Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo das hipersuperfícies tipo-espaço imersas no ambiente $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, exibindo condições para que tais hipersuperfícies sejam *slices* $\{t_0\} \times \mathbb{H}^n$. Para uma melhor compreensão das demonstrações e dos resultados, inserimos processos de diferenciação, cálculos de gradientes e Laplacianos que, juntamente com o princípio do máximo de Omori-Yau, foram cruciais no desenvolvimento dos resultados que, em sua maioria são do tipo Bernstein. Também incluímos um resultado do tipo Calabi.

Palavras chave: variedades Lorentzianas, hipersuperfícies tipo-espaço, curvatura média, gráficos inteiros, espaço hiperbólico.

Abstract

In this work we present a study of the spacelike hypersurfaces immersed in the manifold $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ providing sufficient conditions for such hypersurfaces be slices, $\{t_0\} \times \mathbb{H}^n$. For a better understanding of the proofs and results, we have added differentiation processes, gradient computations and Laplacians which jointly with the Omori-Yau Maximum Principle were crucial in the developing of the results whose are mostly Bernstein-type. In the elapsing we also included Calabi-type results.

Keywords: Lorentzian manifolds, spacelike hypersurfaces, mean curvature, entire graphs, hyperbolic space.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Resultados do tipo Calabi-Bernstein em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

por

Eraldo Almeida Lima Júnior [†]

sob a orientação de

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Resultados do tipo Calabi-Bernstein em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

por

Eraldo Almeida Lima Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Junho/2011

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Jesus Cristo a minha Rocha de sustentação. Segundamente, gostaria de dizer que neste percurso de mestrado, passei por vários estágios, nos quais as dificuldades vieram e se tornaram menores devido à ajuda de muitos.

No entanto, gostaria de citar os nomes de alguns e com certeza pecarei pela falta de uns que de mesma forma foram importantes. Agradeço à minha mãe, Marizete, pelo seu suporte incondicional, e seus elogios muitas vezes além do que eu merecia, pelas suas orações e a sua fé que contribuíram para o meu sucesso. Agradeço também à minha irmã, Elisama, e à minha noiva, Emília, pela compreensão da minha ausência e da pouca falta de atenção. Também agradeço ao meu pai, Eraldo. Assim como aos meus avós, José Batista, Maria Almeida (Vó Marinhinha, in Memorian), Terezinha Maria, e José Pedro. Para completar a árvore genealógica, agradeço a todos os meus tios, tias, primos e primas. Ainda agradeço aos meus conterrâneos da cidade natal, Sossego, que de uma forma ou de outra contribuiram de forma positiva na minha formação.

No âmbito acadêmico, gostaria de agradecer a todos os meus professores, que me ensinaram desde a mais tenra idade. Com eles aprendi somar, não somente números, mas também ideias e forças para alcançar os nossos objetivos. Em especial gostaria de agradecer, em representação a estes a "Tia"Naldilza representando os professores até à quarta série do ensino fundamental, e à minha mãe novamente que me ensinou matemática de quinta à oitava série, com nomes hoje de sexto e nono ano. Representando os professores do ensino médio, agradeço sinceramente a Lázaro cuja contribuição foi em aprimorar o meu gosto por esta Ciência Exata, e me ensinar mais alguns conceitos. Chegando ao curso de graduação sinto-me na obrigação, incluir mais de um nome na representação, tendo em vista as diferentes áreas de atuação e o frescor na memória. Bem, gostaria de começar com a professora Rosana que contribuiu como professora e como coordenadora, nos diversos processos para a conclusão do curso em tempo hábil. Também gostaria de agradecer a Marco Aurélio que me fez elogios e críticas essencias no programa de iniciação científica, acreditando no potencial que muitas vezes nem eu sabia que tinha. A nível de mestrado gostaria de agradecer ao professor Claudianor que sempre deu conselhos valiosos, ao professor Antônio Brandão com seu constante bom humor e me deu importantes lições de Álgebra e de vida. Por último, mas não menos importante agradeço ao meu orientador Henrique que teve a devida paciência para esta orientação.

Também não poderia deixar de falar em meus colegas e amigos, que desde o começo da graduação estiveram comigo, Aline Tsuyguchi e Fabrício Paz representando os demais.

Dedicatória

À minha mãe, Marizete e ao meu irmão, Ezequias (in Memorian).

Conteúdo

Introdução

O estudo das variedades semi-Riemannianas se torna necessário a partir de 1905 com a apresentação da teoria da relatividade por Einstein, uma vez que o espaço euclidiano de dimensão 4, $\mathbb{R}^4$, munido de sua métrica usual já não satisfazia aos propósitos de estudo dos físicos relativistas. Nete ambiente, as medidas de distância entre dois eventos dependiam se o referencial era móvel, enquanto um dos princípios da Relatividade Restrita diz que as leis da Física devem ser as mesmas em todos referenciais. O outro princípio diz que a velocidade da luz é constante no vácuo, o que provoca o aparecimento das transformações de Lorentz de um referencial em relação a um outro. O espaço de Lorentz-Minkowski $-\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, também conhecido como espaço-tempo, tem a sua métrica compatível com as transformações de Lorentz, isto é, a métrica é invariante por estas transformações (para maiores detalhes ver [6], [8] e [10]).

As hipersuperfícies tipo-espaço imersas em variedades Lorentzianas têm sido largamente estudadas, principalmente aquelas que possuem curvatura média constante (CMC) isto se justifica pelo fato destas hipersuperfícies serem soluções de problemas variacionais. Um dos problemas abordados referentes a estes objetos é o estudo da rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço imersas isometricamente em ambientes Lorentzianos do tipo $-\mathbb{R} \times M^n$, onde M^n é uma variedade Riemanniana de dimensão n. Recentemente L.J. Alías e A.G. Colares analisaram em [3] imersões tipo-espaço de hipersuperfícies compactas em produtos *warped* da forma $-\mathbb{R} \times_f M^n$. Aqui $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, M é uma variedade Riemanniana compacta munida da métrica $-dt^2 + f\langle ., . \rangle_M$, onde $\langle ., . \rangle_{M^n}$ é a métrica de M^n. Neste contexto, através de restrições sobre as curvaturas médias de ordem superior H_r (para maiores detalhes veja a Seção 2.1) e sobre a função *warping* f, eles forneceram condições para que estas imersões sejam *slices* $\{t\} \times M^n$. Tais resultados são conhecidos na literatura como resultados do tipo Bernstein.

Nesta dissertação, consideramos o ambiente Lorentziano como sendo o produto $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ onde $\mathbb{H}^n$ é o espaço hiperbólico n-dimensional, o qual é o modelo para as variedades de curvatura seccional constante negativa. Neste âmbito, também demonstramos resultados do tipo Calabi, onde buscamos condições para assegurar que uma hipersuperfície seja máxima. Mais precisamente, provamos o seguinte

Teorema: *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma imersão tipo-espaço completacom curvatura média constante. Suponha que a função altura h e a norma de seu gradiente ∇h sejam limitados em Σ^n. Então Σ^n é uma hipersuperfície máxima.*

Devido à importância do estudo de gráficos para a obtenção de hipersuperfícies, apresentamos uma versão deste resultado que inclui também o conceito de gráfico inteiro, condição que nem sempre implica que o gráfico é completo como no caso dos exemplos de A. L. Albujer (confira Seção 4.1; veja também [2]).

Teorema: *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico inteiro vertical tipo-espaço em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ com curvatura média constante, tal que u é limitada e $|Du| \leq a$ com $0 < a < 1$, então $\Sigma^n(u)$ é uma hipersuperfície máxima.*

Na perspectiva dos resultados do tipo Bernstein, apresentamos teoremas que nos dão condições para que uma hipersuperfície tipo-espaço em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ seja completa; estes resultados foram enunciados tanto na forma analítica quanto na forma paramétrica. Através de um controle no crescimento da função altura da hipersuperfície, concluímos que tal hipersuperfície é um slice.

Teorema: *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma imersão de uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante H. Se a função altura h de Σ^n satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2,$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$, então Σ^n tem que ser um slice.

Um fato curioso é que a restrição $\alpha < 1$ é relevante no procedimento da demonstração e por esta razão, não podemos estender o resultado para englobar $\alpha = 1$. Em verdade o que podemos fazer é exigir que H_2 seja constante e, assim, estendemos o resultado para $\alpha = 1$ como enunciado a seguir

Teorema: *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma imersão tipo-espaço com curvaturas médias H e H_2 constantes satisfazendo*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n}{n-1}H^2,$$

então Σ^n *é um slice.*

Este passo é importante, pois esta variação pode ser mais expressiva em termos de $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ que é finito para o valores de α inferiores a 1 e ilimitados quando α representa uma função que se aproxima de 1 pela esquerda.

Novamente impondo agora uma condição de limitação inferior sobre H_2 obtemos o seguinte resultado.

Teorema: *Seja* $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média* H *constante e* H_2 *limitada inferiormente. Suponha que a função altura* h *de* Σ^n *satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2,$$

onde $0 < \alpha < 1$ *e* $|A|^2$ *é o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt de* A*. Então* Σ^n *deve ser um slice.*

Capítulo 1

Elementos para variedades Semi-Riemannianas

1.1 Tensores

Para um estudo das variedades semi-Riemannianas, apresentamos brevemente alguns conceitos úteis e diversas vezes necessários para o entendimento dos resultados principais descritos neste trabalho.

Definição 1.1 *Dados inteiros $r, s \geq 0$, não ambos nulos e um espaço vetorial sobre um corpo K, chamamos de tensor do tipo (r,s) sobre V a uma função K-multilinear* $A : (V^*)^r \times V^s \to K$.

De modo análogo, definimos o campo de tensores em uma variedade diferenciável como sendo uma função $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$ uma aplicação multilinear no anel das funções $\mathfrak{F}(M) = C^\infty(M)$, onde $\mathfrak{X}(M)$ é o módulo dos campos de vetores sobre M e $\mathfrak{X}^*(M)$ o seu respectivo dual. Denotamos também por $\mathfrak{T}^r_s(M)$ o conjunto de todos os tensores do tipo (r, s) sobre M. Por convenção $\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

Exemplo 1 *Sejam X um campo e θ uma 1-forma sobre M, então $A : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ definida por $A(\theta, X) = \theta(X)$ é um tensor do tipo (1,1).*

Podemos somar de maneira natural dois tensores desde que ambos sejam do mesmo tipo, enquanto definimos a multiplicação para quaisquer dois tensores da seguinte forma

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \to \mathfrak{F}(M)$$

Para $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $b \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$ dado por

$$A \otimes B(\theta^1, ..., \theta^{r+r'}, X_1, ..., X_{s+s'}) = A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s).B(\theta^1, ..., \theta^{r'}, X_1, ..., X_{s'})$$

1.1.1 Identificações

Temos $\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ e identificamos $\mathfrak{T}^1_0(M) \equiv \mathfrak{X}(M)$, pois a cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ associamos $\overline{V} = A : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(M)$ da forma $\overline{V}(\theta) = \theta(V)$. Esta identificação é injetiva e, portanto, bijetiva, uma vez que M tem dimensão finita.

Os tensores do tipo $(0, s)$ são chamados de covariantes enquanto os do tipo $(r, 0)$ são chamados contravariantes. Note que, se A for covariante e B for contravariante, então $A \otimes B = B \otimes A$. No entanto, a comutatividade nem sempre ocorre. De fato, se ∂_1 e ∂_2 representam dois campos coordenados de uma variedade M e dx^1, dx^2 são seus duais, então

$$dx^1 \otimes dx^2(\partial_1, \partial_2) = dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = 1$$

$$dx^2 \otimes dx^1(\partial_1, \partial_2) = dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = 0$$

logo

$$dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$$

Similarmente aos campos de vetores os campos de tensores podem ser vistos pontualmente conforme nos sugere a seguinte

Proposição 1.2 *Sejam $p \in M$ e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $\bar{\theta}^1, ..., \bar{\theta}^r$ e $\theta^1, ..., \theta^r$ 1-formas tais que $\bar{\theta}^i_p = \theta^i_p$ $(1 \leq i \leq r)$ e $\bar{X}_1, ..., \bar{X}_s$ e $X_1, ..., X_s$ campos tais que $\bar{X}^i_p = X^i_p$ $(1 \leq i \leq s)$ então*

$$A(\bar{\theta}^1, ..., \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, ..., \bar{X}_s)(p) = A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p)$$

A prova desse resultado é equivalente à do seguinte

Lema 1.1 *Se alguma das 1-formas $\theta^1, ..., \theta^r$ ou algum dos campos de vetores $X_1, ..., X_s$ se anular em $p \in M$, então*

$$A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0.$$

Prova. Suponha $X_s|_p = 0$ e seja $\xi = (x_1, ..., x_n)$ um sistema de coordenadas numa vizinhança U de p. Então

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad em\ U$$

onde $x^i = X_s(x_i) = X_s(\pi_i \xi)$. Agora, considere f uma *bump funtion* com suporte contido em U, i.e., $f(r) = 1,\ \forall r \in V_p \ \ e\ f(q) = 0, \quad \forall q \ \notin K \subset\subset U$ assim as funções fx^i e os campos $f\frac{\partial}{\partial x^i}$ estão definidos em toda M. Com isto, temos

$$\begin{aligned} f^2 A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) &= A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., f^2 X_s) \\ &= A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., \textstyle\sum_{i=1}^{n} f x^i f \frac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} f x^i A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., f\frac{\partial}{\partial x^i}). \end{aligned}$$

Como $X_s|_p = 0$, temos $x^i(p) = 0,\ \forall i = 1, ..., n$, logo $f^2(p)A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0$ e, assim, $A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0$ ■

Para provarmos a proposição basta observarmos a soma telescópica e denotando $\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s$ simplesmente por $X_1, ..., X_k$ onde $k = r + s$ temos

$$A(X_1, ..., X_k) - A(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_k) = A(X_1 - \bar{X}_1, X_2, ..., X_k) +$$

$$+ A(\bar{X}_1, X_2 - \bar{X}_2, X_3, ..., X_k) + ... + A(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_{k-1}, X_k - \bar{X}_k),$$

o que prova o resultado. Desta forma, está bem definido o operador multilinear $A_p : (T_pM^*)^r \times T_pM^s \to \mathbb{R}$.

Definição 1.3 *Seja $\xi = (x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. Sendo $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, as componentes de A com relação à ξ são as funções*

$$A_{j_1, ..., j_s}^{i_1, ..., i_r} = A(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_s}) \quad em \quad U,$$

onde $1 \leq i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_s \leq n$.

Note que, para o caso de (0,1) tensores, a identificação nos fornece

$$\theta = \sum \theta_i dx^i.$$

E quando se tratar de um campo de vetores X temos $X(dx^i) = dx^i(X) = X(x^i) = X^i$. Considere agora o seguinte exemplo: seja $A \in \mathfrak{T}_2^1(U)$, então

$$A = \sum A_{ij}^k \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j. \tag{1.1}$$

Para mostrarmos a igualdade basta aplicarmos ambos os lados da equação em elementos da base associada ao sistema de coordenadas ξ comprovando a igualdade anterior e com o mesmo método provamos o seguinte

Lema 1.2 *Sejam $\xi = (x^1, ..., x^n)$um sistema de coordenadas e $A \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ então*

$$A \sum A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_s}$$

onde $1 \leq i_a, j_b \leq n$.

