Resumo

Neste trabalho, mostramos a existência de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + p(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

As principais ferramentas utilizadas são os Teoremas de Deformação, Passo da Montanha e Ponto de Sela.

Abstract

In this work, we show the existence of solutions for the following class for elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + p(x,u), \qquad x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

The main tools used are the Deformation, Mountain Pass and Saddle Point Theorems.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoremas do Tipo Minimax e Aplicações

por

Jacqueline Félix de Brito

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Dezembro/2005

Teoremas do Tipo Minimax e Aplicações

por

Jacqueline Félix de Brito

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2005

Agradecimentos

A Deus,

Como agradecer pelo bem que tens feito a mim?

Como demonstrar quanto amor tu tens ó Deus por mim!

Nem anjos podem expressar a minha eterna gratidão.

Tudo o que sou e o que vier a ser aqui, eu ofereço a ti.

A Deus toda glória, que por mim tanto fez.

"Aos homens isto é impossível, mas a Deus tudo é possível."(Mt. 19:26)

Aos **meus familiares**, a minha eterna gratidão por sua presença em todos os momentos de minha vida, dando-me força, auxiliando-me, compreendendo-me e fortalecen- do-me nas horas difíceis.

A meu orientador, **Prof. Claudianor**, pela dedicação, atenção e, principalmente, pelas suas experiências, que muito contribuíram a concluir uma grande e importante etapa de minha vida. Muito obrigada, que Deus continue lhe abençoando!

Aos professores **Marco Aurélio** e **Everaldo S. de Medeiros** por se apresentarem disponível nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

Ao **Prof. Alcionio** pela fundamental colaboração e incansável disponibilidade para discutir e orientar competentemente o Projeto de Iniciação Científica, da qual eu participei.

Ao **Prof. Sérgio Mota**, pelo estímulo e orientações que me deu mesmo antes de minha entrada na Pós-Graduação.

Obrigada aos **Professores do Curso de Matemática**, que me ajudaram a percorrer essa difícil trajetória em busca de conhecimento.

Aos **meus amigos** que compartilharam comigo esses anos de estudos, sabendo cultivar a amizade e a compreensão, os meus agradecimentos.

A **todos que fazem o DME da UFCG**.

A **todos** que contribuíram, de forma direta, ou indiretamente, para concretização deste trabalho, meu muito obrigada!

Dedicatória

A Deus, Paí de todo conhecimento, que me permitiu concluir mais essa etapa na minha vida...

...A meu pai, Pedro e minha mãe, Odília, alicerce e pilar fundamental da minha existência...

...A meus irmãos, Alexandre, Alexsandra e Pedro e a meu namorado Josinaldo, inesgotáveis fontes de estímulo, essenciais nos momentos de mais angústia.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, estudamos existência de solução fraca para um problema não-linear do tipo

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + p(x,u), & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, $u \in E = H_0^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e a função $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Por uma solução fraca do problema (P_1), entendemos como sendo uma função $u \in E$ que é um ponto crítico do funcional energia $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right] dx - \int_\Omega P(x,u)dx, \qquad \text{onde} \qquad P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt.$$

É natural que, ao falarmos de pontos críticos, pensemos em primeiro lugar em pontos de mínimo [ou de máximo] local ou global e, em segundo lugar, em pontos críticos que são do tipo minimax. Ao longo deste trabalho apresentamos alguns teoremas abstratos para obtenção de pontos críticos para o funcional I.

No **Capítulo 1**, estudamos algumas versões do Teorema de Deformação segundo os trabalhos de Costa [4], Rabinowitz [11] e Willem [13], nas quais uma delas, será uma ferramenta de fundamental importância na demonstração do Teorema do Ponto de Sela e nas duas versões do Teorema do Passo da Montanha que são utilizadas neste trabalho.

