Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Matriz de covariâncias do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés em modelos lineares generalizados com parâmetro de dispersão desconhecido †

por

Fabiana Uchôa Barros

sob orientação do

Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Matriz de covariâncias do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés em modelos lineares generalizados com parâmetro de dispersão desconhecido

por

Fabiana Uchôa Barros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Estatística

Aprovada por:

____

Profa. Dra. Denise Aparecida Botter - IME-USP

____

Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro - DE-UFPE

____

Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2011

Resumo

Com base na expressão de Pace e Salvan (1997 pág. 30), obtivemos a matriz de covariâncias de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança corrigidos pelo viés de ordem n^{-1} em modelos lineares generalizados, considerando o parâmetro de dispersão desconhecido, porém o mesmo para todas as observações. A partir dessa matriz, realizamos modificações no teste de Wald. Os resultados obtidos foram avaliados através de estudos de simulação de Monte Carlo.

Palavras-chave: Modelos lineares generalizados, matriz de covariâncias de segunda ordem, estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés, parâmetro de dispersão.

Abstract

Based on the expression of Pace and Salvan (1997 pág. 30), we obtained the second order covariance matrix of the of the maximum likelihood estimators corrected for bias of order n^{-1} in generalized linear models, considering that the dispersion parameter is the same although unknown for all observations. From this matrix, we made modifications to the Wald test. The results were evaluated through simulation studies of Monte Carlo.

Keywords: Generalized linear models, covariance matrix of the second order, bias corrected maximum likelihood estimator, dispersion parameter.

Agradecimentos

A Deus pela saúde, sabedoria, disposição e divina misericórdia.

Aos meus pais, Antonio Carlos e Fátima, por todo amor, apoio, incentivo e por serem um referencial em minha vida.

Aos meus irmãos, Joyce, Karla e Neto, ao meu sobrinho Antonio Carlos Neto e ao meu cunhado José Octávio por proporcionarem excelentes momentos em minha vida.

Ao Vogério, pelo mais puro e sincero amor.

Ao tio Lindomar pelo apoio e incentivo para que eu persistisse com os estudos.

Ao Professor Alexsandro Bezerra Cavalcanti pela orientação, disponibilidade, paciência e confiança.

À professora Michelli Karinne Barros da Silva, pela honra de ter sido sua aluna e pelos valiosos ensinamentos.

Aos Professores Denise Aparecida Botter e Gauss Moutinho Cordeiro por terem aceitado participar da banca.

Aos Professores Marcondes Rodrigues Clark e Newton Luís Santos pela amizade, incentivo e conhecimento transmitidos durante a graduação.

A todos os colegas da pós-graduação, em especial aos meus queridos amigos; Aline, não poderia ter uma vizinha melhor; Joelson, sempre disponível e paciente para ajudar com a parte computacional; Tatá, incrível disponibilidade para comer pizza e jogar vôlei; Tonhaunm, pelos momentos de descontração. Vocês foram essenciais ao longo dessa caminhada.

Aos meus amigos, Gustavo, Renata e Diego, pelos bons momentos durante a graduação.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais, Antonio Carlos e Fátima.

Não há invenção mais rentável que a do conhecimento.

Benjamin Franklin

Conteúdo

Introdução

Os modelos lineares generalizados (MLGs) são uma extensão dos modelos normais lineares e foram definidos por Nelder e Wedderburn (1972). A ideia principal é abrir um leque de opções para a distribuição da variável resposta, possibilitando que a mesma pertença à família exponencial de distribuições, bem como dar maior flexibilidade à relação entre a média da variável resposta e o preditor linear. Nelder e Wedderburn introduziram o conceito de desvio que tem sido amplamente utilizado na avaliação da qualidade dos MLGs e propuseram um processo iterativo para a estimação dos parâmetros. Inúmeros artigos relacionados com os MLGs foram publicados desde 1972. No Capítulo 1, procuramos revisar os principais resultados teóricos relacionados com os MLGs.

A estimação dos parâmetros nos MLGs, na maioria das vezes, é feita através do método da máxima verossimilhança, que por sua vez fornece, em geral, estimadores viesados. Em virtude disso, correções do viés têm sido bastante estudadas na literatura estatística. No Capítulo 2 apresentamos diversos artigos relacionados à correção do viés e, em particular, exibimos as expressões matriciais para os vieses dos estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) em MLGs obtidas por Cordeiro e McCullagh (1991) através da fórmula de Cox e Snell (1968), cuja grande utilidade é definir um EMV corrigido pelo viés até a ordem n^{-1}.

Nos MLGs, a matriz de covariâncias de primeira ordem dos EMVs é dada pela inversa da matriz de informação de Fisher. A partir das expressões de Peers e Iqbal (1985), Cordeiro (2004) obteve a matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV em MLGs considerando o parâmetro de dispersão conhecido. Este resultado foi estendido por Cordeiro et al. (2006) para o caso em que o parâmetro de dispersão é desconhecido.

Por fim, utilizando a expressão de Pace e Salvan (1997, pág. 30), Cavalcanti (2009) obteve a matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV corrigido pelo viés em MLGs supondo o parâmetro de dispersão conhecido. Estes resultados encontram-se no Capítulo 3.

No Capítulo 4, estendemos os resultados de Cavalcanti (2009) para o caso em que o parâmetro de dispersão é desconhecido, porém o mesmo para todas as observações. Através de estudos de simulação mostramos que as covariâncias até ordem n^{-2} dos EMVs corrigidos pelo viés de ordem n^{-1} estão mais próximas da matriz do erro quadrático médio. Sugerimos modificações no teste de Wald utilizando os estimadores corrigidos pelo viés e a matriz de covariâncias obtida nesse capítulo e, através de estudos de simulação, comparamos os tamanhos empíricos dos testes de Wald modificados para alguns níveis de significância variando o tamanho da amostra.

Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos alguns temas que poderão ser desenvolvidos em pesquisas futuras.

Vale salientar que o Capítulo 4 é a principal contribuição teórica desta dissertação. Os estudos de simulação realizados neste trabalho foram feitos utilizando a linguagem de programação computacional R em sua versão 2.11.1 e a linguagem matricial de programação Ox em sua versão 5.10.

Todos os cumulantes usados nesta dissertação e os desenvolvimentos algébricos dos Capítulos 3 e 4 encontram-se nos Apêndices A e B, respectivamente.

Capítulo 1

Modelos Lineares Generalizados

Neste capítulo definimos os modelos lineares generalizados e apresentamos alguns resultados relacionados com a estimação de parâmetros e testes de hipóteses.

1.1 Introdução

Os modelos lineares generalizados (MLGs), definidos por Nelder e Wedderburn (1972), são modelos de regressão para dados não normalmente distribuídos, geralmente ajustados por máxima verossimilhança. Estes modelos são definidos por uma distribuição de probabilidades, membro da família exponencial de distribuições, para a variável resposta, um conjunto de variáveis independentes descrevendo a estrutura linear do modelo e uma função de ligação entre a média da variável resposta e a estrutura linear. A ligação entre a média e o preditor linear pode assumir qualquer forma monótona não-linear, não sendo necessariamente a identidade. O processo iterativo para a estimação dos parâmetros lineares pode ser visto como um método de mínimos quadrados reponderados. Três testes de hipóteses estatísticas são apresentados: o da razão de verossimilhança, Wald e escore. Outras aplicações da estrutura dos MLGs podem ser encontradas em diversos artigos e livros da literatura estatística. Referências de textos no assunto são os livros de Cordeiro (1986), McCullagh e Nelder (1989) e Paula (2010).

1.2 Definição

Sejam $Y_1, ..., Y_n$ variáveis aleatórias independentes com cada Y_ℓ tendo função densidade de probabilidade (ou função de probabilidade) dada por

$$\pi(y; \theta_\ell, \phi) = \exp\{\phi[y\theta_\ell - b(\theta_\ell)] + a(y, \phi)\}, \tag{1.1}$$

em que $a(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções conhecidas. A família exponencial de distribuições é caracterizada por (1.1). A média e a variância de Y_ℓ são, $\mathrm{E}(Y_\ell) = \mu_\ell = db(\theta_\ell)/d\theta_\ell$ e $\mathrm{Var}(Y_\ell) = \phi^{-1}V_\ell$, em que $V_\ell = d\mu_\ell/d\theta_\ell$ é denominada função de variância e $\theta_\ell = \int V_\ell^{-1} d\mu_\ell = q(\mu_\ell)$, sendo $q(\mu_\ell)$ uma função um-a-um de μ_ℓ, conhecida, que varia em um subconjunto dos reais. A função de variância caracteriza a distribuição, desempenhando assim, um papel importante na família exponencial. Os parâmetros θ_ℓ e $\phi > 0$ em (1.1) são chamados parâmetros canônico e de precisão, respectivamente. Assumimos, por enquanto, que ϕ é conhecido e denominamos ϕ^{-1} de parâmetro de dispersão.

Quando ϕ for desconhecido, (1.1) pode, ou não, pertencer à família exponencial biparamétrica com parâmetros naturais ϕ e $\phi\theta_\ell$. Para (1.1) pertencer à família exponencial biparamétrica quando ϕ não for conhecido, a função $a(y, \phi)$ deve ser decomposta como

$$a(y, \phi) = \phi c(y) + d_1(\phi) + d_2(y). \tag{1.2}$$

Esse é o caso das distribuições normal, gama e normal inversa, por exemplo.

Os MLGs são definidos por (1.1) e pela componente sistemática

$$g(\mu_\ell) = \eta_\ell,$$

em que $\eta = X\beta$ é o preditor linear, sendo $\beta = (\beta_1, ..., \beta_p)^T$ um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados, $X = (x_1, ..., x_n)^T$ a matriz do modelo de dimensão $n \times p$ de posto completo, em que $x_\ell = (x_{\ell 1}, ..., x_{\ell p})^T$ e $g(\cdot)$ é uma função monótona e diferenciável denominada função de ligação.

Na Tabela 1.1 é apresentado um resumo de algumas distribuições pertencentes à família exponencial.

Tabela 1.1: Principais distribuições pertencentes à família exponencial

Distribuição	$b(\theta)$	θ	ϕ	$V(\mu)$
Normal: $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	$\theta^2/2$	μ	σ^{-2}	1
Poisson: $\mathrm{P}(\mu)$	e^θ	$\log\mu$	1	μ
Binomial: $\mathrm{B}(n, \mu)$	$\log(1+e^\theta)$	$\log\{\mu/(1-\mu)\}$	n	$\mu(1-\mu)$
Gama: $\mathrm{G}(\mu, \phi)$	$-\log(-\theta)$	$-1/\mu$	$\mathrm{E}^2(\mathrm{Y})/\mathrm{Var}(\mathrm{Y})$	μ^2
N.Inversa: $\mathrm{NI}(\mu, \phi)$	$-\sqrt{-2\theta}$	$-1/2\mu^2$	ϕ	μ^3

Fonte: Paula (2010; Tabela 1.1, pág. 7).

A função geradora de momentos (f.g.m.) da família (1.1) é dada por

$$\mathrm{M}(t;\theta,\phi) = \mathrm{E}(e^{tY}) = \exp\left\{\phi\left[b\left(\frac{t}{\phi}+\theta\right) - b(\theta)\right]\right\}, \tag{1.3}$$

e só depende da função $b(\cdot)$. A demonstração de (1.3) para o caso de variáveis aleatórias contínuas segue do Teorema 3.1 (James, 2008, pág. 120) e do fato de (1.1) ser uma função densidade de probabilidade.

A função geradora de cumulantes (f.g.c.) é, então,

$$\varphi(t;\theta,\phi) = \log[\mathrm{M}(t;\theta,\phi)] = \phi\left[b\left(\frac{t}{\phi}+\theta\right) - b(\theta)\right]. \tag{1.4}$$

Derivando (1.4) r vezes em relação a t, têm-se

$$\varphi^{(r)}(t;\theta,\phi) = \phi^{1-r}b^{(r)}\left(\frac{t}{\phi}+\theta\right),$$

em que $b^{(r)}$ indica a r-ésima derivada de $b(\cdot)$ em relação a t. Para $t=0$, obtém-se o r-ésimo cumulante da família (1.1) como

$$\kappa_r = \phi^{1-r}b^{(r)}(\theta). \tag{1.5}$$

A partir de (1.5), pode-se deduzir o valor esperado κ_1 e a variância κ_2 da família (1.1) para $r=1$ e 2, respectivamente. Tem-se $\kappa_1 = \mu = b'(\theta)$ e $\kappa_2 = \phi^{-1}b''(\theta) = \phi^{-1}\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\theta$.

A equação (1.5) mostra que existe uma relação de recorrência entre os cumulantes da família (1.1), isto é, $\kappa_{r+1} = \phi^{-1}\mathrm{d}\kappa_r/\mathrm{d}\theta$ para $r = 1, 2, \cdots$. Esse fato é fundamental na obtenção de propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança nos MLGs.

A Tabela 1.2 apresenta as funções geradoras de momentos para as distribuições dadas na Tabela 1.1.

Tabela 1.2: Funções Geradoras de Momentos para algumas distribuições

Distribuição	Função Geradora de Momentos $\mathrm{M}(t;\theta,\phi)$
Normal: $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
Poisson: $\mathrm{P}(\mu)$	$\exp[\mu(e^t - 1)]$
Binomial: $\mathrm{B}(n,\mu)$	$\{\mu[e^{\frac{t}{n}} - 1] + 1\}^n$
Gama: $\mathrm{G}(\mu,\phi)$	$\left(1 - \frac{\mu t}{\phi}\right)^{-\phi}$, $t < \frac{\phi}{\mu}$
N.Inversa: $\mathrm{NI}(\mu,\phi)$	$\exp\left\{\phi\mu^{-1}\left[1 - \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\phi}\right)^{1/2}\right]\right\}$, $t < \frac{\phi}{2\mu^2}$

A função de verossimilhança de um MLG com respostas independentes e supondo ϕ conhecido é dada por

$$\mathcal{L}(\beta) = \prod_{\ell=1}^{n} \pi(y_\ell;\theta_\ell,\phi) = \prod_{\ell=1}^{n} \exp\{\phi[y_\ell\theta_\ell - b(\theta_\ell)] + a(y_\ell,\phi)\}.$$

Assim, o logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\ell(\beta) = \log[\mathcal{L}(\beta)] = \sum_{\ell=1}^{n} \phi[y_\ell\theta_\ell - b(\theta_\ell)] + \sum_{\ell=1}^{n} a(y_\ell,\phi). \tag{1.6}$$

Um caso importante dos MLGs ocorre quando o parâmetro canônico θ e o preditor linear coincidem, isto é, quando $\theta_\ell = \eta_\ell = \sum_{k=1}^{p} x_{\ell k}\beta_k$. Consequentemente, $\ell(\beta)$ fica dado por

$$\ell(\beta) = \sum_{\ell=1}^{n} \phi\left\{y_\ell \sum_{k=1}^{p} x_{\ell k}\beta_k - b\left(\sum_{k=1}^{p} x_{\ell k}\beta_k\right)\right\} + \sum_{\ell=1}^{n} a(y_\ell,\phi),$$

podendo ser expresso na forma

$$\ell(\beta) = \sum_{k=1}^{p} S_k\beta_k - \phi\sum_{\ell=1}^{n} b\left(\sum_{k=1}^{p} x_{\ell k}\beta_k\right) + \sum_{\ell=1}^{n} a(y_\ell,\phi),$$

em que $S_k = \phi\sum_{\ell=1}^{n} y_\ell x_{\ell k}$.

Portanto, a estatística $S = (S_1, ..., S_p)^T$ é suficiente minimal (Dudewicz e Mishra, 1988, Cap. 8) para o vetor $\beta = (\beta_1, ..., \beta_p)^T$. As ligações que fornecem estatísticas suficientes para as diversas distribuições são denominadas canônicas. Um dos benefícios de usar as ligações canônicas é que elas asseguram a concavidade de $\ell(\beta)$, isto é, garantem a unicidade da estimativa de máxima verossimilhança de β, quando essa existe e, consequentemente, muitos resultados assintóticos são obtidos mais facilmente.

As funções de ligação canônicas para as principais distribuições estão apresentadas na Tabela 1.3.

Tabela 1.3: Funções de ligação canônicas

Distribuição	Função de ligação canônica
Normal	Identidade: $\eta = \mu$
Poisson	Logarítmica: $\eta = \log \mu$
Binomial	Logito: $\eta = \log \left\{ \frac{\mu}{1-\mu} \right\}$
Gama	Recíproca: $\eta = \frac{1}{\mu}$
N.Inversa	Recíproca do quadrado: $\eta = \frac{1}{\mu^2}$

Outros tipos de ligações são dadas abaixo:

Potência: $\eta = \mu^{\lambda}$, em que λ é um número real.

Probito: $\eta = \Phi^{-1}(\mu)$, em que $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão.

Complemento log-log: $\eta = \log[\log(1-\mu)]$.

Box-Cox: $\begin{cases} \eta = (\mu^{\lambda} - 1)/\lambda & \text{para } \lambda \neq 0, \\ \eta = \log \mu & \text{para } \lambda \to 0. \end{cases}$

Aranda-Ordaz: $\eta = \log\{[(1-\mu)^{-\alpha} - 1]/\alpha\}$, em que $0 < \mu < 1$ e α é uma constante desconhecida. Quando $\alpha = 1$ temos a ligação logito $\eta = \log\{\mu/(1-\mu)\}$.

