Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Soluções radiais e não radiais para a Equação de Hénon na bola unitária

**por**

**Jackson Jonas Silva Costa** †

**sob orientação do**

**Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# Soluções radiais e não radiais para a Equação de Hénon na bola unitária

por

**Jackson Jonas Silva Costa**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG**

**Prof. Dr. Giovany Malcher Figueiredo - UFPA**

**Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**

**Centro de Ciências e Tecnologia**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Curso de Mestrado em Matemática**

**Abril/2010**

# Resumo

Neste trabalho demonstraremos a existência de solução radial para o seguinte problema de Dirichlet relativo a equação de Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u & = |x|^{\alpha} u^{p-1}, \quad em\ \Omega; \\ u & > 0, \qquad\qquad em\ \Omega; \\ u & = 0, \qquad\qquad na\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega$ é a bola unitária do $\mathbb{R}^N$ e $2 < p < 2^* + \dfrac{2\alpha}{N-2}$. Também demonstraremos existência de solução não-radial para o problema (1) quando $2 < p < 2^*$ e $\alpha$ é suficientemente grande. [†]

[†]**Palavras-chave:** Equação de Hénon, solução radial, solução não-radial, expoente crítico.

# Abstract

In this work we are going to prove the existence of radial solution to the following Dirichlet problem concerning the Hénon equation

$$\begin{cases} -\Delta u &= |x|^{\alpha} u^{p-1}, \quad in\ \Omega; \\ \quad u &> 0, \qquad\quad in\ \Omega; \\ \quad u &= 0, \qquad\quad on\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $\Omega$ is the unitary ball in $\mathbb{R}^N$ and $2 < p < 2^* + \dfrac{2\alpha}{N-2}$. We will also prove the existence of non radial solution to problem (2) when $2 < p < 2^*$ and $\alpha$ is big enough. †

† **Keywords:** Hénon equation, radial solution, non radial solution, critical exponent.

# Agradecimentos

- A Deus, que me fortaleceu e me deu coragem para recomeçar quando a razão me dizia que estava tudo perdido.

- Aos meus pais, José Jonas e Josilda Barbosa, por terem investido em minha vida desde o meu nascimento até hoje, sempre serei grato pelo amor e dedicação sempre presente. Aos meus irmãos César, Geyssy e Géssika, pela amizade lealdade, companheirismo e fraternidade, amo muito vocês! A minha avó Mariza, que é para mim um exemplo de honestidade, caráter e perseverança, pela atenção que sempre demonstrou nos momentos em que eu ia a sua casa depois de um dia de trabalho duro. Te amo vovó!

- A minha namorada (em breve esposa) Aurélia, pelo amor, paciência nos momentos em que estive distante e orações. Aurélia, tu és para mim o mais belo e precioso dos presentes que eu poderia receber. EU TE AMO!

- Ao Meu orientador Daniel Cordeiro de Morais Filho, por ter acreditado em mim, pelos conselhos, dedicação, incentivo e amizade durante todo o período em que me orientou. Agradeço também pela paciência que demonstrou em vários momentos e pelo rigor quando se tratava da boa escrita de textos matemáticos. Por fim, agradeço pelo excelente trabalho de orientação, e pela contribuição para o meu desenvolvimento intelectual e social.

- Aos Professores Giovany Malcher Figueiredo e Claudianor Oliveira Alves, por terem aceitado o convite para participarem da banca examinadora da minha dissertação.

- Aos professores de graduação, em especial ao professor Aldo Trajano Louredo, que foi aquele que mais me incentivou e me fez acreditar que o sonho de fazer um mestrado era possível de ser realizado. Agradeço também aos professores, Aldo Bezerra Maciel e Osmundo Alves Lima, que me deram a oportunidade de trabalhar em um projeto de iniciação científica.

- Aos professores de Pós-Graduação, em particular ao professor Marco Aurélio, que muito me incentivou nos estudos. Ao professor Claudianor, que além de ser um exemplo de professor, foi fundamental na conclusão deste trabalho. Ao professor Henrique que me fez ver a beleza da Geometria Diferencial. Ao professor Brandão, pelos conselhos, reflexões e pelo exemplo de humildade.

- Aos colegas de mestrado da UFPB, Antônio, Diogo, Gerson, Jairo, Marco Aurélio e Robson, pelo apoio e amizade em todos os momentos. Desejo toda felicidade do mundo para cada um de vocês!

- Aos colegas de mestrado da UFCG. Em especial, ao Luciano e à Sheila, que estiveram mais próximos e tornaram-se amigos para vida toda. Também agradeço aos colegas de turma Eder, Geizane, Natan, Marcelo, Paulo, Désio, Josiluiz, Jéssyca, Leidmar e Sabrina. Que Deus presenteie cada um de vocês com felicidade e sucesso em todas as áreas!

- Aos funcionários do PPGMAT, em especial a D. Severina (Du), pela amizade, cuidado e gentileza prestada durante todo o período do mestrado. A D. Salete, que sempre esteve pronta a ajudar na secretaria, a D. Argentina, que sempre foi muito atenciosa na biblioteca, e a Shirlei que contribuiu para manter o ambiente de trabalho sempre limpo e agradável. Que Deus Abençoe vocês com toda sorte de Bênçãos!

- A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que infelizmente não me recordo neste momento.

- À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e à Coordenação da Pós-Graduação em Matemática da UFCG.

# Dedicatória

Aos meus pais José Jonas e
Josilda Barbosa.

# Conteúdo

# Introdução

Ao longo desta dissertação, salvo mensão em contrário, $\Omega$ denotará a bola unitária do $R^N$ com $N \geq 3$. Em um trabalho publicado em 1973, M. Hénon [12] introduziu a equação elíptica

$$\Delta u = |x|^{\alpha} u^{p-1} \quad em \quad \Omega \tag{3}$$

onde $\alpha > 0$ e $p > 2$, no contexto do grupo estelar de simetria esférica. A equação (3) é de grande interesse matemático, especialmente no domínio da análise não-linear e métodos variacionais.

Nessa dissertação, estudaremos questões relacionadas a existência de solução radial e existência de solução não-radial para o seguinte problema de Dirichlet relativo a equação de Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u &= |x|^{\alpha} u^{p-1}, \quad em\ \Omega; \\ u &> 0, \qquad\qquad em\ \Omega; \\ u &= 0, \qquad\qquad na\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Julgamos conveniente dividir esta dissertação da seguinte maneira:

No ***Capítulo 1***, achamos interessante introduzirmos algumas definições e teoremas que facilitarão, para o leitor não familiarizado, a leitura dos capítulos subsequentes. Dentre as definições ressaltamos a definição de ***Ação de um Grupo Topológico*** que usaremos para introduzir o espaço $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, e para enunciarmos o ***Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais***, a saber o

**Teorema 0.1** *Suponha que a ação de um grupo topológico $G$ sobre um espaço de Hilbert $H$ seja isométrica. Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ é invariante, e $u$ é um ponto crítico de $I$ restrito ao $Fix_\rho(G)$, então $u$ é ponto crítico de $I$ em $H$.*

Este teorema será útil no Capítulo 3, para mostrarmos que uma determinada função minimizante constitui-se, a menos de um múltiplo escalar, em uma solução para o problema (4). Além disso, apresentaremos um teorema muito utilizado no estudo de não-existência de solução para problemas elípticos o qual é denominado ***Identidade de Pohozaev com Peso***, que é o

**Teorema 0.2** *Sejam $\Omega$ um domínio limitado com fronteira suave e $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfaz:*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= g(x, u(x)), \quad \textit{para todo} \quad x \in \Omega; \\ u(x) &= 0, \qquad\qquad \textit{para todo} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

*$y \in \mathbb{R}^N$ é um vetor fixado e $\eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ no ponto $x$, então $u$ satisfaz a seguinte identidade*

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 [(x-y)\cdot\eta(x)]\, dx &= 2N \int_\Omega G(x,u)dx - (N-2)\int_\Omega g(x,u)u\, dx + \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^N \int_\Omega (x_i - y_i) G_{x_i}(x,u)\, dx, \end{aligned} \tag{6}$$

*onde, $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s g(x,t)dt$.*

Em geral, não é difícil encontrar a Identidade de Pohozaev na literatura sem a presença de um peso multiplicando a não-linearidade. Porém, como estamos trabalhando com um problema com peso multiplicando a não-linearidade, baseado em um trabalho publicado em 1982 por Figueiredo, Lions e Nussbaum [8], apresentaremos tal identidade com a possibilidade de um peso multiplicando a não-linearidade. Aplicaremos a Identidade de Pohozaev a fim de garantir não-existência de solução para o problema (4) no caso em que $p \geq \dfrac{N+2}{N-2} + \dfrac{2\alpha}{N-2}$.

Dedicamos o ***Capítulo 2*** para, baseados em um trabalho publicado em 1982, por Wei-Ming Ni [18], mostrarmos existência de solução radial para o problema (4), no caso em que $2 < p < 2^* + \dfrac{2\alpha}{N-2}$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico da imersão de Sobolev. O ponto mais relevante neste estudo consiste no fato de que o peso $|x|^\alpha$, que multiplica a não-linearidade $u^{p-1}$, permite encontrarmos solução radial, (isto é, solução em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$) para o problema (1) com $p$ maior do que ou igual ao expoente crítico $2^*$. A demonstração da existência de solução para o problema (1) consiste em aplicar o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz (1973), ao funcional energia associado ao problema (1) definido sobre o espaço $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. A demonstração foi dividida em três etapas. Na primeira etapa estudamos um lema radial devido a Wei-Ming Ni (1982). Na segunda etapa estudamos um lema de compacidade também devido a Wei-Ming Ni (1982). Finalmente, na terceira etapa usamos o lema de compacidade para demonstrar que o funcional energia satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, e a condição de Palais-Smale.

No ***Capítulo 3***, nos deteremos ao estudo de questões relacionadas a existência de soluções de energia mínima (Ground States) não-radial para o problema (4) no caso em que $2 < p < 2^*$. Uma função $u \in H^1_0(\Omega)$ é denominada ***Ground State*** para equação de Hénon se realiza o seguinte ínfimo

$$S_{\alpha,p} := \inf_{\substack{u\in H^1_0(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Na Seção 3.2 mostraremos a existência de Ground States para equação (3), em seguida aplicaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Teorema C.2, apêndice C) para mostrarmos que uma Ground State, a menos de um múltiplo escalar, é uma solução do problema (4). Ainda na mesma seção, mostraremos que $S^{\mathrm{rad}}_{\alpha,p}$ é atingido por uma função de $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, onde

$$S^{\mathrm{rad}}_{\alpha,p} := \inf_{\substack{u\in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}},$$

e usaremos o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais (ver Teorema 1.1, capítulo 1) para concluirmos que tal função também é uma solução do problema (2.1). Com isto, surge a seguinte questão:

*Existe solução Ground States não-radial para a equação de Hénon?*

A fim de responder esta questão, provaremos, na Seção 3.3, uma condição necessária para que uma Ground State seja radial. Na seção 3.4 provaremos o principal resultado deste capítulo, a saber o

**Teorema 0.3** *Se $N \geq 3$ e $2 < p < 2^*$, então existe $\alpha_0 > 0$ tal que não existe Ground State radial para equação de Hénon quando $\alpha > \alpha_0$.*

O qual garante existência de solução (Ground States) não-radial para para equação de Hénon quando $\alpha$ é suficientemente grande.

No ***Capítulo 4***, ainda baseados em Ni [18], faremos uma generalização do Problema (4), isto é, mostraremos existência de solução radial positiva para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= b(|x|)f(u) & \text{em} & \Omega; \\ u &= 0 & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

onde as funções $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes hipóteses:

$(b_1)$ $b(r)$ é localmente Hölder contínua, não negativa, $b(0) = 0$ e $b \not\equiv 0$ em $\Omega$;

$(b_2)$ $b(r) = O(r^\alpha)$ quando $r \to 0$, para algum $\alpha > 0$;

$(f_1)$ $f$ é uma função localmente Hölder contínua,

$(f_{1.1})$ $f(z) \geq 0$, $\forall z > 0$,

$(f_{1.2})$ $f(z) = o(z)$ quando $z \to 0$,

$(f_2)$ Existe $M_1 > 0$ tal que $|f(z)| \leq C(1 + |z|)^p$, para todo $z \geq M_1$, onde $p < \dfrac{N+2}{N-2} + \dfrac{2\alpha}{N-2}$;

$(f_3)$ Existem constantes $\theta \in (0, 1/2)$ e $M_2 > 0$ tais que $F(z) \leq \theta.z.f(z)$ para $z \geq M_2$, onde $F(z) = \displaystyle\int_0^z f(t)\,dt$.

O problema (7) foi estudado inicialmente por Ambrosetti e Rabinowitz (1973) em [1] com uma não-linearidade $g(x, u)$ mais geral, definida em um domínio arbitrário com fronteira suave. Entretanto, a não-linearidade $g(x, u)$ apresentava crescimento subcrítico em $u$. Ou seja, Ambrosetti e Rabinowitz haviam tratado o caso em que o crescimento de $g$ em $u$ é menor do que $|u|^p$, com $p < \dfrac{N+2}{N-2}$. O que torna o problema (7) interessante é o fato de que $f$ pode apresentar crescimento crítico e até mesmo supercrítico.

No ***Apêndice A***, apresentaremos algumas demonstrações alternativas para resultados vistos no Capítulo 2.

No ***Apêndice B*** mostraremos que os funcionais energia $I, J : H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u)\,dx, \quad \text{e}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\tau+1}\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u\,dx,$$

onde $\widehat{F}(z) = \int_0^z \widehat{f}(t)\,dt$, são de classe $C^1(H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega), \mathbb{R})$. E, além disso

$$I'(u).v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int_\Omega |x|^l |u|^\tau v\,dx,$$

$$J'(u).v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega b(|x|)f(u).v\, dx,$$

para todo $v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$.

Já no ***Apêndice C***, provaremos algumas proposições que, se fossem provadas no decorrer das demonstrações as tornariam muito cansativas. Por isso julgamos conveniente deixa-las para o apêndice. Também, enunciaremos os principais resultados utilizados ao longo de demonstrações, e forneceremos referencias onde poderão ser encontradas as respectivas demonstrações.

# Lista de Notações

**Notações Gerais**

| | |
|---|---|
| $\blacksquare$ | indica final de demonstração. |
| $B(x,\delta)$ | bola aberta de centro $x$ e raio $\delta$, |
| $E$ | espaço vetorial real, |
| $Fix(G)$ | espaço dos pontos $\rho$-invariantes (ver p. 18), |
| $X$ | espaço de Banach real, |
| $X'$ | dual topológico de $X$, |
| q.t.p | quase toda parte, |
| $u\|_A$ | restrição da função $u$ ao conjunto $A$, |
| $f'$ | denota a derivada de Gâteaux e derivada de Fréchet da função $f$, |
| $suppf$ | suporte da função $f$, |
| $A, B, C, M, K, A_i, B_i, C_i, M_i, K_i,\ i = 1, 2, \ldots$ | denotam constantes positivas, |

| | |
|---|---|
| $D^\alpha u$ | $\alpha$-derivada fraca de $u \in L^1(\Omega)$, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é um multiíndice de ordem $\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$, |
| $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ | gradiente de $u$, |
| $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ | laplaciano de $u$, |
| $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$ | derivada normal exterior, |
| $\langle \ , \rangle$ | denota produto interno e aplicação dualidade, |
| $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ | domínio no espaço $\mathbb{R}^N$, |
| $\overline{\Omega}$ | fecho do conjunto $\Omega$, |
| $\partial\Omega$ | fronteira de $\Omega$, |
| $\limsup\limits_{n\to\infty} f$ | limite superior da função $f$ quando $n \to \infty$, |
| $\liminf\limits_{n\to\infty} f$ | limite inferior da função $f$ quando $n \to \infty$, |
| $p^*$ | expoente crítico de Sobolev definido por $p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{se} \quad 1 \leq p < N; \\ +\infty & \text{se} \quad p \geq N \end{cases}$ |
| $p' = p/(p-1)$ | conjugado hölderiano de $p$, |

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$

$f = O(g)$ quando $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq M < +\infty$

$x_n = o_n(1)$ se $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ semi-eixo real não negativo,

$$S_{\alpha,p} := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}$$

$$S_{\alpha,p}^{\text{rad}} := \inf_{\substack{u \in H_{0,\text{rad}}^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}$$

$$\omega_N = \int_{B(0,1)} dx$$

**Espaços de Funções**

$C_0(\Omega)$ funções contínuas que se anulam na fronteira de $\Omega$,

$C(\overline{\Omega})$ funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$,

$C^k(\Omega)$ funções $k$ vezes continuamente diferenciáveis sobre $\Omega$, $k \in \mathbb{N}$,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$$

$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

| | |
|---|---|
| $L^p(\Omega)$ | funções mensuráveis $u$ sobre $\Omega$ tais que $\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$, |
| $L^\infty(\Omega)$ | funções mensuráveis $u$ sobre $\Omega$ tais que existe $C$ satisfazendo $\lvert u(x)\rvert \leq C$ q. t. p. sobre $\Omega$, |
| $W^{1,p}(\Omega)$ | funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existem $g_1, g_2, \ldots, g_N$ $\in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega g_i\varphi dx$, $\forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall\ i = 1, \ldots, n$ com $1 \leq p \leq \infty$ |
| $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ | |
| $W^{m,p}(\Omega)$ | funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $\forall\ \alpha > 0$ com $\lvert\alpha\rvert \leq m$, $\exists\ g_\alpha \in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\int_\Omega uD^\alpha\varphi\, dx =$ $= (-1)^{\lvert\alpha\rvert}\int_\Omega g_\alpha\varphi dx\ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, |
| $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ | |
| $W_0^{1,p}(\Omega)$ | o completamento de $C_c^1(\Omega)$, na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, |
| $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ | |
| $H_{0,\text{rad}}^1(\Omega)$ | espaços das funções radiais de $H_0^1(\Omega)$ (ver p. 19), |
| $W^{-1,p'}(\Omega)$ | dual topológico do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ |

**Normas**

| | |
|---|---|
| $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega \|u\|^p \, dx \right)^{1/p}$ | norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ |
| $\|u\|_{0,p,\Omega} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$ | |
| $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^p$ | norma do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ |
| $\|u\|_{1,p,\Omega} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ | |
| $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega \|\nabla u\|^p \, dx \right)^{1/p}$ | norma do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ |
| $\|u\| = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ | norma do espaço $H^1(\Omega)$, equivalente a $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ |

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e definições que serão utilizados em capítulos posteriores. Mais precisamente, definiremos o espaço $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, enunciaremos e demonstraremos o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais, o qual será utilizado no Capítulo 3, e a Identidade de Pohozaev com Peso que será utilizada no Capítulo 2. As principais referências utilizadas neste capítulo foram o livro do Willem [22] e um trabalho publicado por Figueiredo, Lions e Nussbaum [8].

## 1.1 Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais

Iniciaremos esta seção com algumas definições que serão importantes para enunciarmos o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais.

### 1.1.1 Ação de um Grupo Topológico

**Definição 1.1** *Um* ***grupo topológico*** *é um espaço topológico $(G, \tau, +)$, munido de uma operação "$+$"que torna $G$ um grupo ( "$\tau$"denota a topologia de $G$), tal que:*

*i) A aplicação $+ : G \times G \longrightarrow G$ definida por $+(g, h) = g + h$ é contínua;*

*ii) A função $I^{-1} : G \to G$ definida por $I^{-1}(g) = g^{-1}$ é contínua.*

**Exemplo 1.1** *Denotaremos o conjunto dos operadores lineares $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ que preservam produto interno por:*

$$O(N) = \{A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N); \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle\}.$$

*É possível verificar que $O(N)$ munido com a operação produto de matrizes é um grupo topológico, o qual é designado na literatura por **grupo de rotações em** $\mathbb{R}^N$. Segue da Proposição C.11 (ver apêndice C) que, se $A \in O(N)$ então $\det A = \pm 1$. Com isto, o conjunto:*

$$SO(N) = \{A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N); \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \ e \ \det A = 1\}$$

*é um subgrupo topológico de $O(N)$.*

**Definição 1.2** *Uma **ação** de um grupo topológico $G$ sobre um espaço vetorial $E$ é uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \rho: \ G \times E &\longrightarrow E \\ (g, u) &\longmapsto \rho(g, u) = g \cdot u \end{aligned}$$

*que satisfaz:*

*i) $1 \cdot u = u$ para todo $u \in E$;*

*ii) $(g + h) \cdot u = g \cdot (h \cdot u)$ para todos $g, h \in G$ e $u \in E$;*

*iii) $u \to g \cdot u$ é linear, para todo $g \in G$.*

**Exemplo 1.2** *A aplicação*

$$\begin{array}{rclcccccl} \widetilde{\rho}: \ SO(N) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) & & & & & & \\ (g, u) & \longmapsto & \widetilde{\rho}(g, u) & = & g \cdot u: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & & x & \longmapsto & g \cdot u(x) = u(g(x)) \end{array}$$

*é uma ação. De agora em diante, quando falarmos em ação de $SO(N)$ sobre o $H_0^1(\Omega)$, estaremos nos referindo a ação $\widetilde{\rho}$.*

Estabeleceremos a seguir algumas definições:

O espaço dos pontos ***$\rho$-invariantes*** é o seguinte subconjunto de $E$

$$Fix(G) = \{u \in E; \ g \cdot u = u \text{para todo } g \in G\}.$$

$W \subset E$ é um ***conjunto $\rho$-invariante*** se

$$g \cdot u = u, \quad \text{para todo par} \quad (g, u) \in G \times W.$$

Dizemos que $\varphi : E \to \mathbb{R}$ é um ***funcional $\rho$-invariante*** se

$$\varphi(g \cdot u) = \varphi(u), \quad \text{para todo par} \quad (g, u) \in G \times E.$$

Denominaremos $\rho$ de ***ação isométrica*** se

$$|\rho \cdot u| = |u|, \quad \text{para todo par} \quad (g,u) \in G \times E. \tag{1.1}$$

A seguir exemplificaremos alguns dos conceitos anteriores, apresentaremos um subespaço de $H_0^1(\Omega)$ o qual será de fundamental importância nos capítulos subsequentes.

### 1.1.2 O Espaço $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$

Denotaremos por $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ ao seguinte conjunto

$$H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) = Fix(SO(N)) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \; ; \; u(x) = u(g(x)), \; \forall \; g \in SO(N) \text{ e } \forall \; x \in \Omega \right\}.$$

Chamaremos as funções de $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ de ***funções radiais***.

A seguir, demonstraremos uma proposição que será de grande utilidade nos próximos capítulos desta dissertação.

**Proposição 1.1** *$u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ se, e somente se, $u(x) = u(|x|)$, para todo $x \in \Omega$.*

**Demonstração.** Suponha, inicialmente, que

$$u(x) = u(|x|) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Seja $g \in SO(N)$, então

$$|g(x)|^2 = \langle g(x), g(x) \rangle = \langle x, x \rangle = |x|^2.$$

O que implica em,

$$|g(x)| = |x|, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

As igualdades (1.2) e (1.3) acarretam em

$$u(x) = u(|x|) = u(|g(x)|) = u(g(x)), \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Reciprocamente, se

$$u(g(x)) = u(x), \quad \text{para todo} \quad g \in SO(N) \quad \text{e} \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

mostraremos que é possível definir uma função $\widetilde{u}$ de modo que, $\widetilde{u}(r) = u(x)$ para todo $x \in \Omega$ com $|x| = r$. Com efeito, seja $x_0 \in S[0,r]$, com $0 < r < 1$, então dado $y \in S[0,r]$, considere uma rotação $g_y \in SO(N)$ tal que

$$g_y(y) = x_0. \tag{1.5}$$

Usando as igualdades (1.4) e (1.5), obtemos

$$u(y) = u(g_y(y)) = u(x_0).$$

O que implica em, $u(y) = u(x_0)$ para todo $y \in S[0,r]$. Ou seja, $u$ é constante em cada esfera de raio $r \in (0,1)$. Portanto, podemos definir $u(r) := u(x)$, onde $r = |x|$. Com isto a afirmação está provada.