No **Capítulo 2**, mostramos a existência da solução para o Problema $(\mathbf{P_1})$ considerando $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste capítulo assumimos as seguintes hipóteses sob a função p:

$(\mathbf{J_1})$ $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(\mathbf{J_2})$ Existe uma constante $a_2 > 0$ tal que

$$|p(x,\xi)| \leq a_2 |\xi|^s, \qquad \forall \; x \in \overline{\Omega} \quad \text{e} \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde} \quad 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

$(\mathbf{J_3})$ Existem constantes $2 < \mu \leq 2^*$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu P(x,\xi) \leq \xi p(x,\xi) \qquad \text{para} \quad |\xi| \geq r, \quad \text{onde} \;\; P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt.$$

O método utilizado consiste em aplicar um teorema devido a Ambrosetti-Rabinowitz [11], denominado Teorema do Passo da Montanha.

No **Capítulo 3**, mostramos a existência de uma solução para o Problema $(\mathbf{P_1})$, considerando λ um autovalor associado ao Problema $(\mathbf{P_2})$. Para isto, consideramos as seguintes hipóteses sob a função p:

$(\mathbf{H_1})$ $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(\mathbf{H_2})$ Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|p(x,\xi)| \leq M, \qquad \forall \; x \in \overline{\Omega} \;\; \text{e} \;\; \xi \in \mathbb{R};$$

$(\mathbf{H_3})$ $P(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi p(x,t)dt \longrightarrow +\infty$, quando $|\xi| \to +\infty$ uniformemente para $x \in \Omega$.

Neste capítulo aplicamos o Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz [11] para encontrar a solução desejada.

No **Capítulo 4**, mostramos a existência de uma solução para o Problema $(\mathbf{P_1})$, considerando $\lambda \geq \lambda_1$. Para isto, consideramos as seguintes hipóteses sob a função p:

$(\mathbf{G_1})$ $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(\mathbf{G_2})$ Existem constantes $a_1,\ a_2 > 0$ tais que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 \left|\xi\right|^s, \quad \forall\ x \in \overline{\Omega} \quad \text{e} \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

$(\mathbf{G_3})$ $p(x,\xi) = o\left(|\xi|\right)$ quando $\xi \to 0$;

$(\mathbf{G_4})$ Existem constantes $2 < \mu \leq 2^*$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu P(x,\xi) \leq \xi p(x,\xi) \qquad \text{para} \quad |\xi| \geq r;$$

$(\mathbf{G_5})$ $\xi p(x,\xi) \geq 0$ para $\xi \in \mathbb{R}$.

Aqui aplicamos o Teorema do Passo da Montanha Generalizado de Rabinowitz [11] para provar novamente a existência de solução.

No **Apêndice A**, enunciamos os principais resultados usados ao longo de nosso trabalho.

No **Apêndice B**, recordamos a definição de funcional diferenciável, mostrando que os funcionais utilizados na dissertação são diferenciáveis.

No **Apêndice C**, demonstramos dois resultados importantes, os quais utilizamos na verificação da condição (PS).

Finalmente, concluímos o nosso trabalho com o **Apêndice D** que contém os principais resultados da Teoria do Grau Topológico que são utilizados na dissertação.

Capítulo 1

Teorema de Deformação

Neste capítulo demonstraremos algumas versões do Teorema de Deformação, visto que uma delas, será uma ferramenta de fundamental importância na demostração do Teorema do Ponto de Sela e nas duas versões do Teorema do Passo da Montanha que iremos trabalhar. Nosso estudo seguirá os trabalhos de, Costa [4], Rabinowitz [11] e Willem [13].

1.1 Campo Pseudo-Gradiente

Nesta seção iremos entender o conceito e a construção de um campo pseudo-gradiente que serão fundamentais para a demonstração do Teorema de Deformação.

Definição 1.1 *Seja X um espaço de Banach, um campo pseudo-gradiente para $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é uma aplicação localmente Lipschitziana $V : Y \longrightarrow X$, que verifica*

$$\|V(u)\| \leq \alpha \|\phi'(u)\| \tag{1.1}$$

e

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \beta \|\phi'(u)\|^2, \tag{1.2}$$

onde $0 < \beta < \alpha$ *e* $Y = \{u \in X; \;\; \phi'(u) \neq 0\}$.