A qualidade do ajuste de um MLG é avaliada através das medidas de discrepância. Uma destas medidas foi proposta por Nelder e Wedderburn (1972), sendo denominada de "deviance" (traduzida por Cordeiro (1986) como desvio), e tem expressão dada por

$$D^*(y;\hat{\mu}) = \phi D(y;\hat{\mu}) = 2\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ y_\ell(\tilde{\theta}_\ell - \hat{\theta}_\ell) + [b(\hat{\theta}_\ell) - b(\tilde{\theta}_\ell)] \right\}, \tag{1.7}$$

em que $D^*(y;\hat{\mu})$ é denominado de desvio escalonado e $D(y;\hat{\mu})$ de desvio, sendo $\hat{\theta}_\ell = \theta_\ell(\hat{\mu}_\ell)$ e $\tilde{\theta}_\ell = \theta_\ell(\tilde{\mu}_\ell)$ as estimativas de máxima verossimilhança de θ para os modelos com p parâmetros ($p < n$) e saturado ($p = n$), respectivamente. O desvio $D(y;\hat{\mu})$ é função apenas dos dados y e das médias ajustadas $\hat{\mu}$, e suas expressões para algumas distribuições são dadas na Tabela 1.4. Já o desvio escalonado $D^*(y;\hat{\mu})$ depende de $D(y;\hat{\mu})$ e do parâmetro ϕ.

Um valor pequeno para a função desvio indica que, para um número menor de parâmetros, obtém-se um ajuste tão bom quanto o ajuste com o modelo saturado. Em geral, $D(y;\hat{\mu})$ não segue assintoticamente uma distribuição χ^2_{n-p}, embora seja usual comparar os valores observados da função desvio com os percentis desta distribuição. Comumente, para os casos em que $D^*(y;\hat{\mu})$ depende do parâmetro de dispersão ϕ^{-1}, Jϕrgensen (1987) mostrou que

$$D^*(y;\hat{\mu}) \sim \chi^2_{n-p} \quad \text{quando} \quad \phi \to \infty,$$

isto é, quando a dispersão é pequena a aproximação χ^2_{n-p} para $D^*(y;\hat{\mu})$ é razoável.

A Tabela 1.4 apresenta a função desvio para as principais distribuições.

Tabela 1.4: Função desvio para algumas distribuições.

Distribuição	Desvio
Normal	$D(y;\hat{\mu}) = \sum_{\ell=1}^{n}(y_\ell - \hat{\mu}_\ell)^2$
Poisson	$D(y;\hat{\mu}) = 2\sum_{\ell=1}^{n}\left[y_\ell \log\left(\frac{y_\ell}{\hat{\mu}_\ell}\right) - (y_\ell - \hat{\mu}_\ell)\right]$
Binomial	$D(y;\hat{\mu}) = 2\sum_{\ell=1}^{n}\left[y_\ell \log\left(\frac{y_\ell}{n_\ell\hat{\mu}_\ell}\right) + (n_\ell - y_\ell)\log\left(\frac{1-(y_\ell/n_\ell)}{1-\hat{\mu}_\ell}\right)\right]$
Gama	$D(y;\hat{\mu}) = 2\sum_{\ell=1}^{n}\left[-\log\left(\frac{y_\ell}{\hat{\mu}_\ell}\right) + \frac{(y_\ell-\hat{\mu}_\ell)}{\hat{\mu}_\ell}\right]$
N.Inversa	$D(y;\hat{\mu}) = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{(y_\ell-\hat{\mu}_\ell)^2}{y_\ell\hat{\mu}_\ell^2}$

A construção de testes e intervalos de confiança sobre os parâmetros lineares dos MLGs pode ser feita através da função desvio, tendo como grande vantagem, a independência da parametrização adotada.

Uma outra medida da discrepância entre os dados y e os valores ajustados $\hat{\mu}$ para testar a adequação de um MLG é dada pela estatística de Pearson generalizada, cuja expressão é

$$X_p^2 = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{(y_\ell - \hat{\mu}_\ell)^2}{V(\hat{\mu}_\ell)},$$

em que $V(\hat{\mu}_\ell)$ é a função de variância estimada para a distribuição de interesse.

A análise do desvio (ANODEV) é uma generalização da análise de variância para os MLGs. Considere para o vetor de parâmetros β a partição $\beta = (\beta_1^T, \beta_2^T)^T$, em que β_1 é um vetor de dimensão $q \times 1$, enquanto que β_2 tem dimensão $(p-q) \times 1$ e ϕ é conhecido. Suponha que queremos testar a hipótese nula $H_0 : \beta_1 = 0$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \beta_1 \neq 0$. As funções desvio que correspondem aos modelos sob H_0 e H_1 são dadas por $D(y;\hat{\mu}^{(0)})$ e $D(y;\hat{\mu})$, respectivamente, em que $\hat{\mu}^{(0)}$ é a estimativa de máxima verossimilhança de μ sob H_0.

Podemos definir a estatística

$$F = \frac{\{D(y;\hat{\mu}^{(0)}) - D(y;\hat{\mu})\}/q}{D(y;\hat{\mu})/(n-p)},$$

cuja distribuição nula assintótica é $F_{q,(n-p)}$. A vantagem de utilizá-la é que a mesma não depende de ϕ. Essa estatística é muito conveniente para o uso prático, pois pode ser obtida diretamente da função desvio.

1.3 Estimação dos parâmetros

1.3.1 Estimação de β

A estimação do vetor de parâmetros β pode ser feita através de diversos métodos, dentre eles, o qui-quadrado, o Bayesiano e a estimação-M, sendo que este último inclui o método de máxima verossimilhança que possui muitas propriedades ótimas, tais como, consistência e eficiência assintótica.

Consideraremos apenas o método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros lineares $\beta_1, ..., \beta_p$ do modelo.

A função escore total e a matriz de informação total de Fisher para o parâmetro β são, respectivamente, dadas por

$$U_\beta = \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta} = \phi X^T W^{1/2} V^{-1/2}(y-\mu),$$

e

$$K_\beta = E\left\{-\frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial\beta\partial\beta^T}\right\} = \phi X^T W X,$$

em que X é a matriz modelo cujas linhas serão denotadas por x_ℓ^T, $\ell = 1, ..., n$, $W = \text{diag}\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ é a matriz de pesos com $\omega_\ell = V_\ell^{-1}(d\mu_\ell/d\eta_\ell)^2$, $V = \text{diag}\{V_1, ..., V_n\}$, $y = (y_1, ..., y_n)^T$ e $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)^T$.

A estimativa de máxima verossimilhança de β é obtida através do processo iterativo de Newton-Raphson. Tal processo é definido expandindo-se a função escore U_β em série de Taylor em torno de um valor inicial $\beta^{(0)}$, de modo que

$$U_\beta \cong U_\beta^{(0)} + U_\beta'^{(0)}(\beta - \beta^{(0)}),$$

em que U'_β corresponde a primeira derivada de U_β em relação a β. Assim, repetindo o procedimento acima, chega-se ao processo iterativo

$$\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} + [(-U'_\beta)^{-1}]^{(m)} U_\beta^{(m)},$$

$m = 0, 1, \cdots$. A aplicação do método escore de Fisher substituindo a matriz $-U'_\beta$ pelo correspondente valor esperado pode ser mais conveniente quando não se sabe se a matriz $-U'_\beta$ é positiva definida. Isso resulta no seguinte processo iterativo:

$$\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} + [K_\beta^{-1}]^{(m)} U_\beta^{(m)},$$

$m = 0, 1, \cdots$. Este processo pode ser reescrito como um processo iterativo de mínimos quadrados reponderados

$$\beta^{(m+1)} = (X^T W^{(m)} X)^{-1} X^T W^{(m)} z^{(m)}, \tag{1.8}$$

$m = 0, 1, ...$, em que $z = \eta + W^{-1/2} V^{-1/2} (y - \mu)$. Além de ser válida para qualquer MLG, a equação matricial (1.8) mostra que a solução das equações de máxima verossimilhança equivale a calcular repetidamente uma regressão linear ponderada de uma variável dependente ajustada z sobre a matriz X usando uma matriz de pesos W que se modifica a cada passo do processo iterativo. As funções de variância e de ligação entram no processo iterativo por meio de W e z. A convergência de (1.8) ocorre em geral num número finito de passos, independentemente dos valores iniciais utilizados. É usual iniciar (1.8) com $\eta^{(0)} = g(y)$. Ressaltamos que para o modelo normal linear não é preciso recorrer ao processo iterativo (1.8) para a obtenção da estimativa de máxima verossimilhança. Nesse caso, $\hat{\beta}$ assume a forma fechada $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$.

1.3.2 Estimação de ϕ

Os métodos mais utilizados para estimar o parâmetro ϕ quando o mesmo é desconhecido, porém igual para todas as observações, são: método do desvio, método de Pearson e método de máxima verossimilhança.

O método do desvio baseia-se na aproximação χ^2_{n-p} para $D^*(y; \hat{\mu})$. A estimativa de ϕ é então dada por

$$\hat{\phi}_d = \frac{n - p}{D(y; \hat{\mu})}.$$

O método de Pearson é baseado na aproximação da distribuição da estatística de Pearson generalizada pela distribuição χ^2_{n-p}. Assim, a estimativa de ϕ é dada por

$$\hat{\phi}_P = \frac{n-p}{\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\frac{(y_\ell-\hat{\mu}_\ell)^2}{V(\hat{\mu}_\ell)}\right\}}.$$

Na teoria, o método de máxima verossimilhança é sempre possível, mas pode tornar-se inacessível computacionalmente quando não existir solução explícita para a estimativa de máxima verossimilhança. Definindo o logaritmo da função de verossimilhança $\mathrm{L}(\beta,\phi)$ como função de β e ϕ, pode-se escrever de (1.6)

$$\mathrm{L}(\beta,\phi) = \sum_{\ell=1}^{n}\phi\left\{y_\ell\theta_\ell - b(\theta_\ell)\right\} + \sum_{\ell=1}^{n}a(y_\ell,\phi). \tag{1.9}$$

A função escore total e a matriz de informação total de Fisher para o parâmetro ϕ são, respectivamente, dadas por

$$U_\phi = \frac{\partial\mathrm{L}(\beta,\phi)}{\partial\phi} = \sum_{\ell=1}^{n}\left\{y_\ell\theta_\ell - b(\theta_\ell)\right\} + \sum_{\ell=1}^{n}a'(y_\ell,\phi),$$

e

$$K_\phi = \mathrm{E}\left(-\frac{\partial^2\mathrm{L}(\beta,\phi)}{\partial\phi^2}\right) = -\sum_{\ell=1}^{n}\mathrm{E}\left\{a''(Y_\ell,\phi)\right\} = -nd_2,$$

em que $a'(y_\ell,\phi) = \mathrm{d}a(y_\ell,\phi)/\mathrm{d}\phi$, $a''(y_\ell,\phi) = \mathrm{d}^2a(y_\ell,\phi)/\mathrm{d}\phi^2$ e d_2 é a segunda derivada da função $d_1(\phi)$.

Igualando a função U_ϕ a zero, obtemos

$$\sum_{\ell=1}^{n}a'(y_\ell,\hat{\phi}) = -\sum_{\ell=1}^{n}\{y_\ell\hat{\theta}_\ell - b(\hat{\theta}_\ell)\}.$$

Por outro lado, de (1.7) temos que

$$\begin{aligned}
D(y;\hat{\mu}) &= 2\sum_{\ell=1}^{n}\left\{y_\ell(\tilde{\theta}_\ell - \hat{\theta}_\ell) + [b(\hat{\theta}_\ell) - b(\tilde{\theta}_\ell)]\right\}\\
&= 2\sum_{\ell=1}^{n}\left\{y_\ell(\tilde{\theta}_\ell) - b(\tilde{\theta}_\ell)\right\} - 2\sum_{\ell=1}^{n}\left\{y_\ell(\hat{\theta}_\ell) - b(\hat{\theta}_\ell)\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\ell=1}^{n}a'(y_\ell,\hat{\phi}) = \frac{1}{2}D(y;\hat{\mu}) - \sum_{\ell=1}^{n}\{y_\ell\tilde{\theta}_\ell - b(\tilde{\theta}_\ell)\},$$

com $D(y;\hat{\mu})$ denotando o desvio do modelo sob investigação.

A estimativa de máxima verossimilhança para ϕ nos casos normal e normal inversa, é dada por $\hat{\phi} = n/D(y;\hat{\mu})$. Para o caso gama, a estimativa de máxima verossimilhança de ϕ vem da equação

$$2n[\log\hat{\phi} - \psi(\hat{\phi})] = D(y;\hat{\mu}), \tag{1.10}$$

em que $\psi(\phi) = \Gamma'(\phi)/\Gamma(\phi)$ é a função digama. Cordeiro e McCullagh (1991) deduziram uma aproximação para $\hat{\phi}$ obtida de (1.10) para valores pequenos de ϕ,

$$\hat{\phi} \approx \frac{n\left[1 + \left(1 + \frac{2D(y;\hat{\mu})}{3n}\right)^{1/2}\right]}{2D(y;\hat{\mu})}.$$

Utilizando a desigualdade $1/2x < \log x - \psi(x) < 1/x$, Cordeiro e McCullagh (1991) também deduziram que

$$\frac{n}{\mathrm{D}(y;\hat{\mu})} < \hat{\phi} < \frac{2n}{\mathrm{D}(y;\hat{\mu})}. \tag{1.11}$$

Substituindo o valor de $\mathrm{D}(y;\hat{\mu})$ por $(n-p)/\hat{\phi}_d$ em (1.11), temos

$$\frac{n\hat{\phi}_d}{n-p} < \hat{\phi} < \frac{2n\hat{\phi}_d}{n-p}. \tag{1.12}$$

Ao limite quando $n \to \infty$, a desigualdade (1.12) resulta em

$$\hat{\phi}_d < \hat{\phi} < 2\hat{\phi}_d. \tag{1.13}$$

A desigualdade (1.13) proporciona a comparação entre as estimativas $\hat{\phi}$ e $\hat{\phi}_d$.

Derivando U_ϕ em relação a β_r, temos

$$U_{\phi r} = \frac{\partial^2 \mathrm{L}(\beta,\phi)}{\partial\phi\partial\beta_r} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(y_\ell - \mu_\ell)}{V_\ell}\frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} x_{\ell r}.$$

Logo, $\mathrm{E}(U_{\phi\beta}) = 0$, o que mostra que os parâmetros β e ϕ são ortogonais.

Assintoticamente, $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ possuem distribuições $N_p(\beta, K_\beta^{-1})$ e $N(0, K_\phi^{-1})$, respectivamente. Além disso, $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ são independentes. Demonstrações rigorosas destes resultados podem ser encontradas, por exemplo, em Fahrmeir e Kaufmann (1985) e Sen e Singer (1993, Cap. 7).

1.4 Testes de hipóteses

Os métodos de inferência nos MLGs baseiam-se, essencialmente, na teoria de máxima verossimilhança. Com base nessa teoria, três estatísticas são utilizadas para testar as hipóteses relativas aos parâmetros β's, são elas: estatística da razão de verossimilhanças; estatística de Wald, baseada na distribuição normal assintótica de $\hat{\beta}$ e a estatística escore, obtida da função escore.

Suponha que queremos testar a hipótese nula $H_0 : \beta = \beta^{(0)}$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \beta \neq \beta^{(0)}$, em que $\beta^{(0)}$ é um vetor de dimensão $p \times 1$ conhecido e ϕ é também assumido conhecido.

Teste da razão de verossimilhanças

O teste da razão de verossimilhanças para o caso de hipótese simples é comumente definido por

$$\mathrm{RV} = 2[\ell(\hat{\beta}) - \ell(\beta^0)],$$

em que $\ell(\hat{\beta})$ e $\ell(\beta^0)$ são os valores do logaritmo da função de verossimilhança em $\hat{\beta}$ e β^0, respectivamente.

Teste de Wald

O teste de Wald é definido por

$$\mathrm{W} = (\hat{\beta} - \beta^{(0)})^T \hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}^{-1}(\hat{\beta})(\hat{\beta} - \beta^{(0)}),$$

em que $\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}(\hat{\beta})$ denota a matriz de variância-covariância assintótica de $\hat{\beta}$ estimada em $\hat{\beta}$.

Teste escore

O teste escore, também conhecido como teste de Rao, é definido quando $U_\beta(\hat{\beta}) = 0$ por

$$S_R = U_\beta(\beta^0)^T \hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}_0(\hat{\beta}) U_\beta(\beta^0),$$

em que $\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}_0(\hat{\beta})$ significa que a variância assintótica de $\hat{\beta}$ está sendo estimada sob H_0.

As três estatísticas descritas acima são assintoticamente equivalentes e, sob H_0, convergem em distribuição para a variável χ^2_p.

Capítulo 2

Correção do Viés dos Estimadores de Máxima Verossimilhança

Neste capítulo apresentamos diversos resultados relacionados à correção do viés dos estimadores de máxima verossimilhança (EMVs). Apresentamos também expressões matriciais para os vieses de ordem n^{-1} dos EMVs em MLGs. Tais expressões foram obtidas por Cordeiro e McCullagh (1991) através do uso da fórmula de Cox e Snell (1968) para determinar o viés de ordem n^{-1} dos EMVs em modelos multiparamétricos. A partir destas expressões, é possível obter os EMVs corrigidos pelo viés de ordem n^{-1} em MLGs. Os resultados da Seção 2.3 podem ser encontrados em Cordeiro e McCullagh (1991).

2.1 Introdução

O comportamento dos EMVs em amostras finitas é estudado por uma notável área de pesquisa em estatística. Estes estimadores possuem diversas propriedades significativas, tais como, consistência, invariância e eficiência assintótica. Uma característica indesejável é que eles são tipicamente viesados para os verdadeiros valores dos parâmetros quando o tamanho da amostra n é pequeno ou a informação de Fisher é reduzida. Sendo o tamanho da amostra n grande, o viés que é de ordem n^{-1} pode até ser considerado insignificante quando comparado ao erro padrão que é de ordem $n^{-1/2}$. No entanto, estimadores corrigidos pelo viés podem melhorar a qualidade das estimativas, principalmente, em se tratando de amostras pequenas.

