M_n(A)$ . Portanto temos um isomorfismo de álgebras entre  $M_n(F) \otimes A$  e  $M_n(A)$ .

## 1.2 Módulos sobre Álgebras e Representações de Grupos

Agora vamos estabelecer os conceitos de módulos sobre álgebras e de representações de grupos, além de alguns resultados que servirão de base para os capítulos seguintes. Em toda esta seção iremos considerar álgebras associativas e com unidade, a menos que se mencione o contrário.

**Definição 1.2.1** *Dada uma  $F$ -álgebra  $A$ , definimos um  $A$ -módulo (ou módulo sobre  $A$ ) como sendo um  $F$ -espaço vetorial  $M$ , munido de um produto  $\cdot : A \times M \rightarrow M$ , dado por  $(a, m) \mapsto a \cdot m$ , que satisfaz:*

- i)  $(a_1 + a_2) \cdot m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$ ;*
- ii)  $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$ ;*
- iii)  $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$ ;*
- iv)  $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$ ;*
- v)  $1_A \cdot m = m$ .*

para quaisquer  $a, a_1, a_2 \in A$ ,  $m, m_1, m_2 \in M$  e  $\lambda \in F$ .

Seja  $G$  um grupo. No caso em que  $A = FG$  (álgebra de grupo) e  $M$  é um módulo sobre  $FG$ , muitas vezes vamos dizer que  $M$  é apenas um  $G$ -módulo, omitindo-se o corpo  $F$ .

**Observação 1.4** *Os itens (i), (ii) e (iii) da definição acima significam que a operação de multiplicação " $\cdot$ " é uma aplicação bilinear. Para simplificar a notação, vamos denotar o produto  $a \cdot m$  por  $am$ , para  $a \in A$  e  $m \in M$ .*

**Exemplo 1.2.2** *Se  $A$  é uma álgebra, então  $A$  é naturalmente um módulo sobre si mesma, onde o produto é a multiplicação da álgebra. Denotamos esse módulo por  ${}_A A$ .*

**Definição 1.2.3** *Sejam  $A$  uma álgebra e  $M$  um módulo sobre  $A$ . Dizemos que:*

- i) Um subespaço vetorial  $N$  de  $M$  é um submódulo (ou  $A$ -submódulo) de  $M$  se  $an \in N$ , para todo  $a \in A$  e  $n \in N$ ;*
- ii) Um submódulo  $N$  de  $M$  é minimal se não existe submódulo  $N_1$  de  $M$  tal que  $\{0\} \neq N_1 \subsetneq N$ ;*

iii)  $M$  é um  $A$ -módulo irredutível (ou simples) se  $M \neq \{0\}$  e seus únicos submódulos são  $\{0\}$  e  $M$ .

Sejam  $A$  uma álgebra,  $M$  um  $A$ -módulo e  $N$  um submódulo de  $M$ . De modo análogo ao caso de álgebras, podemos definir um produto no espaço vetorial quociente  $M/N$ , e assim obter o  $A$ -módulo quociente  $M/N$ , cujos elementos são as classes de equivalência  $\bar{m} = m + N = \{m + n : n \in N\}$ ,  $m \in M$ .

**Exemplo 1.2.4** *Seja  $A$  uma álgebra e considere o  $A$ -módulo  ${}_A A$ . Temos que os submódulos de  ${}_A A$  são justamente os ideais à esquerda da álgebra  $A$ .*

**Exemplo 1.2.5** *Se  $M$  é um  $A$ -módulo temos que os submódulos de  $M$  minimais são exatamente aqueles que são  $A$ -módulos irredutíveis.*

**Definição 1.2.6** *Sejam  $A$  uma álgebra e  $M_1, M_2$   $A$ -módulos. Uma transformação linear  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é um homomorfismo de  $A$ -módulos se  $\varphi(am) = a\varphi(m)$ , para quaisquer  $a \in A$ ,  $m \in M_1$ .*

**Exemplo 1.2.7** *Sendo  $A$  uma álgebra e  $M$  um  $A$ -módulo, fixe  $m \in M$ . A aplicação*

$$\begin{aligned} T : {}_A A &\longrightarrow M \\ a &\longmapsto T(a) = am \end{aligned}$$

*é um homomorfismo de  $A$ -módulos.*

Se  $\varphi$  é um homomorfismo de  $A$ -módulos, como no caso de homomorfismos de álgebras, temos as definições análogas para monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo e endomorfismo, e os conjuntos  $\text{Ker}(\varphi)$  e  $\text{Im}(\varphi)$  são submódulos do domínio e do contradomínio, respectivamente.

**Definição 1.2.8** *Sejam  $G$  um grupo e  $V$  um  $F$ -espaço vetorial. Uma representação linear (ou uma  $F$ -representação linear) de  $G$  em  $V$  é um homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \varphi(g) = \varphi_g \end{aligned}$$

*onde  $GL(V)$  é o grupo de transformações lineares invertíveis do espaço vetorial  $V$ . O grau da representação é definido como sendo a dimensão do espaço vetorial  $V$ .*

Quando  $\varphi$  for injetiva, dizemos que a representação é **fiel**. No caso em que  $\dim V = n$  finita, temos que  $GL(V)$  é isomorfo a  $GL_n(F)$ , onde  $GL_n(F)$  é o grupo das matrizes invertíveis  $n \times n$  com entradas em  $F$ , e daí podemos ver uma representação de  $G$  em  $V$  como sendo um homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow GL_n(F)$ . Se  $n = 1$  temos  $GL(V)$  isomorfo a  $F^* = F - \{0\}$ , o grupo multiplicativo do corpo  $F$ .

**Exemplo 1.2.9 (Representação trivial)** *Sejam  $G$  um grupo e  $V$  um  $F$ -espaço vetorial, e considere a representação*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \varphi(g) = Id_V \end{aligned}$$

onde  $Id_V$  é a aplicação identidade de  $V$ . No caso em que  $\dim V = n$ , podemos ver esta representação da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow GL_n(F) \\ g &\longmapsto \varphi(g) = I_n \end{aligned}$$

onde  $I_n$  é a matriz identidade  $n \times n$ .

**Definição 1.2.10** *Sejam  $G$  um grupo,  $V$  um  $F$ -espaço vetorial e  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  uma representação. Dizemos que um subespaço  $W$  de  $V$  é  $\varphi$ -invariante se  $\varphi_g(W) \subseteq W$ , para todo  $g \in G$ . Quando existe  $W$  subespaço  $\varphi$ -invariante de  $V$ , com  $\{0_V\} \neq W \neq V$ , dizemos que a representação é redutível; caso contrário, chamamos  $\varphi$  de irredutível.*

Dado um subespaço  $W$  de  $V$   $\varphi$ -invariante e  $g \in G$ , podemos considerar a restrição de  $\varphi_g$  a  $W$ , denotada por  $\varphi_g|_W$ . Como  $\varphi_g(W) \subseteq W$  e  $\varphi_{g^{-1}}(W) \subseteq W$ , temos que  $\varphi_g(W) = W$  (observe que  $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ ). Além disso,  $\varphi_g$  é injetiva, ou seja,  $\varphi_g|_W$  é bijetor e assim definimos a sub-representação  $\varphi_W$ , como sendo a restrição de  $\varphi$  a  $W$ , dada por

$$\begin{aligned} \varphi_W : G &\longrightarrow GL(W) \\ g &\longmapsto \varphi_W(g) = \varphi_g|_W \end{aligned}$$

**Definição 1.2.11** *Sejam  $G$  um grupo e  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  uma representação. Dizemos que  $\varphi$  é semi-simples (ou completamente redutível) se existem subespaços  $W_1, W_2, \dots, W_r$  de  $V$   $\varphi$ -invariantes tais que:*

- i)  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$ ;
- ii) As restrições de  $\varphi$  aos  $W_i$ 's são irredutíveis.

**Exemplo 1.2.12** *Toda representação irredutível é completamente redutível. Toda representação trivial de grau finito é completamente redutível.*

**Teorema 1.2.13 (Teorema de Maschke)** *Seja  $G$  um grupo finito cuja ordem não é divisível pela característica de  $F$ . Se  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  é um representação de grau finito e  $W$  um subespaço  $\varphi$ -invariante de  $V$ , então existe subespaço  $W_1$   $\varphi$ -invariante de  $V$  tal que  $V = W \oplus W_1$ . Como consequência temos que  $\varphi$  é completamente redutível.*



**Demonstração:** Veja [5], Teorema 10.8, página 41. ■

**Definição 1.2.14** *Sejam  $G$  um grupo,  $V$  e  $W$  espaços vetoriais e  $\varphi$  e  $\psi$  representações de  $G$  em  $V$  e  $W$ , respectivamente. Se existe transformação linear bijetora  $T : V \rightarrow W$  tal que  $\psi_g T = T \varphi_g$ , para todo  $g \in G$ , dizemos que as representações são equivalentes.*

**Observação 1.5** *Se duas representações são equivalentes, então  $\dim V = \dim W$ , ou seja, elas devem ter o mesmo grau.*

Agora vamos estabelecer a relação entre as representações (sobre um corpo  $F$ ) de um grupo  $G$  e os módulos sobre  $FG$ . Basicamente podemos obter uma estrutura de  $FG$ -módulo para o  $F$ -espaço vetorial da representação, e reciprocamente dado um  $FG$ -módulo é possível obter uma representação do grupo  $G$ , como veremos agora.

Seja  $G$  um grupo,  $V$  um  $F$ -espaço vetorial e  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  uma representação de  $G$ . Definindo o produto (bilinear)  $g \cdot v = \varphi_g(v)$ , com  $v \in V$  e  $g \in G$ , temos uma estrutura de  $FG$ -módulo para  $V$ . Assim, dado um subespaço  $W$   $\varphi$ -invariante de  $V$ , temos que  $\varphi_g(w) \in W$ , donde  $g \cdot w \in W$ , para quaisquer  $g \in G$  e  $w \in W$ . Como  $G$  é base de  $FG$ , temos que  $W$  é submódulo do  $FG$ -módulo  $V$ .

Por outro lado, se  $M$  é um  $FG$ -módulo então a aplicação  $\psi_g : M \rightarrow M$  dada por  $\psi_g(m) = gm$  é uma transformação linear de  $M$ . Além disso,  $\psi_{g_1 g_2} = \psi_{g_1} \psi_{g_2}$ , para todo  $g_1, g_2 \in G$ , e  $\psi_e = Id_M$  (onde  $e$  é o elemento neutro do grupo  $G$ ). Daí  $\psi_g \psi_{g^{-1}} = \psi_{g^{-1}} \psi_g = Id_M$ , e portanto  $\psi_g \in GL(M)$ . Então a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow GL(M) \\ g &\longmapsto \psi(g) = \psi_g \end{aligned}$$

é uma representação de  $G$  em  $M$ . Se  $N$  é um submódulo de  $M$ , então  $an \in N$ , para quaisquer  $a \in FG$  e  $n \in N$ , em particular  $gn \in N$ , donde  $\psi_g(n) \in N$ , para quaisquer  $g \in G$  e  $n \in N$ . Assim  $N$  é um subespaço  $\psi$ -invariante de  $M$ .

A partir desta equivalência, dada uma representação  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  de  $G$  em  $V$ , dizemos que  $V$  é o módulo da representação.

**Proposição 1.2.15** *Sejam  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  e  $\psi : G \rightarrow GL(W)$  representações de  $G$ . Então*

- i)  $\psi$  e  $\varphi$  são equivalentes se, e somente se, os  $FG$ -módulos correspondentes  $V$  e  $W$  são isomorfos;*

ii)  $\varphi$  é irredutível se, e somente se, o  $FG$ -módulo  $V$  correspondente é irredutível.

**Demonstração:** i) Suponha que  $\psi$  e  $\varphi$  são equivalentes, ou seja, existe um isomorfismo de espaços vetoriais  $T : V \rightarrow W$  tal que  $\psi_g T = T \varphi_g$ , para todo  $g \in G$ . Assim, considerando os  $FG$ -módulos  $V$  e  $W$ , temos

$$T(gv) = T(\varphi_g(v)) = \psi_g(T(v)) = gT(v),$$

para todo  $g \in G$  e  $v \in V$ . Como  $G$  é base de  $FG$  e  $T$  é linear, segue que  $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ , para quaisquer  $\alpha \in FG$  e  $v \in V$ . Portanto  $T$  é isomorfismo de  $FG$ -módulos.

Agora suponha  $T' : V \rightarrow W$  um isomorfismo de  $FG$ -módulos. Então  $T'$  é uma transformação linear bijetora tal que  $T'(\alpha v) = \alpha T'(v)$ , para quaisquer  $\alpha \in FG$  e  $v \in V$ . Assim

$$(T' \varphi_g)(v) = T'(gv) = gT'(v) = \psi_g(T'(v)) = (\psi_g T')(v),$$

para todo  $v \in V$  e  $g \in G$ . Logo  $T' \varphi_g = \psi_g T'$ , para todo  $g \in G$  e assim  $\psi$  e  $\varphi$  são equivalentes.

ii) Pelo o que foi visto anteriormente, os submódulos do  $FG$ -módulo  $V$  correspondem aos subespaços  $\varphi$ -invariantes, donde temos o resultado. ■

Considere a representação linear

$$\begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow GL(FG) \\ g &\longmapsto \sigma_g \end{aligned},$$

onde  $\sigma_g : FG \rightarrow FG$  é definida por  $\sigma_g(\alpha) = g\alpha$ . Chamamos essa representação de **representação regular à esquerda de  $G$** . Temos que  $\sigma$  é fiel e é a representação correspondente ao  $FG$ -módulo  ${}_G FG$ . Além disso, não é difícil ver que os subespaços  $\sigma$ -invariantes de  $FG$  são os ideais à esquerda de  $FG$ , e os ideais minimais à esquerda de  $FG$  (ou submódulos minimais de  ${}_G FG$ ) correspondem às sub-representações irredutíveis de  $\sigma$ . Assim, se a ordem de  $G$  não divide a característica de  $F$ , pelo Teorema de Maschke, temos que  $FG$  é soma direta de uma quantidade finita de ideais minimais à esquerda.

**Observação 1.6** Dado um grupo  $G$  finito com  $\text{char} F$  não dividindo a ordem de  $G$ , o número de representações irredutíveis de  $G$  a menos de equivalência é finito e menor ou igual ao número de classes de conjugação do grupo  $G$  (ver [15], seção 5.3).

**Definição 1.2.16** *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  uma representação linear de  $G$  em  $V$ . Então o caracter de  $\varphi$  (ou  $G$ -caracter de  $\varphi$ ), denotado por  $\chi_\varphi$  (ou apenas  $\chi$ ), é definido como  $\chi_\varphi(g) = \text{tr}(\varphi(g))$ , para  $g \in G$ , onde  $\text{tr}(\varphi(g))$  é o traço da transformação linear  $\varphi(g)$ .*

Dado um  $G$ -módulo  $V$  de dimensão finita, temos uma representação. Então o caracter de  $V$ , denotado por  $\chi(V)$ , será o caracter da representação associada a esse módulo. Vamos dizer que o caracter é irredutível se a representação é irredutível. Não é difícil ver que representações equivalentes possuem o mesmo caracter. Além disso, se  $e$  é o elemento neutro do grupo  $G$ , temos que  $\chi_\varphi(e) = \text{tr}(Id_V) = \dim V$ . Dados dois elementos  $g_1, g_2 \in G$ , com  $g_1 = x^{-1}g_2x$ , para algum  $x \in G$  (elementos conjugados), temos que

$$\chi(g_1) = \text{tr}(\varphi(g_1)) = \text{tr}(\varphi(x^{-1})\varphi(g_2)\varphi(x)) = \text{tr}(\varphi(x)^{-1}\varphi(g_2)\varphi(x)) = \text{tr}(\varphi(g_2)) = \chi(g_2),$$

onde dizemos que  $\chi$  é uma função de classe, ou seja, o valor do caracter em elementos conjugados é o mesmo.

**Exemplo 1.2.17** *Seja  $G$  um grupo e considere a representação trivial  $\varphi_0 : G \rightarrow GL(V)$  de grau finito, ou seja,  $\varphi_0(g) = Id_V$ , para todo  $g \in G$ . Temos que  $\chi_{\varphi_0}(g) = \dim V$ , para todo  $g \in G$ . Se  $\psi : G \rightarrow F^*$  é uma representação linear de grau 1, temos que  $\chi_\psi(g) = \psi(g)$ .*

Nas hipóteses do Teorema de Maschke, uma representação linear de grau finito  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  é completamente redutível, ou seja, o  $FG$ -módulo correspondente é completamente redutível. Assim existem  $W_1, W_2, \dots, W_q$  subespaços de  $V$  tais que  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_q$ , e cada  $W_i$  é  $\varphi$ -invariante e a sub-representação  $\varphi_i = \varphi|_{W_i}$  é irredutível. Em particular, cada  $W_i$  é um  $FG$ -módulo irredutível. Tomando  $\beta_i$  base de  $W_i$  e  $g \in G$ , seja  $B_i = [\varphi_i(g)]_{\beta_i}$ ,  $i = 1, \dots, q$ , temos que  $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_q$  é base de  $V$  e

$$[\varphi(g)]_\beta = \begin{pmatrix} [\varphi_1(g)]_{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\varphi_2(g)]_{\beta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\varphi_q(g)]_{\beta_q} \end{pmatrix}$$

uma matriz diagonal em blocos. Assim se  $\chi_i$  é o caracter de  $\varphi_{W_i}$ , e  $\chi$  o caracter de  $\varphi$ , temos que  $\chi = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_q$ .

De modo mais geral, com uma representação não necessariamente completamente redutível, temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.2.18** *Todo caracter de um grupo  $G$  é soma de caracteres irredutíveis.*

**Demonstração:** Ver [23], página 227. ■

Suponha  $G$  um grupo finito com característica de  $F$  não dividindo a ordem de  $G$ . Então o número de  $G$ -caracteres irredutíveis também é finito. Sejam  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_q$  esses caracteres irredutíveis. Dado  $\chi$  um caracter de  $G$ , pelo resultado anterior devem existir  $n_1, n_2, \dots, n_q$  inteiros não negativos tais que

$$\chi = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + \dots + n_q\chi_q. \quad (1.2)$$

Agora vamos estabelecer o conceito de produto tensorial de representações de um mesmo grupo e para dois grupos diferentes.

Sejam  $G$  um grupo e

$$\begin{array}{ccc} \varphi : G & \longrightarrow & GL(V_1) \\ g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \psi : G & \longrightarrow & GL(V_2) \\ g & \longmapsto & \psi(g) = \psi_g \end{array}$$

representações lineares de  $G$ . Dado  $g \in G$ , defina a aplicação  $F_g : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$  dada por  $F_g(v_1, v_2) = \varphi_g(v_1) \otimes \psi_g(v_2)$ . Temos que  $F_g$  está bem definida e é bilinear, pela bilinearidade dos tensores e pela linearidade de  $\varphi_g$  e  $\psi_g$ . Assim, pela propriedade universal, existe transformação linear  $\rho_g : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$  tal que  $\rho_g(v_1 \otimes v_2) = \varphi_g(v_1) \otimes \psi_g(v_2)$ . Como  $\varphi_g \in GL(V_1)$  e  $\psi_g \in GL(V_2)$  segue que  $\rho_g \in GL(V_1 \otimes V_2)$ . Defina então

$$\begin{array}{ccc} \rho : G & \longrightarrow & GL(V_1 \otimes V_2) \\ g & \longmapsto & \rho(g) = \rho_g \end{array} .$$

Vemos facilmente que  $\rho$  é uma representação linear de  $G$  em  $V_1 \otimes V_2$ , a qual vamos denotar por  $\varphi \otimes \psi$ . Chamamos essa representação de **produto tensorial de  $\varphi$  e  $\psi$** . Temos que  $\chi_\rho = \chi_\varphi\chi_\psi$ , ou seja,  $\chi_\rho(g) = \chi_\varphi(g)\chi_\psi(g)$ , para  $g \in G$  (ver [15], capítulo 5, seção 5).

Agora dados dois grupos  $G_1$  e  $G_2$ , considere o produto cartesiano  $G_1 \times G_2$ . Com o produto coordenada a coordenada, temos uma estrutura natural de grupo para  $G_1 \times G_2$  (produto direto). Além disso, se  $G_1$  e  $G_2$  têm ordens  $n$  e  $m$ , respectivamente, temos que

a ordem de  $G_1 \times G_2$  é  $nm$ . Sejam  $\varphi : G_1 \rightarrow GL(V_1)$  e  $\psi : G_2 \rightarrow GL(V_2)$  representações lineares de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Podemos definir, de modo análogo ao argumento anterior, uma representação linear  $\varphi \# \psi$  de  $G_1 \times G_2$  em  $V_1 \otimes V_2$  da seguinte forma

$$(\varphi \# \psi)(g_1, g_2) = \varphi_{g_1} \otimes \psi_{g_2},$$

onde  $(\varphi_{g_1} \otimes \psi_{g_2})(v_1 \otimes v_2) = \varphi_{g_1}(v_1) \otimes \psi_{g_2}(v_2)$ , para quaisquer  $v_1 \in V_1$  e  $v_2 \in V_2$ . Essa representação também é chamada de **produto tensorial de  $\varphi$  e  $\psi$** , mas é uma representação do produto direto dos grupos  $G_1$  e  $G_2$ . Além disso, temos que

$$\chi_{\varphi \# \psi}(g_1, g_2) = \chi_{\varphi}(g_1)\chi_{\psi}(g_2).$$

Seja  $\chi$  o caracter do produto tensorial de representações  $\varphi$  e  $\psi$  de um mesmo grupo, ou de dois grupos. Em ambos os casos temos  $\chi = \chi_{\varphi}\chi_{\psi}$ . Então vamos denotar  $\chi = \chi_{\varphi} \otimes \chi_{\psi}$ , e usando a notação de módulos temos  $\chi(V_1 \otimes V_2) = \chi_{\varphi}(V_1) \otimes \chi_{\psi}(V_2)$ .

Sejam  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  uma  $F$ -representação linear,  $K$  uma extensão do corpo  $F$  e  $\beta$  uma base do  $F$ -espaço vetorial  $V$ . Temos que  $V_K = K \otimes_F V$  é um espaço vetorial sobre  $K$  com base  $\beta_K = \{1 \otimes v : v \in \beta\}$  (ver [21], capítulo 9, seção 25). Defina então a  $K$ -representação linear  $\rho_K : G \rightarrow GL(V_K)$  dada por  $\rho_K = \pi \otimes \rho$ , onde  $\pi$  é a  $K$ -representação trivial de  $G$  em  $K$ . Dizemos que  $\rho_K$  é a representação obtida de  $\rho$  estendendo-se o corpo base para  $K$ . Note que se  $U$  é um subespaço  $\rho$ -invariante de  $V$ , então  $U_K = K \otimes_F U$  é um subespaço  $\rho_K$ -invariante de  $V_K$ . Assim, se  $\rho_K$  é irredutível, então  $\rho$  é irredutível.

**Definição 1.2.19** *Seja  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  uma  $F$ -representação linear irredutível. Dizemos que:*

- i)  $\rho$  é **absolutamente irredutível** se  $\rho_K$  é irredutível para toda extensão  $K$  do corpo base  $F$ ;*
- ii) o corpo  $F$  é "**splitting field**" para o grupo  $G$  se toda  $F$ -representação irredutível de  $G$  é absolutamente irredutível.*

Como pode ser visto no próximo resultado, quando  $F$  é um corpo algebricamente fechado e  $\text{char} F$  não divide a ordem de  $G_1 \times G_2$ , onde  $G_1$  e  $G_2$  são grupos finitos, podemos estabelecer a completa redutibilidade de representações de  $G_1 \times G_2$ , a partir das representações de  $G_1$  e  $G_2$ .

**Teorema 1.2.20** *Sejam  $G_1, G_2$  grupos finitos e  $\psi_1, \psi_2$  representações lineares de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Suponha que  $F$  é um corpo algebricamente fechado e que  $\text{char} F$  não divide a ordem de  $G_1 \times G_2$ . Temos que:*

- i) Se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são irredutíveis, então  $\psi_1 \otimes \psi_2$  é uma representação irredutível de  $G_1 \times G_2$ .*
- ii) Cada representação irredutível de  $G_1 \times G_2$  é equivalente a uma representação  $\psi_1 \otimes \psi_2$ , onde  $\psi_i$  é uma representação irredutível de  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ .*

**Demonstração:** Ver [23], capítulo 8, seção 4. ■

Dado um grupo  $G$  considere as representações lineares

$$\begin{array}{ccc} \psi : G & \longrightarrow & F^* \\ g & \longmapsto & \psi(g) = 1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \varphi : G & \longrightarrow & GL(V) \\ g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array},$$

onde  $\psi$  é a representação trivial de grau 1. Sejam  $\rho = \psi \otimes \varphi : G \rightarrow GL(F \otimes V)$  o produto tensorial das duas representações anteriores do mesmo grupo  $G$  e  $\beta$  uma base de  $V$ . Defina então a transformação bilinear  $H : F \times V \rightarrow V$  dada por  $H(\lambda, v) = \lambda v$ ,  $v \in \beta$ . Assim, pela propriedade universal, existe transformação linear  $T : F \otimes V \rightarrow V$  dada por  $T(\lambda \otimes v) = \lambda v$ . Considere agora a transformação linear  $T'$  de  $V$  em  $F \otimes V$  dada por  $T'(v) = 1 \otimes v$ ,  $v \in \beta$ . Temos que

$$T'T(\lambda \otimes v) = T'(\lambda v) = 1 \otimes \lambda v = \lambda 1 \otimes v = \lambda \otimes v$$

e

$$TT'(\lambda v) = T(1 \otimes \lambda v) = 1(\lambda v) = \lambda v,$$

para  $\lambda \in F$  e  $v \in \beta$ , daí  $T' = T^{-1}$  e  $T$  é isomorfismo de espaços vetoriais. Além disso, considerando a estrutura de  $G$ -módulo para  $F \otimes V$  obtida de  $\rho$ , temos que

$$\begin{aligned} T(g(\lambda \otimes v)) &= T(\rho_g(\lambda \otimes v)) = T(\psi_g(\lambda) \otimes \varphi_g(v)) \\ &= T(\lambda \otimes \varphi_g(v)) = \lambda \varphi_g(v) \\ &= \varphi_g(\lambda v) = g(\lambda v) = gT(\lambda \otimes v), \end{aligned}$$

para quaisquer  $g \in G$ ,  $\lambda \in F$  e  $v \in V$ . Logo, como  $\{\lambda \otimes v : v \in \beta, \lambda \in F^*\}$  gera  $F \otimes V$ , temos que  $T$  é um isomorfismo de  $G$ -módulos. Portanto as representações  $\rho$  e  $\varphi$  são equivalentes (veja Proposição 1.2.15), e daí

$$\chi_\varphi = \chi_\rho = \chi_\psi \otimes \chi_\varphi.$$

## 1.3 Representações de $S_n$

Nesta seção vamos desenvolver a Teoria de Young, a qual será importante para se obter os  $S_n$ -módulos irredutíveis, e equivalentemente as representações irredutíveis do grupo simétrico  $S_n$ .

Em toda seção vamos denotar  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e  $F$  será um corpo de característica zero.

**Definição 1.3.1** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , definimos uma partição de  $n$  como sendo uma  $r$ -upla  $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ , com  $n_i \in \mathbb{N}$ , tal que  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$  e  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ .*

Vamos usar a notação  $(n_1, n_2, \dots, n_r) \vdash n$  para dizer que  $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_r)$  é uma partição de  $n$ , e o número total de partições de  $n$  será denotado por  $p(n)$ . Um fato conhecido é que o número de partições de  $n$  coincide com o número de classes de conjugações do grupo  $S_n$ . Se  $\lambda_1 = (n_1, n_2, \dots, n_r)$  e  $\lambda_2 = (m_1, m_2, \dots, m_s)$  são partições de  $n$ , vamos ordená-las pela ordem lexicográfica, ou seja, diremos que  $\lambda_1 > \lambda_2$  se  $n_k > m_k$ , onde  $k = \min\{i \in \mathbb{N} : n_i \neq m_i\}$ .

Vamos associar a uma partição  $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_r) \vdash n$  um diagrama  $D_\lambda$ , chamado de **diagrama de Young**, que corresponde ao conjunto  $D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i\}$ . Temos então que  $D_\lambda$  possui exatamente  $n$  quadrados, os quais vamos chamar de **células**, dispostos em  $r$  filas horizontais, chamadas de **linhas**, em que a  $i$ -ésima linha possui  $n_i$  quadrados. Assim teremos também filas verticais que chamaremos de **colunas**. Como exemplo, considerando  $n = 10$  e  $\lambda = (5, 2, 2, 1) \vdash n$ , temos

$$D_\lambda = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \\ \square & \square & & & & \\ \square & \square & & & & \\ \square & & & & & \end{array} .$$

**Definição 1.3.2** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_r) \vdash n$ . Definimos uma tabela de Young como sendo uma bijeção  $T_\lambda : D_\lambda \rightarrow I_n$ . Dizemos que  $T_\lambda$  é **standard** se*

- i)  $T(i, j) < T(i, j + 1)$  para  $1 \leq i \leq r$  e  $1 \leq j < n_i$ ;
- ii)  $T(i, j) < T(i + 1, j)$  para  $1 \leq i < r$  e  $1 \leq j \leq n_{i+1}$ .

Em outras palavras, dada  $\lambda$  uma partição de  $n$  uma tabela de Young  $T$  será o diagrama  $D_\lambda$  preenchido com o valor  $T(i, j) \in I_n$  na posição  $(i, j)$ , para cada  $(i, j) \in D_\lambda$ .

Uma **tabela standard**  $T$  será uma tabela onde os valores crescem da esquerda para direita, em cada linha, e de cima para baixo, em cada coluna.

**Observação 1.7** Dado  $\alpha \in S_n$  definimos  $\alpha T$  como sendo a composição  $\alpha \circ T$ . Assim dadas duas tabelas  $T_1, T_2$  associadas ao mesmo diagrama, existe  $\alpha \in S_n$  tal que  $T_2 = \alpha T_1$ .

**Definição 1.3.3** Dada uma tabela de Young  $T : D_\lambda \rightarrow I_n$ , para  $\lambda \vdash n$ , definimos:

- i)  $R_T = \{\alpha \in S_n : \alpha(L) = L, \text{ para toda linha } L \text{ de } T\}$ , chamado de grupos das permutações linha;
- ii)  $C_T = \{\alpha \in S_n : \alpha(U) = U, \text{ para toda coluna } U \text{ de } T\}$ , chamado de grupos das permutações coluna;
- iii)  $R^T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma$ ,  $C^T = \sum_{\pi \in C_T} (-1)^\pi \pi$  e  $E_T = R^T C^T = \sum_{\sigma \in R_T} \sum_{\pi \in C_T} (-1)^\pi \sigma \pi$  (elementos da álgebra de grupo  $FS_n$ ), onde  $(-1)^\pi$  denota o sinal da permutação  $\pi$ .

**Exemplo 1.3.4** Se  $\lambda = (3, 2) \vdash 5$  e

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array},$$

temos

$$R_T = \{Id_{S_n}, (13), (15), (35), (135), (153), (24), \\ (13)(24), (15)(24), (35)(24), (135)(24), (153)(24)\}$$

e

$$C_T = \{Id_{S_n}, (12), (34), (12)(34)\}.$$

**Lema 1.3.5** Sejam  $\alpha \in S_n$ ,  $\lambda$  partição de  $n$  e  $T : D_\lambda \rightarrow I_n$  uma tabela de Young. Então existe  $\gamma \in F$  tal que  $E_T \alpha E_T = \gamma E_T$ .

**Demonstração:** Ver [15], capítulo 5, seção 4. ■

Dado  $\alpha \in FS_n$ , defina

$$F_\alpha : FS_n \longrightarrow FS_n \\ x \longmapsto F_\alpha(x) = x\alpha$$

Temos que  $F_\alpha$  está bem definida e é linear. Além disso, sendo  $\alpha = \sum_{\rho \in S_n} \gamma_\rho \rho$ , com  $\gamma_\rho \in F$ , temos  $F_\alpha = \sum_{\rho \in S_n} \gamma_\rho F_\rho$ , e daí  $tr(F_\alpha) = \sum_{\rho \in S_n} \gamma_\rho tr(F_\rho)$ . É fácil ver que, dado



$\rho \in S_n$ ,  $tr(F_\rho) = 0$ , se  $\rho \neq Id_{S_n}$ , e  $tr(F_\rho) = n!$ , se  $\rho = Id_{S_n}$ . Portanto  $tr(F_\alpha) = \gamma_{Id_{S_n}} n! \neq 0$ .

Assim, se  $T$  é uma tabela de Young, temos

$$tr(F_{E_T}) = \sum_{\substack{\sigma \in R_T \\ \mu \in C_T}} (-1)^\mu tr(F_{\sigma\mu}) = n! \neq 0,$$

pois  $R_T \cap C_T = \{Id_{S_n}\}$ .

Tomando  $\alpha = Id_{S_n}$  no resultado anterior, temos que existe  $a \in F$  tal que  $E_T^2 = aE_T$ . Se  $a = 0$ , então  $E_T^2 = 0$ , donde  $F_{E_T}^2 = 0$ , ou seja,  $F_{E_T}$  é nilpotente, uma contradição, pois  $tr(F_{E_T}) = n! \neq 0$ . Logo  $a \neq 0$ . Defina então  $e_T = a^{-1}E_T$ . Temos que  $e_T^2 = a^{-2}E_T^2 = a^{-1}E_T = e_T$ , e  $M_T = FS_n E_T = \{\alpha E_T : \alpha \in FS_n\} = FS_n e_T$  é um ideal à esquerda de  $FS_n$ .

**Teorema 1.3.6** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \vdash n$ ,  $T, T_1, T_2$  tabelas de Young correspondentes aos diagramas  $D_\lambda, D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}$ , respectivamente, e  $M_T = FS_n E_T$ . Então*

- i)  $M_T$  é um  $FS_n$ -módulo irredutível;
- ii)  $M_{T_1}$  e  $M_{T_2}$  são isomorfos se, e somente se,  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

**Demonstração:** Ver [15], capítulo 5, seção 4. ■

Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p(n)}$  são todas as partições de  $n \in \mathbb{N}$  e  $T_1, T_2, \dots, T_{p(n)}$  são tabelas de Young standard correspondentes aos diagramas  $D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}, \dots, D_{\lambda_{p(n)}}$ , respectivamente, então, pelo resultado anterior, temos que  $M_{T_1}, M_{T_2}, \dots, M_{T_{p(n)}}$  são  $S_n$ -módulos irredutíveis dois a dois não-isomorfos. Além disso, como o número de partições de  $n$  é igual ao número de classes de conjugação do grupo  $S_n$ , pela Observação 1.6, segue que existem no máximo  $p(n)$   $S_n$ -módulos irredutíveis, dois a dois não isomorfos. Assim  $M_{T_1}, M_{T_2}, \dots, M_{T_{p(n)}}$  são exatamente todos os  $S_n$ -módulos irredutíveis, a menos de isomorfismo.

**Exemplo 1.3.7** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 2$ , considere as tabelas*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & n \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array} .$$

Temos  $R_{T_1} = C_{T_2} = S_n$  e  $C_{T_1} = R_{T_2} = \{Id\}$ , daí

$$E_{T_1} = R^{T_1} = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \quad e \quad E_{T_2} = C^{T_2} = \sum_{\pi \in C_T} (-1)^\pi \pi.$$

Assim  $\alpha E_{T_1} = E_{T_1}$  e  $\alpha E_{T_2} = (-1)^\alpha E_{T_2}$ , para todo  $\alpha \in S_n$ , donde  $M_{T_1} = \langle E_{T_1} \rangle$  e  $M_{T_2} = \langle E_{T_2} \rangle$ . Tomando

$$\begin{aligned} \psi: S_n &\longrightarrow GL(M_{T_1}) \\ \alpha &\longmapsto \psi_\alpha \end{aligned},$$

onde  $\psi_\alpha(x) = \alpha x$ ,  $x \in M_{T_1}$ , temos que  $\psi_\alpha(aE_{T_1}) = aE_{T_1}$ , com  $a \in F$ . Portanto  $\psi_\alpha = Id_{M_{T_1}}$ , para todo  $\alpha \in S_n$ . Logo  $\psi$  é a representação trivial. Analogamente, tomando

$$\begin{aligned} \varphi: S_n &\longrightarrow GL(M_{T_2}) \\ \alpha &\longmapsto \varphi_\alpha \end{aligned},$$

onde  $\varphi_\alpha(x) = \alpha x$ ,  $x \in M_{T_2}$ , temos que  $\varphi_\alpha(aE_{T_2}) = a\alpha E_{T_2} = a(-1)^\alpha E_{T_2} = (-1)^\alpha aE_{T_2}$ , com  $a \in F$ . Portanto  $\varphi_\alpha = (-1)^\alpha Id_{M_{T_2}}$ , para todo  $\alpha \in S_n$ . Portanto a partição  $(n) \vdash n$  corresponde à representação trivial de  $S_n$  e a partição  $(1, 1, \dots, 1) \vdash n$  corresponde a representação sinal. Vamos denotar  $(1, 1, \dots, 1)$  por  $(1^n)$ .

Dada  $\lambda$  uma partição de  $n$ , temos então um  $S_n$ -módulo irredutível  $M_\lambda$ , e consequentemente um caracter irredutível  $\chi_\lambda$ . Vamos denotar esse caracter por  $[\lambda]$ . Como  $S_n$  é finito temos, pela equação (1.2), que se  $\chi$  é o caracter de uma representação de  $S_n$ , então

$$\chi = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda [\lambda].$$

**Observação 1.8** Dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , qualquer corpo de característica zero é *splitting field* para  $S_n$  e  $S_n \times S_m$  (veja [15], capítulo 5, seções 3 e 4).