Lema 1.1 *Assumindo as condições da* **Definição 1.1**, *existe um campo pseudo-gradiente para ϕ em Y.*

Demostração: Seja $\widetilde{u} \in Y$, então $\phi'(\widetilde{u}) \neq 0$. Sendo $\phi'(\widetilde{u})$ um funcional linear contínuo, temos

$$\|\phi'(\widetilde{u})\| = \sup_{\|w\|=1} \langle \phi'(\widetilde{u}), w \rangle . \tag{1.3}$$

Uma vez que $0 < \beta < \alpha$, obtemos

$$\|\phi'(\widetilde{u})\| > \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)} \|\phi'(\widetilde{u})\| .$$

De (1.3), temos que existe $(w_n) \subset X$ com $\|w_n\| = 1$ e

$$\langle \phi'(\widetilde{u}), w_n \rangle \longrightarrow \|\phi'(\widetilde{u})\| .$$

Assim, existe $w = w_n$ para n suficientemente grande, tal que

$$\langle \phi'(\widetilde{u}), w \rangle > \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)} \|\phi'(\widetilde{u})\| . \tag{1.4}$$

Agora, definindo a função

$$\begin{array}{rccl} v : & Y & \longrightarrow & X \\ & \widetilde{u} & \longmapsto & v(\widetilde{u}) = \dfrac{(\alpha+\beta)}{2} \|\phi'(\widetilde{u})\| \, w, \end{array}$$

temos

$$\|v(\widetilde{u})\| = \frac{(\alpha+\beta)}{2} \|\phi'(\widetilde{u})\| \, \|w\| ,$$

o que implica

$$\|v(\widetilde{u})\| = \frac{(\alpha+\beta)}{2} \|\phi'(\widetilde{u})\| < \alpha \|\phi'(\widetilde{u})\| ,$$

ou seja,

$$\|v(\widetilde{u})\| < \alpha \|\phi'(\widetilde{u})\| .$$

Além disso,

$$\langle \phi'(\widetilde{u}), v(\widetilde{u}) \rangle = \left\langle \phi'(\widetilde{u}), \frac{(\alpha+\beta)}{2} \|\phi'(\widetilde{u})\| \, w \right\rangle ,$$

o que implica

$$\langle \phi'(\widetilde{u}), v(\widetilde{u}) \rangle = \frac{(\alpha+\beta)}{2} \|\phi'(\widetilde{u})\| \, \langle \phi'(\widetilde{u}), w \rangle .$$

De (1.4), obtemos

$$\langle \phi'(\widetilde{u}), v(\widetilde{u}) \rangle > \frac{(\alpha+\beta)}{2} \|\phi'(\widetilde{u})\| \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)} \|\phi'(\widetilde{u})\| ,$$

logo

$$\langle \phi'(\widetilde{u}), v(\widetilde{u}) \rangle > \beta \|\phi'(\widetilde{u})\|^2 .$$

Sendo ϕ' contínua, existe uma vizinhança aberta de $\widetilde{u} \in Y$, que denotaremos por $V_{\widetilde{u}}$, tal que para cada $u \in V_{\widetilde{u}}$,

$$\|v(\widetilde{u})\| < \alpha \|\phi'(u)\| \tag{1.5}$$

e

$$\langle \phi'(u), v(\widetilde{u})\rangle > \beta \left\|\phi'(u)\right\|^2. \tag{1.6}$$