1.1.2 Contração

Uma contração é uma aplicação que transforma um (r, s) tensor num $(r-1, s-1)$ tensor satisfazendo algumas propriedades apresentadas a seguir:

Lema 1.3 *Existe uma única aplicação $\mathfrak{F}(M)$-linear $C : \mathfrak{T}^1_1(M) \to \mathfrak{F}(M)$ tal que $C(\theta \otimes X) = \theta(X)$ para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Prova. Numa vizinhança coordenada U o tensor pode ser escrito

$$A = \sum A^i_j \partial_i \otimes dx^j.$$

Como $C(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}$ temos que $C(A) = \sum A^i_i$, o que prova a unicidade. Para a existência, defina C pela expressão $C(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}$, restando-nos apenas mostrar a independência do sistema de coordenadas. De fato,

$$\sum_m A\left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) = \sum_m A\left(\sum_i \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= \sum_{i,j,m} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i,j} \delta_{ij} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_i A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

■

Podemos, assim, ver que esta contração está intimamente ligada à ideia de traço. No caso geral das contrações, fixamos $r-1$ 1-formas e $s-1$ campos de vetores, e consideramos o tensor

$$(\theta, X) \to A(\theta^1, ..., \theta^{i-1}, \theta, \theta^{i+1}, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{j-1}, X, X_{j+1}, ..., X_{s-1}).$$

Definimos a contração

$$C^i_j(A)(\theta^1,...,\theta^{r-1},X_1,...,X_{s-1}) = C({}^i_jA(\theta^1,...,\theta^{r-1},X_1,...,X_{s-1}))$$

onde ${}^i_jA(\theta^1,...,\theta^{r-1},X_1,...,X_{s-1})$ é o (1,1) tensor

$$\begin{aligned}(\theta, X) \to \; & {}^i_jA(\theta^1,...,\theta^{r-1},X_1,...,X_{s-1})(\theta, X)\\ &= A(\theta^1,...,\theta^{i-1},\theta,\theta^i,...,\theta^{r-1},X_1,...,X_{j-1},X,X_j,...,X_{s-1}).\end{aligned}$$

De modo análogo ao caso feito anteriormente temos a seguinte expressão para a contração em coordenadas locais

Lema 1.4 *Sejam* $(\underline{i},\underline{j}) \in I_r \times I_s$ *para* $I_m = \{1,...,m\}$ *e* $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ *com as seguintes componentes*

$$A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s}$$

então $C^{\underline{i}}_{\underline{j}}(A)$ *tem as seguintes componentes*

$$\sum_{m=1}^{n} A^{i_1,...,i_{\underline{i}-1},m,i_{\underline{i}+1},...,i_r}_{j_1,...,j_{\underline{j}-1},m,j_{\underline{j}+1}...,j_s}$$

1.1.3 Tensores Covariantes

Considere uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ entre variedades diferenciáveis o *pull-back* pela f, f^* é uma aplicação capaz de transportar tensores covariantes em N para M como vemos na seguinte

Definição 1.4 *Sejam* $f : M \to N$ *uma aplicação diferenciável e* $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ *considere* $f^*A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ *definida por*

$$f^*A(v_1,...,v_s) = A(dfv_1,...,dfv_s).$$

Então f^*A *é o pull-back de* A *por* f. *Para s=0 denotamos simplesmente* $f^*A = A \circ f$.

Vejamos a seguir algumas propriedades desta operação.

Lema 1.5 *Sejam* $\varphi : M \to N$, $\psi : N \to P$, *aplicações diferenciáveis e* A, B *tensores covariantes em* N *então:*

i) φ^* *é* $\mathbb{R}$*-linear*

ii)$\varphi^*(A \otimes B) = \varphi^*(A) \otimes \varphi^*(B)$

iii)$(\psi \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$

Geralmente não podemos definir um operador que transporte tensores de quaisquer tipo de N para M ou vice-versa. Porém se a variedade for semi-Riemanniana, como veremos mais adiante, todos os tensores podem ser considerados covariantes.

1.1.4 Derivada Tensorial

Analogamente às metodologias empregadas para as funções reais, calculemos também as derivadas dos tensores, generalizando o Cálculo Diferencial para funções e campos vetoriais.

Definição 1.5 *Uma derivação tensorial* $\mathfrak{D}$ *em uma variedade* M *é um conjunto de aplicações* $\mathbb{R}$*-lineares*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M)$$

Satisfazendo para A, B *tensores*

i) $\mathfrak{D}(A \otimes B) = \mathfrak{D}(A) \otimes B + A \otimes \mathfrak{D}(B)$

ii)$\mathfrak{D}(CA) = C(\mathfrak{D}(A))$ *para qualquer contração* C

Para o caso $r = s = 0$, $\mathfrak{D}$ é uma derivação atuando em $\mathfrak{F}(M)$ e, neste caso, existe um único campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Vf = \mathfrak{D}f$, $\forall f \in \mathfrak{X}(M)$.

De modo geral, $\mathfrak{F}(M)$-linearidade não é uma característica das derivações, assim elas não podem ser determinadas pontualmente como os tensores. No entanto, é possível caracterizá-las localmente conforme a seguinte proposição.

Proposição 1.6 *Sejam* $\mathfrak{D}$ *uma derivação tensorial em* M *e* U *uma vizinhança de um ponto* $p \in M$*. Então existe uma única* $\mathfrak{D}_U$ *em* U *tal que*

$$\mathfrak{D}_U(A|_U) = \mathfrak{D}(A)|_U, \quad \text{para todo tensor } A \quad \text{em} \quad M.$$

Neste caso $\mathfrak{D}_U$ *é dita a restrição de* $\mathfrak{D}$ *a* U*.*

Prova.

Primeiramente note que se $f \equiv c$ localmente, então $\mathfrak{D}(f) = 0$. De fato, suponha inicialmente que f é a função nula, logo temos $\mathfrak{D}(0) = \mathfrak{D}(0.0) = \mathfrak{D}(0).0 + 0.\mathfrak{D}(0) = 0$. Se $c = 1$ obtemos de modo análogo $\mathfrak{D}(1) = 2\mathfrak{D}(1)$ daí $\mathfrak{D}(1) = 0$. Seja agora c arbitrário, assim temos $\mathfrak{D}(c) = \mathfrak{D}(c.1) = c\mathfrak{D}(1) = 0$ daí $\mathfrak{D}(c) = 0$.

Suponha agora que f é localmente constante em p. Note que podemos supor que esta constante é nula pois se $f(V_p) = \{c\}$ temos que $\tilde{f} = f - c$ é localmente nula e $\mathfrak{D}(\tilde{f})_q = \mathfrak{D}(f)_q \; \forall \; q \in M^n$. Considere g uma função salto em p tal que seu suporte seja um subconjunto de V_p e assim $fg \equiv 0$, logo $0 = \mathfrak{D}(fg)_p = \mathfrak{D}(f)_p g(p) + f(p)\mathfrak{D}(g)_p = \mathfrak{D}(f)_p$.

Sejam $B \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ e f uma função salto com suporte em U e $f = 1$ numa vizinhança de p fixado em U, então $fB \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Logo

$$(\mathfrak{D}_U B)_p = \mathfrak{D}(fB)_p.$$

Mostremos que a definição não depende da escolha da função f. Sejam f, g funções salto em p. Então $\mathfrak{D}(gfB)_p = g(p)\mathfrak{D}(fB)_p + \mathfrak{D}(g)_p f(p) B|_p = \mathfrak{D}(fB)_p$ mostrando assim a independência da função salto f devido a comutatividade do produto de funções. Com um simples cálculo podemos comprovar os seguintes fatos

i) $\mathfrak{D}_U B$ é um tensor em U

ii) $\mathfrak{D}_U$ é uma derivação tensorial em U

iii) $\mathfrak{D}_U(B|_U) = \mathfrak{D}(B)_U$ para todo tensor B em M

iv) $\mathfrak{D}_U$ é único. ■

Vejamos uma forma prática de calcular derivações de tensores.

Proposição 1.7 (Regra do Produto) *Sejam $\mathfrak{D}$ uma derivação tensorial em M e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, então*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}[A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)] &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^r A(\theta^1, ..., \mathfrak{D}\theta^i, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) + \\ &+ \textstyle\sum_{j=1}^s A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., \mathfrak{D}X_j ..., X_s)\end{aligned}$$

Prova.

Por simplicidade, considere $r = s = 1$. Note que $A(\theta, X) = \bar{C}(A \otimes \theta \otimes X)$, onde $\bar{C} = C^1_2 C^2_1$ é uma composta de duas contrações. Daí

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(A(\theta, X)) &= \mathfrak{D}C(A \otimes \theta \otimes X) \\ &= C(\mathfrak{D}(A) \otimes \theta \otimes X) + C(A \otimes \mathfrak{D}\theta \otimes X) + C(A \otimes \theta \otimes \mathfrak{D}X) \\ &= \mathfrak{D}(A)(\theta, X) + A(\mathfrak{D}\theta, X) + A(\theta, \mathfrak{D}X),\end{aligned}$$

o que prova o resultado neste caso específico sem perda de generalidade. ■

Corolário 1.8 *Se $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ coincidem em funções e campos de vetores, então $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$.*

Prova. Basta observar que $\mathfrak{D}(\theta(X)) = (\mathfrak{D}\theta)(X) + \theta\mathfrak{D}(X)$ ■

Teorema 1.9 *Dados $V \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $\mathbb{R}$-linear $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$*

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X), \quad \forall (X, f) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{F}(M)$$

Então existe uma única derivação tensorial $\mathfrak{D}$ em M tal que $\mathfrak{D}^0_0 = V$ e $\mathfrak{D}^1_0 = \delta$.

Prova. Seja $\theta \in \mathfrak{T}^0_1(M)$ e defina

$$\mathfrak{D}(\theta)(X) = V(\theta X) - \theta(\delta(X))$$

Através de um cálculo direto vemos que $\mathfrak{D}(\theta)$ é uma 1-forma e $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^1_0$ satisfaz as propriedades requeridas para uma derivação. Para um tensor $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, defina

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D}A)(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) = \mathfrak{D}[A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)] \\ - \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, ..., \mathfrak{D}\theta^i, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) \\ - \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., \mathfrak{D}X_j ..., X_s).\end{aligned}$$

Após alguns cálculos, verificamos que $\mathfrak{D}(A) \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e, daí, $\mathfrak{D}$ é uma derivação. ■

Definição 1.10 *Seja $V \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada L_V tal que*

$$L_V(f) = Vf, \ \forall f \in \mathfrak{F}(M)$$
$$L_V(X) = [V, X], \quad \forall \ X \in \mathfrak{X}(M)$$

é chamada a derivação de Lie relativa a V.

Observação 1.1 *Note que*

$$L_V(fX) = [V, fX] = V(f)X - fXV = V(f)X + fVX - fXV = L_V(f)X + fL_V(X)$$

assim L_V pode ser estendida a uma derivação tensorial em M.

1.2 Métricas em Variedades Diferenciáveis

Os seguintes elementos estão intimamente ligados com os resultados principais deste trabalho. As métricas nas variedades são peças chaves para seu estudo tanto como objetos físicos como no sentido geométrico. Inicialmente vejamos algumas definições algébricas que fazem parte do estudo de métricas em variedades diferenciáveis.

Definição 1.11 *O índice de um tensor A do tipo $(0, 2)$ no ponto p é a maior dimensão dos subespaços de T_pM onde $q_p(v) = A_p(v, v)$ é negativa definida.*

Definição 1.12 *Um tensor métrico (ou métrica) g em uma variedade diferenciável M é um (0,2) tensor simétrico não-degenerado com índice constante.*

Uma variedade munida de uma métrica $M \equiv (M, g)$ é dita uma *variedade semi-Riemanniana*, o índice ν de g será o índice de M. Quando $\nu = 0$ a variedade é dita Riemanniana, para o caso de $\nu = 1$ a variedade é dita Lorentziana. Tal conceito está relacionado com o espaço-tempo da Física Relativística, mais particularmente se $n = 4$. Usamos também a notação $\langle u, v \rangle$ para $g(u, v)$.

Numa vizinhança coordenada temos as funções componentes de g que são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle.$$

Uma vez que g é não-degenerada, a existênciada inversa da matriz (g_{ij}) é garantida. Suas componentes são funções diferenciáveis que denotamos por g^{ij}.

Um exemplo inicial é o seguinte

Exemplo 2 *Tomando a estrutura do $\mathbb{R}^n$ e mudando os ν sinais do produto interno usual do $\mathbb{R}^n$,*

$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^{n} v^j w^j$$

nos fornece uma métrica de índice ν este espaço será denotado por $\mathbb{R}^n_\nu$.

No caso $n = 4$ e $\nu = 1$ temos o espaço $\mathbb{R}^4_1$ (também denotado por $-\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$) que é o espaço-tempo de Lorentz-Minkowski.

Denotando

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, & se \quad 0 < i \leq \nu \\ 1, & se \quad \nu < i \leq n \end{cases}$$

Assim expressamos tal métrica de índice ν por

$$g = \sum \epsilon_i du^i \otimes du^i.$$

Devido à métrica não ser definida positiva, temos três classes de vetores, chamadas de cárater causal dos vetores

Definição 1.13 *Um vetor v tangente à M é*
i)Tipo-espaço, se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$;
ii)Tipo-luz, se $\langle v, v \rangle = 0$ mas $v \neq 0$;
iii)Tipo-tempo quando $\langle v, v \rangle < 0$.

O conjunto dos vetores tipo-luz em T_pM é chamado *cone de luz* os vetores no interior deste cone são os vetores tipo-tempo. Enquanto os vetores no exterior são tipo-espaço e os vetores na fronteira são tipo-luz.

O cone temporal

Consideremos agora M^n uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n, índice 1, isto é, uma variedade Lorentziana n-dimensional, e $p \in M$.

Definição 1.14 *Seja T_0 o conjunto dos vetores tipo-tempo em T_pM, para $p \in M$ fixado. Definimos o cone temporal de um vetor $u \in T_pM$ como sendo o conjunto*

$$C(u) = \{v \in T_pM; \langle u, v\rangle < 0\}.$$

Note que $v \in C(u) \Leftrightarrow u \in C(v)$, mais ainda vale os seguinte

Lema 1.6 *Dois vetores $u, v \in T_pM$ tipo-tempo estão no mesmo cone temporal se, e somente se, $\langle u, v\rangle < 0$.*

Prova. Suponhamos que $u, v \in C(w)$ e sem perda de generalidade $\langle w, w\rangle = -1$. Escrevamos $u = aw + \bar{u}$ e $v = bw + \bar{v}$, com $\bar{u}, \bar{v} \in w^{\perp}$, multiplicando escalarmente com w as duas equações anteriores. obtemos a, b positivos. Já multiplicando-as por si próprias, temos $a > |\bar{u}|$ e $b > |\bar{v}|$, pois $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são tipo-espaço. Portanto, $\langle u, v\rangle = -ab + \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \leq -ab + |\bar{u}||\bar{v}| < 0$.

Reciprocamente, se $\langle u, v\rangle < 0$ temos $u, v \in C(u)$. ■

O ângulo hiperbólico

Entre dois vetores u, v não-nulos, num plano tipo-espaço podemos associar um número $0 \leq \theta \leq \pi$ de forma única tal que: $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos\theta$. Este número é dito o menor ângulo entre u, v. Este fato decorre da desigualde de Cauchy-Schwarz. No caso Lorentziano temos o ângulo hiperbólico, entre dois vetores tipo-tempo num mesmo cone temporal.

Proposição 1.15 *Sejam u, v vetores tipo-tempo em T_pM, então:*
i) $|\langle u, v\rangle| \geq |u||v|$, valendo a igualdade se, e somente se, u e v são colineares,
ii) se u, v estão no mesmo cone temporal existe um único número $\varphi \geq 0$, chamado de ângulo hiperbólico entre u e v, tal que $\langle u, v\rangle = -|u||v| \cosh\varphi$.