Tome  $K$  um corpo algebricamente fechado contendo  $F$ . Se  $\rho$  é uma  $F$ -representação irredutível de  $S_n \times S_m$ , então  $\rho_K$  é uma  $K$ -representação irredutível de  $S_n \times S_m$ , pela Observação 1.8. Pelo Teorema 1.2.20,  $\rho_K$  é o produto tensorial de representações irredutíveis de  $S_n$  e  $S_m$ , e daí, fazendo a restrição de escalares,  $\rho$  é produto tensorial de representações irredutíveis de  $S_n$  e  $S_m$  (sobre o corpo  $F$ ). Assim, se  $\psi$  é uma representação de  $S_n \times S_m$  e  $\chi_\psi$  seu caracter, temos

$$\chi_\psi = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash m}} m_{\lambda, \mu} \chi_{\lambda, \mu} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash m}} m_{\lambda, \mu} [\lambda] \otimes [\mu], \quad (1.3)$$

onde  $\chi_{\lambda, \mu}$  é um caracter irredutível de  $\psi$ , o qual é produto de caracteres irredutíveis de representações irredutíveis de  $S_n$  e  $S_m$ , e estamos denotando-o por  $[\lambda] \otimes [\mu]$ .





**Definição 1.4.1** *Sejam  $\mathfrak{B}$  uma classe de álgebras e  $\mathcal{Q} \in \mathfrak{B}$  uma álgebra gerada por um conjunto  $X$ . Dizemos que a álgebra  $\mathcal{Q}$  é livre na classe  $\mathfrak{B}$  livremente gerada por  $X$  se para cada álgebra  $A \in \mathfrak{B}$  e cada aplicação  $h : X \rightarrow A$ , existe um único homomorfismo  $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow A$  estendendo  $h$ . A cardinalidade do conjunto  $X$  é chamado de posto de  $\mathcal{Q}$ .*

**Exemplo 1.4.2** *Considere a álgebra  $F[X]$  do Exemplo 1.1.9. Seja  $A$  uma álgebra unitária, associativa e comutativa, e considere a aplicação  $h : X \rightarrow A$  dada por  $h(x_i) = a_i \in A$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Temos que  $\varphi : F[X] \rightarrow A$  dada por  $\varphi(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é o único homomorfismo que estende  $h$ . Logo  $F[X]$  é uma álgebra livre na classe das álgebras associativas, comutativas e com unidade.*

Considere um conjunto não-vazio  $X = \{x_i : i \in I\}$ , cujos elementos chamaremos de **variáveis**. Uma palavra será um sequência do tipo  $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ , onde  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $x_{i_j} \in X$ . O valor  $n$  é o tamanho da palavra e, no caso  $n = 0$ , teremos a palavra vazia, denotada por 1. Seja  $F\langle X \rangle$  o  $F$ -espaço vetorial tendo o conjunto de todas essas palavras como base, e considere o produto (bilinear) em  $F\langle X \rangle$  tal que

$$(x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m},$$

chamado de concatenação. Temos que  $F\langle X \rangle$  com esse produto é uma álgebra associativa unitária, gerada pelo conjunto  $X$ . Os elementos de  $F\langle X \rangle$  são chamados de **polinômios**. Assim um polinômio é uma soma (formal) de termos (monômios), que por sua vez são produtos (formais) de um escalar por uma palavra.

**Proposição 1.4.3** *A álgebra  $F\langle X \rangle$  é livre na classe das álgebras associativas unitárias.*

**Demonstração:** Seja  $R$  uma álgebra associativa com unidade e  $h : X \rightarrow R$  uma aplicação. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $h(x_i) = a_i$ , onde  $a_i \in R$ . Temos que a aplicação linear  $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow R$  tal que  $\varphi(x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2} \cdots a_{i_n}$ , é um homomorfismo de álgebras, e é o único que, restrito a  $X$ , é igual a  $h$ . ■

Em particular, se considerarmos o subespaço de  $F\langle X \rangle$  gerado pelas palavras de tamanho maior ou igual a 1, temos o ideal de  $F\langle X \rangle$  gerado por  $X$ .

## 1.5 Identidades polinomiais

Nesta seção será estabelecida a noção de identidade polinomial para uma álgebra, um dos principais objetos de estudo deste trabalho. De agora em diante,

$X = \{x_1, x_2, \dots\}$  denotará um conjunto enumerável e infinito, a menos que se mencione o contrário.

**Definição 1.5.1** *Seja  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  e  $A$  uma álgebra. Dizemos que  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma **identidade polinomial** (ou apenas **identidade**) para a álgebra  $A$ , se*

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A.$$

*Muitas vezes dizemos que  $A$  satisfaz  $f$  ou que  $f \equiv 0$  em  $A$ .*

Assim, uma álgebra  $A$  será chamada de **PI-álgebra** se existe um polinômio  $f \neq 0$ , em  $F\langle X \rangle$ , satisfazendo a condição da definição anterior, ou seja,  $f \equiv 0$  é uma identidade para  $A$ . Além disso, um polinômio  $f \in F\langle X \rangle$  é uma identidade para  $A$  se, e somente se,  $f$  pertence ao núcleo de qualquer homomorfismo  $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow A$ .

**Exemplo 1.5.2** *Sejam  $A$  uma álgebra comutativa e  $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ . O polinômio  $f$  é chamado de comutador, e denotamos por  $[x_1, x_2]$ . Como a álgebra  $A$  é comutativa, temos  $ab = ba$ , para quaisquer  $a, b \in A$ , e daí  $ab - ba = 0$ . Logo  $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$  é uma identidade para a álgebra  $A$ . Portanto, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

Definimos indutivamente, o comutador de tamanho  $n \in \mathbb{N}$ , como sendo

$$[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n].$$

**Exemplo 1.5.3** *A Álgebra de Grassmann  $E$  satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] \equiv 0.$$

*Basta observar que  $[a, b] \in E_0$ , para quaisquer  $a, b \in E$ .*

**Definição 1.5.4** *Dada uma álgebra  $A$ , um polinômio  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  é dito **central** para  $A$  se  $f$  tem termo constante (ou seja, monômio na palavra vazia) nulo e  $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$ , para quaisquer  $a_1, \dots, a_n \in A$ .*

**Observação 1.10** *Seja  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  um polinômio central para uma álgebra  $A$ . Então  $[f, g]$  é uma identidade para  $A$ , para todo  $g \in F\langle X \rangle$ . Dado um comutador  $g(x_1, \dots, x_n) = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  de tamanho  $n$ , temos que se  $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$  é uma substituição em um álgebra  $A$  tal que  $a_i \in Z(A)$ , para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então  $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ .*

**Exemplo 1.5.5** *Claramente as identidades polinomiais de uma álgebra  $A$  são polinômios centrais, os quais são chamados de polinômios centrais triviais.*

**Exemplo 1.5.6** *O polinômio  $[x_1, x_2]^2$  é central para álgebra  $M_2(F)$ . De fato, dada uma matriz  $A \in M_2(F)$  temos que  $A^2 - \text{tr}(A)I_2 + \det(A)I_2 = 0$ . Além disso, dados  $X_1, X_2 \in M_2(F)$ , temos que  $\text{tr}([X_1, X_2]) = 0$ . Portanto  $[X_1, X_2]^2 = -\det(A)I_2 \in Z(M_2(F))$ .*

Dada uma álgebra, um dos principais pontos de estudo é estabelecer o conjunto de todas as identidades dessa álgebra, e tentar encontrar um **conjunto gerador** dessas identidades. Nesse sentido serão estabelecidas algumas definições e resultados.

**Definição 1.5.7** *Um ideal  $I$  de  $F\langle X \rangle$  é chamado de **T-ideal** se é invariante por endomorfismos de  $F\langle X \rangle$ , ou seja,  $\varphi(I) \subseteq I$ , para todo  $\varphi \in \text{End}(F\langle X \rangle)$ .*

Assim dada uma álgebra  $A$ , considere o conjunto

$$T(A) = \{f \in F\langle X \rangle : f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

de todas as identidades de  $A$ , também denotado por  $\text{Id}(A)$ . Temos que se  $f \in \text{Id}(A)$  então  $f(g_1, g_2, \dots, g_n) \in T(A)$ , para quaisquer  $g_1, g_2, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$ , e qualquer endomorfismo de  $F\langle X \rangle$  é determinado pela aplicação  $x_i \rightarrow g_i$ ,  $x_i \in X$ ,  $g_i \in F\langle X \rangle$ . Logo,  $T(A)$  é um T-ideal.

Reciprocamente, dado um T-ideal de  $F\langle X \rangle$ , podemos encontrar um álgebra correspondente a esse T-ideal.

**Proposição 1.5.8** *Se  $I$  é um T-ideal de  $F\langle X \rangle$ , então  $\text{Id}(F\langle X \rangle/I) = I$ .*

**Demonstração:** Dados  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$  e  $\overline{g_1}, \overline{g_2}, \dots, \overline{g_n} \in F\langle X \rangle/I$ , temos que

$$f(\overline{g_1}, \overline{g_2}, \dots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, g_2, \dots, g_n)} = \overline{0},$$

pois  $f(g_1, g_2, \dots, g_n) \in I$ , já que  $I$  é um T-ideal. Logo  $f \in \text{Id}(F\langle X \rangle/I)$ , donde  $I \subseteq \text{Id}(F\langle X \rangle/I)$ .

Agora tome  $f' \in \text{Id}(F\langle X \rangle/I)$ . Então

$$\overline{0} = f'(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{f'(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \text{ para quaisquer } \overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in F\langle X \rangle/I.$$

Logo  $f'(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$ . Portanto  $\text{Id}(F\langle X \rangle/I) \subseteq I$ . Da dupla inclusão temos o resultado. ■

É fácil ver que a interseção de uma família de T-ideais é um T-ideal. Assim, dado  $S \subseteq F\langle X \rangle$ ,  $S$  não-vazio, definimos o **T-ideal gerado por  $S$**  como sendo a interseção de todos os T-ideais de  $F\langle X \rangle$  que contêm  $S$ , e denotamos por  $\langle S \rangle_T$ . Além disso, pela definição  $\langle S \rangle_T$  é o menor T-ideal de  $F\langle X \rangle$  que contém  $S$ , e dado  $f \in \langle S \rangle_T$ , dizemos que  $f$  é consequência dos polinômios de  $S$ . Dado  $S_1 \subseteq F\langle X \rangle$ ,  $S_1$  não-vazio, com  $\langle S \rangle_T = \langle S_1 \rangle_T$ , dizemos que  $S$  e  $S_1$  são equivalentes.

**Observação 1.11** *O T-ideal gerado por  $S$  é o subespaço de  $F\langle X \rangle$  gerado pelo conjunto*

$$\{h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2 : f \in S, h_1, h_2, g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle\}.$$

**Exemplo 1.5.9** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra comutativa com unidade. Se  $F$  é infinito, então*

$$T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T.$$

**Definição 1.5.10** *Duas PI-álgebras  $A$  e  $B$  são PI-equivalentes se satisfazem as mesmas identidades polinomiais, ou seja,  $T(A) = T(B)$ .*

## 1.6 Polinômios Multi-homogêneos e Multilineares

Nesta seção serão definidos o que são polinômios multi-homogêneos e multilineares e vamos ver que, sob certas condições sobre o corpo  $F$ , será suficiente trabalhar com identidades polinomiais multilineares.

**Definição 1.6.1** *Considere os elementos  $m = \alpha x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$  e  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $F\langle X \rangle$ . Definimos*

- i) O grau do monômio  $m$ , denotado por  $\deg m$ , como sendo o tamanho da palavra  $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ . Neste caso  $\deg m = n$ ;*
- ii) O grau do monômio  $m$  em  $x_i$ , denotado por  $\deg_{x_i} m$ , como sendo o número de vezes em que aparece a variável  $x_i$  em  $m$ ;*
- iii) O grau do polinômio  $f$ , denotado por  $\deg f$ , como sendo o maior dos graus dos monômios de  $f$ ;*
- iv) O grau do polinômio  $f$  em  $x_i$ , denotado por  $\deg_{x_i} f$ , como sendo o maior valor de  $\deg_{x_i} m$ , onde  $m$  é monômio de  $f$ .*

**Exemplo 1.6.2** *Seja  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 x_3^2 x_2 - x_1 x_3 + x_3^2 x_1^3 - x_1$ , então*

$$\deg_{x_1} f = 3, \deg_{x_2} f = 2 \text{ e } \deg_{x_3} f = 2.$$



**Definição 1.6.3** Um polinômio  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  é dito **homogêneo na variável**  $x_i$  se, em cada monômio de  $f$ ,  $x_i$  aparece com o mesmo grau. Dado  $m = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  definimos o **multigrau** de  $m$  como sendo a  $n$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , onde  $a_i = \deg_{x_i} m$ . Chamamos de **componente multihomogênea** de  $f \in F\langle X \rangle$  a soma de todos os monômios de  $f$  com uma dado multigrau. Quando  $f$  é homogêneo em todas as variáveis (ou, equivalentemente, possui uma única componente multihomogênea) dizemos que  $f$  é **multihomogêneo**.

**Exemplo 1.6.4** Considere os polinômios

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 x_1 + x_2 x_1^3 \quad e \quad g(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1 x_2^2.$$

Temos que  $f$  é homogêneo em  $x_1$  e  $x_2$ , donde é multihomogêneo, e  $g$  é homogêneo apenas em  $x_1$ , e portanto não é multihomogêneo.

**Teorema 1.6.5** Seja  $F$  um corpo infinito. Se  $f \equiv 0$  é uma identidade para a álgebra  $A$ , então toda componente multihomogênea de  $f$  é também uma identidade para  $A$ . Assim, todo  $T$ -ideal de  $F\langle X \rangle$  é gerado por seus polinômios multihomogêneos.

**Demonstração:** Ver [12], Teorema 1.3.2, página 6. ■

**Exemplo 1.6.6** Seja  $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \equiv 0$  em  $A$ . Dados  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  em  $F$ , e não nulos, temos que

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1, x_2) &= \alpha_1^2 x_1^2 x_2 + \alpha_1 x_1 x_2^2 \equiv 0 \\ f(\alpha_2 x_1, x_2) &= \alpha_2^2 x_1^2 x_2 + \alpha_2 x_1 x_2^2 \equiv 0 \end{aligned}$$

em  $A$ . Além disso

$$0 \equiv \alpha_2 f(\alpha_1 x_1, x_2) - \alpha_1 f(\alpha_2 x_1, x_2) = (\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)) x_1^2 x_2.$$

Logo, como  $\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0$ ,  $x_1^2 x_2 \equiv 0$  em  $A$ , e conseqüentemente  $x_1 x_2^2 \equiv 0$  em  $A$ .

**Definição 1.6.7** Dizemos que um polinômio  $f$  é **linear na variável**  $x_i$  se  $f$  é homogêneo em  $x_i$  e  $\deg_{x_i} f = 1$ . Quando  $f$  é linear em todas as variáveis dizemos que  $f$  é **multilinear**.

**Observação 1.12** Se  $f(x_1, \dots, x_n)$  é multilinear então podemos escrever

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde  $\alpha_\sigma \in F$  e  $S_n$  é o grupo de permutações de  $\{1, \dots, n\}$ . Se  $f$  é linear na variável  $x_1$ , então

$$f\left(\sum \alpha_i y_i, x_2, \dots, x_n\right) = \sum \alpha_i f(y_i, x_2, \dots, x_n),$$

para todo  $\alpha_i \in F$ ,  $y_i \in F\langle X \rangle$ .

**Observação 1.13** *Sejam  $A$  uma álgebra gerada por um conjunto  $B$  como espaço vetorial e  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  um polinômio multilinear. Não é difícil ver que  $f \equiv 0$  em  $A$  se, e somente se,  $f(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0$ , para quaisquer  $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ .*

**Definição 1.6.8** *Para um monômio  $m = m(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$  e dois inteiros  $1 \leq p, q \leq n$ , defina por  $m^{[p,q]}$  a subpalavra obtida de  $m$  eliminando as  $p-1$  primeiras e as  $n-q$  últimas variáveis, ou seja,*

$$m^{[p,q]} = x_p x_{p+1} \cdots x_{q-1} x_q.$$

Seja  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  um polinômio multihomogêneo. Suponha que  $f$  não é multilinear, ou seja, existe alguma variável em  $f$  com grau maior que 1, digamos  $\deg_{x_1} f > 1$ . Considere o polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_2, x_2, \dots, x_n).$$

Temos que se  $f$  é uma identidade para a álgebra  $A$ , então  $h \equiv 0$  em  $A$ . Usando que  $\deg_{x_1} f > 1$ , mostra-se que  $h$  é um polinômio não-nulo e, além disso,  $\deg_{y_1} h$  é menor que  $\deg_{x_1} f$ . Indutivamente podemos repetir esse processo até que a primeira variável tenha grau 1. Fazendo isto para todas as variáveis obtemos um polinômio multilinear que é consequência de  $f$ , e continua sendo uma identidade para a álgebra  $A$ . Esse processo é chamado de **multilinearização**.

**Exemplo 1.6.9** *Se  $f(x_1) = x_1^2$ , então*

$$g(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) = x_1 x_2 + x_2 x_1,$$

*que é multilinear.*

**Teorema 1.6.10** *Se  $\text{char} F = 0$ , então todo polinômio não-nulo  $f \in F\langle X \rangle$  é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares. Assim, se  $I$  é um  $T$ -ideal de  $F\langle X \rangle$ , então  $I$  é gerado por seus polinômios multilineares.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 1.6.5,  $f$  é equivalente a um conjunto de polinômios multihomogêneos, e daí é suficiente mostrar para o caso em que  $f$  é multihomogêneo. Assim suponha que  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é multihomogêneo. Vamos aplicar o processo de multilinearização em  $f$ . Se  $\deg_{x_1} f = d > 1$  escreva

$$f = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d g_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n),$$

onde  $\deg_{y_1} g_i = i$ ,  $\deg_{y_2} g_i = d - i$  e  $\deg_{x_j} g_i = \deg_{x_j} f$ , para  $j = 2, \dots, n$ . Desse modo, todos os polinômios  $g_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)$ , com  $i = 1, \dots, d - 1$ , são conseqüências de  $f$  (pelo Teorema 1.6.5). Note que, para todo  $i$ ,

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_n).$$

Como  $\text{char} F = 0$ , segue que  $\binom{d}{i} \neq 0$ , donde  $f$  é conseqüência de todo  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, d - 1$ . Aplicando indução obtemos o resultado. ■

## 1.7 Álgebras G-graduadas e Identidades Polinomiais Graduadas

Ao longo da seção será introduzida a noção de graduação de uma álgebra sobre um grupo e alguns exemplos que serão importantes nos próximos capítulos. Vamos denotar por  $G$  um grupo abeliano, com notação aditiva.

**Definição 1.7.1** *Sejam  $A$  uma álgebra sobre  $F$  e  $G$  um grupo. Dizemos que  $A$  é  $G$ -graduada (ou simplesmente graduada) se  $A$  pode ser escrita como soma direta de subespaços  $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ , onde  $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}$ , para todo  $g, h \in G$ .*

Pela definição, um elemento  $a \in A$  é escrito de forma única como soma finita  $a = \sum_{g \in G} a_g$ , onde  $a_g \in A^{(g)}$ . Os subespaços  $A^{(g)}$  são chamados de **componentes homogêneas** de  $A$  e um elemento  $a \in A$  é **homogêneo** (ou **homogêneo de grau  $g$** ) se  $a \in A^{(g)}$ , e denotamos por  $|a|_G = g$  (ou simplesmente por  $|a| = g$ ). Se  $A$  possui unidade, não é difícil ver que  $1_A \in A^{(0)}$ , onde  $0$  é o elemento neutro de  $G$ .

**Definição 1.7.2** *Dada uma álgebra  $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$   $G$ -graduada e  $\beta$  uma base de  $A$ , dizemos que:*

- i) Um subespaço  $B \subseteq A$  é homogêneo se  $B = \bigoplus_{g \in G} (B \cap A^{(g)})$ .*
- ii) A base  $\beta$  é homogênea (ou  $G$ -homogênea) se todos os seus elementos são homogêneos.*

Na definição anterior, quando  $B$  é uma subálgebra homogênea de  $A$ , vemos facilmente que  $(B \cap A^{(g)})(B \cap A^{(h)}) \subseteq (B \cap A^{(g+h)})$ , para quaisquer  $g, h \in G$ , e daí temos uma  $G$ -graduação para  $B$  a partir da  $G$ -graduação de  $A$ , e dizemos que  $B$  herda a  $G$ -graduação de  $A$ .

**Exemplo 1.7.3 (Graduação Trivial)** *Dada uma álgebra  $A$  e um grupo  $G$ , considere os subespaços  $A^0 = A$  e  $A^{(g)} = \{0\}$ , para  $g \neq 0$ . Assim temos uma graduação para  $A$ , chamada de **graduação trivial**. Portanto qualquer álgebra possui uma  $G$ -graduação.*

Seja  $A$  uma álgebra com base multiplicativa  $\mathcal{B}$ . Se for possível definir uma aplicação  $|\cdot| : \mathcal{B} \rightarrow G$ , tal que

$$b_1 b_2 \neq 0 \text{ implica } |b_1 b_2| = |b_1| + |b_2|, \text{ para quaisquer } b_1, b_2 \in \mathcal{B}, \quad (1.4)$$

então obtemos uma  $G$ -graduação para  $A$ . De fato, dado  $g \in G$ , seja  $A^{(g)}$  o subespaço de  $A$  gerado pelo conjunto  $\{b \in \mathcal{B} : |b| = g\}$ . Assim,  $A = \sum_{g \in G} A^{(g)}$ , pois  $\mathcal{B}$  é base de  $A$ , e como estamos dividindo  $\mathcal{B}$  em subconjuntos disjuntos, segue que a soma é direta, ou seja,  $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ . Além disso, por (1.4), temos que  $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}$ , para quaisquer  $g, h \in G$ . Neste caso, temos que  $\mathcal{B}$  é  $G$ -homogênea e vamos chamá-la de base  $G$ -multiplicativa da álgebra graduada  $A$ .

Com base na ideia anterior, onde obtemos uma  $G$ -graduação para uma álgebra  $A$  com base multiplicativa  $\mathcal{B}$ , vamos estabelecer graduações para algumas álgebras que serão importantes ao longo do trabalho.

**Exemplo 1.7.4** *Considere a álgebra  $M_n(F)$ . Toda permutação  $\mu \in S_n$  induz uma  $\mathbb{Z}_n$ -graduação para  $M_n(F)$ . De fato, o conjunto  $\beta = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$  é uma base multiplicativa para  $M_n(F)$  e claramente a aplicação  $|\cdot|_\mu : \beta \rightarrow \mathbb{Z}_n$ , dada por*

$$|E_{ij}|_\mu = \overline{\mu(j) - \mu(i)} \in \mathbb{Z}_n,$$

onde  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , satisfaz (1.4). Essa graduação é chamada de  **$\mathbb{Z}_n$ -graduação elementar** induzida por  $\mu$ .

Considere o caso particular em que  $\mu = Id_{S_n}$ . Denote por  $M_n(F)^{(\alpha)}$  cada componente homogênea da  $\mathbb{Z}_n$ -graduação em  $M_n(F)$ , com  $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ . Então  $M_n^{(\alpha)}$  é o subespaço de  $M_n(F)$  gerado pela matrizes unitárias  $E_{ij}$  tais que  $\overline{j - i} = \alpha$ . Assim  $M_n^{(\bar{0})}$  são as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & & \\ & a_{2,2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n} \in F, \quad (1.5)$$

e para  $0 < t \leq n-1$ ,  $M_n^{(\bar{t})}$  são as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & a_{2,t+2} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,t} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

onde  $a_{1,t+1}, a_{2,t+2}, \dots, a_{n-t,n}, a_{n-t+1,1}, \dots, a_{n,t} \in F$ .

**Exemplo 1.7.5** Considerando o caso particular  $n = 2$  no exemplo anterior, temos uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação para  $M_2(F) = M_2(F)_{\bar{0}} \oplus M_2(F)_{\bar{1}}$  onde

$$M_2(F)_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in F \right\} \quad e \quad M_2(F)_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : b, c \in F \right\};$$

De modo semelhante, conseguimos uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação para  $M_{1,1}(E) = M_{1,1}(E)_{\bar{0}} \oplus M_{1,1}(E)_{\bar{1}}$ , onde

$$M_{1,1}(E)_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in E_0 \right\} \quad e \quad M_{1,1}(E)_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : b, c \in E_1 \right\}.$$

Além disso, também temos uma  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -gradação para

$$M_{1,1}(E) = M_{(\bar{0},\bar{0})} \oplus M_{(\bar{0},\bar{1})} \oplus M_{(\bar{1},\bar{0})} \oplus M_{(\bar{1},\bar{1})},$$

onde

$$M_{(\bar{0},\bar{0})} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in E_0 \right\}, \quad M_{(\bar{0},\bar{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in E_0 \right\},$$

$$M_{(\bar{1},\bar{0})} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} : c \in E_1 \right\}, \quad M_{(\bar{1},\bar{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{pmatrix} : d \in E_1 \right\}.$$

Agora seja  $E = E_0 \oplus E_1$  a álgebra de Grassmann com sua  $\mathbb{Z}_2$ -gradação. Podemos escrever a base multiplicativa natural de  $E$  na forma  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$ , onde  $\mathcal{E}_0$  e  $\mathcal{E}_1$  são as bases usuais de  $E_0$  e  $E_1$ , respectivamente. Além disso, pelo Exemplo 1.1.20, temos que  $M_n(F) \otimes E \simeq M_n(E)$ . Assim, a partir das gradações de  $M_n(F)$  e  $E$ , vamos estabelecer uma  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -gradação para  $M_n(E)$ .

**Exemplo 1.7.6** Seja  $\Lambda = \{aE_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, a \in \mathcal{E}\}$ . Não é difícil ver que  $\Lambda$  é uma base multiplicativa para  $M_n(E)$ . Assim, dado  $\mu \in S_n$ , defina a aplicação

$$|aE_{ij}|^\mu = (|E_{ij}|_\mu, |a|_2) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2,$$

onde  $a \in \mathcal{E}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  e

$$|a|_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } a \in \mathcal{E}_0 \\ 1, & \text{se } a \in \mathcal{E}_1 \end{cases}.$$

Temos que  $|\cdot|^\mu$  satisfaz 1.4, pois

$$|ab|_2 = |a|_2 + |b|_2$$

para quaisquer  $a, b \in \mathcal{E}$ , e dados  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ , temos

$$|E_{ij}E_{jk}|_\mu = \overline{\mu(k) - \mu(i)} = \overline{\mu(k) - \mu(j) + \mu(j) - \mu(i)} = |E_{ij}|_\mu + |E_{jk}|_\mu.$$

Assim,  $\mu$  induz uma  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduação em  $M_n(E)$ , a qual denotamos por  $(M_n(E), \mu)$  e chamamos de **graduação quase elementar de  $M_n(E)$** .

Dados  $p, q \in \mathbb{N}$ , seja  $n = p + q$  e considere a subálgebra  $M_{p,q}(E)$  de  $M_n(E)$ . Defina  $\eta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , dada por

$$\eta(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \leq p \\ 1, & \text{se } i > p \end{cases}. \quad (1.7)$$

e  $\mathcal{B}_p = \{aE_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, a \in \mathcal{E}_{\eta(i)+\eta(j)}\}$ . Temos que o conjunto  $\mathcal{B}_p$  é uma base  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -multiplicativa de  $M_{p,q}(E)$ . Não é difícil ver que  $M_{p,q}(E)$  é subálgebra homogênea de  $M_n(E)$ , daí  $M_{p,q}(E)$  herda a  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduação quase elementar de  $(M_n(E), \mu)$ , a qual denotamos por  $(M_{p,q}(E), \mu)$ , e portanto  $\mu$  também induz uma graduação em  $M_{p,q}(E)$ . Sendo  $M_{p,q}(E)^{(t,\lambda)}$  uma componente homogênea dessa graduação, para  $(t, \lambda) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ , temos que  $M_{p,q}(E)^{(t,\lambda)} = \text{span}_F \langle aE_{ij} : \overline{\mu(j) - \mu(i)} = t, a \in \mathcal{E}_{\eta(i)+\eta(j)}, \eta(i) + \eta(j) = \lambda \rangle$ .

**Exemplo 1.7.7** Dados  $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ , tome  $n = p + q$ ,  $m = r + s$ ,  $\mu \in S_n$  e  $\nu \in S_m$ . Considere as álgebras  $M_{p,q}(E)$  e  $M_{r,s}(E)$ , e para  $(aE_{ij}, bE_{uv}) \in \mathcal{B}_p \times \mathcal{B}_r$ , defina

$$|aE_{ij} \otimes bE_{uv}| = (\overline{m(\mu(j) - \mu(i)) + (\nu(v) - \nu(u))}, |a|_2 + |b|_2) \in \mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2.$$

Não é difícil ver que  $|\cdot|$  satisfaz (1.4), e que  $\{x \otimes y : x \in \mathcal{B}_p, y \in \mathcal{B}_r\}$  é uma base multiplicativa para  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ . Portanto temos uma  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -graduação para o produto tensorial de  $M_{p,q}(E)$  por  $M_{r,s}(E)$ .

**Exemplo 1.7.8** Dado  $G$  um grupo finito, a álgebra de grupo  $FG$  tem uma  $G$ -graduação natural dada por

$$FG = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

onde  $A_g = \langle g \rangle = \{\lambda g : \lambda \in F\}$ .

**Exemplo 1.7.9** Seja  $E = E_0 \otimes E_1$  a álgebra de Grassmann com sua  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural. Dada uma álgebra  $A = A_0 \oplus A_1$   $\mathbb{Z}_2$ -graduada, temos então uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação para a álgebra  $B = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$ . Essa álgebra é chamada de **produto tensorial graduado** de  $A$  pela álgebra de Grassmann  $E$ , ou **envoltória de Grassmann** de  $A$ .

**Exemplo 1.7.10** Seja  $E$  a álgebra de Grassmann e considere a álgebra  $E \otimes E$ . A partir da  $\mathbb{Z}_2$ -gradação da álgebra  $E$ , não é difícil ver que  $E \otimes E = A_0 \oplus A_1$ , onde

$$A_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \quad e \quad A_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$$

é uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação de  $E \otimes E$ .

**Definição 1.7.11** Sejam  $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$  e  $B = \bigoplus_{g \in G} B^{(g)}$  duas álgebras  $G$ -graduadas. Dizemos que um homomorfismo  $\varphi : A \rightarrow B$  é um **homomorfismo  $G$ -graduado** se  $\varphi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)}$ , para todo  $g \in G$ . Analogamente, definimos monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo e automorfismo  $G$ -graduado. Quando  $\varphi$  é um isomorfismo  $G$ -graduado, denotamos  $A \simeq_G B$ , temos que  $\varphi(A^{(g)}) = B^{(g)}$ , para todo  $g \in G$ , e dizemos que as gradações em  $A$  e  $B$  são equivalentes.

**Exemplo 1.7.12** Dada uma álgebra  $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$   $G$ -graduada e um elemento inversível  $a \in A$ , defina

$$\begin{aligned} T : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto T(x) = a^{-1}xa \end{aligned}$$

Vemos facilmente que  $T$  é um homomorfismo de álgebras. Se  $a^{-1} \in A^{(h)}$  e  $a \in A^{(g)}$ ,  $g, h \in G$ , então  $a^{-1}a \in A^{(g+h)}$ . Daí, como  $a^{-1}a = 1_A \in A^{(0)}$ , temos  $a^{-1}a \in A^{(0)} \cap A^{(g+h)}$ . Sendo a soma direta e  $a^{-1}a = 1_A \neq 0_A$ , devemos ter  $g+h = h+g = 0$ , donde  $h = -g$ . Assim, dado  $x \in A$ , com  $|x| = g' \in G$ , temos que

$$|T(x)| = |a^{-1}xa| = h + g' + g = -g + g' + g = g' = |x|,$$

e portanto  $T$  é um homomorfismo graduado, chamado de **automorfismo  $G$ -graduado induzido por  $a$** .

Para definir identidades graduadas vamos estabelecer uma gradação natural para a álgebra associativa livre  $F\langle X \rangle$ .

Sejam  $F\langle X \rangle$  a álgebra associativa livre e  $G$  um grupo finito. Escrevemos  $X = \bigcup_{g \in G} X^{(g)}$ , onde  $X^{(g)}$  são conjuntos dois a dois disjuntos. Se uma variável  $x$  pertence a  $X^{(g)}$ , dizemos que  $x$  é homogênea de grau  $g$ , e escrevemos  $|x| = g$  ou denotamos  $x$  por  $x^g$ . Os monômios

$$\{x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k} : k \in \mathbb{N}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \in X\}$$

formam uma base para  $F\langle X \rangle$  como espaço vetorial. Se  $m = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n} \in F\langle X \rangle$  é um monômio, definimos o  $G$ -grau homogêneo de  $m$  como sendo  $|m| = |x_{i_1}| + |x_{i_2}| + \cdots + |x_{i_n}|$ . Dado  $g \in G$ , denote por  $F\langle X \rangle^{(g)}$  o subespaço de  $F\langle X \rangle$  gerado por todos os monômios que têm  $G$ -grau homogêneo  $g$ . Temos que  $F\langle X \rangle^{(g)}F\langle X \rangle^{(h)} \subseteq F\langle X \rangle^{(g+h)}$ , para  $g, h \in G$ . Portanto

$$F\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} F\langle X \rangle^{(g)}$$

é uma  $G$ -gradação para  $F\langle X \rangle$ . Chamamos  $F\langle X \rangle$ , com esta  $G$ -gradação, de **álgebra associativa livre  $G$ -graduada**, a qual denotamos por  $F\langle X|G \rangle$ . Os elementos da álgebra  $F\langle X|G \rangle$  são chamados de polinômios  $G$ -graduados ou, simplesmente, de polinômios graduados.

**Definição 1.7.13** *Seja  $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$  uma álgebra  $G$ -graduada. Um polinômio  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  é chamado de **identidade polinomial graduada** da álgebra  $G$ -graduada  $A$  se*

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \bigcup_{g \in G} A^{(g)},$$

onde  $a_s \in A^{(|x_s|)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ .

Como no caso de identidades polinomiais, também temos nesse contexto a ideia de  $T$ -ideal, o qual será chamado de  $T_G$ -ideal.

**Definição 1.7.14** *Seja  $F\langle X \rangle$  a álgebra associativa livre  $G$ -graduada. Um ideal  $I$  de  $F\langle X \rangle$  é dito um  $T_G$ -ideal se é invariante por endomorfismos  $G$ -graduados. Dado  $S \subseteq F\langle X \rangle$ ,  $S$  não-vazio, definimos o  **$T_G$ -ideal gerado por  $S$**  como sendo a interseção de todos os  $T_G$ -ideais de  $F\langle X \rangle$  que contêm  $S$ .*

O conjunto  $T_G(A)$  de todas as identidades graduadas de uma álgebra  $G$ -graduada  $A$  é um  $T_G$ -ideal de  $F\langle X \rangle$ . Não é difícil ver que um ideal  $I$  é um  $T_G$ -ideal de  $F\langle X \rangle$  se, e somente se,  $f(g_1, g_2, \dots, g_n) \in I$ , para quaisquer  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$  e  $g_i \in F\langle X \rangle^{(|x_i|)}$ .

No caso em que  $G = \mathbb{Z}_n$ , denotaremos  $T_G(A)$  por  $T_n(A)$  e chamaremos um  $T_G$ -ideal de  $T_n$ -ideal.

**Observação 1.14** *As definições e observações de polinômios multihomogêneos e multilineares são as mesmas para o caso de polinômios  $G$ -graduados, e os resultados dos Teoremas 1.6.5 e 1.6.10 são análogos para o caso de  $T_G$ -ideais.*



**Proposição 1.7.15** *Dadas duas álgebras G-graduadas  $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$  e  $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$  tais que  $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ , então  $T(A) \subseteq T(B)$ . Além disso, se  $T_G(A) = T_G(B)$ , então  $T(A) = T(B)$ .*

**Demonstração:** Considere as álgebras associativas livres  $F\langle X \rangle$  e  $F\langle Y \rangle$ , onde  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  e  $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ , e tome  $f(y_1, y_2, \dots, y_n) \in T(A)$ . Dados  $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ , seja  $b_{i_g} \in B_g$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$  e  $g \in G$ , tais que  $b_i = \sum_{g \in G} b_{i_g}$ . Para cada  $b_{i_g} \neq 0$ , considere a variável  $x_{i_g} \in X$  e o polinômio  $f_1 = f(\sum_{g \in G} x_{1_g}, \dots, \sum_{g \in G} x_{n_g})$  em  $F\langle X \rangle$ . Observe que  $f_1$  é um polinômio graduado, e como  $f \in T(A)$ , segue que  $f_1 \in T_G(A)$  e daí  $f_1 \in T_G(B)$ . Então, substituindo  $x_{i_g} = b_{i_g}$ , para  $i = \{1, \dots, n\}$  e  $g \in G$ , temos

$$f(b_1, b_2, \dots, b_n) = f\left(\sum_{g \in G} b_{1_g}, \sum_{g \in G} b_{2_g}, \dots, \sum_{g \in G} b_{n_g}\right) = 0$$

e portanto  $f \in T(B)$ .