Observe que a família $\{V_{\widetilde{u}};\ \widetilde{u} \in Y\}$ é uma cobertura para Y. Além disso, $Y \subset X$ é metrizável e portanto paracompacto. Logo, existe um refinamento localmente finito $\{V_{\widetilde{u}_i}\}_{i\in I}$. Assim, existe uma partição de unidade contínua e localmente Lipschitziana $\{\phi_i\}_{i\in I}$ subordinada a $\{V_{\widetilde{u}_i}\}_{i\in I}$ com $0 \leq \phi_i \leq 1$ e suporte em $V_{\widetilde{u}_i}$, onde

$$\sum_{i\,\in\, I} \phi_i = 1 \ \text{ em } \ Y.$$

Considerando

$$V(u) = \sum_{i\,\in\, I} \phi_i(u) v_i; \quad v_i = v(\widetilde{u_i}) \quad \forall \ u \in Y,$$

para cada $u \in Y$, existe $J \subset I$ finito tal que

$$V(x) = \sum_{i\,\in\, J} \phi_i(x) v_i, \quad \forall \ x \in B_\delta(u).$$

Para fixar a idéia, vamos supor $J = \{1, 2, ..., n_0\}$, $n_0 = n_0(u)$ e $\delta = \delta(u)$. Assim,

$$V(x) = \sum_{i\,=\,1}^{n_0} \phi_i(x) v_i, \quad \forall \ x \in B_\delta(u),$$

em particular

$$V(u) = \sum_{i\,=\,1}^{n_0} \phi_i(u) v_i.$$

Note que, V é localmente Lipschitziana, pois V é uma soma finita de funções $\phi_i(u)v_i$ localmente Lipschitziana. Além disso,

$$\|V(u)\| = \left\|\sum_{i\,=\,1}^{n_0} \phi_i(u) v_i\right\| \leq \sum_{i\,=\,1}^{n_0} \phi_i(u) \left\|v_i\right\|.$$

Assim, usando (1.5),

$$\|V(u)\| < \sum_{i\,=\,1}^{n_0} \phi_i(u) \alpha \left\|\phi'(u)\right\|,$$

o que implica

$$\|V(u)\| < \alpha \left\|\phi'(u)\right\| \sum_{i\,=\,1}^{n_0} \phi_i(u) = \alpha \left\|\phi'(u)\right\| \sum_{i\,\in\, I} \phi_i(u),$$

isto é,

$$\|V(u)\| < \alpha \left\|\phi'(u)\right\|.$$

Note agora, que tendo

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle = \left\langle \phi'(u), \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) v_i \right\rangle,$$

segue

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \langle \phi'(u), v_i \rangle .$$

Por (1.6), obtemos

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \beta \|\phi'(u)\|^2 ,$$

o que implica

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \beta \|\phi'(u)\|^2 \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u),$$

portanto

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \beta \|\phi'(u)\|^2 ,$$

mostrando assim a existência de um campo pseudo-gradiente para ϕ. ■

Observação: Seja X é um espaço de Hilbert e $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(X, \mathbb{R})$, com derivada localmente Lipschitziana. Então o gradiente de ϕ (quando restrito a Y),

$$\nabla \phi : Y \longrightarrow X$$

é um campo pseudo-gradiente.

De fato, como $\nabla \phi : X \longrightarrow X$ é definida através do Teorema da Representação de Riesz, de forma que $\nabla \phi(u) \in X$ é o único vetor tal que $\phi'(u)h = (h, \nabla \phi(u)) \quad \forall \; h \in X$ e

$$\|\nabla \phi(u)\|_X = \|\phi'(u)\|_{X'} ,$$

onde estamos denotando por (,) o produto interno em X, segue que $\nabla \phi$ verifica as condições (1.1) e (1.2) para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, pois:

i) $\|\nabla \phi(u)\| = \|\phi'(u)\| \leq 2 \|\phi'(u)\| \quad \forall \; u \in X$;

ii) $\langle \phi'(u), \nabla \phi(u) \rangle = (\nabla \phi(u), \nabla \phi(u)) = \|\nabla \phi(u)\|^2 = \|\phi'(u)\|^2 \quad \forall \; u \in X$. ■

1.2 Teorema de Deformação

Nesta seção enunciaremos algumas versões do Teorema de Deformação.

Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de ϕ se existe $u \in X$ com $\phi'(u) = 0$ e $\phi(u) = c$.

O conjunto de todos os pontos críticos no "nível" c será designado por

$$K_c = \{u \in X; \;\; \phi'(u) = 0 \;\; e \;\; \phi(u) = c\},$$

e denotaremos por ϕ^c o conjunto de todos os pontos em nível menores ou iguais a c, isto é,

$$\phi^c = \{u \in X; \;\; \phi(u) \leq c\}.$$

Definição 1.2 *Dado um subconjunto $S \subset X$ e $\alpha > 0$, designamos por S_α a vizinhança fechada de S definida por*

$$S_\alpha = \{u \in X; \;\; d(u, S) \leq \alpha\},$$

onde $d(u, S) = inf\,\{\|u - v\|\,; \;\; v \in S\}$.

Teorema 1.3 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R}))$. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $4\beta > \alpha$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \quad \forall \;\; u \in \phi^{-1}\left(\left[c - 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}. \qquad (1.7)$$

Então, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que $\;\forall\;\; u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:

(i) $\eta(0, u) = u$;
(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}\left(\left[c - 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}$;
(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$;
(iv) $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Idéia Geométrica: Considerando $S = X$, $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Figura 1.1: Deformação

Demonstração: Sejam

$$A = \phi^{-1}\left(\left[c - 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta},$$

$$B = \phi^{-1}\left(\left[c - \epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + \epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{\delta}$$

e

$$Y = \{u \in X; \;\; \phi'(u) \neq 0\}.$$

Assim, note que $B \subset A \subset Y$. Considere $V : Y \longrightarrow X$ um campo pseudo-gradiente para ϕ e uma função localmente Lipschitziana $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(u) = \frac{d(u, X \backslash A)}{d(u, X \backslash A) + d(u, B)}, \qquad \textbf{(Ver [5])}$$

de onde segue que $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho(u) = 1$ se $u \in B$ e $\rho(u) = 0$ se $u \in X \backslash A$. Considere ainda a seguinte aplicação localmente Lipschitziana $f : X \longrightarrow X$ definida por:

$$f(u) = \begin{cases} -\rho(u)\dfrac{V(u)}{\|V(u)\|}, & \text{se} \quad u \in A \\ 0, & \text{se} \quad u \notin A. \end{cases} \qquad \textbf{(Ver [5])}$$

Sendo $\|f(u)\| \leq 1, \quad \forall\, u \in X$, segue que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= f(w(t)) \\ w(0) &= u \end{cases}$$

tem para cada $u \in X$ a solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$ definida por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u).$$

Então,

(i) $\eta(0,u) = w(0,u) = u$;

(ii) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}\left(\left[c - 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1), c + 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1)\right]\right) \cap S_{2\delta}$.

De fato, considerando $w_1(t) = u, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\dot{w}_1(t) = 0 = f(w_1(t)) = f(u), \text{ se } u \notin A,$$

logo

$$\begin{cases} \dot{w}_1(t) &= f(w_1(t)), \text{ se } u \notin A \\ w_1(0) &= u. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções, se $u \notin A$

$$w(t) = w_1(t) = u, \quad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

portanto

$$\eta(t,u) = w(\delta t, u) = u, \quad \forall\ t \in [0,1];$$

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

De fato, note que para todo $t \geq 0$ e $u \in S$

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t f(w(\tau,u))d\tau,$$

o que implica

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\|\, d\tau \leq \int_0^t d\tau = t.$$