Prova. i) Seja $u = av + \bar{u}$, com $\bar{u} \in v^{\perp}$, então $a^2\langle v, v\rangle + \langle \bar{u}, \bar{u}\rangle < 0$, pois $\langle u, u\rangle < 0$. Daí $\langle u, v\rangle^2 = a^2\langle v, v\rangle^2 = (\langle u, u\rangle - \langle \bar{u}, \bar{u}\rangle)\langle v, v\rangle \geq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle = |u|^2|v|^2$, ou seja, $|\langle u, v\rangle| \geq |u||v|$, e a igualdade vale somente no caso de $\langle \bar{u}, \bar{u}\rangle = 0$ que é quando são colineares. ii) Estando u, v no mesmo cone temporal temos

$$-\frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} \geq 1,$$

assim temos um único $\varphi \geq 0$ tal que $\langle u, v\rangle = -|u||v| \cosh \varphi$. ■

Variedades produto

A partir de variedades semi-Riemannianas podemos obter outras, por exemplo as subvariedades semi-Remannianas que são subvariedades cujas métricas induzidas são não-degeneradas. O lema a seguir nos mostra como podemos determinar uma variedade produto.

Lema 1.7 *Se (M, g_M) e (N, g_N) são variedades semi-Riemannianas, sejam π e σ as projeções de $M \times N$ em M e N, respectivamente, e $g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N)$, então g é uma métrica em $M \times N$, tornando-a uma variedade semi-Riemanniana com índice dado por $indM + indN$.*

Prova. Sejam $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$, então

$$g(u, v) = g_M(d\pi_p(u), d\pi_p(v)) + g_N(d\sigma_q(u), d\sigma_q(v)).$$

Para mostrarmos que g é não-degenerada, suponhamos $g(u, w) = 0, \ \ \forall\, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Em particular, para w tal que $d\sigma(w) = 0$ temos

$$g_M(d\pi(u), d\pi(w)) = 0, \ \forall w, d\sigma(w) = 0.$$

Mas $d\pi(w)$ percorre todo T_pM, assim $d\pi(u) = 0$. De modo análogo, mostra-se que $d\sigma(u) = 0$ implicando que$u = 0$. Para calcularmos o índice basta tomarmos bases ortonormais de T_pM e T_qN e montarmos uma base ortonormal para $T_{(p,q)}(M \times N)$. ■

1.2.1 A Conexão de Levi-Civita

Sejam V, W campos de vetores numa variedade semi-Riemanniana, em cada ponto $p \in M$ queremos calcular taxa de variação de W na direção de V_p. Isso pode ser feito naturalmente em $\mathbb{R}^n$ como a derivação de um campo com relação ao outro. No contexto de variedades, devemos introduzir o conceito de conexão

Definição 1.16 *Uma conexão D em uma variedade é uma função*

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

(D_1) $D_V W$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear em V;
(D_2) $D_V W$ é $\mathbb{R}$-linear em W;
(D_3) $D_V(fW) = V(f)W + fD_V W, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M)$
$D_V W$ é chamada a derivada covariante de W em relação à V para a conexão D.

O axioma D_1 nos diz que $D_V W$ é um tensor em V, então podemos calcular seu valor pontualmente, isto é, se $v \in T_pM$ temos $D_v W \in T_pM$.

A conexão estará diretamente ligada à métrica desde que acrescentemos uma compatibilidade com a métrica e outra propriedade relacionada ao colchete de Lie, conforme nos mostra o teorema da unicidade e existência da conexão de Levi-Civita. Mas primeiro vejamos um resultado algébrico.

Proposição 1.17 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ e V^* é a 1-forma satisfazendo*

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle, \quad \textit{para todo } X \in \mathfrak{X}(M)$$

Então a função que leva $V \to V^*$ é um isomorfismo $\mathfrak{F}(M)$-linear de $\mathfrak{X}(M)$ para $\mathfrak{X}^*(M)$.

Prova. Ora esta aplicação é obviamente $\mathfrak{F}(M)$-linear; mostremos que é injetiva. De fato, suponhamos que $V^* = W^*$, assim, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\langle V, Z \rangle = \langle W, Z \rangle \Rightarrow \langle V - W, Z \rangle = 0 \ \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$$

daí $V = W$. Para provarmos a sobrejetividade, basta definirmos localmente

$$V = \sum_{ij} g^{ij} \theta_i \partial_j.$$

■

Com a adição de duas novas propriedades temos a unicidade da conexão conforme o seguinte teorema.

Teorema 1.18 *Em uma variedade semi-Riemanniana, existe uma única conexão satisfazendo*
(D_4)$[V, W] = D_V W - D_W V$
(D_5)$X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle$ para todos X, V e $W \in \mathfrak{X}(M)$.
D é chamada de conexão de Levi-Civita e é caracterizada pela equação de Koszul

$$\begin{aligned} 2 \langle D_V W, X \rangle = \quad & V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle \\ & - \langle V, [W, X] \rangle - \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Para provarmos este resultado, basta calcularmos o lado direito desta equação. Já a existência é obtida definindo $D_V W$ pela expressão do segundo membro da equação anterior. O cálculo direto (porém extenso) nos mostra que D satisfaz as propriedades requeridas.

1.2.2 A conexão de Levi-Civita para a Variedade Produto

Considerando M e N variedades semi-Riemannianas, a conexão de Levi-Civita de $M \times N$ depende naturalmente das conexões e das métricas de M e N. Antes de vermos esta relação, observemos o conceito de levantamentos vertical e horizontal.

Os campos de $\mathfrak{X}(M \times N)$ que são da forma $Y \equiv (0, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(N)$ são ditos levantamentos verticais de $Y \in \mathfrak{X}(N)$ e denotamos este conjunto por $\mathfrak{L}(N) \subset \mathfrak{X}(M \times N)$; de modo análogo, temos os levantamentos horizontais $\mathfrak{L}(M)$. Assim podemos enunciar o seguinte

Proposição 1.19 *Sejam M, N e $M \times N$ variedades semi-Riemannianas, se $X, Y \in \mathfrak{L}(M)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(N)$, então:*
i) $D_X Y$ é o levantamento de ${}^M D_X Y$;
ii) $D_V W$ é o levantamento de ${}^N D_V W$;
iii) $D_V X = 0 = D_X V$.

A demonstração deste resultado pode ser feita diretamente através da fórmula de Koszul (veja, por exemplo [10]).

1.3 Geodésicas

Dada uma curva $\alpha : I \to M^n$, onde M^n é uma variedade semi-Riemanniana e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, definimos um campo sobre α como sendo uma aplicação $Z : I \to TM^n$ tal que $Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Denotamos $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Proposição 1.20 *Se $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, então existe uma única função $Z \to Z' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ satisfazendo:*
i)$(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2' \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
ii)$(hZ)' = \dfrac{dh}{dt}Z + hZ' \quad \forall h \in \mathfrak{F}(I)$
iii)$(V|_\alpha)'(t) = D_{\alpha'(t)}(V) \quad \forall t \in I$ *e* $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$
iv)$\dfrac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$.

A prova deste resultado tem como chave utilizar um sistema de coordenadas para M. Após alguns cálculos, obtemos a expressão

$$Z' = \sum_i \frac{dZ^i}{dt}\partial_i + \sum_i Z^i D_{\alpha'}(\partial_i). \tag{1.3}$$

, obtendo deste modo a unicidade. Para a existência, basta definirmos Z' de acordo com a expressão anterior. Através de cálculos diretos, mostramos que as quatro propriedades são satisfeitas localmente, e pela unicidade, obtemos a independência do sistema de coordenadas.

Definição 1.21 *Uma curva $\alpha : I \to M^n$ é dita geodésica se $(\alpha')' = 0$.*

Através da equação (1.3) obtemos

$$\frac{d^2(x^k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\alpha)\frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}\frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} = 0 \tag{1.4}$$

onde $(x^1, ..., x^n)$ é um sistema de coordenadas e Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel associados. Quando $k = 1, ..., n$, temos um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, o que nos fornece alguns resultados de existência e unicidade como os seguintes:

Proposição 1.22 *Se $\alpha, \beta : I \to M^n$ são geodésicas tais que $\alpha'(a) = \beta'(a)$ em algum ponto $a \in I$ então $\alpha = \beta$.*

Proposição 1.23 *Dado $v \in T_pM$, existe uma única geodésica α_v tal que:*
i)$\alpha_v'(0) = v$;
ii)α_v é maximal, i.e., tem domínio maximal.

1.3.1 A aplicação exponencial

Definição 1.24 *Seja $v \in U \subset T_pM$ tal que a geodésica α_v é definida ao menos em $[0, 1]$. A aplicação exponencial é a função $\exp_p : U \to M$ tal que $\exp_p(v) = \alpha_v(1)$.*

Proposição 1.25 *Para cada $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U_0 \subset T_pM$ na qual $\exp_p$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança V_p em M^n.*

A prova deste resultado é uma aplicação direta do Teorema da Função Inversa e pode ser encontrada em [10].

Lema 1.8 (Referencial Geodésico) *Sejam M^n uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n e índice ν. Então, para cada $p \in M^n$, existe um referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ ortonormal em p satisfazendo $D_{E_i}E_j(p) = 0$. Este referencial será dito geodésico.*

Prova. Seja $B_\delta(0) \subset T_pM$ tal que $\exp_p : B_\delta(0) \to \exp_p(B_\delta(0))$ é um difeomorfismo, defina $\phi = \exp_p \circ J$, onde $J : B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n_\nu \to B_\delta(0) \subset T_pM$ é uma isometria. Sejam $v \in T_pM$ com $\exp_p(tv) = \alpha_v(t)$ e $v = \sum_i a^i e_i$, para $(e_i)_{i=1}^n$ uma base ortonormal de T_pM. Note que $x^i(\alpha_v(t)) = (J^{-1})^i(tv) = t(J^{-1})^i(v) = ta^i$, onde $J(a^1, ..., a^n) = \sum_i a^i e_i$. Assim, $v = \alpha_v'(0) = \sum_i a^i \partial_i|_0$ e deste modo $e_j = \partial_j|_0$, fornecendo-nos que o referencial $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é ortonormal em p. Substituindo $x^i(\alpha_v(t)) = ta^i$ na equação (1.4) obtemos

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\alpha_v(t))a^i a^j = 0 \qquad \forall k = 1, ..., n.$$

Como a^i, a^j são arbitrários temos $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. ■

Para maiores detalhes e demonstrações omitidas ver [10].

1.4 Gradiente, Divergente e o Laplaciano

Definimos nesta alguns operadores que serão utilizados neste trabalho, assim como algumas formas de calculá-los através do uso de um referencial ortonormal geodésico $\{e_i\}_{i=1}^n$ em uma variedade M de dimensão n.

1.4.1 O gradiente

Lembrando que um referencial geodésico num ponto p satisfaz $D_{e_i}e_j(p) = 0$. Seja $f \in \mathfrak{F}(M)$ definimos o gradiente de f como sendo o campo ∇f tal que $X(f) = df(X) = \langle \nabla f, X \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Com relação a um referencial ortonormal, temos

$$\nabla f = \sum_i \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial e_i} e_i,$$

onde $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$.

1.4.2 O divergente

Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos o divergente de X como sendo

$$div(X) = tr\,(Y \to D_Y X)$$

E para um referencial ortonormal geodésico temos

$$div(X) = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial e_i},$$

onde

$$X = \sum_i x^i e_i.$$

1.4.3 O Laplaciano

Para $f \in \mathfrak{F}(M)$ temos $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ e, a partir daí, definimos Δf como sendo

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

E num referencial ortonormal e geodésico temos

$$\Delta f = \sum_i \varepsilon_i e_i e_i(f).$$

1.5 Curvatura

Lema 1.9 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana com a conexão de Levi-Civita D. A aplicação dada por $R : \mathfrak{X}^3(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que*[1]

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

é um $(1,3)$ tensor em M, com a identificação de R com $\overline{R}$ tal que $\overline{R}(\theta, X, Y, Z) = \theta(R_{XY}Z)$, para θ uma 1-forma. Este tensor é chamado tensor da curvatura Riemanniana de M.

Para a prova podemos identificar R com $\bar{R} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ tal que $\bar{R}(\theta, X, Y, Z) = \theta(R_{XY}Z)$. Note é suficiente que R seja $\mathfrak{F}(M) - linear$. E com um cálculo direto temos $R_{XY}fZ = fR_{XY}Z$ e $R_{fXY}Z = fR_{XY}Z$.

O colchete de Lie e a derivada da conexão de Levi-Civita não são $\mathfrak{F}(M)-lineares$ mas esta combinação nos fornece um tensor. Devido ao caráter pontual, para $x, y \in T_pM$ podemos considerar o operador linear

$$R_{xy} : T_pM \to T_pM$$

[1]Esta definição está de acordo com [7] e [10].

que será chamado de operador de curvatura. Vejamos algumas propriedades deste operador.

Proposição 1.26 *Se* $x, y, z, v, w \in T_pM$ *então*
i)$R_{xy} = -R_{yx}$
ii)$\langle R_{xy}v, w\rangle = -\langle R_{xy}w, v\rangle$
iii)$R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$
iv)$\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$.

A título de exemplo, faremos a demonstração de iii). Primeiro, estabeleçamos a notação da soma das permutações: se $F : A^n \to \mathbb{R}$, definimos $\sigma F(x_1, ..., x_n) = \sum_{p\in\varsigma} F(p(x_1, ..., x_n))$ onde ς é o conjunto da permutações cíclicas de $x_1, ..., x_n$. Por exemplo,

$$\sigma F(X, Y, Z) = F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y)$$

Considere X, Y, Z extensões dos vetores x, y, z de forma que os colchetes entre eles sejam nulos, então temos

$$\begin{aligned}
\sigma R_{XY}Z &= \sigma(D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z)\\
&= \sigma([D_Y, D_X]Z)\\
&= \sigma(D_YD_XZ - D_XD_YZ)\\
&= \sigma D_YD_XZ - \sigma D_XD_YZ\\
&= \sigma D_XD_ZY - \sigma D_XD_YZ\\
&= \sigma D_X(D_ZY - D_YZ)\\
&= \sigma D_X[Z, Y] = 0
\end{aligned}$$

Usando estas notações temos a segunda identidade de Bianchi como nos diz a seguinte proposição.

Proposição 1.27 *Se* $x, y, z \in T_pM$ *então* $\sigma(D_zR)(x, y) = 0$

Para a demonstração que usa uma vizinhança normal veja [10].

Agora vejamos uma expressão que nos diz que o tensor curvatura pode ser expresso em termos do tensor métrico g.

Lema 1.10 *Em uma vizinhança coordenada* $x^1, ..., x^n$ *temos*

$$R_{\partial_k\partial_l}(\partial_j) = \sum_i R^i_{jkl}\partial_i,$$

onde as componentes de R são

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}$$

A demonstração segue direto do cálculo baseado na expressão de $D_{\partial_l}(D_{\partial_k}\partial_j)$ em termos dos símbolos de Christoffel Γ^i_{jk}, onde $D_{\partial_i}\partial_j = \sum_l \Gamma^l_{ij}\partial_l$.

1.5.1 O tensor Curvatura de Ricci

Definimos o tensor curvatura de Ricci como sendo uma forma bilinear $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ dada pela contração $C^1_2 R$ do tensor curvatura. Desta forma, podemos calcular o tensor Ricci como sendo o traço

$$Ric(X, Z) = tr\,\{Y \to R_{XY}Z\} = \sum_i \varepsilon_i \langle R_{XE_i}Z, E_i\rangle,$$

onde $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal e $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$.

1.5.2 Curvatura Seccional

Seja Π um 2-plano em T_pM e considere a função $Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2$, $v, w \in \Pi$. Dizemos que Π é degenerado se $Q(v, w) = 0$ em uma base de Π e, portanto, em todas.