Supondo  $T_G(A) = T_G(B)$ , temos a inclusão  $T_G(B) \subseteq T_G(A)$ , e daí analogamente obtemos  $T(B) \subseteq T(A)$ , e o resultado segue. ■

**Definição 1.7.16** *Seja  $A$  uma álgebra G-graduada e  $\beta$  uma base homogênea de  $A$ . Tome  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X|G \rangle$ . Uma **substituição standard** na base  $\beta$  (ou em  $A$ ) é uma substituição  $S$  da forma*

$$x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_n = b_n$$

onde  $b_i \in \beta$  e  $|x_i| = |b_i|$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Na definição anterior, vamos denotar por  $f|_S$  o valor de  $f$  correspondente à substituição  $S$ . Como  $\beta$  gera  $A$ , se  $f$  é um polinômio graduado multilinear tal que  $f|_S = 0$ , para toda substituição  $S$ , então  $f$  é uma identidade graduada para  $A$ . Além disso, se  $\beta$  é uma base multiplicativa e  $f$  é um monômio, então  $f|_S = 0$  ou  $cf|_S \in \beta$ , para algum  $c \in F$ .

Vamos denotar por  $\mathcal{M}$  o conjunto dos monômios multilineares em  $F\langle X|G \rangle$ , para qualquer grupo  $G$ .

O próximo resultado será de fundamental importância para os próximos capítulos, pois nos permitirá encontrar geradores de  $T_G$ -ideais de identidades para alguns tipos de álgebras matriciais.

**Proposição 1.7.17** *Considere  $\text{char}F = 0$ . Sejam  $A$  uma álgebra  $G$ -graduada com base homogênea e multiplicativa  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{N}$  um conjunto de identidades graduadas de  $A$  e  $I$  o  $T_G$ -ideal gerado por  $\mathcal{N}$ . Além disso, suponha que para quaisquer  $h, h' \in \mathcal{M} \setminus T_G(A)$ , existe substituição standard  $S$  e  $0 \neq c \in F$  tal que*

$$0 \neq h|_S = ch'|_S \Leftrightarrow h \equiv ch' \pmod{I}.$$

Então  $T_G(A)$  é o  $T_G$ -ideal gerado por  $I' = \mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(A))$ .

**Demonstração:** Seja  $J$  o  $T_G$ -ideal gerado por  $I'$ . Claramente temos  $I \subseteq J \subseteq T_G(A)$ . Agora suponha, por contradição, que existe  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  em  $T_G(A)$ , mas  $f \notin J$ . Como  $\text{char}F = 0$ , podemos supor  $f$  multilinear. Seja  $\Delta$  o conjunto de todos os polinômios multilineares congruentes a  $f$  módulo  $J$ . Temos que  $\Delta \neq \emptyset$ , pois  $f \in \Delta$ , e cada elemento de  $\Delta$  é da forma

$$\sum_{i=1}^r a_i m_i = f + g,$$

onde  $m_i \in \mathcal{M}$ ,  $0 \neq a_i \in F$ ,  $r \in \mathbb{N}$  e  $g \in J$ . Assim tome o menor  $r$  tal que

$$f \equiv \sum_{i=1}^r a_i m_i \pmod{J}. \quad (1.8)$$

Note que  $r > 1$ , pois se  $r = 1$ , então  $m_1 \in \mathcal{M} \cap T_G(A) \subseteq J$ , e daí  $f \in J$ , o que não pode ocorrer. Além disso, se  $m_1 \in T_G(A)$ , então  $a_1 m_1 \equiv 0 \pmod{J}$ , e daí

$$f \equiv \sum_{i=1}^r a_i m_i = a_1 m_1 + \sum_{i=2}^r a_i m_i \equiv \sum_{i=2}^r a_i m_i \pmod{J},$$

o que contradiz a minimalidade de  $r$ . Portanto  $m_1 \notin T_G(A)$ , donde existe substituição standard  $S$  tal que  $m_1|_S \neq 0$ , com  $f|_S = 0$ . Assim por (1.8), temos

$$\sum_{i=1}^r a_i m_i|_S = 0, \text{ ou seja, } - \sum_{i=2}^r a_i m_i|_S = a_1 m_1|_S \neq 0,$$

e daí, como  $m_i|_S = 0$  ou  $a'_i m_i|_S \in \mathcal{B}$ , onde  $0 \neq a'_i \in F$ ,  $i = 1, \dots, r$ , e os elementos de  $\mathcal{B}$  são linearmente independentes, existe algum  $j \in \{2, \dots, r\}$ , digamos  $j = 2$ , tal que  $m_1|_S = cm_2|_S \neq 0$ , para algum  $0 \neq c \in F$ . Logo, por hipótese,  $m_1 \equiv cm_2 \pmod{I}$ , mas  $I \subseteq J$ , e então  $m_1 \equiv cm_2 \pmod{J}$ . Portanto, por (1.8), temos

$$f \equiv a_1 m_1 + a_2 m_2 + \sum_{i=3}^r a_i m_i \equiv (a_1 c + a_2) m_2 + \sum_{i=3}^r a_i m_i \pmod{J},$$

o que contradiz a minimalidade de  $r$ . Logo  $f \in J$  e temos o resultado. ■

**Exemplo 1.7.18** Considere as álgebras  $M_2(F)$  e  $M_{1,1}(E)$  com suas  $\mathbb{Z}_2$ -graduações do Exemplo 1.7.5. Para  $G = \mathbb{Z}_2$  obtemos a  $\mathbb{Z}_2$ -graduação  $F\langle X \rangle = F\langle X \rangle^{(0)} \oplus F\langle X \rangle^{(1)}$  da álgebra associativa livre. Considere os polinômios  $\mathbb{Z}_2$ -graduados  $f = f(y_1, y_2) = y_1y_2 - y_2y_1$ , com  $y_1, y_2 \in F\langle X \rangle^{(0)}$ ,  $g = g(z_1, z_2, z_3) = z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ , com  $z_1, z_2, z_3 \in F\langle X \rangle^{(1)}$ , e  $h = h(z_1, z_2, z_3) = z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ , com  $z_1, z_2, z_3 \in F\langle X \rangle^{(1)}$ . Os polinômios  $f$  e  $g$  são identidades graduadas de  $M_2(F)$  e os polinômios  $f$  e  $h$  são identidades graduadas de  $M_{1,1}(E)$ . De fato, basta observar que matrizes diagonais em  $M_2(F)$  comutam, bem como matrizes diagonais com entradas em  $E_0$  comutam, e dados  $x, y, z \in E_1$ , temos que  $xyz = -zyx$ .

**Exemplo 1.7.19** Seja  $E \otimes E = A_0 \oplus A_1$  com  $\mathbb{Z}_2$ -graduação do Exemplo 1.7.10. Os polinômios  $\mathbb{Z}_2$ -graduados  $f(y_1, y_2) = y_1y_2 - y_2y_1$ , com  $y_1, y_2 \in F\langle X \rangle^{(0)}$ , e  $g(z_1, z_2, z_3) = z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ , com  $z_1, z_2, z_3 \in F\langle X \rangle^{(1)}$ , são identidades graduadas de  $E \otimes E$ . De fato, dados  $v_i = a_i \otimes b_i + c_i \otimes d_i$ ,  $i = 1, 2$ , em  $A_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)$ , e  $w_j = a_j \otimes b_j + c_j \otimes d_j$ ,  $j = 3, 4, 5$ , em  $A_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$ , temos, pelas propriedades dos elementos de  $E_0$  e  $E_1$ , que

$$\begin{aligned} v_1v_2 &= (a_1 \otimes b_1 + c_1 \otimes d_1)(a_2 \otimes b_2 + c_2 \otimes d_2) \\ &= a_1a_2 \otimes b_1b_2 + a_1c_2 \otimes b_1d_2 + c_1a_2 \otimes d_1b_2 + c_1c_2 \otimes d_1d_2 \\ &= a_2a_1 \otimes b_2b_1 + c_2a_1 \otimes d_2b_1 + a_2c_1 \otimes b_2d_1 + (-c_2c_1) \otimes (-d_2d_1) \\ &= a_2a_1 \otimes b_2b_1 + c_2a_1 \otimes d_2b_1 + a_2c_1 \otimes b_2d_1 + c_2c_1 \otimes d_2d_1 \\ &= (a_2 \otimes b_2 + c_2 \otimes d_2)(a_1 \otimes b_1 + c_1 \otimes d_1) = v_2v_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w_3w_4w_5 &= (a_3 \otimes b_3 + c_3 \otimes d_3)(a_4 \otimes b_4 + c_4 \otimes d_4)(a_5 \otimes b_5 + c_5 \otimes d_5) \\ &= (a_3a_4 \otimes b_3b_4 + a_3c_4 \otimes b_3d_4 + c_3a_4 \otimes d_3b_4 + c_3c_4 \otimes d_3d_4)(a_5 \otimes b_5 + c_5 \otimes d_5) \\ &= a_3a_4a_5 \otimes b_3b_4b_5 + a_3c_4a_5 \otimes b_3d_4b_5 + c_3a_4a_5 \otimes d_3b_4b_5 + c_3c_4a_5 \otimes d_3d_4b_5 + \\ &\quad + a_3a_4c_5 \otimes b_3b_4d_5 + a_3c_4c_5 \otimes b_3d_4d_5 + c_3a_4c_5 \otimes d_3b_4d_5 + c_3c_4c_5 \otimes d_3d_4d_5 \\ &= a_5a_4a_3 \otimes (-b_3b_4b_5) + a_5c_4a_3 \otimes (-b_5d_4b_3) + a_5a_4c_3 \otimes (-b_5b_4d_3) + \\ &\quad + (-a_5c_4c_3) \otimes b_5d_4d_3 + c_5a_4a_3 \otimes (-d_5b_4b_3) + (-c_5c_4a_3) \otimes d_5d_4b_3 + \\ &\quad + (-c_5a_4c_3) \otimes d_5b_4d_3 + (-c_5c_4c_3) \otimes d_5d_4d_3 \\ &= -(a_5 \otimes b_5 + c_5 \otimes d_5)(a_4 \otimes b_4 + c_4 \otimes d_4)(a_3 \otimes b_3 + c_3 \otimes d_3) = -w_5w_4w_3 \end{aligned}$$

daí  $f(v_1, v_2) = v_1v_2 - v_2v_1 = 0$  e  $g(w_3, w_4, w_5) = w_3w_4w_5 + w_5w_3w_4 = -w_5w_3w_4 + w_5w_3w_4 = 0$ . Como  $f$  e  $g$  são multilineares e os espaços  $A_0$  e  $A_1$  são gerados, como espaços vetoriais, pelos conjuntos  $\{a_0 \otimes b_0 + c_1 \otimes d_1 : a_0, b_0 \in E_0, c_1, d_1 \in E_1\}$  e  $\{a_0 \otimes c_1 + d_1 \otimes b_0 : a_0, b_0 \in E_0, c_1, d_1 \in E_1\}$ , respectivamente, a afirmação segue.

**Exemplo 1.7.20** *Suponha  $\text{char} F \neq 2$ . Então a álgebra  $M_{1,1}(E)$  satisfaz as identidades*

$$f = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5] \quad e \quad g = g(x_1, x_2) = [[x_1, x_2]^2, x_2].$$

*De fato, temos que  $f$  é multilinear, e daí, como  $M_{1,1}(E) = M_{1,1}(E)_{\bar{0}} \oplus M_{1,1}(E)_{\bar{1}}$ , basta substituir por elementos em  $M_{1,1}(E)_{\bar{0}}$  ou  $M_{1,1}(E)_{\bar{1}}$ . Vamos analisar o polinômio  $h = h(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ . Considere as substituições homogêneas*

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3, \quad x_4 = X_4 \tag{1.9}$$

*em  $M_{1,1}(E)$ . Dadas duas matrizes  $A$  e  $B$  em  $M_{1,1}(E)$  com mesmo grau homogêneo, vemos facilmente que  $[A, B] = 0$  ou  $[A, B] \in Z(M_{1,1}(E))$ , e daí se  $|X_1| = |X_2|$  ou  $|X_3| = |X_4|$ , então  $h$  se anula em (1.9) (ver observação 1.10). Suponha  $|X_1| = |X_3| = \bar{0}$  e  $|X_2| = |X_4| = \bar{1}$  e sejam*

$$X_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

*onde  $a, d, x, w \in E_0$  e  $b, c, y, z \in E_1$ . Temos que*

$$[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & y(x-w) \\ z(w-x) & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad [X_3, X_4] = \begin{pmatrix} 0 & b(a-d) \\ c(d-a) & 0 \end{pmatrix},$$

*daí*

$$[[X_1, X_2], [X_3, X_4]] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

*onde*

$$A_1 = bz(a-d)(w-x) - yc(x-w)(d-a) \quad e \quad A_2 = cy(d-a)(x-w) - zb(w-x)(a-d).$$

*Pela multiplicação da álgebra de Grassmann, obtemos  $A_1 = A_2$  e portanto  $[[X_1, X_2], [X_3, X_4]] \in Z(M_{1,1}(E))$ . De modo análogo, para  $|X_1| = |X_3| = \bar{1}$  e  $|X_2| = |X_4| = \bar{0}$ , também temos  $[[X_1, X_2], [X_3, X_4]] \in Z(M_{1,1}(E))$ . Logo, pela observação 1.10, segue que  $f$  é identidade de  $M_{1,1}(E)$ .*

*Agora, para determinar  $g$  como identidade de  $M_{1,1}(E)$ , considere a decomposição*

$$M_{1,1}(E) = M_{(\bar{0}, \bar{0})} \oplus M_{(\bar{0}, \bar{1})} \oplus M_{(\bar{1}, \bar{0})} \oplus M_{(\bar{1}, \bar{1})}$$

*do Exemplo 1.7.5 e*

$$x_1 = X_1 = A + B + C + D \quad e \quad x_2 = X_2 = X + Y + Z + W$$

substituições quaisquer em  $M_{1,1}(E)$ , onde  $A, X \in M_{(\bar{0}, \bar{0})}$ ,  $B, Y \in M_{(\bar{0}, \bar{1})}$ ,  $C, Z \in M_{(\bar{1}, \bar{0})}$  e  $D, W \in M_{(\bar{1}, \bar{1})}$ . Observe que as componentes homogêneas de  $X_1$  e  $X_2$  comutam ou anticomutam entre si e elementos homogêneos que anticomutam têm quadrado nulo, pois  $\text{char} F \neq 2$ . Temos que

$$[X_1, X_2] = 2(BZ + BW + CY + CZ + DY + DW) = 2(H + I + J)$$

onde  $H = BZ + CY$ ,  $I = BW + DY$  e  $J = CZ + DW$ . Note que  $|H| = (1, 1)$ ,  $|I| = (1, 0)$  e  $|J| = (0, 0)$ . Assim

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]^2 &= 4(H^2 + I^2 + J^2 + HI + HJ + IH + IJ + JH + JI) \\ &= 4(J^2 + 2HI + 2HJ + 2IJ) \\ &= 4(-C^2Z^2 + 2CZDW - D^2W^2 + 2HI \\ &\quad + 2(BZ + CY)(CZ + DW) + 2(BW + DY)(CZ + DW)) \\ &= 8(CZDW + HI + (BZ + CY)DW + (BW + DY)CZ) \\ &= 8(CZDW + HI + HDW + ICZ). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]^2 X_2 &= 8(CZDWY + HIY + HDWY + ICZY \\ &\quad + CZDWZ + HIZ + HDWZ + ICZ^2 \\ &\quad + CZDW^2 + HIW + HDW^2 + ICZW) \\ &= 8(CZDWY + HIY + HDWY + ICZY \\ &\quad + HI(Z + W) + HDWZ + ICZW) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_2 [X_1, X_2]^2 &= 8(YCZDW + YHI + YHDW + YICZ \\ &\quad + ZHI + ZHDW + WHI + WICZ), \end{aligned}$$

donde

$$[[X_1, X_2]^2, X_2] = 8(2HDWY + 2ICZY + 2HI(Z + W)).$$

Logo, atribuindo os valores de  $H$  e  $I$ , segue facilmente que  $[[X_1, X_2]^2, X_2] = 0$ . Portanto  $g$  é identidade para  $M_{1,1}(E)$ .

# Capítulo 2

## Identidades graduadas para $M_n(F)$ e $M_{p,q}(E) \otimes E$

Neste capítulo, vamos considerar a  $\mathbb{Z}_n$ -gradação elementar induzida por  $\mu = Id_{S_n}$  para a álgebra  $M_n(F)$ , das matrizes  $n \times n$  sobre um corpo  $F$ . Estabeleceremos duas identidades  $\mathbb{Z}_n$ -graduadas para  $M_n(F)$ , e posteriormente mostraremos que o  $T_n$ -ideal das identidades desta álgebra tem como base essas identidades, como consequência do resultados obtidos por Vasilovsky em [26]. Além disso, com base no artigo de Di Vincenzo e Nardoza [9], será obtida uma  $\mathbb{Z}_{p+q} \times \mathbb{Z}_2$ -gradação para álgebra  $M_{p,q}(E) \otimes E$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , e daí será possível encontrar geradores para  $T_{\mathbb{Z}_{p+q} \times \mathbb{Z}_2}(M_{p,q}(E) \otimes E)$ . Assim vamos estabelecer a PI-equivalência entre  $M_{p,q}(E) \otimes E$  e  $M_{p+q}(E)$ .

Em todo capítulo,  $\mathbb{Z}_n$  denotará o grupo dos inteiros módulo  $n$ , escrito aditivamente, e  $F$  será um corpo de característica zero.

### 2.1 Identidades $\mathbb{Z}_n$ -graduadas para $M_n(F)$

No Exemplo 1.7.4 estabelecemos a  $\mathbb{Z}_n$ -gradação elementar induzida pela identidade em  $S_n$  para a álgebra de matrizes, dada por

$$M_n(F) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_n} M_n^{(\alpha)},$$

onde os elementos dos subespaços  $M_n^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ , são matrizes das formas (1.5) e (1.6). Em todo capítulo vamos considerar essa graduação para  $M_n(F)$ , denotando  $M_n(F)$  por

$M_n$  e a álgebra livre  $\mathbb{Z}_n$ -graduada por  $F\langle X \rangle$ . Assim, dado  $m = m(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k$  um monômio em  $F\langle X \rangle$ , seu grau homogêneo será  $|m| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|$ .

Considere os polinômios  $\mathbb{Z}_n$ -graduados

$$x_1 x_2 - x_2 x_1 \quad , \quad |x_1| = |x_2| = \bar{0} \quad (2.1)$$

e

$$x_1 x x_2 - x_2 x x_1 \quad , \quad |x_1| = |x_2| = -|x| = \bar{t} \in \mathbb{Z}_n. \quad (2.2)$$

**Lema 2.1.1** Tome  $E_{i_1 j_1}$ ,  $E_{i_2 j_2}$  e  $E_{ij}$  em  $M_n$ , com

$$|E_{i_1 j_1}| = |E_{i_2 j_2}| = -|E_{ij}| = \bar{t} \in \mathbb{Z}_n.$$

Então

$$E_{i_1 j_1} E_{ij} E_{i_2 j_2} \neq 0 \Leftrightarrow j_1 = i = j_2 \text{ e } i_1 = j = i_2 \Leftrightarrow E_{i_2 j_2} E_{ij} E_{i_1 j_1} \neq 0.$$

Neste caso  $E_{i_1 j_1} E_{ij} E_{i_2 j_2} = E_{ji} = E_{i_2 j_2} E_{ij} E_{i_1 j_1}$ .

**Demonstração:** Temos  $E_{i_1 j_1}, E_{i_2 j_2} \in M_n^{(\bar{t})}$ ,  $E_{ij} \in M_n^{(\overline{n-t})}$ . Assim, por (1.6), segue que

$$j_1 = \begin{cases} i_1 + t & , \quad i_1 + t \leq n \\ i_1 + t - n & , \quad i_1 + t > n \end{cases},$$

$$i_2 = \begin{cases} j_2 - t & , \quad j_2 - t \geq 1 \\ j_2 - t + n & , \quad j_2 - t < 1 \end{cases},$$

$$i = \begin{cases} j + t & , \quad j + t \leq n \\ j + t - n & , \quad j + t > n \end{cases}.$$

Temos que

$$E_{i_1 j_1} E_{ij} E_{i_2 j_2} \neq 0 \Leftrightarrow j_1 = i \text{ e } j = i_2$$

e vamos analisar os casos possíveis para os valores de  $j_1$ :

- Se  $j_1 = i_1 + t$  e  $i = j + t - n$ , então, de  $j_1 = i$ , temos

$$i_1 + t = j_1 = i = j + t - n$$

e daí  $i_1 = j - n$ , o que é impossível, pois  $j < n$  e  $i_1 > 0$ .

- Se  $j = i - t$  ( $i = j + t$ ) e  $i_2 = j_2 - t + n$ , então, de  $i_2 = j$ , temos

$$j_2 - t + n = i_2 = j = i - t,$$

e daí  $j_2 = i - n$ , o que é impossível, pois  $i < n$  e  $j_2 > 0$ .

Então, quando  $j_1 = i_1 + t$ , temos  $i = j + t$ , o que implica  $i_2 = j_2 - t$ , e daí

$$i_2 = j = i - t = j_1 - t = i_1 \quad e \quad i = j_1 = i_1 + t = i_2 + t = j_2.$$

Analogamente, quando  $j_1 = i_1 + t - n$ , temos  $i = j + t - n$  e  $i_2 = j_2 - t + n$ , e daí

$$i_2 = j = i - t + n = j_1 - t + n = i_1 \quad e \quad i = j_1 = i_1 + t - n = i_2 + t - n = j_2.$$

Assim, tanto para  $j_1 = i_1 + t$ , quanto para  $j_1 = i_1 + t - n$ , temos

$$E_{i_1 j_1} E_{ij} E_{i_2 j_2} \neq 0 \Leftrightarrow j_1 = i = j_2 \text{ e } i_1 = j = i_2. \quad (2.3)$$

Com um argumento análogo, usando que

$$E_{i_2 j_2} E_{ij} E_{i_1 j_1} \neq 0 \Leftrightarrow j_2 = i \text{ e } j = i_1$$

e analisando os possíveis valores de  $j_2$ , segue que

$$E_{i_2 j_2} E_{ij} E_{i_1 j_1} \neq 0 \Leftrightarrow j_1 = i = j_2 \text{ e } i_1 = j = i_2. \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4) o lema segue. ■

**Lema 2.1.2** *A álgebra graduada  $M_n$  satisfaz (2.1) e (2.2).*

**Demonstração:** Como em (2.1) temos  $|x_1| = |x_2| = \bar{0}$ , e as matrizes em  $M_n^{(\bar{0})}$  são diagonais, as quais comutam, segue que (2.1) é satisfeita. Temos que (2.2) é multilinear. Logo, pela Observação 1.14, basta substituir por elementos de uma base de cada componente, ou seja, para

$$x_1 = E_{i_1 j_1} \quad , \quad x_2 = E_{i_2 j_2} \quad e \quad x = E_{ij},$$

onde  $E_{i_1 j_1}, E_{i_2 j_2} \in M_n^{(\bar{t})}$ ,  $E_{ij} \in M_n^{(\overline{n-t})}$ ,  $0 < t \leq n - 1$ , já que  $|x_1| = |x_2| = -|x|$ . Pelo Lema 2.1.1, temos que  $E_{i_1 j_1} E_{ij} E_{i_2 j_2}$  e  $E_{i_2 j_2} E_{ij} E_{i_1 j_1}$  são ambos nulos ou  $E_{i_1 j_1} E_{ij} E_{i_2 j_2} = E_{ji} = E_{i_2 j_2} E_{ij} E_{i_1 j_1}$ . Em qualquer caso, (2.2) se anula e o lema segue. ■



## 2.2 O $T_n$ -ideal de $M_n(F)$

Nesta seção, a partir das identidades encontradas na seção anterior, serão estabelecidas algumas notações, definições e resultados, os quais serão fundamentais para determinar o  $T_n$ -ideal das identidades graduadas de  $M_n(F)$ .

Vamos denotar por  $I_n$  o  $T_n$ -ideal gerado pelas identidades graduadas (2.1) e (2.2). Dado  $k$  um inteiro positivo, seja  $S_k$  o conjunto de todas permutações do conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

**Definição 2.2.1** Para  $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$  e  $\sigma \in S_k$ , define

$$m_\sigma = m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)}.$$

O monômio correspondente à permutação identidade ( $\sigma = Id_{S_k}$ ) será denotado por

$$m = m(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1x_2 \cdots x_k.$$

Claramente, temos  $|m| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| = |m_\sigma|$ . Além disso, todo polinômio graduado multilinear  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  pode ser expresso como

$$f = \sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma m_\sigma,$$

onde  $a_\sigma \in F$ .

Considere  $\beta = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$  base de  $M_n$ , e tome  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  um polinômio  $\mathbb{Z}_n$ -graduado. No que segue nesta seção vamos denotar por  $S$  uma substituição standard na base  $\beta$ , ou seja, uma substituição do tipo

$$x_1 = E_{i_1j_1}, x_2 = E_{i_2j_2}, \dots, x_k = E_{i_kj_k}, \quad (2.5)$$

onde  $\overline{j_s - i_s} = |x_s|$ , de modo que  $E_{i_sj_s} \in M_n^{(|x_s|)}$ ,  $s = 1, \dots, k$ .

**Observação 2.1** Pelas propriedades de matrizes unitárias temos

$$\begin{aligned} m_\sigma|_S &= E_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(1)}} E_{i_{\sigma(2)}j_{\sigma(2)}} \cdots E_{i_{\sigma(k)}j_{\sigma(k)}} \neq 0 \Leftrightarrow \\ &j_{\sigma(1)} = i_{\sigma(2)}, j_{\sigma(2)} = i_{\sigma(3)}, \dots, j_{\sigma(k-1)} = i_{\sigma(k)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

e neste caso  $m_\sigma|_S = E_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(k)}}$ .

O próximo lema garante que nenhum monômio pode ser uma identidade graduada para  $M_n(F)$ , ou seja,  $\mathcal{M} \cap T_n(M_n) = \emptyset$ .

**Lema 2.2.2** Para toda  $\sigma \in S_k$ , existe uma substituição standard  $S$  tal que  $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S \neq 0$ .

**Demonstração:** Vamos demonstrar o lema por indução em  $k$ . No caso  $k = 1$ , temos apenas a permutação identidade, e daí basta tomar uma matriz unitária não nula em  $M_n^{(|x_1|)}$ , e o resultado segue. Agora, suponha que  $k > 1$  e que o resultado é válido para  $k - 1$ . Seja  $|x_k| = \bar{t}$ , para algum  $t \in \{0, \dots, n - 1\}$ . Por hipótese de indução, como  $m_\sigma^{[1, k-1]}$  (ver Definição 1.6.8) possui  $k - 1$  variáveis, existe substituição standard  $S$

$$x_{\sigma(1)} = E_{i_1 j_1}, x_{\sigma(2)} = E_{i_2 j_2}, \dots, x_{\sigma(k-1)} = E_{i_{k-1} j_{k-1}}, \quad (2.7)$$

tal que  $0 \neq m_\sigma^{[1, k-1]}|_S = E_{i_1 j_{k-1}}$ . Então complete (2.7) com  $x_{\sigma(k)} = E_{j_{k-1} j_k}$ , onde, de  $|x_k| = \bar{t}$ , temos

$$j_k = \begin{cases} j_{k-1} + t & , \quad j_{k-1} + t \leq n \\ j_{k-1} + t - n & , \quad j_{k-1} + t > n \end{cases}.$$

Assim

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S = E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_{k-1} j_{k-1}} E_{j_{k-1} j_k} = E_{i_1 j_{k-1}} E_{j_{k-1} j_k} = E_{i_1 j_k} \neq 0,$$

o que completa a demonstração. ■

**Lema 2.2.3** Se  $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S \neq 0$ , onde  $S = \{E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_k j_k}\}$ , então, para quaisquer  $1 \leq p \leq q \leq k$ ,

$$|m_\sigma^{[p, q]}| = \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}.$$

**Demonstração:** Como  $m_\sigma|_S \neq 0$ , temos que

$$j_{\sigma(1)} = i_{\sigma(2)}, j_{\sigma(2)} = i_{\sigma(3)}, \dots, j_{\sigma(k-2)} = i_{\sigma(k-1)}, j_{\sigma(k-1)} = i_{\sigma(k)}.$$

Em particular, para  $1 \leq p \leq q \leq k$ , temos

$$j_{\sigma(p)} = i_{\sigma(p+1)}, j_{\sigma(p+1)} = i_{\sigma(p+2)}, \dots, j_{\sigma(q-2)} = i_{\sigma(q-1)}, j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)}.$$

Assim

$$\begin{aligned} |m_\sigma^{[p, q]}| &= |x_{\sigma(p)} x_{\sigma(p+1)} \cdots x_{\sigma(q-1)} x_{\sigma(q)}| \\ &= |x_{\sigma(q)}| + |x_{\sigma(q-1)}| + \cdots + |x_{\sigma(p+1)}| + |x_{\sigma(p)}| \\ &= \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)}} + \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(q-1)}} + \cdots + \overline{j_{\sigma(p+1)} - i_{\sigma(p+1)}} + \overline{j_{\sigma(p)} - i_{\sigma(p)}} \\ &= \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}. \end{aligned}$$



**Lema 2.2.4** *Se para uma permutação  $\sigma \in S_k$  existe uma substituição standard  $S$  tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S = m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S \neq 0, \quad (2.8)$$

*então*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 n(x_2, \dots, x_k) \pmod{I_n}, \quad (2.9)$$

*para algum monômio multilinear  $n(x_2, \dots, x_k) = x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k}$ .*

**Demonstração:** Se  $\sigma$  é a permutação identidade basta tomar  $n(x_2, \dots, x_k) = x_2 \cdots x_k$  e está provado. Então suponha  $\sigma \neq Id_{S_k}$  e assim  $\sigma(j) \neq j$ , para algum  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Podemos supor para  $j = 1$ , ou seja,  $\sigma(1) \neq 1$ , pois caso contrário basta renomear as variáveis. Note que  $1 = \sigma^{-1}(1)$  se, e somente se,  $\sigma(1) = 1$ , donde

$$\sigma^{-1}(\sigma(1)) = 1 < \sigma^{-1}(1).$$

Podemos tomar então  $t$  o menor inteiro positivo tal que

$$1 \leq \sigma^{-1}(t+1) < \sigma^{-1}(1). \quad (2.10)$$

Se  $\sigma^{-1}(1) > \sigma^{-1}(t) = \sigma^{-1}((t-1)+1)$ , existe  $s = t-1 < t$  tal que  $\sigma^{-1}(s+1) < \sigma^{-1}(1)$ , o que contraria a minimalidade de  $t$ . Logo,  $\sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(t)$ , e juntando isso com (2.10) temos

$$1 \leq \sigma^{-1}(t+1) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(t). \quad (2.11)$$

Por hipótese temos

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_k j_k} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} E_{i_{\sigma(2)} j_{\sigma(2)}} \cdots E_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} \neq 0, \quad (2.12)$$

o que implica  $E_{i_1 j_k} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}} \neq 0$ , e daí  $i_1 = i_{\sigma(1)}$ ,  $j_t = i_{t+1}$  e, para  $s > 1$ ,  $j_{\sigma(s-1)} = i_{\sigma(s)}$ . Seja

$$p = \sigma^{-1}(t+1), \quad q = \sigma^{-1}(1) \text{ e } r = \sigma^{-1}(t).$$

Então, por (2.11), temos  $1 \leq p < q \leq r$  com

$$j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_1 = i_{\sigma(1)}, \quad j_{\sigma(r)} = j_t = i_{t+1} = i_{\sigma(p)}$$

e, para  $p > 1$ ,  $j_{\sigma(p-1)} = i_{\sigma(p)}$ .

Se  $p > 1$  temos

$$j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)} = j_{\sigma(p-1)} \quad e \quad i_{\sigma(q)} = j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(1)},$$

e daí

$$j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(p)} - j_{\sigma(q-1)} = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = t_0 \in \mathbb{Z}.$$

Pelo lema anterior, temos

$$\begin{aligned} |m_{\sigma}^{[1,p-1]}| &= \overline{j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)}} = \overline{t_0}; \\ |m_{\sigma}^{[p,q-1]}| &= \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(p)}} = -\overline{t_0}; \\ |m_{\sigma}^{[q,r]}| &= \overline{j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)}} = \overline{t_0}. \end{aligned}$$

Então, pela identidade (2.2), temos

$$m_{\sigma}^{[1,p-1]} m_{\sigma}^{[p,q-1]} m_{\sigma}^{[q,r]} - m_{\sigma}^{[q,r]} m_{\sigma}^{[p,q-1]} m_{\sigma}^{[1,p-1]} \equiv 0 \pmod{I_n},$$

donde

$$\begin{aligned} m_{\sigma} &= m_{\sigma}^{[1,p-1]} m_{\sigma}^{[p,q-1]} m_{\sigma}^{[q,r]} m_{\sigma}^{[r+1,k]} \equiv m_{\sigma}^{[q,r]} m_{\sigma}^{[p,q-1]} m_{\sigma}^{[1,p-1]} m_{\sigma}^{[r+1,k]} \\ &= x_{\sigma(q)} x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k} = x_1 x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k} \pmod{I_n}. \end{aligned}$$

Para o caso  $p = 1$  temos

$$j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_1 = i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(p)} = j_{\sigma(r)},$$

daí, pelo lema anterior,

$$\begin{aligned} |m_{\sigma}^{[1,q-1]}| &= \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(1)}} = \overline{0}; \\ |m_{\sigma}^{[q,r]}| &= \overline{j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)}} = \overline{0}. \end{aligned}$$

Então, pela identidade (2.1), temos

$$m_{\sigma}^{[1,q-1]} m_{\sigma}^{[q,r]} - m_{\sigma}^{[q,r]} m_{\sigma}^{[1,q-1]} \equiv 0 \pmod{I_n},$$

donde

$$\begin{aligned} m_{\sigma} &= m_{\sigma}^{[1,q-1]} m_{\sigma}^{[q,r]} m_{\sigma}^{[r,k]} \equiv m_{\sigma}^{[q,r]} m_{\sigma}^{[1,q-1]} m_{\sigma}^{[r,k]} \\ &= x_{\sigma(q)} x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k} = x_1 x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k} \pmod{I_n}. \end{aligned}$$

O que completa a demonstração. ■

**Lema 2.2.5** *Se, para uma permutação  $\sigma \in S_k$ , existe uma substituição standard  $S$  tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S = m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S \neq 0,$$

*então*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{I_n}.$$

**Demonstração:** Estamos com as hipóteses do lema anterior, então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 n(x_2, \dots, x_k) \pmod{I_n},$$

para algum monômio multilinear  $n(x_2, \dots, x_k) = x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k}$ . Assim podemos tomar  $r$  o maior inteiro positivo tal que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 x_2 \cdots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k) \pmod{I_n}, \quad (2.13)$$

para algum monômio multilinear  $n(x_{r+1}, \dots, x_k)$ . Vamos mostrar que  $r = k$ . Suponha que  $r < k$ . Temos que  $r < k - 1$ , pois se  $r = k - 1$  teríamos

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 x_2 \cdots x_{k-1} n(x_k) \pmod{I_n}$$

e daí, como  $n(x_k)$  é multilinear,  $n(x_k) = x_k$  e  $r = k$ , uma contradição. Então  $r \leq k - 2$ . Agora, dada uma substituição standard  $S$  tal que  $m_\sigma|_S = m|_S \neq 0$ , por (2.13), temos

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k) + f, \quad f \in I_n,$$

e daí  $m_\sigma|_S = (x_1 x_2 \cdots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k))|_S$ . Assim,

$$(x_1 x_2 \cdots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k))|_S = m_\sigma|_S = m|_S \neq 0.$$

Combinando isto com

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 \cdots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k))|_S &= E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_r j_r} (n(x_{r+1}, \dots, x_k))|_S \\ &= E_{i_1 j_r} (n(x_{r+1}, \dots, x_k))|_S \end{aligned}$$

e

$$m|_S = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_r j_r} (x_{r+1} \cdots x_k)|_S = E_{i_1 j_r} (x_{r+1} \cdots x_k)|_S,$$

segue que

$$n(x_{r+1}, \dots, x_k)|_S = x_{r+1} \cdots x_k|_S \neq 0.$$

Pelo lema anterior, existe  $n'(x_{r+2}, \dots, x_k)$  multilinear tal que

$$n(x_{r+1}, \dots, x_k) \equiv x_{r+1}n'(x_{r+2}, \dots, x_k)(\text{mod } I_n),$$

e daí

$$m_\sigma \equiv x_1x_2 \cdots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k) \equiv x_1x_2 \cdots x_r x_{r+1} n'(x_{r+2}, \dots, x_k)(\text{mod } I_n),$$

o que contradiz a maximalidade de  $r$ . Logo  $r = k$  e temos o resultado. ■

**Corolário 2.2.6** *Se, para  $\sigma, \tau \in S_k$ , existe substituição standard  $S$  tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S = m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S \neq 0,$$

então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k)(\text{mod } I_n).$$

**Demonstração:** Vamos fazer a substituição  $x'_l = x_{\tau(l)}$ ,  $1 \leq l \leq k$ . Temos

$$\begin{aligned} m_{\tau^{-1}\sigma}(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) &= x'_{\tau^{-1}\sigma(1)} x'_{\tau^{-1}\sigma(2)} \cdots x'_{\tau^{-1}\sigma(k)} \\ &= x_{\tau(\tau^{-1}\sigma(1))} x_{\tau(\tau^{-1}\sigma(2))} \cdots x_{\tau(\tau^{-1}\sigma(k))} \\ &= x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

e

$$m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) = x'_1 x'_2 \cdots x'_k = x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(k)} = m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Como  $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S = m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S \neq 0$  temos

$$m_{\tau^{-1}\sigma}(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)|_S = m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)|_S \neq 0$$

e, pelo lema anterior,

$$m_{\tau^{-1}\sigma}(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \equiv m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)(\text{mod } I_n).$$

Portanto

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k)(\text{mod } I_n). \quad \blacksquare$$

Com esses lemas estabelecidos podemos obter o resultado principal da seção.