As correções dos vieses têm sido bastante estudadas na literatura estatística. Bartlett (1953) deduziu uma fórmula para o viés de ordem n^{-1} do EMV no caso uniparamétrico. Expressões de ordem n^{-1} para os primeiros quatro cumulantes em amostras aleatórias de um ou dois parâmetros desconhecidos foram dadas por Haldane (1953) e Haldane e Smith (1956). Shenton e Wallington (1962) apresentaram uma expressão geral para os vieses de ordem n^{-1} dos estimadores pelo método dos momentos e da máxima verossimilhança no contexto biparamétrico. Bowman e Shenton (1965) obtiveram expressões para o viés do EMV até a ordem n^{-2} e covariâncias de mesma ordem, para o caso multiparamétrico. Cox e Snell (1968) deduziram uma expressão geral para o viés de ordem n^{-1} dos EMVs nos casos uniparamétrico e multiparamétrico. Uma expressão geral para o viés de segunda ordem em modelos não-lineares em que a matriz de covariâncias é conhecida foi apresentada por Box (1971). Cook et al. (1986) forneceram os vieses dos EMVs em um modelo de regressão normal não-linear. Young e Bakir (1987) exibiram estimadores corrigidos em modelos de regressão log-gama generalizados.

Cordeiro e McCullagh (1991) obtiveram uma fórmula geral para os vieses de ordem n^{-1} dos EMVs em modelos lineares generalizados. Paula (1992) conseguiu uma expressão para os vieses de segunda ordem em modelos não-lineares da família exponencial. Cordeiro (1993) apresentou expressões de segunda ordem dos EMVs em dois modelos heteroscedásticos de regressão. Um estimador corrigido, o qual corresponde à solução de uma equação escore modificada foi fornecido por Firth (1993). Cordeiro e Klein (1994) deduziram fórmulas matriciais para os vieses de segunda ordem dos EMVs em modelos ARMA. Expressões para os vieses de ordem n^{-1} dos EMVs dos parâmetros em modelos não-exponenciais não-lineares foram exibidas por Paula e Cordeiro (1995). Ferrari et. al (1996) obtiveram EMVs corrigidos até segunda e terceira ordem em modelos uniparamétricos e compararam seus erros padrão. Cordeiro e Vasconcellos (1997) forneceram uma fórmula geral para calcular o viés de segunda ordem em uma ampla classe de modelos de regressão multivariados normais não-lineares. Botter e Cordeiro (1998) deduziram fórmulas para os vieses de segunda ordem dos EMVs em modelos lineares generalizados com covariáveis modelando o parâmetro de dispersão. Cordeiro e Cribari-Neto (1998) concluíram, através de estudos de simulação, que para os modelos não-exponenciais não-lineares os EMVs corrigidos são mais precisos em termos de erro médio quadrático do que as estimativas usuais.

Cordeiro e Vasconcellos (1999) apresentaram os vieses de ordem n^{-1} dos EMVs em modelos de regressão von Mises. Expressões matriciais para o viés de segunda ordem dos EMVs em modelos de regressão multivariados não-lineares com erros t-Student foram fornecidas por Vasconcellos e Cordeiro (2000). Uma fórmula geral para os vieses de segunda ordem dos EMVs em uma classe de modelos de regressão não-lineares simétricos foi deduzida por Cordeiro et al. (2000). Cribari-Neto e Vasconcellos (2002) analisaram o comportamento em amostras finitas dos EMVs dos parâmetros que indexam a distribuição beta. Uma fórmula geral para os vieses de segunda ordem dos EMVs em um modelo de regressão não-linear t-Student em que o número de graus de liberdade é desconhecido foi dada por Vasconcellos e Silva (2005). Ospina et al. (2006) apresentaram expressões com forma fechada para os vieses de ordem n^{-1} dos EMVs em um modelo beta. Lemonte et al. (2007) exibiram estimadores não-viesados para os parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders.

Cordeiro e Barroso (2007) deram expressões matriciais para os vieses de ordem n^{-2} dos EMVs em MLGs. Cordeiro e Udo (2008) forneceram expressões para os vieses de ordem n^{-2} dos EMVs em modelos não-lineares generalizados com dispersão nas covariáveis. Correção do viés para o modelo de quasi-verossimilhança estendido foi dada por Cordeiro e Demétrio (2008). Cordeiro et al. (2008) desenvolveram correção do viés do EMV em modelos não-lineares com super dispersão. Cordeiro (2008) forneceu fórmulas para os vieses dos EMVs em modelos de regressão lineares heteroscedásticos. Cordeiro et al. (2009) obtiveram uma fórmula matricial para os vieses de segunda ordem dos EMVs dos parâmetros da média e da variância em modelos não-lineares heteroscedásticos. Cysneiros et al. (2009) apresentaram uma fórmula geral para os vieses de segunda ordem dos EMVs em modelos de regressão não-lineares simétricos heteroscedásticos.

2.2 Fórmula de Cox e Snell

Uma fórmula geral utilizada para determinar o viés de ordem n^{-1} dos EMVs em modelos multiparamétricos, com vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, ..., \theta_p)^T$, foi desenvolvida por Cox e Snell (1968) e é dada por

$$d^r(\theta) = \sum_{s,t,u} \kappa^{rs}\kappa^{tu}\left(\frac{1}{2}\kappa_{stu} + \kappa_{st,u}\right), \tag{2.1}$$

em que r, s, t, u indexam os parâmetros do modelo e $-\kappa^{rs}$ representa o elemento (r, s) da inversa da matriz de informação de Fisher. Para calcular o viés, basta conhecer a inversa da matriz de informação de Fisher e os cumulantes $\kappa_{st,u}$ e κ_{stu} em relação a todos os parâmetros. A expressão $(1/2\kappa_{stu}+\kappa_{st,u})$ na fórmula (2.1) pode ser substituída por $(\kappa_{st}^{(u)} - 1/2\kappa_{stu})$, como consequência da identidade de Bartlett $\kappa_{st,u}+\kappa_{stu}-\kappa_{st}^{(u)} = 0$.

A grande vantagem da fórmula (2.1) é definir um EMV corrigido até a ordem n^{-1} dado por $\tilde{\theta}_r = \hat{\theta}_r - d^r(\hat{\theta})$, em que $d^r(\hat{\theta})$ é a r-ésima componente de $d(\hat{\theta})$. O EMV corrigido $\tilde{\theta}_r$ tem viés de ordem n^{-2}, isto é, $E(\tilde{\theta}_r) = \theta_r + O(n^{-2})$, e pode ser preferido em relação ao EMV usual $\hat{\theta}_r$ cujo viés é de ordem n^{-1}.

2.3 Correção do viés dos EMVs em MLGs

Através da fórmula (2.1), Cordeiro e McCullagh (1991) obtiveram expressões matriciais para os vieses de primeira ordem dos EMVs em MLGs.

Consideremos n variáveis aleatórias independentes $Y_1, ..., Y_n$ com função densidade (1.1) e $a(y, \phi)$ dado em (1.2). Suponhamos que $d_1(\cdot)$ tenha as quatro primeiras derivadas. Sendo o logaritmo da função de verossimilhança para β e ϕ dado em (1.9), denotaremos os cumulantes conjuntos das derivadas de $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\beta, \phi)$ por $\kappa_{rs} = \mathrm{E}(\partial^2\mathrm{L}/\partial\beta_r\partial\beta_s)$, $\kappa_{r,s} = \mathrm{E}(\partial\mathrm{L}/\partial\beta_r\partial\mathrm{L}/\partial\beta_s)$, $\kappa_{\phi r} = \mathrm{E}(\partial^2\mathrm{L}/\partial\phi\partial\beta_r)$, $\kappa_{rs}^{(t)} = \partial\kappa_{rs}/\partial\beta_t$, $\kappa_{rs,t} = \mathrm{E}(\partial^2\mathrm{L}/\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\mathrm{L}/\partial\beta_t)$, $\kappa_{rst} = \mathrm{E}(\partial^3\mathrm{L}/\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\beta_t)$, etc.

A matriz de informação para (β, ϕ) é dada por

$$K = \begin{pmatrix} -\kappa_{rs} & 0 \\ 0 & -nd_2 \end{pmatrix},$$

cuja inversa é

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \{-\kappa^{rs}\} & 0 \\ 0 & \{-nd_2\}^{-1} \end{pmatrix},$$

em que $\{-\kappa^{rs}\}$ representa o inverso da matriz de informação de Fisher K_β e $d_r = d_1^{(r)}(\phi)$ para $r = 2$ é a r-ésima derivada da função $d_1(\phi)$.

Seja $d^r(\beta)$ o viés de ordem n^{-1} da r-ésima componente de $d(\beta)$ com $r = 1, ..., p$. Utilizando a fórmula (2.1) tem-se que $d^r(\beta)$ devido à ortogonalidade entre β e ϕ reduz-se a

$$d^r(\beta) = \sum_{s,t,u=1}^{p} \kappa^{rs}\kappa^{tu}\left(\frac{1}{2}\kappa_{stu} + \kappa_{st,u}\right) + \sum_{s=1}^{p} \kappa^{rs}\kappa^{\phi\phi}\left(\frac{1}{2}\kappa_{s\phi\phi} + \kappa_{s\phi,\phi}\right).$$

Como $\kappa_{s\phi\phi} = \kappa_{s\phi}^{(\phi)} = \kappa_{s\phi,\phi} = 0$, a expressão acima fica dada por

$$d^r(\beta) = \sum_{s,t,u=1}^{p} \kappa^{rs}\kappa^{tu}\left(\frac{1}{2}\kappa_{stu} + \kappa_{st,u}\right). \tag{2.2}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\kappa_{stu} + \kappa_{st,u} &= -\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + 2g_\ell)x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u} + \phi\sum_{\ell=1}^{n} g_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u} \\ &= -\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n} f_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $f_\ell = V_\ell^{-1}(d\mu_\ell/d\eta_\ell)(d^2\mu_\ell/d\eta_\ell{}^2)$ e $g_\ell = f_\ell - V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}(d\mu_\ell/d\eta_\ell)^3$.

Substituindo (2.3) em (2.2) e rearranjando os termos do somatório temos,

$$d^r(\beta) = -\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n} f_\ell\left(\sum_{s=1}^{p}\kappa^{rs}x_{\ell s}\right)\left(\sum_{t,u=1}^{p}\kappa^{tu}x_{\ell t}x_{\ell u}\right).$$

Portanto, o viés de ordem n^{-1} de $\hat{\beta}$ pode ser escrito em notação matricial, como

$$d(\beta) = -(2\phi)^{-1}(X^TWX)^{-1}X^TZ_dF\mathbf{1}, \tag{2.4}$$

em que $Z_d = \text{diag}\{z_{11}, ..., z_{nn}\}$, sendo $Z = \{z_{\ell m}\} = X(X^TWX)^{-1}X^T$, $F = \text{diag}\{f_1, ..., f_n\}$ e $\mathbf{1}$ é um vetor $n \times 1$ de uns.

A expressão (2.4) pode ser vista como o vetor de coeficientes de regressão na regressão linear da seguinte maneira:

$$d(\beta) = (X^TWX)^{-1}X^TW\zeta,$$

em que $\zeta = -(2\phi)^{-1}W^{-1}Z_dF\mathbf{1}$.

O viés de ordem n^{-1} de $\hat{\eta}$ é escrito em notação matricial como

$$\begin{aligned} d(\eta) = d(X\beta) = Xd(\beta) &= -(2\phi)^{-1}X(X^TWX)^{-1}X^TZ_dF\mathbf{1} \\ &= -(2\phi)^{-1}ZZ_dF\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sejam $G_1 = \text{diag}\{d\mu/d\eta\}$ e $G_2 = \text{diag}\{d^2\mu/d\eta^2\}$. Como μ_ℓ é uma função um-a-um de η_ℓ, obtêm-se para a ordem n^{-1} que

$$d(\mu_\ell) = d(\eta_\ell)\frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} + \frac{1}{2}\text{Var}_1(\hat{\eta}_\ell)\frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell{}^2},$$

em que $\text{Var}_1(\hat{\eta}_\ell)$ é o termo n^{-1} na variância de $\hat{\eta}_\ell$.

Temos que,

$$\text{Var}(\hat{\eta}) = \text{Var}(X\hat{\beta}) = X\text{Var}(\hat{\beta})X^T = XK_\beta^{-1}X^T = \phi^{-1}X(X^TWX)^{-1}X^T = \phi^{-1}Z.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \text{Var}_1(\hat{\eta}_1) \\ \vdots \\ \text{Var}_1(\hat{\eta}_n) \end{bmatrix} = \phi^{-1}\begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{nn} \end{bmatrix} = \phi^{-1}\begin{bmatrix} z_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & z_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \phi^{-1}Z_d\mathbf{1}.$$

Portanto,

$$d(\mu) = -(2\phi)^{-1}G_1ZZ_dF\mathbf{1} + (2\phi)^{-1}G_2Z_d\mathbf{1}.$$

Como F e Z_d são matrizes diagonais, então $Z_dF = FZ_d$.

Logo, o viés de ordem n^{-1} de $\hat{\mu}$ é

$$\begin{aligned} d(\mu) &= -(2\phi)^{-1}G_1ZFZ_d\mathbf{1} + (2\phi)^{-1}G_2Z_d\mathbf{1} \\ &= (2\phi)^{-1}(G_2 - G_1ZF)Z_d\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando a ortogonalidade entre β e ϕ na fórmula (2.1), tem-se que o viés n^{-1} de $\hat{\phi}$ é expresso por

$$d(\phi) = \kappa^{\phi\phi}\sum_{t,u=1}^{p}\kappa^{tu}\left(\frac{1}{2}\kappa_{\phi tu} + \kappa_{\phi t,u}\right) + (\kappa^{\phi\phi})^2\left(\frac{1}{2}\kappa_{\phi\phi\phi} + \kappa_{\phi\phi,\phi}\right). \tag{2.7}$$

Como $\kappa_{\phi t,u} = -\kappa_{\phi tu} = \sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell x_{\ell t}x_{\ell u}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{t,u=1}^{p}\kappa^{tu}\left(\frac{1}{2}\kappa_{\phi tu} + \kappa_{\phi t,u}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell\left(\sum_{t,u=1}^{p}\kappa^{tu}x_{\ell t}x_{\ell u}\right) \\ &= -\frac{1}{2\phi}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell z_{\ell\ell} \\ &= -\frac{1}{2\phi}\text{tr}(WZ) \\ &= -\frac{1}{2\phi}\text{posto}(X) \\ &= -\frac{p}{2\phi} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Substituindo (2.8) em (2.7) e utilizado o fato de que $\kappa_{\phi\phi} = nd_2$, $\kappa_{\phi\phi,\phi} = 0$ e $\kappa_{\phi\phi\phi} = nd_3$, o viés de ordem n^{-1} de $\hat{\phi}$ é dado por

$$d(\phi) = \frac{1}{nd_2}\left(\frac{-p}{2\phi}\right) + \left(\frac{1}{nd_2}\right)^2 \frac{nd_3}{2} = \frac{\phi d_3 - pd_2}{2n\phi d_2^2}. \tag{2.9}$$

A partir das expressões (2.4), (2.5), (2.6) e (2.9), podemos definir os EMVs corrigidos pelo viés de ordem n^{-1}, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\phi}$, respectivamente, por

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} - d(\hat{\beta}), \quad \tilde{\eta} = \hat{\eta} - d(\hat{\eta}), \quad \tilde{\mu} = \hat{\mu} - d(\hat{\mu}) \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \hat{\phi} - d(\hat{\phi}),$$

em que $d(\cdot)$ é o viés avaliado nos parâmetros $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\mu}$ e $\hat{\phi}$, respectivamente. Os estimadores corrigidos têm vieses de ordem n^{-2}. Sendo assim, espera-se que eles tenham melhores propriedades em amostras finitas que os EMVs usuais, cujos vieses são de ordem n^{-1}.

Capítulo 3

Matriz de Covariâncias de Segunda Ordem

Neste capítulo, fornecemos a matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs em MLGs para os seguintes casos: quando a dispersão é conhecida, quando a dispersão é desconhecida e quando o EMV é corrgido pelo viés, porém com dispersão conhecida. Estes resultados podem ser encontrados em Cordeiro (2004), Cordeiro et al. (2006) e Cavalcanti (2009), respectivamente.

3.1 Matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV em MLGs com dispersão conhecida

Tanto nesta seção como na Seção 3.3, o logaritmo da função de verossimilhança para β será dado por (1.6) e denotaremos os cumulantes conjuntos das derivadas de $\ell = \ell(\beta)$ por $\kappa_{rs} = \mathrm{E}(\partial^2\ell/\partial\beta_r\partial\beta_s)$, $\kappa_{r,s} = \mathrm{E}(\partial\ell/\partial\beta_r\partial\ell/\partial\beta_s)$, ${\kappa_{rs}}^{(t)} = \partial\kappa_{rs}/\partial\beta_t$, $\kappa_{rs,t} = \mathrm{E}(\partial^2\ell/\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\ell/\partial\beta_t)$, $\kappa_{rst} = \mathrm{E}(\partial^3\ell/\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\beta_t)$, etc. Todos os κ's referem-se a um total sobre a amostra e são, em geral, de ordem n.