Lema 1.11 *Seja Π um 2-plano não-degenerado em T_pM. O número*

$$K(v, w) = \langle R_{vw}v, w\rangle / Q(v, w)$$

independe da escolha da base de Π e é chamado de curvatura seccional $K(\Pi)$.

O interessante é podermos estender esta definição para planos degenerados conforme nos auxilia o seguinte lema algébrico.

Lema 1.12 *Dados dois vetores v, w em um espaço com produto vetorial, existem $\bar{v}, \bar{w}$ arbitrariarmente próximos de v, w, respectivamente que geram um espaço não-degenerado.*

Prova. Suponha sem perda de generalidade que v, w são linearmente independentes, e naturalmente que $span\{v, w\}$ seja degenerado. Se v for tipo luz, seja x tal que

$\langle v, x\rangle \neq 0$, se não tome $x \neq 0$ com caráter causal oposto ao de v e tal que $Q(v,x) < 0$. Considere os vetores v e $w + \delta x$, então

$$\begin{aligned} Q(v, w+\delta x) &= \delta^2 Q(x,v) + 2b\delta + Q(v,w) \\ &= \delta^2 Q(x,v) + 2b\delta \end{aligned}$$

Se $b = 0$ tome x tal que $Q(x,v) < 0$. Se $b \neq 0$, para δ suficientemente pequeno temos $Q(v, w+\delta x) \neq 0$. ■

O próximo resultado é válido para qualquer função satisfazendo a linearidade e as simetrias do tensor R. No entanto, o enunciaremos apenas para este caso particular.

Proposição 1.28 *Se $K = 0$ em $p \in M$ então $R = 0$ em p.*

Prova. Ora $\langle R_{vw}v, w\rangle = 0$ para todos $v, w \in T_pM$ gerando 2-planos não-degenerados. Já para os planos degenerados, temos sequências $(v_n, w_n) \to (v, w)$ com *span*$\{v_n, w_n\}$ não-degenerado pelo Lema 1.12 satisfazendo $\langle R_{v_n w_n} v_n, w_n\rangle = 0$. Logo, por continuidade, temos a igualdade no caso limite, i.e., $\langle R_{vw}v, w\rangle = 0$. E *via* polarizações algébricas chegamos a $\langle R_{xy}v, w\rangle = 0$ ■

Dizemos que uma variedade é *flat* quando $K \equiv 0$ e que uma função linear $F(X, Y, Z, W)$ é tipo *curvatura* se satisfizer as simetrias de $\langle R_{xy}v, w\rangle$.

Corolário 1.29 *Seja F uma função tipo curvatura em T_pM tal que*

$$K(v,w) = \frac{F(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

com v, w gerando um 2-plano não-degenerado. Então $\langle R_{xy}v, w\rangle = F(x,y,v,w)$ $\forall x,y,v,w \in T_pM$.

Este aparato nos diz qual a expressão para R no caso de variedades de curvatura seccional constante.

Corolário 1.30 *Se M tem curvatura seccional constante C então*

$$R_{xy}z = C\{\langle z,x\rangle - \langle z,y\rangle x\}.$$

Prova. Basta definirmos $F(x,y,z,w) = C\{\langle x,z\rangle \langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle \langle x,w\rangle\}$ e utilizarmos o corolário 1.29. ■

Capítulo 2

Imersões no produto $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

2.1 Tipos de Imersões

Com o objetivo de trazer mais clareza ao temas abordados definimos inicialmente imersões.

Definição 2.1 *Uma aplicação $\psi : M \to N$ diferenciável é dita uma imersão se sua diferencial $d\psi_p$ for injetiva para todo $p \in M$.*

No contexto de variedades semi-Riemannianas podemos fazer uma classificação entre algumas imersões.

Definição 2.2 *Uma imersão $\psi : M \to N$, onde N é uma variedade semi-Riemanniana com métrica g é dita:*

i) tipo-espaço, se a métrica induzida $\psi^* g$ for Riemanniana;

ii) tipo-tempo, se $\psi^* g$ for não degenerada, mas não positiva definida;

iii) lipo-luz, se $\psi^* g$ for degenerada positiva semi-definida.

A partir de agora, trataremos principalmente de imersões tipo-espaço.

Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M$ uma imersão tipo-espaço e note que o campo ∂_t está definido globalmente em $\psi(\Sigma^n)$. Considere uma vizinhança normal U em $\psi(\Sigma^n)$ definimos $\overline{N} = \partial_t^\perp = \partial_t - \sum_{i=1}^n \langle d\psi X_i, \partial_t \rangle d\psi X_i$, para $\{X_i\}$ um referencial ortonormal local em Σ^n, será um campo normal que pode ser estendido globalmente em $\psi(\sum^n)$ e veja que

$$\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = \langle \overline{N}, \partial_t \rangle = -1 - \sum_{i=1}^{n} \langle d\psi X_i, \partial_t \rangle^2 \leq -1$$

Assim, normalizado $\overline{N}$, obtemos a aplicação normal de Gauss N, que está na mesma orientação temporal que ∂_t, na hipersuperfície Σ^n.

Denotemos por $\overline{D}$ e D as conexões de Levi-Civita em $-\mathbb{R} \times M$ e em Σ^n, respectivamente. Então $\overline{D}_X Y = D_X Y + (D_X Y)^{\perp} = D_X Y + II(X,Y) = D_X Y - \left\langle \overline{D}_X Y, N \right\rangle N$. Note que

$$X \langle Y, N \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \overline{D}_X Y, N \right\rangle = - \left\langle Y, \overline{D}_X N \right\rangle.$$

Assim teremos $\overline{D}_X Y = D_X Y + \left\langle \overline{D}_X N, Y \right\rangle N$ nos fornecendo

$$\overline{D}_X Y = D_X Y - \langle AX, Y \rangle N. \tag{2.1}$$

Para $AX = -\overline{D}_X N$ observemos que A é um operador autoadjunto pois $-\langle AX, Y \rangle N = II(X,Y) = II(Y,X) = -\langle AY, X \rangle N$. A aplicação A é o operador de forma ou o endomorfismo de Weingarten com respeito à aplicação de Gauss N e está associado à segunda forma fundamental. Desta forma, A é diagonalizável, portanto, podemos considerar os autovalores de A, como sendo $k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_n$ e definirmos os seguintes n invariantes algébricos:

$$S_r(p) = \sigma_r(k_1(p), ..., k_n(p))$$

onde

$$\sigma_r(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1 < ... < i_r} x_{i_1} ... x_{i_r}.$$

As funções S_r, a menos de sinal, são os coeficientes do polinômio característico de A.O que de fato ocorre é que

$$P(t) = det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}.$$

Mostremos tal fato por indução finita sobre r. Ora, a equação é válida para $n = 1$ pois $(t - k_1) = (-1)^0 S_0 t^{1-0} + (-1)^1 S_1 t^{1-1}$. Suponha o resultado válido até certo n e provemos para $n+1$. Mas

$$\begin{aligned}
det(tI - A) &= \Pi_{r=1}^{n+1}(t - k_r) = \Pi_{r=1}^{n}(t - k_r)(t - k_{n+1}) \\
&= \textstyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r^n t^{n-r} (t - k_{n+1}) \\
&= \textstyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r^n t^{n+1-r} + \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} \sigma_r^n k_{n+1} t^{n-r} \\
&= \textstyle\sum_{r=-1}^{n-1} (-1)^{r+1} \sigma_{r+1}^n t^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} \sigma_r^n k_{n+1} t^{n-r} \\
&= \textstyle\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} (\sigma_{r+1}^n + \sigma_r^n k_{n+1}) t^{n-r} + t^{n+1} + (-1)^{n+1} k_1 ... k_{n+1}
\end{aligned}$$

Note que, separando os itens que possuem k_{n+1}, obtemos $\sigma_{r+1}^{n} + \sigma_r^n k_{n+1} = \sigma_{r+1}^{n+1}$, onde $\sigma_r^j = \sigma_r(k_1, ..., k_j)$, $j \geq r$. Logo

$$\begin{aligned} P(t) &= \textstyle\sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sigma_r^{n+1} t^{n+1-r} + (-1)^0 \sigma_0^{n+1} t^{n+1-0} + (-1)^{n+1-0} \sigma_{n+1}^{n+1} t^{n+1-(n+1)} \\ &= \textstyle\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r \sigma_r^{n+1} t^{n+1-r} \qquad\qquad \blacksquare \\ &= \textstyle\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r S_r t^{n+1-r} \end{aligned}$$

Assim, fica claro que os S_r são invariantes algébricos, pois só dependem dos coeficientes do polinômio característico que só muda de sinal de acordo com a base utilizada se esta for positiva ou negativa em relação a uma outra fixada. Com isto definimos as r-curvaturas médias dadas por:

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} H_r = (-1)^r S_r(k_1, ..., k_n)$$

No caso particular $r = 1$, vale que $H_1 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = -\frac{1}{n} tr(A) = H$, que é a principal curvatura extrínseca de Σ^n em nossos estudos. A escolha do sinal $(-1)^r$ é justificada pelo fato do vetor curvatura média $\vec{H} = HN$ num ponto onde $H(p) > 0$ satisfará $\langle \vec{H}, N \rangle_p < 0$ e assim $\vec{H}$ e N estão na mesma orientação temporal.

2.2 Hipersuperfícies em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

Neste caso particular de produto entre variedades diferenciáveis temos a métrica usual dada por

$$\langle ., . \rangle = -\pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2) + \pi_M^*(\langle ., . \rangle_M),$$

isto é, para vetores $(s\partial_t, v)$ e $(\lambda\partial_t, w)$, temos

$$\langle (s\partial_t, v), (\lambda\partial_t, w) \rangle = -s\lambda + \langle v, w \rangle_M .$$

Consideraremos as subvariedades dadas por $M_{t_0}^n = \{t_0\} \times M$ que serão chamadas de *slices* conforme a palavra inglesa que significa "fatia".

Proposição 2.3 *Todo slice é uma hipersuperfície totalmente geodésica.*

Para provarmos este resultado é necessário obtermos uma forma de calcular a componente normal da derivada covariante em $-\mathbb{R} \times M$ de um campo definido em $M_{t_0}^n$ com relação a outro campo definido no mesmo slice.

Lema 2.1 *Se* $\overline{X}, \overline{Y}$ *são campos de vetores diferenciáveis em* $M^n_{t_0}$ *com* $\overline{X} = (f\partial_t, X)$ *e* $\overline{Y} = (g\partial_t, Y)$*, então* $\overline{D}_{\overline{X}}\overline{Y}^{\perp} = X(g)\partial_t$ *(onde* $\partial_t \equiv (\partial_t, 0)$*).*

Prova. Note que a aplicação normal de Gauss sobre M_{t_0} é dada por $N(p) = \partial_t$ então $\overline{D}_{\overline{X}}\overline{Y}^{\perp} = h\partial_t$; daí $-h = \left\langle \overline{D}_{\overline{X}}\overline{Y}^{\perp}, \partial_t \right\rangle$, o que implica que a componente tangente não afeta o produto anterior e, assim, pela fórmula de Koszul temos

$$
\begin{aligned}
2\left\langle \overline{D}_{\overline{X}}\overline{Y}^{\perp}, \partial_t \right\rangle &= 2\left\langle \overline{D}_{\overline{X}}\overline{Y}, \partial_t \right\rangle \\
&= \overline{X}\left\langle \overline{Y}, \partial_t \right\rangle + \overline{Y}\left\langle \partial_t, \overline{X} \right\rangle - \partial_t\left\langle \overline{X}, \overline{Y} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \overline{X}, [\overline{Y}, \partial_t] \right\rangle + \left\langle \overline{Y}, [\partial_t, \overline{X}] \right\rangle + \left\langle \partial_t, [\overline{X}, \overline{Y}] \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Considerando as extensões locais de $\overline{X}, \overline{Y}$ de tal forma que as funções f, g não dependam de t temos $\partial_t \left\langle \overline{X}, \overline{Y} \right\rangle = 0$. Suponhamos $U \subset M$ com $x^1, ..., x^n$ parametrização tal que Y pode ser escrita localmente como $Y = \sum_i b^i \partial_i$. Então

$$
\begin{aligned}
[\overline{Y}, \partial_t] &= (g\partial_t, Y)\partial_t - \partial_t(g\partial_t, Y) \\
&= g\partial_t^2 + Y\partial_t - g\partial_t^2 - \partial_t \textstyle\sum_i b^i \partial_i \\
&= Y\partial_t - \textstyle\sum_i b^i \partial_t \partial i \\
&= Y\partial_t - Y\partial_t = 0.
\end{aligned}
$$

Pois $[Y, \partial_t] = 0$. Analogamente, $[\partial_t, \overline{X}] = 0$. Para a parcela$[\overline{X}, \overline{Y}]$, temos

$$
\begin{aligned}
[\overline{X}, \overline{Y}] &= (f\partial_t, X)(g\partial_t, Y) - (g\partial_t, Y)(f\partial_t, X) \\
&= fg\partial_t^2 + f\partial_t Y + X(g)\partial_t + gX\partial_t + XY \\
&\quad -gf\partial_t^2 - g\partial_t X - Y(f)\partial_t - fY\partial_t - YX \\
&= [X, Y] + X(g)\partial_t - Y(f)\partial_t.
\end{aligned}
$$

Daí obtemos a seguinte expressão

$$-h = \frac{1}{2}\{-X(g) - Y(f) - X(g) + Y(f)\} = -X(g).$$

E, portanto, $h = X(g)$. ■

Prova da Proposição 2.3: Recordemos que uma subvariedade semi-Riemanniana M de $\overline{M}$ é totalmente geodésica se a segunda forma fundamental $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ dada por $II(X, V) = (\overline{D}_X V)^{\perp}$ for identicamente nula. Notemos que este é um operador bilinear simétrico, já que ele é $\mathfrak{F}(M)$-linear na primeira entrada e $II(X, V) -$

$II(V,X) = (\overline{D}_X V - \overline{D}_X V)^\perp = [X,V]^\perp = 0$ devido ao colchete permanecer no espaço tangente. O resultado segue do fato que g é nula, uma vez que o campo V é tangente ao slice $M^n_{t_0}$. ■

2.3 A equação de Gauss e o tensor de Ricci de uma hipersuperfície

Para calcularmos o tensor de Ricci de uma hipersuperfície Σ imersa na variedade $-\mathbb{R}\times M^n$ utilizamos a bem conhecida equação de Gauss que é dada da seguinte forma

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^T - \langle AX, Z\rangle AY + \langle AY, Z\rangle AX \tag{2.2}$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $-\mathbb{R}\times M^n$. Ora, a equação anterior é válida pois

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= D_{[X,Y]}Z - D_X D_Y Z + D_Y D_Y Z \\ &= (\overline{D}_{[X,Y]}Z)^T - (\overline{D}_X(\overline{D}_Y Z)^T)^T + (\overline{D}_Y(\overline{D}_Y Z)^T)^T \\ &= (\overline{R}(X,Y)Z)^T + (\overline{D}_X\overline{D}_Y Z)^T - (\overline{D}_Y\overline{D}_X Z)^T - (\overline{D}_X(\overline{D}_Y Z)^T)^T \\ &+(\overline{D}_Y(\overline{D}_X Z)^T)^T. \end{aligned}$$

Usando a equação (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (\overline{R}(X,Y)Z)^T - (\overline{D}_X(\langle\overline{D}_Y Z, N\rangle N)^T + (\overline{D}_Y(\langle\overline{D}_X Z, N\rangle N)^T \\ &= (\overline{R}(X,Y)Z)^T - \langle AY, Z\rangle\overline{D}_X N + \langle AX, Z\rangle\overline{D}_Y N \\ &= (\overline{R}(X,Y)Z)^T + \langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY. \end{aligned}$$

Com isto, podemos calcular o tensor de Ricci, que é o seguinte.