**Teorema 2.2.7** *Toda identidade polinomial graduada da álgebra  $\mathbb{Z}_n$ -graduada  $M_n$  segue de (2.1) e (2.2), ou seja,  $T_n(M_n) = I_n$ .*

**Demonstração:** Temos que  $\beta = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$  é uma base homogênea e multiplicativa para  $M_n$ , e (2.1) e (2.2) é um conjunto de identidades graduadas desta álgebra. Assim, pelo Corolário 2.2.6, as hipóteses da Proposição 1.7.17 são satisfeitas para a álgebra  $M_n$ . Portanto  $T_n(M_n)$  é o  $T_n$ -ideal gerado pelas identidades (2.1) e (2.2) juntamente com os monômios que são identidades de  $M_n$ . Mas,  $\mathcal{M} \cap T_n(M_n) = \emptyset$ , pelo Lema 2.2.2, e portanto  $T_n(M_n) = I_n$ . ■

## 2.3 Identidades graduadas de $M_{p,q}(E) \otimes E$

Ao longo desta seção vamos determinar uma  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -gradação para a álgebra  $M_{p,q}(E) \otimes E$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , e posteriormente encontrar geradores para o ideal das suas identidades graduadas. Assim, poderemos estabelecer a PI-equivalência entre  $M_{p,q}(E) \otimes E$  e  $M_{p+q}(E)$ .

Dados  $p, q \in \mathbb{N}$ , vamos sempre considerar  $\eta$  como sendo a aplicação em (1.7) e a álgebra  $M_{p,q}(E)$  com sua base multiplicativa  $\mathcal{B}_p = \{aE_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, a \in \mathcal{E}_{\eta(i)+\eta(j)}\}$ ,  $n = p + q$ . Combinando  $\mathcal{B}_p$  com a base natural  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$  da álgebra de Grassmann, temos que o conjunto

$$\mathcal{B} = \{aE_{ij} \otimes b : 1 \leq i, j \leq n, a \in \mathcal{E}_{\eta(i)+\eta(j)}, b \in \mathcal{E}\}$$

é uma base para  $M_{p,q}(E) \otimes E$ . Ao longo da seção vamos denotar por  $a^\lambda$  se um elemento  $a \in \mathcal{E}_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}_2$ , e por  $S$  uma substituição standard na base  $\mathcal{B}$ .

**Lema 2.3.1**  *Tome*

$$A_s = a_s^{\eta(i_s)+\eta(j_s)} E_{i_s j_s} \otimes b_s^{\lambda_s+\eta(i_s)+\eta(j_s)} \in \mathcal{B}, \quad s = 1, 2.$$

*Se  $A_1 A_2 \neq 0$ , então existe  $c \in \{1, -1\}$  tal que  $c A_1 A_2 \in \mathcal{B}$ . Em particular temos*

$$j_1 = i_2 \quad e \quad \eta(i_1) + \eta(j_1) + \eta(i_2) + \eta(j_2) = \eta(i_1) + \eta(j_2).$$

**Demonstração:** Seja  $\eta_1 = \eta(i_1) + \eta(j_1)$  e  $\eta_2 = \eta(i_2) + \eta(j_2)$ . Suponha que

$$0 \neq A_1 A_2 = a_1^{\eta(i_1)+\eta(j_1)} a_2^{\eta(i_2)+\eta(j_2)} E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \otimes b_1^{\lambda_1+\eta(i_1)+\eta(j_1)} b_2^{\lambda_2+\eta(i_2)+\eta(j_2)},$$

então  $j_1 = i_2$  e daí

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta(i_1) + \eta(i_2) + \eta(i_2) + \eta(j_2) = \eta(i_1) + \eta(j_2).$$

Considerando o espaço vetorial de dimensão infinita no qual obtemos a base da álgebra de Grassmann  $E$ , vamos denotar

$$a_1 = e_{l_1}e_{l_2} \cdots e_{l_r} \quad e \quad a_2 = e_{m_1}e_{m_2} \cdots e_{m_t},$$

onde os  $l_1 < l_2 < \cdots < l_r$  e  $m_1 < m_2 < \cdots < m_t$ . Temos que os elementos  $e_{l_1}, e_{l_2}, \dots, e_{l_r}, e_{m_1}, e_{m_2}, \dots, e_{m_t}$  são dois a dois distintos, pois caso contrário, usando o produto em  $E$ , teríamos  $a_1a_2 = 0$ , o que contraria  $A_1A_2 \neq 0$ . Note que  $a_1a_2 \in \mathcal{E}_{\eta_1+\eta_2} = \mathcal{E}_{\eta(i_1)+\eta(j_2)}$ . Assim, podemos reordenar a palavra  $a_1a_2$  e obter um elemento em  $\mathcal{E}_{\eta(i_1)+\eta(j_2)}$  que é igual a  $a_1a_2$  ou  $-a_1a_2$ . Fazendo o mesmo argumento para  $b_1b_2 \in \mathcal{E}_{\lambda_1+\lambda_2+\eta(i_1)+\eta(j_2)}$ , temos que  $A_1A_2 \in \mathcal{B}$  ou  $-A_1A_2 \in \mathcal{B}$  e o resultado segue.  $\blacksquare$

O resultado anterior mostra que  $\mathcal{B}$  é uma base multiplicativa de  $M_{p,q}(E) \otimes E$ . Defina então  $|\cdot| : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$  dada por

$$|aE_{ij} \otimes b| = (\overline{j-i}, |a|_2 + |b|_2).$$

Observe que dados  $a \in \mathcal{E}_{\lambda_1}$ ,  $b \in \mathcal{E}_{\lambda_2}$  e  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ , temos  $ab \in \mathcal{E}_{\lambda_1+\lambda_2}$  e se  $j = k$ , então

$$\eta(i) + \eta(j) + \eta(k) + \eta(l) = \eta(i) + \eta(l) \quad e \quad \overline{l-i} = \overline{l-k} + \overline{j-i},$$

e daí vemos facilmente que  $|\cdot|$  satisfaz (1.4), donde temos uma  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -gradação para  $M_{p,q}(E) \otimes E$  da forma

$$M_{p,q}(E) \otimes E = \bigoplus_{(t,\lambda) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} (M_{p,q}(E) \otimes E)^{(t,\lambda)}, \quad (2.14)$$

onde  $(M_{p,q}(E) \otimes E)^{(t,\lambda)}$  é o subespaço gerado pelo conjunto  $\{a^{\eta(i)+\eta(j)}E_{ij} \otimes b^{\lambda+\eta(i)+\eta(j)} : \overline{j-i} = t\}$ ,  $(t, \lambda) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ , e  $\mathcal{B}$  é uma base homogênea. Nesta graduação, com a notação do Lema 2.3.1, temos que  $|A_1A_2| = (\overline{j_2-i_1}, \lambda_1 + \lambda_2)$ , quando  $A_1A_2 \neq 0$ .

Seja  $\mathcal{N}$  o conjunto dos polinômios  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduados

$$\begin{aligned} & [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}] \quad , \quad [x_1^{(0,1)}, x_2^{(0,0)}] \quad , \quad x_1^{(0,1)} \circ x_2^{(0,1)}, \\ & x_1^{(t,0)}x^{(-t,0)}x_2^{(t,0)} - x_2^{(t,0)}x^{(-t,0)}x_1^{(t,0)} \quad , \quad x_1^{(t,1)}x^{(-t,0)}x_2^{(t,0)} - x_2^{(t,0)}x^{(-t,0)}x_1^{(t,1)}, \\ & x_1^{(t,0)}x^{(-t,1)}x_2^{(t,0)} - x_2^{(t,0)}x^{(-t,1)}x_1^{(t,0)} \quad , \quad x_1^{(t,1)}x^{(-t,0)}x_2^{(t,1)} + x_2^{(t,1)}x^{(-t,0)}x_1^{(t,1)}, \\ & x_1^{(t,1)}x^{(-t,1)}x_2^{(t,0)} + x_2^{(t,0)}x^{(-t,1)}x_1^{(t,1)} \quad , \quad x_1^{(t,1)}x^{(-t,1)}x_2^{(t,1)} + x_2^{(t,1)}x^{(-t,1)}x_1^{(t,1)}, \end{aligned}$$



onde  $t \in \mathbb{Z}_n$  e  $a \circ b$  denota o produto  $a \circ b = ab + ba$ . Vamos denotar por  $I$  o  $T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado por  $\mathcal{N}$ .

**Proposição 2.3.2** *Os polinômios em  $\mathcal{N}$  são identidades graduadas para  $M_{p,q}(E) \otimes E$ , ou seja,  $I \subseteq T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_{p,q}(E) \otimes E)$ .*

**Demonstração:** Como os polinômios em  $\mathcal{N}$  são multilineares, basta considerar uma substituição standard  $S$  na base  $\mathcal{B}$ . Assim, considere uma substituição qualquer para os polinômios de grau 3 da forma

$$A_s = a_s^{\eta(i_s)+\eta(j_s)} E_{i_s j_s} \otimes b_s^{\lambda_s+\eta(i_s)+\eta(j_s)} \quad e \quad A = a^{\eta(i)+\eta(j)} E_{ij} \otimes b^{\lambda+\eta(i)+\eta(j)}, \quad s = 1, 2,$$

onde  $|E_{i_1 j_1}| = |E_{i_2 j_2}| = -|E_{ij}| = t \in \mathbb{Z}_n$  na álgebra  $\mathbb{Z}_n$ -graduada  $M_n$ . Logo, pelo Lema 2.1.1, os produtos  $E_{i_1 j_1} E_{ij} E_{i_2 j_2}$  e  $E_{i_2 j_2} E_{ij} E_{i_1 j_1}$  são ambos iguais a zero, e neste caso os polinômios de grau 3 se anulam, ou  $i_1 = i_2 = j$  e  $j_1 = j_2 = i$ , e neste caso são ambos iguais a  $E_{ji}$  e  $\eta(i_1) + \eta(j_1) = \eta(i_2) + \eta(j_2) = \eta(i) + \eta(j) = \eta \in \mathbb{Z}_2$ . Então

$$A_1 = a_1^\eta E_{ji} \otimes b_1^{\lambda_1+\eta}, \quad A_2 = a_2^\eta E_{ji} \otimes b_2^{\lambda_2+\eta} \quad e \quad A = a^\eta E_{ij} \otimes b^{\lambda+\eta}.$$

Vamos verificar para um dos polinômios de grau 3 e os outros seguem de forma semelhante. Considere  $x_1^{(t,1)} x^{(-t,1)} x_2^{(t,0)} + x_2^{(t,0)} x^{(-t,1)} x_1^{(t,1)}$ . Então  $1 = \lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = 0$ . Usando o produto em  $E$ , temos que se  $\eta = 0$ , então

$$A_2 A A_1 = a_2^0 a^0 a_1^0 E_{ji} \otimes b_2^0 b^1 b_1^1 = a_1^0 a^0 a_2^0 E_{ji} \otimes (-b_1^1 b^1 b_2^0) = -A_1 A A_2,$$

e se  $\eta = 1$ , então

$$A_2 A A_1 = a_2^1 a^1 a_1^1 E_{ji} \otimes b_2^1 b^0 b_1^0 = -a_1^1 a^1 a_2^1 E_{ji} \otimes b_1^0 b^1 b_2^1 = -A_1 A A_2.$$

Portanto o polinômio considerado é identidade para  $M_{p,q}(E) \otimes E$ . Para os polinômios de grau 2, considere os elementos  $A_1$  e  $A_2$  do caso anterior. Observe que  $i_1 = j_1$  e  $i_2 = j_2$ . Vemos facilmente que  $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2}$  e  $E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1}$  são ambos iguais a zero, e neste caso os polinômios de grau 2 se anulam, ou  $i_1 = i_2 = j_1 = j_2$ , e neste caso são ambos iguais a  $E_{i_1 i_1}$  e  $\eta(i_1) + \eta(j_1) = \eta(i_2) + \eta(j_2) = \bar{0}$ . Então

$$A_1 = a_1^0 E_{i_1 i_1} \otimes b_1^{\lambda_1} \quad e \quad A_2 = a_2^0 E_{i_1 i_1} \otimes b_2^{\lambda_2}.$$

De modo análogo ao caso anterior, se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ou  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$ , temos  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ , e se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , temos  $A_1 A_2 = -A_2 A_1$ , donde segue que os polinômios de grau 2 se anulam para estas substituições, e portanto são identidades para  $M_{p,q}(E) \otimes E$ . ■

**Observação 2.2** Dados  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $i, j, k, l \in \{1, \dots, p+q\}$  sempre podemos obter elementos  $a \in \mathcal{E}_{\eta(i)+\eta(j)}$  e  $b \in \mathcal{E}_{\eta(k)+\eta(l)}$  com  $ab \neq 0$ . Daí segue de forma semelhante ao resultado na seção anterior para álgebra  $M_n$  que nenhum monômio  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduado pode ser identidade graduada para  $M_{p,q}(E) \otimes E$ , ou seja,  $\mathcal{M} \cap (T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_{p,q}(E) \otimes E)) = \emptyset$ .

O próximo lema é um resultado equivalente ao Lema 2.2.3 para a álgebra  $M_{p,q}(E) \otimes E$ .

**Lema 2.3.3** Tome  $\sigma \in S_k$  e seja  $S$  a substituição standard dada por

$$x_s = A_s = a_s^{\eta(i_s)+\eta(j_s)} E_{i_s j_s} \otimes b_s^{\lambda_s+\eta(i_s)+\eta(j_s)},$$

onde  $|x_s| = |A_s| = (\overline{j_s - i_s}, \lambda_s)$ ,  $s = 1, \dots, k$ . Se

$$m_\sigma|_S = A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(k)} \neq 0,$$

então existe  $A \in \mathcal{B}$  e  $c \in \{-1, 1\}$  tais que  $m_\sigma|_S = cA$ . Além disso,  $m_\sigma|_S \neq 0$  se, e somente se, para quaisquer  $p, q$ , com  $1 \leq p \leq q \leq k$ , temos  $m_\sigma^{[p,q]}|_S \neq 0$ , e neste caso

$$|m_\sigma^{[p,q]}| = (\overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}, \lambda_{\sigma(p)} + \cdots + \lambda_{\sigma(q)}),$$

como monômio  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduado.

**Demonstração:** A primeira afirmação segue diretamente do Lema 2.3.1. Supondo  $m_\sigma|_S \neq 0$ , é claro que qualquer produto  $A_{\sigma(p)} \cdots A_{\sigma(q)}$  é não nulo, e reciprocamente basta tomar  $p = 1$  e  $q = k$  e temos  $m_\sigma|_S \neq 0$ . Neste caso, pelo Lema 2.3.1, temos  $j_{\sigma(l)} = i_{\sigma(l+1)}$ , para  $l = 1, \dots, k-1$ , e daí

$$\begin{aligned} |m_\sigma^{[p,q]}| &= |x_{\sigma(q)}| + |x_{\sigma(q-1)}| + \cdots + |x_{\sigma(p+1)}| + |x_{\sigma(p)}| \\ &= (\overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)}} + \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(q-1)}} + \cdots + \overline{j_{\sigma(p)} - i_{\sigma(p)}}), \lambda_{\sigma(p)} + \cdots + \lambda_{\sigma(q)} \\ &= (\overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}, \lambda_{\sigma(p)} + \cdots + \lambda_{\sigma(q)}). \end{aligned}$$

■

A menos de uma constante  $c \in \{-1, 1\}$  na congruência módulo  $I$ , usando o lema anterior e as identidades no conjunto  $\mathcal{N}$  obtemos de forma semelhante o mesmo resultado do Lema 2.2.4 para  $M_{p,q}(E) \otimes E$ . Daí, argumentando de forma análoga, apenas com as matrizes elementares dos elementos da base  $\mathcal{B}$ , obtemos também o Lema

2.2.5 e seu Corolário 2.2.6 para o tensor de  $M_{p,q}(E)$  e  $E$ , ou seja, se para  $\sigma, \tau \in S_k$ , existe substituição standard  $S$  em  $\mathcal{B}$  tal que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S = cm_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k)|_S \neq 0,$$

então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv cm_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{I},$$

para algum  $c \in \{-1, 1\}$ . Logo, sendo  $\mathcal{B}$  uma base homogênea e multiplicativa, as hipóteses da Proposição 1.7.17 são satisfeitas para a álgebra  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduada  $M_{p,q}(E) \otimes E$ . Além disso, pela Observação 2.2, temos  $\mathcal{M} \cap (T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_{p,q}(E) \otimes E)) = \emptyset$ . Dessa forma, obtemos o próximo resultado.

**Teorema 2.3.4** *Seja  $n = p + q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . Então o conjunto  $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_{p,q}(E) \otimes E))$  gera o ideal das identidades graduadas de  $M_{p,q}(E) \otimes E$ , ou seja,*

$$I = T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_{p,q}(E) \otimes E).$$

**Teorema 2.3.5** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , considere a  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduação para  $M_n(E)$  induzida por  $\mu = Id_{S_n}$  (veja Exemplo 1.7.6). Temos que  $T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_n(E))$  é gerado pelo conjunto  $\mathcal{N}$ .*

**Demonstração:** Ver [10], Corolário 12. ■

**Corolário 2.3.6** *Tome  $n = p + q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . As álgebras  $M_n(E)$  e  $M_{p,q}(E) \otimes E$  são PI-equivalentes como álgebras  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas. Em particular, elas são PI-equivalentes.*

**Demonstração:** A PI-equivalência como álgebras graduadas segue diretamente dos teoremas anteriores, daí basta aplicar a Proposição 1.7.15 e temos  $T(M_n(E)) = T(M_{p,q}(E) \otimes E)$ . ■

# Capítulo 3

## Identidades Graduadas de $M_{1,1}(E)$

Neste capítulo, teremos como base os resultados obtidos por Di Vincenzo em [7]. Considerando uma  $\mathbb{Z}_2$ -graduação para a álgebra associativa livre  $F\langle X \rangle$ , vamos definir o  $S_n \times S_m$ -caracter, denotado por  $\chi_{n,m}$ , para uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada. Considerando a álgebra  $M_2(F)$ , vamos obter o valor de  $\chi_{n,m}$ , e a partir disso encontraremos um valor semelhante do caracter para a álgebra  $M_{1,1}(E)$ , além de determinar o  $T_2$ -ideal das identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para esta álgebra. Como consequência, vamos estabelecer a PI-equivalência entre  $E \otimes E$  e  $M_{1,1}(E)$ .

Em todo o capítulo,  $F$  será um corpo de característica zero.

### 3.1 Alguns conceitos

Nesta seção vamos estabelecer definições e alguns resultados que servirão de base para as demonstrações dos resultados principais deste capítulo. De modo análogo à Seção 1.7, para o grupo  $G = \mathbb{Z}_2$ , vamos inicialmente obter uma  $\mathbb{Z}_2$ -graduação para álgebra livre  $F\langle X \rangle$ , gerada por  $X$ .

Podemos representar  $X$  da forma  $X = Y \cup Z$ , onde  $Y$  e  $Z$  são conjuntos disjuntos e correspondem as variáveis de grau 0 e 1 em  $\mathbb{Z}_2$ , respectivamente. Assim, sejam  $\mathcal{F}_0$  e  $\mathcal{F}_1$  os subespaços de  $F\langle X \rangle$  gerados pelos monômios que têm  $\mathbb{Z}_2$ -grau homogêneo 0 e 1, respectivamente. Temos que

$$F\langle X \rangle = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$$

é uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação para álgebra livre  $F\langle X \rangle$ , e um ideal  $I$  de  $F\langle X \rangle$  é um  $T_2$ -ideal se é invariante pelos endomorfismos  $\psi$  de  $F\langle X \rangle$  tais que  $\psi(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{F}_0$  e  $\psi(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathcal{F}_1$ , ou seja, pelos endomorfismos  $\mathbb{Z}_2$ -graduados. Além disso, dada uma álgebra  $A = A_0 \oplus A_1$   $\mathbb{Z}_2$ -graduada, o conjunto  $I = T_2(A)$  de todas identidades graduadas de  $A$  é um  $T_2$ -ideal de  $F\langle X \rangle$ .

Como estamos sob a hipótese de  $\text{char}F = 0$ , podemos trabalhar apenas com polinômios graduados multilineares (ver Observação 1.14). Assim, seja  $P_{n,m}$  o conjunto de todos os polinômios multilineares de grau  $n + m$  nas variáveis  $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m$ , onde os  $y_i$ 's e os  $z_j$ 's pertencem a  $\mathcal{F}_0$  e  $\mathcal{F}_1$ , respectivamente. Considerando a ação do grupo  $S_n \times S_m$  em  $P_{n,m}$ , dada por

$$(\sigma, \pi)f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) = f(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}, z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(m)}),$$

onde  $(\sigma, \pi) \in S_n \times S_m$  e  $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in P_{n,m}$ , obtemos facilmente que  $P_{n,m}$  é um  $S_n \times S_m$ -módulo.

**Observação 3.1** *O conjunto  $\{u_1 z_{\sigma(1)} u_2 z_{\sigma(2)} u_3 \cdots z_{\sigma(m)} u_{m+1} : \sigma \in S_m\}$ , onde os  $u_i$ 's são monômios multilineares, possivelmente iguais a 1, nas variáveis  $y_1, \dots, y_n$ , e  $u_i, u_j$  não possuem variáveis em comum, para  $i \neq j$ , é uma base para  $P_{n,m}$ .*

**Observação 3.2** *Sejam  $\lambda_1 \vdash n$ ,  $\lambda_2 \vdash m$  e  $T_1, T_2$  tabelas de Young standard dos diagramas  $D_{\lambda_1}$  e  $D_{\lambda_2}$ , respectivamente. Dadas duas permutações  $\sigma \in S_n$  e  $\pi \in S_m$ , podemos identificar  $\sigma$  com  $(\sigma, \text{Id}_{S_m})$ , e  $\pi$  com  $(\text{Id}_{S_n}, \pi)$  no grupo  $S_n \times S_m$ , daí obtemos  $\sigma\pi = \pi\sigma$ . Assim*

$$\begin{aligned} E_{T_1} E_{T_2} &= \left( \sum_{\sigma \in R_{T_1}} \sum_{\pi \in C_{T_1}} (-1)^\pi \sigma \pi \right) \left( \sum_{\sigma' \in R_{T_2}} \sum_{\pi' \in C_{T_2}} (-1)^{\pi'} \sigma' \pi' \right) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_1} \\ \pi \in C_{T_1}}} \sum_{\substack{\sigma' \in R_{T_2} \\ \pi' \in C_{T_2}}} (-1)^\pi (-1)^{\pi'} \sigma \pi \sigma' \pi' = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_1} \\ \pi \in C_{T_1}}} \sum_{\substack{\sigma' \in R_{T_2} \\ \pi' \in C_{T_2}}} (-1)^\pi (-1)^{\pi'} \sigma \sigma' \pi \pi' \\ &= \left( \sum_{\sigma \in R_{T_1}} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma' \in R_{T_2}} \sigma' \right) \left( \sum_{\pi \in C_{T_1}} (-1)^\pi \pi \right) \left( \sum_{\pi' \in C_{T_2}} (-1)^{\pi'} \pi' \right) \\ &= R^{T_1} R^{T_2} C^{T_1} C^{T_2} \end{aligned}$$

na álgebra de grupo  $F(S_n \times S_m)$ .

Se  $A = A_0 \oplus A_1$  é uma PI-álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada e  $I = T_2(A)$ , então defina  $I_{n,m} = I \cap P_{n,m}$ . Claramente  $I_{n,m}$  é um  $S_n \times S_m$ -submódulo de  $P_{n,m}$ , e daí podemos considerar

o  $S_n \times S_m$ -módulo  $P_{n,m}/I_{n,m}$ . Vamos denotar por  $\chi_{n,m}(I)$  (ou  $\chi_{n,m}(A)$ ) o caracter do  $S_n \times S_m$ -módulo  $P_{n,m}/I_{n,m}$ , e por  $c_{n,m}(I)$  (ou  $c_{n,m}(A)$ ) sua dimensão sobre  $F$ .

Pela equação (1.3), podemos escrever

$$\chi_{n,m}(I) = \chi_{n,m}(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash m}} m_{\lambda,\mu} [\lambda] \otimes [\mu], \quad (3.1)$$

onde  $[\lambda]$  e  $[\mu]$  são caracteres irredutíveis dos grupos  $S_n$  e  $S_m$  associados as partições de  $n$  e  $m$ , respectivamente.

**Teorema 3.1.1** *Seja  $A$  uma PI-álgebra com caracter  $\chi_{n,m}(A)$  dado em (3.1). Para partições  $\lambda \vdash n$  e  $\mu \vdash m$ ,  $m_{\lambda,\mu} = 0$  se, e somente se, para quaisquer tabelas de Young  $T_\lambda$  e  $T_\mu$  e todo polinômio  $f = f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in P_{n,m}$ , a álgebra  $A$  satisfaz a identidade graduada  $E_{T_\lambda} E_{T_\mu} f \equiv 0$ , onde  $E_{T_\lambda}$  e  $E_{T_\mu}$  são os elementos da Definição 1.3.3.*

**Demonstração:** Basta observar a relação entre as representações irredutíveis de  $S_n \times S_m$  e as representações irredutíveis de  $S_n$  e  $S_m$ , obtida no Teorema 1.2.20, e o resultado segue analogamente à demonstração do Teorema 2.4.5, página 55, em [12].

■

## 3.2 Identidades graduadas de $M_2(F)$

As álgebras  $M_{1,1}(E)$  e  $M_2(F)$  possuem uma certa relação via isomorfismo graduado, mais precisamente, o duado de  $M_2(F)$  pela álgebra de Grassmann  $E$  é isomorfo a  $M_{1,1}(E)$ , como veremos posteriormente. Nesta seção vamos estabelecer alguns resultados das identidades graduadas para  $M_2(F)$  e obter o valor de  $\chi_{n,m}$  para esta álgebra.

Em toda seção vamos denotar por  $A$  a álgebra  $M_2(F)$ , com  $\mathbb{Z}_2$ -gradação

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in F \right\} \quad e \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}; c, d \in F \right\} \quad (3.2)$$

e  $I$  o  $T_2$ -ideal das identidades graduadas desta álgebra. Observe que  $A_0$  e  $A_1$  são gerados, como espaços vetoriais, pelas matrizes  $\{E_{11}, E_{22}\}$  e  $\{E_{12}, E_{21}\}$ , respectivamente.

Para  $m > 0$ , seja  $(j) = \{j_1, j_2, \dots, j_{m/2}\}$  um subconjunto de  $\{1, 2, \dots, m\}$  de ordem  $m/2$  (estamos considerando apenas a parte inteira de  $m/2$ ), com  $j_1 < j_2 <$

$\dots < j_{m/2}$ , e seja  $(i) = \{i_1, i_2, \dots\}$  o seu complemento em  $\{1, 2, \dots, m\}$ , com  $i_1 < i_2 < \dots$ . Além disso, dado  $n \geq 0$ , para  $q \in \{0, 1, \dots, n\}$ , seja  $(t) = \{t_1, t_2, \dots, t_q\}$  um subconjunto de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de ordem  $q$ , com  $t_1 < t_2 < \dots < t_q$ , e seja  $(s) = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-q}\}$  o seu complemento em  $\{1, 2, \dots, n\}$ , com  $s_1 < s_2 < \dots < s_{n-q}$ . Note que se  $m$  é par os conjuntos  $(j)$  e  $(i)$  possuem o mesmo número de elementos, e se  $m$  é ímpar o conjunto  $(i)$  possui  $m/2 + 1$  elementos.

Como visto na seção anterior, podemos considerar o módulo quociente  $P_{n,m}/I_{n,m}$ , onde  $I_{n,m} = I \cap P_{n,m}$ . Assim, dados  $(j)$  e  $(t)$ , seja

$$M_{(t),(j)} = M_{(t),(j)}(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) = \begin{cases} y_{t_1} y_{t_2} \cdots y_{t_q} z_{i_1} y_{s_1} \cdots y_{s_{n-q}} z_{j_1} z_{i_2} z_{j_2} \cdots z_{i_{m/2}} z_{j_{m/2}}, & \text{se } m \text{ é par} \\ y_{t_1} y_{t_2} \cdots y_{t_q} z_{i_1} y_{s_1} \cdots y_{s_{n-q}} z_{j_1} z_{i_2} z_{j_2} \cdots z_{i_{m/2+1}}, & \text{se } m \text{ é ímpar} \end{cases}$$

um elemento de  $P_{n,m}$ . Temos que para cada par de subconjuntos  $(j)$ , com  $m/2$  elementos, e  $(t)$  de  $\{1, 2, \dots, m\}$  e  $\{1, 2, \dots, n\}$ , respectivamente, obtemos um elemento  $M_{(t),(j)}$ . Assim, ao todo temos  $2^n \binom{m}{m/2}$  monômios  $M_{(t),(j)}$ .

**Lema 3.2.1** *Os  $2^n \binom{m}{m/2}$  elementos  $M_{(t),(j)}$  são linearmente independentes módulo  $I_{n,m}$ .*

**Demonstração:** Vamos supor que  $m$  é par, pois o caso  $m$  ímpar é análogo. Seja

$$f = \sum_{(t),(j)} A_{(t),(j)} M_{(t),(j)}(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m), \quad A_{(t),(j)} \in F,$$

e suponha que  $f$  é identidade graduada de  $A$ , ou seja, estamos tomando uma combinação linear dos  $M_{(t),(j)}$  nula em  $P_{n,m}/I_{n,m}$ . Como  $y_i \in \mathcal{F}_0$  e  $z_j \in \mathcal{F}_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , identifique cada  $y_i$  com  $\bar{y}_i$  e  $z_j$  com  $\bar{z}_j$ , pela projeção canônica, e considere as substituições graduadas quaisquer

$$\bar{y}_i = \alpha_i E_{11} + \beta_i E_{22} \quad e \quad \bar{z}_j = a_j E_{12} + b_j E_{21},$$

com  $\alpha_i, \beta_i, a_j, b_j \in F$ . Pela multiplicação de matrizes elementares, temos que

$$\begin{aligned} \bar{y}_i \bar{y}_j &= (\alpha_i E_{11} + \beta_i E_{22})(\alpha_j E_{11} + \beta_j E_{22}) = \alpha_i \alpha_j E_{11} + \beta_i \beta_j E_{22}, \\ \bar{y}_i \bar{z}_j &= (\alpha_i E_{11} + \beta_i E_{22})(a_j E_{12} + b_j E_{21}) = \alpha_i a_j E_{12} + \beta_i b_j E_{21}, \\ \bar{z}_i \bar{z}_j &= (a_i E_{12} + b_i E_{21})(a_j E_{12} + b_j E_{21}) = a_i b_j E_{11} + b_i a_j E_{22}, \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\overline{y_{t_1}} \overline{y_{t_2}} \cdots \overline{y_{t_q}} \overline{z_{i_1}} \overline{y_{s_1}} \cdots \overline{y_{s_{n-q}}} &= (\alpha_{t_1} \cdots \alpha_{t_q} E_{11} + \beta_{t_1} \cdots \beta_{t_q} E_{22}) \cdot \\
&\quad (a_{i_1} E_{12} + b_{i_1} E_{21})(\alpha_{s_1} \cdots \alpha_{s_{n-q}} E_{11} + \beta_{s_1} \cdots \beta_{s_{n-q}} E_{22}) \\
&= (\alpha_{t_1} \cdots \alpha_{t_q} a_{i_1} E_{12} + \beta_{t_1} \cdots \beta_{t_q} b_{i_1} E_{21}) \cdot \\
&\quad (\alpha_{s_1} \cdots \alpha_{s_{n-q}} E_{11} + \beta_{s_1} \cdots \beta_{s_{n-q}} E_{22}) \\
&= \alpha_{t_1} \cdots \alpha_{t_q} \beta_{s_1} \cdots \beta_{s_{n-q}} a_{i_1} E_{12} \\
&\quad + \alpha_{s_1} \cdots \alpha_{s_{n-q}} \beta_{t_1} \cdots \beta_{t_q} b_{i_1} E_{21}
\end{aligned}$$

e

$$\overline{z_{j_1}} \overline{z_{i_2}} \overline{z_{j_2}} \cdots \overline{z_{i_{m/2}}} \overline{z_{j_{m/2}}} = a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_{m/2}} a_{j_{m/2}} E_{12} + b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2} \cdots a_{i_{m/2}} b_{j_{m/2}} E_{21}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
M_{(t),(j)}(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_m}) &= \overline{y_{t_1}} \overline{y_{t_2}} \cdots \overline{y_{t_q}} \overline{z_{i_1}} \overline{y_{s_1}} \cdots \overline{y_{s_{n-q}}} \cdot \\
&\quad \overline{z_{j_1}} \overline{z_{i_2}} \overline{z_{j_2}} \cdots \overline{z_{i_{m/2}}} \overline{z_{j_{m/2}}} \\
&= \alpha_{t_1} \cdots \alpha_{t_q} \beta_{s_1} \cdots \beta_{s_{n-q}} a_{i_1} b_{j_1} \cdot \quad (3.3) \\
&\quad a_{i_2} b_{j_2} \cdots a_{i_{m/2}} b_{j_{m/2}} E_{11} + \\
&\quad + \alpha_{s_1} \cdots \alpha_{s_{n-q}} \beta_{t_1} \cdots \beta_{t_q} b_{i_1} \cdot \\
&\quad a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_{m/2}} a_{j_{m/2}} E_{22}.
\end{aligned}$$

Agora fixado  $(j) = \{j_1, j_2, \dots, j_{m/2}\}$ , tomemos uma substituição

$$a_{i_1} = \cdots = a_{i_{m/2}} = b_{j_1} = \cdots = b_{j_{m/2}} = 1$$

e

$$b_{i_1} = \cdots = b_{i_{m/2}} = a_{j_1} = \cdots = a_{j_{m/2}} = 0.$$

Combinando a equação (3.3) e o fato de  $f$  ser identidade graduada, temos que, para quaisquer  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in F$ ,

$$\sum_{(t)} A_{(t),(j)} \alpha_{t_1} \cdots \alpha_{t_q} \beta_{s_1} \cdots \beta_{s_{n-q}} E_{11} = 0,$$

e daí, tomando substituições adequadas para  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in F$ , obtemos  $A_{(t),(j)} = 0$ , para todo  $(t)$ . Fazendo o mesmo procedimento para qualquer conjunto



( $j$ ), obtemos  $A_{(t),(j)} = 0$ , para todo ( $t$ ) e ( $j$ ). Portanto os elementos  $M_{(t),(j)}$  são linearmente independentes módulo  $I_{n,m}$ . ■

**Lema 3.2.2** *O  $T_2$ -ideal  $I$  é gerado pelos polinômios graduados*

$$y_1y_2 - y_2y_1, \quad (3.4)$$

$$z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1. \quad (3.5)$$

Além disso,  $c_{n,0}(I) = 1$  e  $c_{n,m}(I) = 2^n \binom{m}{m/2}$ , para  $n \geq 0$ ,  $m > 0$ .

**Demonstração:** Seja  $J$  o ideal gerado por (3.4) e (3.5). Pelo Exemplo 1.7.18, esses polinômios são identidades graduadas de  $A$ . Daí  $J \subseteq I$ , e temos  $J_{n,m} \subseteq I_{n,m}$ , para todo  $n, m \geq 0$ . Assim

$$c_{n,m}(J) = \dim(P_{n,m}/J_{n,m}) \geq \dim(P_{n,m}/I_{n,m}) = c_{n,m}(I).$$

Para o caso  $m = 0$  já obtemos  $J_{n,0} \subseteq I_{n,0}$ . Agora tome  $f = f(y_1, \dots, y_n) \in I_{n,0}$  e suponha que  $f \notin J_{n,0}$ . Escreva

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(n)}, \quad a_\sigma \in F.$$

Pela identidade (3.4), podemos comutar as variáveis na congruência, e daí

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(n)} \equiv \left( \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \right) y_1 \cdots y_n \equiv \alpha y_1 \cdots y_n \pmod{J_{n,0}},$$

com  $\alpha = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \neq 0$ , pois  $f \notin J_{n,0}$ . Portanto  $\alpha y_1 \cdots y_n$  é identidade graduada de  $A$ , uma contradição, pois  $A_0$  possui matrizes diagonais que não são nilpotentes. Logo  $f \in J_{n,0}$  e temos  $I_{n,0} = J_{n,0}$ . Agora, sendo  $\{y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n\}$  base de  $P_{n,0}$ , então  $\beta = \{y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(n)} + J_{n,0} : \sigma \in S_n\}$  é um conjunto gerador do quociente  $P_{n,0}/J_{n,0}$ . Pela identidade (3.4), obtemos  $\beta = \{y_1 \cdots y_n + J_{n,0}\}$ , com apenas um elemento. Juntando isto com a igualdade  $I_{n,0} = J_{n,0}$ , obtemos

$$c_{n,0}(I) = \dim(P_{n,0}/I_{n,0}) = \dim(P_{n,0}/J_{n,0}) = 1.$$

Além disso, ao módulo  $P_{n,0}/I_{n,0}$  corresponde uma representação de grau 1 do grupo  $S_n$ , a qual é a representação trivial. De fato, basta observar que  $\sigma(y_1 \cdots y_n + J_{n,0}) =$

$y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(n)} + J_{n,0} = y_1 \cdots y_n + J_{n,0}$ , para toda  $\sigma \in S_n$ . Logo, o caracter de  $P_{n,0}/J_{n,0}$  é o trivial, ou seja, o caracter correspondente à partição  $(n) \vdash n$ , pelo Exemplo 1.3.7, denotado por  $[(n)]$ .