De Peers e Iqbal (1985) decorre que a matriz de covariâncias até a ordem n^{-2} do EMV, $\hat{\beta}$, é dada por

$$\mathrm{Cov}_1(\hat{\beta}) \quad = \quad \mathrm{K}_{\beta}^{-1} + \Sigma,$$

em que $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)}$ com $\Sigma^{(r)} = \{\sigma_{ij}^{(r)}\}$, r=1,2 e 3 e σ_{ij} dado por

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)},$$

em que

$$\sigma_{ij}^{(1)} = -\sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}(\kappa_{abcd} + \kappa_{a,bcd} + 2\kappa_{abc,d} + 2\kappa_{a,bc,d} + 3\kappa_{ac,bd}), \tag{3.1}$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\left(\frac{3}{2}\kappa_{abc}\kappa_{rst} + 4\kappa_{ab,c}\kappa_{rst} + \kappa_{a,bc}\kappa_{rst} + 2\kappa_{ab,c}\kappa_{r,st} + \kappa_{ab,c}\kappa_{rt,s}\right), \tag{3.2}$$

e

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}(2\kappa_{a,bc}\kappa_{r,st} + \kappa_{a,bc}\kappa_{rst} + \kappa_{abc}\kappa_{rst} + 2\kappa_{abc}\kappa_{r,st}). \tag{3.3}$$

Usando o fato de que os cumulantes são invariantes sob permutação de parâmetros e as identidades de Bartlett (vide Apêndice A), podemos reescrever (3.1)-(3.3) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(1)} &= -\sum_{a,b,c=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}\{\kappa_{abcd} + 3\kappa_{a,bcd} + 2(\kappa_{adbc} - \kappa_{abc}^{(d)} - \kappa_{dbc}^{(a)} + \kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{ad,bc}) + 3\kappa_{ac,bd}\} \\
&= -\sum_{a,b,c=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}(\kappa_{abcd} + 3\kappa_{a,bcd} + 2\kappa_{abcd} - 4\kappa_{bcd}^{(a)} + 2\kappa_{bc}^{(ad)} - 2\kappa_{ac,bd} + 3\kappa_{ac,bd}) \\
&= -\sum_{a,b,c=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}(3\kappa_{abcd} + 3\kappa_{a,bcd} - 4\kappa_{bcd}^{(a)} + 2\kappa_{bc}^{(ad)} + \kappa_{ac,bd}) \\
&= -\sum_{a,b,c=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}(3\kappa_{bcd}^{(a)} - 4\kappa_{bcd}^{(a)} + 2\kappa_{bc}^{(ad)} + \kappa_{ac,bd}) \\
&= -\sum_{a,b,c=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}(2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} + \kappa_{ac,bd}),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)} &= \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\left(\frac{3}{2}\kappa_{abc}\kappa_{rst} + 5\kappa_{ab,c}\kappa_{rst} + 3\kappa_{ab,c}\kappa_{r,st}\right) \\
&= \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\left\{\left(\frac{3}{2}\kappa_{abc} + 5\kappa_{ab,c}\right)\kappa_{rst} + 3\kappa_{ab,c}\kappa_{r,st}\right\},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

e

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(3)} &= \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}(2\kappa_{a,bc}\kappa_{r,st}+\kappa_{a,bc}\kappa_{rst}+\kappa_{abc}\kappa_{rst}+2\kappa_{abc}\kappa_{r,st}) \\
&= \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}\{2(\kappa_{a,bc}+\kappa_{abc})\kappa_{r,st}+(\kappa_{a,bc}+\kappa_{abc})\kappa_{rst}\} \\
&= \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}\{(2\kappa_{r,st}+\kappa_{rst})\kappa_{bc}^{(a)}\}. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Após alguma álgebra em (3.4), (3.5) e (3.6) (vide Apêndice B), obtemos

$$
\sigma_{ij}^{(1)} = -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)h_\ell\left(\sum_{c,d=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{cd}x_{d\ell}\right)\left(\sum_{b=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bj}\right)\right\},
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)} &= \frac{3}{2}\phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)f_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)f_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\} \\
&+3\phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)f_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)g_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\} \\
&-2\phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)g_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)f_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\} \\
&-\phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)g_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)g_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

e

$$
\sigma_{ij}^{(3)} = \phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)(f_\ell+g_\ell)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)f_m\left(\sum_{r,s=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rs}x_{sm}\right)\left(\sum_{b=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bj}\right)\right\}.
$$

Podemos escrever as expressões acima em notação matricial, como

$$\Sigma^{(1)} = \phi^{-2}PHZ_dP^T,$$

$$\Sigma^{(2)} = \frac{3}{2}\phi^{-2}PFZ^{(2)}FP^T+\phi^{-2}PGZ^{(2)}FP^T-\phi^{-2}PGZ^{(2)}GP^T,$$

e

$$\Sigma^{(3)} = \phi^{-2}(X^TWX)^{-1}\Delta(X^TWX)^{-1}.$$

Portanto,

$$\Sigma = \phi^{-2}P\Lambda P^T+\phi^{-2}(X^TWX)^{-1}\Delta(X^TWX)^{-1},$$

em que $\Lambda = HZ_d + \frac{3}{2}FZ^{(2)}F + GZ^{(2)}F - GZ^{(2)}G$, $P = (X^TWX)^{-1}X^T$, $Z = XP$, $H = \mathrm{diag}\{h_1, ..., h_n\}$, $h_\ell = -(\mathrm{d}\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell)(\mathrm{d}^3\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell^3)/V_\ell - (\mathrm{d}\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell)^2(\mathrm{d}^2\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell^2)V_\ell^{(1)}/V_\ell^2 + (\mathrm{d}\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell)^4V_\ell^{(1)2}/V_\ell^3$, $V_\ell^{(1)} = \mathrm{d}V_\ell/\mathrm{d}\mu_\ell$, $Z_d = \mathrm{diag}\{z_{11}, ..., z_{nn}\}$, $F = \mathrm{diag}\{f_1, ..., f_n\}$, $f_\ell = V_\ell^{-1}(\mathrm{d}\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell)(\mathrm{d}^2\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell^2)$, $G = \mathrm{diag}\{g_1, ..., g_n\}$, $g_\ell = V_\ell^{-1}(\mathrm{d}\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell)(\mathrm{d}^2\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell^2) - V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}(\mathrm{d}\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell)^3$ e $Z^{(2)} = Z \odot Z$, em que $\odot$ denota o produto de Hadamard (Rao, 1973, pág. 30). A matriz Δ é definida por

$$\Delta = \sum_{\ell=1}^{n} \Delta_\ell c_\ell,$$

em que $\Delta_\ell = (f_\ell + g_\ell)x_\ell x_\ell^T$, $c_\ell = \delta_\ell^T Z_\beta Z_{\beta_d} F\mathbf{1}$, $x_\ell^T = (x_{\ell 1}, ..., x_{\ell p})$ é a ℓ-ésima linha da matriz de covariâncias X, $Z_\beta = X(X^TWX)^{-1}X^T$, δ_ℓ é um vetor de dimensão $n \times 1$ com um na posição ℓ e zero nas demais posições e $\mathbf{1}$ é um vetor $n \times 1$ de uns.

Logo, a matriz de covariâncias de ordem n^{-2} do EMV, $\hat{\beta}$, é dada por

$$\mathrm{Cov}_1(\hat{\beta}) = \mathrm{K}_\beta^{-1} + \Sigma = \phi^{-1}(X^TWX)^{-1} + \phi^{-2}P\Lambda P^T + \phi^{-2}(X^TWX)^{-1}\Delta(X^TWX)^{-1}.$$

3.2 Matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs em MLGs com dispersão desconhecida

Considere o logaritmo da função de verossimilhança para β e ϕ e os cumulantes conjuntos das derivadas de $\mathrm{L}(\beta, \phi)$, os mesmos dados na Seção 2.3. Seja $d_r = d_1^{(r)}(\phi)$ a r-ésima derivada da função $d_1(\phi)$ para $r = 2, 3, 4$.

Sejam $\xi = (\beta^T, \phi)^T$ o vetor de parâmetros de dimensão $(p+1) \times 1$ no modelo (1.1) e $\hat{\xi}$ o seu EMV. A matriz de covariâncias de segunda ordem de $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ é dada por

$$\mathrm{Cov}_2(\hat{\xi}) = K^{-1} + \Sigma^*,$$

em que

$$\Sigma^* = \begin{pmatrix} \Sigma^*_{\beta\beta} & \Sigma^*_{\beta\phi} \\ (\Sigma^*_{\beta\phi})^T & \Sigma^*_{\phi\phi} \end{pmatrix},$$

em que $\Sigma^*_{\beta\beta} = \Sigma^{(1)*}_{\beta\beta} + \Sigma^{(2)*}_{\beta\beta} + \Sigma^{(3)*}_{\beta\beta}$ é uma matriz de dimensão $p \times p$ com $\Sigma^{(r)*}_{\beta\beta} = \{\sigma^{(r)*}_{ij}\}$ para r=1, 2 e 3, $\Sigma^*_{\beta\phi} = \Sigma^{(1)*}_{\beta\phi} + \Sigma^{(2)*}_{\beta\phi} + \Sigma^{(3)*}_{\beta\phi}$ é um vetor de dimensão $p \times 1$ com $\Sigma^{(r)*}_{\beta\phi} = \{\sigma^{(r)*}_{i\phi}\}$ para r=1, 2 e 3, $\Sigma^*_{\phi\phi} = \Sigma^{(1)*}_{\phi\phi} + \Sigma^{(2)*}_{\phi\phi} + \Sigma^{(3)*}_{\phi\phi}$ é um escalar com $\Sigma^{(r)*}_{\phi\phi} = \{\sigma^{(r)*}_{\phi\phi}\}$ para r=1, 2 e 3 e além disso,

$$\sigma_{ij}^{(1)*} \;=\; \sigma_{ij}^{(1)} - \kappa^{\phi\phi}\sum_{a,b=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jb}(2\kappa_{a,b\phi,\phi}+3\kappa_{a\phi,b\phi}), \qquad (3.7)$$

$$\sigma_{i\phi}^{(1)*} \;=\; -\kappa^{\phi\phi}\sum_{a,c,d=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{cd}(\kappa_{a\phi cd}+\kappa_{a,\phi cd}+2\kappa_{a\phi c,d}+2\kappa_{a,\phi c,d}+3\kappa_{ac,\phi d}), \qquad (3.8)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(1)*} = -(\kappa^{\phi\phi})^3\kappa_{\phi\phi\phi\phi} - (\kappa^{\phi\phi})^2\sum_{c,d=1}^{p}\kappa^{cd}(2\kappa_{\phi,\phi c,d}+3\kappa_{\phi c,\phi d}), \qquad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(2)*} \;=\;& \sigma_{ij}^{(2)} + \kappa^{\phi\phi}\sum_{a,c=1}^{p}\sum_{r,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{ct}\left(\frac{3}{2}\kappa_{a\phi c}\kappa_{r\phi t}+4\kappa_{a\phi,c}\kappa_{r\phi t}+\kappa_{a,\phi c}\kappa_{r\phi t}+2\kappa_{a\phi,c}\kappa_{r,\phi t}\right)\\ &+\kappa^{\phi\phi}\sum_{a,c=1}^{p}\sum_{r,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\left(\frac{3}{2}\kappa_{ab\phi}\kappa_{rs\phi}+\kappa_{a,b\phi}\kappa_{rs\phi}\right), \end{aligned}\qquad (3.10)$$

$$\sigma_{i\phi}^{(2)*} = \kappa^{\phi\phi}\sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{s,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\left(\frac{3}{2}\kappa_{abc}\kappa_{\phi st}+4\kappa_{ab,c}\kappa_{\phi st}+\kappa_{a,bc}\kappa_{\phi st}+\kappa_{ab,c}\kappa_{\phi t,s}\right), \qquad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi\phi}^{(2)*} \;=\;& (\kappa^{\phi\phi})^2\sum_{b,c=1}^{p}\sum_{s,t=1}^{p}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\left(\frac{3}{2}\kappa_{\phi bc}\kappa_{\phi st}+4\kappa_{\phi b,c}\kappa_{\phi st}+\kappa_{\phi b,c}\kappa_{\phi t,s}\right)\\ &+\frac{3}{2}(\kappa^{\phi\phi})^4\kappa_{\phi\phi\phi}^2, \end{aligned}\qquad (3.12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(3)*} \;=\;& +\kappa^{\phi\phi}\sum_{a,b=1}^{p}\sum_{r,s=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}(2\kappa_{a,b\phi}\kappa_{r,s\phi}+\kappa_{a,b\phi}\kappa_{rs\phi}+\kappa_{ab\phi}\kappa_{rs\phi}+2\kappa_{ab\phi}\kappa_{r,s\phi})\\ &+\sigma_{ij}^{(3)}, \end{aligned}\qquad (3.13)$$

$$\sigma_{i\phi}^{(3)*} = \kappa^{\phi\phi}\sum_{a,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{rs}\kappa^{ct}(2\kappa_{a,\phi c}\kappa_{r,st}+\kappa_{a,\phi c}\kappa_{rst}+\kappa_{a\phi c}\kappa_{rst}+2\kappa_{a\phi c}\kappa_{r,st}), \qquad (3.14)$$

e

$$\sigma_{\phi\phi}^{(3)*} = (\kappa^{\phi\phi})^4\kappa_{\phi\phi\phi\phi}^2 + (\kappa^{\phi\phi})^3\sum_{r,s=1}^{p}\kappa^{rs}(\kappa_{\phi\phi\phi}\kappa_{rs\phi}+2\kappa_{\phi\phi\phi}\kappa_{r,s\phi}). \qquad (3.15)$$

Após alguma álgebra nas expressões (3.7)-(3.15) (vide Apêndice B), obtemos

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(1)*} \;=\;& -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)h_\ell\left(\sum_{c,d=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{cd}x_{d\ell}\right)\left(\sum_{b=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bj}\right)\right\}\\ &-\frac{1}{nd_2\phi}\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)\omega_\ell\left(\sum_{b=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bj}\right)\right\}, \end{aligned}\qquad (3.16)$$

$$\sigma_{i\phi}^{(1)*} = -\frac{1}{nd_2}\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)(f_\ell+2g_\ell)\left(\sum_{c,d=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{cd}x_{d\ell}\right)\right\}, \tag{3.17}$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(1)*} = -\left(\frac{1}{nd_2}\right)^3 nd_4 - \frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{nd_2}\right)^2\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell\left\{\sum_{c,d=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{cd}x_{d\ell}\right\}, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)*} = {} & \frac{3}{2}\phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)f_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)f_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\}\\
&+3\phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)f_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)g_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\}\\
&-2\phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)g_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)f_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\}\\
&-\phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)g_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)g_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\}\\
&-\frac{3}{2nd_2}\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)\omega_\ell\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)\omega_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\} \qquad (3.19)\\
&+\frac{1}{2nd_2}\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)\omega_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\omega_m\left(\sum_{r=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rj}\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$\sigma_{i\phi}^{(2)*} = \frac{\phi}{nd_2}\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)\left(\frac{3}{2}f_\ell-g_\ell\right)\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\omega_m\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{mt}\kappa^{tc}x_{c\ell}\right)\right\}, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\phi\phi}^{(2)*} = {} & -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{nd_2}\right)^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\omega_\ell\left(\sum_{b,s=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bs}x_{sm}\right)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{c\ell}\kappa^{ct}x_{tm}\right)\omega_m\right\}\\
&+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{nd_2}\right)^4(nd_3)^2, \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(3)*} = {} & \phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}x_{a\ell}\right)(f_\ell+g_\ell)\left(\sum_{c,t=1}^{p}x_{\ell c}\kappa^{ct}x_{tm}\right)f_m\right.\\
&\left.\left(\sum_{r,s=1}^{p}x_{mr}\kappa^{rs}x_{sm}\right)\left(\sum_{b=1}^{p}x_{\ell b}\kappa^{bj}\right)\right\}, \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{i\phi}^{(3)*} = 0, \tag{3.23}$$

e

$$\sigma_{\phi\phi}^{(3)*} = \left(\frac{1}{nd_2}\right)^4 (nd_3)^2 + \left(\frac{1}{nd_2}\right)^3 nd_3 \sum_{m=1}^{n} \omega_m \left\{ \sum_{r,s=1}^{p} x_{mr}\kappa^{rs}x_{sm} \right\}. \qquad (3.24)$$

Das expressões (3.16)-(3.24), temos em notação matricial

$$\Sigma_{\beta\beta}^{(1)*} = \frac{1}{\phi^2} PHZ_d P^T - \frac{1}{n\phi^3 d_2}(X^T WX)^{-1}, \qquad (3.25)$$

$$\Sigma_{\beta\phi}^{(1)*} = -\frac{1}{n\phi^2 d_2} P(F + 2G)Z_d \mathbf{1}, \qquad (3.26)$$

$$\Sigma_{\phi\phi}^{(1)*} = \frac{1}{n^2 d_2^2}\left(\frac{p}{\phi^2} - \frac{d_4}{d_2}\right), \qquad (3.27)$$

$$\Sigma_{\beta\beta}^{(2)*} = \frac{3}{2\phi^2} PFZ^{(2)}FP^T + \frac{1}{\phi^2} PFZ^{(2)}GP^T - \frac{1}{\phi^2} PGZ^{(2)}GP^T + \frac{1}{nd_2\phi^3} PWZWP^T, \qquad (3.28)$$

$$\Sigma_{\beta\phi}^{(2)*} = \frac{1}{nd_2\phi^2} P\left(-\frac{3}{2}F + G\right) Z^{(2)}W\mathbf{1}, \qquad (3.29)$$

$$\Sigma_{\phi\phi}^{(2)*} = -\frac{3}{2n^2 d_2^2 \phi^2}\mathbf{1}^T WZ^{(2)}W\mathbf{1} + \frac{3d_3^2}{2n^2 d_2^4}, \qquad (3.30)$$

$$\Sigma_{\beta\beta}^{(3)*} = \phi^{-2}(X^T WX)^{-1}\Delta(X^T WX)^{-1}, \qquad (3.31)$$

$$\Sigma_{\beta\phi}^{(3)*} = 0, \qquad (3.32)$$

e

$$\Sigma_{\phi\phi}^{(3)*} = \frac{d_3}{n^2 d_2^3}\left(\frac{d_3}{d_2} - \frac{p}{\phi}\right). \qquad (3.33)$$

Portanto os elementos da matriz Σ^* são dados pelas expressões (3.25)-(3.33).

Logo a matriz de covariâncias de ordem n^{-2} dos EMVs $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ quando a dispersão é desconhecida é dada por

$$\mathrm{Cov}_2(\hat{\xi}) = K^{-1} + \Sigma^* = \begin{pmatrix} K_\beta^{-1} + \Sigma_{\beta\beta}^* & \Sigma_{\beta\phi}^* \\ (\Sigma_{\beta\phi}^*)^T & K_\phi^{-1} + \Sigma_{\phi\phi}^* \end{pmatrix}.$$

3.3 Matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV corrigido pelo viés em MLGs com dispersão conhecida

Considere o logaritmo da função de verossimilhança para β e os cumulantes conjuntos das derivadas de $\ell(\beta)$ os mesmos dados na Seção 3.1.