Lema 2.2 *Sejam $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $Ric : \mathfrak{X}(\Sigma)^2 \to \mathfrak{F}(\Sigma)$ o tensor de Ricci de M, então*

$$Ric(X,X) = \sum_i \langle\overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + \left|AX + \frac{nH}{2}X\right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2.$$

Prova. Considere X um campo de vetores em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_k\}_{k=1}^n$ um referencial ortonormal. Usando a equação de Gauss, obtemos

$$R(X,E_i)X = (\overline{R}(X,E_i)X)^T - \langle AX, X\rangle AE_i + \langle AE_i, X\rangle AX$$

Somando em i, temos

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle - \sum_i \langle AX,X\rangle\langle AE_i,E_i\rangle + \sum_i \langle AE_i,X\rangle\langle AX,E_i\rangle \\ &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle - \langle AX,X\rangle \sum_i \langle AE_i,E_i\rangle + \sum_i \langle AX,E_i\rangle^2 \\ &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle - \langle AX,X\rangle \sum_i \langle AE_i,E_i\rangle + \sum_i \langle AX,E_i\rangle^2 \\ &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + nH\langle AX,X\rangle + \langle AX,AX\rangle. \end{aligned}$$

Expressando de outra forma, obtemos o resultado

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + nH\langle AX,X\rangle + \tfrac{n^2H^2}{4}\langle X,X\rangle - \tfrac{n^2H^2}{4}\langle X,X\rangle \\ &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + \langle AX + \tfrac{nH}{2}X, AX + \tfrac{nH}{2}X\rangle - \tfrac{n^2H^2}{4}\langle X,X\rangle \\ &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + |AX + \tfrac{nH}{2}X|^2 - \tfrac{n^2H^2}{4}|X|^2. \end{aligned}$$

■

Considerando agora o caso particular em que $M^n = \mathbb{H}^n$. Aqui, o modelo para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ é $\mathbb{H}^n = \{(x_1,...,x_n; x_n > 0\}$ com a métrica

$$\langle .,.\rangle_{\mathbb{H}^n} = \frac{1}{x_n^2}\langle .,.\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Assim, temos

$$\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle = \langle \overline{R}(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle$$

onde * denota a projeção em $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, por exemplo, $E_i^* = E_i + \langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t$ e a equação anterior é válida devido à ∂_t ser um campo paralelo. Segue que

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle &= \langle R(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n} \\ &= -(\langle X^*,X^*\rangle_{\mathbb{H}^n}\langle E_i^*,E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle X^*,E_i^*\rangle^2_{\mathbb{H}^n}) \\ &= -(\langle X^*,X^*\rangle\langle E_i^*,E_i^*\rangle - \langle X^*,E_i^*\rangle^2), \end{aligned}$$

uma vez que $AX = -\overline{\nabla}_X\partial_t \equiv 0$. Substituindo os valores dos campos, temos

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle &= -|X + \langle X,\partial_t\rangle\partial_t|^2|E_i + \langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t|^2 + \\ &+ \langle X + \langle X,\partial_t\rangle\partial_t, E_i + \langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t\rangle^2 \\ &= -(|X|^2 + \langle X,\partial_t\rangle^2)(1 + \langle E_i,\partial_t\rangle^2) + (\langle X,E_i\rangle + \langle X,\partial_t\rangle\langle E_i,\partial_t\rangle)^2 \\ &= -(|X|^2 + |X|^2\langle E_i,\partial_t\rangle^2 + \langle X,\partial_t\rangle^2 + \langle X,\partial_t\rangle^2\langle E_i,\partial_t\rangle^2) + \\ &\quad +\langle X,E_i\rangle^2 + 2\langle X,E_i\rangle\langle X,\partial_t\rangle\langle E_i,\partial_t\rangle + \langle X,\partial_t\rangle^2\langle E_i,\partial_t\rangle^2. \end{aligned}$$

Tomando a somatória em i, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle &= -\{n|X|^2 + |X|^2|\partial_t^T|^2 + n\langle X,\partial_t^T\rangle^2 + \langle X,\partial_t^T\rangle^2|\partial_t^T|^2 - \\ &\quad -|X|^2 - 2\langle X,\partial_t^T\rangle^2 - \langle X,\partial_t^T\rangle^2|\partial_t^T|^2\} \\ &= -\{(n-1)|X|^2 + |X|^2|\nabla h|^2 + (n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2\}, \end{aligned}$$

onde $\partial_t^T = \partial_t + \langle \partial_t, N\rangle N = -\nabla h$ para h a função altura $\pi_{\mathbb{R}}$ mais detalhada na seguinte seção. Daí temos o seguinte

Corolário 2.4 *Sejam* $\psi : \Sigma \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ *e* $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ *então*

$$Ric(X,X) = -(n-1)|X|^2 - |X|^2|\nabla h|^2 - (n-2)\langle X, \nabla h\rangle^2 + \left|AX + \frac{nH}{2}X\right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2$$

Prova. Basta observar o Lema 2.2 e chegamos ao resultado desejado ∎

2.4 As funções altura e suporte

2.4.1 A função altura

No nosso estudo analisemos as seguintes funções que nos informam propriedades analíticas e geométricas sobre o comportamento de uma dada hipersuperfície. Primeiro, observemos que a função altura é dada por $h(t,p) = t$ e calculemos o seu gradiente ∇h. Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então podemos escrever $X = X^* + f\partial_t$, onde X^* é tangente à fibra Riemanniana, e assim,

$$\langle \nabla h, X\rangle = Xh = X^*(t) + f\partial_t(t) = f = -\langle X, \partial_t\rangle.$$

Logo

$$\nabla h = -\partial_t{}^T = -\partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N,$$

e, consequentemente,

$$|\nabla h|^2 = -1 + \langle N, \partial_t\rangle^2. \tag{2.3}$$

Para o cálculo do Laplaciano da função altura, considere uma extensão local de ∇h em $-\mathbb{R} \times M^n$ e daí

$$\overline{D}_X \nabla h = -\overline{D}_X \partial_t - X(\langle \partial_t, N\rangle)N - \langle \partial_t, N\rangle \overline{D}_X N,$$

logo, da fórmula de Gauss,

$$D_X \nabla h = -\langle \partial_t, N\rangle \overline{D}_X N = \langle \partial_t, N\rangle AX.$$

Considere um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em Σ^n,então

$$\Delta h = \sum_{i=1}^n \langle D_{E_i} \nabla h, E_i\rangle = \langle \partial_t, N\rangle \sum_{i=1}^n \langle AE_i, E_i\rangle = -nH\langle \partial_t, N\rangle.$$

2.4.2 A função suporte

Analisemos agora a função suporte $f = \langle N, \partial_t \rangle$ que, geometricamente, mede, a menos de sinal, o cosseno hiperbólico do ângulo entre o campo normal N à Σ e o campo ∂_t. Ora

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, X \rangle &= X\langle N, \partial_t \rangle \\ &= \langle \overline{D}_X N, \partial_t \rangle + \langle N, \overline{D}_X \partial_t \rangle \\ &= \langle AX, -\partial_t{}^T \rangle = \langle AX, \nabla h \rangle \\ &= \langle A\nabla h, X \rangle.\end{aligned}$$

Como o campo X é arbitrário, segue que $\nabla f = A(\nabla h)$. O cálculo do Laplaciano da função suporte é um pouco mais complexo e será dado no Lema 2.3, observando-se algumas condições especiais.

Lema 2.3 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$ uma imersão isométrica tipo-espaço com curvatura média constante, então*

$$\Delta \langle N, \partial_t \rangle = (\overline{Ric}(N, N) + |A|^2)\langle N, \partial_t \rangle.$$

Prova. Seja $\{E_k\}_{k=1}^n$ um referencial ortonormal geodésico de autovetores de A em $p \in \Sigma^n$ fixado, então

$$\begin{aligned}\Delta \langle N, \partial_t \rangle &= \textstyle\sum_{k=1}^n E_k E_k(\langle N, \partial_t \rangle) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n E_k(\langle \overline{D}_{E_k} N, \partial_t \rangle) \\ &= -\textstyle\sum_{k=1}^n E_k(\langle AE_k, \partial_t \rangle) \quad em\ p.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Denotando agora por

$$\partial_t = \sum_l \alpha_l E_l - \langle N, \partial_t \rangle N \tag{2.5}$$

e

$$AE_k = \sum_l h_{kl} E_l \tag{2.6}$$

temos

$$\begin{aligned} E_k\langle AE_k, \partial_t\rangle &= \textstyle\sum_l \langle \overline{D}_{E_k}(h_{kl}E_l), \partial_t\rangle + \langle AE_k, \overline{D}_{E_k}\partial_t\rangle \\ &= \textstyle\sum_l \langle \overline{D}_{E_k}(h_{kl}E_l), \partial_t\rangle \\ &= \textstyle\sum_l E_k(h_{kl})\langle E_l, \partial_t\rangle + \sum_l h_{kl}\langle \overline{D}_{E_k}E_l, \partial_t\rangle \\ &= \textstyle\sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l + \sum_l h_{kl}\langle \overline{D}_{E_k}E_l, \partial_t^T - \langle N, \partial_t\rangle N\rangle \\ &= \textstyle\sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l + \sum_l h_{kl}\langle \overline{D}_{E_k}E_l, -\langle N, \partial_t\rangle N\rangle \\ &= \textstyle\sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l - \sum_l h_{kl}\langle N, \partial_t\rangle\langle \overline{D}_{E_k}E_l, N\rangle \\ &= \textstyle\sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l - \langle N, \partial_t\rangle \sum_l h_{kl}^2 \end{aligned}$$

Note que usamos que a parte tangente de $\overline{D}_{E_k}E_l$ é nula em p, pois o referencial foi tomado geodésico em p; assim pela equação (2.4), temos no ponto p

$$\Delta\langle N, \partial_t\rangle = -\sum_{kl} E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle |A|^2. \tag{2.7}$$

Analisemos agora o valor do primeiro somatório da equação anterior, isto é, o valor de $\sum_{kl} E_k(h_{kl})\alpha_l$. Ora, somaremos primeiro em k e, antes ainda, observemos o termo $E_k(h_{kl})$.

Sendo N ortogonal ao espaço tangente onde E_l está inserido vale $\langle E_l, N\rangle = 0$, daí

$$E_k\langle E_l, N\rangle = 0 \Rightarrow \langle \overline{D}_{E_k}E_l, N\rangle = \langle E_l, -\overline{D}_{E_k}N\rangle.$$

Pela simetria de A, $\langle \overline{D}_{E_k}E_l, N\rangle = \langle \overline{D}_{E_l}E_k, N\rangle$ temos

$$\begin{aligned} h_{kl} &= \langle AE_k, E_l\rangle \\ &= \langle \overline{D}_{E_k}E_l, N\rangle. \end{aligned}$$

E, consequentemente,

$$\begin{aligned} E_k(h_{kl}) &= E_k\langle \overline{D}_{E_l}E_k, N\rangle \\ &= \langle \overline{D}_{E_k}\overline{D}_{E_l}E_k, N\rangle + \langle \overline{D}_{E_l}E_k, \overline{D}_{E_k}N\rangle. \end{aligned}$$

Como o referencial $\{E_k\}_{k=1}^n$ é geodésico em p, temos $(\overline{D}_{E_l}E_k)^T = 0$ em p e daí $\langle \overline{D}_{E_l}E_k, \overline{D}_{E_k}N\rangle = 0$ e, assim, obtemos

$$\begin{aligned} E_k(h_{kl}) &= \langle \overline{D}_{E_k}\overline{D}_{E_l}E_k, N\rangle \\ &= \langle \overline{D}_{E_k}\overline{D}_{E_l}E_k, N\rangle - \langle \overline{D}_{E_l}\overline{D}_{E_k}E_k, N\rangle + \langle \overline{D}_{E_l}\overline{D}_{E_k}E_k, N\rangle \\ &= \langle \overline{D}_{E_k}\overline{D}_{E_l}E_k - \overline{D}_{E_l}\overline{D}_{E_k}E_k, N\rangle + \langle \overline{D}_{E_l}\overline{D}_{E_k}E_k, N\rangle \\ &= \langle \overline{D}_{E_k}\overline{D}_{E_l}E_k - \overline{D}_{E_l}\overline{D}_{E_k}E_k, N\rangle + E_l\langle \overline{D}_{E_k}E_k, N\rangle - \langle \overline{D}_{E_k}E_k, \overline{D}_{E_l}N\rangle \\ &= \langle \overline{R}(E_l, E_k)E_k, N\rangle + E_l\langle AE_k, E_k\rangle \\ &= -\langle \overline{R}(E_k, E_l)E_k, N\rangle + E_l\langle AE_k, E_k\rangle \end{aligned}$$

A última igualdade se dá devido ao fato de $[E_l, E_k]$ ser tangente a Σ^n e $[E_l, E_k] = [E_l, E_k]^T = (\overline{D}_{E_l} E_k - \overline{D}_{E_k} E_l)^T = 0$ em p.

Somando agora em k obtemos

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_k E_k(h_{kl}) &= -\overline{Ric}(E_l, N) + E_l(\textstyle\sum_k \langle AE_k, E_k\rangle) \\ &= -\overline{Ric}(E_l, N) + E_l(-nH) \\ &= -\overline{Ric}(E_l, N) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{kl} E_k(h_{kl})\alpha_l &= -\textstyle\sum_l \alpha_l \overline{Ric}(E_l, N) \\ &= -\overline{Ric}(\textstyle\sum_l \alpha_l E_l, N) \\ &= -\overline{Ric}(\partial_t + \langle N, \partial_t\rangle N, N) \\ &= -\overline{Ric}(\partial_t, N) - \langle N, \partial_t\rangle \overline{Ric}(N, N). \end{aligned}$$

Mas note que $\overline{Ric}(\partial_t, N) = \overline{Ric}(N, \partial_t) = 0$, pois $\overline{R}(N, E_k)\partial_t = 0$ e, portanto, temos

$$-\sum_{kl} E_k(h_{kl})\alpha_l = \langle N, \partial_t\rangle \overline{Ric}(N, N). \tag{2.8}$$

Substituindo na equação (2.7) obtemos o resultado desejado. ■

O próximo lema é um resultado algébrico que será útil para reescrevermos o resultado anterior de modo que podemos melhor utilizar tais equações.

Lema 2.4 *Se A é o operador de forma então vale a identidade algébrica*

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2$$

onde k_i são os autovalores de A e $|.|$ é a norma de Hilbert-Schmidt.

Prova. Desde que $H^2 = \left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n k_i\right)^2$ e $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} H_2 = \sum_{i<j} k_i k_j$, temos $n^2H^2 = (\sum_{i=1}^n k_i)^2$. Como $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$, temos $n(n-1)H_2 = 2\sum_{i<j} k_i k_j$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} n^2H^2 - n(n-1)H_2 &= (\textstyle\sum_i k_i)^2 - 2\textstyle\sum_{i<j} k_i k_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} k_i k_j - \textstyle\sum_{i\neq j} k_i k_j \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n k_i^2 = |A|^2. ■ \end{aligned}$$

Agora analisemos o caso em que M^n tem curvatura seccional constante κ para o cálculo do Laplaciano da função suporte.

Lema 2.5 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$ uma imersão tipo-espaço com aplicação normal de Gauss N e curvatura média H constante. Suponha que a fibra Riemanniana M^n tenha curvatura seccional constante κ, então*

$$\Delta\langle N, \partial_t\rangle = (n^2H^2 - n(n-1)H_2 + (n-1)k|\nabla h|^2)\langle N, \partial_t\rangle$$

onde h é a função altura $\pi_{\mathbb{R}}$.