Agora suponha  $m > 0$ . Pela identidade (3.4) e o fato de  $J$  ser  $T_2$ -ideal, temos que  $y_i M - M y_i \in J$ , para qualquer monômio  $M$  que possua um número par de variáveis  $z'_j$ 's. Assim, pela Observação 3.1,  $P_{n,m}/J_{n,m}$  é gerado por monômios do tipo  $u_0(y)z_{i_1}u_1(y)z_{i_2} \cdots z_{i_m}$ , onde  $u_0(y)$  e  $u_1(y)$  são monômios multilineares, possivelmente iguais a 1, nas variáveis  $y_1, \dots, y_n$ , e os  $z'_i$ 's estão ordenados crescentemente em cada  $u_i(y)$ , pela identidade (3.4). Além disso, pela identidade (3.5), podemos supor  $i_1 < i_3 < i_5 < \cdots$  e  $i_2 < i_4 < i_6 < \cdots$ . Assim,  $P_{n,m}/J_{n,m}$  é gerado (como espaço vetorial) pelos monômios  $M_{(t),(j)}$ , e daí

$$c_{n,m}(J) = \dim(P_{n,m}/J_{n,m}) \leq 2^n \binom{m}{m/2}.$$

Por outro lado, pelo lema anterior, temos  $2^n \binom{m}{m/2} \leq \dim(P_{n,m}/I_{n,m}) = c_{n,m}(I)$ . Logo, pelo que foi feito no início da demonstração,

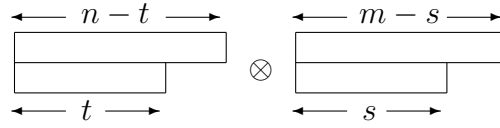
$$2^n \binom{m}{m/2} \leq c_{n,m}(I) \leq c_{n,m}(J) \leq 2^n \binom{m}{m/2},$$

e portanto  $c_{n,m}(I) = c_{n,m}(J) = 2^n \binom{m}{m/2}$ , donde  $I_{n,m} = J_{n,m}$ , pois  $J_{n,m} \subseteq I_{n,m}$ , para quaisquer  $n, m \geq 0$ . Assim, como  $I$  e  $J$  são  $T_2$ -ideais de  $F\langle X \rangle$  e as igualdades valem para polinômios multilineares graduados, pela Observação 1.14 obtemos  $J = I$ , o que conclui a demonstração. ■

Observe que a determinação dos geradores do  $T_2$ -ideal  $I$  é um caso particular do Teorema 2.2.7 para  $n = 2$ .

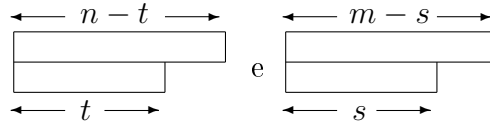
A partir dos dois últimos resultados, segue que o conjunto  $\{M_{(t),(j)} + I_{n,m}\}$  é uma base para o quociente  $P_{n,m}/I_{n,m}$ , quando  $n \geq 0$  e  $m > 0$ . Agora fixado  $q$  com  $0 \leq q \leq n$ , para  $m > 0$ , seja  $W_q$  o  $S_n \times S_m$ -submódulo de  $P_{n,m}/I_{n,m}$  gerado por  $y_1 y_2 \cdots y_q z_1 y_{q+1} \cdots y_n z_2 z_3 \cdots z_m + I_{n,m}$ . Observe que, como espaço vetorial sobre  $F$ ,  $W_q$  é gerado pelo conjunto  $\{y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(q)} z_{\pi(1)} y_{\sigma(q+1)} \cdots y_{\sigma(n)} z_{\pi(2)} z_{\pi(3)} \cdots z_{\pi(m)} + I_{n,m} : (\sigma, \pi) \in S_n \times S_m\}$ . Além disso, como  $W_q$  é um  $S_n \times S_m$ -módulo, podemos pensar no seu caracter, denotado por  $\chi(W_q)$ , o qual pode ser expresso como soma de caracteres irredutíveis. Nesse sentido, os próximos resultados vão nos garantir essa decomposição, identificando cada caracter irredutível com o seu respectivo diagrama.

**Lema 3.2.3** Para quaisquer  $s, t \in \mathbb{N}$  com  $0 \leq t \leq q^* = \min\{q, n - q\}$  e  $0 \leq s \leq m/2$ , o  $S_n \times S_m$ -caracter irredutível



é uma componente de  $\chi(W_q)$ .

**Demonstração:** Pela contra-positiva do Teorema 3.1.1, a multiplicidade de cada caracter da forma do lema será não nula se existir um monômio  $M \in P_{n,m}$  e tabelas de Young  $T_1$  e  $T_2$  dos diagramas



tais que  $E_{T_1}E_{T_2}M \in P_{n,m}$  não é identidade graduada de  $A$ . Vamos tomar então  $M = y_1y_2 \cdots y_qz_1y_{q+1} \cdots y_nz_2z_3 \cdots z_m \in P_{n,m}$  e mostrar que

$$(E_{T_1}E_{T_2})y_1y_2 \cdots y_qz_1y_{q+1} \cdots y_nz_2z_3 \cdots z_m$$

não é identidade graduada de  $A$ , para tabelas adequadas  $T_1$  e  $T_2$ . Para simplificar a notação, suponha  $q = q^*$  e que  $m$  é par (o caso  $m$  ímpar é análogo). Para  $t \leq q$  e  $s \leq m/2$ , vamos considerar as tabelas de Young

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} \\ \hline q+1 & q+2 & \cdots & q+t & t+1 & \cdots & q & q+t+1 & \cdots & n \\ \hline 1 & 2 & \cdots & t & & & & & & \\ \hline \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} \\ \hline & & & t & & & & & & \\ \hline \end{array},$$

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} \\ \hline 1 & 3 & \cdots & 2s-1 & 2s+1 & \cdots & m \\ \hline 2 & 4 & \cdots & 2s & & & \\ \hline \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} & \overleftarrow{\quad} \\ \hline & & & s & & & \\ \hline \end{array},$$

e os elementos  $R^{T_i} = \sum_{\sigma \in R_{T_i}} \sigma$  e  $C^{T_i} = \sum_{\pi \in C_{T_i}} (-1)^\pi \pi$ , para  $i = 1, 2$ . Sejam

$$\begin{aligned} M &= M(y, z) = y_1y_2 \cdots y_qz_1y_{q+1} \cdots y_nz_2z_3 \cdots z_m, \\ M_1 &= M_1(y, z) = y_1y_2 \cdots y_qz_1y_{q+1} \cdots y_nz_2, \\ M_2 &= M_2(y, z) = y_1y_2 \cdots y_qz_2y_{q+1} \cdots y_nz_1, \\ f(z) &= [z_3, z_4][z_5, z_6] \cdots [z_{2s-1}, z_{2s}]z_{2s+1}z_{2s+2} \cdots z_m. \end{aligned}$$

Dada uma permutação  $\pi \in C_{T_2}$ , pela tabela  $T_2$ , temos que  $\pi = (i_1 \ i_1 + 1) \cdots (i_k \ i_k + 1)$ , onde  $i_l \in \{1, 3, \dots, 2s - 1\}$ , e daí

$$\begin{aligned} M_1 f(z) - M_2 f(z) &= y_1 y_2 \cdots y_q z_1 y_{q+1} \cdots y_n z_2 [z_3, z_4] [z_5, z_6] \cdots [z_{2s-1}, z_{2s}] z_{2s+1} \cdots z_m \\ &\quad - y_1 y_2 \cdots y_q z_2 y_{q+1} \cdots y_n z_1 [z_3, z_4] [z_5, z_6] \cdots [z_{2s-1}, z_{2s}] z_{2s+1} \cdots z_m \\ &= \sum_{\pi \in C_{T_2}} (-1)^\pi \pi M = C^{T_2} M. \end{aligned}$$

Agora, pela tabela  $T_1$ , dada  $\sigma \in C_{T_1}$  temos que  $\sigma = (i_1 \ q+i_1)(i_2 \ q+i_2) \cdots (i_r \ q+i_r)$ , onde  $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, t\}$  é um subconjunto ordenado da segunda linha de  $T_1$ . Observe que  $(-1)^\sigma = (-1)^r$ . Assim, temos que  $(-1)^\sigma \sigma M_1(y, z) f(z)$  é congruente módulo  $I_{n,m}$  a

$$(-1)^r y_{j_1} \cdots y_{j_v} y_{t+1} \cdots y_q y_{q+i_1} \cdots y_{q+i_r} z_1 y_{i_1} \cdots y_{i_r} y_{q+j_1} \cdots y_{q+j_v} y_{q+t+1} \cdots y_n z_2 f(z) \quad (3.6)$$

onde  $\{j_1, \dots, j_v\}$  são os valores não comutados por  $\sigma$ , ou seja,  $\{j_1, \dots, j_v\} = \{1, \dots, t\} - \{i_1, \dots, i_r\}$ , e  $j_1 < \cdots < j_v$ . Observe que os índices em (3.6) foram ordenados pela identidade (3.4). Analogamente, temos que  $(-1)^\sigma \sigma M_2(y, z) f(z)$  é congruente módulo  $I_{n,m}$  a

$$(-1)^r y_{j_1} \cdots y_{j_v} y_{t+1} \cdots y_q y_{q+i_1} \cdots y_{q+i_r} z_2 y_{i_1} \cdots y_{i_r} y_{q+j_1} \cdots y_{q+j_v} y_{q+t+1} \cdots y_n z_1 f(z).$$

Para cada  $\sigma \in C_{T_1}$  obtemos um conjunto  $\{i_1, \dots, i_r\}$  com  $r$  elementos, onde  $0 \leq r \leq t$  e  $i_1 < \cdots < i_r$ . Além disso, para permutações  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  em  $C_{T_1}$  podemos ter o mesmo número de elementos comutados, mas não necessariamente o mesmo conjunto. Daí, pelas congruências anteriores, temos que  $C^{T_1} C^{T_2} M = C^{T_1} (M_1 f(z) - M_2 f(z))$  é congruente módulo  $I_{n,m}$  a

$$\begin{aligned} g = g(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) &= \sum_{\pi \in C_{T_1}} (-1)^\pi \pi (M_1 f(z) - M_2 f(z)) \\ &= \sum_{r=0}^t \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq t} (-1)^r ((y_{j_1} \cdots y_{j_v} y_{t+1} \cdots y_q y_{q+i_1} \cdots \\ &\quad \cdots y_{q+i_r} z_1 y_{i_1} \cdots y_{i_r} y_{q+j_1} \cdots y_{q+j_v} y_{q+t+1} \cdots y_n z_2) - \\ &\quad - (y_{j_1} \cdots y_{j_v} y_{t+1} \cdots y_q y_{q+i_1} \cdots y_{q+i_r} z_2 y_{i_1} \cdots \\ &\quad \cdots y_{i_r} y_{q+j_1} \cdots y_{q+j_v} y_{q+t+1} \cdots y_n z_1)) f(z), \end{aligned}$$

onde  $\{j_1, \dots, j_v\} = \{1, \dots, t\} - \{i_1, \dots, i_r\}$  e  $j_1 < \cdots < j_v$ . Identificando  $y_1 = y_2 = \cdots = y_t$ ,  $y_{t+1} = y_{t+2} = \cdots = y_n$ ,  $z_2 = z_4 = \cdots = z_{2s}$  e  $z_1 = z_3 = \cdots = z_{2s-1} = z_{2s+1} =$

$z_{2s+2} = \cdots = z_m$ , segue que

$$\begin{aligned} f(z) &= [z_3, z_4][z_5, z_6] \cdots [z_{2s-1}, z_{2s}] z_{2s+1} z_{2s+2} \cdots z_m \\ &= [z_1, z_2][z_1, z_2] \cdots [z_1, z_2] z_1 z_1 \cdots z_1 = [z_1, z_2]^{s-1} z_1^{m-2s}, \end{aligned}$$

e a partir de  $g(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$  obtemos o polinômio

$$\begin{aligned} g_{T_1 T_2} = g_{T_1 T_2}(y_1, y_{t+1}, z_1, z_2) &= \sum_{r=0}^t \binom{t}{r} (-1)^r (y_1^{t-r} y_{t+1}^{q+r-t} z_1 y_1^r y_{t+1}^{n-q-r} z_2 - \\ &\quad - y_1^{t-r} y_{t+1}^{q+r-t} z_2 y_1^r y_{t+1}^{n-q-r} z_1) [z_1, z_2]^{s-1} z_1^{m-2s}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que se  $E_{T_1} E_{T_2} M \in I_{n,m}$ , então  $g_{T_1 T_2} \in I$ . De fato, pela Observação 3.2, temos que

$$E_{T_1} E_{T_2} M = R^{T_1} R^{T_2} C^{T_1} C^{T_2} M.$$

Suponha que  $E_{T_1} E_{T_2} M \in I_{n,m}$ . Temos que  $C^{T_1} C^{T_2} M \equiv g \pmod{I_{n,m}}$  e como  $I_{n,m}$  é um  $S_n \times S_m$ -módulo obtemos

$$0 \equiv E_{T_1} E_{T_2} M = R^{T_1} R^{T_2} C^{T_1} C^{T_2} M \equiv R^{T_1} R^{T_2} g \pmod{I_{n,m}},$$

ou seja,  $R^{T_1} R^{T_2} g \in I_{n,m}$ . Pelo que foi feito anteriormente, o polinômio  $g_{T_1 T_2}$  foi obtido por identificações de variáveis em  $g$ . Daí, como  $I$  é  $T_2$ -ideal, segue que  $(R^{T_1} R^{T_2} g)_{T_1 T_2} \in I$  (Note que estamos considerando a identificação das variáveis em  $R^{T_1} R^{T_2} g$ ). Observe agora que as permutações em  $R^{T_1}$  e  $R^{T_2}$  permutam apenas as variáveis que foram tomadas iguais, e assim  $(R^{T_1} R^{T_2} g)_{T_1 T_2} = \alpha g_{T_1 T_2} \in I$ , com  $0 \neq \alpha \in F$ , donde  $g_{T_1 T_2} \in I$ .

Portanto, para mostrar que  $E_{T_1} E_{T_2} M \notin I_{n,m}$  basta mostrar que  $g_{T_1 T_2} \notin I$ . Assim, identifique  $y_1$  com  $\bar{y}_1$ ,  $y_{t+1}$  com  $\bar{y}_{t+1}$  e  $z_i$  com  $\bar{z}_i$ . Considere as substituições graduadas quaisquer

$$\bar{y}_1 = \alpha_1 E_{11} + \beta_1 E_{22} \quad , \quad \bar{y}_{t+1} = \alpha_2 E_{11} + \beta_2 E_{22} \quad e \quad \bar{z}_i = a_i E_{12} + b_i E_{21}, \quad i = 1, 2.$$

Temos que

$$[\bar{z}_1, \bar{z}_2] = (a_1 b_2 - a_2 b_1) E_{11} + (b_1 a_2 - b_2 a_1) E_{22}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\overline{y_1^{t-r} y_{t+1}^{q+r-t} z_1^{-r}} \overline{y_1^r y_{t+1}^{n-q-r} z_2^{-r}} &= (\alpha_1^{t-r} E_{11} + \beta_1^{t-r} E_{22})(\alpha_2^{q+r-t} E_{11} + \beta_2^{q+r-t} E_{22}) \overline{z_1} \cdot \\
&\quad (\alpha_1^r E_{11} + \beta_1^r E_{22})(\alpha_2^{n-q-r} E_{11} + \beta_2^{n-q-r} E_{22}) \overline{z_2} \\
&= (\alpha_1^{t-r} \alpha_2^{q+r-t} E_{11} + \beta_1^{t-r} \beta_2^{q+r-t} E_{22})(a_1 E_{12} + b_1 E_{21}) \cdot \\
&\quad (\alpha_1^r \alpha_2^{n-q-r} E_{11} + \beta_1^r \beta_2^{n-q-r} E_{22})(a_2 E_{12} + b_2 E_{21}) \\
&= (\alpha_1^{t-r} \alpha_2^{q+r-t} a_1 E_{12} + \beta_1^{t-r} \beta_2^{q+r-t} b_1 E_{21}) \cdot \\
&\quad (\alpha_1^r \alpha_2^{n-q-r} a_2 E_{12} + \beta_1^r \beta_2^{n-q-r} b_2 E_{21}) \\
&= \alpha_1^{t-r} \alpha_2^{q+r-t} \beta_1^r \beta_2^{n-q-r} a_1 b_2 E_{11} + \\
&\quad + \beta_1^{t-r} \beta_2^{q+r-t} \alpha_1^r \alpha_2^{n-q-r} b_1 a_2 E_{22}
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
\overline{y_1^{t-r} y_{t+1}^{q+r-t} z_2^{-r}} \overline{y_1^r y_{t+1}^{n-q-r} z_1^{-r}} &= \alpha_1^{t-r} \alpha_2^{q+r-t} \beta_1^r \beta_2^{n-q-r} a_2 b_1 E_{11} + \\
&\quad + \beta_1^{t-r} \beta_2^{q+r-t} \alpha_1^r \alpha_2^{n-q-r} b_2 a_1 E_{22},
\end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}
g_{T_1 T_2}(\overline{y_1}, \overline{y_{t+1}}, \overline{z_1}, \overline{z_2}) &= \sum_{r=0}^t \binom{t}{r} (-1)^r (\alpha_1^{t-r} \alpha_2^{q+r-t} \beta_1^r \beta_2^{n-q-r} (a_1 b_2 - a_2 b_1) E_{11} + \\
&\quad + \beta_1^{t-r} \beta_2^{q+r-t} \alpha_1^r \alpha_2^{n-q-r} (b_1 a_2 - b_2 a_1) E_{22}) [\overline{z_1}, \overline{z_2}]^{s-1} \overline{z_1}^{m-2s} \\
&= \sum_{r=0}^t \binom{t}{r} (-1)^r (\alpha_1^{t-r} \alpha_2^{q+r-t} \beta_1^r \beta_2^{n-q-r} E_{11} + \\
&\quad + \beta_1^{t-r} \beta_2^{q+r-t} \alpha_1^r \alpha_2^{n-q-r} E_{22}) [\overline{z_1}, \overline{z_2}]^s \overline{z_1}^{m-2s}.
\end{aligned}$$

Tomando  $\overline{z_1} = E_{12} + E_{21}$  e  $\overline{z_2} = E_{21}$ , obtemos facilmente que  $B = [\overline{z_1}, \overline{z_2}]^s \overline{z_1}^{m-2s}$  é uma matriz invertível em  $A$ . Assim, se  $g_{T_1 T_2}(\overline{y_1}, \overline{y_{t+1}}, \overline{z_1}, \overline{z_2}) = 0$ , pela equação anterior e multiplicando pela inversa de  $B$ , obtemos que

$$\sum_{r=0}^t \binom{t}{r} (-1)^r \alpha_1^{t-r} \alpha_2^{q+r-t} \beta_1^r \beta_2^{n-q-r} = 0,$$

para quaisquer  $\alpha_i, \beta_i \in F$ . Assim, tomando substituições adequadas para os  $\alpha_i$ 's e  $\beta_j$ 's, temos  $\binom{t}{r} = 0$ , uma contradição, pois  $\text{char} F = 0$ . Logo,  $g_{T_1 T_2}$  não é identidade de  $A$ , ou seja,  $g_{T_1 T_2} \notin I$ , e o resultado segue.  $\blacksquare$

**Lema 3.2.4** *O caracter de  $W_q$  é dado por*

$$\chi_{n,m}(W_q) = \sum_{t=0}^{q^*} \sum_{s=0}^{m/2} \begin{array}{c} \longleftarrow n-t \longrightarrow \\ \boxed{\phantom{0000000000}} \\ \longleftarrow t \longrightarrow \end{array} \otimes \begin{array}{c} \longleftarrow m-s \longrightarrow \\ \boxed{\phantom{0000000000}} \\ \longleftarrow s \longrightarrow \end{array},$$

onde  $q^* = \min\{q, n - q\}$ .

**Demonstração:** Seja  $d$  o grau da  $S_n \times S_m$ -representação associada a

$$\chi' = \sum_{t=0}^{q^*} \sum_{s=0}^{m/2} \begin{array}{c} \longleftarrow n-t \longrightarrow \\ \boxed{\phantom{0000000000}} \\ \longleftarrow t \longrightarrow \end{array} \otimes \begin{array}{c} \longleftarrow m-s \longrightarrow \\ \boxed{\phantom{0000000000}} \\ \longleftarrow s \longrightarrow \end{array}.$$

Pelo Exemplo 1.3.12, o grau da representação associada a um diagrama do tipo

$$\begin{array}{c} \longleftarrow N-R \longrightarrow \\ \boxed{\phantom{0000000000}} \\ \longleftarrow R \longrightarrow \end{array},$$

com  $N, R \in \mathbb{N}$  e  $2R \leq N$ , é  $\binom{N+1}{R} \left(1 - \frac{2R}{N+1}\right)$ . Além disso, aplicando indução em  $p = 0, \dots, N$ , segue que  $\sum_{R=0}^p \binom{N+1}{R} \left(1 - \frac{2R}{N+1}\right) = \binom{N}{p}$ . Portanto  $d = \binom{n}{q^*} \binom{m}{m/2}$ .

Por outro lado, o  $F$ -espaço vetorial  $W_q$  é gerado pelo conjunto

$$\{y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(q)}z_{\pi(1)}y_{\sigma(q+1)} \cdots y_{\sigma(n)}z_{\pi(2)}z_{\pi(3)} \cdots z_{\pi(m)} + I_{n,m} : (\sigma, \pi) \in S_n \times S_m\},$$

e, pela demonstração do Lema 3.2.2, cada um desses elementos é igual a um dos  $M_{(t)(j)} + I_{n,m}$ , com  $q$  fixo e  $(t) = \{t_1, \dots, t_q\}$ . Como esses elementos são linearmente independentes, segue que eles formam um base de  $W_q$  (como  $F$ -espaço vetorial), e portanto  $\dim W_q = \binom{n}{q} \binom{m}{m/2}$ . Além disso, como  $\binom{n}{q} = \binom{n}{n-q}$  e  $q^* = \min\{q, n - q\}$ , segue que  $\dim W_q = d$ . Pelo lema anterior, todos os termos em  $\chi'$  são componentes do caracter de  $W_q$ , e daí  $\chi_{n,m}(W_q)$  é igual a essas componentes mais alguns termos. Mas,  $\dim W_q = d$ , onde  $d$  é o grau da representação associada a  $\chi'$ . Portanto  $\chi_{n,m}(W_q) = \chi'$  e o resultado segue. ■

Pela demonstração do lema anterior, uma base de  $W_q$ , com  $q$  fixo, é formada por alguns elementos de uma base de  $P_{n,m}/I_{n,m}$ . Fazendo  $q = 0, 1, \dots, n$ , dividimos esta base de  $P_{n,m}/I_{n,m}$  em conjuntos disjuntos, os quais são base de cada  $W_q$ , com  $q = 0, 1, \dots, n$ . Portanto,  $P_{n,m}/I_{n,m} = \bigoplus_{q=0}^n W_q$ .

**Lema 3.2.5** *Seja  $A = M_2(F)$  com  $\mathbb{Z}_2$ -graduação como em (3.2). Então*

$$\chi_{n,0}(A) = \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \begin{array}{c} n \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ \dots \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \end{array} \overrightarrow{\hspace{1.5cm}}$$

e, para  $m > 0$ ,

$$\chi_{n,m}(A) = \sum_{r=0}^{n/2} \sum_{s=0}^{m/2} (n+1-2r) \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \begin{array}{c} n-r \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ r \end{array} \otimes \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \begin{array}{c} m-s \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ s \end{array} \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} .$$

**Demonstração:** Pelo Lema 3.2.2,  $P_{n,0}/I_{n,0}$  tem dimensão 1 com caracter

$$\chi_{n,0}(A) = \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \begin{array}{c} n \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ \dots \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \end{array} \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} .$$

Agora, para  $m > 0$ , temos  $P_{n,m}/I_{n,m} = \bigoplus_{q=0}^n W_q$ . Assim, pelo Lema 3.2.4, temos

$$\chi_{n,m}(A) = \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^{q^*} \sum_{s=0}^{m/2} \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \begin{array}{c} n-r \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ r \end{array} \otimes \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \begin{array}{c} m-s \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ s \end{array} \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} , \quad (3.7)$$

onde  $q^* = \min\{q, n-q\}$ . Observe que  $q^* \leq n/2$  e, para  $r$  fixo, com  $0 \leq r \leq n/2$ , existem diferentes valores de  $q$ , com  $q \in \{0, \dots, n\}$ , para os quais  $r \leq q^* = \min\{q, n-q\}$ . Vamos determinar todos esses valores. Como são todos os valores, temos  $r \leq q$  e  $r \leq n-q$ , e então  $r \leq q \leq n-r$ . Daí temos  $n-r-r+1 = n-2r+1$  valores. Esses valores correspondem a termos repetidos na equação (3.7), e então, para  $m > 0$ , podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\chi_{n,m}(A) = \sum_{r=0}^{n/2} \sum_{s=0}^{m/2} (n+1-2r) \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \begin{array}{c} n-r \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ r \end{array} \otimes \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \begin{array}{c} m-s \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \\ s \end{array} \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} .$$

■

### 3.3 O $T_2$ -ideal de $M_{1,1}(E)$

Nesta seção usaremos os resultados obtidos anteriormente na álgebra  $M_2(F)$  para estabelecer resultados análogos na álgebra  $M_{1,1}(E)$  sobre o caracter e a dimensão do  $S_n \times S_m$ -módulo  $P_{n,m}/I_{n,m}$ . Como consequência, vamos obter a PI-equivalência entre as álgebras  $M_{1,1}(E)$  e  $E \otimes E$ .



**Definição 3.3.1 (Transformada de Kemer, [18])** *Sejam  $F\langle X \rangle = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$  a álgebra livre com  $\mathbb{Z}_2$ -graduação e  $P_{n,m}$  o conjunto dos polinômios multilineares de grau  $n + m$ , nas variáveis  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}_0$  e  $z_1, \dots, z_m \in \mathcal{F}_1$ . Dado  $f \in P_{n,m}$ , escrevemos*

$$f = \sum_u \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_{\sigma,u} u_1 z_{\sigma(1)} u_2 z_{\sigma(2)} u_3 \cdots u_m z_{\sigma(m)} u_{m+1},$$

onde  $u_i$  são monômios nas variáveis  $y_i$ 's,  $u = (u_1, \dots, u_{m+1})$  e  $\alpha_{\sigma,u} \in F$ . Defina

$$f^* = \sum_u \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma,u} u_1 z_{\sigma(1)} u_2 z_{\sigma(2)} u_3 \cdots u_m z_{\sigma(m)} u_{m+1}.$$

Observe que a aplicação  $*$  é linear e, além disso, se  $I$  é um  $T_2$ -ideal, denotamos por  $I^*$  o  $T_2$ -ideal gerado pelo conjunto  $(I \cap P)^*$ , onde  $P$  é o conjunto de todos os polinômios multilineares de  $F\langle X \rangle$ .

**Proposição 3.3.2** *Sejam  $A = A_0 \oplus A_1$  uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada e  $I_1 = T_2(A)$ . Considerando a álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada  $B = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$  e  $I_2 = T_2(B)$  (produto tensorial graduado de  $A$  por  $E$ ), temos:*

$$i) \quad I_1^* \cap P_{n,m} = (I_1 \cap P_{n,m})^* ;$$

$$ii) \quad I_2 = I_1^*.$$

**Demonstração:** Veja [18], capítulo 1, seção 2. ■

Sejam  $M = M(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$  um monômio em  $P_{n,m}$  e  $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_m}$  a ordem das variáveis  $z_i$ 's em  $M$ . Pela definição de  $*$ , temos que  $M^* = (-1)^\sigma M$ , onde  $\sigma$  é a permutação  $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$ . Escreva  $M = u_1 z_{\sigma(1)} u_2 z_{\sigma(2)} u_3 \cdots u_m z_{\sigma(m)} u_{m+1}$ , onde os  $u_i$ 's são monômios nas variáveis  $y_j$ 's, e tome  $(\pi, \tau) \in S_n \times S_m$ . Temos que

$$\begin{aligned} ((\pi, \tau)M)^* &= (u_{\pi(1)} z_{\tau\sigma(1)} u_{\pi(2)} z_{\tau\sigma(2)} u_{\pi(3)} \cdots u_{\pi(m)} z_{\tau\sigma(m)} u_{\pi(m+1)})^* \\ &= (-1)^\tau (\pi, \tau) (-1)^\sigma M = (-1)^\tau (\pi, \tau) M^*, \end{aligned}$$

onde  $u_{\pi(i)}$  é a ação de  $\pi$  nas variáveis  $y_j$ 's de  $u_i$ ,  $i = \{1, \dots, m+1\}$ . Além disso, identificando  $\tau \in S_m$  com  $(Id_{S_n}, \tau) \in S_n \times S_m$ , temos  $(\tau M)^* = ((Id_{S_n}, \tau)M)^* = (-1)^\tau (Id_{S_n}, \tau)M^* = (-1)^\tau \tau M^*$ .

**Observação 3.3** *Se  $a$  é um monômio ordenado nas suas variáveis  $\{z_{i_1}, \dots, z_{i_r}\}$ , então não é difícil ver que  $a^* = a$ . Assim, dados dois monômios  $a$  e  $b$  ordenados nos conjuntos disjuntos  $\{z_{i_1}, \dots, z_{i_r}\}$ ,  $\{z_{j_1}, \dots, z_{j_s}\}$ , temos  $(ab)^* = (-1)^\sigma (ab) = (-1)^\sigma a^* b^*$ ,*

onde  $\sigma$  é a permutação  $\binom{t_1 \cdots t_r \ t_{r+1} \cdots t_{r+s}}{i_1 \cdots i_r \ j_1 \cdots j_s}$ , e  $t_1, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_{r+s}$  são os inteiros  $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$  em ordem crescente.

Agora, se  $a'$  e  $b'$  são monômios não ordenados nas variáveis  $z'_j$ s, podemos tomar  $a$  e  $b$  monômios ordenados, como no caso anterior, e  $\gamma, \beta \in S_m$ , tais que  $a' = \beta a$  e  $b' = \gamma b$ . Assim

$$\begin{aligned} (a'b')^* &= ((\beta\gamma)ab)^* = (-1)^{\beta\gamma} \beta\gamma(ab)^* = (-1)^{\beta\gamma} (-1)^\sigma \beta\gamma a^* b^* \\ &= (-1)^\sigma (-1)^\beta \beta a^* (-1)^\gamma \gamma b^* = (-1)^\sigma (a')^* (b')^*, \end{aligned}$$

onde  $\sigma$  é a permutação do caso anterior para  $a$  e  $b$ . Analogamente, para monômios  $a, b$  e  $c$  ordenados ou não nos conjuntos disjuntos  $\{z_{i_1}, \dots, z_{i_r}\}$ ,  $\{z_{j_1}, \dots, z_{j_s}\}$  e  $\{z_{v_1}, \dots, z_{v_u}\}$ , temos  $(abc)^* = (-1)^\sigma a^* b^* c^*$ , para alguma permutação  $\sigma$  da forma

$$\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_r & t_{r+1} & \cdots & t_{r+s} & t_{r+s+1} & \cdots & t_{r+s+u} \\ i_1 & \cdots & i_r & j_1 & \cdots & j_s & v_1 & \cdots & v_u \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

**Lema 3.3.3** *Seja  $\Delta$  o  $S_n \times S_m$ -módulo de dimensão 1 associado à representação  $\psi$  de  $S_n \times S_m$  dada por  $(\sigma, \tau) \mapsto (-1)^\tau$  (tensorial da representação trivial de  $S_n$  com a representação sinal de  $S_m$ ). Dado um  $S_n \times S_m$ -submódulo  $N$  de  $P_{n,m}$ , seja  $\varphi$  a representação associada a esse módulo. Temos*

- i)  $N^*$  é um  $S_n \times S_m$ -submódulo de  $P_{n,m}$ ;
- ii)  $N^* \simeq N \otimes \Delta$  como  $S_n \times S_m$ -módulos, onde  $N \otimes \Delta$  é o módulo correspondente à representação  $\rho = \varphi \otimes \psi$  de  $S_n \times S_m$ .

**Demonstração:** i) Dados  $(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m$ ,  $M_1^*$  e  $M_2^*$  monômios em  $N^*$  e  $\lambda \in F$ , temos

$$M_1^* + M_2^* = (M_1 + M_2)^* \quad e \quad \lambda M_1^* = (\lambda M_1)^*$$

e daí  $N^*$  é subespaço de  $P_{n,m}$ . Além disso

$$(-1)^\tau (\sigma, \tau) M_1^* = ((\sigma, \tau) M_1)^* \in N^*$$

e daí, sendo  $N^*$  subespaço, temos  $(\sigma, \tau) M_1^* \in N^*$ . Como  $*$  é linear, o mesmo vale para qualquer polinômio em  $N^*$ , e o resultado segue.

ii) Seja  $\Delta = \langle d \rangle$  e tome a transformação linear

$$\begin{aligned} T: N \otimes \Delta &\longrightarrow N^* \\ f \otimes \lambda d &\longmapsto \lambda f^*. \end{aligned}$$

Observe que dado  $M$  um monômio em  $N$ , temos  $T(M \otimes d) = M^*$ . Logo  $T$  leva base em base, e portanto é isomorfismo de espaços vetoriais. Além disso,

$$\begin{aligned} T((\sigma, \tau)(M \otimes d)) &= T(\rho_{(\sigma, \tau)}(M \otimes d)) = T(\varphi_{(\sigma, \tau)}(M) \otimes \psi_{(\sigma, \tau)}(d)) \\ &= T((\sigma, \tau)M \otimes (\sigma, \tau)d) = T((\sigma, \tau)M \otimes (-1)^\tau d) \\ &= (-1)^\tau ((\sigma, \tau)M)^* = (-1)^\tau (-1)^\tau (\sigma, \tau)M^* \\ &= (\sigma, \tau)M^* = (\sigma, \tau)T(M \otimes d), \end{aligned}$$

onde  $(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m$ . Assim, pelas propriedades de produto tensorial e linearidade de  $T$ , temos que

$$T((\sigma, \tau)(f \otimes \lambda d)) = (\sigma, \tau)T(f \otimes \lambda d),$$

para todo  $(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m$  e todo  $(f \otimes \lambda d) \in N \otimes \Delta$ . Portanto  $T$  é isomorfismo de  $S_n \times S_m$ -módulos.  $\blacksquare$

**Observação 3.4** *Sejam  $\lambda, (n) \vdash n$  e  $\mu, 1^m \vdash m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , e tome os  $S_n \times S_m$ -caracteres  $\chi_{\lambda, \mu} = [\lambda] \otimes [\mu]$  e  $\chi_{(n), 1^m} = [(n)] \otimes [1^m]$  obtidos de tensoriais de representações dos grupos  $S_n$  e  $S_m$ . Considere  $\chi = \chi_{\lambda, \mu} \otimes \chi_{(n), 1^m}$  o  $S_n \times S_m$ -caracter obtido do tensorial das representações de  $S_n \times S_m$  associadas a  $\chi_{\lambda, \mu}$  e  $\chi_{(n), 1^m}$ . Dado  $(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m$  temos*

$$\begin{aligned} \chi(\sigma, \tau) &= \chi_{\lambda, \mu}(\sigma, \tau) \chi_{(n), 1^m}(\sigma, \tau) = \chi_\lambda(\sigma) \chi_\mu(\tau) \chi_{(n)}(\sigma) \chi_{1^m}(\tau) \\ &= \chi_\lambda(\sigma) \chi_{(n)}(\sigma) \chi_\mu(\tau) \chi_{1^m}(\tau) \\ &= \chi_{\lambda, (n)}(\sigma) \chi_{\mu, 1^m}(\tau) = (\chi_{\lambda, (n)} \otimes \chi_{\mu, 1^m})(\sigma, \tau), \end{aligned}$$

onde  $\chi_{\lambda, (n)}$  é o  $S_n$ -caracter do tensor das  $S_n$ -representações associadas as partições  $\lambda, (n) \vdash n$ , e  $\chi_{\mu, 1^m}$  é o  $S_m$ -caracter do tensor das  $S_m$ -representações associadas as partições  $\mu, 1^m \vdash m$ . Assim, temos  $\chi = \chi_{\lambda, (n)} \otimes \chi_{\mu, 1^m}$ , ou seja,

$$([\lambda] \otimes [\mu]) \otimes ([(n)] \otimes [1^m]) = ([\lambda] \otimes [(n)]) \otimes ([\mu] \otimes [1^m]).$$

**Lema 3.3.4** *Sejam  $A = A_0 \oplus A_1$  uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada e  $B = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$  o produto tensorial graduado de  $A$  por  $E$ . Se  $\chi_{n, m}(A) = \sum m_{\lambda, \mu} [\lambda] \otimes [\mu]$ , então  $\chi_{n, m}(B) = \sum m_{\lambda, \mu} [\lambda] \otimes [\mu']$ , onde  $\mu'$  é a partição conjugada de  $\mu$ .*

**Demonstração:** Sejam  $I = T_2(A)$  e  $J = T_2(B)$ . Pelo Teorema 1.2.13, decompos  $P_{n, m} = I_{n, m} \oplus N$ , onde  $N$  é algum submódulo de  $P_{n, m}$ . Pela definição e linearidade de  $*$ , temos que  $P_{n, m} = P_{n, m}^*$  e  $P_{n, m} = P_{n, m}^* = I_{n, m}^* \oplus N^*$ , e daí, pela Proposição 3.3.2, temos

$$I_{n, m}^* = (I \cap P_{n, m})^* = I^* \cap P_{n, m} = J \cap P_{n, m} = J_{n, m}.$$

Assim

$$P_{n,m}/J_{n,m} = (I_{n,m}^* \oplus N^*)/I_{n,m}^* \simeq N^*,$$

donde  $\chi_{n,m}(B) = \chi_{n,m}(N^*)$ . Além disso, temos que

$$P_{n,m}/I_{n,m} = (I_{n,m} \oplus N)/I_{n,m} \simeq N,$$

e daí  $\chi_{n,m}(A) = \chi_{n,m}(N)$ . Logo, pelo Lema 3.3.3, Observação 3.4 e Proposição 1.3.9, temos

$$\begin{aligned} \chi_{n,m}(B) &= \chi_{n,m}(N^*) = \chi_{n,m}(N \otimes \Delta) = \chi_{n,m}(N) \otimes \chi_{n,m}(\Delta) \\ &= \left( \sum m_{\lambda,\mu} [\lambda] \otimes [\mu] \right) \otimes ([n] \otimes [1^m]) \\ &= \sum m_{\lambda,\mu} ([\lambda] \otimes [n]) \otimes ([\mu] \otimes [1^m]) \\ &= \sum m_{\lambda,\mu} [\lambda] \otimes [\mu'], \end{aligned}$$

onde  $\Delta$  é o  $S_n \times S_m$ -módulo de dimensão 1 associado à representação  $(\sigma, \tau) \mapsto (-1)^\tau$ , e  $\mu'$  é a partição conjugada de  $\mu$ . ■

**Teorema 3.3.5** *Seja  $J = T_2(M_{1,1}(E))$ , então*

i)  $J$  é gerado por

$$y_1 y_2 - y_2 y_1, \tag{3.9}$$

$$z_1 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_1. \tag{3.10}$$

ii)  $c_{n,0}(J) = 1$  e  $c_{n,m}(J) = 2^n \binom{m}{m/2}$ , para  $n \geq 0$  e  $m > 0$ ;

iii) 
$$\chi_{n,0}(J) = \overbrace{\boxed{\quad \dots \quad}}^n$$

e, para  $m > 0$ ,

$$\chi_{n,m}(J) = \sum_{r=0}^{n/2} \sum_{s=0}^{m/2} (n+1-2r) \overbrace{\boxed{\quad \quad \quad}}^{n-r} \otimes \overbrace{\boxed{\quad \quad \quad}}^r \otimes \overbrace{\boxed{\quad \quad \quad}}^{m-s} \otimes \overbrace{\boxed{\quad \quad \quad}}^s .$$

**Demonstração:** Seja  $A = M_2(F)$  com graduação como em (3.2) e  $I = T_2(A)$ . Considere a álgebra  $M_{1,1}(E)$  com sua  $\mathbb{Z}_2$ -graduação obtida no Exemplo 1.7.5, dada por

$$M_{1,1}(E)_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in E_0 \right\} \quad e \quad M_{1,1}(E)_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; b, c \in E_1 \right\}.$$

Pelo Exemplo 1.1.20, temos  $A_0 \otimes E_0 \simeq M_{1,1}(E)_{\bar{0}}$  e  $A_1 \otimes E_1 \simeq M_{1,1}(E)_{\bar{1}}$ , e daí  $M_{1,1}(E) \simeq B = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$ . Assim, basta mostrarmos (i),(ii) e (iii) para o produto tensorial graduado de  $A$  por  $E$ . Pelos Lemas 3.2.5 e 3.3.4, temos (iii) e daí  $c_{n,0}(J) = 1$ , pois o módulo associado ao caracter trivial tem dimensão 1. Observe que diagramas conjugados possuem o mesmo número de tabelas standard, e daí as dimensões dos módulos irredutíveis associados a diagramas conjugados são iguais. Assim, como  $\chi_{n,m}(A)$  e  $\chi_{n,m}(B)$  possuem os mesmos número de termos, a menos de conjugação de diagramas, os módulos  $P_{n,m}/I_{n,m}$  e  $P_{n,m}/J_{n,m}$  decompõem-se em soma do mesmo número de módulos irredutíveis, os quais possuem as mesmas dimensões. Logo  $c_{n,m}(J) = c_{n,m}(I) = 2^n \binom{m}{m/2}$ , para  $m > 0$ , e temos (ii).