Seja $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - d(\hat{\beta})$ o EMV corrigido pelo viés de ordem n^{-1}, em que $d(\hat{\beta})$ é o viés de ordem n^{-1} de $d(\beta)$ avaliado em $\hat{\beta}$. Considere $\tilde{\beta}_r$ a r-ésima componente do vetor $\tilde{\beta}$. Assim, $\tilde{\beta}_r = \hat{\beta}_r - d^r(\hat{\beta})$, em que $\hat{\beta}_r$ e $d^r(\hat{\beta})$ são as r-ésimas componentes dos vetores $\hat{\beta}$ e $d(\hat{\beta})$, respectivamente.

De Pace e Salvan (1997, pág. 360), decorre que

$$d^r(\hat{\beta}) = d^r(\beta) + \sum_{v=1}^{p} d_v^r(\hat{\beta}_v - \beta_v) + O_p(n^{-2}), \tag{3.34}$$

em que

$$\begin{aligned} d_v^r &= \frac{\partial d^r}{\partial \beta_v} \\ &= \sum_{w,s,y,t,u=1}^{p} \Big\{ \kappa^{rw}\kappa^{sy}\kappa^{tu}(\kappa_{stu} + 2\kappa_{st,u})(\kappa_{vwy} + \kappa_{v,wy}) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\kappa^{rs}\kappa^{tu}(\kappa_{stuv} + \kappa_{stu,v} + 2\kappa_{stv,u} + 2\kappa_{st,uv} + 2\kappa_{st,u,v}) \Big\}, \end{aligned}$$

e $d^r(\beta)$ dado em (2.2) são termos de ordem n^{-1}.

Pretendemos encontrar uma expressão até ordem n^{-2} para $\mathrm{Cov}(\tilde{\beta}_r, \tilde{\beta}_s)$.

Por definição,

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\beta}_r, \tilde{\beta}_s) = \mathrm{E}\{[\tilde{\beta}_r - \mathrm{E}(\tilde{\beta}_r)][\tilde{\beta}_s - \mathrm{E}(\tilde{\beta}_s)]\}.$$

Como $\mathrm{E}(\tilde{\beta}_r) = \beta_r + O(n^{-2})$, temos até ordem n^{-2} que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\tilde{\beta}_r, \tilde{\beta}_s) &= \mathrm{E}[(\tilde{\beta}_r - \beta_r)(\tilde{\beta}_s - \beta_s)] \\ &= \mathrm{E}[(\hat{\beta}_r - d^r(\hat{\beta}) - \beta_r)(\hat{\beta}_s - d^s(\hat{\beta}) - \beta_s)] \\ &= \mathrm{E}\{[(\hat{\beta}_r - \beta_r) - d^r(\hat{\beta})][(\hat{\beta}_s - \beta_s) - d^s(\hat{\beta})]\} \\ &= \mathrm{E}[(\hat{\beta}_r - \beta_r)(\hat{\beta}_s - \beta_s)] - \mathrm{E}[d^s(\hat{\beta})(\hat{\beta}_r - \beta_r)] \\ &\quad - \mathrm{E}[d^r(\hat{\beta})(\hat{\beta}_s - \beta_s)] + \mathrm{E}[d^r(\hat{\beta})d^s(\hat{\beta})]. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Substituindo (3.34) no segundo termo de (3.35) temos,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[d^s(\hat{\beta})(\tilde{\beta}_r - \beta_r)] &= \mathrm{E}\Big\{(\hat{\beta}_r - \beta_r)\Big[d^s(\beta) + \sum_{v=1}^{p} d_v^s(\hat{\beta}_v - \beta_v) + O_p(n^{-2})\Big]\Big\} \\
&= d^s(\beta)\mathrm{E}(\hat{\beta}_r - \beta_r) + \sum_{v=1}^{p} d_v^s \mathrm{E}[(\hat{\beta}_r - \beta_r)(\hat{\beta}_v - \beta_v)] + O(n^{-2}) \\
&= d^s(\beta)d^r(\beta) + \sum_{v=1}^{p} d_v^s(-\kappa^{rv}) + O(n^{-2}). \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

O terceiro termo de (3.35) resulta na expressão (3.36), apenas trocando o índice s por r. Substituindo (3.34) no quarto termo de (3.35), temos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[d^r(\hat{\beta})d^s(\hat{\beta})] &= \mathrm{E}\Big\{\Big[d^r(\beta) + \sum_{v=1}^{p} d_v^r(\hat{\beta}_v - \beta_v) + O_p(n^{-2})\Big]\Big[d^s(\beta) + \sum_{k=1}^{p} d_k^s(\hat{\beta}_k - \beta_k) + O_p(n^{-2})\Big]\Big\} \\
&= d^r(\beta)d^s(\beta) + d^r(\beta)\sum_{k=1}^{p} d_k^s \mathrm{E}(\hat{\beta}_k - \beta_k) + d^s(\beta)\sum_{v=1}^{p} d_v^r \mathrm{E}(\hat{\beta}_v - \beta_v) \\
&\quad + \sum_{v,k=1}^{p} d_v^r d_k^s \mathrm{E}[(\hat{\beta}_v - \beta_v)(\hat{\beta}_k - \beta_k)] + O(n^{-2}) \\
&= d^s(\beta)d^r(\beta) + O(n^{-2}).
\end{aligned}
$$

Assim, a expressão (3.35) pode ser escrita até a ordem n^{-2} como

$$
\mathrm{Cov}(\tilde{\beta}_r, \tilde{\beta}_s) = \mathrm{E}[(\hat{\beta}_r - \beta_r)(\hat{\beta}_s - \beta_s)] - d^s(\beta)d^r(\beta) + \sum_{v=1}^{p} d_v^r(\kappa^{sv}) + \sum_{v=1}^{p} d_v^s(\kappa^{rv}). \quad (3.37)
$$

O primeiro termo subtraído do segundo termo na expressão (3.37) é a covariância até ordem n^{-2} de $\hat{\beta}$ quando o parâmetro ϕ é conhecido. Ela foi obtida por Cordeiro (2004) e é dada em notação matricial por

$$
\phi^{-1}(X^TWX)^{-1} + \phi^{-2}P\Lambda P^T + \phi^{-2}(X^TWX)^{-1}\Delta(X^TWX)^{-1}.
$$

Após alguma álgebra (vide Apêndice B) temos que o terceiro e quarto termos de (3.37), apenas trocando s por r, são dados por,

$$
\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{p} d_v^s(\kappa^{rv}) &= \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \Bigg\{ \left(\sum_{w=1}^{p} \kappa^{rw} x_{mw}\right)(f_m + g_m)\left(\sum_{s,y=1}^{p} x_{my}\kappa^{ys}x_{s\ell}\right) f_\ell \\
&\qquad \left(\sum_{t,u=1}^{p} x_{\ell t}\kappa^{tu}x_{u\ell}\right)\left(\sum_{v=1}^{p} x_{mv}\kappa^{vr}\right)\Bigg\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n}\Bigg\{\left(\sum_{s=1}^{p}\kappa^{rs}x_{\ell s}\right) d_\ell \left(\sum_{t,u=1}^{p} x_{\ell t}\kappa^{tu}x_{u\ell}\right)\left(\sum_{v=1}^{p} x_{\ell v}\kappa^{vr}\right)\Bigg\}, \quad (3.38)
\end{aligned}
$$

em que $d_\ell = V_\ell^{-2} V_\ell^{(1)} (\mathrm{d}\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell)^2 (\mathrm{d}^2\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell^2) - V_\ell^{-1} (\mathrm{d}\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell)(\mathrm{d}^3\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell^3) - V_\ell^{-1} (\mathrm{d}^2\mu_\ell/\mathrm{d}\eta_\ell^2)^2$.

A expressão (3.38) pode ser escrita em notação matricial como

$$\phi^{-2}(X^T W X)^{-1} \Delta (X^T W X)^{-1} - \frac{1}{2}\phi^{-2} P D Z_d P^T, \tag{3.39}$$

em que $D = \mathrm{diag}\{d_1, ..., d_n\}$.

Portanto, a matriz de covariâncias de ordem n^{-2} do EMV corrigido pelo viés, $\tilde{\beta}$, reduz-se a

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\beta}) = \phi^{-1}(X^T W X)^{-1} + \phi^{-2} P \Lambda P^T + 3\phi^{-2}(X^T W X)^{-1} \Delta (X^T W X)^{-1} - \phi^{-2} P D Z_d P^T.$$

Capítulo 4

Matriz de Covariâncias de Segunda Ordem dos EMVs Corrigidos pelo Viés em MLGs com Dispersão Desconhecida

Neste capítulo encontra-se o resultado principal desta dissertação. Aqui, desenvolvemos uma expressão para a matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs corrigidos pelo viés em MLGs com dispersão desconhecida, porém a mesma para todas as observações. Com base nessa matriz realizamos estudos de simulação para verificar a sua viabilidade prática.

4.1 Matriz de covariâncias de segunda ordem

Considere o logaritmo da função de verossimilhança para β e ϕ e os cumulantes conjuntos das derivadas de $\mathrm{L}(\beta, \phi)$, os mesmos dados na Seção 2.3.

Sejam $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - d(\hat{\beta})$ e $\tilde{\phi} = \hat{\phi} - d(\hat{\phi})$ os EMVs corrigidos pelo víés de ordem n^{-1}, em que $d(\hat{\beta})$ é o viés de ordem n^{-1}, $d(\beta)$, avaliado em $\hat{\beta}$ e $d(\hat{\phi})$ é o viés de ordem n^{-1}, $d(\phi)$, avaliado em $\hat{\phi}$. Considere $\tilde{\beta}_r$ a r-ésima componente do vetor $\tilde{\beta}$. Assim, $\tilde{\beta}_r = \hat{\beta}_r - d^r(\hat{\beta})$, em que $\hat{\beta}_r$ e $d^r(\hat{\beta})$ são as r-ésimas componentes dos vetores $\hat{\beta}$ e $d(\hat{\beta})$, respectivamente.

De Pace e Salvan (1997, pág. 360) vem que

$$d^r(\hat{\xi}) = d^r(\xi) + \sum_v d_v^r(\hat{\xi}_v - \xi_v) + O_p(n^{-2}), \tag{4.1}$$

em que

$$\begin{aligned} d_v^r &= \frac{\partial d^r}{\partial \xi_v} \\ &= \sum_{w,s,y,t,u} \Big\{ \kappa^{rw}\kappa^{sy}\kappa^{tu}(\kappa_{stu} + 2\kappa_{st,u})(\kappa_{vwy} + \kappa_{v,wy}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\kappa^{rs}\kappa^{tu}\Big(\kappa_{stuv} + \kappa_{stu,v} + 2\kappa_{stv,u} + 2\kappa_{st,uv} + 2\kappa_{st,u,v}\Big)\Big\} \\ &= O(n^{-1}), \end{aligned}$$

e $\xi = (\beta^T, \phi)^T$ é o vetor de parâmetros desconhecidos.

A matriz de covariâncias de segunda ordem de $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\phi}$ pode ser escrita como

$$\Sigma^{**} = \begin{pmatrix} \Sigma^{**}_{\beta\beta} & \Sigma^{**}_{\beta\phi} \\ (\Sigma^{**}_{\beta\phi})^T & \Sigma^{**}_{\phi\phi} \end{pmatrix},$$

em que $\Sigma^{**}_{\beta\beta} = \mathrm{E}\{[\tilde{\beta} - \mathrm{E}(\tilde{\beta})][\tilde{\beta} - \mathrm{E}(\tilde{\beta})]^T\}$ é uma matriz de dimensão $p \times p$, $\Sigma^{**}_{\beta\phi} = \mathrm{E}\{[\tilde{\beta} - \mathrm{E}(\tilde{\beta})][\tilde{\phi} - \mathrm{E}(\tilde{\phi})]\}$ é um vetor de dimensão $p \times 1$ e $\Sigma^{**}_{\phi\phi} = \mathrm{E}\{[\tilde{\phi} - \mathrm{E}(\tilde{\phi})]^2\}$ é um escalar.

De (3.37) temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\tilde{\beta}_r, \tilde{\beta}_s) &= \mathrm{E}[(\hat{\beta}_r - \beta_r)(\hat{\beta}_s - \beta_s)] - d^r(\beta)d^s(\beta) \\ &\quad + \sum d_v^s(\kappa^{rv}) + \sum d_v^r(\kappa^{sv}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

em que o somatório é sobre todos os $p + 1$ parâmetros $\beta_1, ..., \beta_p$ e ϕ.

O primeiro termo subtraído do segundo termo na expressão (4.2) é a covariância até a ordem n^{-2} de $\hat{\beta}$ quando o parâmetro ϕ é desconhecido. Ela foi obtida por Cordeiro et. al (2006) e é dada em notação matricial por

$$\begin{aligned} &\phi^{-1}(X^TWX)^{-1} + \phi^{-2}P\Lambda P^T + \phi^{-2}(X^TWX)^{-1}\Delta(X^TWX)^{-1} \\ &-\frac{1}{nd_2\phi^3}(X^TWX)^{-1} + \frac{1}{nd_2\phi^3}PWZWP^T. \end{aligned} \tag{4.3}$$

O terceiro e quarto termos de (4.2), apenas trocando r por s, são dados por

$$
\begin{aligned}
\sum d_v^s(\kappa^{rv}) &= \sum_{v,w,s,y,t,u=1}^{p} \kappa^{rv}\kappa^{rw}\kappa^{sy}\kappa^{tu}(\kappa_{stu}+2\kappa_{s,tu})(\kappa_{vwy}+\kappa_{v,wy}) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{v,s,t,u=1}^{p} \kappa^{rv}\kappa^{rs}\kappa^{tu}(\kappa_{stuv}+\kappa_{stu,v}+2\kappa_{stv,u}+2\kappa_{st,uv}+2\kappa_{st,u,v}) \\
&+\kappa^{\phi\phi}\sum_{v,w,s,y=1}^{p} \kappa^{rv}\kappa^{rw}\kappa^{sy}(\kappa_{s\phi\phi}+2\kappa_{s,\phi\phi})(\kappa_{vwy}+\kappa_{v,wy}) \\
&+\frac{1}{2}\kappa^{\phi\phi}\sum_{v,s=1}^{p} \kappa^{rv}\kappa^{rs}(\kappa_{s\phi\phi v}+\kappa_{s\phi\phi,v}+2\kappa_{s\phi v,\phi}+2\kappa_{s\phi,\phi v}+2\kappa_{s\phi,\phi,v}). \quad (4.4)
\end{aligned}
$$

Após alguma álgebra (vide Apêndice B) temos que a expressão (4.4) é igual a expressão (3.38), que é dada em notação matricial por (3.39).

Portanto, substituindo (4.3) e (3.39) em (4.2), temos então que até a ordem n^{-2}

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\beta\beta}^{**} &= \phi^{-1}(X^TWX)^{-1}+\phi^{-2}P\Lambda P^T+3\phi^{-2}(X^TWX)^{-1}\Delta(X^TWX)^{-1} \\
&-\phi^{-2}PDZ_dP^T-\frac{1}{nd_2\phi^3}(X^TWX)^{-1}+\frac{1}{nd_2\phi^3}PWZWP^T. \quad (4.5)
\end{aligned}
$$

Os quatro primeiros termos da expressão (4.5) são os termos da matriz de covariâncias de ordem n^{-2} do EMV corrigido pelo viés em MLGs obtida por Cavalcanti (2009).

De maneira análoga, podemos encontrar uma expressão matricial para $\Sigma_{\beta\phi}^{**}$.

Por definição,

$$
\mathrm{Cov}(\tilde{\beta}_r,\tilde{\phi}) = \mathrm{E}\{[\tilde{\beta}_r-\mathrm{E}(\tilde{\beta}_r)][\tilde{\phi}-\mathrm{E}(\tilde{\phi})]\}.
$$

Como $\mathrm{E}(\tilde{\beta}_r)=\beta_r+O(n^{-2})$ e $\mathrm{E}(\tilde{\phi})=\phi+O(n^{-2})$, temos até ordem n^{-2} que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\tilde{\beta}_r,\tilde{\phi}) &= \mathrm{E}[(\tilde{\beta}_r-\beta_r)(\tilde{\phi}-\phi)] \\
&= \mathrm{E}[(\hat{\beta}_r-d^r(\hat{\beta})-\beta_r)(\hat{\phi}-d(\hat{\phi})-\phi)] \\
&= \mathrm{E}\{[(\hat{\beta}_r-\beta_r)-d^r(\hat{\beta})][(\hat{\phi}-\phi)-d(\hat{\phi})]\} \\
&= \mathrm{E}[(\hat{\beta}_r-\beta_r)(\hat{\phi}-\phi)]-\mathrm{E}[d(\hat{\phi})(\hat{\beta}_r-\beta_r)] \\
&\quad -\mathrm{E}[d^r(\hat{\beta})(\hat{\phi}-\phi)]+\mathrm{E}[d^r(\hat{\beta})d(\hat{\phi})]. \quad (4.6)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.1) no segundo termo de (4.6) temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[d(\hat{\phi})(\hat{\beta}_r - \beta_r)] &= \mathrm{E}\Big\{[\hat{\beta}_r - \beta_r]\Big[d(\phi) + \sum d_v^{\phi}(\hat{\phi} - \phi) + O_p(n^{-2})\Big]\Big\} \\
&= d(\phi)\mathrm{E}(\hat{\beta}_r - \beta_r) + \sum d_v^{\phi}\mathrm{E}[(\hat{\beta}_r - \beta_r)(\hat{\phi} - \phi)] + O(n^{-2}) \\
&= d(\phi)d^r(\beta) + \sum d_v^{\phi}(\kappa^{r\phi}) + O(n^{-2}) \\
&= d(\phi)d^r(\beta) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Substituindo (4.1) no terceiro termo de (4.6) temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[d^r(\hat{\beta})(\hat{\phi} - \phi)] &= \mathrm{E}\Big\{[\hat{\phi} - \phi]\Big[d^r(\beta) + \sum d_v^r(\hat{\beta}_v - \beta_v) + O_p(n^{-2})\Big]\Big\} \\
&= d^r(\beta)\mathrm{E}(\hat{\phi} - \phi) + \sum d_v^r\mathrm{E}[(\hat{\beta}_v - \beta_v)(\hat{\phi} - \phi)] + O(n^{-2}) \\
&= d^r(\beta)d(\phi) + \sum d_v^r(\kappa^{v\phi}) + O(n^{-2}) \\
&= d(\phi)d^r(\beta) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Substituindo (4.1) no quarto termo de (4.6) temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[d^r(\hat{\beta})d(\hat{\phi})] &= \mathrm{E}\Big\{\Big[d^r(\beta) + \sum d_v^r(\hat{\beta}_v - \beta_v) + O_p(n^{-2})\Big]\Big[d(\phi) + \sum d_k^{\phi}(\hat{\phi} - \phi) + O_p(n^{-2})\Big]\Big\} \\
&= d^r(\beta)d(\phi) + d^r(\beta)\sum d_k^{\phi}\mathrm{E}[(\hat{\phi} - \phi)] + d(\phi)\sum d_v^r\mathrm{E}(\hat{\beta}_v - \beta_v) \\
&\quad + \sum d_v^r d_k^{\phi}\mathrm{E}[(\hat{\beta}_v - \beta_v)(\hat{\phi} - \phi)] + O(n^{-2}) \\
&= d^r(\beta)d(\phi) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Assim, a expressão (4.6) pode ser escrita até ordem n^{-2} como

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\beta}_r, \tilde{\phi}) = \mathrm{E}[(\hat{\beta}_r - \beta_r)(\hat{\phi} - \phi)] - d^r(\beta)d(\phi). \tag{4.7}$$

A expressão (4.7) é a matriz de covariâncias até a ordem n^{-2} de $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ obtida por Cordeiro et. al (2006). Ela é dada em notação matricial por

$$-\frac{1}{nd_2\phi^2}P(F + 2G)Z_d\mathbf{1} + \frac{1}{nd_2\phi^2}P\left(-\frac{3}{2}F + G\right)Z^{(2)}W\mathbf{1}. \tag{4.8}$$

Portanto, $\Sigma^{**}_{\beta\phi}$ é dada por (4.8).