Prova. Pelo Lema 2.3, temos

$$\Delta\langle N, \partial_t\rangle = (\overline{Ric}(N,N) + |A|^2)\langle N, \partial_t\rangle.$$

Utilizando o Lema 2.4, resta-nos provar que $\overline{Ric}(N,N) = (n-1)k|\nabla h|^2$. Para isto considere a projeção do campo normal N na fibra Riemanniana que é $N^* = N + \langle N, \partial_t\rangle\partial_t$. Assim

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(N,N) &= \overline{Ric}(N^* - \langle N, \partial_t\rangle\partial_t, N^* - \langle N, \partial_t\rangle\partial_t) \\ &= \overline{Ric}(N^*, N^*) - 2\langle N, \partial_t\rangle\overline{Ric}(N^*, \partial_t) + \langle N, \partial_t\rangle^2\overline{Ric}(\partial_t, \partial_t) \end{aligned}$$

Usando que ∂_t é um campo paralelo na conexão $\overline{D}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(X, \partial_t) &= \textstyle\sum_i \epsilon_i\langle\overline{R}(X, E_i)\partial_t, E_i\rangle \\ &= \textstyle\sum_i \epsilon_i 0 = 0 \end{aligned}$$

onde $\epsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$ Assim calculemos $\overline{Ric}(N^*, N^*)$.

Considere agora um referencial ortonormal geodésico em p satisfazendo $E_{n+1} = \partial_t$ e suponha que N^* seja não nulo no ponto (t_0, p) e tome E_n paralelo a N^*. Assim

$$\overline{Ric}(N^*, N^*) = \sum_{k=1}^{n+1}\langle\overline{R}(E_k, N^*)E_k, N^*\rangle$$

Quando $k = n+1$ temos $E_k = \partial_t$, e portanto, $\overline{R}(\partial_t, N^*)\partial_t = 0$. Para $k = n$ vale $N^* = \lambda E_k$ e, portanto, $\overline{R}(E_k, N^*)E_k = 0$. Assim temos

$$\overline{Ric}(N^*, N^*) = \sum_{k=1}^{n-1}\langle\overline{R}(E_k, N^*)E_k, N^*\rangle.$$

Como E_k e N^* são tangente ao slice M_{t_0} no ponto (t_0, p) segue que

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(N^*, N^*) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n-1}\langle R(E_k, N^*)E_k, N^*\rangle_M \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k\{\langle E_k, E_k\rangle_M\langle N^*, N^*\rangle_M - \langle E_k, N^*\rangle_M^2\} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k\{\langle N + \langle N, \partial_t\rangle\partial_t, N + \langle N, \partial_t\rangle\partial_t\rangle_M\} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k\{\langle N + \langle N, \partial_t\rangle\partial_t, N + \langle N, \partial_t\rangle\partial_t\rangle\} \\ &= k\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1 + \langle N, \partial_t\rangle^2) \\ &= k(n-1)(-1 + \langle N, \partial_t\rangle^2) = k(n-1)|\nabla h|^2, \end{aligned}$$

onde usamos a equação de Gauss e que $A \equiv 0$ em nos slices. ■

2.5 O princípio do máximo generalizado de Omori-Yau

O seguinte resultado é uma ferramenta analítica que aparece nos principais resultados desta dissertação, pois é uma versão generalizada do princípio do máximo como vemos a seguir:

Lema 2.6 (O princípio do máximo generalizado de Omori-Yau) *Seja Σ^n uma variedade Riemmaniana n-dimensional completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente e $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave que é também limitada inferiormente. Então existe uma sequência $(p_k) \subset \Sigma^n$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} f(p_k) = \inf f, \qquad \lim_{k\to\infty} |\nabla f(p_k)| = 0 \quad e \quad \lim_{k\to\infty} \Delta f(p_k) \geq 0$$

A demonstração deste resultado foge aos propósitos deste trabalho, mas pode ser encontrada em [4] e [11].

Tal sequência será chamada de sequência minimizante de Omori-Yau para a função f, ou simplesmente de sequência de Omori-Yau.

Capítulo 3

Resultados do tipo Bernstein em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

Antes dos resultados do tipo Bernstein, vamos ao seguinte resultado que é puramente algébrico, mas será enunciado conforme os nossos objetivos.

Lema 3.1 *Se A é o operador de forma da imersão $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$ então :*
i) $nH^2 \leq |A|^2$;
ii) $H_2 \leq H^2$.
Valendo uma igualdade se, e somente se, $A = \lambda Ib$, ou seja, Σ^n é totalmente umbílica.

Prova. Considere os seguintes vetores em $\mathbb{R}^{n^2}$:

$$u = (\overbrace{k_1, ..., k_1}^{n-vezes}, \overbrace{k_2, ..., k_2}^{n-vezes}, ..., \overbrace{k_n, ..., k_n}^{n-vezes})$$

$$v = (\underbrace{k_1, ..., k_n, \quad k_1, ..., k_n, \quad ..., \quad k_1, ..., k_n}_{n-vezes})$$

E assim

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= k_1 \sum_i k_i + k_2 \sum_i k_i + ... + k_n \sum_i k_i \\ &= \sum_j k_j \sum_i k_i = n^2 H^2 \end{aligned}$$

E note também que

$$\begin{aligned} |u|^2 &= nk_1^2 + nk_2^2 + ... + nk_n^2 = n|A|^2 \\ |v|^2 &= \underbrace{\sum_i k_i^2 + \sum_i k_i^2 + ... + \sum_i k_i^2}_{n-vezes} = n|A|^2 \end{aligned}$$

Logo pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\langle u, v\rangle \leq |u||v| = |u|^2$$

e daí $n^2H^2 \leq n|A|^2$ ou $nH^2 \leq |A|^2$, valendo a igualdade se, e somente se, os vetores u e v são linearmente dependentes que é o mesmo que $k_1 = k_2 = ... = k_n$. Para provarmos o item *ii)* observe que

$$\begin{aligned} H^2 - H_2 &= \tfrac{1}{n^2}\left(\textstyle\sum_i k_i\right)^2 - \tfrac{2}{n(n-1)}\textstyle\sum_{i<j} k_ik_j \\ &= \tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{i,j} k_ik_j - \tfrac{1}{n(n-1)}\textstyle\sum_{i\neq j} k_ik_j \\ &= \tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{i,j} k_ik_j - \tfrac{1}{n(n-1)}\textstyle\sum_{i,j} k_ik_j + \tfrac{1}{n(n-1)}\textstyle\sum_i k_i^2 \\ &= \tfrac{-1}{n^2(n-1)}\textstyle\sum_{i,j} k_ik_j + \tfrac{1}{n(n-1)}|A|^2 \\ &= \tfrac{-1}{n^2(n-1)}n^2H^2 + \tfrac{1}{n(n-1)}|A|^2 \\ &= \tfrac{1}{n-1}(-H^2 + \tfrac{|A|^2}{n}) \end{aligned}$$

E assim pelo pelo item *i)* deste Lema $H^2 - H_2 \geq 0$ ■

Limitações na função altura determinam como as hipersuperfícies se comportam no ambiente com propriedades que, aparentemente, não se conectam com a função altura. O seguinte resultado se refere a propriedade de uma hipersuperfície ser máxima.

Teorema 3.1 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa tipo-espaço com curvatura média H constante , tal que h e $|\nabla h|$ são limitados, então Σ^n é uma hipersuperfície máxima.*

Prova. Desde que a função altura é limitada, mostremos que o tensor curvatura de Ricci é limitado inferiormente. De fato, pelo corolário 2.4

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= -(n-1)|X|^2 - |\nabla h|^2|X|^2 - (n-2)\langle X, \nabla h\rangle^2 + |AX + \tfrac{nH}{2}X|^2 - \tfrac{n^2H^2}{4}|X|^2 \\ &\geq -(n-1+|\nabla h|^2 + (n-2)|\nabla h|^2 + \tfrac{n^2H^2}{4})|X|^2 \\ &\geq -(n-1+(n-1)|\nabla h|^2 + \tfrac{n^2H^2}{4})|X|^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde usamos que $-\langle X, \nabla h\rangle^2 \geq -|\nabla h|^2|X|^2$ que é, essencialmente, a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Assim o tensor curvatura de Ricci é limitado inferiormente desde que ∇h seja limitado superiormente e daí, pelo princípio do máximo de Omori-Yau, existe uma sequência $p_k \in \Sigma^n$ satisfazendo

$$\lim_{k\to+\infty} \Delta h(p_k) \geq 0$$

e

$$\lim_k h(p_k) = \inf_\Sigma h.$$

Usando o cálculo do Laplaciano de h, temos

$$\lim_{k\to+\infty} -nH\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \geq 0$$

como $\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \leq -1$ obtemos que $H \geq 0$. De modo análogo, analisando a função $-h$ existe uma nova sequência $q_k \in \Sigma^n$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} nH\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \geq 0$$

logo $H \leq 0$ e assim $H \equiv 0$. ■

Observação 3.1 *Como veremos no capítulo 4, há alguns exemplos de superfícies máximas não-triviais em $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2$ devidos a Albujer em [2]. Nestes exemplos a função altura é sempre não limitada.*

Os seguintes resultados são baseados numa limitação no crescimento da função altura, isto é, em seu gradiente. Neste contexto, podemos mostrar que este crescimento é de fato nulo e, assim, a função altura é constante implicando que a hipersuperfície em destaque é um slice, que é o caso trivial.

Teorema 3.2 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ uma imersão de uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante. Se a função altura h de Σ^n satisfaz, para algum $0 < \alpha < 1$,*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1}H^2$$

Então Σ^n é um slice.

Prova. Seja N a aplicação normal de Gauss e note que pela equação (2.3) vale que

$$\langle N, \partial_t\rangle^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1}H^2 + 1$$

ou, ainda,

$$\langle N, \partial_t\rangle \geq -\sqrt{1 + \frac{\alpha n}{n-1}H^2},$$

isto é, $\langle N, \partial_t\rangle$ é limitada inferiormente. Pelo Lema 2.5,

$$\begin{aligned}
\Delta\langle N, \partial_t\rangle &= (n^2H^2 - n(n-1)H_2 - (n-1)|\nabla h|^2)\langle N, \partial_t\rangle \\
&= (nH^2 + n(n-1)(H^2 - H_2) - (n-1)|\nabla h|^2)\langle N, \partial_t\rangle \\
&\leq (nH^2 - n\alpha H^2 + n(n-1)(H^2 - H_2))\langle N, \partial_t\rangle \\
&\leq (n(1-\alpha)H^2 + n(n-1)(H^2 - H_2))\langle N, \partial_t\rangle \\
&\leq n(1-\alpha)H^2\langle N, \partial_t\rangle \leq 0
\end{aligned}$$

onde usamos na última desigualdade que $H^2 \geq H_2$. Pela inequação (3.1), obtemos que o tensor curvatura de Ricci é limitado inferiormente.

Estamos em condições de aplicar o princípio do máximo de Omori-Yau. Então existe uma sequência $p_k \in \Sigma^n$ com $\lim_k \Delta\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \geq 0$ e $\lim_k\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} = \inf_{\Sigma^n}\langle N, \partial_t\rangle \leq -1$. Segue que

$$0 \leq \lim_k \Delta\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \leq n(1-\alpha)H^2 \lim_{k\to+\infty}\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \leq -n(1-\alpha)H^2 \leq 0.$$

Então $H^2 = 0$, o que implica, por hipótese, que $\nabla h = 0$, consequentemente, h é constante e Σ^n é um slice. ∎

O fato da constante α não poder ser o valor supremo 1 nos deixa uma pergunta natural: será que podemos estender o resultado para $\alpha = 1$? O que de fato podemos fazer é colocar uma hipótese adicional H_2 constante e assim expandirmos o resultado para a constante $\alpha = 1$ que é o caso limite.

Teorema 3.3 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvaturas médias H, H_2 constantes. Suponha que*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n}{n-1}H^2,$$

então Σ^n é um slice.

Prova.

Mostraremos inicialmente que Σ^n é totalmente umbílica. De acordo com a demonstração do Teorema 3.2, pelo lema de Omori-Yau existe uma sequência $\{p_k\}$ em Σ^n tal que $\lim_k \Delta\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \geq 0$ e também vale que

$$\begin{aligned}
\Delta\langle N, \partial_t\rangle &= (n^2H^2 - n(n-1)H_2 - (n-1)|\nabla h|^2)\langle N, \partial_t\rangle \\
&= (nH^2 + n(n-1)(H^2 - H_2) - (n-1)|\nabla h|^2)\langle N, \partial_t\rangle \\
&\leq (nH^2 - nH^2 + n(n-1)(H^2 - H_2))\langle N, \partial_t\rangle \\
&\leq (n(n-1)(H^2 - H_2))\langle N, \partial_t\rangle \leq 0.
\end{aligned}$$

Logo

$$0 \leq \lim_k \Delta\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \leq n(n-1)(H^2 - H_2)\lim_k \langle N, \partial_t\rangle_{p_k} \leq -n(n-1)(H^2 - H_2) \leq 0$$

Conseguentemente $H^2 = H_2$ e, pelo Lema 3.1, segue que $k_1 = k_2 = ... = k_n$.

Analisemos agora a função $f = -|\nabla h|^2$ cujo gradiente é

$$\nabla f = -\nabla\langle N, \partial_t\rangle^2 = -2\langle N, \partial_t\rangle\nabla\langle N, \partial_t\rangle = -2\langle N, \partial_t\rangle A(\nabla h).$$

Note que estamos nas condições adequadas para aplicarmos o princípio do máximo de Omori-Yau para a função f. Seja, então, $\{p_k\}$ a sequência fornecida pelo lema tal que

$$\lim_k(-|\nabla h(p_k)|^2) = \inf_{\Sigma^n}(-|\nabla h|^2) \tag{3.2}$$

e

$$\lim_k |-2\langle N, \partial_t\rangle(p_k)A(\nabla h)(p_k)| = 0. \tag{3.3}$$

Como Σ^n é umbílica, segue que $A = -HI$ onde I é a aplicação identidade e, assim, pela equação (3.3) temos

$$\lim_k |2\langle N, \partial_t\rangle_{p_k} H\nabla h(p_k)| = 0$$

como $|2\langle N, \partial_t\rangle_{p_k}| \geq 2$ devemos ter

$$H \lim_k |\nabla h(p_k)| = 0$$

daí $H = 0$ ou $\lim_k |\nabla h(p_k)| = 0$, se $H = 0$ o resultado é trivial. No caso de $H \neq 0$, temos $\lim_k |\nabla h(p_k)| = 0$ ou $\lim_k f(p_k) = 0$. Daí, pela equação (3.2)

$$0 = \lim_k -|\nabla h(p_k)|^2 = \inf_{\Sigma^n} -|\nabla h|^2 \leq -|\nabla h|^2 \leq 0$$

Então $-|\nabla h|^2 \equiv 0$, ou seja, Σ^n é um slice. ■

O seguinte resultado mostra que podemos considerar uma limitação conforme a norma do operador de forma A para a norma do gradiente da função altura.

Teorema 3.4 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média H constante e H_2 limitada inferiormente. Se a função altura h de Σ^n satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2,$$

então Σ^n é um slice, onde $0 < \alpha < 1$ e $|A|^2$ é o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt.