Agora, pela Proposição 3.3.2 segue que  $J = I^*$ , onde  $I^*$  é o  $T_2$ -ideal gerado pelos polinômios multilineares  $f^*$ , com  $f \in I$ . Pelo Lema 3.2.2,  $I$  é gerado por  $y_1y_2 - y_2y_1$  e  $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ . Assim dado  $f \in I$ , temos que  $f$  é combinação linear de elementos do tipo

$$a_0(a_1a_2 - a_2a_1)a_3 \quad e \quad b_0(b_1b_2b_3 - b_3b_2b_1)b_4,$$

onde  $a_i$  e  $b_j$  são monômios multilineares em  $F\langle X \rangle$ , com  $a_i \in \mathcal{F}_0$ ,  $b_j \in \mathcal{F}_1$ , para  $i = 1, 2$  e  $j = 1, 2, 3$ , ou seja,  $a_1$  e  $a_2$  possuem um número par de variáveis  $z'_j$ s e  $b_1, b_2$  e  $b_3$  possuem um número ímpar de variáveis  $z'_j$ s.

Pela Observação 3.3, dados monômios  $a, b$  e  $c$  em  $F\langle X \rangle$ , lineares nos conjuntos disjuntos ordenados  $\{z_{i_1}, \dots, z_{i_r}\}$ ,  $\{z_{j_1}, \dots, z_{j_s}\}$  e  $\{z_{v_1}, \dots, z_{v_u}\}$ , temos que  $(ab)^* = (-1)^\sigma a^*b^*$ , para alguma permutação  $\sigma$  do tipo  $\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_{r+s} \\ i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}$ , e  $(abc)^* = (-1)^\tau a^*b^*c^*$ , para alguma permutação  $\tau$  como em (3.8).

Observe que se  $r$  e  $s$  são pares, então as permutações

$$\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_{r+s} \\ i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_s & t_{s+1} & \dots & t_{r+s} \\ j_1 & \dots & j_s & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}$$

têm o mesmo sinal, pois a segunda permutação é a primeira permutação composta com um número par de transposições. Analogamente, se  $r, s$  e  $u$  são ímpares, então as

permutações

$$\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_r & t_{r+1} & \cdots & t_{r+s} & t_{r+s+1} & \cdots & t_{r+s+u} \\ i_1 & \cdots & i_r & v_1 & \cdots & v_s & j_1 & \cdots & j_u \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_u & t_{u+1} & \cdots & t_{u+s} & t_{u+s+1} & \cdots & t_{u+s+r} \\ j_1 & \cdots & j_u & v_1 & \cdots & v_s & i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$$

têm sinais opostos.

Assim

$$(a_1 a_2)^* = (-1)^\sigma a_1^* a_2^* \quad e \quad (a_2 a_1)^* = (-1)^\tau a_2^* a_1^*,$$

com  $(-1)^\sigma = (-1)^\tau$ , e

$$(b_1 b_2 b_3)^* = (-1)^\pi b_1^* b_2^* b_3^* \quad e \quad (b_3 b_2 b_1)^* = (-1)^\gamma b_3^* b_2^* b_1^*$$

com  $(-1)^\pi = -(-1)^\gamma$ . Logo

$$\begin{aligned} (a_0(a_1 a_2 - a_2 a_1)a_3)^* &= (a_0(a_1 a_2)a_3)^* - (a_0(a_2 a_1)a_3)^* \\ &= \pm((a_0^*(a_1^* a_2^*)a_3^*) - (a_0^*(a_2^* a_1^*)a_3^*)) = \pm(a_0^*(a_1^* a_2^* - a_2^* a_1^*)a_3^*) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (b_0(b_1 b_2 b_3 - b_3 b_2 b_1)b_4)^* &= (b_0(b_1 b_2 b_3)b_4)^* - (b_0(b_3 b_2 b_1)b_4)^* \\ &= \pm(b_0^*(b_1^* b_2^* b_3^*)b_4^* + b_0^*(b_3^* b_2^* b_1^*)b_4^*) = \pm(b_0^*(b_1^* b_2^* b_3^* + b_3^* b_2^* b_1^*)b_4^*). \end{aligned}$$

Finalmente, como  $*$  é linear, dado  $f^* \in I^*$ , segue que  $f^*$  pertence ao  $T_2$ -ideal gerado pelos polinômios  $y_1 y_2 - y_2 y_1$  e  $z_1 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_1$ , e temos  $J = I^*$  contido no ideal gerado por esses elementos. Por outro lado, esses polinômios são identidades graduadas de  $M_{1,1}(E)$  (ver Exemplo 1.7.18), donde temos (i). ■

Como consequência do último teorema, podemos estabelecer a PI-equivalência entre  $M_{1,1}(E)$  e  $E \otimes E$ .

**Teorema 3.3.6** *As álgebras  $M_{1,1}(E)$  e  $E \otimes E$  são PI-equivalentes.*

**Demonstração:** Sejam  $P = T(M_{1,1}(E))$  e  $Q = T(E \otimes E)$ . Por [22], temos que  $Q$  é gerado pelo conjunto  $\{[x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5], [[x_1, x_2]^2, x_2]\}$ . Como esses polinômios são identidades de  $M_{1,1}(E)$  (veja Exemplo 1.7.20), segue que  $Q \subseteq P$ .

Para a inclusão contrária, considere a  $\mathbb{Z}_2$ -gradação da álgebra  $E \otimes E = A_0 \oplus A_1$ , do Exemplo 1.7.10, dada por

$$A_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \quad e \quad A_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0).$$

Com esta graduação, temos que os polinômios (3.9) e (3.10) são identidades graduadas de  $E \otimes E$  (ver exemplo 1.7.19), e daí, pelo resultado anterior, segue que  $T_2(M_{1,1}(E)) \subseteq T_2(E \otimes E)$ . Logo, pela Proposição 1.7.15, temos  $P \subseteq Q$  e, da dupla inclusão, o resultado segue. ■

# Capítulo 4

## Identidades Graduadas de $M_{p,q}(E)$

Este capítulo tem como objetivo estabelecer a PI-equivalência entre as álgebras  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$  e  $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ ,  $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ , com base nos resultados de Di Vincenzo e Nardoza em [8]. Para isso, usando as graduações já obtidas para estas álgebras, veremos que os ideais das suas identidades graduadas coincidem. Além disso, vamos definir o que seriam identidades monomiais triviais em uma álgebra graduada e veremos quatro tipos de álgebras matriciais que não possuem identidades monomiais não triviais. Por fim, vamos estabelecer o conceito de graduações quase elementares não isomorfas de  $M_{p,q}(E)$  e calcular o número total dessas graduações, com base nos valores de  $p, q \in \mathbb{N}$ .

Dados  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $n = p + q$ , vamos considerar as álgebras  $M_n(E)$  e  $M_{p,q}(E)$  com suas  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduações quase elementares induzidas por uma permutação  $\mu \in S_n$ , denotadas por  $(M_n(E), \mu)$  e  $(M_{p,q}(E), \mu)$ ,  $\eta$  a aplicação em 1.7 e  $\mathcal{B}_p = \{aE_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, a \in \mathcal{E}_{\eta(i)+\eta(j)}\}$  a base multiplicativa usual de  $M_{p,q}(E)$ . O grau homogêneo de um elemento na base  $\Lambda$  de  $M_n(E)$  ou em  $\mathcal{B}_p$  é dado por  $|aE_{ij}|^\mu = (|E_{ij}|_\mu, |a|_2)$  (veja Exemplo 1.7.6).

Em todo o capítulo,  $F$  será um corpo de característica zero e  $G$  um grupo abeliano escrito aditivamente. Para  $n \in \mathbb{N}$  sejam

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$$

e  $\iota$  a permutação identidade em  $S_n$ .



## 4.1 A álgebra $M_\alpha(E)$

Nesta seção veremos que para qualquer permutação  $\mu \in S_n$  a graduação induzida por  $\mu$  em  $M_n(E)$  é a mesma, a menos de isomorfismo graduado, porém o mesmo não vale para a álgebra  $M_{p,q}(E) \subseteq M_n(E)$ . Assim, poderemos considerar apenas  $(M_n(E), \iota)$  e vamos definir a subálgebra  $M_\alpha(E)$  de  $(M_n(E), \iota)$  que será de fundamental importância para as próximas seções, pelo isomorfismo graduado que obteremos entre esta álgebra e  $M_{p,q}(E)$ .

**Observação 4.1** Dadas  $\mu, \sigma \in S_n$ , considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T : (M_n(E), \mu) &\longrightarrow (M_n(E), \sigma) \\ aE_{ij} &\longmapsto T(aE_{ij}) = aE_{\sigma^{-1}\mu(i), \sigma^{-1}\mu(j)} \end{aligned}$$

onde  $i, j \in [n]$ ,  $a \in \mathcal{E}$ . Temos que  $T$  leva base em base, donde é um isomorfismo de espaços vetoriais, e vemos facilmente que  $T$  preserva produto. Portanto,  $T$  é um isomorfismo de álgebras. Além disso, para  $i, j \in [n]$ , temos

$$\begin{aligned} |T(aE_{ij})|^\sigma &= |aE_{\sigma^{-1}\mu(i), \sigma^{-1}\mu(j)}|^\sigma = (|E_{\sigma^{-1}\mu(i), \sigma^{-1}\mu(j)}|_\sigma, |a|_2) \\ &= (\overline{\sigma\sigma^{-1}\mu(j)} - \overline{\sigma\sigma^{-1}\mu(i)}, |a|_2) \\ &= (\overline{\mu(j)} - \overline{\mu(i)}, |a|_2) = |aE_{ij}|^\mu \end{aligned}$$

e daí  $T$  é um isomorfismo  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduado. Assim  $(M_n(E), \mu) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} (M_n(E), \sigma)$ , para quaisquer  $\mu, \sigma \in S_n$ . Afirmamos que o mesmo não é válido para a subálgebra  $M_{p,q}(E)$  de  $M_n(E)$ . De fato, considere  $n = 4$ ,  $p = q = 2$  e  $\sigma = (2\ 3) \in S_4$ , e sejam

$$(M_{2,2}(E), \sigma) = R = \bigoplus_{(t,\delta) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2} R_{(t,\delta)},$$

$$(M_{2,2}(E), \iota) = M = \bigoplus_{(t,\delta) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2} M_{(t,\delta)},$$

as  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ -graduações em  $M_{2,2}(E)$  induzidas por  $\iota$  e  $\sigma$ . Suponha que  $R_{(1,0)} \neq \{0\}$ . Então existem  $a \in \mathcal{E}_0$  e  $i, j \in [4]$  tais que  $aE_{ij} \in \mathcal{B}_2 \cap R_{(1,0)}$ , e daí  $0 = |a|_2 = \eta(i) + \eta(j)$  ( $\eta(i) = \eta(j)$ ) e  $\overline{\sigma(j)} - \overline{\sigma(i)} = \bar{1}$ . Assim, se  $i = 1$ , temos

$$i = 1 \Rightarrow \overline{\sigma(j)} - \overline{\sigma(1)} = \bar{1} \Rightarrow \overline{\sigma(j)} - \bar{1} = \bar{1} \Rightarrow \sigma(j) = 2 \Rightarrow j = 3,$$

donde

$$0 = \eta(1) = \eta(i) = \eta(j) = \eta(3) = 1,$$

uma contradição. Analogamente para  $i = 2, 3$  e  $4$  obtemos a mesma contradição. Logo  $R_{(1,0)} = \{0\}$ . Agora note que dado qualquer  $a \in \mathcal{E}_{\eta(1)+\eta(2)} = \mathcal{E}_0$ , temos  $aE_{12} \in \mathcal{B}_2 \cap M_{(1,0)}$ , e daí o espaço  $M_{(1,0)}$  possui dimensão infinita.

Desta forma, se  $\psi : (M_{2,2}(E), \sigma) \rightarrow (M_{2,2}(E), \iota)$  é um isomorfismo  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ -graduado, então  $\psi(R_{(1,0)}) = M_{(1,0)}$ , uma contradição, pois  $R_{(1,0)} = \{0\}$  e  $\dim(M_{(1,0)}) = \infty$ , e a afirmação segue.

Pela forma do grau em  $\mathbb{Z}_n$ , vamos considerar apenas a álgebra  $(M_n(E), \iota)$ , pois  $(M_n(E), \sigma) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} (M_n(E), \iota)$ , para qualquer  $\sigma \in S_n$ . Além disso, esse isomorfismo não necessariamente é válido para a subálgebra  $M_{p,q}(E)$  de  $(M_n(E), \iota)$ , ou seja, dada  $\mu \in S_n$ , nem sempre temos um isomorfismo graduado entre  $(M_{p,q}(E), \mu)$  e  $(M_{p,q}(E), \iota)$ . Nesse sentido, considere a transformação linear

$$\begin{aligned} \varphi_\mu : (M_{p,q}(E), \mu) &\longrightarrow (M_n(E), \iota) \\ aE_{ij} &\longmapsto \varphi_\mu(aE_{ij}) = aE_{\mu(i), \mu(j)} \end{aligned}$$

Vemos facilmente que  $\varphi_\mu$  é um homomorfismo de álgebras e é injetivo, pois leva  $\mathcal{B}_p$  em um conjunto linearmente independente. Além disso,

$$|aE_{\mu(i), \mu(j)}|^\iota = (\overline{\iota\mu(j)} - \overline{\iota\mu(i)}, |a|_2) = (\overline{\mu(j)} - \overline{\mu(i)}, |a|_2) = |aE_{ij}|^\mu,$$

e portanto  $\varphi_\mu$  é um homomorfismo injetivo  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduado, ou seja, obtemos a subálgebra  $\varphi_\mu(M_{p,q}(E))$  de  $(M_n(E), \iota)$  que é isomorfa (isomorfismo  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduado) a  $(M_{p,q}(E), \mu)$  e possui graduação induzida por  $\iota$ . Os elementos de  $\varphi_\mu(\mathcal{B}_p)$  constituem uma base  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -multiplicativa para  $\varphi_\mu(M_{p,q}(E))$ .

**Observação 4.2** Considere a subálgebra  $\varphi_\mu(M_{p,q}(E))$  de  $(M_n(E), \iota)$ , para algum  $\mu \in S_n$ . Sejam  $P_\mu = \{\mu(1), \dots, \mu(p)\} \subseteq [n]$  e  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  dada por

$$\alpha(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \in P_\mu \\ 1, & \text{se } i \notin P_\mu \end{cases}.$$

Defina  $M_\alpha(E)$  como sendo o  $F$ -espaço vetorial com base  $\Gamma_\alpha = \{aE_{ij} : a \in \mathcal{E}_{\alpha(i)+\alpha(j)}\}$ . Note que  $\alpha(\mu(i)) = \eta(i)$ , para todo  $i \in [n]$ . Assim, dado  $aE_{ij} \in \mathcal{B}_p$ , temos que

$$a \in \mathcal{E}_{\eta(i)+\eta(j)} = \mathcal{E}_{\alpha(\mu(i))+\alpha(\mu(j))} = \mathcal{E}_{\alpha(k)+\alpha(l)},$$

onde  $k = \mu(i)$  e  $l = \mu(j)$ , e daí

$$\varphi_\mu(aE_{ij}) = aE_{\mu(i), \mu(j)} = aE_{kl} \in \Gamma_\alpha.$$

Logo  $\varphi_\mu(\mathcal{B}_p) \subseteq \Gamma_\alpha$ . De modo semelhante obtemos a inclusão contrária. Portanto  $\varphi_\mu(M_{p,q}(E)) = M_\alpha(E)$ .

Reciprocamente, considere uma aplicação  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  onde o número de elementos  $i \in [n]$  tais que  $\alpha(i) = 0$  (ou  $\alpha(i) = 1$ ) é igual a  $p$ . Sejam  $i_1, \dots, i_p$  esses elementos e  $\{j_1, \dots, j_q\} = [n] \setminus \{i_1, \dots, i_p\}$ . Assim, considerando a permutação

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \end{pmatrix} \in S_n,$$

temos que  $\alpha(\mu(i)) = \eta(i)$ , para o caso  $\alpha(i) = 0$ , e  $\alpha(\mu(i)) = \eta(i) + 1$ , para o caso  $\alpha(i) = 1$ , para todo  $i \in [n]$ , e daí em ambos os casos, com um argumento análogo ao do início da observação, segue que  $(M_{p,q}(E), \mu) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_\alpha(E)$ .

Desta forma estudar a álgebra  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduada  $(M_{p,q}(E), \mu)$  é equivalente a estudar a subálgebra  $M_\alpha(E)$  de  $(M_n(E), \iota)$ .

De forma similar ao caso da álgebra  $M_{p,q}(E)$  na observação anterior, considerando a  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -gradação para o produto tensorial de  $M_{p,q}(E)$  por  $M_{r,s}(E)$  do Exemplo 1.7.7, obtemos que  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E) \simeq_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2} M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ , para determinadas aplicações  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  e  $\beta : [m] \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ,  $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ , com  $n = p + q$  e  $m = r + s$ . Combinando as bases  $\Gamma_\alpha$  e  $\Gamma_\beta$  obtemos a base multiplicativa  $\mathcal{B} = \{aE_{ij} \otimes bE_{uv} : aE_{ij} \in \Gamma_\alpha, bE_{uv} \in \Gamma_\beta\}$  de  $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ . O grau homogêneo de elementos em  $\mathcal{B}$  é dado por

$$|aE_{ij} \otimes bE_{uv}| = (\overline{m(j-i)} + \overline{(v-u)}, |a|_2 + |b|_2) \in \mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2,$$

e para a álgebra  $M_\alpha(E)$  por

$$|aE_{ij}|_{\iota, \alpha} = (\overline{j-i}, |a|_2) = (\overline{j-i}, \alpha(i) + \alpha(j)) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2,$$

pela forma do grau homogêneo nas álgebras  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$  e  $M_{p,q}(E)$  e pela Observação 4.2.

## 4.2 Identidades $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas de $M_{p,q}(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$

Nesta seção vamos encontrar geradores para os ideais das identidades graduadas de  $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$  e  $M_\alpha(E)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são aplicações como na Observação 4.2. Com isso, será possível estabelecer a PI-equivalência entre as álgebras  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$  e  $M_{pr+qs, ps+qr}(E)$ , onde  $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ .

No que segue nesta seção seja

$$A = M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E) = \bigoplus_{(t,\delta) \in \mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2} A_{(t,\delta)},$$

com sua  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -gradação obtida anteriormente via isomorfismos graduados e a base  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -multiplicativa

$$\mathcal{B} = \{aE_{ij} \otimes bE_{uv} : i, j \in [n], u, v \in [m], a \in \mathcal{E}_{\alpha(i)+\alpha(j)}, b \in \mathcal{E}_{\beta(u)+\beta(v)}\}.$$

Denote o  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -grau homogêneo para um elemento de  $A$  por  $|\cdot|$  e o seu  $\mathbb{Z}_{nm}$ -grau homogêneo por  $|\cdot|_{nm}$ .

**Observação 4.3** Dados  $i, j \in [n]$ ,  $u, v \in [m]$  com

$$m(j - i) = u - v, \tag{4.1}$$

então  $i = j$  e  $u = v$ . De fato, se  $i \neq j$ , então  $m(j - i) \geq m$  ou  $m(j - i) \leq -m$  e, em qualquer um dos casos, (4.1) não é verdadeira, pois  $-m < u - v < m$ . Assim,  $i = j$ , donde  $u = v$ , por (4.1).

**Observação 4.4** Dados  $i, j \in [n]$ ,  $u, v \in [m]$  e  $a, b \in \mathcal{E}$ , temos que  $|aE_{ij} \otimes bE_{uv}|_{nm} = 0$  se, e somente se,  $i = j$  e  $u = v$ . De fato, suponha que  $m(j - i) + (v - u) = \bar{0}$ . Temos que  $-nm < m(j - i) + (v - u) < nm$ , pois  $1 - n \leq j - i \leq n - 1$  e  $-m < v - u < m$ , daí

$$\overline{m(j - i) + (v - u)} = \bar{0} \Leftrightarrow m(j - i) - (u - v) = 0 \Leftrightarrow m(j - i) = u - v.$$

Então  $i = j$  e  $u = v$ , pela Observação 4.3. A implicação contrária é óbvia.

Assim, dados  $i \in [n]$  e  $u \in [m]$  temos que  $|aE_{ii} \otimes bE_{uu}|_{nm} = 0$ , com  $a \in \mathcal{E}_{\alpha(i)+\alpha(i)} = \mathcal{E}_0$  e  $b \in \mathcal{E}_{\beta(u)+\beta(u)} = \mathcal{E}_0$ , donde  $|aE_{ii} \otimes bE_{uu}| = (0, 0)$ . Se  $A_{(0,1)} \neq \{0\}$ , existem  $i, j \in [n]$ ,  $u, v \in [m]$  e  $a, b \in \mathcal{E}$  tais que  $x = aE_{ij} \otimes bE_{uv} \in A_{(0,1)}$ , ou seja,  $|x|_{nm} = 0$  e  $|a|_2 + |b|_2 = 1$ , e daí, pelo que foi feito anteriormente,  $i = j$  e  $u = v$ , donde  $|a|_2 + |b|_2 = 0$ , uma contradição. Então  $A_{(0,1)} = \{0\}$ . Assim, todo monômio em  $F\langle X | \mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2 \rangle$  com grau homogêneo  $(0, 1)$  é uma identidade para  $A$ .

Seja  $\mathcal{N}$  o conjunto dos polinômios multilineares graduados

$$x_1x_2 - x_2x_1, \quad |x_1| = |x_2| = (0, 0) \in \mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2, \tag{4.2}$$

$$x_1xx_2 - x_2xx_1, \quad |x_1| = |x_2| = -|x| = (t, 0) \in \mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2, \tag{4.3}$$

$$x_1xx_2 + x_2xx_1, \quad |x_1| = |x_2| = -|x| = (t, 1) \in \mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2. \tag{4.4}$$

**Lema 4.2.1** Os polinômios em  $\mathcal{N}$  são identidades graduadas de  $A$ , ou seja,  $\mathcal{N} \subseteq T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(A)$ .

**Demonstração:** O polinômio (4.2) é uma identidade para  $A$ , pois os elementos na componente  $(0, 0)$  são matrizes diagonais com entradas em  $E_0 = Z(E)$ , as quais comutam. Como os polinômios em  $\mathcal{N}$  são multilineares, basta substituir por elementos de  $\mathcal{B}$ . Assim, seja

$$w_h = a_h E_{i_h j_h} \otimes b_h E_{u_h v_h} \in \mathcal{B}, \quad h = 1, 2, 3,$$

com  $|w_1| = |w_3| = -|w_2|$ . Se  $w_1 w_2 w_3 \neq 0$ , então

$$0 \neq w_1 w_2 = a_1 a_2 E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \otimes b_1 b_2 E_{u_1 v_1} E_{u_2 v_2},$$

donde  $j_1 = i_2$ ,  $v_1 = u_2$  e  $w_1 w_2 = a_1 a_2 E_{i_1 j_2} \otimes b_1 b_2 E_{u_1 v_2}$ . Além disso, temos

$$\begin{aligned} |w_1| = -|w_2| &\Rightarrow \overline{m(j_1 - i_1) + (v_1 - u_1)} = -\overline{m(j_2 - i_2) + (v_2 - u_2)} \\ &\Rightarrow \overline{m(j_1 - i_1 + j_2 - i_2) + (v_1 - u_1 + v_2 - u_2)} = \bar{0} \\ &\Rightarrow \bar{0} = \overline{m(j_2 - i_1) + (v_2 - u_1)} = |w_1 w_2|_{nm}, \end{aligned}$$

daí, pela Observação 4.4, segue que  $i_1 = j_2$  e  $u_1 = v_2$ . Analogamente, usando que  $w_2 w_3 \neq 0$ , obtemos  $j_2 = i_3$ ,  $v_2 = u_3$ ,  $j_3 = i_2$  e  $v_3 = u_2$ , ou seja,  $w_3 w_2 w_1 \neq 0$ . Reciprocamente, supondo  $w_3 w_2 w_1 \neq 0$ , de forma semelhante ao argumento anterior, obtemos que  $w_1 w_2 w_3 \neq 0$ . Assim, por contra-positiva,  $w_1 w_2 w_3 = 0$  se, e somente se,  $w_3 w_2 w_1 = 0$ , donde (4.3) e (4.4) anulam-se no caso em que o produto dos  $w'_i s$  é nulo. Agora se  $w_1 w_2 w_3 \neq 0$ , sejam  $i = i_1$ ,  $j = j_1$ ,  $u = u_1$  e  $v = v_1$ . Pelo que foi feito, temos

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 E_{i_1 j_1} \otimes b_1 E_{u_1 v_1} = a_1 E_{ij} \otimes b_1 E_{uv}, \\ w_2 &= a_2 E_{i_2 j_2} \otimes b_2 E_{u_2 v_2} = a_2 E_{ji} \otimes b_2 E_{vu}, \\ w_3 &= a_3 E_{i_3 j_3} \otimes b_3 E_{u_3 v_3} = a_3 E_{ij} \otimes b_3 E_{uv}, \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned} w_1 w_2 w_3 &= a_1 a_2 a_3 E_{ij} \otimes b_1 b_2 b_3 E_{uv}, \\ w_3 w_2 w_1 &= a_3 a_2 a_1 E_{ij} \otimes b_3 b_2 b_1 E_{uv}. \end{aligned}$$

Em (4.3) temos  $|a_h|_2 = |b_h|_2$ ,  $h = 1, 2, 3$ , e daí se  $a_1 a_2 a_3 = -a_3 a_2 a_1$ , então  $b_1 b_2 b_3 = -b_3 b_2 b_1$ , e se  $a_1 a_2 a_3 = a_3 a_2 a_1$ , então  $b_1 b_2 b_3 = b_3 b_2 b_1$ , pelas propriedades dos elementos em  $\mathcal{E}_0$  e  $\mathcal{E}_1$ . Assim, temos  $w_1 w_2 w_3 = w_3 w_2 w_1$  e (4.3) se anula. Agora, em (4.4), temos  $|a_h|_2 = 1 + |b_h|_2$ ,  $h = 1, 2, 3$ , daí se  $a_1 a_2 a_3 = -a_3 a_2 a_1$ , então  $b_1 b_2 b_3 = b_3 b_2 b_1$ , e se

$a_1 a_2 a_3 = a_3 a_2 a_1$ , então  $b_1 b_2 b_3 = -b_3 b_2 b_1$ , donde  $w_1 w_2 w_3 = -w_3 w_2 w_1$  e (4.4) também se anula. Desta forma os polinômios em  $\mathcal{N}$  são identidades de  $A$ . ■

Vamos denotar por  $I$  o  $T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado pelo conjunto  $\mathcal{N}$  e, dado  $w$  um elemento homogêneo em uma álgebra  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -graduada, seja  $\delta(w) \in \mathbb{Z}_2$  a segunda componente do seu  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -grau.

**Lema 4.2.2** *Sejam  $f$  e  $f'$  monômios multilineares nas mesmas variáveis e  $S$  uma substituição standard na base  $\mathcal{B}$  tal que  $f'|_S = cf|_S \neq 0$ , para algum  $c \in F$ . Então  $f' \equiv cf \pmod{I}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $f = x_1 \cdots x_d$  e  $f' = f_\sigma = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d)}$ , onde  $\sigma \in S_d$ . Vamos aplicar indução em  $d$ . Se  $d = 1$  o resultado é válido, pois  $f = f'$ . Então suponha que  $d > 1$ . Se  $\sigma = Id_{S_d}$  temos  $f = f'$  e o resultado segue. Então suponha que  $\sigma(j) \neq j$ , para algum  $j \in \{1, \dots, d\}$ , digamos para  $j = 1$ , caso contrário, basta renomear as variáveis.

Seja

$$w_h = a_h E_{i_h j_h} \otimes b_h E_{u_h v_h} \in \mathcal{B}, \quad h = 1, \dots, d,$$

a substituição standard  $S$ . Como  $f'|_S = cf|_S \neq 0$ , segue que

$$\begin{aligned} j_{p-1} = i_p, \quad j_{\sigma(p-1)} = i_{\sigma(p)}, \quad v_{p-1} = u_p, \quad e \quad v_{\sigma(p-1)} = u_{\sigma(p)}, \quad p = 2, \dots, d, \\ i_1 = i_{\sigma(1)} \text{ e } u_1 = u_{\sigma(1)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Temos que  $\sigma(1) \neq (1)$ , donde  $\sigma^{-1}(1) > 1$ . Assim, tome

$$t = \min\{k' \leq d : \sigma^{-1}(k') < \sigma^{-1}(1)\}.$$

Note que  $t > 1$ , pois  $1 \notin \{k' \leq d : \sigma^{-1}(k') < \sigma^{-1}(1)\}$ ; e  $\sigma^{-1}(1) > \sigma^{-1}(t-1)$  contraria a minimalidade de  $t$ , donde  $\sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(t-1)$ . Sejam

$$l = \sigma^{-1}(t), \quad h = \sigma^{-1}(1) \quad e \quad k = \sigma^{-1}(t-1).$$

Suponha  $l = 1$ . Temos

$$\begin{aligned} |f_\sigma^{[1, h-1]}|_{nm} &= |w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(h-1)}|_{nm} = \overline{m(j_{\sigma(h-1)} - i_{\sigma(1)}) + (v_{\sigma(h-1)} - u_{\sigma(1)})}, \\ |f_\sigma^{[h, k]}|_{nm} &= |w_{\sigma(h)} \cdots w_{\sigma(k)}|_{nm} = \overline{m(j_{\sigma(k)} - i_{\sigma(h)}) + (v_{\sigma(k)} - u_{\sigma(h)})}, \end{aligned}$$

e, por (4.5), temos

$$\begin{aligned} j_{\sigma(h-1)} - i_{\sigma(1)} &= i_{\sigma(h)} - i_1 = i_1 - i_1 = 0, \\ v_{\sigma(h-1)} - u_{\sigma(1)} &= u_{\sigma(h)} - u_1 = u_1 - u_1 = 0, \\ j_{\sigma(k)} - i_{\sigma(h)} &= j_{t-1} - i_1 = i_t - i_1 = i_{\sigma(l)} - i_1 = i_{\sigma(1)} - i_1 = i_1 - i_1 = 0, \\ v_{\sigma(k)} - u_{\sigma(h)} &= v_{t-1} - u_1 = u_t - u_1 = u_{\sigma(l)} - u_1 = u_{\sigma(1)} - u_1 = u_1 - u_1 = 0, \end{aligned}$$

donde  $|f_{\sigma}^{[1,h-1]}|_{nm} = |f_{\sigma}^{[h,k]}|_{nm} = 0$ . Além disso,  $\delta(f_{\sigma}^{[1,h-1]}) = \delta(f_{\sigma}^{[h,k]}) = 0$ , pois, caso contrário, teríamos que esses monômios seriam identidades graduadas de  $A$  ( $A_{(0,1)} = \{0\}$ ), o que não ocorre, pois  $f_{\sigma}^{[1,h-1]}|_S \neq 0$  e  $f_{\sigma}^{[h,k]}|_S \neq 0$ . Assim,

$$|f_{\sigma}^{[1,h-1]}| = |f_{\sigma}^{[h,k]}| = (0, 0).$$

Como  $I$  contém (4.2), podemos comutar elementos de grau  $(0, 0)$  módulo  $I$ , e daí

$$f' = f_{\sigma}^{[1,h-1]} f_{\sigma}^{[h,k]} f_{\sigma}^{[k+1,d]} \equiv f_{\sigma}^{[h,k]} f_{\sigma}^{[1,h-1]} f_{\sigma}^{[k+1,d]} \pmod{I},$$

e  $f_{\sigma}^{[h,k]} = x_{\sigma(h)} \cdots x_{\sigma(k)} = x_1 x_{\sigma(h+1)} \cdots x_{\sigma(k)}$ , ou seja,

$$f' \equiv x_1 f''(x_2, \dots, x_d) \pmod{I},$$

onde  $f''(x_2, \dots, x_d) = x_{\sigma(h+1)} \cdots x_{\sigma(k)} f_{\sigma}^{[1,h-1]} f_{\sigma}^{[k+1,d]} \in \mathcal{M}$ .