Finalmente, podemos encontrar uma expressão para $\Sigma^{**}_{\phi\phi}$.

Por definição,

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}) = \mathrm{E}\{[\tilde{\phi} - \mathrm{E}(\tilde{\phi})]^2\}.$$

Como $\mathrm{E}(\tilde{\phi}) = \phi + O(n^{-2})$, temos até ordem n^{-2} que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\tilde{\phi},\tilde{\phi}) &= \mathrm{E}[(\tilde{\phi}-\phi)^2] \\
&= \mathrm{E}[(\hat{\phi}-d(\hat{\phi})-\phi)^2] \\
&= \mathrm{E}\{[(\hat{\phi}-\phi)-d(\hat{\phi})]^2\} \\
&= \mathrm{E}[(\hat{\phi}-\phi)^2 - 2(\hat{\phi}-\phi)d(\hat{\phi}) + d^2(\hat{\phi})] \\
&= \mathrm{E}[(\hat{\phi}-\phi)^2] - 2\mathrm{E}[(\hat{\phi}-\phi)d(\hat{\phi})] + \mathrm{E}[d^2(\hat{\phi})]. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.1) no segundo termo de (4.9) temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(\hat{\phi}-\phi)d(\hat{\phi})] &= \mathrm{E}\left\{[\hat{\phi}-\phi]\left[d(\phi)+\sum d_v^{\phi}(\hat{\phi}-\phi)+O_p(n^{-2})\right]\right\} \\
&= d(\phi)\mathrm{E}(\hat{\phi}-\phi) + \sum d_v^{\phi}\mathrm{E}[(\hat{\phi}-\phi)^2] + O(n^{-2}) \\
&= d^2(\phi) + \sum d_v^{\phi}(-\kappa^{\phi\phi}) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Substituindo (4.1) no terceiro termo de (4.9) temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[d^2(\hat{\phi})] &= \mathrm{E}\left\{\left[d(\phi)+\sum d_v^{\phi}(\hat{\phi}-\phi)+O_p(n^{-2})\right]^2\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{d^2(\phi)+2d(\phi)\sum d_v^{\phi}(\hat{\phi}-\phi)+(\hat{\phi}-\phi)^2\left(\sum d_v^{\phi}\right)^2+O(n^{-2})\right\} \\
&= d^2(\phi)+2d(\phi)\sum d_v^{\phi}\mathrm{E}(\hat{\phi}-\phi)+\mathrm{E}[(\hat{\phi}-\phi)^2]\left(\sum d_v^{\phi}\right)^2+O(n^{-2}) \\
&= d^2(\phi)+O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Assim, a expressão (4.9) pode ser escrita como

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\phi},\tilde{\phi}) = \mathrm{E}[(\hat{\phi}-\phi)^2] - d^2(\phi) + 2\sum d_v^{\phi}(\kappa^{\phi\phi}). \qquad (4.10)$$

O primeiro termo subtraído do segundo termo na expressão (4.10) é a covariância até a ordem n^{-2} de $\hat{\phi}$ obtida por Cordeiro et. al (2006). Ela é dada por

$$-\frac{1}{nd_2}+\frac{1}{n^2d_2^2}\left(\frac{p}{\phi^2}-\frac{d_4}{d_2}\right)-\frac{3}{2n^2d_2^2\phi^2}\mathbf{1}^TWZ^{(2)}W\mathbf{1}+\frac{3d_3^2}{2n^2d_2^4}+\frac{d_3}{n^2d_2^3}\left(\frac{d_3}{d_2}-\frac{p}{\phi}\right). \qquad (4.11)$$

O terceiro termo da expressão (4.10) é dado por

$$
\begin{aligned}
\sum d_v^{\phi}(\kappa^{\phi\phi}) \;=\; & \kappa^{\phi\phi}\sum_{s,y,t,u=1}^{p}\kappa^{\phi\phi}\kappa^{sy}\kappa^{tu}(\kappa_{stu}+2\kappa_{s,tu})(\kappa_{\phi\phi y}+\kappa_{\phi,\phi y}) \\
& +\kappa^{\phi\phi}\sum_{t,u=1}^{p}\kappa^{\phi\phi}\kappa^{\phi\phi}\kappa^{tu}(\kappa_{\phi tu}+2\kappa_{\phi t,u})(\kappa_{\phi\phi\phi}+\kappa_{\phi,\phi\phi}) \\
& +\kappa^{\phi\phi}\sum_{s,y=1}^{p}\kappa^{\phi\phi}\kappa^{sy}\kappa^{\phi\phi}(\kappa_{s\phi\phi}+2\kappa_{s\phi,\phi})(\kappa_{\phi\phi y}+\kappa_{\phi,\phi y}) \\
& +(\kappa^{\phi\phi})^4(\kappa_{\phi\phi\phi}+2\kappa_{\phi\phi,\phi})(\kappa_{\phi\phi\phi}+\kappa_{\phi,\phi\phi}) \\
& +\frac{1}{2}\kappa^{\phi\phi}\sum_{t,u=1}^{p}\kappa^{\phi\phi}\kappa^{tu}(\kappa_{\phi tu\phi}+\kappa_{\phi tu,\phi}+2\kappa_{\phi t\phi,u}+2\kappa_{\phi t,u\phi}+2\kappa_{\phi t,u,\phi}) \\
& +\frac{1}{2}(\kappa^{\phi\phi})^3(\kappa_{\phi\phi\phi\phi}+\kappa_{\phi\phi\phi,\phi}+2\kappa_{\phi\phi\phi,\phi}+2\kappa_{\phi\phi,\phi\phi}+2\kappa_{\phi\phi,\phi,\phi}). \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Após alguma álgebra (vide Apêndice B) temos que a expressão (4.12) é dada por

$$\sum d_v^{\phi}(\kappa^{\phi\phi}) = -\frac{pd_3}{n^2d_2^3\phi}+\frac{d_3^2}{n^2d_2^4}+\frac{d_4}{2n^2d_2^3}. \qquad (4.13)$$

Portanto, substituindo as expressões (4.11) e (4.13) em (4.10) obtemos até a ordem n^{-2}

$$\Sigma_{\phi\phi}^{**} \;=\; -\frac{1}{nd_2}+\frac{p}{n^2d_2^2\phi^2}-\frac{3}{2n^2d_2^2\phi^2}\mathbf{1}^TWZ^{(2)}W\mathbf{1}+\frac{9d_3^2}{2n^2d_2^4}-\frac{3pd_3}{n^2d_2^3\phi}. \qquad (4.14)$$

Logo, a matriz de covariâncias de segunda ordem Σ^{**} têm elementos dados pelas expressões (4.5), (4.8) e (4.14).

4.2 Testes de Wald modificados

Suponha que queremos testar a hipótese nula $H_0 : \xi = \xi^{(0)}$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \xi \neq \xi^{(0)}$, em que o vetor de parâmetros $\xi = (\beta^T, \phi)^T$ tem dimensão $(p+1)\times 1$. Uma estatística bem simples para testarmos a hipótese H_0 é a estatística de Wald, que nesta circunstância é dada por

$$W = (\hat{\xi}-\xi^{(0)})^T K(\hat{\xi})(\hat{\xi}-\xi^{(0)}), \qquad (4.15)$$

em que $K = \mathrm{diag}\{K_\beta, K_\phi\}$ é avaliada na estimativa de máxima verossimilhança de ξ.

Podemos modificar a estatística (4.15) substituindo o estimador $\hat{\xi}$ pelo estimador corrigido pelo viés de ordem n^{-1}, $\tilde{\xi}$. Temos então

$$W_m = (\tilde{\xi}-\xi^{(0)})^T K(\tilde{\xi})(\tilde{\xi}-\xi^{(0)}). \qquad (4.16)$$

Uma outra modificação na estatística de Wald resulta em substituir ao mesmo tempo o EMV $\hat{\xi}$ pelo estimador corrigido $\tilde{\xi}$ e a matriz de informação de Fisher pela matriz de covariâncias de segunda ordem Σ^{**}, avaliada em $\tilde{\xi}$. Obtemos assim,

$$W_c = (\tilde{\xi} - \xi^{(0)})^T [\Sigma^{**}(\tilde{\xi})]^{-1} (\tilde{\xi} - \xi^{(0)}). \tag{4.17}$$

4.3 Resultados de Simulação

Nesta seção, realizamos dois estudos de simulação. Em ambos, utilizamos o modelo gama com ligação logarítmica, isto é, $\log(\mu_\ell) = \beta_0 + \beta_1 x_{1\ell} + \beta_2 x_{2\ell}$, com $\ell = 1, ..., n$. Os valores verdadeiros para os parâmetros foram fixados em $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ e $\phi = 4$. As variáveis explicativas x_1 e x_2 foram geradas a partir da distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ e, para cada n foram mantidas constantes durante as 10.000 simulações.

No primeiro estudo de simulação, comparamos a inversa da matriz de informação de Fisher e a matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs corrigidos pelo viés de ordem n^{-1} com a matriz de covariâncias observadas dos EMVs dos parâmetros β_0, β_1, β_2 e ϕ. As simulações foram realizadas através do programa computacional R. O tamanho da amostra foi variado em n=10, 20, 30 e 40. Os resultados encontram-se nas Tabelas 4.1 e 4.2, em que Cov($\hat{\xi}$) representa a média dos 10.000 valores adquiridos para a inversa da matriz de informação de Fisher K, Cov($\tilde{\xi}$) é a média dos 10.000 valores obtidos para a matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs corrigidos pelo viés de ordem n^{-1} que possui elementos dados pelas expressões (4.5), (4.8) e (4.14) e EQM($\hat{\xi}$) representa a média dos 10.000 valores adquiridos para o erro quadrático médio do EMV em relação aos valores verdadeiros.

No segundo estudo, procuramos avaliar o desempenho da matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs corrigidos pelo viés, para os testes de Wald modificados. Comparamos os desempenhos das estatísticas W, W_m e W_c através do tamanho empírico dos testes de Wald da hipótese $H_0 : \beta_0^{(0)} = 3$, $\beta_1^{(0)} = 2$, $\beta_2^{(0)} = 1$ e $\phi^{(0)} = 4$ contra H_1: pelo menos uma das igualdades em H_0 não se verifica. Admitindo H_0 verdadeira, o tamanho empírico do teste de Wald é calculado, para cada estatística do teste, como a proporção da quantidade de vezes em que H_0 é rejeitada, estabelecido um nível nominal α e um tamanho de amostra n. As simulações foram realizadas através da linguagem de programação matricial Ox. Foram utilizados os seguintes níveis nominais: α=1%, 5% e 10% e as amostras consideradas foram de tamanhos n=10, 20, ..., 100. Os resultados estão apresentados na Tabela 4.3.

Podemos observar nas Tabelas 4.1 e 4.2 que os elementos da matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs corrigidos pelo viés de ordem n^{-1} estão bem mais próximos dos valores da matriz de erro quadrático médio em relação aos parâmetros verdadeiros do que os elementos da inversa da matriz de informação de Fisher, para todos os tamanhos da amostra.

Podemos notar na Tabela 4.3 que para $n = 10$, os tamanhos empíricos dos testes de Wald baseados nas estatísticas W, W_m e W_c estão muito distantes dos respectivos níveis nominais. Podemos notar também, conforme esperado, que o teste baseado na estatística W_c apresenta melhor desempenho do que os testes baseados nas estatísticas W e W_m. As estatísticas W e W_m tendem a rejeitar mais do que deveriam, o que é facilmente verificado para os casos em que $n \geq 50$ ao nível de 5% e para $n \geq 40$ ao nível de 10%.

Tabela 4.1: Cov($\hat{\xi}$) avaliada em $\hat{\xi}$, Cov($\tilde{\xi}$) avaliada em $\tilde{\xi}$ e EQM($\hat{\xi}$)

	$n = 10$				$n = 20$			
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\phi}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\phi}$
	0.17599	-0.14155	-0.15828	0	0.07935	-0.05955	-0.06959	0
$\hat{\beta}_0$	0.18708	-0.14999	-0.16841	-0.11799	0.08195	-0.06165	-0.07197	-0.01669
	0.26838	-0.21343	-0.23731	-0.28589	0.09520	-0.07108	-0.08304	-0.02909
		0.24494	0.04545	0		0.10513	0.01105	0
$\hat{\beta}_1$		0.25832	0.04833	0.045129		0.10864	0.01158	0.00199
		0.35858	0.07184	0.12379		0.12583	0.01324	0.00366
			0.23674	0			0.11614	0
$\hat{\beta}_2$			0.25063	0.06925			0.11989	0.00303
			0.34715	0.20201			0.13864	0.01126
				18.08137				2.93801
$\hat{\phi}$				28.64899				3.77352
				47.50074				5.22805

Tabela 4.2: Cov($\hat{\xi}$) avaliada em $\hat{\xi}$, Cov($\tilde{\xi}$) avaliada em $\tilde{\xi}$ e EQM($\hat{\xi}$)

	$n = 30$				$n = 40$			
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\phi}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\phi}$
	0.07592	-0.05937	-0.06613	0	0.05976	-0.04904	-0.05087	0
$\hat{\beta}_0$	0.07807	-0.06119	-0.06803	-0.00879	0.06106	-0.05018	-0.05199	-0.00522
	0.08527	-0.06688	-0.07346	-0.01872	0.06602	-0.05468	-0.05547	-0.00728
		0.09220	0.02094	0		0.07407	0.01926	0
$\hat{\beta}_1$		0.09471	0.02182	0.00234		0.07557	0.01987	0.00162
		0.10494	0.02302	0.00727		0.08277	0.02151	0.00377
			0.09674	0			0.07263	0
$\hat{\beta}_2$			0.09920	0.00242			0.07401	0.00160
			0.10741	0.00836			0.07875	0.00207
				1.52789				1.01797
$\hat{\phi}$				1.81517				1.16089
				2.40359				1.46076

Tabela 4.3: Tamanho do teste para as estatísticas W, W_m e W_c

n	$\alpha(\%)$	W	W_m	W_c	n	$\alpha(\%)$	W	W_m	W_c
	1.0	13.07	10.92	9.68		1.0	2.20	1.98	1.30
10	5.0	22.57	19.93	16.53	60	5.0	7.78	7.03	4.83
	10.0	29.56	27.73	22.20		10.0	13.13	12.91	8.82
	1.0	5.31	4.30	3.17		1.0	2.06	1.80	1.14
20	5.0	12.38	10.97	7.91	70	5.0	7.10	6.66	4.72
	10.0	18.25	16.91	12.15		10.0	12.36	11.87	8.68
	1.0	3.54	2.90	2.02		1.0	1.71	1.54	1.06
30	5.0	9.83	8.75	6.01	80	5.0	6.25	6.00	4.00
	10.0	15.45	14.55	10.04		10.0	11.91	11.54	8.23
	1.0	3.04	2.41	1.65		1.0	1.61	1.44	0.90
40	5.0	8.61	8.06	5.43	90	5.0	6.52	5.99	4.11
	10.0	14.45	13.28	9.16		10.0	11.71	11.45	8.19
	1.0	2.60	2.18	1.39		1.0	1.63	1.44	0.95
50	5.0	7.70	7.04	4.70	100	5.0	6.28	5.85	4.00
	10.0	13.52	12.91	8.89		10.0	11.77	11.14	8.17

Capítulo 5

Trabalhos Futuros

A principal contribuição teórica desta dissertação encontra-se no Capítulo 4, onde obtivemos uma expressão para a matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs corrigidos pelo viés em MLGs com dispersão desconhecida, porém a mesma para todas as observações.

Baseado nas ideias desta dissertação, diversos trabalhos poderão ser desenvolvidos. Podemos citar:

(i) Extensão do cálculo da matriz de covariâncias de ordem n^{-2} dos EMVs corrigidos pelo viés de ordem n^{-1} para o caso em que o parâmetro de dispersão não é o mesmo para todas as observações;

(ii) Cálculo da matriz de covariâncias de segunda ordem dos EMVs corrigidos pelo viés para os modelos não-lineares da família exponencial (MNLFEs) com dispersão desconhecida, considerando, ou não, a mesma para todas as observações;

(iii) Comparação das estatísticas Wald modificadas com outras estatísticas, por exemplo, a estatística da razão de verossimilhanças e/ou a estatística escore associadas aos testes sobre os parâmetros dos MLGs com dispersão desconhecida, porém a mesma para todas as observações.