Prova. De $|\nabla h|^2 = -1 + \langle N, \partial_t \rangle^2$, temos

$$\langle N, \partial_t \rangle^2 \leq 1 + \frac{\alpha}{n-1}|A|^2.$$

Pelo Lema 2.4, $|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2$ e, assim, $|A|^2$ é limitada superiormente. Daí $\langle N, \partial_t \rangle^2$ é limitado e particularmente $f = \langle N, \partial_t \rangle$ é limitada inferiormente assim como $|\nabla h|^2$. Também temos

$$\begin{aligned} \Delta \langle N, \partial_t \rangle &= (|A|^2 - (n-1)|\nabla h|^2)\langle N, \partial_t \rangle \\ &\leq (1-\alpha)|A|^2 \langle N, \partial_t \rangle \leq -(1-\alpha)|A|^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

De acordo com a inequação (3.1), o tensor curvatura de Ricci é limitado inferiormente, da completude de Σ^n podemos aplicar o princípio do máximo de Omori-Yau que nos fornece uma sequência $p_k \in \Sigma^n$ tal que

$$0 \leq \lim_k \Delta \langle N, \partial_t \rangle_{p_k} \leq -(1-\alpha) \lim_k |A(p_k)|^2 \leq 0$$

e

$$\lim_k \langle N, \partial_t \rangle_{p_k} = \inf_{\Sigma^n} \langle N, \partial_t \rangle_{p_k}$$

Assim temos que $\lim_k |A(p_k)|^2 = 0$ e, por hipótese, $\lim_k |\nabla h(p_k)|^2 = 0$, fornecendo $\lim_k \langle N, \partial_t \rangle^2_{p_k} = 1$ ou $\lim_k \langle N, \partial_t \rangle_{p_k} = -1$, pois $\langle N, \partial_t \rangle_{p_k} \leq -1$. Logo

$$\inf_{\Sigma^n} \langle N, \partial_t \rangle = -1$$

e, portanto, $\langle N, \partial_t \rangle \equiv -1$ ou $|\nabla h|^2 \equiv 0$. Logo $h \equiv t_0$, ou seja, Σ^n é um slice.

■

Observação 3.2 *Note que temos*

$$nH^2 \leq (nH^2 + n(n-1)(H^2 - H_2)) = n^2H^2 - n(n-1)H_2 = |A|^2$$

Assim temos o seguinte

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1}H^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2$$

Esta expressão nos diz que, a menos da imposição de limitação inferior sobre H_2, o Teorema 3.4 generaliza o Teorema 3.2.

3.1 A função ângulo hiperbólico

As restrições feitas sobre as funções altura h e $|\nabla h|^2$ nos teoremas anteriores podem ser vistas como limitações na função ângulo hiperbólico entre N e ∂_t que é definido da seguinte forma:

Definição 3.5 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço, com M^n uma variedade Riemanniana. A função ângulo hiperbólico normal θ, é a aplicação diferenciável $\theta : \psi(\Sigma^n) \to [0, +\infty)$ tal que $\cosh\theta = -\langle N, \partial_t\rangle$, onde N a aplicação normal de Gauss apontando para o futuro.*

Com esta definição, temos os seguintes resultados.

Corolário 3.6 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma imersão tipo-espaço completa com curvatura média H constante, tal que h e θ são limitadas então Σ^n é uma hipersuperfície máxima.*

Prova. Basta observar que se θ é limitada, então $\cosh\theta$ também o é. ■

Corolário 3.7 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma imersão de uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante. Se a função ângulo hiperbólico normal θ satisfaz, para algum $0 < \alpha < 1$,*

$$\cosh^2\theta \leq 1 + \frac{n\alpha}{n-1}H^2,$$

então Σ^n tem que ser um slice.

Corolário 3.8 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma imersão tipo-espaço com curvaturas médias H, H_2 constantes com θ satisfazendo*

$$\cosh^2\theta \leq 1 + \frac{n}{n-1}H^2,$$

então Σ^n é um slice.

Corolário 3.9 *Seja $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média H constante e H_2 limitada inferiormente. Então, se a função ângulo hiperbólico normal θ satisfaz*

$$\cosh^2\theta \leq 1 + \frac{\alpha}{n-1}|A|^2,$$

então Σ^n é slice, onde $0 < \alpha < 1$ e $|A|^2$ é o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt.

Os últimos resultados são interpretações geométricas do ponto de vista dos ângulos hiperbólicos e são de fato equivalentes aos teoremas anteriores deste capítulo na respectiva ordem.

Capítulo 4

Gráficos verticais em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

Neste capítulo, apresentamos uma série de resultados referente a gráficos tipo-espaço em $-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$, mais particularmente a gráficos inteiros, exibindo também condições para que eles sejam completos.

Definição 4.1 *Dados $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ e $u \in C^\infty(\Omega)$, a hipersuperfície gráfico vertical de u em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ ou simplesmente o gráfico de u é a hipersuperfície*

$$\Sigma^n(u) = G(u) = \{(u(x), x); x \in \Omega\} \subset -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$$

Um gráfico será dito inteiro quando $\Omega = \mathbb{H}^n$.

Note que existem outros tipos de gráficos os quais não serão discutidos aqui, doravante faremos referência aos gráficos inteiros verticais como simplesmente gráficos em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ a menos que esteja explícito o contrário. Uma condição sobre o gradiente da função altura nos fornece gráficos tipo-espaço, que é o seguinte

Lema 4.1 *Um gráfico em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ é tipo-espaço se, e somente se, $|Du| < 1$ e, neste caso,*

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - |Du|^2}}(\partial_t + Du) \tag{4.1}$$

onde Du denota o gradiente de u $\mathbb{H}^n$ e N é a aplicação normal de Gauss apontando para o futuro em $\Sigma^n(u)$.

Prova.

Inicialmente mostramos que, se $\Sigma^n(u)$ é um gráfico sobre um domínio então um campo normal (não necessariamente unitário) sobre $\Sigma^n(u)$ é $\overline{\nabla} G$, onde $\overline{\nabla}$ denota o gradiente de $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ e $G : -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $G(t,p) = t - u(p)$. De fato, em $\Sigma^n(u)$ temos $G(t,p) = 0$, então se α é uma curva em $\Sigma^n(u)$ com $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma^n(u)$, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p\Sigma^n(u)$. Temos

$$\frac{d}{dt} G \circ \alpha(t) = 0$$

ou

$$v(G) = \alpha'(0)(G) = \frac{d}{dt}|_{t=0} G \circ \alpha(t) = 0$$

Por outro lado, como $v(G) = \langle \overline{\nabla} G, v \rangle$, segue que $\overline{\nabla} G \perp v$, para todo $v \in T_p\Sigma^n(u)$. Como a codimensão de $T_p\Sigma^n(u)$ é 1 e a métrica é não-degenerada resta-nos mostrar que $\overline{\nabla} G$ é um campo não-nulo tipo-tempo. Mas

$$\overline{\nabla} G(t,p) = \overline{\nabla}(t - Du(p)),$$

e se $v \in T_{(t,p)}(-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n)$, temos $v = (f\partial_t, w)$ com $w \in T_p\mathbb{H}^n$, então

$$\begin{aligned} v(G) &= f\partial_t(t - u(p)) + w(t - u(p)) = f - wu \\ &= -\langle v, \partial_t \rangle - \langle Du, w \rangle \\ &= \langle -\partial_t - Du, v \rangle \end{aligned}$$

Logo, $\langle \overline{\nabla} G, v \rangle = \langle -\partial_t - Du, v \rangle, \quad \forall v \in T_{(t,p)}(-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n)$. Uma vez que a métrica é não degenerada temos $\overline{\nabla} G = -\partial_t - Du$, que é sempre não-nulo.

Para obtermos um campo apontando para o futuro, escolhemos $\overline{N} = -\overline{\nabla} G$, pois neste caso, $\langle \overline{N}, \partial_t \rangle = -1 < 0$. Notemos que $\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = -1 + |Du|^2$ e assim $\overline{N}$ é tipo-tempo se, e somente se, $|Du| < 1$. Como nestas condições uma hipersuperfície é tipo-espaço se, e somente se, seu campo normal é tipo-tempo, temos que $|Du| < 1$ equivale a $\Sigma^n(u)$ ser tipo-espaço.

Considerando que $\overline{N}$ é tipo tempo, exibimos a aplicação normal de Gauss, normalizando $\overline{N}$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - |Du|^2}}(\partial_t + Du).$$

■

O seguinte resultado nos dá alternativas para verificarmos a completude de uma variedade Riemanniana. Antes relembremos o conceito de variedade completa.

Definição 4.2 *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial,* $\exp_p$*, está definida para todo $v \in T_pM$, i.e., se toda geodésica $\gamma(t)$ começando em p está definida para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Lema 4.2 (Hopf-Rinow) *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana e $p \in \Sigma^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\exp_p$ *está definida em todo o $T_p\Sigma^n$;*

ii) Os limitados e fechados são compactos ;

iii)Σ^n é geodesicamente completa;

Uma demonstração do Teorema de Hopf-Rinow pode ser encontrada em [7]. O próximo resultado inclui mais uma equivalência no Teorema de Hopf-Rinow. Para isto, precisamos do conceito de curva divergente.

Definição 4.3 *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva $\alpha : [0, a) \to \Sigma^n$ é divergente se $\alpha([0, a))$ não está contida em nenhum compacto K de Σ^n, onde a é um número real positivo ou $a = +\infty$.*

Note que a propriedade de uma curva ser divergente não depende de sua parametrização e sim do seu traço.

Lema 4.3 *Uma variedade Riemanniana Σ^n é completa se, e somente se, toda curva divergente $\alpha : [0, a) \to \Sigma^n$ satisfaz*

$$\int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = +\infty. \tag{4.2}$$

Prova. Suponhamos inicialmente que Σ^n é completa, mostremos que toda curva divergente tem comprimento infinito. De fato, argumentando por contradição, se α é uma curva divergente de comprimento finito, isto é,

$$\int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = L,$$

então

$$d(\alpha(0), \alpha(t)) \leq \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau \leq \int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = L.$$

Assim $\alpha([0, a))$ é limitado e assim pelo item $ii)$ do Lema 4.2, $\alpha([0, a))$ tem fecho compacto e consequentemente o traço da curva α está contido num compacto, contradizendo o fato que a curva é divergente.

Reciprocamente, se toda curva divergente tem comprimento infinito, mostremos que Σ^n é completa. Suponhamos por contradição que o item $i)$ do Lema 4.2 não vale. Então existem $p \in \Sigma^n$, $0 < t_0 < \infty$ e $v \in T_p\Sigma^n$ com $|v| = 1$ tais que $\gamma(t) = \exp_p tv$ está definida para $t \in [0, t_0)$, mas não pode ser definida para t_0. Mostremos que γ é uma curva divergente. Se $\gamma([0, t_0))$ está contida num compacto K, considere $t_n \in [0, t_0)$ tal que $t_n \nearrow t_0$ e seja $\gamma_n = \gamma(t_n)$. Portanto

$$d(\gamma_n, \gamma_m) \leq |s_n - s_m|$$

Daí γ_n é uma sequência de Cauchy num compacto K, portanto γ_n converge para $y_0 \in K \subset \Sigma^n$. Seja (V, δ) uma vizinhança totalmente normal de y_0, isto é, dado $r \in V$ existe $\delta > 0$ tal que $\exp_r : B_\delta(0) \to \exp_r(B_\delta(0)) \supset V$ é um difeomorfismo. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$ então $|t_n - t_m| < \delta$ e $\gamma_n, \gamma_m \in V$. Logo deve existir uma única geodésica g ligando γ_n a γ_m nesta vizinhança totalmente ortonormal. E g coincide com γ, onde esta é definida. Usando que $\exp_{\gamma(t_n)}$ é um difeomorfismo entre B_0 e sua imagem que contém V podemos estender γ além de t_0, absurdo. Assim γ é uma curva divergente mas

$$\int_0^{t_0} |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^{t_0} 1 d\tau = t_0 < +\infty$$

gerando uma contradição com a hipótese que toda curva divergente tem comprimento infinito. ■

4.1 Exemplos de superfícies maximais: gráficos inteiros

Os seguintes exemplos devidos a ALbujer em [2] nos dizem que um gráfico inteiro eventualmente pode não ser completo mesmo tendo curvatura média nula, um outro exemplo refere-se a gráficos não-triviais com curvatura média constante e nula, corroborando resultados já apresentados e outros que virão a ser. Antes de exibirmos tais exemplos, façamos alguns cálculos essenciais ao seu desenvolvimento.

Analisando inicialmente o operador de forma A. Para $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\Sigma^n(u))$, temos

$$\overline{X} = \langle Du, X \rangle_{\mathbb{H}^n} \partial_t + X$$

e, assim,

$$A\overline{X} = -\overline{D}_{\overline{X}}N = -\langle Du, X\rangle \overline{D}_{\partial_t}N - \overline{D}_X N$$

onde $\overline{D}$ denota a conexão de Levi-Civita em $-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ e X é a projeção de $\overline{X}$ em $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$. Utilizando a expressão de N, temos

$$\begin{aligned} AX &= -\langle Du, X\rangle \overline{D}_{\partial_t}\left(\frac{\partial_t + Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) - \overline{D}_X\left(\frac{\partial_t + Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) \\ &= -\overline{D}_X\left(\frac{\partial_t + Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) \\ &= -\overline{D}_X\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) \\ &= -\frac{\overline{D}_X Du}{\sqrt{1-|Du|^2}} - \frac{Du}{(1-|Du|^2)^{3/2}}\langle \overline{D}_X Du, Du\rangle \\ &= -\frac{\nabla_X Du}{\sqrt{1-|Du|^2}} - \frac{Du}{(1-|Du|^2)^{3/2}}\langle \nabla_X Du, Du\rangle \end{aligned}$$

onde usamos o Lema 1.19 e que $\overline{D}_X Du = \nabla_X Du$, $\langle Du, \partial_t\rangle = 0$, logo $X\langle Du, \partial_t\rangle = 0$. Portanto $\langle \overline{D}_X Du, \partial_t\rangle + \langle Du, \overline{D}_X \partial_t\rangle = 0$ uma vez que $\langle Du, \overline{\nabla}_X \partial_t\rangle = 0$, temos $\langle \overline{\nabla}_X Du, \partial_t\rangle = 0$. Por outro lado,

$$Div\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) = trac\left(\nabla_X\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right)\right)$$

Assim, podemos expressar H em termos do divergente

$$nH = Div\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) \tag{4.3}$$

onde Div denota o divergente em relação a $\mathbb{H}^n$. Considere $n = 2$ e note que $Du(x,y) = y^2 D_0 u(x,y)$, D_0 é o gradiente em $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ que é essencialmente o gradiente em $\mathbb{R}^2$. Um referencial ortonormal em $\mathbb{H}^2$ é dado por $\{y\partial_x; y\partial_y\}$ e assim

$$\begin{aligned} Div(X) &= \langle \nabla_{y\partial_x} X, y\partial_x\rangle + \langle \nabla_{y\partial_y} X, y\partial_y\rangle \\ &= y^2(\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x\rangle + \langle \nabla_{\partial_y} X, \partial_y\rangle) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x\rangle &= \partial_x\langle X, \partial_x\rangle + X\langle \partial_x, \partial_x\rangle - \partial_x\langle \partial_x, X\rangle - \langle \partial_x, [X, \partial_x]\rangle + \\
&+\langle X, [\partial_x, \partial_x]\rangle + \langle \partial_x, [\partial_x, X]\rangle \\
&= X\langle \partial_x, \partial_x\rangle + 2\langle \partial_x, [\partial_x, X]\rangle \\
&= X(\frac{1}{y^2}) + \frac{2}{y^2}\langle \partial_x, [\partial_x, X]\rangle_0 \\
&= \frac{2}{y^2}\langle \partial_x, [\partial_x, X]\rangle_0 + X(\frac{1}{y^2}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x\rangle = \frac{1}{y^2}\langle \nabla^0_{\partial_x} X, \partial_x\rangle_0 + X(\frac{1}{2y^2}),$$

onde ∇^0 e $\langle ., .\rangle_0$ são respectivamente a conexão de Levi-Civita e a métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Assim

$$\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x\rangle = \frac{1}{y^2}\langle \nabla^0_{\partial_x} X, \partial_x\rangle_0 + \frac{X}{2}\left(\frac{1}{y^2}\right). \tag{4.5}$$

De modo análogo, temos

$$\langle \nabla_{\partial_y} X, \partial_y\rangle = \frac{1}{y^2}\langle \nabla^0_{\partial_y} X, \partial_y\rangle_0 + \frac{X}{2}\left(\frac{1}{y^2}\right). \tag{4.6}$$

Substituindo (4.5) e (4.6) na equação (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}
Div(X) &= Div_0(X) + y^2 X\left(\frac{1}{y^2}\right) \\
&= Div_0(X) + y^2 X\left(\frac{1}{y^2}\right) \\
&= Div_0(X) - \frac{2}{y}Xy \\
&= Div_0(X) - \frac{2}{y}dy(X).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Logo

$$Div = Div_0 - \frac{2}{y}dy, \tag{4.8}$$

onde Div_0 é o divergente usual do $\mathbb{R}^2$.