Se  $l > 1$ , de forma semelhante ao argumento anterior e a demonstração do Lema 2.2.4, obtemos  $|f_{\sigma}^{[1,l-1]}|_{nm} = -|f_{\sigma}^{[l,h-1]}|_{nm} = |f_{\sigma}^{[h,k]}|_{nm}$  e, por (4.5), temos

$$\begin{aligned} \alpha(i_{\sigma(1)}) + \alpha(j_{\sigma(l-1)}) + \beta(u_{\sigma(1)}) + \beta(v_{\sigma(l-1)}) &= \alpha(j_{\sigma(h-1)}) + \alpha(i_{\sigma(l)}) + \beta(v_{\sigma(h-1)}) + \beta(u_{\sigma(l)}) \\ &= \alpha(i_{\sigma(h)}) + \alpha(j_{\sigma(k)}) + \beta(u_{\sigma(h)}) + \beta(v_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Logo  $\delta = \delta(f_{\sigma}^{[1,l-1]}) = \delta(f_{\sigma}^{[l,h-1]}) = \delta(f_{\sigma}^{[h,k]})$ . Assim, por (4.3) e (4.4),

$$f_{\sigma}^{[1,l-1]} f_{\sigma}^{[l,h-1]} f_{\sigma}^{[h,k]} \equiv \pm f_{\sigma}^{[h,k]} f_{\sigma}^{[l,h-1]} f_{\sigma}^{[1,l-1]} \pmod{I};$$

dependendo do valor de  $\delta$ . Portanto

$$f' = f_{\sigma}^{[1,l-1]} f_{\sigma}^{[l,h-1]} f_{\sigma}^{[h,k]} f_{\sigma}^{[k,d]} \equiv c' f_{\sigma}^{[h,k]} f_{\sigma}^{[l,h-1]} f_{\sigma}^{[1,l-1]} f_{\sigma}^{[k,d]} \pmod{I},$$

onde  $c' \in \{-1, 1\}$ , e  $f_{\sigma}^{[h,k]}$  inicia com  $x_1$ . Então, independente do valor de  $l$ ,

$$f' \equiv c' x_1 f''(x_2, \dots, x_d) \pmod{I},$$

onde  $f''(x_2, \dots, x_d) \in \mathcal{M}$ ,  $c' \in F$ , e daí

$$c'w_1f''(w_2, \dots, w_d) = f'|_S = cf|_S = cw_1w_2 \cdots w_d \neq 0.$$

Portanto  $w_1(c'f''(w_2, \dots, w_d) - cw_2 \cdots w_d) = 0$  e, como  $cf|_S \neq 0$ , segue que

$$c'f''(w_2, \dots, w_d) = cw_2 \cdots w_d \neq 0.$$

Assim, aplicando indução nos monômios  $f'' = f''(x_2, \dots, x_d)$  e  $x_2 \cdots x_d$ , segue que

$$f'' \equiv c''x_2 \cdots x_d \pmod{I}, \text{ onde } c'' = \frac{c}{c'},$$

e então

$$f' \equiv c'x_1f''(x_2, \dots, x_d) \equiv c' \frac{c}{c'}x_1x_2 \cdots x_d \equiv cf \pmod{I}.$$

■

**Teorema 4.2.3** *Seja  $G = \mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ . Então  $T_G(A)$  é o ideal gerado por  $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(A))$ , ou seja, pelos polinômios em  $\mathcal{N}$  juntamente com os monômios que são identidades graduadas de  $A$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema 4.2.1, os polinômios em  $\mathcal{N}$  são identidades de  $A$  e, por 4.2.2 as hipóteses da Proposição 1.7.17 são satisfeitas para  $A$  com sua  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -graduação e base homogênea e multiplicativa  $\mathcal{B}$ , donde temos o resultado. ■

Assim, pelos isomorfismos graduados já mencionados, obtemos os geradores do ideal das identidades  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas para a álgebra  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ , com  $p, q, r, s \in \mathbb{N}$  e  $n = p + q$ ,  $m = r + s$ .

**Teorema 4.2.4** *Sejam  $G = \mathbb{Z}_{p+q} \times \mathbb{Z}_2$  e  $\mathcal{N}'$  os mesmos polinômios graduados em  $\mathcal{N}$ , porém com graduação em  $G$ . Considere  $M_{p,q}(E)$  com sua  $G$ -graduação herdada de  $M_n(E)$ ,  $n = p + q \in \mathbb{N}$ . Então o ideal das identidades graduadas de  $M_{p,q}(E)$  é gerado por  $\mathcal{N}'$  juntamente com os monômios que são identidades de  $M_{p,q}(E)$ , ou seja,  $T_G(M_{p,q}(E))$  é o  $T_G$ -ideal gerado por  $\mathcal{N}' \cup (\mathcal{M} \cap T_G(M_{p,q}(E)))$ .*

**Demonstração:** Considere  $A = M_\alpha(E)$ ,  $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$  e  $I$  o ideal gerado por  $\mathcal{N}'$  nos Lemas 4.2.1 e 4.2.2. Assim, de forma semelhante às suas demonstrações com

$$w_h = a_h E_{i_h j_h} \in \Gamma_\alpha, \quad h = 1, \dots, d$$



estes lemas também são válidos para a álgebra  $M_\alpha(E)$ . Logo, o resultado segue da Proposição 1.7.17 e do fato de que  $M_\alpha(E) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_{p,q}(E)$ . ■

**Observação 4.5** *Sejam  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ,  $\beta : [m] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  e  $\epsilon : [nm] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  aplicações como na Observação 4.2. Então as álgebras  $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$  e  $M_\epsilon(E)$  possuem uma  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -graduação como vimos anteriormente. Assim, pelos teoremas anteriores, temos que o conjunto  $\mathcal{N}$  faz parte dos geradores do ideal das identidades graduadas tanto de  $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ , quanto de  $M_\epsilon(E)$ .*

**Observação 4.6** *Dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , para todo  $t \in [nm]$  existe um único par  $(i, u) \in [n] \times [m]$ , tal que  $t = m(i - 1) + u$ . De fato, colocando o conjunto  $[nm]$  como uma sequência, basta observar que*

$$[nm] = \underbrace{1 \ 2 \ \cdots \ m}_m \underbrace{m(2-1) + 1 \ \cdots \ m(2-1) + m \ \cdots \ m(n-1) + 1 \ \cdots \ m(n-1) + m}_m$$

*pode ser dividido em  $n$  pedaços de tamanho  $m$  cada um, e cada termo é dado por  $m(i - 1) + u$ , com  $i \in [n]$ ,  $u \in [m]$ . Dados  $t \in [nm]$  e dois pares  $(i_1, u_1)$ ,  $(i_2, u_2)$ , com  $m(i_1 - 1) + u_1 = t = m(i_2 - 1) + u_2$ , temos que  $m(i_1 - i_2) = u_2 - u_1$ , e daí  $i_1 = i_2$  e  $u_1 = u_2$ , pela Observação 4.3, donde segue a unicidade.*

Dadas duas aplicações  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  e  $\beta : [m] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  como na Observação 4.2, com  $n = p + q$  e  $m = r + s$ , considere as álgebras  $M_\alpha(E) \subseteq M_n(E)$  e  $M_\beta(E) \subseteq M_m(E)$ . Pela observação anterior, dado  $t \in [nm]$  existe um único par  $(i, u) \in [n] \times [m]$  satisfazendo  $t = m(i - 1) + u$ . Então podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \epsilon : [nm] &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ t &\longmapsto \epsilon(t) = \alpha(i) + \beta(u) \end{aligned} ,$$

a qual, pela Observação 4.2, define uma subálgebra  $M_\epsilon(E)$  de  $M_{nm}(E)$ . Temos que  $\alpha(i) = 0$  para  $p$  valores de  $i \in [n]$ ,  $\beta(u) = 0$  para  $r$  valores de  $u \in [m]$  e daí  $\alpha(i) = \beta(u) = 0$  para  $pr$  pares  $(i, u) \in [n] \times [m]$ . Além disso,  $\alpha(i) = 1$  para  $q$  valores de  $i \in [n]$  e  $\beta(u) = 1$  para  $s$  valores de  $u \in [m]$ , donde  $\alpha(i) = \beta(u) = 1$  para  $qs$  pares  $(i, u) \in [n] \times [m]$ . Logo,  $\alpha(i) = \beta(u)$  para  $pr + qs$  pares em  $[n] \times [m]$ . Como  $\epsilon(t) = 0$  se, e somente se,  $\alpha(i) = \beta(u)$ , obtemos que  $\epsilon(t) = 0$  para  $pr + qs$  valores  $t \in [nm]$ . Sendo  $nm = (pr + qs) + (ps + qr)$ , temos que  $\epsilon(t) = 1$  para  $ps + qr$  valores em  $[nm]$  e, pela Observação 4.2, a álgebra  $M_\epsilon(E)$  é isomorfa a  $M_{pr+qs, ps+qr}(E)$ .

Dessa forma, vamos estabelecer a PI-equivalência entre as álgebras  $A = M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$  e  $M_\epsilon(E)$ , e assim teremos via isomorfismos graduados a PI-equivalência entre  $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$  e  $M_{pr+qs, ps+qr}(E)$ .

**Teorema 4.2.5** *As álgebras  $A = M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$  e  $M_\epsilon(E)$  são PI-equivalentes como álgebras  $\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas. Em particular, são PI-equivalentes.*

**Demonstração:** Vamos mostrar que  $\mathcal{M} \cap T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(A) = \mathcal{M} \cap T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(M_\epsilon(E))$ . Tome  $f = f(x_1, \dots, x_d) = x_1 \cdots x_d \in \mathcal{M}$ , com  $f \notin T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(A)$ , então existem elementos

$$w_l = a_l E_{i_l j_l} \otimes b_l E_{u_l v_l} \in \mathcal{B}, \quad l = 1, \dots, d,$$

tais que  $0 \neq f(w_1, \dots, w_d) = w_1 \cdots w_d$ , com  $|x_l| = |w_l|$ . Para cada  $l \in \{1, \dots, d\}$ , seja então  $h_l = m(i_l - 1) + u_l$  e  $k_l = m(j_l - 1) + v_l$  e defina  $z_l = E_{h_l j_l} \in M_{nm}(F)$ . Além disso, tome  $c_1, \dots, c_d \in E$ , com  $c_l \in \mathcal{E}_{\epsilon(h_l) + \epsilon(k_l)}$  e  $c_1 \cdots c_d \neq 0$ , e considere  $y_l = c_l E_{h_l k_l} \in M_\epsilon(E)$ . Como  $w_1 \cdots w_d \neq 0$ , temos  $j_l = i_{l+1}$  e  $v_l = u_{l+1}$ , para  $l = 1, \dots, d-1$ , e daí

$$k_l = m(j_l - 1) + v_l = m(i_{l+1} - 1) + u_{l+1} = h_{l+1}, \quad l = 1, \dots, d-1.$$

Assim

$$z_1 z_2 \cdots z_d = E_{h_1 k_1} E_{h_2 k_2} \cdots E_{h_d k_d} = E_{h_1 k_d} \neq 0.$$

Temos

$$|c_l|_2 = \epsilon(h_l) + \epsilon(k_l) = \alpha(i_l) + \beta(j_l) + \alpha(v_l) + \beta(u_l) = |a_l|_2 + |b_l|_2 = \delta(w_l) = \delta(x_l),$$

e

$$\overline{k_l - h_l} = \overline{m(j_l - 1) + v_l - (m(i_l - 1) + u_l)} = \overline{m(j_l - i_l) + (v_l - u_l)} = |w_l|_{mn} = |x_l|_{mn}.$$

e daí  $|c_l E_{h_l k_l}| = |x_l|$ ,  $l = 1, \dots, d$ . Então podemos substituir em  $f$ , donde obtemos

$$f(y_1, \dots, y_d) = c_1 \cdots c_d E_{h_1 k_1} \cdots E_{h_d k_d} = c_1 \cdots c_d E_{h_1 k_d} \neq 0.$$

Portanto,  $f \notin T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(M_\epsilon(E))$ .

Reciprocamente, se  $f = f(x_1, \dots, x_d) = x_1 \cdots x_d \notin T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(M_\epsilon(E))$ , então existem  $z_1, \dots, z_d$  na base multiplicativa de  $M_\epsilon(E)$ , com  $0 \neq f(z_1, \dots, z_d) = z_1 \cdots z_d$  e  $|z_l| = |x_l|$ ,  $l = 1, \dots, d$ , digamos  $z_l = c_l E_{h_l k_l}$ . Pela Observação 4.6, para cada  $l = 1, \dots, d$ , existem  $i_l, j_l \in [n]$  e  $u_l, v_l \in [m]$ , tais que  $h_l = m(i_l - 1) + u_l$  e  $k_l = m(j_l - 1) + v_l$ . Defina então

$$w_l = a_l E_{i_l j_l} \otimes b_l E_{u_l v_l} \in \mathcal{B},$$

com  $a_l \in \mathcal{E}_{\alpha(i_l)+\alpha(j_l)}$ ,  $b_l \in \mathcal{E}_{\beta(u_l)+\beta(v_l)}$  e  $a_1 \cdots a_d b_1 \cdots b_d \neq 0$ . De modo análogo ao argumento anterior, obtemos  $|w_l| = |x_l|$ , para cada  $l = 1, \dots, d$ . Além disso, como  $z_1 \cdots z_d \neq 0$ , temos  $k_l = h_{l+1}$ , para  $l = 1, \dots, d-1$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} k_l = h_{l+1} &\Rightarrow m(j_l - 1) + v_l = m(i_{l+1} - 1) + u_{l+1} \\ &\Rightarrow m(j_l - i_{l+1}) = u_{l+1} - v_l, \end{aligned} \tag{4.6}$$

e daí  $j_l = i_{l+1}$  e  $u_{l+1} = v_l$ , para  $l = 1, \dots, d-1$ , pela Observação 4.3. Assim,

$$\begin{aligned} w_1 \cdots w_d &= a_1 \cdots a_d E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_d j_d} \otimes b_1 \cdots b_d E_{u_1 v_1} \cdots E_{u_d v_d} \\ &= a_1 \cdots a_d b_1 \cdots b_d E_{i_1 j_d} E_{u_1 v_d} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto  $f(w_1, \dots, w_d) \neq 0$  e  $f \notin T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(A)$ .

Por contra-positiva, obtemos que as identidades monomiais de  $A$  e  $M_\epsilon(E)$  são as mesmas. Combinando isto com a Observação 4.5, obtemos  $T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(A) = T_{\mathbb{Z}_{nm} \times \mathbb{Z}_2}(M_\epsilon(E))$ . Em particular, pela Proposição 1.7.15, temos  $T(A) = T(M_\epsilon(E))$ , ou seja, as álgebras  $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$  e  $M_\epsilon(E)$  são PI-equivalentes. ■

### 4.3 Identidades monomiais multilineares de $M_{p,q}(E)$

Durante esta seção vamos enfatizar a álgebra  $M_{p,q}(E)$ ,  $n = p+q$ , com sua  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -gradação obtida no Exemplo 1.7.6. Argumentando de modo semelhante à Observação 4.4, vemos que se  $m$  é um monômio multilinear em  $F\langle X | \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ , com  $|m| = (0, 1)$ , então  $m$  é uma identidade graduada para  $M_{p,q}(E)$ . Portanto,  $M_{p,q}(E)$  possui identidades monomiais multilineares graduadas, o que não ocorre com a álgebra de matrizes  $\mathbb{Z}_n$ -graduada  $M_n(F)$  (ver capítulo 2). Observemos que uma indeterminada  $x \in X$  é uma identidade monomial para uma álgebra  $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$   $G$ -graduada se, e somente se, a componente  $A_{|x|}$  é nula.

Nesse sentido, vamos definir o que são identidades monomiais triviais e determinar sob que condições na aplicação  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  a álgebra  $M_\alpha(E)$  (isomorfa a  $M_{p,q}(E)$ ) possui identidades monomiais triviais.

Dada uma aplicação  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , denote  $\alpha = \alpha(1)\alpha(2) \cdots \alpha(n)$  como uma sequência.

**Definição 4.3.1** Considere a álgebra livre  $F\langle X|G \rangle$ . Sejam  $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$  uma álgebra  $G$ -graduada,  $\mathcal{I}_0 = \{x \in X : A_{|x|} = 0\}$  e  $I_0$  o  $T_G$ -ideal gerado por  $\mathcal{I}_0$ . Defina

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cap I_0.$$

Os elementos em  $\mathcal{M}_0$  são chamados de *identidades monomiais triviais*.

Na definição anterior, sendo  $\mathcal{I}'_0 = \{f \in F\langle X|G \rangle : A_{|f|} = 0\}$ , então  $I_0$  é o espaço vetorial gerado pelo conjunto  $\{h_1 f h_2 : f \in \mathcal{I}'_0, h_1, h_2 \in F\langle X|G \rangle\}$ . Assim, se  $m(x_1, \dots, x_n)$  é uma identidade monomial não trivial, então  $A_{|x_i|} \neq 0$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Considere a álgebra  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduada  $M_\alpha(E) \subseteq M_n(E)$  e a álgebra de matrizes de ordem  $n$  com sua base multiplicativa natural  $\beta = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ . Definindo a aplicação  $|\cdot|_{\iota \times \alpha} : \beta \rightarrow \mathbb{Z}_2$  dada por

$$|E_{ij}|_{\iota \times \alpha} = (\overline{j-i}, \alpha(i) + \alpha(j)) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, \quad (4.7)$$

obtemos uma  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -gradação para  $M_n(F)$ , pois  $|\cdot|_{\iota \times \alpha}$  satisfaz (1.4). Vamos denotar  $M_n(F)$  com essa graduação por  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$ .

**Observação 4.7** Considere  $M_\alpha(E)$  e sua base multiplicativa  $\Gamma_\alpha$ . Dado  $aE_{ij} \in \Gamma_\alpha$ , temos

$$|aE_{ij}|_{\iota, \alpha} = (\overline{j-i}, |a|_2) = (\overline{j-i}, \alpha(i) + \alpha(j)) = |E_{ij}|_{\iota \times \alpha} \quad (4.8)$$

em  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$ . Seja  $m = m(x_1, \dots, x_r) = x_1 \cdots x_r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , um monômio em  $F\langle X|\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ . Suponha que  $m \equiv 0$  em  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$  e seja

$$x_1 = a_1 E_{i_1 j_1}, \dots, x_r = a_r E_{i_r j_r}$$

uma substituição standard  $S$  na base  $\Gamma_\alpha$ . Por ser substituição standard e por (4.8), temos que  $|x_l| = |a_l E_{i_l j_l}|_{\iota, \alpha} = |E_{i_l j_l}|_{\iota \times \alpha}$ ,  $l = 1, \dots, r$ , e daí podemos fazer a substituição

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, \dots, x_r = E_{i_r j_r}.$$

Como  $m$  é identidade de  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$ , segue que  $m(E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_r j_r}) = 0$ . Assim, temos que

$$m(a_1 E_{i_1 j_1}, \dots, a_r E_{i_r j_r}) = a_1 \cdots a_r E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_r j_r} = 0.$$

Logo, como  $S$  é arbitrária, segue que  $m \equiv 0$  em  $M_\alpha(E)$ .

Reciprocamente, se  $m$  não é identidade de  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$ , existem  $E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_r j_r} \in \beta$ , com  $|E_{i_l j_l}|_{\iota \times \alpha} = |x_l|$ , tais que

$$m(E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_r j_r}) = E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_r j_r} \neq 0.$$

Assim, para  $l = 1, \dots, r$ , tome  $a_l \in \mathcal{E}_{\alpha(i_l)+\alpha(j_l)}$  com  $a_1 \cdots a_r \neq 0$ , e daí  $|x_l| = |E_{i_l j_l}|_{\iota \times \alpha} = |a_l E_{i_l j_l}|_{\iota, \alpha}$  e

$$m(a_1 E_{i_1 j_1}, \dots, a_r E_{i_r j_r}) = a_1 \cdots a_r E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_r j_r} \neq 0,$$

ou seja, por contra-positiva, se  $m \equiv 0$  em  $M_\alpha(E)$ , então  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$  também satisfaz  $m$ .

Desta forma, as identidades monomiais  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas de  $M_\alpha(E)$  e  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$  são as mesmas.

No que segue na seção, seja

$$A = (M_n(F), \iota \times \alpha) = \bigoplus_{(k, \gamma) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} A_{(k, \gamma)} \quad (4.9)$$

com graduação obtida de (4.7), para alguma  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , e defina

$$a = E_{12} + E_{23} + E_{34} + \cdots + E_{n-1, n} + E_{n1} \in M_n(F).$$

Então

$$a^2 = E_{13} + E_{24} + E_{35} + \cdots + E_{n-2, n} + E_{n-1, 1} + E_{n2} \in M_n(F).$$

**Observação 4.8** *Vemos facilmente que*

$$\det(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -1, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases},$$

e daí  $\det(a^s) = (\pm 1)^s \neq 0$ . Assim,  $a^s$  é invertível, para qualquer  $s \in \mathbb{N}$ . Além disso, para  $n$  par,  $\det(a^2) = (-1)(-1) = 1$ , e daí  $a^{-2} = (1/\det(a^2))\overline{a^2} = \overline{a^2}$ , onde  $\overline{a^2}$  é a matriz adjunta de  $a^2$ . Logo, observando que a matriz dos cofatores de  $a^2$  é ela mesma, segue que

$$a^{-2} = \overline{a^2} = (a^2)^t = E_{31} + E_{42} + E_{53} + \cdots + E_{n, n-2} + E_{1, n-1} + E_{2n},$$

onde  $(a^2)^t$  é a matriz transposta de  $a^2$ .

As duas próximas proposições têm demonstrações semelhantes, então faremos uma única prova para os dois resultados.

**Proposição 4.3.2** *Para todo  $n \geq 1$  a álgebra  $M_\omega(E) \subseteq M_n(E)$ , onde  $\omega : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é dada por  $\omega(i) = 0$  (ou  $\omega(i) = 1$ ), para todo  $i \in \mathbb{Z}_n$ , não possui identidades monomiais não triviais.*

**Proposição 4.3.3** *Sejam  $n \equiv 0 \pmod{2}$  e  $\pi = \pi(1)\pi(2) \cdots \pi(n) = 0101 \cdots 01$ . Então  $M_\pi(E) \subseteq M_n(E)$  não possui identidades monomiais não triviais.*

**Demonstração:** Primeiro observe que se  $n = 1$  na Proposição 4.3.2, então  $M_\omega(E) \simeq M_{1,0}(E) \simeq E_0$ , e daí esta álgebra não possui identidades monomiais, inclusive as não triviais. Suponha  $n \geq 2$ . Sejam  $\alpha \in \{\omega, \pi\}$  e  $\delta = \alpha(2) \in \mathbb{Z}_2$ , e considere a álgebra graduada  $A = (M_n(F), \iota \times \alpha)$ . Temos que

$$\overline{2-1} = \overline{3-2} = \overline{4-3} = \dots = \overline{n-(n-1)} = \overline{1-n} = \overline{1}. \quad (4.10)$$

- Se  $\alpha = \pi$ , então  $\delta = \pi(2) = 1$ . Além disso,

$$\pi(j-1) + \pi(j) = 1 = \delta, \quad j = 2, \dots, n$$

e  $\pi(n) + \pi(1) = 1 = \delta$ . Combinando isto com (4.10) temos que o grau homogêneo de cada somando de  $a$  é  $(1, \delta)$ , donde  $a \in A_{(1,\delta)}$ .

- Se  $\alpha = \omega$ , então  $\delta = \omega(2) = 0$ . Além disso,

$$\omega(j-1) + \omega(j) = 0 + 0 = 0 = \delta, \quad j = 2, \dots, n$$

e  $\omega(n) + \omega(1) = 0 = \delta$ . Logo de modo análogo ao caso anterior segue que  $a \in A_{(1,\delta)}$ .

Em ambos os casos  $a \in A_{(1,\delta)}$ . Além disso, se  $A_{(1,\delta+1)} \neq \{0\}$ , existe  $E_{ij} \in A_{(1,\delta+1)}$ , com  $i, j \in [n]$  e  $\overline{j-i} = \overline{1}$ . Logo,  $E_{ij}$  é uma das componentes de  $a$ , e daí  $E_{ij}$  pertence a  $A_{(1,\delta)}$ . Assim,  $E_{ij} \in A_{(1,\delta)} \cap A_{(1,\delta+1)}$ , uma contradição, pois como a soma é direta em (4.9) temos  $A_{(1,\delta)} \cap A_{(1,\delta+1)} = \{0\}$ . Portanto  $A_{(1,\delta+1)} = \{0\}$ .

Dado  $s \in \mathbb{N}$ , temos que  $a^s \in A_{(\overline{s}, s\delta)}$ , pois (4.9) é uma graduação, e com o mesmo argumento anterior onde mostramos que  $A_{(1,\delta+1)} = \{0\}$ , obtemos  $A_{(\overline{s}, s\delta+1)} = \{0\}$ .

Agora suponha que existe  $m(x_1, \dots, x_p) = x_1 \cdots x_p$  identidade monomial não trivial para  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$ . Então,  $A_{|x_i|} \neq \{0\}$ , para cada  $i = 1, \dots, p$ . Variando  $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , os espaços  $A_{(\overline{s}, s\delta)} \neq 0$  e  $A_{(\overline{s}, s\delta+1)} = 0$  cobrem todas as componentes homogêneas de  $A$ , ou seja, dada uma componente  $A_{(k,\gamma)}$  em (4.9), existe  $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $A_{(k,\gamma)}$  é igual a  $A_{(\overline{s}, s\delta)} \neq \{0\}$  ou igual a  $A_{(\overline{s}, s\delta+1)} = \{0\}$ . Assim, para cada  $i = 1, \dots, p$ , existe  $s_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $A_{|x_i|} = A_{(\overline{s_i}, s_i\delta)} \neq \{0\}$  ou a  $A_{(\overline{s_i}, s_i\delta+1)} = \{0\}$ . Mas  $A_{|x_i|} \neq \{0\}$ , e então  $A_{|x_i|} = A_{(\overline{s_i}, s_i\delta)}$ . Tomando então as matrizes  $a^{s_i} \in A_{|x_i|}$  devemos ter

$$0 = m(a^{s_1}, \dots, a^{s_p}) = a^{s_1} \cdots a^{s_p},$$

uma contradição, pois cada  $a^{s_i}$  é invertível. Portanto, não existe identidade monomial não trivial para  $(M_n(F), \iota \times \alpha)$ , e o mesmo vale para  $M_\alpha(E)$ , com  $\alpha = \omega$  ou  $\alpha = \pi$ , pela Observação 4.7. ■

**Observação 4.9** Dadas  $\alpha_1, \alpha_2 : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  tais que  $\alpha_1(i) = \alpha_2(i+1)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , e  $\alpha_1(n) = \alpha_2(1)$ , temos que  $M_{\alpha_1}(E) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_{\alpha_2}(E)$ . De fato, tome  $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n) \in S_n$  e considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T : M_{\alpha_1}(E) &\longrightarrow M_{\alpha_2}(E) \\ aE_{ij} &\longmapsto T(aE_{ij}) = aE_{\sigma(i)\sigma(j)}. \end{aligned}$$

Vemos facilmente que  $T$  é um isomorfismo de álgebras. Além disso, temos

$$\begin{aligned} |aE_{\sigma(i)\sigma(j)}|_{\iota, \alpha_2} &= (\overline{\sigma(j) - \sigma(i)}, \alpha_2(\sigma(i)) + \alpha_2(\sigma(j))) \\ &= (\overline{j+1 - (i+1)}, \alpha_2(i+1) + \alpha_2(j+1)) \\ &= (\overline{j-i}, \alpha_1(i) + \alpha_1(j)) = |aE_{ij}|_{\iota, \alpha_1}, \end{aligned}$$

para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ , e para  $i$  ou  $j$  iguais a  $n$ , usando que  $\sigma(n) = 1$ , também temos  $|aE_{\sigma(i)\sigma(j)}|_{\iota, \alpha_2} = |aE_{ij}|_{\iota, \alpha_1}$ , donde  $T$  é um isomorfismo  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduado.

**Proposição 4.3.4** Sejam  $0 < n \equiv 0 \pmod{4}$  e

$$\rho_1 = \rho_1(1) \cdots \rho_1(n) = \underbrace{0110}_{\text{bloco}} \underbrace{0110}_{\text{bloco}} \cdots \underbrace{0110}_{\text{bloco}} \quad (n/4 \text{ blocos}),$$

$$\rho_2 = \rho_2(1) \cdots \rho_2(n) = \underbrace{0011}_{\text{bloco}} \underbrace{0011}_{\text{bloco}} \cdots \underbrace{0011}_{\text{bloco}} \quad (n/4 \text{ blocos}).$$

As álgebras  $M_{\rho_1}(E)$  e  $M_{\rho_2}(E)$  não possuem identidades monomiais não triviais.

**Demonstração:** Note que  $\rho_1(i) = \rho_2(i+1)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , e  $\rho_1(n) = \rho_2(1)$ , e daí  $M_{\rho_1}(E) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_{\rho_2}(E)$ , pela Observação 4.9. Assim, basta mostrar que  $M_{\rho_1}(E)$  não possui identidades monomiais não triviais. Considere então a álgebra graduada  $A = (M_n(F), \iota \times \rho_1)$  e seja  $\beta$  sua base natural.

Suponha que  $A$  possui identidade monomial não trivial. Dentre os monômios que são identidades não triviais tome

$$f = f(x_1, \dots, x_t) = x_1 x_2 \cdots x_{t-1} x_t = x_1 f' x_t,$$

com comprimento mínimo, ou seja, com o menor  $t$  possível, onde  $f' = x_2 \cdots x_{t-1}$ . Note que  $t \geq 2$ , pois se  $t = 1$  teríamos que  $f = x_1$  seria uma variável, e daí, sendo identidade, deveríamos ter  $A_{|f|} = 0$ , e  $f$  seria trivial.

Seja  $(\bar{h}_i, \epsilon_i) = |x_i|$ ,  $i = 1, \dots, t$ . Vamos escrever  $a \equiv b$  para denotar  $a \equiv b \pmod{4}$  e  $(a, \gamma) \equiv (b, \gamma)$  para denotar  $(\bar{a}, \gamma) = (\bar{b}, \gamma)$  com  $a \equiv b \pmod{4}$ ,  $\gamma \in \mathbb{Z}_2$ . Note que se  $a \equiv b \pmod{n}$ , então  $a \equiv b$ , pois  $n \equiv 0$ . Desse modo, dado  $E_{ij} \in \beta \cap A_{(k,\gamma)}$  temos que  $\overline{j-i} = \bar{k}$ , donde  $j-i \equiv k \pmod{n}$  e daí  $j-i \equiv k$ , e  $\rho_1(i) + \rho_1(j) = \gamma$ .

Pela forma de  $\rho_1$ , dado  $k \in [n]$  temos que se  $k \equiv 0 \equiv 4$  ou  $k \equiv 1$ , então  $\rho_1(k) = 0$ , e se  $k \equiv 2$  ou  $k \equiv 3$ , então  $\rho_1(k) = 1$ , ou seja, o valor de  $\rho_1(k)$  fica determinado pela congruência de  $k$  com os valores de 1 a 4. Assim, dados  $i, j \in [n]$ , temos

$$\text{se } \rho_1(i) = \rho_1(j) = \begin{cases} 0, & \text{então } \begin{cases} i \equiv 1 & \text{ou } i \equiv 4 \\ j \equiv 1 & \text{ou } j \equiv 4 \end{cases} \\ 1, & \text{então } \begin{cases} i \equiv 2 & \text{ou } i \equiv 3 \\ j \equiv 2 & \text{ou } j \equiv 3 \end{cases} \end{cases}. \quad (4.11)$$

Vamos analisar os possíveis casos para  $k \in [n]$ .

- (1) Seja  $k \equiv 2$ . Supondo que  $A_{(\bar{k},0)} \neq \{0\}$ , então existem  $i, j \in [n]$  tais que  $E_{ij} \in A_{(\bar{k},0)}$ . Assim  $j-i \equiv k \pmod{n}$ , donde  $j-i \equiv k \equiv 2$ , e de

$$\rho_1(i) + \rho_1(j) = 0 \Rightarrow \rho_1(i) = \rho_1(j),$$

temos os possíveis valores de  $i$  e  $j$  em (4.11). Para  $i, j \equiv 1$ , por exemplo, temos

$$2 \equiv j-i \equiv 1-1 = 0,$$

uma contradição. De modo semelhante, nos outros casos também obtemos contradições, e logo  $A_{(\bar{k},0)} = \{0\}$ . Como estamos considerando  $\rho_1$  temos  $a \in A_{(\bar{1},0)} \oplus A_{(\bar{1},1)}$ . Então escrevendo  $a = x + y$ , com  $x \in A_{(\bar{1},0)}$  e  $y \in A_{(\bar{1},1)}$ , temos que

$$aa = x^2 + xy + yx + y^2 \in A_{(\bar{2},0)} \oplus A_{(\bar{2},1)},$$

pois  $x^2, y^2 \in A_{(\bar{2},0)}$  e  $xy, yx \in A_{(\bar{2},1)}$ . Indutivamente, obtemos que  $a^k \in A_{(\bar{k},0)} \oplus A_{(\bar{k},1)} = A_{(\bar{k},1)}$ . ( $A_{(\bar{k},0)} = \{0\}$ ).

- (2) Se  $k \equiv 0$ , obtemos de modo semelhante ao caso anterior que  $A_{(\bar{k},1)} = 0$  e  $a^k \in A_{(\bar{k},0)} \oplus A_{(\bar{k},1)} = A_{(\bar{k},0)}$ .



(3) Se  $k \equiv 1$  ou  $k \equiv 3$ , temos que  $[n] = \{i \in [n] : \exists j \in [n] \text{ tal que } E_{ij} \in A_{(k,\delta)}\} \cup \{j \in [n] : \exists i \in [n] \text{ tal que } E_{ij} \in A_{(k,\delta)}\} = \Theta$ , para algum  $\delta \in \mathbb{Z}_2$ . De fato, tome  $s \in [n]$  e  $\delta \in \mathbb{Z}_2$ . Sejam

$$i = \begin{cases} s - k & , \text{ se } s > k \\ s - k + n, & , \text{ se } s \leq k \end{cases} \quad e \quad j = \begin{cases} s + k, & , \text{ se } s + k \leq n \\ s + k - n & , \text{ se } s + k > n \end{cases}.$$

Temos que  $j - i \equiv 2k \pmod{n}$  e daí, como  $n \equiv 0$  e  $k \equiv 1$  ou  $k \equiv 3$ , segue que  $j - i \equiv 2k \equiv 2$ . Assim, pela forma de  $\rho_1$ , temos que  $\rho_1(i) \neq \rho_1(j)$  e daí  $\rho_1(s) + \rho_1(i) = \delta$  ou  $\rho_1(s) + \rho_1(j) = \delta$ . Logo obtemos  $E_{is} \in A_{(k,\delta)}$  ou  $E_{sj} \in A_{(k,\delta)}$ , donde  $s \in \Theta$  e portanto  $[n] \subseteq \Theta$ . A inclusão contrária é óbvia, então  $[n] = \Theta$ .

Suponha  $h_1, h_t \equiv 2$ . Temos que  $|x_1| = (h_1, \epsilon_1)$  e  $|x_t| = (h_t, \epsilon_t)$ . Se  $\epsilon_1 = \epsilon_t = 1$ , por (1), podemos substituir  $x_1$  e  $x_t$  por matrizes invertíveis, e daí  $f'$  é uma identidade monomial não trivial de comprimento menor que  $t$ , o que contraria a minimalidade de  $t$ . Para  $\epsilon_1 = 0$  ou  $\epsilon_t = 0$ , por (1), temos que  $A_{(\overline{h_1}, \epsilon_1)} = \{0\}$  ou  $A_{(\overline{h_t}, \epsilon_t)} = \{0\}$ , donde  $f$  é trivial, uma contradição. De modo análogo, supondo  $h_1, h_t \equiv 0$  e usando (2) chegamos em contradições. Portanto,  $h_1$  e  $h_t$  não podem ser congruentes a 0 ou a 2 módulo 4.

De (3) temos que nenhuma componente  $A_{(\overline{k}, \gamma)}$  é nula, para  $k \equiv 1, 3$ ,  $\gamma \in \mathbb{Z}_2$ , e daí, analisando os elementos  $E_{ij} \in \beta$  dessas componentes, obtemos de (4.11) a tabela

$k$	$\gamma$	$i$	$j$
$k \equiv 1 \pmod{4}$	0	par	ímpar
$k \equiv 1 \pmod{4}$	1	ímpar	par
$k \equiv 3 \pmod{4}$	0	ímpar	par
$k \equiv 3 \pmod{4}$	1	par	ímpar

(4.12)

onde usamos que se  $i, j \equiv 1, 3$  ou  $i, j \equiv 2, 4$ , então  $i$  e  $j$  são ambos ímpares ou pares, respectivamente. Assim, para  $k \equiv 1$ , as componentes  $A_{(\overline{k}, 0)}$  e  $A_{(\overline{k}, 1)}$  são geradas como espaços vetoriais pelos conjuntos

$$\beta_1 = \{E_{2,k+2}, E_{4,k+4}, \dots, E_{n-k-1,n-1}, E_{n-k+1,1}, E_{n-k+3,3}, \dots, E_{n-2,k-2}, E_{n,k}\},$$

$$\beta_2 = \{E_{1,k+1}, E_{3,k+3}, \dots, E_{n-k-2,n-2}, E_{n-k,n}, E_{n-k+2,2}, \dots, E_{n-3,k-3}, E_{n-1,k-1}\},$$

respectivamente, e para  $k \equiv 3$ ,  $\beta_2$  gera  $A_{(\overline{k}, 0)}$  e  $\beta_1$  gera  $A_{(\overline{k}, 1)}$ .

Temos que  $a^2$  é inversível com  $a^{-2} = (a^2)^t$  (ver Observação 4.7). Assim seja

$$\begin{aligned} \psi : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto \psi(x) = a^{-2}xa^2 = (a^2)^t xa^2 \end{aligned}$$

o automorfismo graduado induzido por  $a^2$ . Dados  $i, j \in [n]$ , pela forma de  $a^2$  e  $a^{-2}$ , existem  $k, l \in [n]$ , tais que

$$\psi(E_{ij}) = a^{-2}E_{ij}a^2 = E_{ki}E_{ij}E_{jl} = E_{kl} \neq 0,$$

e podemos ver  $\psi$  como uma aplicação que leva  $i$  em  $k$  e  $j$  em  $l$ , ou seja, com abuso de notação denotamos  $\psi(E_{ij}) = E_{\psi(i)\psi(j)}$ , e  $\psi \in S_n$ . Avaliando  $\psi$  no conjunto  $\{E_{12}, E_{34}, E_{56}, \dots, E_{n-1,n}, E_{n1}\}$ , vemos facilmente que  $\psi = (135 \cdots n - 1)(246 \cdots n) \in S_n$ . Logo, quando  $k \equiv 1, 3$ , dados  $E_{ij}, E_{pl} \in \beta_m$ ,  $m = 1, 2$ , basta compor o automorfismo  $\psi$  com ele mesmo um número conveniente de vezes e obtemos um automorfismo  $\theta$  de  $A$  tal que  $\theta(E_{ij}) = E_{pl}$ .