■

**Observação 1.1** *O espaço $Fix(G)$ dos pontos invariantes de $G$ é um subespaço fechado. De fato, sejam $u, v \in Fix(G)$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado $g \in G$, então usando o item iii) da Definição 1.2 deduzimos*

$$g \cdot (u + \lambda v) = g \cdot u + g \cdot \lambda v = u + \lambda v. \tag{1.6}$$

*De onde concluímos que $Fix(G)$ é um subespaço de $G$. Agora, mostremos que $Fix(G)$ é fechado. Para tanto, considere uma sequência $\{u_n\} \subset Fix(G)$ e $u \in E$, tais que $u_n \to u$ em $E$. Então, fixado $g \in G$, temos $(g, u_n) \to (g, u)$ em $G \times E$. Visto que, por definição, a ação é contínua, então*

$$u_n = g \cdot u_n \longrightarrow g \cdot u \quad \textit{para todo} \quad g \in G.$$

*Daí, pela unicidade do limite, segue que $g \cdot u = u$ para todo $g \in G$, e portanto $u \in Fix(G)$. Logo, $Fix(G)$ é um subespaço fechado de $G$.*

Segue da Observação 1.1, que $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^1_0(\Omega)$.

### 1.1.3 Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais

Nesta seção demonstraremos um resultado que será utilizado posteriormente no Capítulo 3.

**Teorema 1.1** *Suponha que a ação de um grupo topológico $G$ sobre um espaço de Hilbert $H$ seja isométrica. Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ é invariante, e $u$ é um ponto crítico de $I$ restrito ao $Fix(G)$, então $u$ é ponto crítico de $I$ em $H$.*

**Demonstração.** Desde que, $I \in C^1(H, \mathbb{R})$, para cada $g \in G$ e $u \in H$, tem-se

$$I'(g \cdot u) \cdot v = \lim_{t \to 0} \frac{I(g \cdot u + tv) - I(g \cdot u)}{t}. \tag{1.7}$$

Sendo I um funcional invariante, então

$$\begin{aligned} I(g \cdot u + tv) &= I(g^{-1} \cdot (g \cdot u + tv)) \\ &= I(u + tg^{-1} \cdot v), \end{aligned} \tag{1.8}$$

e

$$I(g \cdot u) = I(u). \tag{1.9}$$

Das igualdades (1.7), (1.8) e (1.9), resulta

$$\begin{aligned} I'(g \cdot u) \cdot v &= \lim_{t \to 0} \frac{I(u + tg^{-1} \cdot v) - I(u)}{t} \\ &= I'(u) \cdot (g^{-1} \cdot v). \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\langle \nabla I(g \cdot u), v \rangle = \langle \nabla I(u), g^{-1} \cdot v \rangle, \text{ para todo } v \in H. \tag{1.10}$$

**Afirmação 1.1** $\nabla I(g \cdot u) = g \cdot \nabla I(u)$ *para todo* $g \in G$.

De fato, desde que a ação é uma isometria, ou seja, $|g \cdot u|_H = |u|_H$, e a aplicação $u \mapsto g \cdot u$ é linear, então

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2} \left( |u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( |g \cdot (u + v)|^2 - |g \cdot u|^2 - |g \cdot v|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( |g \cdot u + g \cdot v|^2 - |g \cdot u|^2 - |g \cdot v|^2 \right) \\ &= \langle g \cdot u, g \cdot v \rangle \end{aligned} \tag{1.11}$$

Usando as igualdades (1.10) e (1.11), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla I(g \cdot u), v \rangle &= \langle \nabla I(u), g^{-1} \cdot v \rangle \\ &= \langle g \cdot \nabla I(g \cdot u), g \cdot (g^{-1} \cdot v) \rangle \\ &= \langle g \cdot \nabla I(u), v \rangle, \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

O implica em

$$\nabla I(g \cdot u) = g \cdot \nabla I(u), \quad \forall u \in H.$$

E assim, a afirmação está provada.

Por outro lado, como $u \in Fix(G)$, então

$$g \cdot u = u, \quad \text{para todo} \quad g \in G. \tag{1.12}$$

Pela Afirmação 1.1, juntamente com a igualdade (1.12), deduzimos

$$\begin{aligned} \nabla I(u) &= \nabla I(g \cdot u) \\ &= g \cdot \nabla I(u), \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Com isto,

$$\nabla I(u) \in Fix(G). \tag{1.13}$$

Como, por hipótese, $u$ é ponto crítico de $I$ restrito ao $Fix(G)$, seque que

$$\langle \nabla I(u), v \rangle = I'(u) \cdot v = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in Fix(G).$$

Logo,

$$\nabla I(u) \in Fix(G)^{\perp}. \tag{1.14}$$

Visto que, $Fix(G)$ é um subespaço fechado de H, (ver Observação 1.1), então $Fix(G) \cap Fix(G)^{\perp} = \{0\}$. Assim, das expressões (1.13) e (1.14), concluímos:

$$\nabla I(u) \in Fix(G) \cap Fix(G)^{\perp} = \{0\}.$$

Com isto, $\nabla I(u) = 0$. Consequentemente,

$$I'(u) \cdot v = \langle \nabla I(u), v \rangle = 0, \quad \text{para todo } v \in H.$$

Portanto, $u$ é ponto crítico de $I$.

■

## 1.2 Identidade de Pohozaev com Peso

Nesta seção apresentaremos uma identidade muito utilizada no estudo de não-existência de soluções positivas para problemas elípticos. E que, conforme veremos na próxima seção, será aplicada a fim de garantir não-existência de solução para o problema de Dirichlet relativo a equação de Hénon. Em geral, não é difícil encontrar a identidade de Pohozaev na literatura sem a presença de um peso multiplicando a não-linearidade. Porém, baseado em um trabalho publicado em 1982 por Figueiredo, Lions e Nussbaum [8], apresentaremos tal identidade com a presença de um peso multiplicando a não-linearidade.

**Teorema 1.2** *Sejam $\Omega$ um domínio limitado com fronteira suave e $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfaz:*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = g(x, u(x)), & \textit{para todo} \quad x \in \Omega; \\ \quad u(x) = 0, & \textit{para todo} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

*$y \in \mathbb{R}^N$ é um vetor fixado e $\eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ no ponto $x$, então $u$ satisfaz a seguinte identidade*

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2[(x-y)\cdot\eta(x)]\,dx &= 2N\int_\Omega G(x,u)\,dx - (N-2)\int_\Omega g(x,u)u\,dx + \\ &\quad +2\sum_{i=1}^N \int_\Omega (x_i - y_i)G_{x_i}(x,u)\,dx, \end{aligned} \tag{1.16}$$

*onde, $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s g(x,t)dt$.*

**Demonstração.** Sendo $u$ uma solução do problema (1.15), deduzimos

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u[(x-y)\cdot\nabla u]dx &= \int_\Omega g(x,u(x))[(x-y)\cdot\nabla u]dx \\ &= \int_\Omega \left[ g(x,u(x)) \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left[(x_i - y_i) g(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] dx. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,u(x)) &= \left(\sum_{j=1}^N G_{x_j}(x,u(x))\right) + G_{x_{j+1}}(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= g(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^N G_{x_j}(x,u(x)). \end{aligned} \tag{1.18}$$

E, do Corolário C.2 (ver Apêndice C), segue que

$$\int_\Omega (x_i - y_i)\frac{\partial G}{\partial x_i}(x, u(x))\, dx = -\int_\Omega G(x, u(x))\, dx \tag{1.19}$$

As igualdades (1.17) , (1.18) e (1.19) acarretam em

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \Delta u[(x-y)\cdot\nabla u]dx &= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega (x_i - y_i)\left[\frac{\partial G}{\partial x_i}(x,u(x)) - \sum_{j=1}^{N} G_{x_j}(x,u(x))\right] dx \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\int_\Omega (x_i - y_i)\frac{\partial G}{\partial x_i}(x,u(x)) - \int_\Omega (x_i - y_i)\sum_{j=1}^{N} G_{x_j}(x,u(x))\right] dx \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega -G(x,u(x))\ dx - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega (x_i - y_i)\sum_{j=1}^{N} G_{x_j}(x,u(x))\ dx \\
&= -N\int_\Omega G(x,u(x))\ dx - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega (x_i - y_i)\sum_{j=1}^{N} G_{x_j}(x,u(x))\ dx. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Agora, calculemos o divergente do campo $[(x-y)\cdot\nabla u]\nabla u$.

$$\begin{aligned}
div[(x-y)\cdot\nabla u]\nabla u &= div\left([(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., [(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left([(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + ... + \frac{\partial}{\partial x_N}\left([(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}[(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial u}{\partial x_1} + [(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right] + ... \\
&\quad ... + \left[\frac{\partial}{\partial x_N}[(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial u}{\partial x_N} + [(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}[(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial}{\partial x_N}[(x-y)\cdot\nabla u]\frac{\partial u}{\partial x_N}\right] + \\
&\quad + [(x-y)\cdot\nabla u]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + ... + \frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&\quad + [(x-y)\cdot\nabla u]\Delta u \\
&= \left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right] + [(x-y)\cdot\nabla u]\Delta u \\
&= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\right) + \ [(x-y)\cdot\nabla u]\Delta u \\
&= [(x-y)\cdot\nabla u]\Delta u + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_k}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(x-y)\cdot\nabla u]\Delta u + |\nabla u|^2 + \sum_{i,k=1}^{N}(x_i-y_i)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_i}\\
&= [(x-y)\cdot\nabla u]\Delta u + |\nabla u|^2 + \sum_{i,k=1}^{N}(x_i-y_i)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\\
&= [(x-y)\cdot\nabla u]\Delta u + |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2. \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

Usando o Teorema do Divergente (ver Teorema C.19) juntamente com a igualdade (1.21), concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}[(x-y)\cdot\nabla u]\nabla u\cdot\eta(x)dx &= \int_{\Omega}\Delta u[(x-y)\cdot\nabla u]dx + \int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \; +\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2dx. \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

Agora, calculemos o divergente do campo $\frac{1}{2}|\nabla u|^2(x-y)$.

$$
\begin{aligned}
div\left[\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2(x-y)\right] &= div\left(\frac{x_1-y_1}{2}|\nabla u|^2,...,\frac{x_N-y_N}{2}|\nabla u|^2\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1-y_1}{2}|\nabla u|^2\right)+...+\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{x_N-y_N}{2}|\nabla u|^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{x_1-y_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}|\nabla u|^2\right)+...+\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{x_N-y_N}{2}\frac{\partial}{\partial x_N}|\nabla u|^2\right)\\
&= \frac{N}{2}|\nabla u|^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2. \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

Usando o Teorema do divergente juntamente com a identidade (1.23), acarreta

$$
\frac{N}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2dx=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2(x-y)\cdot\eta(x)\,dx. \quad (1.24)
$$

Das igualdades dadas em (1.22) e (1.24), segue

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}[(x-y)\cdot\nabla u]\nabla u\cdot\eta(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2(x-y)\cdot\eta(x)dx-\frac{N}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \; +\\
&\quad +\int_{\Omega}\Delta u[(x-y)\cdot\nabla u]dx+\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx.
\end{aligned}
$$

O que implica em

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}[(x-y)\cdot\nabla u][\nabla u\cdot\eta(x)]dx &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2(x-y)\cdot\eta(x)dx+\frac{2-N}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx \; +\\
&\quad +\int_{\Omega}\Delta u[(x-y)\cdot\nabla u]\,dx. \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, visto que $\nabla u(x)$ é paralelo a $\eta(x)$ para todo $x \in \Omega$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla u = \lambda\,\eta(x) \Longrightarrow \nabla u \cdot \eta(x) = \lambda.\eta(x) \cdot \eta(x) \Longrightarrow \nabla u \cdot \eta(x) = \lambda.|\eta(x)|^2$$
$$\Longrightarrow \nabla u \cdot \eta(x) = \lambda.1 \Longrightarrow \lambda = \nabla u \cdot \eta(x) \Longrightarrow \nabla u = (\nabla u \cdot \eta(x))\,\eta(x) \tag{1.26}$$
$$\Longrightarrow |\nabla u|^2 = |(\nabla u \cdot \eta(x))\,\eta(x)|^2 \Longrightarrow |\nabla u|^2 = (\nabla u \cdot \eta(x))^2. \tag{1.27}$$

Das expressões (1.26) e (1.27), resulta:

$$\begin{aligned}[(x-y)\cdot\nabla u](\nabla u\cdot\eta(x)) &= (x-y)\cdot[(\nabla u\cdot\eta(x))\,\eta(x)](\nabla u\cdot\eta(x))\\ &= [(x-y)\cdot\eta(x)](\nabla u\cdot\eta(x))^2\\ &= [(x-y)\cdot\eta(x)]|\nabla u|^2. \end{aligned}\tag{1.28}$$

Fazendo uso das igualdades (1.25) e (1.28), segue que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}[(x-y)\cdot\eta(x)]|\nabla u|^2 dx &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2[(x-y)\cdot\eta(x)]\,dx + \frac{2-N}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2 dx\ +\\ &+\int_\Omega \Delta u[(x-y)\cdot\nabla u]\,dx,\end{aligned}\tag{1.29}$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\partial\Omega}[(x-y)\cdot\eta(x)]|\nabla u|^2\,dx = 2\int_\Omega \Delta u[(x-y)\cdot\nabla u]\,dx + (2-N)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{1.30}$$

Tendo em vista as sentenças (1.20) e (1.30), concluímos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}[(x-y)\cdot\eta(x)]|\nabla u|^2\,dx &= 2N\int_\Omega G(x,u(x))\,dx + 2\sum_{i=1}^N\int_\Omega(x_i-y_i)\sum_{j=1}^N G_{x_j}(x,u(x))\,dx\\ &\quad -(N-2)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Por outro lado, da Fórmula de Integração por Partes (ver Corolário C.2), deduzimos

$$\int_\Omega (x_i-y_i)G_{x_j}(x,u(x))\,dx = 0$$

para todo $i \neq j$. De onde segue que

$$\sum_{i=1}^N\int_\Omega(x_i-y_i)\sum_{j=1}^N G_{x_j}(x,u(x))\,dx = \sum_{i=1}^N\int_\Omega(x_i-y_i)G_{x_j}(x,u(x))\,dx. \tag{1.32}$$

E desde que $u$ é solução do problema (1.15), então

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega g(x,u)u\ dx.$$

A identidade anterior, juntamente com as identidades (1.31) e (1.32), acarretam em

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2[(x-y)\cdot\eta(x)]\,dx &= 2N\int_\Omega G(x,u)dx - (N-2)\int_\Omega g(x,u)u\,dx + \\ &\quad +2\sum_{i=1}^N \int_\Omega (x_i-y_i)G_{x_i}(x,u)\,dx.\end{aligned}$$

Portanto, o Teorema 1.2 está demonstrado.

■

### 1.2.1 Aplicação

Nesta seção aplicaremos o Teorema 1.2 para provar um resultado de não-existência de solução para o problema de Dirichlet relativo a equação de Hénon, a saber

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\alpha u^{p-1}, & em \quad \Omega; \\ u > 0, & em \quad \Omega; \\ u = 0, & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.33}$$

onde $\Omega$ é a bola unitária do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, com $N > 2$, $\alpha \geq 0$ e $p > 2$.

**Teorema 1.3** *O problema (1.33) não tem solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ para $p \geq 2^* + \dfrac{2\alpha}{N-2}$.*

**Demonstração.** Suponha que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema (1.33). Então, pelo Teorema 1.2, temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2[x\cdot\eta(x)]\,dx &= 2N\int_\Omega G(x,u)\,dx - (N-2)\int_\Omega g(x,u)u\,dx + \\ &\quad +2\sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i G_{x_i}(x,u)\,dx,\end{aligned} \tag{1.34}$$

onde, $g(x,s) = |x|^\alpha s^{p-1}$ e $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s g(x,t)\,dt = \frac{|x|^\alpha s^p}{p}$.

**Afirmação 1.2**

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2[x\cdot\eta(x)]\,dx > 0.$$

De fato, para cada $x \in \partial\Omega$, temos $\eta(x) = x$, assim

$$x\cdot\eta(x) = |x|^2 = 1, \quad \text{para todo} \quad x \in \partial\Omega,$$

o que implica em

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 [x \cdot \eta(x)]\, dx = \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx \geq 0.$$

Suponha, por absurdo, que

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 [x \cdot \eta(x)]\, dx = 0.$$

A igualdade anterior aliada ao fato de que o $\nabla u$ é contínuo, acarreta em $\nabla u \equiv 0$ na $\partial\Omega$. Assim, usando o Teorema do Divergente e a hipótese de que $u$ uma solução do problema (1.33), obtemos

$$0 = \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \eta(x)\, dx = -\int_{\Omega} \Delta u\, dx = \int_{\Omega} |x|^{\alpha} u^{p-1}\, dx.$$

o que é um absurdo, visto que $u > 0$ em $\Omega$. Portanto a afirmação está provada.

Agora, note que

$$G_{x_i}(x, u) = \frac{1}{p} |x|^{\alpha - 2}\, x_i\, u^p. \tag{1.35}$$

Por outro lado, sendo $u$ uma solução do Problema 1.33, então

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_{\Omega} |x|^{\alpha} u^{p-1} v\, dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, fazendo $v = u$, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |x|^{\alpha} u^p\, dx.$$

A igualdade anterior juntamente com as expressões (1.34), (1.35) e a Afirmação 1.2, acarretam em

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{2N}{p} \int_{\Omega} |x|^{\alpha} u^p dx - (N-2) \int_{\Omega} |x|^{\alpha} u^p\, dx + \frac{2\alpha}{p} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |x|^{\alpha-2}\, x_i^2\, u^p dx \\ &= \left( \frac{2N}{p} - (N-2) \right) \int_{\Omega} |x|^{\alpha} u^p\, dx + \frac{2\alpha}{p} \int_{\Omega} |x|^{\alpha-2}\, |x|^2\, u^p\, dx \\ &= \left( \frac{2N + 2\alpha}{p} - (N-2) \right) \int_{\Omega} |x|^{\alpha} u^p\, dx. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\frac{2N + 2\alpha}{p} - (N-2) > 0,$$

ou equivalentemente,

$$p < \frac{2N + 2\alpha}{N - 2} = 2^* + \frac{2\alpha}{N - 2}.$$

Portanto, o teorema está demonstrado.

■

Na próxima seção estudaremos uma importante classe de operadores. Tal estudo será útil para garantir a continuidade de alguns operadores que surgirão no Capítulo 1 e no Capítulo 2.

## 1.3 Operador de Nemytskii

Denotemos o conjunto das funções mensuráveis por $\mathcal{M}$. Seja $\Omega$ um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, onde $N \geq 1$. Uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada ***função de Carathéodory*** quando goza das propriedades:

i) para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado, a função $x \mapsto f(x, s)$ é (Lebesgue) mensurável em $\Omega$;

ii) para quase todo $x \in \mathbb{R}$, a função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

**Proposição 1.2** *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é (Lebesgue) mensurável, então a função $x \mapsto f(x, u(x))$ é (Lebesgue) mensurável.*

**Demonstração.** Seja $u$ uma função mensurável, então pelo Teorema C.16 existe uma sequência $\{u_n\}$ de funções simples tal que

$$u_n(x) \to u(x), \quad q.t.p \text{ em } \Omega. \tag{1.36}$$

Como cada função $u_n$ é simples, podemos escrever

$$f(x, u_n(x)) = \sum_{j=1}^{K_N} f(x, a_j)\, \chi_{A_j}(x), \tag{1.37}$$

onde $A_j = \{x \in \Omega \ ; \ u_n(x) = a_j\}$. Desde que $f$ é uma função de Carathéodory, então $f(\cdot, a_j)$ é mensurável para cada $j \in \{1, \ldots K_N\}$, e visto que as funções $\chi_{A_j}$ são ménsuráveis, então $f(\cdot, a_j)\, \chi_{A_j}$ é mensurável. Logo, da igualdade (1.37), segue que $f(x, u_n(x))$ é mensurável. Por outro lado, usando o item ii) juntamente com a convergência dada em (1.36), obtemos

$$f(x, u_n(x)) \longrightarrow f(x, u(x)), \quad q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Desde que limite de funções mesuráveis ainda é uma função mensurável, concluímos que $f$ é mensurável.

■

Deste modo, para cada função de Carathéodory $f$, a Proposição 1.2 nos permite definir o operador

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}_f : \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ u & \longmapsto & \mathcal{N}_f u : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad x \longmapsto (\mathcal{N}_f u)(x) = f(x, u(x)), \end{array}$$

o qual denominamos de ***Operador de Nemytskii***.

**Teorema 1.4** *Suponha que existam $c, r > 0$, e uma função $b \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq q \leq +\infty$, tais que*

$$|f(x,s)| \leq c|s|^r + b(x), \quad \textit{para todo par} \ \ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.38}$$

*Então vale as seguintes assertivas:*

*i) o operador $\mathcal{N}_f : L^{qr}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ está bem definido;*

*ii) $\mathcal{N}_f$ é contínuo e leva conjunto limitado em conjunto limitado.*

**Demonstração.** Usando a estimativa (1.38), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x,u(x))|^q dx &\leq \int_\Omega |c|u(x)|^r + b(x)|^q dx \\ &\leq (2c)^q \int_\Omega |u(x)|^{rq} dx + 2^q \int_\Omega |b(x)|^q dx \\ &< +\infty. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Deste modo concluímos que $\mathcal{N}_f u \in L^q(\Omega)$ para todo $u \in L^{rq}(\Omega)$, com isto o item i) está demonstrado. Agora demonstraremos que $\mathcal{N}_f$ é contínuo. Para tanto, consideremos $\{u_n\} \subset L^{rq}(\Omega)$ e $u \in L^{rq}(\Omega)$ tais que

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ em } \ L^{rq}(\Omega).$$

Considere uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$. Pelo Teorema C.17, existe uma subsequência $\{u_{n_{j_k}}\} \subset \{u_{n_j}\}$ e $h \in L^{rq}(\Omega)$ tais que

$$u_{n_{j_k}}(x) \longrightarrow u(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega, \ \text{ quando } \ k \to +\infty; \tag{1.40}$$

$$|u_{n_{j_k}}(x)| \leq h(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega, \ \text{ para todo } \ k \in \Omega. \tag{1.41}$$

Usando as estimativas (1.38) e (1.41), resulta em

$$|f(x, u_{n_{j_k}}(x))| \leq c|h(x)|^r + b(x). \tag{1.42}$$

Desde que $h \in L^{rq}(\Omega)$ e $b \in L^q(\Omega)$, então $c|h(x)|^r + b(x) \in L^q(\Omega)$. Por outro lado, como, por hipótese, $f$ é uma função de Carathéodory, segue da convergência (1.40) que

$$f(x, u_{n_{j_K}}(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega, \quad \text{quando} \quad k \to +\infty. \tag{1.43}$$

O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, juntamente com a estimativa (1.42) e a convergência (1.43) acarretam em

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |f(x, u_{n_{j_k}}(x))|^q dx = \int_\Omega |f(x, u(x))|^q dx.$$

Da Proposição C.6 (ver apêndice C), concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f(x, u_n(x))|^q dx = \int_\Omega |f(x, u(x))|^q dx,$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{N}_f(u_n) \longrightarrow \mathcal{N}_f(u).$$

Portanto, o operador de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ é contínuo. Além disso, se $\|u\|_{L^{rq}(\Omega)} \leq M$, então pela estimativa (1.38), obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_f(u)\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_\Omega |f(x, u(x))|^q dx \\ &\leq (2c)^q \int_\Omega |u(x)|^{rq} dx + 2^q \int_\Omega |b(x)|^q dx \\ &\leq (2c)^q M^{rq} + 2^q \int_\Omega |b(x)|^q dx \\ &= \widetilde{M}. \end{aligned}$$

Com isto, $\mathcal{N}_f$ leva conjunto limitado em conjunto limitado. Com isto, o teorema está demonstrado.