Desde que

$$\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}} = \frac{y^2 D_0 u}{\sqrt{1-y^2|D_0 u|_0^2}},$$

segue que

$$Div\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) = Div_0\left(\frac{y^2 D_0 u}{\sqrt{1-y^2|D_0 u|_0^2}}\right) - \frac{2}{y}dy\left(\frac{y^2 D_0 u}{\sqrt{1-y^2|D_0 u|_0^2}}\right).$$

Seja $r = \sqrt{1-y^2|D_0 u|_0^2}$, deste modo

$$Div_0\left(\frac{y^2D_0u}{r}\right)-2y\frac{u_y}{r} = y^2\frac{(u_{xx}r+\frac{u_x}{r}y^2(u_xu_{xx}+u_yu_{xy}))}{r^2}$$
$$+\frac{(2yu_y+y^2u_{yy})r+y^2\frac{u_y}{r}(y|D_0u|_0^2+y^2(u_xu_{xy}+u_yu_{yy}))}{r^2}$$
$$-2y\frac{u_y}{r}$$

Como $r>0$ e $H\equiv 0$, obtemos

$$nH = Div\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) = 0,$$

que equivale a

$$r^2y^2u_{xx}+y^4(u_x^2u_{xx}+u_xu_yu_{xy})+r^2yu_y$$
$$+r^2y^2u_{yy}+y^3|D_0u|_0^2u_y+y^4(u_yu_xu_{xy}+u_y^2u_{yy})-2r^2yu_y=0$$

ou simplesmente,

$$r^2y^2\Delta_0u+y^2(yu_y|D_0u|_0^2+y^2Q(u))=0, \tag{4.9}$$

com a condição que $y^2|D_0u|_0^2<1$, onde Δ_0 é o laplaciano em $\mathbb{R}^2$ e $Q(u)=u_x^2u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+u_y^2u_{yy}$.

4.1.1 Gráfico inteiro, máximo e não-completo

Exemplo 3 *Considere que a função u é da forma $u(x,y)=f(y)$, então a equação 4.9 se torna*

$$\begin{cases} f''+y(f')^3=0 \\ y^2(f')^2<1 \end{cases} \tag{4.10}$$

Integrando via separação de variáveis, obtemos $f'(y)=\dfrac{1}{\sqrt{y^2+c}}$ com $c\geq 0$. Integrando novamente, obtemos $f(y)=\ln(y+\sqrt{y^2+c})+c_1$. A menos de isometrias, podemos supor, sem perda de generalidade, que $c_1=0$.

Utilizando a segunda condição do problema (4.10) devemos escolher c positivo para produzir uma solução de tal problema, obtendo uma família de superfícies tipo-espaço máximas em $-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2$.

Contudo, este gráfico não é geodesicamente completo. De fato, considere a curva $\alpha:[1,+\infty)\to\Sigma_a^n(u)$ dada por

$$\alpha(s)=(u(0,s),0,s)$$

Tal curva é divergente pois sua projeção sobre $\mathbb{H}^2$ *é a semi-reta* $(0, s)$ *que é não limitada em* $\mathbb{H}^2$ *e, portanto, não está contida num compacto. No entanto, o comprimento da curva* α *pode ser calculado. Como*

$$\alpha'(s) = (f'(s), 0, 1),$$

temos

$$|\alpha'(s)|^2 = -f'(s)^2 + \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{s^2+c} + \frac{1}{s^2} = \frac{-s^2+s^2+c}{s^2(s^2+c)} = \frac{c}{s^2(s^2+c)}.$$

Logo

$$\int_1^{+\infty} |\alpha'(s)|ds = \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{c}{s^2(s^2+c)}}ds \leq \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{c}{s^2(s^2)}}ds = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{c}}{s^2}ds = 2\sqrt{c} < +\infty,$$

o que mostra que tal superfície não é completa.

4.1.2 Condições para um gráfico inteiro ser completo

No exemplo anterior, apresentamos um gráfico inteiro, porém este não é completo. No entanto, a seguinte proposição nos fornece uma condição suficiente para que um gráfico tipo-espaço seja completo.

Proposição 4.4 *Todo gráfico inteiro tipo-espaço* $\Sigma^n(u)$ *em* $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ *tal que* $|Du| \leq a < 1$ *é uma hipersuperfície completa.*

Prova. Considere $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma^n(u)$, então temos que $\gamma(t) = (u(\beta(t)), \beta(t))$ onde $\beta(t)$ é uma curva em $\mathbb{H}^n$. Assim $\gamma'(t) = (\langle Du, \beta'(t)\rangle_{\mathbb{H}^n}, \beta'(t))$ ou $\gamma'(t) = \langle Du, \beta'(t)\rangle_{\mathbb{H}^n}\partial_t + \beta'(t)$. Se $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\Sigma^n(u))$, então

$$\overline{X} = \langle Du, X\rangle_{\mathbb{H}^n}\partial_t + X \tag{4.11}$$

onde $X = \pi_{\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)}(\overline{X})$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle \overline{X}, \overline{X}\rangle_{\Sigma^n(u)} &= \langle X, X\rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle Du, X\rangle^2_{\mathbb{H}^n} \\ &= |X|^2_{\mathbb{H}^n} - \langle Du, X\rangle^2_{\mathbb{H}^n} \\ &\geq (1 - |Du|^2)|X|^2_{\mathbb{H}^n} \\ &\geq (1 - \beta^2)|X|^2_{\mathbb{H}^n} \end{aligned}$$

Seja $\alpha(t) = \pi_{\mathbb{H}^n} \circ \overline{\alpha}(t)$ e note que $\alpha'(t) = \pi_{T\mathbb{H}^n}\overline{\alpha}'(t)$. Denotemos por L_α o comprimento da curva α, então

$$\begin{aligned} L_{\overline{\alpha}} &= \int_0^a \langle \overline{\alpha'}(\tau), \overline{\alpha'}(\tau)\rangle^{\frac{1}{2}}_{\Sigma^n(u)} d\tau \\ &\geq \int_0^a \sqrt{c}\langle \alpha'(\tau), \alpha'(\tau)\rangle^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{H}^n} d\tau \\ &\geq L_\alpha \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $c = 1 - a^2$. Suponhamos agora que α é uma curva divergente em $\Sigma^n(u)$ e mostremos que a sua projeção $\overline{\alpha}$ em $\mathbb{H}^n$ é também uma curva divergente, isto é, seu traço não está contido num compacto $K \subset \mathbb{H}^n$. De fato, se $\overline{\alpha}([0, a))$ estivesse contida num compacto K teríamos que $\pi^{-1}(K)$ também é um compacto em $\Sigma^n(u)$. Daí α não seria uma curva divergente o que é um absurdo. Logo $\overline{\alpha}$ é uma curva divergente e como $\mathbb{H}^n$ é completo, pelo Lema 4.3, temos que $L_{\overline{\alpha}} = +\infty$. Pela inequação (4.12), temos $L_\alpha = +\infty$ e, assim, novamente pelo Lema 4.3, $\Sigma^n(u)$ é completa. ■

4.1.3 Gráfico inteiro, maximal e completo

O seguinte exemplo nos fornece um gráfico tipo-espaço com curvatura média constante nula, não trivial, que também é completo geodesicamente como veremos a seguir.

Exemplo 4 *Suponhamos agora que $u(x, y) = f(z)$ onde $z = x^2 + y^2$. Deste modo, temos*

$$\Delta_0 u(x, y) = 4(f''(z)x^2 + f'(z) + f''y^2) = 4(g(z) + g'(z)z)$$

onde $g = f'$. Também temos que $|D_0u|_0^2 = 4g^2(z)z$ e

$$\begin{aligned} Q(u)(x, y) &= 4g^2(z)x^2(4g'(z) + 2g(z)) + 4g^2(z)y^2(4g'(z)y^2 + 2g(z)) + 32g^2(z)x^2y^2g'(z) \\ &= 8g^3(z) + 16g^2(z)g'(z)(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) \\ &= 8g^3(z) + 16g^2(z)g'(z)z^2 \end{aligned}$$

Neste caso, a equação (4.9) torna-se

$$[1 - 4y^2g^2(z)z]4[g(z) + g'(z)z] + 8g^3(z)y^2z + 8y^2g^3(z)z + y^2 + 16y^2g^2(z)g'(z)z^2 = 0.$$

Isso nos fornece

$$g(z) + g'(z)z = 0, \tag{4.13}$$

com a condição $4y^2g^2(z)z < 1$. Temos, então $(zg(z))' = 0$ ou $g(z) = \dfrac{c}{z}$, daí $f(z) = c\ln z + a$, a menos de isometrias, podemos considerar $a = 0$ e também exigiremos que $4y^2\dfrac{c^2}{z^2}z < 1$ ou $\dfrac{4y^2c^2}{x^2 + y^2} < 1$. Escolhendo $|c| < \dfrac{1}{2}$, temos que as superfícies dadas pelos gráficos das funções

$$u_c(x, y) = c\ln(x^2 + y^2)$$

nos fornecem gráficos máximos tipo-espaço. Pela Proposição 4.4, estes gráficos são completos e têm curvatura média constante. Entretanto com restrições adequadas sobre a função u e o seu gradiente é possível obtermos resultados tipo Bernstein.

Apresentamos a seguir resultados envolvendo gráficos inteiros.

Teorema 4.5 *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico inteiro tipo-espaço em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ com curvatura média constante H tal que*

$$|Du|^2 \leq \frac{n\alpha H^2}{n-1+n\alpha H^2}, \tag{4.14}$$

onde $0 < \alpha < 1$ e Du representa o gradiente de u em $\mathbb{H}^n$. Então $\Sigma^n(u)$ é um slice.

Prova. Ora, temos que $|Du| \leq a$ para

$$a = \sqrt{\frac{n\alpha H^2}{n-1+n\alpha H^2}} < 1, \quad \forall n \geq 2$$

Assim, pela Proposição 4.4, $\Sigma^n(u)$ é uma hipersuperfície completa. Calculemos agora $|\nabla h|^2$ onde ∇ é o gradiente em relação a $\Sigma^n(u)$ e h é a função altura $\pi_{\mathbb{R}}$.

Da equação (2.3), temos que $|\nabla h|^2 = -1 + \langle N, \partial_t \rangle^2$. Usando a expressão do campo normal obtida no Lema 4.1, temos que

$$\langle N, \partial_t \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1-|Du|^2}}(\partial_t + Du), \partial_t \right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{1-|Du|^2}}.$$

Segue que

$$|\nabla h|^2 = -1 + \frac{1}{1-|Du|^2} = \frac{|Du|^2}{1-|Du|^2} \tag{4.15}$$

Da hipótese, temos

$$\begin{aligned} |Du|^2 \leq \frac{n\alpha H^2}{n-1+n\alpha H^2} & \Leftrightarrow (n-1+n\alpha H^2)|Du|^2 \leq n\alpha H^2 \\ & \Leftrightarrow (n-1)|Du|^2 + \leq n\alpha H^2 \\ & \Leftrightarrow (n-1)|Du|^2 \leq n\alpha H^2 - n\alpha H^2|Du|^2 \\ & \Leftrightarrow (n-1)|Du|^2 \leq n\alpha H^2(1-|Du|^2) \\ & \Leftrightarrow \frac{|Du|^2}{1-|Du|^2} \leq \frac{n\alpha H^2}{n-1} \\ & \Leftrightarrow |\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha H^2}{n-1} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Assim, pelo Teorema 3.2, temos que $\Sigma^n(u)$ é um slice. ∎

Utilizando o Teorema 3.3 obtemos o seguinte resultado que inclui o caso da constante $\alpha = 1$, desde que a curvatura H_2 seja constante.

Teorema 4.6 *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico tipo-espaço em $-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ com curvaturas médias H e H_2 constantes. Suponha que*

$$|Du|^2 \leq \frac{nH^2}{n-1+nH^2},$$

então $\Sigma^n(u)$ é um slice.

Teorema 4.7 *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico inteiro vertical tipo-espaço em $-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ com curvatura média constante, tal que u é limitada e $|Du| \leq a$, com $0 < a < 1$. Então Σ^n é uma hipersuperfície máxima.*

Prova. Pela equação (4.15) temos

$$|\nabla h|^2 = -1 + \frac{1}{1-|Du|^2} = \frac{|Du|^2}{1-|Du|^2} \leq \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} < +\infty.$$

Assim de acordo com a Proposição 4.4, temos as hipóteses do Teorema 3.1. Logo $\Sigma^n(u)$ é uma hipersuperfície máxima. ■

Teorema 4.8 *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico tipo-espaço em $-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ com curvatura média constante tal que*

$$|Du|^2 \leq \frac{\alpha|A|^2}{n-1+\alpha|A|^2}$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $|A|^2$ denota o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt. Então $\Sigma^n(u)$ é um slice.

Prova. Para provar este resultado basta observar a equivalência

$$|Du|^2 \leq \frac{\alpha|A|^2}{n-1+\alpha|A|^2} \Leftrightarrow |\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2,$$

a qual é provada da mesma forma que as equivalências de (4.16), substituindo nH^2 por $|A|^2$. ■

Bibliografia

[1] Albujer, A. L., Camargo, F. E. C., de Lima, H.F., *Complete spacelike hypersufaces with constant mean curvature in* $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, Elsevier, Journal of Mathematical Analysis and Applicatons, 368, 650-657, (2010).

[2] Albujer, A.L., *New examples of entire maximal graphs in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, Elsevier, Science Direct, Differential Geometry and its Applications, 26, 456-462, (2008).

[3] Alías, L.J., Colares, A.G., *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. , 143, 703-729, (2007).

[4] Bezerra, K.S., *Um teorema de rigidez para hipersuperfícies CMC completas em variedades de Lorentz*, Universidade Federal do Ceará (UFC), (2009), (Dissertação de Mestrado).

[5] Caminha, A., de Lima, H.F., *Complete Vertical Graphs with Constant Mean Curvature in Semi-Riemannian Warped Products*, Bull. Belg. Math. Soc., Simom Stevin 16, 91-105, (2009).

[6] Caruso, F., Oguri, V., *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*, Elsevier, Rio de Janeiro, (2006) .

[7] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática pura e aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 4ª Ed (2008).

[8] López, R., *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*, IME-USP, São Paulo, (2008), (Minicurso).

[9] Omori, H., *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan.19 205-214,(1967) .

[10] O'Neill, B., *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, Los Angeles (1983) .

[11] Pigola, S., Rigoli, M., Setti, A.G., *Maximum principles on Riemannian Manifolds and applications*, Memoirs of the American Math. Soc., vol. 174, number 822 (2005).

[12] Yau, S.T., *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. 28 201-228, (1975) .