Apêndice A

Identidades de Bartlett e Cumulantes

A.1 Identidades de Bartlett

As identidades abaixo podem ser encontradas em Cordeiro (1991, pág. 120)

- $\kappa_r = 0$,
- $\kappa_{rs} + \kappa_{r,s} = 0$,
- $\kappa_{rst} + \kappa_{r,st} - \kappa_{st}^{(r)} = 0$,
- $\kappa_{r,s,t} - 2\kappa_{rst} + \Sigma_{(3)}\kappa_{rs}^{(t)} = 0$,
- $\kappa_{r,s,tu} = \kappa_{rstu} - \kappa_{rtu}^{(s)} - \kappa_{stu}^{(r)} + \kappa_{tu}^{(rs)} - \kappa_{rs,tu}$,
- $\kappa_{r,s,t,u} = -3\kappa_{rstu} + 2\Sigma_{(4)}\kappa_{rst}^{(u)} - \Sigma_{(6)}\kappa_{rs}^{(tu)} + \Sigma_{(3)}\kappa_{rs,tu}$,
- $\kappa_{rstu} + \Sigma_{(4)}\kappa_{r,stu} + \Sigma_{(3)}\kappa_{rs,tu} + \Sigma_{(6)}\kappa_{r,s,tu} + \kappa_{r,s,t,u} = 0$,

em que $\Sigma_{(k)}$ representa o somatório sobre todas as k combinações de índices.

A.2 Cumulantes

- $\kappa_{\phi\phi} = nd_2$,
- $\kappa^{\phi\phi} = \{nd_2\}^{-1}$,

- $\kappa_{\phi\phi\phi} = \kappa_{\phi\phi}^{(\phi)} = nd_3,$

- $\kappa_{\phi\phi\phi\phi} = nd_4,$

- $\kappa_{r\phi,\phi} = {\kappa_{r\phi}}^{(\phi)} = \kappa_{r\phi\phi} = \kappa_{rs,\phi} = \kappa_{r,\phi\phi} = 0,$

- $\kappa_{\phi\phi,\phi} = \kappa_{\phi\phi,\phi\phi} = \kappa_{\phi\phi,\phi,\phi}\kappa_{\phi\phi\phi,\phi} = 0,$

- $\kappa_{rs} = -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \omega_\ell x_{\ell r} x_{\ell s},$

- $\kappa_{\phi r,s} = -\kappa_{\phi rs} = -\kappa_{rs}^{(\phi)} = \sum_{\ell=1}^{n} \omega_\ell x_{\ell r} x_{\ell s},$

- $\kappa_{\phi\phi rs} = \kappa_{r\phi}^{(st)} = \kappa_{r\phi}^{(s\phi)} = \kappa_{\phi rs}^{(\phi)} = \kappa_{\phi\phi r}^{(s)} = 0,$

- $\kappa_{\phi rs}^{(t)} = -\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + g_\ell) x_{\ell r} x_{\ell s} x_{\ell t},$

- $\kappa_{rst} = -\phi \sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + 2g_\ell) x_{\ell r} x_{\ell s} x_{\ell t},$

- $\kappa_{rs,t} = \phi \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell x_{\ell r} x_{\ell s} x_{\ell t},$

- $\kappa_{r,s,t} = \phi \sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell - g_\ell) x_{\ell r} x_{\ell s} x_{\ell t},$

- $$\begin{aligned} \kappa_{rstu} \;\; = \;\; \phi \sum_{\ell=1}^{n} \Bigg\{ & -\frac{6}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{3}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{12}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} \\ & -\frac{3}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 - \frac{4}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3} \Bigg\}_\ell x_{\ell r} x_{\ell s} x_{\ell t} x_{\ell u}, \end{aligned}$$

- $$\kappa_{rs,tu} \;\; = \;\; \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \frac{1}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 - \frac{2}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} + \frac{1}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 \right\}_\ell x_{\ell r} x_{\ell s} x_{\ell t} x_{\ell u},$$

- $$\kappa_{r,s,tu} = \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \frac{1}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} - \frac{1}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 \right\}_\ell x_{\ell r} x_{\ell s} x_{\ell t} x_{\ell u},$$

- $$\kappa_{r,s,t,u} = \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \frac{1}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{1}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 \right\}_\ell x_{\ell r} x_{\ell s} x_{\ell t} x_{\ell u},$$

- $$\kappa_{rst,u} = \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \frac{2}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 - \frac{1}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 - \frac{3}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} + \frac{1}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3} \right\}_\ell x_{\ell r}x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u},$$

- $$\kappa_{stu}^{(r)} = \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ -\frac{4}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{2}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{9}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} - \frac{3}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 - \frac{3}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3} \right\}_\ell x_{\ell r}x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u},$$

- $$\kappa_{tu}^{(rs)} = \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ -\frac{2}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{1}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{5}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} - \frac{2}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 - \frac{2}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3} \right\}_\ell x_{\ell r}x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u},$$

- $\kappa_{stu\phi} = \kappa_{stu}^{(\phi)} = -\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + 2g_\ell)x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}$,

- $\kappa_{stu,\phi} = 0$,

- $\kappa_{st\phi}^{(u)} = \kappa_{st}^{(\phi u)} = -\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + g_\ell)x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}$,

- $\kappa_{st,u\phi} = \kappa_{st\phi,u} = -\kappa_{st,u,\phi} = \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}$,

- $\kappa_{s\phi,t\phi} = -\kappa_{s,\phi,t\phi} = \phi^{-1}\sum_{\ell=1}^{n} \omega_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}$.

Apêndice B

Resultados dos Capítulos 3 e 4

Neste apêndice, encontram-se os cálculos de algumas expressões dos Capítulos 3 e 4.

B.1 Resultados do Capítulo 3

B.1.1 Resultados da Seção 3.1

Cálculo da expressão (3.4)

Temos que,

- $$\begin{aligned} 2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} &= 2\phi \sum_{\ell=1}^{n} \Bigg\{ -\frac{2}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{1}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 \\ &\quad + \frac{5}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} - \frac{2}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 - \frac{2}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3}\Bigg\}_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{\ell d} \\ &\quad -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \Bigg\{ -\frac{4}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 + \frac{2}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 \\ &\quad + \frac{9}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} - \frac{3}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 - \frac{3}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3}\Bigg\}_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{\ell d} \\ &= \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \frac{1}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} - \frac{1}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 - \frac{1}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3}\right\}_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{\ell d}. \end{aligned}$$

- $$\kappa_{ac,bd} = \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \frac{1}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 - \frac{2}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} + \frac{1}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 \right\}_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{\ell d}.$$

Assim,

- $$2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} + \kappa_{ac,bd} = \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \frac{1}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4 - \frac{1}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} - \frac{1}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3} \right\}_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{\ell d}$$
$$= \phi \sum_{\ell=1}^{n} h_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{\ell d}.$$

Logo,

$$\sigma_{ij}^{(1)} = -\phi \sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd} \sum_{\ell=1}^{n} h_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{\ell d}.$$

Cálculo da expressão (3.5)

Temos que,

- $$\left(\frac{3}{2}\kappa_{abc} + 5\kappa_{ab,c}\right)\kappa_{rst} = \left\{ -\frac{3}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} (f_{\ell} + 2g_{\ell})\, x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c} + 5\phi \sum_{\ell=1}^{n} g_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c} \right\} \times \left\{ -\phi \sum_{m=1}^{n} (f_m + 2g_m)\, x_{mr}x_{ms}x_{mt} \right\}$$
$$= \left\{ -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{3}{2}f_{\ell} - 2g_{\ell}\right) x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c} \right\} \left\{ -\phi \sum_{m=1}^{n} (f_m + 2g_m)\, x_{mr}x_{ms}x_{mt} \right\}$$
$$= \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left(\frac{3}{2}f_{\ell}f_m + 3f_{\ell}g_m - 2g_{\ell}f_m - 4g_{\ell}g_m\right) x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{mr}x_{ms}x_{mt},$$

- $$3\kappa_{a,bc}\kappa_{r,st} = 3\left(\phi \sum_{\ell=1}^{n} g_{\ell} x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}\right)\left(\phi \sum_{m=1}^{n} g_m x_{mr}x_{ms}x_{mt}\right)$$
$$= \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} (3g_{\ell}g_m) x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{mr}x_{ms}x_{mt}.$$

Assim,

- $$\left(\frac{3}{2}\kappa_{abc} + 5\kappa_{ab,c}\right)\kappa_{rst} + 3\kappa_{a,bc}\kappa_{r,st} = \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left(\frac{3}{2}f_{\ell}f_m + 3f_{\ell}g_m - 2g_{\ell}f_m - g_{\ell}g_m\right).$$

Logo,

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \phi^2 \sum_{a,b,c=1}^{p} \sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct} \sum_{\ell,m=1}^{n} \left(\frac{3}{2}f_{\ell}f_m + 3f_{\ell}g_m - 2g_{\ell}f_m - g_{\ell}g_m\right) x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{mr}x_{ms}x_{mt}.$$

Cálculo da expressão (3.6)

Temos que,

- $$\begin{aligned}(2\kappa_{r,st}+\kappa_{rst})\kappa_{bc}^{(a)} &= \left\{2\phi\sum_{m=1}^{n} g_m x_{mr}x_{ms}x_{mt} - \phi\sum_{m=1}^{n}(f_m+2g_m)x_{mr}x_{ms}x_{mt}\right\}\\ &\quad \text{x}\left\{-\phi\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell+g_\ell)x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}\right\}\\ &= \left\{-\phi\sum_{m=1}^{n} f_m x_{mr}x_{ms}x_{mt}\right\}\left\{-\phi\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell+g_\ell)x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}\right\}\\ &= \phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n}\{(f_\ell+g_\ell)f_m\}x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{mr}x_{ms}x_{mt}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \phi^2\sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}\sum_{\ell,m=1}^{n}\{(f_\ell+g_\ell)f_m\}x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{mr}x_{ms}x_{mt}.$$

B.1.2 Resultados da Seção 3.2

Cálculo da expressão (3.7)

Temos que,

- $2\kappa_{a,b\phi,\phi}+3\kappa_{a\phi,b\phi} = -2\kappa_{a\phi,b\phi}+3\kappa_{a\phi,b\phi} = \kappa_{a\phi,b\phi} = \phi^{-1}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell x_{\ell a}x_{\ell b}.$

Logo,

$$\sigma_{ij}^{(1)*} = \sigma_{ij}^{(1)} - \frac{1}{nd_2\phi}\sum_{a,b=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jb}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell x_{\ell a}x_{\ell b}.$$

Cálculo da expressão (3.8)

Temos que,

- $$\begin{aligned} \kappa_{a\phi cd} + \kappa_{a,\phi cd} + 2\kappa_{a\phi c,d} &= \kappa_{a\phi cd} + 3\kappa_{a,\phi cd} \\ &= \kappa_{a\phi cd} + 3(\kappa_{\phi cd}^{(a)} - \kappa_{a\phi cd}) \\ &= 3\kappa_{\phi cd}^{(a)} - 2\kappa_{a\phi cd}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 2\kappa_{a,\phi c,d} + 3\kappa_{ac,\phi d} &= 2(\kappa_{ad\phi c} - \kappa_{a\phi c}^{(d)} - \kappa_{d\phi c}^{(a)} + \kappa_{\phi c}^{(ad)} - \kappa_{ad,\phi c}) + 3\kappa_{ac,\phi d} \\ &= 2(\kappa_{a\phi cd} - 2\kappa_{a\phi c}^{(d)} - \kappa_{a\phi,cd}) + 3\kappa_{ac,\phi d} \\ &= 2\kappa_{a\phi cd} - 4\kappa_{a\phi c}^{(d)} - 2\kappa_{a\phi,cd} + 3\kappa_{ac,\phi d} \\ &= 2\kappa_{a\phi cd} - 4\kappa_{a\phi c}^{(d)} + \kappa_{ac,\phi d}. \end{aligned}$$

Assim,

- $$\begin{aligned} \kappa_{a\phi cd} + \kappa_{a,\phi cd} + 2\kappa_{a\phi c,d} + 2\kappa_{a,\phi c,d} + 3\kappa_{ac,\phi d} &= -\kappa_{a\phi c}^{(d)} + \kappa_{ac,\phi d} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + g_\ell)x_{\ell a}x_{\ell c}x_{\ell d} + \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell x_{\ell a}x_{\ell c}x_{\ell d} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + 2g_\ell)x_{\ell a}x_{\ell c}x_{\ell d}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_{i\phi}^{(1)} = -\frac{1}{nd_2}\sum_{a,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{cd}\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + 2g_\ell)x_{\ell a}x_{\ell c}x_{\ell d}.$$

Cálculo da expressão (3.9)

Temos que,

- $$2\kappa_{\phi,\phi c,d} + 3\kappa_{\phi c,\phi d} = -2\kappa_{\phi c,\phi d} + 3\kappa_{\phi c,\phi d} = \kappa_{\phi c,\phi d} = \phi^{-1}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell x_{\ell c}x_{\ell d}.$$

Logo,

$$\sigma_{\phi\phi}^{(1)} = -\left(\frac{1}{nd_2}\right)^3 nd_4 - \frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{nd_2}\right)^2 \sum_{c,d=1}^{p} \kappa^{cd} \sum_{\ell=1}^{n} \omega_\ell x_{\ell c} x_{\ell d}.$$

Cálculo da expressão (3.10)

Temos que,

- $$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\kappa_{a\phi c} + 5\kappa_{a\phi,c}\right)\kappa_{r\phi t} &= \left\{\left(-\frac{3}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell + 5\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell\right) x_{\ell a} x_{\ell c}\right\}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{mr} x_{mt}\right\} \\ &= -\frac{7}{2}\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell a} x_{\ell c} x_{mr} x_{mt},\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}2\kappa_{a\phi,c}\kappa_{r,\phi t} &= 2\left(\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell x_{\ell a} x_{\ell c}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{mr} x_{mt}\right) \\ &= 2\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell a} x_{\ell c} x_{mr} x_{mt},\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\kappa_{ab\phi} + \kappa_{a,b\phi}\right)\kappa_{rs\phi} &= \left\{\left(-\frac{3}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell + \sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell\right) x_{\ell a} x_{\ell c}\right\}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{mr} x_{mt}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell a} x_{\ell c} x_{mr} x_{mt}.\end{aligned}$$

Assim,

- $$\left(\frac{3}{2}\kappa_{a\phi c} + 5\kappa_{a\phi,c}\right)\kappa_{r\phi t} + 2\kappa_{a\phi,c}\kappa_{r,\phi t} = -\frac{3}{2}\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell a} x_{\ell c} x_{mr} x_{mt}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(2)*} &= \sigma_{ij}^{(2)} - \frac{3}{2nd_2}\sum_{a,c=1}^{n}\sum_{r,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{ct}\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell a} x_{\ell c} x_{mr} x_{mt} \\ &\quad + \frac{1}{2nd_2}\sum_{a,c=1}^{n}\sum_{r,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell a} x_{\ell c} x_{mr} x_{mt}.\end{aligned}$$

Cálculo da expressão (3.11)

Temos que,

$$\bullet \quad \left(\frac{3}{2}\kappa_{abc} + 5\kappa_{ab,c}\right)\kappa_{\phi st} = \left\{\left(-\frac{3}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + 2g_\ell) + 5\sum_{\ell=1}^{n} g_\ell\right) x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}\right\}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{ms}x_{mt}\right\}$$
$$= \left\{-\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{3}{2}f_\ell - 2g_\ell\right) x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}\right\}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{ms}x_{mt}\right\}$$
$$= \phi\sum_{\ell,m=1}^{n}\left(\frac{3}{2}f_\ell - 2g_\ell\right)\omega_m x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{ms}x_{mt}.$$

$$\bullet \quad \kappa_{ab,c}\kappa_{\phi t,s} = \left(\phi\sum_{\ell=1}^{n} g_\ell x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{ms}x_{mt}\right)$$
$$= \phi\sum_{\ell,m=1}^{n} g_\ell\omega_m x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{ms}x_{mt}.$$

Assim,

$$\bullet \quad \left(\frac{3}{2}\kappa_{abc} + 5\kappa_{ab,c}\right)\kappa_{\phi st} + \kappa_{ab,c}\kappa_{\phi t,s} = \phi\sum_{\ell,m=1}^{n}\left(\frac{3}{2}f_\ell - g_\ell\right)\omega_m x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{ms}x_{mt}.$$

Logo,

$$\sigma_{i\phi}^{(2)} = \frac{1}{nd_2\phi}\sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{s,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\sum_{\ell,m=1}^{n}\left(\frac{3}{2}f_\ell - g_\ell\right)\omega_m x_{\ell a}x_{\ell b}x_{\ell c}x_{ms}x_{mt}.$$

Cálculo da expressão (3.12)

Temos que,

$$\bullet \quad \left(\frac{3}{2}\kappa_{\phi bc} + 4\kappa_{\phi,bc}\right)\kappa_{\phi st} = \left\{\left(-\frac{3}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell + 4\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell\right) x_{\ell b}x_{\ell c}\right\}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{ms}x_{mt}\right\}$$
$$= -\frac{5}{2}\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell b}x_{\ell c}x_{ms}x_{mt}.$$

$$\bullet \quad \kappa_{\phi b,c}\kappa_{\phi t,s} = \left(\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell x_{\ell b}x_{\ell c}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{ms}x_{mt}\right)$$
$$= \sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell b}x_{\ell c}x_{ms}x_{mt}.$$

Assim,

- $$\left(\frac{3}{2}\kappa_{\phi bc} + 4\kappa_{\phi,bc}\right)\kappa_{\phi st} + \kappa_{\phi b,c}\kappa_{\phi t,s} = -\frac{3}{2}\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell b}x_{\ell c}x_{ms}x_{mt}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi\phi}^{(2)} &= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2nd_2}\right)^2\sum_{b,c=1}^{p}\sum_{s,t=1}^{p}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\sum_{\ell,m=1}^{n}\omega_\ell\omega_m x_{\ell b}x_{\ell c}x_{ms}x_{mt} \\ &\quad +\frac{3}{2}\left(\frac{1}{nd_2}\right)^4(nd_3)^2.\end{aligned}$$

Cálculo da expressão (3.13)

Temos que,

- $2(\kappa_{a,b\phi} + \kappa_{ab\phi})\kappa_{r,s\phi} = 2(\kappa_{a,b\phi} - \kappa_{a,b\phi})\kappa_{r,s\phi} = 0,$

- $(\kappa_{a,b\phi} + \kappa_{ab\phi})\kappa_{rs\phi} = 0.$

Logo,

$$\sigma_{ij}^{(3)*} = \sigma_{ij}^{(3)}.$$

Cálculo da expressão (3.14)

Temos que,

- $2(\kappa_{a,\phi c} + \kappa_{a\phi c})\kappa_{r,st} = 2(\kappa_{a,\phi c} - \kappa_{a,\phi c})\kappa_{r,st} = 0,$

- $(\kappa_{a,\phi c} + \kappa_{a\phi c})\kappa_{rst} = 0.$

Logo,

$$\sigma_{i\phi}^{(3)} = 0.$$

Cálculo da expressão (3.15)

Temos que,

$$\bullet \quad \kappa_{\phi\phi\phi}(\kappa_{rs\phi} + 2\kappa_{r,s\phi}) = \kappa_{\phi\phi\phi}\left(-\sum_{m=1}^{n}\omega_m + 2\sum_{m=1}^{n}\omega_m\right)x_{mr}x_{ms}$$
$$= \kappa_{\phi\phi\phi}\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{mr}x_{ms}.$$

Logo,

$$\sigma_{\phi\phi}^{(3)} = \left(\frac{1}{nd_2}\right)^4 (nd_3)^2 + \left(\frac{1}{nd_2}\right)^3 nd_3 \sum_{r,s=1}^{p}\kappa^{rs}\sum_{m=1}^{n}\omega_m x_{mr}x_{ms}.$$

B.1.3 Resultado da Seção 3.3

Cálculo de $\sum_{v=1}^{p} d_v^s \kappa^{rv}$.