De modo que, sendo $S_\delta = \{v \in X;\ \ d(v,S) \leq \delta\}$, onde $d(v,S) = inf\left\{\|v - u\|;\ \ u \in S\right\}$, obtemos que $\forall\ t \in [0,\delta]$

$$\|w(t,u) - u\| \leq t \leq \delta,$$

de onde segue

$$d(w(t,u),S) \leq \delta, \quad \forall\ u \in S,$$

o que implica

$$w(t,u) \in\ S_\delta, \quad \forall\ u \in S,$$

ou seja,

$$w(t,S) \subset S_\delta, \quad \forall\ t \in [0,\delta].$$

Logo,

$$\eta(t,S) \subset S_\delta, \quad \forall \ t \in [0,1]. \tag{1.8}$$

Note também que, para cada $u \in X$ fixado, a função $\phi(w(t,u))$ é não-crescente, pois

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi'(w(t,u))\dot{w}(t,u)$$

e do problema de Cauchy,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi'(w(t,u))f(w(t,u)).$$

Da definição de f, tem-se $\dfrac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = 0$ se $w(t,u) \notin A$ e caso contrário,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = -\rho(w(t,u))\phi'(w(t,u))\frac{V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}.$$

Assim, de (1.2),

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq -\beta\rho(w(t,u))\frac{\|\phi'(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}, \tag{1.9}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq 0, \quad \forall \quad t \in \mathbb{R},$$

donde concluímos que $\phi(w(t,u))$ é não-crescente.

Se $u \in \phi^{c+\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)} \cap S$, note que:

a) Se $\phi(w(\widehat{t},u)) < c - \epsilon$, para algum $\widehat{t} \in [0,\delta)$, então

$$\phi(\eta(1,u)) = \phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(\widehat{t},u)) < c - \epsilon.$$

Portanto, de (1.8),

$$\eta(1,u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

b) Observe que para todo $t \in [0,\delta]$, temos

$$\phi(w(t,u)) \leq \phi(w(0,u)) = \phi(u) \leq c + \epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right),$$

consequentemente

$$\phi(w(t,u)) \leq c + \epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right).$$

Dessa forma, supondo que

$$w(t,u) \in B = \phi^{-1}\left(\left[c - \epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + \epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_\delta, \quad \forall \ t \in [0,\delta],$$

usando (1.1), (1.9) e o fato que $\rho \equiv 1$ em B, obtemos

$$\phi(w(\delta, u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\phi(w(t, u))dt,$$

de onde segue

$$\phi(w(\delta, u)) \leq \phi(u) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\delta \|\phi'(w(t, u))\|\, dt,$$

logo

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right) - \frac{\beta}{\alpha}\frac{4\epsilon}{\delta}\delta \leq c + \epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right) - \frac{\beta}{\alpha}4\epsilon,$$

mostrando que

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c - \epsilon.$$

Portanto, em qualquer um dos casos (a) ou (b)

$$\eta(1, u) = w(\delta, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta, \text{ se } u \in \phi^{c+\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)} \cap S;$$

(iv) $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. De fato, devemos mostrar que η é contínua e que possui inversa contínua.

Assim, considere as seguintes funções

$$\begin{aligned} g \ : \ X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto g(u) = w(\delta t, u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h \ : \ X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto h(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, h(u)),$$

de onde segue

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Usando propriedades de fluxo, obtemos

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u,$$

ou seja,

$$(g \circ h)(u) = u.$$

De modo análogo, temos

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Logo, temos que $\eta(t,u) = w(\delta t, u)$ possui inversa, dada por $\eta^{-1}(t,u) = w(-\delta t, u)$. Note ainda que $\eta(t,.)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais para $w(\delta t, u)$. Da mesma forma, temos que $\eta^{-1}(.,u)$ também é contínua, donde concluímos que $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. ■

Definição 1.4 *Dizemos que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale -(PS), se qualquer sequência (u_n) tal que $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi'(u_n) \longrightarrow 0$, quando $n \to +\infty$, possui uma subsequência convergente.*

Como consequência do **Teorema 1.3**, considerando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, obtemos os seguintes teoremas:

Teorema 1.5 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$. Suponha que ϕ satisfaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ϕ. Então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, $\forall\ u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:*
(i) $\eta(0,u) = u$;
(ii) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;
(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$;
(iv) $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração: Devem existir constantes θ,$\gamma > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([c-2\theta, c+2\theta])$, temos $\|\phi'(u)\| \geq \gamma$, pois , caso contrário, existe uma sequência (u_n) com

$$\phi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \phi'(u_n) \to 0, \;\; \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{1.10}$$

Por hipótese, temos que ϕ satisfaz a condição (PS), logo existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_k} \to u$ em X. Sendo $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$), segue-se

$$\phi(u_{n_k}) \to \phi(u) \tag{1.11}$$

e

$$\phi'(u_{n_k}) \to \phi'(u). \tag{1.12}$$

De (1.10)-(1.12), tem-se

$$\phi(u) = c \quad \text{e} \quad \phi'(u) = 0,$$

donde concluímos que c é um valor crítico de ϕ, contrariando a hipótese, logo mostramos que existem constantes θ,$\gamma > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([c-2\theta, c+2\theta])$, temos $\|\phi'(u)\| \geq \gamma$.

Assim, considerando $S = X$, $\epsilon \in (0, \theta]$ fixado e $\delta = \dfrac{4\epsilon}{\gamma}$, ou seja, $\gamma = \dfrac{4\epsilon}{\delta}$, pelo **Teorema 1.3**, segue o resultado. ■

Observação 1.1 *Na demonstração acima, observe que o* **Teorema 1.5** *é válido sob a seguinte condição mais fraca de compacidade introduzida por Brézis-Coron-Nirenberg:*

Condição $(\mathbf{PS})_\mathbf{c}$: *Se uma sequência (u_n) é tal que $\phi(u_n) \to c$ e $\phi'(u_n) \longrightarrow 0$, quando $n \to +\infty$, então c é um valor crítico de ϕ.*

Teorema 1.6 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale -(PS). Se U é uma vizinhança aberta de K_c, com $c \in \mathbb{R}$, então para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, $\forall\ u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:*
(i) $\eta(0, u) = u$;
(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;
(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \backslash U) \subset \phi^{c-\epsilon}$;
(iv) $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Idéia Geométrica:

Figura 1.2: Deformação

Demonstração: Seja $S = X \backslash U$. Então, existem constantes ϵ , $\delta > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$, temos $\|\phi'(u)\| \geq \dfrac{4\epsilon}{\delta}$, pois, caso contrário, para cada $\epsilon = \dfrac{1}{2n}$ e $\delta = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ com $n \in \mathbb{N}$, existiria

$$u_n \in \phi^{-1}([c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}]) \cap S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad \text{com} \quad \|\phi'(u_n)\| \leq \frac{4\sqrt{n}}{n},$$

ou seja,

$$\phi(u_n) \in [c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}] \quad \text{e} \quad u_n \in S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad \text{com} \quad \|\phi'(u_n)\| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Assim, teríamos uma sequência $(u_n) \subset S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ com

$$\phi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \phi'(u_n) \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{1.13}$$

Por hipótese, temos que ϕ satisfaz a condição (PS), logo existiria uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_k} \to u$ em X. Sendo $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue-se

$$\phi(u_{n_k}) \to \phi(u) \tag{1.14}$$

e

$$\phi'(u_{n_k}) \to \phi'(u). \tag{1.15}$$

De (1.13)-(1.15), tem-se

$$\phi(u) = c \quad \text{e} \quad \phi'(u) = 0,$$

donde concluímos que $u \in K_c$.

Por outro lado, temos que $u_n \in S_{1/\sqrt{n}}$, o que implica $d(u_n, S) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Além disso, sendo d uma função contínua, obtemos $d(u, S) = 0$. Dessa forma, uma vez que $S = X \backslash U$ é um conjunto fechado, segue-se $u \in S$.