■

# Capítulo 2

# O Problema de Dirichlet para Equação de Hénon

## 2.1 Introdução

Neste capítulo, baseados em um trabalho publicado em 1982, por Wei-Ming Ni [18], demonstraremos a existência de solução radial para o problema de Dirichlet relativo a Equação de Hénon, a saber

$$\begin{cases} -\Delta u &= |x|^{\alpha}u^{p-1}, & \text{em} \quad \Omega; \\ u &> 0, & \text{em} \quad \Omega; \\ u &= 0, & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega$ é a bola unitária do espaço euclidiando $\mathbb{R}^N$, com $N > 2$, $\alpha > 0$, $2 < p < 2^* + \dfrac{2\alpha}{N-2}$, e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. O ponto mais relevante neste estudo consiste no fato de que o peso $|x|^{\alpha}$, que multiplica a não-linearidade $u^{p-1}$, permite encontrarmos solução radial (isto é, solução no espaço $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ ) para o problema (2.1) com $p$ maior do que ou igual ao expoente crítico de Sobolev.

Quando consideramos $\alpha = 0$ a identidade de Pohozaev nos permite concluir que não há solução em $H^1_0(\Omega)$ para o Problema (2.1) se $p \geq 2^*$. Além disso, como podemos ver no Teorema 1.3, o problema (2.1) não possui solução para $p \geq 2^* + \dfrac{2\alpha}{N-2}$. A demonstração da existência de solução para o problema (2.1) consiste em aplicar o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz (1973) ao funcional energia associado ao problema (2.1), definido sobre o espaço $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$. Dividimos a demonstração em três etapas. Na primeira etapa estudamos um lema radial devido a Wei-Ming Ni (1982). Na segunda etapa estudamos um lema de compacidade também devido a Wei-Ming Ni (1982). Finalmente, na terceira etapa usamos o lema de compacidade para demonstrar que o funcional energia associado ao problema (2.1) satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha e a condição de Palais-Smale.

## 2.2 Lema Radial

Nesta seção demonstraremos um lema que será útil no decorrer de algumas demonstrações tanto neste capítulo, como no Capítulo 4.

**Lema 2.1** *Seja $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ com $u(1) = 0$. Então*

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} . \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}}{|x|^{\frac{N-2}{2}}},$$

*onde $\omega_N$ é a área da superfície da bola unitária em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.*

**Demonstração.** Desde que u é radial, segue que

$$u(x) = u(|x|), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Como, para cada $x \in S^{N-1}$, temos $|x| = 1$, então

$$u(x) = u(1) = 0, \text{ para todo } x \in S^{N-1}.$$

Assim, dado $x \in \Omega$, com $|x| = r$, temos

$$-u(x) = -u(|x|) = u(1) - u(r) = \int_r^1 u'(t)dt,$$

isto, juntamente com a desigualdade de Hölder (ver Teorema C.6, apêndice C), implica em

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_r^1 |u'(t)|dt = \int_r^1 |u'(t)|\, t^{\frac{N-1}{2}}\, t^{\frac{1-N}{2}} dt \\ &\leq \left( \int_r^1 |u'(t)|^2\, t^{N-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_r^1 t^{1-N} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_0^1 |u'(t)|^2\, t^{N-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2-N} + \frac{r^{2-N}}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \left( \int_0^1 |u'(t)|^2 \, t^{N-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{r^{2-N}}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Por outro lado, pela Proposição C.2 (ver apêndice C), temos:

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \omega_N \int_0^1 |u'(t)|^2 \, t^{N-1} dt. \tag{2.3}$$

Relacionando a desigualdade (2.2) com a igualdade (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \left( \frac{1}{\omega_N} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{r^{2-N}}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \cdot \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}}{|x|^{\frac{N-2}{2}}}. \end{aligned}$$

■

## 2.3 Lema de Compacidade

Nesta seção provaremos um lema que será útil para justificar a compacidade de um operador $\Upsilon$, a ser definido na próxima seção, com o propósito de mostrar que o funcional energia associado ao problema (2.1) satisfaz a condição (P.S).

**Lema 2.2** *O operador $T : H^1_{0,rad}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ definido por $T(u) = |x|^m u$ é compacto, desde que $p \in [1, m^*)$ com*

$$m^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2-2m} & , \textit{se } m < \frac{N-2}{2}; \\ +\infty & , \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

**Demonstração.** Pelo Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||x|^m u|^p dx &\leq \int_\Omega |x|^{mp} \left( \frac{1}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \cdot \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right)^p dx \\ &\leq \frac{\|\nabla u\|^p_{L^2(\Omega)}}{(\sqrt{\omega_N (N-2)})^p} \int_\Omega |x|^{(m - \frac{N-2}{2})p} dx \\ &= \frac{\|\nabla u\|^p_{L^2(\Omega)}}{(\sqrt{\omega_N (N-2)})^p} \left( \omega_N \int_0^1 r^{(m-\frac{N-2}{2})p} . r^{N-1} dx \right) \\ &= \frac{\omega_N \|\nabla u\|^p_{L^2(\Omega)}}{(\sqrt{\omega_N (N-2)})^p} \int_0^1 r^{(m-\frac{N-2}{2})p + N-1} dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por hipótese, vale um dos itens seguintes:
i) $m < \dfrac{N-2}{2}$, e $1 \leq p < \dfrac{2N}{N-2-2m}$;

ii) $m \geq \dfrac{N-2}{2}$ e $1 \leq p < \infty$.

Note que, em qualquer um dos casos referidos anteriormente, após uma manipulação algébrica, verifica-se que $(m - \frac{N-2}{2})p + N - 1 > -1$. Deste modo, a desigualdade (2.4), acarreta em

$$\begin{aligned} \|T(u)\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega ||x|^m u|^p dx &\leq \frac{\omega_N \|\nabla u\|^p_{L^2(\Omega)}}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^p} \left( \frac{1}{(m - \frac{N-2}{2})p + N} \right) \\ &= c_1 \|\nabla u\|^p_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $c_1 = \dfrac{\omega_N \left(\sqrt{\omega_N(N-2)}\right)^{-p}}{(m - \frac{N-2}{2})p + N}\cdot$ De onde Segue que $T(u) \in L^p(\Omega)$ e $\|T(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_1^{-p}\|u\|$. Portanto, $T$ é um operador contínuo.

Agora mostraremos que $T$ é compacto. Para tanto, considere $a \in (0,1)$. Usando a desigualdade de Hölder, deduzimos

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||x|^m u|^p dx &\leq \int_\Omega |x|^{mp}|u|^{p-a}|u|^a dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u| dx\right)^a \left(\int_\Omega |x|^{\frac{mp}{1-a}} |u|^{\frac{p-a}{1-a}} dx\right)^{1-a}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

De agora em diante dividiremos a demonstração em dois caso.

**Primeiro Caso:** $m < \dfrac{N-2}{2}$ *e* $1 \leq p < \dfrac{2N}{N-2-2m}\cdot$

Inicialmente provemos a seguinte afirmação:

**Afirmação 2.1** *Existe* $\overline{a} \in (0,1)$ *tal que,* $\overline{p} = \dfrac{p - \overline{a}}{1 - \overline{a}} < \dfrac{2N}{N-2-2\overline{m}}$, *onde* $\overline{m} = mp/(p - \overline{a}) < \dfrac{N-2}{2}$.

De fato, note que

$$\lim_{a \to 0} \frac{mp}{p-a} = m < \frac{N-2}{2}.$$

Assim, existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\frac{mp}{p-a} < \frac{N-2}{2}, \quad \text{para todo} \quad a \in (0, \delta). \tag{2.7}$$

Suponha, por absurdo, que

$$\frac{p-a}{1-a} \geq \frac{2N}{N-2-\frac{2mp}{p-a}}$$

para todo $a \in (0,\delta)$. Então, fazendo $a \to 0$, obtemos

$$p \geq \frac{2N}{N-2-2m},$$

o que é um absurdo. Logo, existe $\overline{a} \in (0,\delta)$ tal que

$$\frac{p-\overline{a}}{1-\overline{a}} < \frac{2N}{N-2-2\overline{m}},$$

onde $\overline{m} = \dfrac{mp}{p-\overline{a}} < \dfrac{N-2}{2}$. Portanto, a afirmação está provada.

Usando a afirmação anterior juntamente com a estimativa (2.5), obtemos

$$\int_\Omega ||x|^{\overline{m}} u|^{\overline{p}}\, dx \leq c_1 \|\nabla u\|^{\overline{p}}_{L^2(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Isto é,

$$\int_\Omega |x|^{\frac{mp}{1-\overline{a}}} |u|^{\frac{p-\overline{a}}{1-\overline{a}}}\, dx \leq c_1 \|\nabla u\|^{\frac{p-\overline{a}}{1-\overline{a}}}_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Relacionando as desigualdades (2.6) e (2.9), concluímos

$$\begin{aligned} \|T(u)\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega ||x|^m u|^p\, dx &\leq \left(\int_\Omega |u| dx\right)^{\overline{a}} \left(\int_\Omega |x|^{\frac{mp}{1-\overline{a}}} |u|^{\frac{p-\overline{a}}{1-\overline{a}}} dx\right)^{1-\overline{a}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |u|\, dx\right)^{\overline{a}} \left(c_1 \|\nabla u\|^{\frac{p-\overline{a}}{1-\overline{a}}}_{L^2(\Omega)}\right)^{1-\overline{a}} \\ &= c_2 \|u\|^{\overline{a}}_{L^1(\Omega)} \|u\|^{p-\overline{a}}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $c_2 = c_1^{1-\overline{a}}$. Usando o Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema C.13, apêndice C), temos a imersão compacta

$$H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega). \tag{2.11}$$

Assim, se $(u_n)$ uma sequência limitada em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. Pelo Teorema C.17 existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, tal que

$$u_{n_j} \longrightarrow u, \text{ em } L^1(\Omega) \text{ quando } j \to +\infty. \tag{2.12}$$

Usando a desigualdade (2.10) e convergência (2.12), deduzimos

$$\begin{aligned} \|Tu_{n_j} - Tu\|_{L^p(\Omega)} &= \|T(u_{n_j} - u)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq c_2^{\frac{1}{p}} \|u_{n_j} - u\|^{\frac{\overline{a}}{p}}_{L^1(\Omega)} \|u_{n_j} - u\|^{\frac{p-\overline{a}}{p}} \\ &\leq c_2^{\frac{1}{p}} \left(\|u_{n_j}\| + \|u\|\right)^{\frac{p-\overline{a}}{p}} \|u_{n_j} - u\|^{\frac{\overline{a}}{p}}_{L^1(\Omega)} \\ &\leq c_2^{\frac{1}{p}} \left(M + \|u\|\right)^{\frac{p-\overline{a}}{p}} \|u_{n_j} - u\|^{\frac{\overline{a}}{p}}_{L^1(\Omega)} \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $M$ é uma constante positiva que limita a sequência $(u_n)$ em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. Portanto, $T$ é um operador compacto.

**Segundo Caso:** $m \geq \dfrac{N-2}{2}$ **e** $1 \leq p < +\infty$.

Considere $p_a = \dfrac{p-a}{1-a}$, e $m_a = \dfrac{mp}{p-a}$, onde $a \in (0,1)$. Observe que,

- $m_a = \dfrac{mp}{p-a} > \dfrac{mp}{p} = m \geq \dfrac{N-2}{2} \Longrightarrow m_a > \dfrac{N-2}{2}$; e
- $p_a = \dfrac{p-a}{1-a} \geq 1$.

Como $m_a > \dfrac{N-2}{2}$ e $p_a \geq 1$, então usando a desigualdade (2.5), acarreta:

$$\int_\Omega ||x|^{m_a} u|^{p_a} dx \;\; \leq \;\; c_1 \|\nabla u\|^{p_a}_{L^2(\Omega)},$$

o que implica em

$$\int_\Omega |x|^{\frac{m-a}{1-a}} |u|^{\frac{p-a}{1-a}} dx \;\; \leq \;\; c_1 \|\nabla u\|^{\frac{p-a}{1-a}}_{L^2(\Omega)}. \tag{2.14}$$

Das desigualdades (2.6) e (2.14), resulta

$$\begin{aligned} \|T(u)\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega ||x|^m u|^p \, dx \;\; &\leq \;\; \left( \int_\Omega |u| \, dx \right)^a \left( c_1 \|\nabla u\|^{\frac{p-a}{1-a}}_{L^2(\Omega)} \right)^{1-a} \\ &= \;\; c^{1-a} \|u\|^a_{L^1(\Omega)} \|u\|^{p-a}. \end{aligned}$$

Usando a imersão compacta dada em (2.11) e procedendo de modo análogo ao primeiro caso, concluímos que o operador $T$ é compacto. Portanto o lema está demonstrado.

■

## 2.4 Existência de Solução Radial para Equação de Hénon

O objetivo desta seção é provar a existência de solução para o problema (2.1). Para tanto, inicialmente mostraremos que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\alpha |u|^{p-1}, & \text{em} \quad \Omega; \\ \quad u = 0, & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

onde $\alpha > 0$ e $2 < p < \dfrac{2N}{N-2} + \dfrac{2\alpha}{N-2}$ possui uma solução $u$ no espaço $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. Usaremos a teoria de regularização (conforme veremos na Seção 2.5) para garantirmos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$, em seguida aplicaremos o Princípio do Máximo Clássico a fim de concluir que $u$ é positiva em $\Omega$. Com isto, teremos provado que $u$ é uma solução para o problema (2.1).

**Teorema 2.1** *O problema (2.1), possui solução no espaço* $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$.

**Demonstração.** Inicialmente, a fim de facilitar as contas, consideremos $\tau = p - 1$. A demonstração deste teorema consiste em aplicar o Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema C.1, Apêndice C) ao funcional

$$\begin{array}{rccl} I: & H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & I(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|^2 - \dfrac{1}{\tau+1}\displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u \, dx. \end{array} \tag{2.16}$$

Este funcional está bem definido em virtude do Lema 2.1 com $I \in C^1(H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega), \mathbb{R})$ (ver Proposição B.1, apêndice B) e

$$I'(u).v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau v \, dx, \tag{2.17}$$

para todo $v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$.

Inicialmente, mostremos que $I$ tem a **Geometria do Passo da Montanha**. Isto é, $I$ satisfaz as hipóteses i) e ii) do Teorema C.1 (ver apêndice C). Com efeito, usando o Lema 2.1 (ver estimava (B.1), apêndice B), deduzimos

$$\left| \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u \, dx \right| \ \leq \ c\|u\|^{\tau+1},$$

ou equivalentemente,

$$\left| \frac{\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u \, dx}{\|u\|^2} \right| \ \leq \ c\|u\|^{\tau-1}.$$

De onde segue que

$$\lim_{\|u\| \to 0} \left| \frac{\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u \, dx}{\|u\|^2} \right| = 0.$$

Assim, pela definição de limite, existe $\delta > 0$, tal que

$$\left| \frac{\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u \, dx}{\|u\|^2} \right| < \frac{\tau+1}{4}, \quad \forall\, u \in B(0,\delta) \backslash \{0\} \subset H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

O que implica em

$$-\frac{\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u \, dx}{\|u\|^2} > -\frac{\tau+1}{4}, \quad \forall\, u \in B(0,\delta) \backslash \{0\} \subset H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $\dfrac{\|u\|^2}{\tau+1}$ e em seguida somando $\dfrac{1}{2}\|u\|^2$, obtemos

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{\tau+1}\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u\, dx > \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^2,$$

para todo $u \in B(0,\delta)\backslash\{0\} \subset H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$. O que é equivalente a

$$I(u) > \frac{1}{4}\|u\|^2, \quad \forall\, u \in B(0,\delta)\backslash\{0\} \subset H^1_{0,\text{rad}}(\Omega). \tag{2.18}$$

Considere $\rho = \dfrac{\delta}{2} > 0$ e $\beta = \dfrac{\rho^2}{16} > 0$. Então pela sentença (2.18), temos

$$I(u) > \beta > 0, \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|u\| = \rho. \tag{2.19}$$

Agora, fixe uma função positiva $u_0 \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$. Seja $r > 0$, então

$$\begin{aligned} I(ru_0) &= \frac{r^2}{2}\|u_0\|^2 - \frac{r^{\tau+1}}{\tau+1}\int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^{\tau+1} dx \\ &= Ar^2 - Br^{\tau+1}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $A = \dfrac{1}{2}\|u_0\|^2$ e $B = \dfrac{1}{\tau+1}\displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^{\tau+1} dx$. Desde que $\tau + 1 > 2$, segue, da igualdade (2.20), que

$$I(ru_0) \longrightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad r \to +\infty,$$

assim, existe $r > 0$ tal que, fazendo $e = ru_0$, tem-se

$$I(e) < 0 \quad \text{e} \quad \|e\| > 2\rho. \tag{2.21}$$

Das sentenças (2.19) e (2.21), concluímos que o funcional $I$ tem a Geometria do Passo da Montanha.

Agora, mostraremos que $I$ satisfaz a condição de Palais-Smale, (ver Definição C.1, Apêndice C). Para isto, seja $\{u_n\} \subset H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ tal que

i) $|I(u_n)| \leq M$ para algum $M > 0$;

ii)$I'(u_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Pelo item ii), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|I'(u_n).u_n|}{\|u_n\|} \leq \sup_{\substack{H^1_{0,rad}(\Omega) \\ v\neq 0}} \frac{|I'(u_n).v|}{\|v\|} = \|I'(u_n)\| < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

o que implica em

$$\left| \|u_n\|^2 - \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u_n dx \right| < \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_0. \tag{2.22}$$

Por outro lado, pelo item i), temos

$$\left|\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{\tau+1}\int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u_n \, dx\right| \leq M \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= 2\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{\tau+1}\int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u_n \, dx\right) + \frac{2}{\tau+1}\int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u_n \, dx \\ &\leq 2M + \frac{2}{\tau+1}\int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u_n \, dx. \end{aligned} \tag{2.23}$$

As estimativas (2.22) e (2.23) acarretam em

$$\|u_n\|^2 \leq 2M + \frac{2}{\tau+1}(\|u_n\|^2 + \|u_n\|),$$

ou equivalentemente,

$$\left(1 - \frac{2}{\tau+1}\right)\|u_n\|^2 \leq 2M + \frac{2}{\tau+1}\|u_n\|. \tag{2.24}$$

Portanto, visto que $\tau > 1$, segue que $1 - \dfrac{2}{\tau+1} > 0$, daí $\{u_n\}$ é limitada, pois caso contrário existiria uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ tal que $\|u_{n_j}\| \longrightarrow \infty$, o que contradiria a estimativa (2.24).

Agora, mostraremos que $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. Seja $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual de $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ e considere o operador

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-1}: \ H^{-1}(\Omega) &\rightarrow H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \\ \varphi &\mapsto (-\Delta)^{-1}(\varphi) = w, \end{aligned}$$

onde $\langle w, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \varphi(v)$ para todo $v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. O operador $(-\Delta)^{-1}$ está bem definido em virtude do Teorema de Lax-Milgran, (ver Teorema C.9, apêndice C), aplicado à forma bilinear $a : H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \times H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $a(u,v) = \langle u, v\rangle$. Observe que, se $(-\Delta)^{-1}(\varphi) = w$, então

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{v \in H^1_{0,\mathrm{rad}} \\ v \neq 0}} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|} \geq \frac{\varphi(w)}{\|w\|} = \frac{\langle w, w\rangle}{\|w\|} = \|w\| = \|(-\Delta)^{-1}(\varphi)\|,$$

de onde segue que

$$\|(-\Delta)^{-1}(\varphi)\|_{H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Assim, $(-\Delta)^{-1}$ é um operador contínuo.

Agora, para cada $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, seja $\varphi_u : H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi_u(v) = \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau \, v \, dx.$$

$\varphi$ é claramente linear, além disso, pelo Lema 2.1, deduzimos

$$\begin{aligned}
|\varphi_u(v)| &\leq \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau \, |v| \, dx \\
&\leq \int_\Omega |x|^\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \frac{\|u\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right)^\tau \left( \frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \frac{\|v\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right) dx \\
&\leq C \|u\|^\tau \|v\| \int_\Omega |x|^{\alpha - (\frac{N-2}{2})(\tau+1)} \, dx, \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

onde $C = \left( \frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \right)^{\tau+1}$. Desde que $\alpha - \left( \dfrac{N-2}{2} \right)(\tau+1) + N - 1 > -1$, segue que

$$\int_\Omega |x|^{\alpha - (\frac{N-2}{2})(\tau+1)} \, dx = \int_0^1 r^{\alpha - (\frac{N-2}{2})(\tau+1)} \, r^{N-1} \, dx < \infty. \qquad (2.26)$$

De (2.25) e (2.26), obtemos

$$|\varphi_u(v)| \leq \widetilde{C} \|u\|^\tau \|v\|, \quad \text{para todo} \;\; v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

Daí, $\varphi_u \in H^{-1}(\Omega)$. Definamos o operador

$$\begin{aligned}
\Upsilon : \; H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) &\to H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \\
u \quad &\mapsto \Upsilon(u) = (-\Delta)^{-1}(\varphi_u).
\end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon(u), v \rangle &= \langle (-\Delta)^{-1}(\varphi_u), v \rangle = \varphi_u(v) \\
&= \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau v \, dx, \quad \text{para todo} \;\; v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega). \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Usando as igualdades (2.17) e (2.27), obtemos

$$\begin{aligned}
I'(u_n).v &= \langle u_n, v \rangle - \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau v \, dx \\
&= \langle u_n, v \rangle - \langle \Upsilon(u_n), v \rangle \\
&= \langle u_n - \Upsilon(u_n), v \rangle
\end{aligned}$$

para todo $v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, para $v = u_n - \Upsilon(u_n)$, temos

$$\langle u_n - \Upsilon(u_n), u_n - \Upsilon(u_n) \rangle = I'(u_n) \cdot (u_n - \Upsilon(u_n)).$$

O que acarreta

$$\|u_n - \Upsilon(u_n)\|^2 \leq \|I'(u_n)\|\|u_n - \Upsilon(u_n)\|. \tag{2.28}$$

Visto que, pelo item ii) anterior, temos que $\|I'(u_n)\| \to 0$ quando $n \to \infty$, segue, da estimativa (2.28), que:

$$\|u_n - \Upsilon(u_n)\| \longrightarrow 0, \quad \text{se} \quad n \to \infty. \tag{2.29}$$

**Afirmação 2.2** $\Upsilon$ *é um operador compacto.*

De fato, podemos decompor $\Upsilon_1$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccccccccccc} \Upsilon: & H^1_{0,\mathrm{rad}} & \xrightarrow{T_1} & L^{\frac{2N\tau}{N+2}} & \xrightarrow{T_2} & L^{\frac{2N\tau}{N+2}} & \xrightarrow{T_3} & L^{\frac{2N}{N+2}} & \xrightarrow{T_4} & H^{-1}(\Omega) & \xrightarrow{T_5} & H^1_{0,rad} \\ & u & \longmapsto & |x|^{\frac{\alpha}{\tau}}u & \longmapsto & |x|^{\frac{\alpha}{\tau}}|u| & \longmapsto & (|x|^{\frac{\alpha}{\tau}}|u|)^\tau & \longmapsto & \varphi_u & \longmapsto & (-\Delta)^{-1}(\varphi_u). \end{array}$$

Assim, temos $\Upsilon = T_5 \circ T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Deste modo, a fim de provar que $\Upsilon$ é compacto, provaremos que $T_1$ é compacto e que $T_2$ ,$T_3$, $T_4$ e $T_5$ são contínuos. Então vejamos:

• **$T_1$ é compacto**

De fato, temos que $T_1 : H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \to L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega)$ é definido por $T_1(v) = |x|^{\frac{\alpha}{\tau}}v$. Se $\dfrac{\alpha}{\tau} \geq \dfrac{N-2}{2}$, desde que $\dfrac{2N\tau}{N+2} > 1$, então a compacidade de $T_1$ segue imediatamente do Lema 2.2. Por outro lado, se $\dfrac{\alpha}{\tau} < \dfrac{N-2}{2}$, como, por hipótese, $1 < \tau < \dfrac{N+2+2\alpha}{N-2}$, então

$$\begin{aligned} &(N-2)\tau < N+2+2\alpha \Longrightarrow N-2 < \frac{N+2}{\tau} + \frac{2\alpha}{\tau} \Longrightarrow N-2-\frac{2\alpha}{\tau} < \frac{N+2}{\tau} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{N-2-\frac{2\alpha}{\tau}} > \frac{\tau}{N+2} \Longrightarrow \frac{2N\tau}{N+2} < \frac{2N}{N-2-\frac{2\alpha}{\tau}}. \end{aligned}$$

assim, aplicando o Lema 2.2 obtemos a compacidade do operador $T_1$.