Temos que,

$$\bullet \quad \sum_{v=1}^{p} d_v^s \kappa_{rv} = \sum_{v,w,s,y,t,u=1}^{p}\Bigg\{\kappa^{rw}\kappa^{sy}\kappa^{tu}\kappa^{rv}\underbrace{(\kappa_{stu} + 2\kappa_{st,u})(\kappa_{vwy} + \kappa_{v,wy})}_{\text{(I)}}$$
$$+\frac{1}{2}\kappa^{rs}\kappa^{tu}\kappa^{rv}\underbrace{(\kappa_{stuv} + \kappa_{stu,v} + 2\kappa_{stv,u} + 2\kappa_{st,uv} + 2\kappa_{st,u,v})}_{\text{(II)}}\Bigg\},$$

em que,

$$\bullet \quad \kappa_{stu} + 2\kappa_{stu} = -\phi\sum_{\ell=1}^{n}(f_\ell + 2g_\ell)x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u} + 2\phi\sum_{\ell=1}^{n} g_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}$$
$$= -\phi\sum_{\ell=1}^{n} f_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u},$$

$$\bullet \quad \kappa_{vwy} + \kappa_{v,wy} = -\phi\sum_{m=1}^{n}(f_m + 2g_m)x_{mv}x_{mw}x_{my} + 2\phi\sum_{m=1}^{n} g_m x_{mv}x_{mw}x_{my}$$
$$= -\phi\sum_{m=1}^{n}(f_m + g_m)x_{mv}x_{mw}x_{my},$$

- $$\kappa_{stuv} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\Bigg\{-\frac{6}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4+\frac{3}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4+\frac{12}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2\frac{d^2\mu}{d\eta^2} -\frac{3}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2-\frac{4}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3}\Bigg\}_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}x_{\ell v},$$

- $$3\kappa_{stu,v} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\Bigg\{\frac{6}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4-\frac{3}{V^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4-\frac{9}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2\frac{d^2\mu}{d\eta^2} +\frac{3}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3}\Bigg\}_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}x_{\ell v},$$

- $$2\kappa_{st,uv} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\Bigg\{\frac{2}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4-\frac{4}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2\frac{d^2\mu}{d\eta^2}+\frac{2}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2\Bigg\}_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}x_{\ell v},$$

- $$2\kappa_{st,u,v} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\Bigg\{\frac{2}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2\frac{d^2\mu}{d\eta^2}-\frac{2}{V^3}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^4\Bigg\}_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}x_{\ell v}.$$

Assim,

- $$\text{(I)} = \phi^2\sum_{\ell,m=1}^{n} f_\ell(f_m+g_m)x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}x_{mv}x_{mw}x_{my},$$

- $$\text{(II)} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\Bigg\{\frac{1}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2\frac{d^2\mu}{d\eta^2}-\frac{1}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2-\frac{1}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3}\Bigg\}_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}x_{\ell v}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{v=1}^{p} d_v^s(\kappa^{rv}) &= \sum_{s,t,u=1}^{p}\sum_{v,w,y=1}^{p}\kappa^{rw}\kappa^{sy}\kappa^{tu}\kappa^{rv}\sum_{\ell,m=1}^{n} f_\ell(f_m+g_m)x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}x_{mv}x_{mw}x_{my}\\ &+\frac{1}{2}\phi\sum_{s,t,u,v=1}^{p}\kappa^{rs}\kappa^{tu}\kappa^{rv}\sum_{\ell=1}^{n}\Bigg\{\frac{1}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2\frac{d^2\mu}{d\eta^2}-\frac{1}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2\\ &-\frac{1}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3}\Bigg\}_\ell x_{\ell s}x_{\ell t}x_{\ell u}x_{\ell v}.\end{aligned}$$

B.2 Resultados do Capítulo 4

B.2.1 Resultados da Seção 4.1

Cálculo da expressão (4.4)

Temos que,

- $\kappa_{s\phi\phi} + 2\kappa_{s,\phi\phi} = 0$,
- $\kappa_{s\phi\phi v} + \kappa_{s\phi\phi,v} + 2\kappa_{s\phi v,\phi} = 0$,
- $2(\kappa_{s\phi,\phi v} + \kappa_{s\phi,\phi,v}) = 2(\kappa_{s\phi,\phi v} - \kappa_{s\phi,\phi v}) = 0$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum d_v^s(\kappa^{rv}) \;=\; & \sum_{s,t,u=1}^{p} \sum_{v,w,y=1}^{p} \kappa^{rw}\kappa^{sy}\kappa^{tu}\kappa^{rv} \sum_{\ell,m=1}^{n} f_\ell(f_m + g_m) x_{\ell s} x_{\ell t} x_{\ell u} x_{mv} x_{mw} x_{my} \\
& + \frac{1}{2}\phi \sum_{s,t,u,v=1}^{p} \kappa^{rs}\kappa^{tu}\kappa^{rv} \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \frac{1}{V^2}\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} - \frac{1}{V}\left(\frac{d^2\mu}{d\eta^2}\right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{1}{V}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{d^3\mu}{d\eta^3} \right\}_\ell x_{\ell s} x_{\ell t} x_{\ell u} x_{\ell v}.
\end{aligned}
$$

Cálculo da expressão (4.12)

Temos que,

- $\kappa_{s\phi\phi} = \kappa_{s\phi,\phi} = \kappa_{\phi\phi,\phi} = 0$,
- $\kappa_{\phi t u \phi} = \kappa_{\phi t u,\phi} = \kappa_{\phi t \phi,u} = 0$,
- $\kappa_{\phi\phi\phi,\phi} = \kappa_{\phi\phi,\phi\phi} = \kappa_{\phi\phi,\phi,\phi} = 0$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_v d_v^{\phi}\kappa^{\phi\phi} &= (\kappa^{\phi\phi})^3\kappa_{\phi\phi\phi}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell\kappa^{tu}x_{\ell t}x_{\ell u} + (\kappa^{\phi\phi})^4\kappa^2_{\phi\phi\phi} + \frac{1}{2}(\kappa^{\phi\phi})^3\kappa_{\phi\phi\phi\phi} \\
&= -\frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{nd_2}\right)^3 nd_3\sum_{\ell=1}^{n}\omega_\ell z_{\ell\ell} + \left(\frac{1}{nd_2}\right)^4(nd_3)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{nd_2}\right)^3 nd_4 \\
&= -\frac{nd_3}{n^3d_2^3\phi}\mathrm{tr}(WZ) + \frac{n^2d_3^2}{n^4d_2^4} + \frac{nd_4}{2n^3d_2^3} \\
&= -\frac{d_3}{n^2d_2^3\phi}\mathrm{posto}(X) + \frac{d_3^2}{n^2d_2^4} + \frac{d_4}{2n^2d_2^3} \\
&= -\frac{pd_3}{n^2d_2^3\phi} + \frac{d_3^2}{n^2d_2^4} + \frac{d_4}{2n^2d_2^3}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\Sigma^*_{\phi\phi} &= -\frac{1}{nd_2} + \frac{1}{n^2d_2^2}\left(\frac{p}{\phi^2} - \frac{d_4}{d_2}\right) - \frac{3}{2n^2d_2^2\phi^2}\mathbf{1}^TWZ^{(2)}W\mathbf{1} + \frac{3d_3^2}{2n^2d_2^4} \\
&\quad + \frac{d_3}{n^2d_2^3}\left(\frac{d_3}{d_2} - \frac{p}{\phi}\right) - \frac{2pd_3}{n^2d_2^3\phi} + \frac{2d_3^2}{n^2d_2^4} + \frac{d_4}{n^2d_2^3} \\
&= -\frac{1}{nd_2} + \frac{p}{n^2d_2^2\phi^2} - \frac{d_4}{n^2d_2^3} - \frac{3}{2n^2d_2^2\phi^2}\mathbf{1}^TWZ^{(2)}W\mathbf{1} + \frac{3d_3^2}{2n^2d_2^4} \\
&\quad + \frac{d_3^2}{n^2d_2^4} - \frac{pd_3}{n^2d_2^3\phi} - \frac{2pd_3}{n^2d_2^3\phi} + \frac{2d_3^2}{n^2d_2^4} + \frac{d_4}{n^2d_2^3} \\
&= -\frac{1}{nd_2} + \frac{p}{n^2d_2^2\phi^2} - \frac{3}{2n^2d_2^2\phi^2}1^TWZ^{(2)}W1 + \frac{9d_3^2}{2n^2d_2^4} - \frac{3pd_3}{n^2d_2^3\phi}.
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] Bartlett, M. S. (1953). Approximate confidence intervals. *Biometrika*, **40**, 12–19.

[2] Botter, D. A. e Cordeiro, G. M. (1998). Improved estimators for generalized linear models with dispersion covariates. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **62**, 91–104.

[3] Bowman, K. O. e Shenton, L. R. (1965). *Biases and covariance of maximum likelihood estimates*, Union Carbide Corporation Report K-1633, Oak Ridge.

[4] Box, M. J. (1971). Bias in nonlinear estimation (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, **33**, 171–201.

[5] Cavalcanti, A. B. (2009) *Aperfeiçoamento de métodos estatísticos em modelos de regressão da família exponencial.* Tese de doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

[6] Cook, R., Tsai, C. e Wei, B. (1986). Bias in nonlinear regression. *Biometrika*, **73**, 615–623.

[7] Cordeiro, G. M. (1986). *Modelos Lineares Generalizados.* Livro texto de minicurso, VII Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, UNICAMP, Campinas, SP.

[8] Cordeiro, G. M. (1993). Barlett corrections and bias correction for two heteroscedastic regression models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **22**, 169–188.

[9] Cordeiro, G. M. (1991). *Introdução à Teoria Assintótica.* Livro texto do 22° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, RJ.

[10] Cordeiro, G. M. (2004). Second-order covariance matrix of maximum likelihood estimates in generalized linear models. *Statistics and Probability Letters*, **66**, 153–160.

[11] Cordeiro, G. M. (2008). Corrected maximum likelihood estimators in linear heteroscedastic regression models. *Brazilian Review of Econometrics*, **28**, 53–67.

[12] Cordeiro, G. M. e Barroso, L. P. (2007). A Third-order Bias Corrected Estimate in Generalized Linear Models. *Test*, **16**, 76-89.

[13] Cordeiro, G. M., Barroso, L. P. e Botter, D. A. (2006). Covariance matrix formula for generalized linear models with unknown dispersion. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **35**, 113-120.

[14] Cordeiro, G. M. e Cribari-Neto, F. (1998). On Bias reduction in exponential and nonexponential family regression models. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **27**, 485–500.

[15] Cordeiro, G. M., Cysneiros, A.H.M.A. e Cysneiros, F.J.A. (2009). Bias-Corrected Maximum Likelihood Estimators in Nonlinear Heteroscedastic Models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **87**, 1-26.

[16] Cordeiro, G. M. e Demétrio, C. G. B. (2008). Corrected estimators in extended quasilikelihood methods. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **37**, 873-880.

[17] Cordeiro, G. M., Ferrari, S. L. P., Uribe-Opazo, M. A. e Vasconcellos, K. L. P. (2000). Corrected maximum-likelihood estimation in a class of symmetric nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters*, **46**, 317–328.

[18] Cordeiro, G. M. e Klein, R. (1994). Bias correction in arma models. *Statistics and Probability Letters*, **19**, 169–176.

[19] Cordeiro, G. M. e McCullagh, P. (1991). Bias correction in generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society* B, **53**, 629-643.

[20] Cordeiro, G. M., Previdelli, I. T. S. e Samohyl, R. W. (2008). Bias corrected maximum likelihood estimators in nonlinear overdispersed models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **22**, 1-14.

[21] Cordeiro, G. M. e Udo, M. C. T. (2008). Bias correction in generalized nonlinear models with dispersion covariates. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **37**, 2219-2225.

[22] Cordeiro, G. M. e Vasconcellos, K. L. P. (1997). Bias correction for a class of multivariate nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters*, **35**, 155–164.

[23] Cordeiro, G. M. e Vasconcellos, K. L. P. (1999). Second-order biases of the maximum likelihood estimates in von Mises regression models. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 901–910.

[24] Cox, D. R. e Snell, E. J. (1968). A general definition of residuals (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society* B, **30**, 248–275.

[25] Cribari-Neto, F. e Vasconcellos, K. L. P. (2002). Nearly unbiased maximum likelihood estimation for the beta distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **72**, 107–118.

[26] Cysneiros, F. J. A., Cordeiro, G. M. e Cysneiros, A. H. M. A. (2009). Corrected maximum likelihood estimators in heteroscedastic symmetric nonlinear models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 451-461.

[27] Dudewicz, E. J. e Mishra S. N. (1998). *Modern Mathematical*. 1nd ed. New York, John Wiley.838p. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics).

[28] Fahrmeir, L. e Kaufmann, H. (1985). Consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimator in generalized linear models. *Annals of Statistics*, **13**, 342-368.

[29] Ferrari, S. L. P., Botter, D. A., Cordeiro, G. M. e Cribari-Neto, F. (1996). Second and third order bias reduction in one-parameter models. *Statistics and Probability Letters*, **30**, 339–345.

[30] Firth, D. (1993). Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, **80**, 27–38.

[31] Haldane, J. B. S. (1953). The estimation of two parameters from a sample. *Sankhyã*, **12**, 313–320.

[32] Haldane, J. B. S. e Smith, S. M. (1956). The sampling distribution of a maximum likelihood estimate. *Biometrika*, **43**, 96–103.

[33] James, B. R. (2008). *Probabilidade: um curso em nível intermediário.* 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA.

[34] Jϕrgensen, B. (1987). Exponential dispersion models (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society* B, **49**, 127-162.

[35] Lemonte, A. J., Cribari Neto, F., Vasconcellos, K.L. (2007). Improved statistical inference for the two-parameter Birnbaum Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4656-4681.

[36] McCullagh, P. e Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models*, 2nd. Edition. Chapman and Hall, London.

[37] Nelder, J. A. e Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society* A, **135**, 370-384.

[38] Ospina, R., Cribari-Neto, F., Vasconcellos, K. L. P. (2006). Improved point and interval estimation for a beta regression model. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 960–981.

[39] Pace, L. e Salvan, A. (1997). *Principles of Statistical Inference*. Singapore: World Scientific.

[40] Paula, G. A.(1992). Bias correction for exponential family nonlinear models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **40**, 43–54.

[41] Paula, G. A. (2010). *Modelos de Regressão com Apoio Computacional.* Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

[42] Paula, G. A. e Cordeiro, G. M. (1995). Bias correction and improved residuals for nonexponential family nonlinear models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 24, p. 1193–1210.

[43] Peers, H.W. e Iqbal, M. (1985). Asympotic expansions for confidence limits in the presence of nuisance parameters, with applications. *Journal of the Royal Statistical Society* B, **47**, 547–554.

[44] Rao, C. R. (1973). *Linear statistical inference and its applications.* Wiley, New York.

[45] Sen, P. K. e Singer, J. M. (1993). *Large Sample Methods in Statistics: An Introduciton with Applications*. Chapman and Hall, London.

[46] Shenton, L. R. e Wallington, P. A. (1962). The bias of moment with an aplication to the negative binomial distribution. *Biometrika*, **49**, 193–204.

[47] Vasconcellos, K. L. P. e Cordeiro, G. M. (2000). Bias corrected estimates in multivariate Student t regression models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **29**, 797–822.

[48] Vasconcellos, K. L. P. e Silva, S. G. (2005). Corrected estimates for Student t regression models with unknown degrees of freedom. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **75**, 409–423.

[49] Young, D. e Bakir, S.(1987). Bias correction for a generalized log-gamma regression model. *Technometrics*, **29**, 183–191.