Pela minimalidade de  $t$ , o monômio  $x_1 f'$  não pode ser identidade. Então existe substituição standard  $S$  da forma

$$x_1 = E_{ij_1}, x_2 = E_{i_2 j_2}, \dots, x_{t-1} = E_{i_{t-1} j}$$

em  $\beta$  tal que  $(x_1 f')|_S = E_{ij} \neq 0$ , com  $|E_{ij}| = |x_1 f'|$ ,  $i, j \in [n]$ . Note que dado qualquer monômio multilinear  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduado  $M$ , temos que  $|M| \equiv (k, \gamma)$ , onde  $(k, \gamma) \in \{(r, s) : r = 0, 1, 2, 3, s \in \mathbb{Z}_2\}$ . Assim vamos analisar os possíveis casos para  $M = x_1 f'$ .

Se  $|x_1 f'| \equiv (2, 0)$  ou  $(0, 1)$ , então por (1) e (2) temos  $x_1 f'$  trivial, o que não pode ocorrer e esses dois casos não são possíveis.

Se  $|x_1 f'| \equiv (1, 0)$  ou  $(3, 1)$ , então  $j$  é ímpar (ver tabela (4.12)) e  $|x_t| \equiv (1, 1)$  ou  $(3, 0)$ , pois  $h_t$  não pode ser congruente a 0 ou 2, e se  $|x_t| \equiv (1, 0)$  ou  $(3, 1)$ , temos  $|x_1 f' x_t| \equiv (2, 0)$  ou  $(0, 1)$  e daí, por (1) e (2),  $f = x_1 f' x_t$  seria trivial. Analogamente, se  $|x_1 f'| \equiv (1, 1)$  ou  $(3, 0)$ , então  $j$  é par e  $|x_t| \equiv (1, 0)$  ou  $(3, 1)$ . Em ambos os casos obtemos um elemento  $E_{ju} \in A_{(\overline{h_t}, \epsilon_t)}$ , onde  $E_{ju} \in \beta_2$  para o primeiro caso e  $E_{ju} \in \beta_1$  no segundo caso, já que os primeiros índices das matrizes em  $\beta_1$  são ímpares e em  $\beta_2$  são pares, e cobrem todos os valores em  $[n]$ . Assim, basta tomar  $S'$  a substituição  $S$  com  $x_t = E_{ju}$  e temos

$$f|_{S'} = E_{ij}E_{ju} = E_{iu} \neq 0,$$

donde  $f$  não é identidade, uma contradição.

No caso em que  $|x_1 f'| \equiv (2, 1)$  ou  $(0, 0)$ , temos que  $t > 2$ , pois se  $t = 2$ , então  $x_1 f' = x_1$ , e daí  $h_1 \equiv 2$  ou  $0$ , o que não pode ocorrer. Temos  $f'|_S = E_{j_1 j}$  e seja  $|f'| = (\bar{h}, \epsilon)$ . Então  $h_1 + h \equiv 2$  ou  $0$ , donde  $h \equiv 1$  ou  $3$ , pois  $h_1$  não pode ser congruente a  $0$  ou  $2$ . Por outro lado, como  $f'x_t$  não pode ser identidade, pela minimalidade de  $t$ , existe substituição standard  $S^*$  em  $\beta$  tal que  $(f'x_t)|_{S^*} = E_{pq} \neq 0$ ,  $p, q \in [n]$ , e daí existe algum  $r \in [n]$  tal que  $f'|_{S^*} = E_{pr}$  e  $|E_{pr}| = |f'| = |E_{j_1 j}| = (h, \epsilon)$ . Assim, como  $h \equiv 1, 3$ , pelo que foi comentado acima, existe automorfismo graduado  $\theta$  de  $A$  tal que  $\theta(E_{j_1 j}) = E_{pr}$  ( $\theta(j_1) = p$  e  $\theta(j) = r$ ). Considere então a substituição standard  $S''$  dada por

$$x_1 = \theta(E_{i_{j_1}}), x_2 = \theta(E_{i_{2j_2}}), \dots, x_{t-1} = \theta(E_{i_{t-1j}}), x_t = E_{rq}.$$

Temos

$$f|_{S''} = \theta(E_{i_{j_1}})\theta(E_{j_1 j})E_{rq} = E_{\theta(i)\theta(j_1)}E_{\theta(j_1)\theta(j)}E_{rq} = E_{\theta(i)r}E_{rq} = E_{\theta(i)q} \neq 0,$$

e portanto  $f$  não é identidade, uma contradição.

Desta forma  $(M_n(F), \iota \times \rho_1)$  não possui identidade monomial não trivial, e o mesmo vale para  $M_{\rho_1}(E)$ , pela Observação 4.7. ■

**Observação 4.10** Tome  $\alpha : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  e seja  $\beta = \alpha + 1 : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  dada por  $\beta(i) = \alpha(i) + 1$ ,  $i \in \mathbb{Z}_n$ . Temos que

$$\Gamma_\beta = \{aE_{ij} : a \in \mathcal{E}_{\beta(i)+\beta(j)}\} = \{aE_{ij} : a \in \mathcal{E}_{\alpha(i)+1+\alpha(j)+1}\} = \{aE_{ij} : a \in \mathcal{E}_{\alpha(i)\alpha(j)}\} = \Gamma_\alpha$$

e daí  $\alpha$  e  $\beta$  determinam a mesma subálgebra de  $(M_n(E), \iota)$ .

Veremos agora que as únicas álgebras da forma  $M_\alpha(E)$  que não possuem identidades monomiais não triviais são as determinadas nas proposições anteriores.

**Teorema 4.3.5** Seja  $n \geq 1$  e suponha que  $M_\alpha(E) \subseteq M_n(E)$  não possui identidades monomiais não triviais. Então

- i)  $M_\alpha(E) = M_\omega(E)$  ou
- ii)  $M_\alpha(E) = M_\pi(E)$  e  $n \equiv 0 \pmod{2}$  ou
- iii)  $M_\alpha(E) \in \{M_{\rho_1}(E), M_{\rho_2}(E)\}$  e  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,

onde  $\omega$ ,  $\pi$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as mesmas aplicações das Proposições 4.3.2, 4.3.3 e 4.3.4.

**Demonstração:** Seja

$$R = M_\alpha(E) = \bigoplus_{(k,\gamma) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} R_{(k,\gamma)}, \quad (4.13)$$

com  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -gradação herdada de  $(M_n(E), \iota)$ . Podemos supor  $\alpha(1) = 0$ , pois  $\alpha$  e  $\beta = \alpha + 1$  determinam a mesma subálgebra de  $(M_n(E), \iota)$ , pela Observação 4.10, e  $\alpha(1) = 0$  ou  $\beta(1) = 0$ .

Se  $\alpha = \omega$ , então  $R = M_\omega(E)$  e temos (i). Suponha  $\alpha \neq \omega$ . Então observando a álgebra  $M_{p,q}(E)$ ,  $n = p + q$ , isomorfa a  $R$ , vemos que  $q \geq 1$ , pois se  $q = 0$ , teríamos  $p = n$  e  $\alpha(i) = 0$ , para todo  $i \in [n]$ , donde  $\alpha = \omega$ . Logo o elemento  $aE_{n1} \in M_{p,q}(E)$ ,  $a \in \mathcal{E}$ , deve ter grau homogêneo  $(\overline{1-n}, 1) = (\overline{1}, 1)$ , e daí sua imagem pelo isomorfismo graduado que existe entre  $M_{p,q}(E)$  e  $R$  (veja observação 4.2) pertence a  $R_{(\overline{1},1)}$ , ou seja,  $R_{(\overline{1},1)} \neq \{0\}$ . Como (4.13) é graduação temos que  $E_{ii}RE_{jj} \subseteq R_{(\overline{(j-i), \alpha(i)+\alpha(j)})}$ , para quaisquer  $i, j \in [n]$ , e daí segue facilmente que

$$R_1 := R_{(\overline{1},0)} \oplus R_{(\overline{1},1)} = E_{11}RE_{22} \oplus E_{22}RE_{33} \oplus \cdots \oplus E_{n-1,n-1}RE_{nn} \oplus E_{nn}RE_{11}. \quad (4.14)$$

Se  $R_{(\overline{1},0)} = \{0\}$ , então  $R_1 = R_{(\overline{1},1)}$ , e daí, por (4.14), temos  $\alpha(i) + \alpha(i+1) = 1$ , para  $i = 1, \dots, n-1$  e  $\alpha(1) + \alpha(n) = 1$ . Assim, de  $\alpha(1) + \alpha(2) = 1$  obtemos  $\alpha(2) = 1$ , pois  $\alpha(1) = 0$ ; daí, de  $\alpha(2) + \alpha(3) = 1$ , segue que  $\alpha(3) = 0$ , e seguindo com o processo obtemos

$$\alpha(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 1, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}.$$

Além disso,  $\alpha(n) = \alpha(1) + \alpha(n) = 1$  e  $n$  é par. Portanto  $R_{(\overline{1},0)} = \{0\}$  implica  $\alpha = \alpha(1) \cdots \alpha(n) = 0101 \cdots 01 = \pi$  e  $n$  é par. Reciprocamente, se  $\alpha = \pi$  e  $n$  é par, temos  $\alpha(i) + \alpha(i+1) = 1$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , e  $\alpha(1) + \alpha(n) = 1$ , donde não existem  $i, j \in [n]$  tais que  $E_{ij} \in R_{(\overline{1},0)}$ , e portanto  $R_{(\overline{1},0)} = \{0\}$ . Logo,  $R_{(\overline{1},0)} = \{0\}$  se, e somente se,  $\alpha = \pi$  e  $n$  é par, donde temos (ii).

Agora suponha  $\alpha \neq \omega, \pi$ , ou seja,  $R_{(\overline{1},0)} \neq \{0\}$ , e considere a sequência

$$\alpha(1) + \alpha(2), \alpha(2) + \alpha(3), \dots, \alpha(n-1) + \alpha(n), \alpha(n) + \alpha(1) \quad (4.15)$$

a qual é não constante, pois como  $\alpha \neq \omega$ , a mesma não é formada apenas por zeros, e de  $\alpha \neq \pi$  existe  $i \in [n]$  tal que  $\alpha(i) = \alpha(i+1)$ . Em (4.15), seja  $t$  o maior comprimento de uma subsequência composta apenas por zeros consecutivos (considerando o ciclo). Por exemplo, se  $n = 5$  e  $\alpha = 00110$  então a sequência é 01010 e  $t = 2$ . Temos que

$R_{(\bar{k},0)} \neq \{0\}$ , para  $k \in \{1, \dots, t\}$ . De fato, tome  $k \in \{1, \dots, t\}$ . Usando os índices dos  $k$  primeiros termos da subsequência composta por zeros de tamanho  $t$ , podemos tomar  $k$  elementos pertencentes a  $R_{(\bar{1},0)}$  tais que o produto é não nulo e pertence a  $R_{(\bar{k},0)}$ , pois (4.13) é uma graduação.

Considere a aplicação  $\alpha$  de forma cíclica, ou seja, se  $k > n$  então  $\alpha(k) = \alpha(l)$ , onde  $\bar{l} = \bar{k}$  e  $l \in \{1, \dots, n\}$ .

Afirmamos que  $m = m(x_1, \dots, x_{t+1}) = x_1 x_2 \cdots x_t x_{t+1}$  é identidade graduada em  $M_\alpha(E)$ , onde  $|x_l| = (\bar{1}, 0)$ ,  $l = 1, \dots, t+1$ . Supondo o contrário, existem  $a_l E_{i_l j_l} \in \Gamma_\alpha$  tais que

$$m(a_1 E_{i_1 j_1}, \dots, a_t E_{i_{t+1} j_{t+1}}) = a_1 a_2 \cdots a_t a_{t+1} E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_t j_t} E_{i_{t+1} j_{t+1}} \neq 0,$$

onde

$$|a E_{i_l j_l}|_{l,\alpha} = (\overline{j_l - i_l}, \alpha(i_l) + \alpha(j_l)) = |x_l| = (1, 0), \quad l = 1, \dots, t+1.$$

Então  $i_{l+1} = j_l$ , para  $l = 1, \dots, t$ , e também  $j_l \equiv i_l + 1 \pmod{n}$  donde

$$0 = \alpha(i_l) + \alpha(j_l) = \alpha(i_l) + \alpha(i_l + 1), \quad l = 1, \dots, t+1,$$

pois elementos em uma mesma classe de  $\mathbb{Z}_n$  possuem o mesmo valor pela aplicação  $\alpha$ . Assim obtemos a subsequência

$$\begin{aligned} & \alpha(i_1) + \alpha(j_1), \alpha(i_2) + \alpha(j_2), \dots, \alpha(i_t) + \alpha(j_t), \alpha(i_{t+1}) + \alpha(j_{t+1}) = \\ & = \alpha(i_1) + \alpha(i_1 + 1), \alpha(i_2) + \alpha(i_2 + 1), \dots, \alpha(i_t) + \alpha(i_t + 1), \alpha(i_{t+1}) + \alpha(i_{t+1} + 1) \\ & = \alpha(i_1) + \alpha(i_1 + 1), \alpha(i_1 + 1) + \alpha(i_1 + 2), \dots, \alpha(i_1 + t - 1) + \alpha(i_1 + t), \alpha(i_1 + t) + \alpha(i_1 + t + 1) \end{aligned}$$

de (4.15) formada por  $t+1$  zeros, o que contraria a maximalidade de  $t$ , e a afirmação segue.

Temos que  $|m| = (\overline{t+1}, 0)$ , e daí se  $R_{(\overline{t+1},0)} \neq \{0\}$  obtemos uma identidade monomial não trivial para  $M_\alpha(E)$ , uma contradição. Logo  $R_{(\overline{t+1},0)} = \{0\}$ . Vamos supor inicialmente que a sequência (4.15) é da forma

$$\underbrace{0 \cdots 0}_t \quad 1 \quad \delta_1 \quad \delta_2 \quad \cdots \quad 1, \quad (4.16)$$

a qual termina com 1 pela maximalidade de  $t$ . Assim

$$\begin{aligned} \alpha(1) = 0 \text{ e } \alpha(1) + \alpha(2) = 0 &\Rightarrow \alpha(2) = 0, \\ \alpha(2) = 0 \text{ e } \alpha(2) + \alpha(3) = 0 &\Rightarrow \alpha(3) = 0, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \alpha(t) = 0 \text{ e } \alpha(t) + \alpha(t+1) = 0 &\Rightarrow \alpha(t+1) = 0, \end{aligned}$$

daí, como  $R_{(\overline{t+1},0)} = \{0\}$ , devemos ter

$$\begin{aligned} \alpha(1) + \alpha(t+2) = 1 &\Rightarrow \alpha(t+2) = 1, \\ \alpha(2) + \alpha(t+3) = 1 &\Rightarrow \alpha(t+3) = 1, \\ \alpha(3) + \alpha(t+4) = 1 &\Rightarrow \alpha(t+4) = 1, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \alpha(t) + \alpha(t+t+1) = 1 &\Rightarrow \alpha(t+t+1) = 1, \\ \alpha(t+1) + \alpha(t+t+2) = 1 &\Rightarrow \alpha(t+t+2) = 1, \end{aligned}$$

pois se  $i, j \in [n]$  são tais que  $\alpha(i) + \alpha(j) = 0$  e  $\overline{j-i} = \overline{t+1}$ , obtemos  $0 \neq E_{ij} \in R_{(\overline{t+1},0)}$ .

Portanto

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \alpha(t+2) + \alpha(t+3) = 1 + 1 = 0, \\ \delta_2 &= \alpha(t+3) + \alpha(t+4) = 1 + 1 = 0, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \delta_t &= \alpha(t+t) + \alpha(t+t+1) = 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Logo, a sequência (4.15) tem a forma

$$\underbrace{0 \cdots 0}_t 1 \underbrace{0 \cdots 0}_t 1 \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_t 1, \quad (4.17)$$

e daí  $x_1x_2$  é identidade de  $M_\alpha(E)$ , com  $|x_1| = |x_2| = (\overline{1}, 1)$ , pois, caso contrário, argumentando de forma semelhante à afirmação que  $m$  é identidade, obtemos  $i \in [n]$  tal que  $\alpha(i) + \alpha(i+1) = 1$  e  $\alpha(i+1) + \alpha(i+2) = 1$ , o que é uma contradição por (4.17). Assim  $R_{(\overline{2},0)} = \{0\}$ , pois se  $R_{(\overline{2},0)} \neq \{0\}$  temos que  $x_1x_2$  é uma identidade monomial não trivial ( $|x_1x_2| = (\overline{2}, 0)$ ).

Se a sequência (4.15) não tiver a forma (4.16), basta usar os mesmos argumentos anteriores substituindo os  $t$  primeiros termos pelos termos de uma subsequência de comprimento  $t$  formada por zeros, e assim obtemos o mesmo formato em (4.17), mas

não necessariamente a sequência inicia com zero ou termina com 1, e pode ocorrer de uma das subsequências de zeros estar dividida entre o final de toda a sequência e o início da mesma de forma cíclica.

Vamos analisar os dois possíveis valores para  $\alpha(1) + \alpha(2)$ .

- Seja  $\alpha(1) + \alpha(2) = 1$ . Como  $R_{(\bar{2},0)} = \{0\}$  devemos ter  $\alpha(i) + \alpha(i+2) = 1$ , para  $i = 1, \dots, n-2$ ,  $\alpha(n-1) + \alpha(1) = 1$  e  $\alpha(n) + \alpha(2) = 1$ . Daí

$$\alpha(2) + \alpha(3) = \alpha(1) + \alpha(2) + \alpha(1) + \alpha(3) = 1 + 1 = 0,$$

$$\alpha(3) + \alpha(4) = \alpha(2) + \alpha(3) + \alpha(2) + \alpha(4) = 0 + 1 = 1,$$

$$\alpha(4) + \alpha(5) = \alpha(3) + \alpha(4) + \alpha(3) + \alpha(5) = 1 + 1 = 0,$$

$$\alpha(5) + \alpha(6) = \alpha(4) + \alpha(5) + \alpha(4) + \alpha(6) = 0 + 1 = 1,$$

e no final da sequência obtemos

$$\alpha(n) + \alpha(1) = \alpha(n) + \alpha(2) + \alpha(1) + \alpha(2) = 1 + 1 = 0,$$

$$\alpha(n-1) + \alpha(n) = \alpha(n-1) + \alpha(1) + \alpha(n) + \alpha(1) = 1 + 0 = 1.$$

Portanto a sequência (4.15) tem a forma  $1010 \dots 10$ .

- Se  $\alpha(1) + \alpha(2) = 0$ , de modo análogo ao caso anterior, usando que  $R_{(\bar{2},0)} = \{0\}$ , obtemos que a sequência (4.15) tem a forma  $0101 \dots 01$ .

Nos primeiro e segundo casos temos

$$\alpha = \rho_1 = \underbrace{0110} \underbrace{0110} \dots \underbrace{0110} \quad e \quad \alpha = \rho_2 = \underbrace{0011} \underbrace{0011} \dots \underbrace{0011},$$

respectivamente. Portanto  $M_\alpha(E) = M_{\rho_1}(E)$  ou  $M_{\rho_2}(E)$  e claramente  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , o que completa a demonstração. ■

## 4.4 Graduações não isomorfas para $M_{p,q}(E)$

Fixados  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $n = p + q$ , temos que para determinadas aplicações  $\alpha, \beta : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , com  $\alpha \neq \beta$ , as graduações em  $M_{p,q}(E)$  obtidas de  $\alpha$  e  $\beta$ , como na Observação 4.2, podem não ser equivalentes (veja Observação 4.1). Nesse caso vamos dizer que  $\alpha$  e  $\beta$  correspondem a graduações não isomorfas para  $M_{p,q}(E)$ . Nesse sentido, nosso principal objetivo é determinar o número de graduações não isomorfas para  $M_{p,q}(E)$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ .

Em toda seção vamos considerar  $n = p + q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , com  $1 \leq q \leq p$  e  $\alpha, \beta : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$  aplicações dependendo de  $p$  e  $q$  como na Observação 4.2. Observe que no caso em que  $q$  ou  $p$  são iguais a 0, então  $\alpha$  é a aplicação nula ou  $\alpha(i) = 1$ , para todo  $i \in [n]$ , e daí se  $\beta$  determina a mesma álgebra  $M_{p,q}(E)$  que  $\alpha$  devemos ter  $\alpha = \beta$ , e portanto não temos isomorfismo não graduado. Para simplificar as notações vamos considerar  $[n]$  ciclicamente, ou seja, vamos escrever  $\mathbb{Z}_n$  em vez de  $[n]$ . Assim as matrizes elementares vão ter a forma  $E_{00}, E_{01}, \dots$  e de forma semelhante escrevemos  $\alpha : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  e  $|aE_{ij}|_{t,\alpha} = (\overline{j-i}, \alpha(i) + \alpha(j))$ .

Seja

$$\Omega = \mathbb{Z}_2^n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n \text{ vezes}}.$$

Denotando cada  $\alpha : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  como uma sequência com  $n$  coordenadas, vemos facilmente que  $\Omega \simeq \{\alpha : \alpha \text{ é uma aplicação de } \mathbb{Z}_n \text{ em } \mathbb{Z}_2\}$ . Como subconjunto de  $\Omega$  defina  $\Omega_p = \{\alpha \in \Omega : 0 \text{ ocorre } p \text{ vezes em } \alpha\}$ .

Dados  $g \in \mathbb{Z}_n$ ,  $(g, \delta) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$  e  $\alpha \in \Omega_p$ , defina  $g \cdot \alpha$  e  $(g, \delta) \cdot \alpha$  como sendo as aplicações

$$(g \cdot \alpha)(i) = \alpha(i + g) \quad e \quad ((g, \delta) \cdot \alpha)(i) = (g \cdot \alpha + \delta)(i) = (g \cdot \alpha)(i) + \delta,$$

respectivamente,  $i \in \mathbb{Z}_n$ . Como  $g \cdot \alpha$  é apenas a aplicação  $\alpha$  deslocada de acordo com  $g \in \mathbb{Z}_n$ , segue que  $g \cdot \alpha \in \Omega_p$ , e não é difícil ver que  $g \cdot \alpha$  é uma ação de  $\mathbb{Z}_n$  em  $\Omega_p$ . Além disso, se  $p = q$  também temos que  $(g, \delta) \cdot \alpha$  pertence a  $\Omega_p$  e define uma ação de  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$  em  $\Omega_p$ . As  $\mathbb{Z}_n$ -órbitas e  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -órbitas são os conjuntos

$$O_{\mathbb{Z}_n}(\alpha) = \{g \cdot \alpha : g \in \mathbb{Z}_n\} \quad e \quad O_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(\alpha) = \{(g, \delta) \cdot \alpha : (g, \delta) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2\}, \quad \alpha \in \Omega_p,$$

respectivamente.

**Definição 4.4.1** Dado  $\alpha : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  seja  $w_\alpha = w_\alpha(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$  onde  $|x_i| = (1, \alpha(i) + \alpha(i+1)) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ .

Agora vamos estabelecer condições em  $\alpha, \beta \in \Omega_p$  para que  $M_\alpha(E) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_\beta(E)$ .

**Proposição 4.4.2** Sejam  $M_\alpha(E)$  e  $M_\beta(E)$  as subálgebras  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas de  $(M_n(E), \iota)$ , definidas na seção 4.1. São equivalentes:

$$(i) \quad M_\alpha(E) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_\beta(E);$$



(ii)  $w_\alpha$  não é identidade graduada de  $M_\beta(E)$ ;

(iii) Existem  $\delta \in \mathbb{Z}_2$  e  $k \in \mathbb{Z}_n$  tais que  $\beta(k+i) = \alpha(i) + \delta$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}_n$ . Em particular,  $\beta = g \cdot \alpha + \delta$ , onde  $g = -k \in \mathbb{Z}_n$ .

**Demonstração:** Suponha que existe  $T$  isomorfismo graduado de  $M_\alpha(E)$  em  $M_\beta(E)$ , e considere o monômio  $w_\alpha = w_\alpha(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$ . Para  $i = 0, \dots, n-1$ , tome  $a_i E_{i,i+1} \in M_\alpha(E)$ , onde

$$|a_i E_{i,i+1}|_{\iota, \alpha} = (i+1-1, \alpha(i) + \alpha(i+1)) = (1, \alpha(i) + \alpha(i+1)) = |x_i|$$

e  $a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \neq 0$ . Assim podemos substituir em  $w_\alpha$  e temos

$$w_\alpha(a_0 E_{01}, a_1 E_{12}, \dots, a_{n-1} E_{n-1,0}) = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} E_{01} E_{12} \cdots E_{n-1,0} = a E_{00} \neq 0.$$

Como  $T$  é isomorfismo graduado devemos ter  $|T(a_i E_{i,i+1})|_{\iota, \beta} = |a_i E_{i,i+1}|_{\iota, \alpha}$  e

$$0 \neq T(w_\alpha(a_0 E_{01}, a_1 E_{12}, \dots, a_{n-1} E_{n-1,0})) = w_\alpha(T(a_0 E_{01}), T(a_1 E_{12}), \dots, T(a_{n-1} E_{n-1,0})),$$

donde temos (ii).

Agora suponha (ii). Então existem  $y_0, \dots, y_{n-1} \in \Gamma_\beta$  tais que

$$w_\alpha(y_0, \dots, y_{n-1}) = y_0 \cdots y_{n-1} \neq 0 \quad (4.18)$$

e  $|y_i|_{\iota, \beta} = |x_i| = (1, \alpha(i) + \alpha(i+1))$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Se  $y_0 = b_0 E_{k j_0}$ , então  $j_0 - k = 1$ , donde  $j_0 = k + 1$ . Logo, por (4.18), devemos ter  $y_1 = b_1 E_{k+1, j_1}$ , e daí  $j_1 - (k+1) = 1$ , donde temos  $j_1 = k + 2$ . Repetindo esse argumento obtemos  $y_i = b_i E_{k+i, k+i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Assim, de  $|y_0|_{\iota, \beta} = |x_0|$ , temos  $\beta(k) + \beta(k+1) = \alpha(0) + \alpha(1)$ . Sendo  $\delta = \alpha(0) + \beta(k) \in \mathbb{Z}_2$ , então

$$\beta(k+1) = \alpha(1) + \alpha(0) + \beta(k) = \alpha(1) + \delta. \quad (4.19)$$

Como  $|y_1|_{\iota, \beta} = |x_1|$ , temos  $\beta(k+1) + \beta(k+2) = \alpha(1) + \alpha(2)$ . Combinando isto com (4.19) temos  $\beta(k+2) = \alpha(2) + \delta$ . Continuando, para  $|y_i|_{\iota, \beta} = |x_i|$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , obtemos  $\beta(k+i) = \alpha(i) + \delta$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}_n$ . Em particular, tomando  $j = k+i \in \mathbb{Z}_n$ , temos  $i = j - k$  e daí

$$\beta(j) = \alpha(j - k) + \delta = \alpha(j + g) + \delta,$$

onde  $g = -k$ , ou seja,  $\beta(j) = (g \cdot \alpha)(j) + \delta$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}_n$ , e temos  $\beta = g \cdot \alpha + \delta$ , com  $g = -k$ .

Finalmente, supondo (iii), basta tomar a transformação linear

$$\begin{aligned} \psi : M_\alpha(E) &\longrightarrow M_\beta(E) \\ aE_{ij} &\longmapsto \psi(aE_{ij}) = aE_{k+i, k+j} \end{aligned}$$

Vemos facilmente que  $\psi$  é isomorfismo de álgebras. Além disso, por hipótese, temos

$$\begin{aligned} |\psi(aE_{ij})|_{\iota, \beta} &= (k+j - (k+i), \beta(k+i) + \beta(k+j)) \\ &= (j-i, \alpha(i) + \delta + \alpha(j) + \delta) \\ &= (j-i, \alpha(i) + \alpha(j)) = |aE_{ij}|_{\iota, \alpha}, \end{aligned}$$

e portanto  $\psi$  é um isomorfismo graduado e temos (i). ■

Tome  $\alpha, \beta \in \Omega_p$ . De acordo com a proposição anterior, se escrevermos  $\alpha = \alpha(0)\alpha(1) \cdots \alpha(n-1)$ , então  $M_\alpha(E) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_\beta(E)$  se, e somente se,  $\beta$  é obtida de  $\alpha$  deslocando-se  $k$  lugares ( $\delta = 0$ ), ou deslocando-se  $k$  lugares em  $\alpha$  e somando 1 em todas coordenadas ( $\delta = 1$ ), para algum  $k \in \mathbb{Z}_n$ , ou seja,  $\beta = g \cdot \alpha$  ou  $\beta = g \cdot \alpha + 1$ , para algum  $g \in \mathbb{Z}_n$ . Com essa propriedade podemos calcular o número de graduações quase elementares não isomorfas de  $M_{p,q}(E)$ .

**Teorema 4.4.3** *Sejam  $n = p + q$  com  $1 \leq q \leq p$ ,  $\vartheta(p, n)$  o número de graduações quase elementares não isomorfas de  $M_{p,q}(E)$ ,  $\varphi$  a função de Euler e  $d = \text{mdc}(p, n)$ .*

- Se  $p \neq q$ , então

$$\vartheta(p, n) = \frac{1}{n} \sum_{s|d} \binom{n/s}{p/s} \varphi(s).$$

- Se  $p = q$ , então

$$\vartheta(p, 2p) = \frac{1}{4p} \sum_{s|d} \left( \binom{2p/s}{p/s} \varphi(s) + 2^{p/s} \varphi(2s) \right).$$

**Demonstração:** Pela Proposição 4.4.2, temos  $M_\alpha(E) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_\beta(E)$  se, e somente se,  $\beta = g \cdot \alpha$  ou  $\beta = g \cdot \alpha + 1$ , para algum  $g \in \mathbb{Z}_n$ .

Suponha  $q < p$ . Dada  $\alpha \in \Omega_p$  temos que  $g \cdot \alpha + 1 \in \Omega_q$ ,  $g \in \mathbb{Z}_n$ , pois  $q$  é o número de elementos em  $i \in \mathbb{Z}_n$  tais que  $(g \cdot \alpha)(i) = 1$  e  $g \cdot \alpha + 1$  é aplicação  $g \cdot \alpha$  somando 1 em todas coordenadas. Pela Observação 4.2,  $M_\alpha(E)$  e  $M_{g \cdot \alpha + 1}(E)$  são isomorfas



temos que  $s|d$ . Além disso, dados  $h_1$  e  $h_2$  em  $\mathbb{Z}_n$ , com  $o(h_1) = o(h_2)$ , temos  $h_1 = mh_2$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Daí, dado  $\alpha$  fixo por  $h_2$ , por (4.20) segue que

$$\alpha(i) = \alpha(i + h_2) = \alpha(i + mh_2) = \alpha(i + h_1), \quad \forall i \in \mathbb{Z}_n,$$

e então  $\alpha$  é fixo por  $h_1$ . De modo análogo toda  $\alpha$  fixa por  $h_1$  também é fixa por  $h_2$ . Assim  $\nu(h_1) = \nu(h_2)$ . Sendo  $\varphi$  a função de Euler, o número de elementos com mesma ordem  $s$  em  $\mathbb{Z}_n$  é dado por  $\varphi(s)$ . Observe agora que dada  $\alpha \in \Omega_p$  fixa por  $g \in \mathbb{Z}_n$ , com  $o(g) = s$ , então  $s|d$  e  $\alpha$  fica determinada pela escolha de  $B$  com  $p/s$  zeros. Como  $B$  tem comprimento  $l$ , temos  $\binom{l}{p/s}$  formas de montá-lo, onde  $l = n/s$ , ou seja,  $\nu(g) = \binom{n/s}{p/s}$ , e esse mesmo número é adicionado  $\varphi(s)$  vezes, pois  $\nu(h_1) = \nu(h_2)$  quando  $o(h_1) = o(h_2)$ . Portanto

$$\vartheta(p, n) = \text{número de } \mathbb{Z}_n\text{-órbitas} = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathbb{Z}_n} \nu(g) = \frac{1}{n} \sum_{s|d} \binom{n/s}{p/s} \varphi(s).$$

Agora suponha  $p = q$  ( $n = 2p$  e  $d = p$ ) e considere a ação de  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$  em  $\Omega_p$ . De modo semelhante ao argumento anterior, temos que  $M_\alpha(E) \simeq_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_\beta(E)$  se, e somente se,  $\alpha$  e  $\beta$  pertencem a mesma  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -órbita, daí basta determinar o total de  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ -órbitas. Novamente pela fórmula de Cauchy-Frobenius temos

$$\text{número de } \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2\text{-órbitas} = \frac{1}{2n} \sum_{(g,\delta) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} \nu(g, \delta),$$

onde  $\nu(g, \delta)$  é o número de pontos fixos por  $(g, \delta) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ .

O valor de  $\sum \nu(g, 0)$  é igual ao da fórmula anterior, pois neste caso estamos considerando  $\beta = g \cdot \alpha$ . Resta calcular então  $\nu(g, 1)$  para  $g \in \mathbb{Z}_n$ . Dado  $l \in \mathbb{N}$  divisor de  $n$ , considere  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $l = n/s$  e  $g = \bar{l} \in \mathbb{Z}_n$ . Uma aplicação  $\alpha \in \Omega_p$  é fixa por  $(g, 1)$  se, e somente se, tem a forma  $CC \cdots C$ , onde

$$C = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_l \delta_1 + 1 \delta_2 + 1 \cdots \delta_l + 1.$$

De fato,  $\alpha$  é fixa por  $(g, 1)$  se, e somente se,  $g \cdot \alpha + 1 = \alpha$ , ou seja,  $\alpha(i) = \alpha(i + l) + 1$ , para todo  $i = 0, \dots, n - 1$ , o que é equivalente a

$$\begin{array}{cccccccc} \delta_1 & = & \alpha(0) & = & \alpha(l) + 1 & = & \alpha(2l) & = & \alpha(3l) + 1 & = & \cdots \\ \delta_2 & = & \alpha(1) & = & \alpha(l + 1) + 1 & = & \alpha(2l + 1) & = & \alpha(3l + 1) + 1 & = & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \delta_l & = & \alpha(l - 1) & = & \alpha(2l - 1) + 1 & = & \alpha(3l - 1) & = & \alpha(4l - 1) + 1 & = & \cdots \end{array}$$



# Bibliografia

- [1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 1, 449-463 (1950).
- [2] A. Ya. Belov, *On non-Specht varieties* (Russian), Fudam. Prikl. Mat. 5, 47-66 (1999).
- [3] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. Camb. Philos. Soc. 31, 433-454 (1935).
- [4] H. Boerner, *Representations of Groups*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [5] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Wiley, New York, 1962.
- [6] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme*, (German) Math. Ann. 85, 184-194 (1922).
- [7] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of  $M_{1,1}(E)$* . Israel journal of mathematics, 80, 323-335 (1992).
- [8] O. M. Di Vincenzo, *Graded polynomial identities of verbally prime algebras*. Journal of Algebra and Its Applications 6, 3, 385-401 (2007).
- [9] O. M. Di Vincenzo and V. Nardoza,  *$\mathbb{Z}_{k+l} \times \mathbb{Z}_2$ - graded polynomial identities for  $M_{k,l}(E) \otimes E$* . Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 108, 27-39 (2002).
- [10] O. M. Di Vincenzo and V. Nardoza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann Algebra*, Comm. Algebra, Vol. 31, No. 3, 1453-1474 (2003).
- [11] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*. Springer-Verlag, Singapore, 2000.

- 
- [12] A. Giambruno and M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. 122, Providence, RI, 2005.
- [13] A. V. Grishin, *Examples of  $T$ -spaces and  $T$ -ideals of characteristic 2 without the finite basis property*, Fudam. Prikl. Mat. 5, 101-118 (1999).
- [14] I. M. Isaacs, *Algebra: A graduate course*, Pacific Grove, Calif. : Brooks/Cole, c1994.
- [15] N. Jacobson, *Basic Algebra II*. 2 Ed, Dover, New York, 2009.
- [16] G. D. James, *Representation Theory of the Symmetric Groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics 692, Springer, 1978.
- [17] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 496-500 (1948).
- [18] A. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*. Transl. Math. Monogr., 87, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1988.
- [19] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag , New York, 2001.
- [20] A. I. Malcev, *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik* (German), Rec. Mat. Moscou, n. Ser. 1, 323-335 (1936).
- [21] A. Michael, *Finite group theory*, Cambridge studies in advanced mathematics vol. 10, New York, 1986.
- [22] A. P. Popov, *Identities of the tensor square of a Grassmann algebra*. Algebra i Logika 21, 442-471 (1982).
- [23] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics vol. 80, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [24] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely based  $T$ -ideals* (Russian), Fudam. Prikl. Mat. 5, 307-312 (1999).
- [25] W. Specht, *Gesetze in ringen*, I. Math. Z. 52, 557-589 (1950).

- 
- [26] S. Yu. Vasilovsky,  *$\mathbb{Z}_n$ -graded polynomial identities of the full matrix algebra of order  $n$* . Proceedings of the American Mathematical Society, 127, 12, 3517-3524 (1999).
- [27] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme*, (German) Math. Ann. 113, 528-567 (1936).