• **$T_2$ é contínuo**

De fato, temos que $T_2 : L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega) \to L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega)$ é definido por $T_2(v) = |v|$. Daí,

$$\|T_2(v)\|_{L^{\frac{2N\tau}{N+2}}} = \|v\|_{L^{\frac{2N\tau}{N+2}}}.$$

Portanto, $T_2$ é contínuo.

• **$T_3$ é contínuo**

Note que o operador $T_3 : L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega) \to L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ definido por

$$T(v) = v^\tau, \tag{2.30}$$

é um operador de Nemytskii (ver Capítulo 1, Seção 1.3), cuja continuidade segue imediatamente do Teorema 1.4 quando fazemos $r = \tau$.

• $T_4$ **é contínuo**

De fato, o operador $T_4 : L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é definido por $\langle T_4(\omega), v\rangle = \displaystyle\int_\Omega \omega\, v\, dx$. Sejam $\omega \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, e $v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder, com expoentes conjugados $\dfrac{2N}{N+2}$ e $\dfrac{2N}{N-2}$, e pela imersão contínua $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, deduzimos

$$\begin{aligned}
|\langle T_4(\omega), v\rangle| &\leq \int_\Omega |\omega|\,|v|\, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\omega|^{\frac{2N}{N+2}}\, dx\right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int_\Omega |v|^{\frac{2N}{N-2}}\, dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} \\
&= \|\omega\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\leq C\|\omega\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \|v\|.
\end{aligned}$$

O que implica em

$$\frac{|\langle T_4(\omega), v\rangle|}{\|v\|} \leq C\|\omega\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}.$$

De onde segue que

$$\|T(\omega)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\|\omega\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \text{ para todo } \omega \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega),.$$

Portanto, o operador $T_4$ é contínuo.

• $T_5$ **é contínuo**

A continuidade do operador $T_5 : H^{-1}(\Omega) \to H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ definido por

$$T_5(\varphi) = (-\Delta)^{-1}(\varphi),$$

segue imediatamente da continuidade do operador $(-\Delta)^{-1}$ a qual foi provada na p. 41.

Portanto, a afirmação está demonstrada.

Desde que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada e, pela Afirmação 2.2, $\Upsilon$ é um operador compacto, existe uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $w \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ tal que

$$\Upsilon(u_{n_j}) \longrightarrow w \text{ em } H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \text{ quando } j \to \infty. \tag{2.31}$$

Assim, as convergências dadas em (2.29) e (2.31), acarretam em

$$\begin{aligned}
\|u_{n_j} - w\| &\leq \|u_{n_j} - \Upsilon(u_{n_j})\| + \|\Upsilon(u_{n_j}) - w\| \\
&\longrightarrow 0, \text{ quando } j \to \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, o funcional $I$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Com isto, o funcional $I$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Logo, existe uma função $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ que é ponto crítico não trivial de $I$. Assim, $u$ é uma solução para o problema (2.32). Usando a teoria de regularização, ( ver Teorema 2.1 da próxima seção), concluímos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Assim, pelo Princípio do Máximo Clássico ( ver Teorema C.3, apêndice C), concluímos que $u > 0$ em $\Omega$. Portanto, $u$ é uma solução para o problema (2.1).

■

## 2.5 Regularidade da solução

Nesta seção mostraremos que as soluções do problema (2.1) obtidas na última seção são de classe $C^2(\overline{\Omega})$. Este será o conteúdo do teorema a seguir.

**Teorema 2.1** *Se $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= |x|^\alpha |u|^{p-1}, \quad em \quad \Omega; \\ u &= 0, \quad na \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.32}$$

*onde $\Omega$ é a bola unitária do $\mathbb{R}^N$, $N \leq 3$, $\alpha > 0$ e $1 < p-1 < \dfrac{N+2}{N-2} + \dfrac{2\alpha}{N-2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$.*

**Demonstração.** Seja $\tau = p-1$. Definamos a função $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por $g(x,s) = |x|^\alpha |u|^\tau$. Então, $g$ é uma função de Carathéodory e, além disso,

$$\begin{aligned} |g(x,u)| &= |x|^\alpha |u|^\tau = |x|^\alpha |u|^{\tau - \frac{N+2}{N-2}} |u|^{\frac{N+2}{N-2}} \\ &= A(x)|u|^{\frac{N+2}{N-2}}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

onde $A(x) = |x|^\alpha |u|^{\tau - \frac{N+2}{N-2}}$. Usando o Lema 2.1, deduzimos

$$\begin{aligned} |A(x)| &= |x|^\alpha |u|^{\tau - \frac{N+2}{N-2}} \leq |x|^\alpha C \frac{\|u\|^{\tau - \frac{N+2}{N-2}}}{|x|^{[\tau - \frac{N+2}{N-2}](\frac{N-2}{2})}} \\ &= C_1 |x|^{\alpha - [\tau - \frac{N+2}{N-2}](\frac{N-2}{2})}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $1 < \tau < \dfrac{N+2}{N-2} + \dfrac{2\alpha}{N-2}$ então $\alpha - \left[\tau - \dfrac{N+2}{N-2}\right]\left(\dfrac{N-2}{2}\right) > 0$, daí $|x|^{\alpha - [\tau - \frac{N+2}{N-2}](\frac{N-2}{2})} \in L^\infty(\Omega)$ e portanto existe $M > 0$ tal que $|A(x)| \leq M$ q.t.p em

$\Omega$. Com isto, a desigualdade (2.33) implica em

$$\begin{aligned} |g(x,u)| &\leq M|u|^{\frac{N-2}{N+2}} = M|u|^{\frac{4}{N-2}}|u| \\ &= a(x)|u|, \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $a(x) = M|u(x)|^{\frac{4}{N-2}}$ para todo $\Omega$. Mostremos que $a \in L^{\frac{N}{2}}$, com efeito,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |a|^{\frac{N}{2}}\,dx &= \int_\Omega (M|u(x)|^{\frac{4}{N-2}})^{\frac{N}{2}}\,dx = M^{\frac{N}{2}} \int_\Omega |u(x)|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx \\ &= M^{\frac{N}{2}} \|u\|_{L^{2^*}}^{\frac{N-2}{2N}} < +\infty. \end{aligned} \tag{2.35}$$

As estimativas (2.34) e (2.35) acarretam em

$$|g(x,u)| \leq a(x)(1+u(x)), \quad \text{com} \quad a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega).$$

Usando o Teorema C.21 (ver apêndice C), obtemos

$$u \in L^r(\Omega) \quad \text{para todo} \quad 1 \leq r < +\infty,$$

Portanto, segue do argumento bootstrap que $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

$\blacksquare$

# Capítulo 3

# Solução Não-Radial para a Equação de Hénon

## 3.1 Introdução

Considere o problema de Dirichlet relativo a equação de Hénon, a seguir

$$\begin{cases} -\Delta u &= |x|^{\alpha} u^{p-1}, \quad \text{em } \Omega; \\ u &> 0, \qquad\qquad \text{em } \Omega; \\ u &= 0, \qquad\qquad \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\alpha > 0$, $2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $\Omega$ é a bola unitária do $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$.

No Capítulo 2, mostramos que o problema (3.1) possui solução radial. Deste modo, surge a seguinte indagação:

*Será que existe solução não-radial para o problema (3.1)?*

Baseados em um trabalho de Smets, Su & Willem publicado em 2002 [19], mostraremos que, apesar do domínio $\Omega$ ser radial, existe Solução não-radial para o problema (3.1) quando $\alpha$ é suficientemente grande.

Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é denominada ***Ground State*** para equação de Hénon se realiza o seguinte ínfimo

$$S_{\alpha,p} := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} |x|^{\alpha} |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}. \tag{3.2}$$

Nesse capítulo estudaremos questões relacionadas a existência de solução de energia mínima (Ground states) radial para equação (3.1). Na Seção 3.2 mostraremos a existência de Ground States para equação (3.1), em seguida aplicaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Teorema C.2, apêndice C) para mostrarmos que uma Ground State, a menos de um múltiplo escalar, é uma solução do problema (2.1). Ainda na mesma seção, mostraremos que $S_{\alpha,p}^{\mathrm{rad}}$ é atingido por uma função de $H_{0,\mathrm{rad}}^{1}(\Omega)$, onde

$$S_{\alpha,p}^{\mathrm{rad}} := \inf_{\substack{u\in H_{0,\mathrm{rad}}^{1}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}dx}{\left(\int_{\Omega}|x|^{\alpha}|u|^{p}dx\right)^{\frac{2}{p}}}, \tag{3.3}$$

e usaremos o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais (ver Teorema 1.1, capítulo 1) para concluirmos que tal função também é uma solução do problema (2.1). Com isto, surge a seguinte questão:

*Existem Ground States não-radiais para a equação de Hénon?*

*Nesta dissertação daremos a seguinte resposta à questão anterior: Existe* $\alpha_0 > 0$ *tal que para todo* $\alpha \geq \alpha_0$ *as soluções Ground States para problema (3.1) são não-radiais.*

Para tanto, provaremos, na Seção 3.3, uma condição necessária para que uma Ground State seja radial. Na seção 3.4 provaremos o principal resultado deste capítulo, o qual garante existêcia de solução (Ground State) não-radial para para o problema (3.1) quando $\alpha$ é suficientemente grande.

## 3.2 Existência de Ground States para Equação de Hénon

Nesta seção mostraremos a existência Ground States para equação de Hénon e que as mesmas constituem-se, a menos de um múltiplo escalar, em soluções para o problema (3.1). Além disso, provaremos que $S_{\alpha,p}^{\mathrm{rad}}$ é atingido por uma função radial, a qual também será, a menos de um múltiplo escalar, uma solução para o problema (3.1).

**Proposição 3.1** *$S_{\alpha,p}$ é atingido para todos $\alpha \geq 0$ e $2 < p < 2^*$.*

**Demonstração.** Sejam

$$\begin{array}{rccc} J: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & J(u) = \|u\|^2 \end{array}$$

e

$$M = \{u \in H_0^1(\Omega)\,;\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx = 1\}.$$

Desde que $J \geq 0$ em $H_0^1(\Omega)$, em particular, $J \geq 0$ em $M$. Assim, pelo Postulado de Dedekind da análise real na reta, existe $I_\infty \in \mathbb{R}$, tal que

$$I_\infty = \inf_{u \in M} J(u).$$

Pela definição de ínfimo, existe $\{u_n\} \subset M$ tal que

$$J(u_n) \to I_\infty \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{3.4}$$

A convergência anterior acarreta

$$\|u_n\| \to \sqrt{I_\infty} \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{3.5}$$

De onde segue que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Desde que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, então, pelo Teorema de Kakutani (ver Teorema C.15), existem $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Além disso,

$$\liminf_{n_j \to \infty} \|u_{n_j}\|^2 \geq \|u_0\|^2. \tag{3.7}$$

Das expressões (3.3) e (3.7), obtemos

$$I_\infty \leq J(u_0) = \|u_0\|^2 \leq \liminf_{n_j \to \infty} \|u_{n_j}\|^2 = I_\infty.$$

Logo, $J(u_0) = I_\infty$.

**Afirmação 3.1** $I_\infty > 0$.

De fato, suponha, por absurdo, $I_\infty = 0$. De (3.4), temos

$$J(u_n) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

O que implica em

$$u_n \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Usando a convergência anterior, juntamente com a imersão contínua (ver Teorema C.13)

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq 2^*, \tag{3.8}$$

obtemos,

$$u_n \to 0 \;\; \text{em} \;\; L^p(\Omega).$$

Daí,

$$\left| \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^p \, dx \right| \leq \int_\Omega |u_n|^p \, dx \longrightarrow 0 \Longrightarrow \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^p \, dx \longrightarrow 0,$$

para todo $\alpha \geq 0$ e $2 < p < 2^*$. Com isto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_\Omega |x|^\alpha |u_{n_0}|^p \, dx < 1.$$

Todavia, a desigualdade anterior contradiz o fato de $u_{n_0}$ pertencer a $M$. Deste modo, concluímos que $I_\infty > 0$.

Portanto, visto que $I_\infty > 0$ e $J(u_0) = I_\infty$, segue que $u_0 \neq 0$.

**Afirmação 3.2** *$u_0 \in M$.*

De fato, tendo em vista a convergência dada em (3.6) e usando a imersão compacta dada pelo item i) do Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema C.13, apêndice C), concluímos que

$$u_{n_j} \to u_0 \;\; \text{em} \;\; L^p(\Omega), \;\; \text{para todo} \;\; 2 < p < 2^*.$$

Com isto, o Teorema C.17 nos fornece uma subsequência $\{u_{n_{j_k}}\} \subset \{u_{n_j}\}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

i) $|x|^\alpha u_{n_{j_k}}(x) \to |x|^\alpha u_0(x)$ q.t.p. em $\Omega$;

ii) $\left| |x|^\alpha u_{n_{j_k}}(x) \right| \leq |x|^\alpha h(x)$ q.t.p. em $\Omega$,

onde $|x|^\alpha h \in L^p(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema C.18, apêndice C),

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\Omega |x|^\alpha |u_{n_{j_k}}|^p \, dx = \int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^p \, dx.$$

Tendo em vista que, $\displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha |u_{n_{j_k}}|^p\,dx = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^p\,dx = 1$. Portanto, $u_0 \in M$. O que implica em,

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u). \tag{3.9}$$

Por outro lado, pela Proposição C.7, temos

$$\inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega)\\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}} = \inf_{u \in M} J(u). \tag{3.10}$$

Assim, as igualdades (3.9) e (3.10) acarretam

$$J(u_0) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega)\\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Portanto, $S_{\alpha,p}$ é atingido.

■

A seguir, mostraremos que uma Ground State, a menos de um múltiplo escalar, é uma solução para o problema de Dirichlet relativo a equação de Hénon

**Teorema 3.1** *Uma Ground- State é, a menos de um múltiplo escalar, uma solução do problema (3.1).*

**Demonstração.** Consideremos as funções $J, F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidas por

$$J(u) = \|u\|^2 \quad e \quad F(u) = \int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx - 1.$$

O Funcional $F$ está bem definido em virtude das imersões contínuas dadas em (3.8). Além disso, $J, F \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$J'(u) \cdot v = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega), \text{ e} \tag{3.11}$$

$$F'(u) \cdot v = p\int_\Omega |x|^\alpha |u|^{p-2} uv\,dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.12}$$

Considere

$$M = F^{-1}(\{0\}) = \{u \in H_0^1(\Omega)\,;\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx = 1\}.$$

Assim, $J'(u) \cdot u = 2\,\|u\|^2 \neq 0$ para todo $u \in M$, o implica em

$$J'(u) \neq 0, \quad \text{para todo} \quad u \in M. \tag{3.13}$$

Por outro lado, usando a Afirmação 3.2 e as Proposições (3.1) e (C.7), obtemos

$$J(u_0) = \min_{u \in M} J(u). \tag{3.14}$$

Além disso, temos (ver Proposição C.10, apêndice C)

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx &= \int_\Omega |\nabla |u_0||^2 \, dx, \quad e \\ \int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^p \, dx &= \int_\Omega |x|^\alpha \, ||u_0||^p \; dx. \end{aligned}$$

Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, $u_0 \geq 0$.

As expressões (3.13) e (3.14) nos permite aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Teorema C.2), o qual nos fornece um número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $J'(u_0) = \lambda \cdot F'(u_0)$. Ou equivalentemente,

$$2 \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx = \lambda \, p \int_\Omega |x|^\alpha u_0^{p-1} v \, dx. \tag{3.15}$$

Em particular, fazendo $v = u_0$, obtemos: $\lambda = \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx > 0$. Sejam $\beta > 0$ e $u = \beta u_0$. Então,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \frac{\beta}{2} \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx \\ &= \frac{\beta \lambda p}{2} \int_\Omega |x|^\alpha u_0^{p-1} v \, dx, \\ &= \frac{\beta \lambda p}{2 \beta^{p-1}} \int_\Omega |x|^\alpha (\beta u_0)^{p-1} v \, dx, \\ &= \frac{\beta^{2-p} \lambda p}{2} \int_\Omega |x|^\alpha |u|^{p-2} u v \, dx, \quad \forall \; v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $\beta$ de modo que $\dfrac{\beta^{2-p}\lambda p}{2} = 1$, concluímos que $u$ é solução do problema (2.1). Temos ainda,

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\beta^2 \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx}{\left(\beta^p \int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u_0|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}} = S_{\alpha,p} \; .$$

Logo, $u$ é uma Ground State, e portanto o teorema está demonstrado.

■

Desde que $\Omega$ é invariante por rotações, é razoável considerar

$$S_{\alpha,p}^{\text{rad}} := \inf_{\substack{u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}. \tag{3.16}$$

Dizemos que $u$ é uma ***função minimizante*** para $S_{\alpha,p}^{\text{rad}}$, se

$$S_{\alpha,p}^{\text{rad}} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

A proposição seguinte garante a existência de funções minimizantes para $S_{\alpha,p}^{\text{rad}}$ em $H_{0,\text{rad}}^1(\Omega)$.

**Proposição 3.2** *$S_{\alpha,p}^{\text{rad}}$ é atingido em $H_{0,\text{rad}}^1(\Omega)$.*

**Demonstração.** A demonstração é análoga a que foi feita na Proposição 3.1. Pois, como o espaço $H_{0,\text{rad}}^1(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)$, então o mesmo herda a reflexividade e as imersões contínuas e compactas do espaço $H_0^1(\Omega)$.

■

Agora, aplicaremos o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais, conforme Teorema 1.1, a fim de mostrar que uma função minimizante para $S_{\alpha,p}^{\text{rad}}$ é, a menos de rescaling, uma solução para o Problema de Dirichlet relativo a equação de Hénon.

**Teorema 3.2** *Se $u \in H_{0,\text{rad}}^1(\Omega)$ é uma função minimizante para $S_{\alpha,p}^{\text{rad}}$ , existe $\beta > 0$ tal que $\beta u$ é solução do problema (3.1).*

**Demonstração.** Usando a Proposição 3.2, e procedendo de modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.1, garantimos a existência de $\beta > 0$ tal que $w = \beta u_0$ é uma solução positiva, em $H_{0,\text{rad}}^1(\Omega)$, para o problema (2.1). Considere o funcional

$$\begin{array}{rccl} I: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & I(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|^2 - \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p \, dx \end{array} \tag{3.17}$$

e a ação do grupo $SO(N)$ sobre $H_0^1(\Omega)$, a saber

$$\begin{array}{rcccccccc} \rho: & SO(N) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) & & & & & \\ & (g,u) & \longmapsto & \rho(g,u) & = & g \cdot u: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & & & x & \longmapsto & (g \cdot u)(x) = u(g(x)). \end{array}$$

Como $H_{0,\text{rad}}^1(\Omega) = Fix_\rho(SO(N))$, então $w$ é ponto crítico de $I$ restrito ao $Fix_\rho(SO(N))$. Por outro lado, desde que,

1. $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert;
2. $\rho$ é uma ação isométrica;

3. $I$ é $\rho$-invariante.

Então, pelo Princípio de Criticalidade de Palais (ver Teorema 1.1), concluímos que $w$ é ponto crítico de $I$ em $H_0^1(\Omega)$.

■

## 3.3 Uma Condição Necessária para Ground State Radial

O objetivo desta seção consiste em estabelecer um resultado que fornece uma condição necessária para que uma Ground State seja radial. Tal condição está expressa no próximo teorema.

Sejam $2 < p < 2^*$, $\rho \in L^q(\Omega)$, com $q = \dfrac{2^*}{2^* - p}$ e $\rho$ positiva em $\Omega$. Definamos as funções: $W, X, Z : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$X(u) = \left(\int_\Omega \rho(x)|u|^p\, dx\right)^{\frac{2}{p}}, \quad Z(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \;\text{ e }\; W(u) = \frac{Z(u)}{X(u)}.$$

**Teorema 3.3** *Se $\rho$ é uma função radial e $u$ é uma função minimizante para $W$, então*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \frac{N-1}{p-2}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}dx. \tag{3.18}$$

**Demonstração.** Suponha, sem perda de generalidade, que

$$\int_\Omega \rho(x)|u(x)|^p dx = 1. \tag{3.19}$$

Para cada $h \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ fixado, defina

$$g(t) = W(u+th) = \frac{r(t)}{s(t)},$$

onde $r(t) := Z(u+th)$ e $s(t) := X(u+th)$. Desde que $u$ é uma função minimizante para $W$, segue que

$$g'(0) = 0 \;\; e \;\; g''(0) > 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} r'(t) &= z'(u+th).h = 2\int_\Omega \nabla(u+th)\cdot\nabla h dx = 2\langle u+th, h\rangle \\ &= 2(\langle u, h\rangle + t\|h\|^2), \end{aligned} \tag{3.20}$$

e

$$r''(t) = 2\|h\|^2 = 2\int_\Omega |\nabla h|^2 dx. \tag{3.21}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
s'(t) &= X'(u+th).h = \frac{2}{p}\left(\int_\Omega \rho|u+th|^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}\left(p\int_\Omega \rho|u+th|^{p-2}(u+th).hdx\right)\\
&= 2\left(\int_\Omega \rho|u+th|^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}\int_\Omega \rho|u+th|^{p-2}(u+th).hdx
\end{aligned} \tag{3.22}$$

e

$$\begin{aligned}
s''(t) &= \left[\frac{2(p-2)}{p}\left(\int_\Omega \rho|u+th|^p dx\right)^{\frac{2-2p}{p}} p\int_\Omega \rho|u+th|^{p-2}(u+th).hdx\right].\\
&\quad .\int_\Omega \rho|u+th|^{p-2}(u+th).hdx + 2\left(\int_\Omega \rho|u+th|^p dx\right)^{\frac{2-2p}{p}}(p-1).\\
&\quad .\int_\Omega \rho|u+th|^{p-2}h^2 dx\\
&= 2(p-2)\left(\int_\Omega \rho|u+th|^p dx\right)^{\frac{2-2p}{p}}\left(\int_\Omega \rho|u+th|^{p-2}(u+th).h\ dx\right)^2 +\\
&\quad +2\left(\int_\Omega \rho|u+th|^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}\left[(p-1)\int_\Omega \rho|u+th|^{p-2}h^2\ dx\right].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Das expressões (3.20), (3.21) , (3.22) e (3.23) obtemos

$$\begin{cases}
r(0) &= Z(u)\\
r'(0) &= 2\langle u,h\rangle\\
r''(0) &= 2\|h\|^2\\
s(0) &= 1\\
s'(0) &= 2\int_\Omega \rho|u|^{p-2}u.h\ dx\\
s''(0) &= 2\left[(2-p)\left(\int_\Omega \rho|u|^{p-2}u.h\ dx\right)^2 + (p-1)\int_\Omega \rho|u|^{p-2}h^2 dx\right].
\end{cases} \tag{3.24}$$

Agora, note que

$$g'(t) = \frac{r'(t)s(t) - r(t)s'(t)}{[s(t)]^2}, \tag{3.25}$$

implica em (por questões de estética omitiremos o "t"no segundo membro da igualdade à seguir)

$$g''(t) = \frac{(r''s + r's' - r's' - rs'')s^2 - (r's - rs')2ss'}{s^4},$$

ou ainda,

$$g''(t) = \frac{(r''s - rs'')s^2 - 2(r's - rs')ss'}{s^4}, \tag{3.26}$$

Visto que $g'(0) = 0$, segue da igualdade (3.25) que

$$r'(0)s(0) - r(0)s'(0) = 0. \tag{3.27}$$

As igualdades (3.26) e (3.27) acarretam

$$g''(0) = \frac{r''(0)s(0) - r(0)s''(0)}{s^2(0)}. \tag{3.28}$$

Tendo em vista as expressões dadas em (3.24) e (3.28), e sendo $g''(0) \geq 0$, deduzimos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{2\|h\|^2.1 - \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) s''(0)}{1} \\ &= 2\|h\|^2 - 2\left[(2-p)\left(\int_\Omega \rho|u|^{p-2}u.h\ dx\right)^2 + (p-1)\int_\Omega \rho|u|^{p-2}h^2 dx\right]\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \left[(2-p)\left(\int_\Omega \rho|u|^{p-2}u.h\ dx\right)^2 + (p-1)\int_\Omega \rho|u|^{p-2}h^2 dx\right] \leq \int_\Omega |\nabla h|^2 dx. \tag{3.29}$$

Seja $h \in H_0^1(\Omega)$ uma função da seguinte forma

$$h(x) = u(r)f(\sigma),$$

onde, $r = |x|$ e $f$ é uma função suave definida na esfera $S^{N-1}$, com média igual a zero, (isto é, $\int_{S^{N-1}} f(\sigma)\, d\sigma = 0$). Usando a Proposição C.3, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho(x)|u|^{p-2}u.h\, dx &= \int_\Omega \rho(x)|u|^p f\ dx = \frac{1}{\omega_N}\left(\int_\Omega \rho(x)|u|^p\ dx\right)\left(\int_{S^{N-1}} f(\sigma)\ d\sigma\right) \\ &= \frac{1}{\omega_N}\cdot 1 \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho(x)|u|^{p-2}h^2 dx &= \int_\Omega \rho(x)|u|^p f^2(\sigma)\ dx = \frac{1}{\omega_N}\left(\int_\Omega \rho(x)|u|^p\ dx\right)\left(\int_{S^{N-1}} f^2(\sigma)\ d\sigma\right) \\ &= \frac{1}{\omega_N}\cdot 1 \cdot \int_{S^{N-1}} f^2(\sigma)\ d\sigma \\ &= \frac{1}{\omega_N}\int_{S^{N-1}} f^2(\sigma)\ d\sigma. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Por outro lado, pela Proposição C.5, temos

$$|\nabla h|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 f^2 + \frac{1}{r^2} u^2 |\nabla_\sigma f|^2. \tag{3.32}$$

Com isto, as estimativas, (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32), acarretam

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \left[(p-2).0 + \frac{p-1}{\omega_N} \int_{S^{N-1}} f^2 d\sigma\right] &\leq \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 f^2(\sigma)\, dx + \int_\Omega \frac{1}{r^2} u^2 |\nabla_\sigma f|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\omega_N} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \int_{S^{N-1}} f^2 d\sigma + \frac{1}{\omega_N} \int_\Omega \frac{1}{|x|^2} u^2 dx \int_{S^{N-1}} |\nabla_\sigma f|^2 d\sigma.\end{aligned}$$

O que implica em

$$(p-2) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \int_{S^{N-1}} f^2 d\sigma \leq \int_\Omega \frac{1}{|x|^2} u^2 dx \int_{S^{N-1}} |\nabla_\sigma f|^2 d\sigma,$$

ou equivalentemente,

$$(p-2) \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega \frac{1}{|x|^2} u^2 dx} \leq \frac{\int_{S^{N-1}} |\nabla_\sigma f|^2 d\sigma}{\int_{S^{N-1}} f^2 d\sigma}. \tag{3.33}$$

Mas, pela Proposição C.5, temos

$$\inf_{\substack{f \in H^1(S^{N-1}) \\ \int_{S^{N-1}} f = 0}} \frac{\int_{S^{N-1}} |\nabla_\sigma f|^2 d\sigma}{\int_{S^{N-1}} f^2 d\sigma} = N - 1.$$

Assim, a igualdade anterior, juntamente com a desigualdade (3.33), implicam em

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \frac{N-1}{p-2} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx.$$

Portanto o teorema está demonstrado.

■

## 3.4 Solução não-radial para Equação de Hénon

Nesta seção, provaremos a existência de solução Ground State não-radial para equação de Hénon quando $\alpha$ é suficientemente grande. Antes de enunciamos o principal resultado desta seção, o qual também é o principal resultado deste capítulo, necessitaremos de um resultado auxiliar que será dado em forma de proposição.

A seguir provaremos um lema que será de grande utilidade na demonstração da próxima proposição. A demonstração deste lema é um tanto longa, e portanto exigirá do leitor um pouco de paciência.

Para cada $\alpha \geq 0$ seja $u_\alpha \in H_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ uma função minimizante positiva para $S^{\mathrm{rad}}_{\alpha,p}$.

**Lema 3.1** *Para todo* $0 < R < 1$,

$$\int_{B(0,R)} |\nabla u_\alpha|^2 dx \longrightarrow 0, \quad \textit{quando} \quad \alpha \to \infty.$$

**Demonstração.** Desde que $u_\alpha$ é uma função minimizante positiva para o quociente

$$S^{\mathrm{rad}}_{\alpha,p} := \inf_{\substack{u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)\\ u \neq 0}} \frac{\int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u^p dx\right)^{\frac{2}{p}}},$$

então, pelo Teorema 3.2, existe $\lambda > 0$ tal que:

$$\left\{\begin{array}{rcccc} -\Delta u_\alpha & = & \lambda |x|^\alpha u_\alpha^{p-1}, & \text{em} & B(0,1); \\ u_\alpha & > & 0, & \text{em} & B(0,1); \\ u_\alpha & = & 0, & \text{na} & \partial B(0,1). \end{array}\right. \tag{3.34}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_\alpha|^2 dx = 1. \tag{3.35}$$

Desde que $u_\alpha$ é solução do problema (3.34), então

$$\int_{B(0,1)} \nabla u_\alpha \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^{p-1} v dx, \quad \forall \; v \in H^1_0(\Omega).$$

Em particular, para $v = u_\alpha$, temos

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_\alpha|^2 dx = \lambda \int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx. \tag{3.36}$$

Das igualdades (3.35) e (3.36), resulta

$$\lambda = \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u^p dx\right)^{-1}. \tag{3.37}$$

Seja $0 < r < 1$, segue de (3.34) e (3.37) que

$$-\Delta u_\alpha \;=\; \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u^p dx\right)^{-1} |x|^\alpha u_\alpha^{p-1}, \quad \text{em} \;\; B(0,r). \tag{3.38}$$

Multiplicando a equação (3.38) por $u_\alpha$ e, em seguida, integrando sobre a $B(0,r)$, acarreta

$$\int_{B(0,r)} -\Delta u_\alpha \cdot u_\alpha dx \;=\; \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u^p dx\right)^{-1} \int_{B(0,r)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx. \tag{3.39}$$

Usando a Identidade de Green e (3.39), deduzimos

$$\int_{B(0,r)} |\nabla u_\alpha|^2 dx = \int_{\partial B(0,r)} u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \eta} dx + \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1} \int_{B(0,r)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx. \quad (3.40)$$

Sendo $u_\alpha$ decrescente com respeito a $|x|$, segue que

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \eta} \leq 0, \quad \text{na} \quad B(0,r).$$

Desde que, $u_\alpha > 0$ na bola $B(0,r)$ e $\frac{\partial u_\alpha}{\partial \eta} \leq 0$ na bola $B(0,r)$, segue que

$$\int_{\partial B(0,r)} u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \eta} dx \leq 0. \quad (3.41)$$

Relacionando a igualdade (3.40) com a desigualdade (3.41), obtemos

$$\int_{B(0,r)} |\nabla u_\alpha|^2 dx \leq \frac{\int_{B(0,r)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx}. \quad (3.42)$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $2R^{k-1} < \varepsilon$. Definamos $v_\alpha(|x|) := u_\alpha(|x|^\beta)$, onde $\beta = 1 + k/(\alpha + N - k)$.

**Afirmação 3.3**

$$W(v_\alpha)^{-\frac{p}{2}} = \beta^{-1-\frac{p}{2}} \frac{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-k} |u_\alpha|^p dx}{\left(\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)}{\alpha+N}} |\nabla u_\alpha|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}}},$$

*onde, $W$ foi definido na p. 53.*

De fato, note que

$$W(v_\alpha) = \frac{\int_{B(0,1)} |\nabla v_\alpha|^2 dx}{\left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha |v_\alpha|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}. \quad (3.43)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} |x|^\alpha v_\alpha^p dx &= \omega_N \int_0^1 r^\alpha v_\alpha(r)^p r^{N-1} dr \\ &= \omega_N \int_0^1 r^\alpha u_\alpha(r^\beta)^p r^{N-1} dr. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $r = s^{\frac{1}{\beta}}$, usando do Teorema de Mudança de Variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} |x|^\alpha v_\alpha^p dx &= \omega_N \int_0^1 s^{\frac{\alpha}{\beta}} u_\alpha(s)^p s^{\frac{N-1}{\beta}} \left(\frac{1}{\beta} s^{\frac{1}{\beta}-1}\right) ds \\ &= \frac{\omega_N}{\beta} \int_0^1 s^{\frac{\alpha+N}{\beta}-N} u_\alpha(s)^p s^{N-1} ds \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{B(0,1)} |x|^{\frac{\alpha+N}{\beta}-N} u_\alpha^p dx. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Observe que

$$\beta = \frac{\alpha + N}{\alpha + N - k} \Longrightarrow \frac{\alpha + N}{\beta} = \alpha + N - k \Longrightarrow \frac{\alpha + N}{\beta} - N = \alpha - k. \tag{3.45}$$

As igualdades (3.44) e (3.45), acarretam

$$\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha} v_{\alpha}^{p} dx = \frac{1}{\beta} \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha - k} u_{\alpha}^{p} dx. \tag{3.46}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} |\nabla v|^2 dx &= \omega_N \int_0^1 r^{N-1} (v_\alpha')^2(r) dr \\
&= \omega_N \int_0^1 r^{N-1} (\beta r^{\beta - 1} u_\alpha'(r^\beta))^2 dr \\
&= \beta^2 \omega_N \int_0^1 r^{N-1+2(\beta-1)} (u_\alpha')^2(r^\beta) dr \\
&= \beta^2 \omega_N \int_0^1 s^{\frac{N-1+2(\beta-1)}{\beta}} (u_\alpha')^2(s) \left( \frac{1}{\beta} s^{\frac{1}{\beta} - 1} \right) ds \\
&= \beta \omega_N \int_0^1 s^{\frac{N+2(\beta-1)}{\beta} - N} s^{N-1} (u_\alpha')^2(s) ds \\
&= \beta \int_{B(0,1)} |x|^{\frac{N+2(\beta-1)}{\beta} - N} |\nabla u_\alpha|^2 dx. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
&\beta = \frac{\alpha + N}{\alpha + N - k} \Longrightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + N - k}{\alpha + N} \Longrightarrow \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{k}{\alpha + N} \Longrightarrow \\
&\frac{N-2}{\beta} = N - 2 - \frac{k(N-2)}{\alpha + N} \Longrightarrow \frac{N-2}{\beta} + 2 = N - \frac{k(N-2)}{\alpha + N} \Longrightarrow \\
&\frac{N - 2 + 2\beta}{\beta} = N - \frac{k(N-2)}{\alpha + N} \Longrightarrow \frac{N - 2 + 2\beta}{\beta} - N = -\frac{k(N-2)}{\alpha + N}. \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

Por (3.47) e (3.48), concluímos que

$$\int_{B(0,1)} |\nabla v|^2 dx = \beta \int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)}{\alpha + N}} |\nabla u_\alpha|^2 dx. \tag{3.49}$$

Tendo em vista as igualdades (3.43), (3.46) e (3.49), obtemos

$$W(v_\alpha) = \frac{\beta \int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)}{\alpha+N}} |\nabla u_\alpha|^2 dx}{\left( \frac{1}{\beta} \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha - k} u_\alpha^p dx \right)^{\frac{2}{p}}},$$

o que implica em

$$W(v_\alpha)^{-\frac{p}{2}} = \beta^{-1-\frac{p}{2}} \frac{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha - k} u_\alpha^p dx}{\left( \int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)}{\alpha+N}} |\nabla u_\alpha|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}}.$$

Com isto, a Afirmação 3.3 está provada.

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{p}{2}$ e $\frac{p}{p-2}$, deduzimos

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)}{\alpha+N}} |\nabla u_\alpha|^2 dx &= \int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)}{\alpha+N}} |\nabla u_\alpha|^{\frac{4}{p}} |\nabla u_\alpha|^{2-\frac{4}{p}} dx \\
&\leq \left[\int_{B(0,1)} \left(|x|^{-\frac{k(N-2)}{\alpha+N}} |\nabla u_\alpha|^{\frac{4}{p}}\right)^{\frac{p}{2}} dx\right]^{\frac{2}{p}} \left[\int_{B(0,1)} \left(|\nabla u_\alpha|^{2-\frac{4}{p}}\right)^{\frac{p}{p-2}} dx\right]^{\frac{p-2}{p}} \\
&= \left(\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)p}{2(\alpha+N)}} |\nabla u_\alpha|^2 dx\right)^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\left(\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)}{\alpha+N}} |\nabla u_\alpha|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} \leq \int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)p}{2(\alpha+N)}} |\nabla u_\alpha|^2 dx. \tag{3.50}$$

A Afirmação 3.3 juntamente com a estimativa (3.50) acarreta em

$$W(v_\alpha)^{-\frac{p}{2}} \geq \beta^{-1-\frac{p}{2}} \frac{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-k} |u_\alpha|^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{k(N-2)p}{2(\alpha+N)}} |\nabla u_\alpha|^2 dx}. \tag{3.51}$$

Agora, definamos a seguinte função

$$g(s) := \begin{cases} 1, & \text{se } s \leq 1; \\ s^{-\frac{1}{\gamma}}, & \text{se } s \geq 1, \end{cases}$$

onde $\gamma := -\frac{k(N-2)p}{2(\alpha+N)}$. Com isto, temos válida a seguinte afirmação:

**Afirmação 3.4**

$$\int_0^1 r^{-\gamma} u'_\alpha(r)^2 r^{N-1} dr = \int_0^\infty \left[\int_0^{g(s)} u'_\alpha(r)^2 r^{N-1} dr\right] ds.$$

De fato,

$$\int_0^\infty \left[\int_0^{g(s)} u'_\alpha(r)^2 r^{N-1} dr\right] ds = \int_0^1 \left[\int_0^1 u'_\alpha(r)^2 r^{N-1} dr\right] ds + \int_1^\infty \left[\int_0^{s^{-\frac{1}{\gamma}}} u'_\alpha(r)^2 r^{N-1} dr\right] ds. \tag{3.52}$$

Fazendo a mudança de variável $s = t^{-\gamma}$, e usando o Teorema de Mudança de Variável, acarreta

$$\int_1^\infty \left[\int_0^{s^{-\frac{1}{\gamma}}} u'_\alpha(r)^2 r^{N-1} dr\right] ds = \int_0^1 \left[\int_0^t u'_\alpha(r)^2 r^{N-1} dr\right] (\gamma t^{-\gamma-1}) dt. \tag{3.53}$$

Pela fórmula de integração por partes, seque que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\int_0^t u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr\right](\gamma t^{-\gamma-1}) dt &= \lim_{\xi\to 0}\left(\int_0^t u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr\right)(-t^{-\gamma})\Big|_{t=\xi}^{t=1} - \\
&\quad - \int_0^1 (-t^{-\gamma}) u'(t)^2 t^{N-1} dt \\
&= -\int_0^1 u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr + \int_{B(0,1)} |x|^{-\gamma}|\nabla u_\alpha|^2 dx + \\
&\quad + \lim_{\xi\to 0}\left(\int_0^\xi u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr\right)(-\xi^{-\gamma}).
\end{aligned}
$$

Note que, para $\xi > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\left|-\xi^{-\gamma}\int_0^\xi u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr\right| &\leq \xi^{-\gamma}\int_0^\xi u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr \\
&\leq \xi^{-\gamma}\int_0^\xi u_\alpha'(r)^2 \xi^{N-1} dr \\
&= \xi^{N-1-\gamma}\int_0^\xi u_\alpha'(r)^2 dr.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left|-\xi^{-\gamma}\int_0^\xi u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr\right| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \xi \to 0^+,
$$

o que implica em

$$
\int_0^1 \left[\int_0^t u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr\right](\gamma t^{-\gamma-1}) dt = -\int_0^1 u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr + \int_{B(0,1)} |x|^{-\gamma}|\nabla u_\alpha|^2 dx. \tag{3.54}
$$

Das expressões (3.52), (3.53) e (3.54), obtemos

$$
\int_0^\infty \left[\int_0^{g(s)} u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} d\right] ds = \int_0^1 r^{-\gamma} u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr.
$$

Assim, a Afirmação 3.4 está provada. Por outro lado, da estimativa (3.42) segue imediatamente que

$$
\int_{B(0,g(s))} |\nabla u_\alpha|^2 dx \leq \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1} \int_{B(0,g(s))} |x|^\alpha u_\alpha^p dx
$$

ou ainda,

$$
\int_0^{g(s)} u_\alpha'(r)^2 r^{N-1} dr \leq \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1} \int_0^{g(s)} r^\alpha u_\alpha(r)^p r^{N-1} dr,
$$

o que implica em

$$\int_0^\infty \left[\int_0^{g(s)} u'_\alpha(r)^2 r^{N-1} dr\right] ds \leq \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1} \int_0^\infty \left[\int_0^{g(s)} r^\alpha u_\alpha(r)^p r^{N-1} dr\right] ds. \tag{3.55}$$

A Afirmação 3.4 juntamente com (3.55), acarreta

$$\frac{1}{\omega_N} \int_{B(0,1)} |x|^{-\gamma} |\nabla u_\alpha|^2 dx \leq \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1} \int_0^\infty \left[\int_0^{g(s)} r^\alpha u_\alpha(r)^p r^{N-1} dr\right] ds. \tag{3.56}$$

Por outro lado, de modo análogo ao que foi feito na demonstração da Afirmação 3.4, prova-se que

$$\int_0^\infty \left[\int_0^{g(s)} r^\alpha u_\alpha(r)^p r^{N-1} dr\right] ds = \int_0^1 r^{\alpha-\gamma} u_\alpha(r)^p r^{N-1} dr. \tag{3.57}$$

Dessa forma, as expressões dadas em (3.56) e (3.57), nos fornece

$$\int_{B(0,1)} |x|^{-\gamma} |\nabla u_\alpha|^2 dx \leq \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1} \left(\omega_N \int_0^1 r^{\alpha-\gamma} u_\alpha(r)^p r^{N-1} dr\right),$$

ou equivalentemente,

$$\int_{B(0,1)} |x|^{-\gamma} |\nabla u_\alpha|^2 dx \leq \left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1} \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma} u_\alpha^p dx. \tag{3.58}$$

Sendo $u_\alpha$ uma função minimizante para $S_{\alpha,p}^{\mathrm{rad}}$ então $W(v_\alpha) \geq W(u_\alpha)$, daí $W(v_\alpha)^{-\frac{p}{2}} \leq W(u_\alpha)^{-\frac{p}{2}}$. Com isto, de posse das estimativas (3.51) e (3.58) , deduzimos

$$\begin{aligned} \beta^{-1-\frac{p}{2}} \cdot \frac{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-k} |u_\alpha|^p dx}{\left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1} \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma} u_\alpha^p dx} &\leq \left[\frac{\int_{B(0,1)} |\nabla u_\alpha|^2 dx}{\left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}\right]^{-\frac{p}{2}} \\ &= \frac{1}{\left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha u_\alpha^p dx\right)^{-1}}, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\frac{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-k} |u_\alpha|^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma} u_\alpha^p dx} \leq \beta^{1+\frac{p}{2}}. \tag{3.59}$$

Agora, note

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-k}|u_\alpha|^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx} &\geq \frac{\int_{B(0,R)} |x|^{\alpha-k}|u_\alpha|^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx} \\
&= \frac{\int_{B(0,R)} |x|^{\alpha-\gamma}|x|^{\gamma-k}|u_\alpha|^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx} \\
&\geq \frac{\int_{B(0,R)} |x|^{\alpha-\gamma}R^{\gamma-k}|u_\alpha|^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx} \\
&= R^{\gamma-k}\cdot\frac{\int_{B(0,R)} |x|^{\alpha-\gamma}|u_\alpha|^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}. \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

De (3.59) e (3.60), resulta em

$$\frac{\int_{B(0,R)} |x|^{\alpha-\gamma}|u_\alpha|^p dx}{\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx} \leq R^{k-\gamma}\beta^{1+\frac{p}{2}}. \qquad (3.61)$$

Considere o conjunto onde $A(R,1) = \{x \in \mathbb{R}^N; R < |x| < 1\}$. A conclusão da demonstração do Lema 3.1 segue das seguintes assertivas

$$i)\ \ 2\int_{B(0,R)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx - \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \geq$$
$$\geq \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \left(\int_{A(R,1)} (|x|^\alpha - |x|^{\alpha-\gamma})u_\alpha^p\ dx\right);$$

$$ii)\ \ \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \int_{A(R,1)} (|x|^\alpha - |x|^{\alpha-\gamma})u_\alpha^p dx = o\left(\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx\right),$$

quando $\alpha \to 0$.

Inicialmente demonstraremos a assertiva i). Para tanto, observemos que $\alpha - \gamma \leq \alpha$ implica em $|x|^{\alpha-\gamma} \geq |x|^\alpha$ para todo $x \in B(0,1)$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \left(\int_{A(R,1)} (|x|^\alpha - |x|^{\alpha-\gamma})u_\alpha^p\ dx\right) = \\
&= \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \int_{A(R,1)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx - \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \int_{A(R,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx \\
&= \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \int_{A(R,1)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx - \\
&- \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \left(\int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx - \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx\right) \\
&= \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \int_{A(R,1)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx - \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx + \\
&+ \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha}u_\alpha^p dx \int_{B(0,R)} |x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx
\end{aligned}$$

$$\leq 2\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx-\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx.$$

Portanto i) está demonstrado. Agora provemos ii). Com efeito, note que

$$\left|\frac{\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx\int_{A(R,1)}(|x|^{\alpha}-|x|^{\alpha-\gamma})u_\alpha^p dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}\right|\leq\frac{\int_{A(R,1)}||x|^{\alpha}-|x|^{\alpha-\gamma}|u_\alpha^p dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}.\qquad(3.62)$$

Agora, para cada $x\in A(R,1)$, defina $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, por $f(t)=|x|^{\alpha-t}$. Com isto, $f'(t)=-|x|^{\alpha-t}\ln|x|$. Usando o Teorema do Valor Médio da análise real, asseguramos a existência de $\theta\in(0,\gamma)$ tal que

$$f(\gamma)-f(0)=f'(\theta)(\gamma-0),$$

o que implica em

$$|f(\gamma)-f(0)|=\gamma|f'(\theta)|,$$

ou seja

$$\begin{aligned}||x|^{\alpha-\gamma}-|x|^{\alpha}| &= \gamma\left|-|x|^{\alpha-\theta}\ln|x|\right|\\ &= \gamma|x|^{\alpha-\theta}\left|\ln|x|\right|\\ &< \gamma|x|^{\alpha-\gamma}\left|\ln|R|\right|.\end{aligned}\qquad(3.63)$$

Desde que $\gamma\to 0$ quando $\alpha\to+\infty$ e vale as estimativas (3.62) e (3.63) então

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx\int_{A(R,1)}(|x|^{\alpha}-|x|^{\alpha-\gamma})u_\alpha^p dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}\right| &\leq \frac{\gamma\left|\ln|R|\right|\int_{A(R,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}\\ &\leq \gamma\left|\ln|R|\right|\\ &\longrightarrow 0\ \text{ quando }\ \alpha\to 0.\end{aligned}\qquad(3.64)$$

Dessa forma a assertiva ii) está provada. De posse das assertivas i) e ii), deduzimos

$$\frac{2\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx-\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}\geq o(1),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{2\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_\alpha^p dx}-\frac{\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_\alpha^p dx}\geq o(1),$$

ou ainda,

$$\frac{\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_{\alpha}^{p}dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_{\alpha}^{p}dx}+o(1) \quad \leq \quad \frac{2\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha-\gamma}u_{\alpha}^{p}dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha-\gamma}u_{\alpha}^{p}dx}. \tag{3.65}$$

Usando as estimativas (3.61), (3.65) e o fato de que $2R^{k-\gamma} < 2R^{k-1} < \varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_{\alpha}^{p}dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_{\alpha}^{p}dx}+o(1) &\leq 2R^{k-\gamma}\beta^{1+\frac{p}{2}} \\ &\leq \beta^{1+\frac{p}{2}}\cdot\varepsilon. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $\alpha \to 0$, temos $\beta^{1+\frac{p}{2}} \to 1$. Donde segue que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_{\alpha}^{p}dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_{\alpha}^{p}dx} \leq \varepsilon.$$

Desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\frac{\int_{B(0,R)}|x|^{\alpha}u_{\alpha}^{p}dx}{\int_{B(0,1)}|x|^{\alpha}u_{\alpha}^{p}dx} \longrightarrow 0.$$

Portanto, da desigualdade (3.42) e da convergência anterior segue a demonstração do lema.

■

Agora, utilizaremos o lema que acabamos de demonstrar para provarmos uma proposição que será fundamental na demonstração do principal resultado deste capítulo.

**Proposição 3.3**

$$\int_{B(0,1)}\frac{u_{\alpha}^{2}}{|x|^{2}}\,dx \longrightarrow 0, \quad se \;\; \alpha \to +\infty. \tag{3.66}$$

**Demonstração.** Seja $\varepsilon > 0$. Pela Proposição C.9 (ver apêndice C), existe $0 < R < 1$ independente de $\alpha$ tal que $u_{\alpha}(R) < \varepsilon$. Note que

$$\int_{B(0,1)}\frac{u_{\alpha}^{2}}{|x|^{2}}\,dx = \int_{B(0,R)}\frac{u_{\alpha}^{2}}{|x|^{2}}\,dx + \int_{A(R,1)}\frac{u_{\alpha}^{2}}{|x|^{2}}\,dx,$$

onde $A(R,1) = \{x \in \mathbb{R}^N; R < |x| < 1\}$. Seja $\widetilde{u}_{\alpha} := u_{\alpha} - u_{\alpha}(R)$. Desde que $u_{\alpha}^2 \leq 2\widetilde{u}_{\alpha}^2 + 2u_{\alpha}(R)^2$, então

$$\int_{B(0,1)}\frac{u_{\alpha}^{2}}{|x|^{2}}\,dx \leq 2\int_{B(0,R)}\frac{\widetilde{u}_{\alpha}^{2}}{|x|^{2}}\,dx + 2\int_{B(0,R)}\frac{u_{\alpha}^{2}(R)}{|x|^{2}}\,dx + \int_{A(R,1)}\frac{u_{\alpha}^{2}}{|x|^{2}}\,dx. \tag{3.67}$$

Usando a Desigualdade de Hardy (ver Teorema C.6, Apêndice C), com $\beta = -2$ e $p = 2$, obtemos

$$\int_{B(0,R)} \frac{\widetilde{u}_\alpha^2}{|x|^2}\, dx \leq \frac{4}{(N-2)^2} \int_{B(0,R)} |x \cdot \nabla u_\alpha|^2 |x|^{-2}\, dx. \tag{3.68}$$

Pela Desigualdade de Cauchy Schwartz, temos $|x \cdot \nabla u_\alpha| \leq |x||\nabla u_\alpha|$, de onde segue que $|x \cdot \nabla u_\alpha|^2 |x|^{-2} \leq |\nabla u_\alpha|^2$. Daí,

$$\int_{B(0,R)} |x \cdot \nabla u_\alpha|^2 |x|^{-2}\, dx \leq \int_{B(0,R)} |\nabla u_\alpha|^2\, dx. \tag{3.69}$$

As desigualdades (3.68) e (3.69), resulta em

$$\int_{B(0,R)} \frac{\widetilde{u}_\alpha^2}{|x|^2} dx \leq \frac{4}{(N-2)^2} \int_{B(0,R)} |\nabla u_\alpha|^2\, dx.$$

A desigualdade anterior juntamente com o Lema 3.1, acarreta

$$\int_{B(0,R)} \frac{\widetilde{u}_\alpha^2}{|x|^2}\, dx \to 0, \quad \text{quando} \ \ \alpha \to \infty. \tag{3.70}$$

Por outro lado, desde que $u_\alpha(R) < \varepsilon$ para todo $\alpha \geq 0$, segue que

$$\int_{B(0,R)} \frac{u_\alpha(R)^2}{|x|^2}\, dx \leq \varepsilon^2 \omega_N \frac{R^{N-2}}{N-2} < \frac{\omega_N}{N-2} \varepsilon^2.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi fixado de modo arbitrário, então a desigualdade anterior nos permite concluir que

$$\int_{B(0,R)} \frac{u_\alpha(R)^2}{|x|^2}\, dx \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \ \ \alpha \to \infty. \tag{3.71}$$

**Afirmação 3.5**

$$\int_{A(R,1)} \frac{u_\alpha(R)^2}{|x|^2}\, dx \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \ \ \alpha \to \infty. \tag{3.72}$$

De fato, seja $\{u_{\alpha_n}\} \subset \{u_\alpha\}$. Visto que $\|u_{\alpha_n}\| = 1$. para todo $n \in \mathbb{N}$, então, pelo Teorema de Kakutani (ver Teorema C.15, Apêndice C), existe uma subsequência de $\{u_{\alpha_n}\}$, a qual ainda será denotada por $\{u_{\alpha_n}\}$, e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{\alpha_n} \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \ \ H_0^1(\Omega) \quad \text{quando} \ \ \alpha_n \to +\infty.$$

Usando as imersões compactas do Teorema de Rellich-Kondrachov, temos

$$\|u_{\alpha_n} - u_0\|_{L^2(0,1)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \ \ \alpha_n \to +\infty.$$

Usando a convergência anterior e o Lema 3.1

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{L^2(B(0,R))} &\leq \|u_0 - u_{\alpha_n}\|_{L^2(B(0,R))} + \|u_{\alpha_n}\|_{L^2(B(0,R))}\\ &\leq \|u_0 - u_{\alpha_n}\|_{L^2(B(0,1))} + c\|u_{\alpha_n}\|_{H_0^1(B(0,R))}\\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,\end{aligned}$$

com isto, $u_0 = 0$ q.t.p. na bola $B(0,R)$. Daí,

$$\|u_0\|^2_{L^2(B(0,1))} = \int_{B(0,R)} u_0^2\,dx + \int_{A(R,1)} u_0^2\,dx = \int_{A(R,1)} u_0^2\,dx. \tag{3.73}$$

Por outro lado, desde que $u_{\alpha_n} \to u_0$ em $L^2(\Omega)$, segue que $u_{\alpha_n}(x) \to u_0(x)$ q.t.p em $\Omega$. Com isto, visto que $u_{\alpha_n}(R) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $u_{\alpha_n}$ é decrescente para todo $n \in \mathbb{N}$, então, por passagem ao limite, concluímos que $u_0(x) < \varepsilon$ q.t.p em $A(R,1)$. Assim, segue da desigualdade (3.73) que

$$\|u_0\|^2_{L^2(B(0,1))} \leq M.\varepsilon, \tag{3.74}$$

onde $M = \int_{A(R,1)} dx$. Portanto, $u = 0$ q.t.p. na $B(0,1)$. Assim,

$$u_{\alpha_n} \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(B(0,1)).$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned}\int_{A(R,1)} \frac{u_{\alpha_n}^2}{|x|^2}\,dx &\leq \frac{1}{R^2}\int_{A(R,1)} u_{\alpha_n}^2\,dx\\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \alpha_n \to +\infty.\end{aligned}$$

Com isto, a Afirmação 3.5 está provada.

Usando (3.67), (3.70), (3.72) e a Afirmação 3.5, concluímos que

$$\int_{B(0,1)} \frac{u_\alpha^2}{|x|^2}\,dx \longrightarrow 0, \quad \text{se} \quad \alpha \to +\infty.$$

Portanto a proposição está demonstrada.

■

Agora, usaremos a proposição anterior juntamente com o Teorema 3.3 para provarmos o próximo teorema, o qual é o principal resultado deste capítulo.

**Teorema 3.4** *Se $N \geq 3$ e $2 < p < 2^*$, então existe $\alpha_0 > 0$ tal que não existe Ground State radial para equação de Hénon quando $\alpha > \alpha_0$.*

**Demonstração.** Mostraremos que existe $\alpha_0 > 0$ tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$ existe uma função $u_\alpha$ não radial que minimiza $S_{\alpha,p}$. De fato, caso contrário, existe $\alpha_n \to +\infty$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma função minimizante $u_{\alpha_n} \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ para

$$S_{\alpha,p} = \inf_{\substack{u \in H^1_0(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor

$$\int_\Omega |\nabla u_{\alpha_n}|^2\,dx = 1, \quad \text{para todo} \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.75}$$

Pela Proposição 3.3, temos

$$\int_{B(0,1)} \frac{u^2_{\alpha_n}}{|x|^2} dx \to 0, \quad \text{se} \ \ \alpha_n \to +\infty.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_{B(0,1)} \frac{u^2_{\alpha_n}}{|x|^2} dx < \frac{p-2}{N-1}, \quad \text{para todo} \ \ n > n_0. \tag{3.76}$$

Por outro lado, o Teorema 3.3 nos fornece a seguinte desigualdade

$$\int_\Omega |\nabla u_{\alpha_n}|^2\,dx \leq \frac{N-1}{p-2} \int_\Omega \frac{u^2_{\alpha_n}}{|x|^2}\,dx, \quad \text{para todo} \ \ \alpha_n > 0. \tag{3.77}$$

As desigualdades (3.76) e (3.77), acarretam

$$\int_\Omega |\nabla u_{\alpha_n}|^2\,dx < \frac{N-1}{p-2}\frac{p-2}{N-1} = 1, \quad \text{para todo} \ \ n > n_0.$$

O que contradiz a igualdade (3.75). Portanto, não existe Ground State radial para equação de Hénon, quando $\alpha > \alpha_0$.

$\blacksquare$

O teorema que acabamos de demonstrar, juntamente com o Teorema 3.1, garantem que, quando $\alpha$ é suficientemente grande, existe solução não radial para o problema (3.1).

# Capítulo 4

# Existência de Solução para um Problema Generalizado

Neste capítulo estudaremos a existência de solução radial para o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u & = & b(|x|)f(u) & \text{em} & \Omega; \\ u & > & 0 & \text{em} & \Omega; \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^N$, as funções $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes hipóteses:

$(b_1)$ $b(r)$ é localmente Hölder contínua, não negativa, $b(0) = 0$ e $b \not\equiv 0$ em $\Omega$;

$(b_2)$ $b(r) = O(r^\alpha)$ quando $r \to 0$, para algum $\alpha > 0$;

$(f_1)$ $f$ é uma função localmente Hölder contínua,

$(f_{1.1})$ $f(z) \geq 0$, $\forall z > 0$,

$(f_{1.2})$ $f(z) = o(z)$ quando $z \to 0$,

$(f_2)$ Existe $M_1 > 0$ tal que $|f(z)| \leq C(1 + |z|)^p$, para todo $z \geq M_1$, onde $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2} + \dfrac{2\alpha}{N-2}$;

$(f_3)$ Existem constantes $\theta \in (0, 1/2)$ e $M_2 > 0$ tais que $F(z) \leq \theta.z.f(z)$ para $z \geq M_2$, onde $F(z) = \displaystyle\int_0^z f(t)\, dt$.

## 4.1 Comentários Sobre o Problema

O problema (4.1) foi estudado por Ambrosetti e Rabinowitz (1973) [1] com uma não-linearidade $g(x,u)$ mais geral, definida em um domínio arbitrário com fronteira suave. Entretanto, a não-linearidade $g(x,u)$ apresentava crescimento subcrítico em $u$. Ou seja, Ambrosetti e Rabinowitz haviam tratado o caso em que o crescimento de $g$ em $u$ é menor do que $|u|^p$, com $p < \dfrac{N+2}{N-2}$. O que torna o problema (4.1) interessante é o fato de que $f$ pode apresentar crescimento crítico e até mesmo supercrítico.

## 4.2 Algumas Estimativas

Nesta seção, deduziremos, a partir das hipóteses $(b_1)$, $(b_2)$, $(f_1)$, $(f_2)$ e $(f_3)$, algumas estimativas que serão úteis em demonstrações que serão feitas no decorrer deste capítulo. a fim de simplificar a notação, sempre que não houver ambiguidade, usaremos as letras $A$ , $B$, $C$ e $M$, para denotar constantes positivas.

Pela hipótese $(b_2)$, existe $\delta_1 > 0$ e $C > 0$, tais que

$$|b(r)| \leq C|r|^{\alpha}, \quad \text{para todo} \ \ r \in (-\delta_1, \delta_1).$$

Por outro lado, segue da hipótese $(b_1)$, que $b$ é contínua, assim, existe $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\left|\frac{b(r)}{|r|^{\alpha}}\right| \leq \widetilde{C}, \quad \text{para todo} \ \ r \in [\delta_1, 1],$$

além disso, por $(b_1)$, $b$ é não negativa, donde segue que

$$b(r) \leq \widetilde{C}|r|^{\alpha}, \quad \text{para todo} \ \ r \in [\delta_1, 1],$$

o que acarreta

$$b(|x|) \leq C|x|^{\alpha}, \quad \text{para todo} \ \ x \in \Omega. \tag{4.2}$$

Agora, usando a hipótese $(f_1)$, mais precisamente $(f_{1.2})$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta_2 < 1$ tal que

$$|f(z)| < \varepsilon|z|, \quad \text{para todo} \ \ z \in (-\delta_2, \delta_2). \tag{4.3}$$

Da hipótese, $(f_2)$, existe $M > \text{máx}\{M_1, 1\}$ tal que

$$|f(z)| < C(1+|z|)^p, \quad \text{para todo} \ \ z > M > 1,$$

o que implica em

$$|f(z)| < C(|z| + |z|)^p = 2^p C|z|^p, \quad \text{para todo} \quad z > M. \tag{4.4}$$

Segue de $(f_1)$ que $f$ é contínua. Assim, existe $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon, \quad \text{para todo} \quad z \in [\delta_2, M],$$

de onde obtemos

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon \cdot \frac{|z|^p}{|z|^p} < \frac{C_\varepsilon}{\delta^p}|z|^p, \quad \text{para todo} \quad z \in [\delta_2, M], \tag{4.5}$$

As estimativas (4.3), (4.4) e (4.5) acarretam em

$$\begin{aligned} |f(z)| &< \varepsilon|z| + 2^p C|z|^p + \frac{C_\varepsilon}{\delta^p}|z|^p \\ &= \varepsilon|z| + d_\varepsilon|z|^p, \quad \text{para todo} \quad z \geq 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $d_\varepsilon = (2^p C + \dfrac{C_\varepsilon}{\delta^p})$.

Pela desigualdade de Young (Ver Teorema C.4, apêndice C), obtemos

$$\varepsilon|z| \leq \frac{1}{p'}\varepsilon^{p'} + \frac{1}{p}|z|^p. \tag{4.7}$$

Das estimativas (4.6) e (4.7), deduzimos

$$|f(z)| \leq A + B|z|^p, \quad \text{para todo} \quad z \geq 0, \tag{4.8}$$

onde $A = \dfrac{1}{p'}\,\varepsilon^{p'} > 0$ e $B = \dfrac{1}{p} + d_\varepsilon > 0$. Seja $z > 0$, da desigualdade (4.6) deduzimos

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^z f(t)\,dt \leq \int_0^z |f(t)|\,dt \leq \int_0^z (\varepsilon t + d_\varepsilon t^p)\,dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2}z^2 + \frac{d_\varepsilon}{p+1}z^{p+1}, \quad \text{para todo} \quad z \geq 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Agora, usando a hipótese $(f_3)$, obtemos

$$F(z) \leq \theta.z.f(z), \quad \text{para todo} \quad z > M_2,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{f(z)}{F(z)} \geq \frac{1}{\theta z}, \quad \text{para todo} \quad z > M_2,$$

o que implica em,

$$\int_{M_2}^{z} \frac{f(t)}{F(t)}\, dt \geq \int_{M_2}^{z} \frac{1}{\theta t}\, dt, \quad \text{para todo} \quad z > M_2,$$

de onde segue que

$$\ln F(t)|_{M_2}^{z} \geq \frac{1}{\theta} \ln t|_{M_2}^{z}, \quad \text{para todo} \quad z > M_2,$$

ou ainda,

$$F(z) \geq \frac{F(M_2)}{M_2^{\frac{1}{\theta}}} z^{\frac{1}{\theta}}, \quad \text{para todo} \quad z > M_2,$$

ou ainda,

$$F(z) \geq Az^{\frac{1}{\theta}}, \quad \text{para todo} \quad z > M_2. \tag{4.10}$$

Por outro lado, desde que $F$ é contínua, existe $B_1 > 0$, tal que

$$|F(z)| \leq B_1 \quad \text{para todo} \quad z \in [0, M_2],$$

daí,

$$F(z) > -B_1 \quad \text{para todo} \quad z \in [0, M_2]. \tag{4.11}$$

A desigualdade (4.10) implica em

$$F(z) \geq Az^{\frac{1}{\theta}} - B. \; \text{para todo} \quad z \geq M_2 \quad \text{e para todo} \quad B > 0. \tag{4.12}$$

Seja $B > 0$ tal que $B > AM_2^{\frac{1}{\theta}} + B_1$. Então, se $z \in [0, M_2]$, a desigualdade (4.11) implica em

$$F(z) > -B_1 > AM_2^{\frac{1}{\theta}} - B > Az^{\frac{1}{\theta}} - B \quad \text{para todo} \quad z \in [0, M_2]. \tag{4.13}$$

As desigualdades (4.12) e (4.13), acarretam

$$F(z) \geq Az^{\frac{1}{\theta}} - B. \; \text{para todo} \quad z \geq 0. \tag{4.14}$$

Em resumo, temos válidas as seguintes estimativas

$(E_1)$ $b(|x|) \leq C|x|^{\alpha}$, para todo $x \in \Omega$;

$(E_2)$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $d_\varepsilon > 0$ tal que $|f(z)| < \varepsilon|z| + d_\varepsilon|z|^p$, para todo $z \geq 0$;

$(E_3)$ $|f(z)| \leq A + B|z|^p$, para todo $z \geq 0$;

$(E_4)$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $d_\varepsilon > 0$ tal que $F(z) \leq \frac{\varepsilon}{2}z^2 + \frac{d_\varepsilon}{p+1}z^{p+1}$, para todo $z \geq 0$;

$(E_5)$ $F(z) \geq Az^{\frac{1}{\theta}} - B$. para todo $z \geq 0$.

## 4.3 Existência de Solução Radial para um Problema Generalizado

**Teorema 4.1** *Com as hipóteses* $(b_1)$, $(b_2)$, $(f_1)$, $(f_2)$ *e* $(f_3)$ *o problema (4.1), possui solução em* $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$.

**Demonstração.** Definamos $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\widehat{f}(t) = \begin{cases} f(t), & se \quad t > 0; \\ 0, & se \quad t \leq 0. \end{cases}$$

A demonstração que faremos consiste em aplicar o Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema C.1) ao seguinte funcional

$$\begin{array}{rccl} J: & H^1_{0,\text{rad}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & J(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|^{\frac{1}{2}} - \displaystyle\int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u)\,dx. \end{array} \tag{4.15}$$

onde $\widehat{F}(z) = \displaystyle\int_0^z \widehat{f}(t)\,dt$.

Pela Proposição B.2 (ver apêndice B) temos que $J \in C^1(H^1_{0,\text{rad}}(\Omega), \mathbb{R})$, e além disso

$$J'(u)\cdot v = \langle u, v\rangle - \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u)\,v\,dx. \tag{4.16}$$

Mostremos agora que $J$ tem a Geometria do Passo da Montanha, isto é, $J$ satisfaz as condições i) e ii) do Teorema C.1 (ver apêndice C). Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, pela estimativa $(E_4)$ da p. 72, existe $d_\varepsilon > 0$, tal que

$$\widehat{F}(z) \leq \frac{\varepsilon}{2}|z|^2 + \frac{d_\varepsilon}{p+1}|z|^{p+1}.$$

Usando a última desigualdade, o Lema 2.1 e a estimativa $(E_1)$ da p. 72, deduzimos

$$\begin{aligned} \int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u)\,dx &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega b(|x|)|u|^2\,dx + \frac{d_\varepsilon}{p+1}\int_\Omega b(|x|)|u|^{p+1}\,dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega C|x|^\alpha|u|^2\,dx + \frac{d_\varepsilon}{p+1}\int_\Omega C|x|^\alpha|u|^{p+1}\,dx \\ &\leq \frac{C\,\varepsilon}{2\lambda_1}\|u\|^2 + \frac{C\,d_\varepsilon}{p+1}\int_\Omega |x|^\alpha\frac{\|u\|^{p+1}}{|x|^{\frac{N-2}{2}(p+1)}}\,dx \\ &= \frac{C\,\varepsilon}{2\lambda_1}\|u\|^2 + \frac{C\,d_\varepsilon}{p+1}\|u\|^{p+1}\int_\Omega |x|^{\alpha-\frac{N-2}{2}(p+1)}\,dx \\ &= \frac{C\,\varepsilon}{2\lambda_1}\|u\|^2 + \frac{C\,d_\varepsilon}{p+1}\|u\|^{p+1}\omega_N\int_0^1 r^{\alpha-\frac{N-2}{2}(p+1)+N-1}\,dr. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Por outro lado, desde que $1 < p < \dfrac{N+2+2\alpha}{N-2}$, segue que $\alpha - \dfrac{N-2}{2}(p+1) + N - 1 > -1$, o que acarreta em

$$\int_0^1 r^{\alpha - \frac{N-2}{2}(p+1)+N-1}\, dr < \infty,$$

com isto, segue da desigualdade (4.17), que

$$\int_\Omega b(|x|)F(u)\, dx \leq \frac{C.\varepsilon}{2\lambda_1}\|u\|^2 + \frac{\widetilde{C}.d_\varepsilon}{p+1}\|u\|^{p+1},$$

de onde obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C.\varepsilon}{2\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{\widetilde{C}.d_\varepsilon}{p+1}\|u\|^{p+1}.$$

Considerando $\varepsilon > 0$ tal que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{C.\varepsilon}{2\lambda_1} > 0$, obtemos

$$J(u) \geq A\|u\|^2 - B\|u\|^{p+1},$$

onde $A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{C.\varepsilon}{2\lambda_1} > 0$ e $B = \dfrac{C.d_\varepsilon}{p+1} > 0$. Seja $r > 0$ e $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ tal que $\|u\| = r$, então

$$J(u) \geq Ar^2 - Br^{p+1}.$$

Desde que $p+1 > 2$, podemos escolher $\overline{r} \in (0,1)$ de modo que $A\overline{r}^2 - B\overline{r}^{p+1} > 0$. Considerando $\rho = \overline{r} > 0$ e $\beta = A\overline{r}^2 - B\overline{r}^{p+1}$, concluímos que

$$J(u) \geq \beta > 0, \quad \text{para todo } \ u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega), \quad \text{com } \ \|u\| = \rho.$$

Com isto, $J$ satisfaz a hipótese i) do Teorema do Passo da Montanha.

Agora mostremos que $J$ satisfaz a hipótese ii) do Teorema do Passo da Montanha. De fato, pela estimativa $E_5$ temos

$$\widehat{F}(z) \geq Az^{\frac{1}{\theta}} - B, \quad \text{para todo } z \geq 0,$$

daí,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{[u>0]} b(|x|)\widehat{F}(u)\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - A\int_{[u>0]} b(|x|)|u|^{\frac{1}{\theta}} dx - B\int_{[u>0]} b(|x|)\, dx. \end{aligned}$$

Assim, fixando $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)\backslash\{0\}$ e $r > 0$, obtemos

$$J(ru) \;\leq\; C_1 r^2 - C_2 r^{\frac{1}{\theta}} - C_3,$$

onde $C_1 = \dfrac{1}{2}\|u\|^2$, $C_2 = A\displaystyle\int_{[u>0]} b(|x|)|u|^{\frac{1}{\theta}}dx$ e $C_3 = B\displaystyle\int_{[u>0]} b(|x|)\,dx$. Sendo $\dfrac{1}{\theta} > 2$, então $J(ru) \to -\infty$ quando $r \to +\infty$. Deste modo, é possível escolher $r_0 > 0$ tal que $\|r_0 u\| > \rho$ e $J(r_0 u) < 0$. Considerando $e = r_0 u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$, temos

$$\|e\| > \rho \quad \text{e} \quad J(e) < 0.$$

Portanto, $J$ satisfaz a hipótese ii) do Teorema do Passo da Montanha.

**Afirmação 4.1** *$J$ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

De fato, seja $u_n$ uma sequência de Palais-Smale, isto é:

i) $|J(u_n)| < K$, para algum $K > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) $J'(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Pelo item ii), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|J'(u_n)\cdot u_n|}{\|u_n\|} < 1, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

O que implica em

$$\left| \|u_n\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n).u_n\,dx \right| < \|u_n\| \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N}. \tag{4.18}$$

Por outro lado, o item i) é equivalente a

$$\left| \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u_n)\,dx \right| < K, \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N}.$$

Usando a desigualdade anterior, a estimativa $(E_1)$ da p. 72, e a continuidade de $\widehat{F}$, deduzimos

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &= 2\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u_n)\,dx\right) + 2\int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u_n)\,dx \\
&\leq 2K + 2\int_{[0\leq u_n\leq M_2]} b(|x|)\widehat{F}(u_n)\,dx + 2\int_{[u_n>M_2]} b(|x|)\widehat{F}(u_n)\,dx \\
&\leq \widetilde{K} + 2\int_{[u_n>M_2]} b(|x|)\widehat{F}(u_n)\,dx.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Usando a hipótese $f_3$ (condição de Ambrosetti & Rabinowitz) e a desigualdade (4.18), deduzimos

$$\begin{aligned}
\int_{[u_n>M_2]} b(|x|)\widehat{F}(u_n)\,dx &\leq \theta \int_{[u_n>M_2]} b(|x|)\widehat{f}(u_n).u_n\,dx \\
&= \theta \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n).u_n\,dx - 2\theta \int_{[0\leq u_n\leq M_2]} b(|x|)\widehat{f}(u_n).u_n\,dx \\
&\leq \theta \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n).u_n\,dx \\
&\leq \theta \left( \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n).u_n\,dx - \|u_n\|^2 \right) + \theta\|u_n\|^2 \\
&\leq \theta\|u_n\| + \theta\|u_n\|^2. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

As desigualdades (4.19) e (4.20) acarretam

$$\|u_n\|^2 \leq \widetilde{K} + 2\theta\|u_n\| + 2\theta\|u_n\|^2,$$

ou ainda,

$$(1-2\theta)\|u_n\|^2 \leq \widetilde{K} + 2\theta\|u_n\|.$$

Sendo $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$, a desigualdade anterior nos permite concluir que a sequência $\{u_n\}$ é limitada. Assim, pelo Teorema de Kakutani (ver Teorema C.15, apêndice C), existe $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ em }\; H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

Por outro lado, de ii) segue que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &= \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n)\,u_n\,dx + o_n(1), \text{ e} \\
\langle u_n, u\rangle &= \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n)\,u\,dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2 &= \langle u_n - u, u_n - u\rangle \\
&= \|u_n\|^2 - \langle u_n, u\rangle - \langle u, u_n - u\rangle \\
&= \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n)\,u_n\,dx - \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n)\,u\,dx + o_n(1) \\
&= \int_\Omega b(|x|)\widehat{f}(u_n)\,(u_n - u)\,dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

A igualdade anterior juntamente com o Lema 2.1 e as estimativas $(E_1)$ e $(E_3)$ dadas na p. 72 acarretam em

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|^2 &= \int_\Omega C|x|^\alpha(A+B|u_n|^p)|u_n-u|\,dx+o_n(1)\\ &= A\,C\int_\Omega |u_n-u|\,dx + B\,C\int_\Omega |x|^\alpha|u_n|^p|u_n-u|\,dx+o_n(1)\\ &= B\,\widetilde{C}\|u_n\|^p\int_\Omega |x|^{\alpha-(\frac{N-2}{2})p}|u_n-u|\,dx+o_n(1).\end{aligned} \tag{4.21}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ então, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov(ver Teorema C.13, apêndice C), $u_n\to u$ em $L^q(\Omega)$ para $1\le q<2^*$, de onde segue que

$$u_n(x)\to u(x), \quad \text{q.t.p em } \ \Omega,$$

o que implica em

$$|x|^{\alpha-(\frac{N-2}{2})p}(u_n(x)-u(x)) \longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p em } \ \Omega. \tag{4.22}$$

Além disso, segue do Lema 2.1 que

$$\begin{aligned}\left||x|^{\alpha-(\frac{N-2}{2})p}(u_n(x)-u(x))\right| &\le C|x|^{\alpha-(\frac{N-2}{2})(p+1)}\|u_n-u\|\\ &\le C|x|^{\alpha-(\frac{N-2}{2})(p+1)}(\|u_n\|+\|u\|)\\ &\le \widetilde{C}|x|^{\alpha-(\frac{N-2}{2})(p+1)}\\ &= \widetilde{C}h(x),\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde $h(x)=|x|^{\alpha-\frac{N-2}{2}(p+1)}\in L^1(\Omega)$. A convergêcia (4.22) e a desigualdade (4.23), juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema C.18, apêndice C), acarretam em

$$\int_\Omega |x|^{\alpha-(\frac{N-2}{2})p}(u_n-u)\,dx = o_n(1).$$

Da igualdade anterior e da desigualdade (4.21), concluímos que

$$u_n\to u \ \text{ em } \ H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

Portanto, o funcional $J$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Com isto, o funcional $J$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Logo, existe uma função $u\in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ que é ponto crítico não trivial de $J$. Portanto, $u$ é uma solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = b(|x|)\widehat{f}(u) & \text{em} \quad \Omega;\\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega,\end{cases}$$

com as mesmas hipóteses do problema (4.1). Tendo em vista que $b(|x|)\widehat{f}(u) \geq 0$ em $\Omega$, pelo Teorema C.3 ( ver apêndice C), concluímos que $u > 0$ em $\Omega$, o que implica em $\widehat{f} = f$ em $\Omega$, onde $f$ é a não-linearidade do problema (2.1). Portanto, $u$ é uma solução para o problema (2.1).

$\blacksquare$

# Apêndice A

# Demonstrações Alternativas

Neste apêndice faremos algumas demonstrações alternativas para resultados vistos no Capítulos 2.

A seguir, faremos uma outra demonstração para o Lema 2.2 do Capítulo 2.

**Lema A.1** *O operador $T : H^1_{0,\text{rad}}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ definido por $T(u) = |x|^m u$ é compacto, desde que $p \in [1, m^*)$ com*

$$m^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2-2m} & , se\ m < \frac{N-2}{2}; \\ +\infty & , caso\ contrário. \end{cases}$$

**Demonstração.** Para justificarmos que $T$ é contínuo procedemos de modo análogo ao que foi feito na demonstração feita no Capítulo 2 p. 34.

Agora, considere uma sequência limitada $\{u_n\} \subset H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$. Pelo teorema de Kakutani, existe $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1_{0,\text{rad}}(\Omega),$$

de onde segue que

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega,$$

o que implica em,

$$|x|^m (u_n(x) - u(x)) \to 0 \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega. \tag{A.1}$$

Por outro lado, usando o Lema 2.1 e a limitação da sequência $\{u_n\}$, deduzidos

$$\begin{aligned} ||x|^m(u_n(x)-u(x))|^p &\leq |x|^{mp}\frac{\|u_n-u\|^p}{|x|^{(\frac{N-2}{2})p}} \\ &\leq M|x|^{(m-\frac{N-2}{2})p} \\ &\leq Mh(x) \quad \text{q.t.p em } \ \Omega, \end{aligned}$$

onde $h(x)=|x|^{(m-\frac{N-2}{2})p}$. Da Proposição C.1 (ver apêndice C), obtemos

$$\int_\Omega |h(x)|\,dx = \omega_n \int_0^1 r^{(m-\frac{N-2}{2})p+N-1}\,dr, \tag{A.2}$$

e que a desigualdade $(m-\frac{N-2}{2})p+N-1>-1$ é válida para todo $p\in[1,m^*)$. Assim, a integral do lado direito da igualdade dada em (A.2) é finita, de onde segue que

$$||x|^m(u_n(x)-u(x))|^p \leq Mh(x)\in L^1(\Omega) \quad \text{q.t.p em } \ \Omega.$$

A última desigualdade, juntamente com a convergência (A.1) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema C.18, apêndice C), acarretam em

$$||x|^m(u_n(x)-u(x))|^p\,dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to+\infty.$$

Portanto, $T$ é compacto.

■

A proposição a seguir fornece uma demonstração alternativa para a justificativa de que o funcional $I$ do Capítulo 2 tem a Geometria do Passo da Montanha.

**Proposição A.1** *O funcional energia $I$ associado ao problema (2.32) satisfaz a condição de Palais-Smale.*

**Demonstração.** Seja $\{u_n\}\subset H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, isto é:

i) $|I(u_n)|\leq M$ para algum $M>0$ e para todo $n\in\mathbb{N}$;

ii) $I'(u_n)\to 0$ quando $n\to+\infty$.

Procedendo de modo análogo ao que foi feito no Capítulo 1, pp. 39 - 40, concluímos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada. Assim, pelo Teorema de Kakutane, existe $u\in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1_{0,\text{rad}}(\Omega).$$

Por outro lado, de ii) segue que

$$
\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &= \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u_n\, dx + O_n(1), \text{ e}\\
\langle u_n, u\rangle &= \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u\, dx + O_n(1).
\end{aligned}
$$

De onde segue que

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2 &= \langle u_n - u, u_n - u\rangle\\
&= \|u_n\|^2 - \langle u_n, u\rangle - \langle u, u_n - u\rangle\\
&= \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u_n\, dx - \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau u\, dx + O_n(1)
\end{aligned}
$$

$$
= \int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^\tau (u_n - u)\, dx + O_n(1).
$$

Da igualdade anterior e do Lema 2.1, segue que

$$
\|u_n - u\|^2 = C\|u_n\|^\tau \int_\Omega |x|^{\alpha - \frac{N-2}{2}\tau}(u_n - u)\, dx + O_n(1). \tag{A.3}
$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ então, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema C.13),

$$
u_n \to u \ \text{ para } \ 1 \leq q < 2^*,
$$

de onde segue que

$$
u_n(x) \to u(x), \quad \text{q.t.p em } \ \Omega,
$$

o que implica em

$$
|x|^{\alpha - \frac{N-2}{2}\tau}(u_n(x) - u(x)) \longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p em } \ \Omega. \tag{A.4}
$$

Além disso, segue do Lema 2.1

$$
\begin{aligned}
\left| |x|^{\alpha - \frac{N-2}{2}\tau}(u_n(x) - u(x)) \right| &\leq C|x|^{\alpha - \frac{N-2}{2}(\tau+1)}\|u_n - u\|\\
&\leq C|x|^{\alpha - \frac{N-2}{2}(\tau+1)}(\|u_n\| + \|u\|)\\
&\leq \widetilde{C}|x|^{\alpha - \frac{N-2}{2}(\tau+1)}\\
&= \widetilde{C}h(x),
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

onde $h(x) = |x|^{\alpha - \frac{N-2}{2}(\tau+1)} \in L^1(\Omega)$. A convergêcia (A.4) e a desigualdade (A.5), juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema C.18, apêndice C) , acarretam em

$$\int_\Omega |x|^{\alpha - \frac{N-2}{2}\tau}(u_n - u)\, dx = O_n(1).$$

Da igualdade anterior e da desigualdade (A.3), concluímos que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ H^1_{0,\text{rad}}(\Omega).$$

Portanto, o funcional $I$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

■

# Apêndice B

# Diferenciabilidade do Funcional Energia

Nesta seção estudaremos a diferenciabilidade do funcional $I$ dado em (2.16). Inicialmente mostremos que $I$ está bem definido. Para isto, é suficiente mostrar que

$$\left|\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u\ dx\right| < +\infty, \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

Com efeito, usando o Lema Radial(2.1), deduzimos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u\ dx\right| &\leq \int_\Omega |x|^\alpha |u|^{\tau+1}\ dx \\
&\leq \int_\Omega |x|^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\frac{\|u\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\tau+1} dx \\
&\leq \left(\frac{\|u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\right)^{\tau+1} \int_\Omega |x|^{\alpha+\frac{2-N}{2}(\tau+1)}dx \\
&\leq \left(\frac{\|u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\right)^{\tau+1} \omega_N \int_0^1 r^{\alpha+\frac{2-N}{2}(\tau+1)} r^{N-1} dr \\
&\leq \left(\frac{\|u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\right)^{\tau+1} \omega_N \int_0^1 r^s dr,
\end{aligned} \tag{B.1}$$

onde $s = \alpha + \frac{2-N}{2}(\tau+1) + N - 1$. Observe que $s > -1$ se, e somente se $\tau < \dfrac{N+2+2\alpha}{N-2}$. Como, por hipótese, $\tau < \dfrac{N+2+2\alpha}{N-2}$, então

$$\int_0^1 r^s dr < +\infty. \tag{B.2}$$

Das estimativas (B.1) e (B.2), concluímos que o Funcional energia $I$ está bem definido.

**Proposição B.1** *O funcional $I \in C^1(H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega), \mathbb{R})$ e, além disso,*

$$I'(u).v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau v \, dx, \tag{B.3}$$

*para todo $v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$.*

**Demonstração.** Defina

$$\begin{array}{rccl} \psi: & H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \psi(u) = \dfrac{1}{\tau+1} \displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau u \; dx. \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \phi: & H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2. \end{array}$$

Note que

$$\phi'(u).v = \langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \text{para quais quer} \quad u, v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega). \tag{B.4}$$

Por outro lado,

$$\frac{\psi(u+hv) - \psi(u)}{h} \quad = \quad \frac{1}{\tau+1} \int_\Omega |x|^\alpha \left( \frac{|u+hv|^\tau (u+hv) - u^\tau u}{h} \right) dx. \tag{B.5}$$

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(s) = |s|^\tau s$, então

$$g'(s) = (\tau |s|^{\tau-2} s)\, s + |s|^\tau \, 1 = (\tau+1)|s|^\tau.$$

Pelo Teorema do Valor Médio na Reta, existe $\sigma \in (u, u+hv)$ tal que

$$g(u+hv) - g(u) = g'(\sigma) h \, v,$$

o que implica em

$$\left| |x|^\alpha \frac{|u+hv|^\tau (u+hv) - u^\tau u}{h} \right| = (\tau+1)|x|^\alpha |\sigma|^\tau |v| \longrightarrow (\tau+1)|x|^\alpha |u|^\tau |v| \tag{B.6}$$

q.t.p em $\Omega$, quando $h \to 0$. Por outro lado, para cada $h < 1$ temos

$$|\sigma| \leq |u| + |u+hv| \leq 2|u| + |h||v| \leq 2|u| + |v|,$$

de onde segue que

$$|\sigma|^\tau \leq (2|u|+|v|)^\tau \leq 4^\tau(|u|^\tau + |v|^\tau).$$

Assim,

$$\left| |x|^\alpha \frac{|u+hv|^\tau(u+hv) - u^\tau u}{h} \right| \leq 4^\tau(\tau+1)(|x|^\alpha |u|^\tau |v| + |x|^\alpha |v|^{\tau+1}). \tag{B.7}$$

Pela desigualdade (B.1), deduzimos que $|x|^\alpha |v|^{\tau+1} \in L^1(\Omega)$. De modo análogo, é possível provar que $|x|^\alpha |u|^\tau |v| \in L^1(\Omega)$. Visto que vale a convergência (B.6) a igualdade (B.5) e a estimativa (B.7), aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u) = \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau v, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

Além disso, usando o Lema Radial (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \psi}{\partial v}(u)\right| &\leq \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau |v| dx \\
&\leq \int_\Omega |x|^\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \frac{\|u\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right)^\tau \left( \frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \frac{\|v\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right) dx \\
&= \frac{\|u\|^\tau \|v\|}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^{\tau+1}} \int_\Omega |x|^{\alpha + \frac{2-N}{2}(\tau+1)} dx \\
&= \frac{\|u\|^\tau \|v\|}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^{\tau+1}} \omega_N \int_0^1 r^{\alpha+\frac{2-N}{2}(\tau+1)+N-1} dr \\
&= C_u \|v\|, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega),
\end{aligned} \tag{B.8}$$

onde $C_u = \dfrac{\|u\|^\tau}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^{\tau+1}} \omega_N \displaystyle\int_0^1 r^{\alpha + \frac{2-N}{2}(\tau+1)+N-1} dr$. Desde que $\dfrac{\partial \psi}{\partial \cdot}(u)$ é linear para todo $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$, seque da desigualdade (B.8), que $\dfrac{\partial \psi}{\partial \cdot}(u)$ é contínuo para todo $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. Portanto, $\psi \in C^1(H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega), \mathbb{R})$ e, além disso, tem-se:

$$\psi'(u).v = \int_\Omega |x|^\alpha |u|^\tau v, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega). \tag{B.9}$$

Portanto, pelas identidades (B.4) e (B.9), a Proposição B.1 está demonstrada.

■

**Proposição B.2** *Considere o funcional $J : H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por*

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u)\, dx, \tag{B.10}$$

*onde* $\widehat{F}(z) = \displaystyle\int_0^z \widehat{f}(t)\,dt$. *Então* $J \in C^1(H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega), \mathbb{R})$ *e, além disso,*

$$J'(u).v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega b(|x|) f(u).v\,dx, \tag{B.11}$$

*para todo* $v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$.

**Demonstração.** Seja $\psi : H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(u) = \int_\Omega b(|x|)\widehat{F}(u)\,dx.$$

Então

$$\begin{aligned} \left|\frac{\psi(u+hv) - \psi(u)}{h}\right| &= \int_\Omega b(|x|)\frac{\widehat{F}(u+hv) - \widehat{F}(u)}{h}\,dx \\ &= \int_\Omega b(|x|)\frac{\widehat{F}(u+hv) - \widehat{F}(u)}{hv} \cdot v\,dx. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Pelo Teorema fundamental do Cálculo, $\widehat{F}$ é derivável, e $\widehat{F}'(z) = \widehat{f}(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema do valor Médio, existe $c \in [u, u+hv]$ tal que

$$\frac{\widehat{F}(u+hv) - \widehat{F}(u)}{hv} = \widehat{F}'(c) = \widehat{f}(c). \tag{B.13}$$

Desde que $c \in [u, u+hv]$, então $h \to 0$ implica em $c \to u$ q.t.p em $\Omega$. Além disso, $|c| \leq 2|u| + |v|$ para $0 < h < 1$. Assim, usando a continuidade de $\widehat{f}$, obtemos

$$b(|x|)\frac{\widehat{F}(u+hv) - \widehat{F}(u)}{hv} \cdot v \to b(x)\widehat{f}(c).v \quad \text{q.t.p em } \Omega \quad \text{quando} \quad h \to 0. \tag{B.14}$$

Por outro lado, usando a igualdade (B.13) e a estimativa $E_3$ da p. 72, resulta

$$\begin{aligned} b(|x|)\frac{\widehat{F}(u+hv) - \widehat{F}(u)}{hv} \cdot v &\leq b(|x|)(A + B|c|^p).v \\ &\leq A|x|^\alpha|v| + 2^{2p}B|x|^\alpha|u|^p|v| + B|x|^\alpha|v|^{p+1}. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Usando o Lema 2.1 (Radial) é possível demonstrar que $|x|^\alpha|u|^p|v| \in L^1(\Omega)$ e que $|x|^\alpha|v|^{p+1} \in L^1(\Omega)$. Além disso, claramente $|x|^\alpha|v| \in L^1(\Omega)$. Assim, as expressões (B.14) e (B.15) juntamente com o Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema C.18, apêndice C), implicam em

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(u) = \int_\Omega b(x)\widehat{f}(u).v\,dx.$$

Usando igualdade anterior juntamente com a estimativa $E_1$ e $E_2$ da p. 72, acarretam

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\psi}{\partial v}(u)\right| &\leq \int_\Omega b(x)(\varepsilon|u| + d_\varepsilon|u|^p).v\,dx \\ &\leq \varepsilon\int_\Omega b(x)|u|.v\,dx + d_\varepsilon\int_\Omega b(x)|u|^p.v\,dx \\ &\leq \varepsilon\int_\Omega |u|.v\,dx + Cd_\varepsilon\int_\Omega |x|^\alpha|u|^p.v\,dx. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Pela estimativa (B.8), temos

$$\int_\Omega |x|^\alpha|u|^p.v\,dx \leq C_u\|v\|, \quad \text{para todo } \; v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega). \tag{B.17}$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Hölder (ver Teorema C.6) e de Poincaré (ver Teorema C.14), deduzimos

$$\int_\Omega |u|.v\,dx \leq K_u\|v\|, \quad \text{para todo } \quad v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega). \tag{B.18}$$

Das estimativas (B.16), (B.17) e (B.18), obtemos

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(u)\cdot v \quad\leq\quad M_{u,\varepsilon}\|v\|, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega),$$

onde $M_{u,\varepsilon} = \varepsilon C_u + Cd_\varepsilon K_u$. Com isto, $\psi \in C^1(H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega), \mathbb{R})$, e além disso,

$$\Psi'(u)\cdot v = \int_\Omega b(x)\widehat{f}(c).v\,dx \quad \text{para todos} \quad u, v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

Portanto, a proposição está demonstrada.

■

# Apêndice C

# Resultados Utilizados em Demonstrações

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que foram utilizados no decorrer dos capítulos anteriores. Usaremos a letra $E$ para denotar um espaço vetorial normado.

**Definição C.1** *Dizemos que um funcional $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale se qualquer sequência $\{u_n\} \subset E$ que satisfaz:*
*i) $J(u_n)$ é limitada;*
*ii)$J'(u_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$,*
*possui uma subsequência convergente.*

**Teorema C.1** ***(Teorema do Passo da Montanha)***
*Sejam $X$ um espaço de Hilbert e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional tal que:*
*i) $J(0) = J(e) = 0$ para algum $e \in X \backslash \{0\}$;*
*ii) Existe $\rho \in (0, \|e\|)$ e $\alpha > 0$ tais que $J > \alpha$ em $S_\rho = \{u \in X; \|u\| = \rho\}$.*
*Se $J$ satisfaz a condição de Palais-Smale, então $J$ tem um valor crítico*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq \alpha > 0,$$

*onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.*

**Demonstração.** Ver [22], p. 13, Teorema 1. 17.

■

**Teorema C.2** ***(Teorema dos Multiplicadores de Lagrange)***
*Sejam $E$ um espaço de Banach e $J, F \in C^1(E, \mathbb{R})$. Se $J$ é limitado inferiormente no*

*conjunto* $M = \{u \in E\,;\ F(u) = 0\}$, *e valem as propriedades:*
*i)* $F'(u) \neq 0$, *para todo* $u \in M$*;*
*ii) Existe* $u_0 \in M$ *tal que* $J(u_0) = \min_{u \in M} J(u)$.
*Então, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$J'(u_0) = \lambda\, F'(u_0).$$

*O número* $\lambda$ *é chamado Multiplicador de Lagrange.*

**Demonstração.** Ver [13], p. 55.

■

**Teorema C.3** ***(Principio do Máximo Forte)***
*Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta v &= f, \quad em\ \Omega; \\ \quad v &= 0, \quad na\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{C.1}$$

*onde* $\Omega$ *é um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$. *Então, se* $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ *é uma solução para o problema (C.1), então* $u > 0$ *em* $\Omega$.

**Demonstração.** Basta aplicar o Teorema 10.2 de [13] p. 43, considerando $a(\cdot)$ como sendo a matriz identidade de ordem $N$, $b(\cdot) = \beta(\cdot) = 0$ e $c = 0$.

■

**Teorema C.4** ***(Desigualdade de Young)***
*Sejam* $1 < p < +\infty$ *e* $1 < q < +\infty$ *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então*

$$|a.b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

**Demonstração.** Ver [4], p. 56.

■

**Teorema C.5** ***(Desigualdade de Hölder)***
*Sejam* $\Omega$ *um domínio em* $\mathbb{R}^N$, $1 < p < +\infty$ *e* $1 < q < +\infty$ *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *então*

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega |f \cdot g|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Demonstração.** Ver [4], p. 56.

■

**Teorema C.6** ***(Desigualdade de Hardy)***
*Se* $N \geq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $N + \beta > 0$ *e* $1 < p < +\infty$, *então*

$$\int_{R^N} |u|^p |x|^\beta \, dx \leq \frac{p^p}{(\beta + N)^p} \int_{R^N} |x \cdot \nabla u|^p |x|^\beta \, dx.$$

**Demonstração.** Ver [13], p. 308.

■

**Teorema C.7** ***(Teorema de Fubini)***
*Se* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Então, para cada* $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_1) \quad e \quad \left(\int_{\Omega_2} F(x,y) \, dy\right) \in L^1_x(\Omega_1).$$

*De modo análogo, para cada* $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_2) \quad e \quad \left(\int_{\Omega_1} F(x,y) \, dx\right) \in L^1_y(\Omega_2).$$

*Além disso,*

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y) \, dx \, dy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y) \, dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y) \, dx.$$

**Demonstração.** Ver [20], p. 58.

■

**Teorema C.8** ***(Teorema de mudança de Variáveis)***
*Sejam* $A$ *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$ *e* $g : A \to \mathbb{R}^N$ *uma função injetiva e continuamente diferenciável, tal que* $\det g' \neq 0$ *para todo* $x \in A$. *Se* $f : g(A) \to \mathbb{R}$ *é integrável, então*

$$\int_{g(A)} f \, dx = \int_A (f \circ g) \, |\det g'| \, dx.$$

**Demonstração.** ver [20], p. 67.

■

**Teorema C.9** ***(Teorema de Lax-Milgram)***
*Sejam* $H$ *é um espaço de Hilbert e* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva. Se* $\varphi \in H'$, *existe um único* $u \in H$ *tal que*

$$\varphi(v) = a(u,v), \quad \textit{para todo} \;\; v \in H.$$

**Demonstração.** Ver [4] p. 84.

■

**Teorema C.10** *Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < +\infty$. *Então existe uma única* $u \in W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad em \quad \Omega; \\ u &= 0 \quad na \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

**Demonstração.** Ver [11], pp. 241-242.

■

**Teorema C.11** *Seja* $L$ *um operador estritamente elíptico em um domínio limitado* $\Omega$, *com* $c \leq 0$, $f$ *e os coeficientes de* $L$ *pertencentes* $C^{\mu}(\overline{\Omega})$. *Suponha que* $\Omega$ *é um domínio de classe* $C^{2,\mu}$ *e que* $\varphi \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$. *Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu &= f \quad em \quad \Omega; \\ u &= \varphi \quad na \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

*possui uma única solução em* $C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$.

**Demonstração.** Ver [11] p.107.

■

**Teorema C.12** ***(Imersão de Sobolev)***
*Sejam* $\Omega$ *um domínio suave em* $\mathbb{R}^N$, $m \leq 0$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Então, para qualquer* $j \geq 0$ *as imersões abaixo são contínuas:*
*i) Se* $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq p^* = \dfrac{Np}{n - mp}$;
*ii) Se* $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q < +\infty$;
*iii) Se* $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_{\beta}^{j}$;
*iv) Se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m$,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}, \quad 0 < \mu < m - \frac{N}{p}.$$

**Demonstração.** Ver [6] p. 102.

■

**Teorema C.13** ***(Rellich-Kondrachov)***
*Se* $\Omega$ *é um domínio limitado de classe* $C^1$. *Então as imersões seguintes*
*i) Se* $p < N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$ *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$;
*ii) Se* $p = N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty)$;
*iii) Se* $p > N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, $\forall q \in [1, +\infty)$.
*são compactas.*

**Demonstração.** Ver [6], p. 103.

■

**Teorema C.14** ***(Desigualdade de Poincaré)***
*Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio com medida finita, então existe uma constante $K = K(p)$ tal que*

$$\|\varphi\|_{0,p,\Omega} \leq K\|\varphi\|_{1,p,\Omega},$$

*para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

**Demonstração.**

Ver [2], p. 183.

■

**Proposição C.1** *Seja $\Omega$ a bola unitária do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Se $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, então:*

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \omega_N \int_0^1 |u(r)|^p r^{N-1} dr,$$

*onde $\omega_N$ é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.*

**Demonstração.** Seja $\psi : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \to S^{N-1}$ uma parametrização da esfera unitária do $\mathbb{R}^N$, onde U é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \phi: & (0,1)\times U & \longrightarrow & \Omega \\ & (r,x) & \mapsto & r\Psi(x). \end{array}$$

Note que

$$|J\phi| \;=\; \det\begin{pmatrix} \psi \\ r\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ r\frac{\partial\psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} = r^{N-1}\det\begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

e

$$|\phi(r,x)| = |r\psi(x)| = r|\psi(x)| = r.1 = r. \tag{C.3}$$

Usando as expressões (C.2) e (C.3), juntamente com o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema C.8, apêndice C) e o Teorema de Fubine (ver Teorema C.7, apêndice C), deduzimos

$$\begin{aligned}
\int_{\phi((0,1)\times U)} |u(x)|^p dx &= \int_{(0,1)\times U} |u(\phi(r,x))|^p r^{N-1} \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{(0,1)\times U} |u(r)|^p r^{N-1} \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} dx \\
&= \int_0^1 \left( \int_U |u(r)|^p r^{N-1} \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} dx \right) dr \\
&= \int_0^1 |u(r)|^p r^{N-1} dr \int_U \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} dx \\
&= \omega_N \int_0^1 |u(r)|^p r^{N-1} dr.
\end{aligned}$$

Desde que $\phi((0,1)\times U) = \Omega \backslash \{0\}$, segue que

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx = \omega_N \int_0^1 |u(r)|^p r^{N-1} dr.$$

Portanto, a proposição está demonstrada.

■

**Proposição C.2** *Seja $\Omega$ a bola unitária do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Se $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, então*

$$\|u\|^2 = \omega_N \int_0^1 (u')^2 r^{N-1} dr,$$

*onde $\omega_N$ é a área da superfície $S^{N-1}$.*

**Demonstração.** Desde de que $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$, então, $u(x) = u(r)$, para todo $x \in \Omega$ com $|x| = r$. Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{x_i}{|x|},$$

o que implica em

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \frac{x_i^2}{|x|^2}.$$

De onde segue que,

$$|\nabla u(x)|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{|x|^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = u'(r)^2.$$

Com isto, obtemos $|\nabla u(x)| = |u'(r)|$ para todo $x \in \Omega$ com $|x| = r$. Assim, usando a Proposição C.1, deduzimos

$$\|u\|^2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \omega_N \int_0^1 u'(r)^2 r^{N-1}\, dr.$$

Portanto, a proposição está demonstrada.

$\blacksquare$

**Proposição C.3** *Seja $u$ uma função radial, definida sobre a bola unitária do $\mathbb{R}^N$, e $f$ é uma função definida na esfera $S^{N-1}$, então vale a seguinte igualdade*

$$\int_{B(0,1)} u(x) f(\sigma) dx = \frac{1}{\omega_N} \int_{B(0,1)} u(x) dx \int_{S^{N-1}} f(\sigma) d\sigma.$$

*onde $\omega_N$ é a área da esfera $S^{N-1}$.*

**Demonstração.** Sejam $\psi$ e $\phi$ as funções definidas na demonstração da proposição C.1. Então, usando o Teorema de Mudança de Variáves (ver Teorema C.8, apêndice C) e o Teorema de Fubini (ver Teorema C.7, apêndice C), deduzimos

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} u(x) f(\sigma) dx &= \int_{\phi((0,1)\times U)} u(x) f(\sigma(x)) dx. \\
&= \int_{(0,1)\times U} u(\phi(r,y)) f(\sigma(\phi(r,y))) r^{N-1} \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} dy \\
&= \int_{(0,1)\times U} |u(r)|^p r^{N-1} f(\sigma(\phi(r,y))) \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} dx
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left( \int_U |u(r)|^p r^{N-1} f(\sigma(\phi(r,y))) \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} dx \right) dr$$

$$= \int_0^1 |u(r)|^p r^{N-1} dr \int_U f(\sigma(\phi(r,y))) \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} dx$$

$$= \int_0^1 |u(r)|^p r^{N-1} dr \int_{S^{N-1}} f(\sigma)\, d\sigma. \tag{C.4}$$

Por outro lado, pela Proposição C.1, temos

$$\int_0^1 |u(r)|^p r^{N-1} dr = \frac{1}{\omega_N} \int_\Omega |u|^p\, dx. \tag{C.5}$$

Das igualdades (C.4) e (C.5) segue o resultado.

■

**Proposição C.4** *Seja $u$ uma função radial, definida sobre a bola unitária do $\mathbb{R}^N$, e seja $f$ é uma função suave definida na esfera $S^{N-1}$. Se $h$ é uma função definida por $h(x) = u(r)f(\sigma)$ então*

$$|\nabla h|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 f^2 + \frac{1}{r^2} u^2 |\nabla_\sigma f|^2.$$

**Demonstração.** Como, por hipótese, $f$ é uma função definida na esfera $S^{N-1}$, então podemos redefinir $f : \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, de modo que $f(x) = f(rx)$, para todo $r > 0$, (isto é, $f$ é constante em cada semi-reta partindo da origem). Como, pela Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(rx) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j}(rx) \frac{\partial}{\partial x_i}(rx_j) = r \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(rx). \tag{C.6}$$

O que implica em

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(rx) = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \tag{C.7}$$

de onde segue que

$$\nabla f = \frac{1}{r} \nabla_\sigma f.$$

Desde que, $h = uf$, segue que

$$\begin{aligned} \nabla h &= \nabla u.f + u.\nabla f \\ &= \nabla u.f + \frac{u}{r}.\nabla_\sigma f. \end{aligned}$$

Tendo em vista a igualdade anterior e sabendo que $\nabla u$ é ortogonal a$\nabla_\sigma f$, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= |\nabla u.f + \frac{u}{r}.\nabla_\sigma f|^2 \\ &= |\nabla u.f|^2 + \left|\frac{u}{r}.\nabla_\sigma f\right|^2 \\ &= |\nabla u|^2 f^2 + \left|\frac{u}{r}\right|^2 |\nabla_\sigma f|^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 f^2 + \frac{u^2}{r^2}|\nabla_\sigma f|^2. \end{aligned}$$

Portanto, a proposição está demonstrada.

■

**Proposição C.5**

$$\inf_{\substack{f \in H^1(S^{N-1}) \\ \int_{S^{N-1}} f = 0}} \frac{\int_{S^{N-1}} |\nabla_\sigma f|^2 d\sigma}{\int_{S^{N-1}} f^2 d\sigma} = N - 1.$$

**Demonstração.** A demonstração segue da caracterização variacional do primeiro autovalor (não nulo) e da Proposição 1 da p. 35 de [5].

■

**Teorema C.15** ***(Teorema de Kakutani)***
*Seja $E$ um espaço de Banach. Então $E$ é reflexivo se, e somente se o conjunto*

$$B_E = \{x \in E\,;\, \|x\| = 1\}$$

*é compactor na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

**Demonstração.** Ver [4], p. 44.

■

**Teorema C.16** *Se $f \in M(X, \boldsymbol{X})$ é uma função não-negativa, então existe uma sequência $\{\varphi_n\} \subset M(X, \boldsymbol{X})$ de funções tais que*

*i) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ para $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$;*

*ii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ para cada $x \in X$;*

*iii) Cada $\varphi_n$ assume apenas um número finito de valores reais.*

**Demonstração.** Ver [3], p. 13.

∎

**Teorema C.17** *Sejam* $\{u_n\}$ *uma sequência em* $L^P(\Omega)$ *e* $u \in L^p(\Omega)$, *tal que* $u_n \to u$ *em* $L^p(\Omega)$. *Então, existe uma subsequência* $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ *e* $h \in L^p(\Omega)$, *satisfazendo:*
*i)* $u_{n_j}(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* $\Omega$;
*ii)* $u_{n_j}(x) \leq h(x)$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

**Demonstração.** Ver [4], p. 58.

∎

**Teorema C.18** ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)***
*Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$. *Suponha que*
*i)* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p. em* $\Omega$
*i) Existe uma função* $h \in L^1(\Omega)$, *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, *verifica-se:* $|f_n(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* $\Omega$.
*Então,*

$$f \in L^1(\Omega) \quad e \quad \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

**Demonstração.** Ver [4], p. 54.

∎

**Proposição C.6** *Seja* $E$ *um espaço vetorial normado. Considere* $(u_n) \subset E$ *e* $u \in E$, *então* $u_n \to u$ *em* $E$ *se, e somente se, para toda subsequência* $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ *existe* $(u_{n_{j_k}}) \subset (u_{n_j})$ *tal que* $u_{n_{j_k}} \to u$.

**Demonstração.** Se $u_n \to u$ em E, então $u_{n_j} \to u$ em E para qualquer subsequência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$. De onde segue que $u_{n_{j_k}} \to u$ em E para qualquer sequência $\{u_{n_{j_k}}\} \subset \{u_{n_j}\}$.

Agora, suponha que $\{u_n\}$ não converge para $u$ em $E$. Então, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$|u_{n_j} - u|_E \to +\infty \quad \text{quando} \quad j \to +\infty.$$

Assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_{n_j} - u|_E > 1 \quad \text{para todo} \quad j > j_0. \tag{C.8}$$

Por outro lado, se $\{u_{n_{j_k}}\}$ é uma subsequência de $\{u_{n_j}\}$ tal que

$$u_{n_{j_k}} \to u \;\text{ em }\; E, \tag{C.9}$$

então, existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_{n_{j_k}} - u|_E < 1 \;\text{ para todo }\; k > j_0,$$

o que contradiz (C.8). Logo, não existe existe uma subsequência $\{u_{n_{j_k}}\} \subset \{u_{n_j}\}$ tal que

$$u_{n_{j_k}} \to u \;\text{ quando }\; k \to +\infty.$$

Portanto, se para toda subsequência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ existe $\{u_{n_{j_k}}\} \subset \{u_{n_j}\}$ tal que

$$u_{n_{j_k}} \to u \;\text{ quando }\; k \to +\infty,$$

então $u_n \to u$ em $E$.

■

**Proposição C.7** *Seja* $M = \{u \in H_0^1(\Omega)\,;\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx = 1\}$. *Então,*

$$\inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}} = \inf_{u\in M}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

**Demonstração.** Sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ e $w = \dfrac{u}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}}\cdot$ Então,

$$\int_\Omega |x|^\alpha |w|^p\,dx = 1.$$

Assim, $w \in M$, daí

$$\inf_{u\in M}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq \int_\Omega |\nabla w|^2\,dx = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot$$

Com isto,

$$\inf_{u\in M}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}}\cdot \tag{C.10}$$

Por outro lado, se $v \in M$, então

$$\inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |v|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}} = \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx.$$

O que implica em

$$\inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}} \leq \inf_{u\in M}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx. \tag{C.11}$$

As desigualdades (C.10) e (C.11) acarretam

$$\inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}} = \inf_{u\in M}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

Portanto, a proposição está demonstrada.

■

**Proposição C.8** *Seja $N \geq 2$. Se $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$, então*

$$|u(x)| \leq \omega_N^{-\frac{1}{2}} |x|^{\frac{-(N-1)}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \quad q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N,$$

*Além disso, na classe de equivalência de $u$, existe uma função Hölder contínua em torno da origem, tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} |y|^{\frac{-(N-1)}{2}} \omega_N^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \quad em \ \ A(\delta, +\infty),$$

*onde, $\delta > 0$ e $A(\delta,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| > \delta\}$.*

**Demonstração.** Ver [13] p. 250.

■

**Proposição C.9** *Seja $\varepsilon > 0$. Se $u_\alpha$ uma sequência minimizante para*

$$S_{\alpha,p}^{\mathrm{rad}} := \inf_{\substack{u\in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{B(0,1)} |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}},$$

*com* $\displaystyle\int_{B(0,1)} |\nabla u_\alpha|^2 dx = 1$ *para todo $\alpha > 0$. Então existe $0 < R < 1$ independente de $\alpha$ tal que $u_\alpha(R) < \varepsilon$.*

**Demonstração.** Seja $\{u_{\alpha_n}\}$ uma subsequência de $\{u_\alpha\}$. Então, $\|u_{\alpha_n}\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim, pela Proposição C.8, temos

$$|u_{\alpha_n}(x)| \leq \omega_N^{-\frac{1}{2}} |x|^{\frac{-(N-1)}{2}} \quad \text{para todo} \ \ x \in \Omega \ \ \text{e para todo} \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{C.12}$$

Seja $\delta_1 > 0$, a desigualdade (C.12) acarreta

$$|u_{\alpha_n}(x)| \leq C \quad \text{para todo} \ \ x \in A[\delta_1, 1] \ \ \text{e para todo} \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{C.13}$$

Por outro lado, da Proposição C.8 segue que

$$|u_{\alpha_n}(x) - u_{\alpha_n}(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} |y|^{\frac{-(N-1)}{2}} \omega_N^{-\frac{1}{2}} \quad \text{em} \quad A[\delta_1, 1],$$

o que implica em

$$|u_{\alpha_n}(x) - u_{\alpha_n}(y)| \leq \widetilde{C}|x-y|^{\frac{1}{2}} \quad \text{em} \quad A[\delta_1, 1]. \tag{C.14}$$

Das desigualdades (C.13) e (C.14), concluímos que $\{u_{\alpha_n}\}$ é uniformemente equicontínua e uniformemente equilimitada. Assim, pelo Teorema de Áscoli-Arzelá, existe $u \in C([\delta_1, 1])$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_{\alpha_n} \to u \ \text{ uniformemente em } \ [\delta_1, 1],$$

daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_{\alpha_n}(x) - u_{\alpha_n}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e para todo} \quad n > n_0 \quad \text{e para todos} \quad x, y \in A[\delta_1, 1]. \tag{C.15}$$

Além disso, desde que $u$ é contínua, existe $0 < \delta < 1 - \delta_1$ tal que

$$|u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo} \quad x \in A(1-\delta, 1). \tag{C.16}$$

As desigualdades (C.15) e (C.16), acarretam em

$$\begin{aligned} |u_{\alpha_n}(x)| &\leq |u_{\alpha_n}(x) - u_{\alpha_n}(x)| + |u(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$ e para todo $x \in A(1-\delta, 1)$. Portanto, é suficiente escolhermos $R = 1 - \dfrac{\delta}{2}$.

■

**Proposição C.10** $\|u\| = \||u|\|$.

**Demonstração.** Sejam $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = -\min\{u, 0\}$; Então,

$$u = u^+ - u^-, \quad |u| = u^+ + u^-, \quad \nabla u^+ = \chi_{[u>0]} \cdot \nabla u \quad e \quad \nabla u^- = \chi_{[u<0]} \cdot \nabla u.$$

De onde segue que

$$\|u\|^2 = \langle u^+ - u^-, u^+ - u^- \rangle = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2, \quad \text{e}$$
$$\||u|\|^2 = \langle u^+ + u^-, u^+ + u^- \rangle = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2.$$

Portanto, $\|u\| = \||u|\|$.

$\blacksquare$

**Teorema C.19** ***(Teorema do Divergente)***
*Sejam $\Omega$ um domínio limitado cuja $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe $C^1$ e $\eta$ o vetor normal unitário exterior a fronteira de $\partial\Omega$. Para qualquer função $W : \Omega \to \mathbb{R}^N$, com $W \in C^0(\overline{\Omega}) \bigcap C^1(\Omega)$, temos*

$$\int_\Omega div\, W \ = \int_{\partial\Omega} W \cdot \eta\, ds.$$

**Demonstração.** Ver [9], p. 6.

$\blacksquare$

**Teorema C.20** ***(1ª Fórmula de Green)***
*Consider $\Omega$ um domínio no qual seja válido o teorema do divergente. Se as funções $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega v\Delta u\, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \frac{u}{\nu}\, d\sigma.$$

**Demonstração.** Ver [7] p. 47.

$\blacksquare$

**Corolário C.2** ***(Fórmula de Integração por Partes)***
*Sejam $\Omega$ um domínio limitado cuja $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe $C^1$ e $G$ uma função de classe $C^0(\overline{\Omega}) \bigcap C^1(\Omega)$, então vale a seguinte fórmula:*

$$\int_\Omega u \frac{\partial G}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega G \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx.$$

*para toda função $u \in C^1(\Omega)$.*

**Demonstração.** Basta aplicar o Teorema do Divergente ao campo $W = (0, \dots, uG, \dots, 0)$, onde $uG$ ocupa a i-ésima coordenada de $W$.

$\blacksquare$

**Proposição C.11** *Se $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, então as afirmações*

*i) $|Au| = |u|$, para todo $u \in \mathbb{R}^N$;*

*ii) $Au \cdot Av = u \cdot v$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^N$;*

*iii) $A \cdot A^T = I_N$,*

*são equivalentes. (do item iii, obtemos $\det A = \pm 1$).*

**Demonstração.** ver [14] p. 184.

∎

**Teorema C.21** *Seja* $\Omega$ *um domínio em* $\mathbb{R}^N$ *e seja* $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory tal que*

$$|g(x,u)| \leq a(x)(1+|u|) \quad q.t.p \ em \ \ \Omega.$$

*onde* $a \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$ *e* $u$ *satisfaz a equação* $-\Delta u = g(\cdot, u)$. *Se* $u \in H^1_0(\Omega)$ *e* $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, *então* $u \in L^q(\Omega)$ *para todo* $1 \leq q < +\infty$.

**Demonstração.** Ver [21] P. 218.

∎

# Bibliografia


[1] Ambrosetti, A., & Rabinowitz, P., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[2] Adams, R. A., *Sobolev Spaces* Academic Press, New York, 1975.

[3] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[4] Brezis, H., *Analyse Fonnctionelle Theorie et Applications*. Masson, Paris, New York, Bacelone, Milan, Mexico e São Paulo, 1987.

[5] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academie Press, New York 1984.

[6] Figueiredo, D. G de, *Equações Elípticas não Lineares*, 11º Colóquio Brasileiro de Matemátia, IMPA, Poços de Caldas, 1977.

[7] Figueiredo, D. G de, *Teoria Clássica do Potencial*, Editora Universidade de Brasília, 1963.

[8] Figueiredo, D. G. de, Lions, P. -L. & Nussbaum, R.D., *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, J. Math. pures et appl., p. 41 à 63. 61, (1982), 0021 - 7824.

[9] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*, (2ª Edição), Princeton University Press, New Jersey, 1995.

[10] Gidas, B., Ni, W.-M & Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, comm. Math. Phys. 68 (1979) 209-247.

[11] Gilbarg, D. & Trunder, Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, Tokyo, 1983.

[12] Hénon, M., *Nonumerical experiment on the stability of spherical stellar systems*, Astronomiy and Astrophysics 24 (1973) 229 - 238.

[13] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.

[14] Lima, E, L. *Álgebra Linear*, (6ª Edição), Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[15] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Vol. 1 Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[16] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Vol. 2 (6ª Edição) Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[17] Miranda, M. A. Milla & Medeiros, L. A., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais (Textos de Métodos Matemáticos Nº 25)*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[18] Ni, W.-M., *A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its application.* Indiana Univ. Math. Jour. 31(6), 801-807 (1982).

[19] Smets D., Su, J & Willem , M., *Non radial ground states for the Hénon equation*, Commun. Contemp. Math. 4(3), 467-480(2002).

[20] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, Benjamim, New York, 1965.

[21] Struwe, M., *Variational Methods*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona 1990.

[22] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, 1996.