Portanto, $u \in S \cap K_c$, o que é uma contradição, pois $S \cap U = \emptyset$, logo mostramos que existem constantes ϵ , $\delta > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$, temos $\|\phi'(u)\| \geq \dfrac{4\epsilon}{\delta}$.

Assim, considerando $S = X \backslash U$, pelo **Teorema 1.3**, segue o resultado. ■

Capítulo 2

Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo, demonstraremos um teorema devido a Ambrosetti-Rabinowitz [11], denominado Teorema do Passo da Montanha. Em seguida fazemos uma aplicação do mesmo, mostrando a existência de uma solução fraca para uma classe de problemas elípticos.

2.1 Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz.

Teorema 2.1 *Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale-(PS). Suponha que $I(0)=0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*
($\mathbf{I_1}$) *Existem constantes $\alpha,\ \rho > 0$ tais que $I\Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$, e*
($\mathbf{I_2}$) *Existe um $e \in E \backslash \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.*

Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} I(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in C\left([0,1], E\right) \ \backslash \ g(0)=0 \ \text{ e } \ g(1)=e\}$.

Idéia Geométrica:

Figura 2.1: Passo da Montanha

Demonstração: Seja $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$, ou seja, $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t))$. Afirmamos que c está bem definido. De fato, pois sendo $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $g \in C([0,1], E)$, segue que $I \circ g$ é uma função contínua e sendo $[0,1]$ um conjunto compacto, temos que $I \circ g$ possui máximo em $[0,1]$.

Afirmação 1: $\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \alpha, \quad \forall \ g \in \Gamma.$

De fato, seja $g \in \Gamma$ e defina

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) = \|g(t)\|. \end{array}$$

Observe que h é uma composição de funções contínuas, logo h é contínua. Além disso, sendo $e \in E \backslash \overline{B}_\rho$, temos que

$$h(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho,$$

ou seja, $h(0) < \rho < h(1)$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_\circ \in (0,1)$ tal que $h(t_\circ) = \|g(t_\circ)\| = \rho$, de onde segue pela condição $(\mathbf{I_1})$ que $I(g(t_\circ)) \geq \alpha$, logo

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \geq \alpha, \qquad \forall \quad g \in \Gamma, \tag{2.1}$$

mostrando assim a **Afirmação 1**.

Definindo $H = \left\{ \max\limits_{t\in[0,1]} I(g(t));\ \ g \in \Gamma \right\}$, segue-se da **Afirmação 1**, que H é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Assim pelo Postulado de Dedekind, existe o ínfimo de H em $\mathbb{R}$, isto é, $\inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I(g(t))$ está bem definido.

De (2.1) temos que α é uma cota inferior para H, consequentemente pela definição de c, segue que $c \geq \alpha$.

Suponha por contradição que c não é um valor crítico. Então, pelo **Teorema de Deformação 1.5**, temos que dado $0 < \epsilon < \dfrac{c-\alpha}{2}$, existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que
(i) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ e $t \in [0,1]$;
(ii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definição de c, existe $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \leq c + \epsilon. \tag{2.2}$$

Considere $\widetilde{h}(t) = \eta(1, g(t))$. Sendo $\eta \in C([0,1]\times E, E)$ e $g \in C([0,1], E)$, segue que $\widetilde{h} \in C([0,1], E)$. Uma vez que, $I(e) < \alpha < c - 2\epsilon$, tem-se $I(e) \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, o que implica $e \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$. Da mesma forma, sendo $I(0) = 0 < \alpha < c - 2\epsilon$, tem-se $I(0) \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, ou seja, $0 \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$. Assim, de **(i)**,

$$\widetilde{h}(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$\widetilde{h}(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, e) = e,$$

donde concluímos, que $\widetilde{h} \in \Gamma$. Por (2.2), obtemos

$$I(g(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica $g(t) \in I^{c+\epsilon} \quad \forall\, t \in [0,1]$. De (ii),

$$\widetilde{h}(t) = \eta(1, g(t)) \in I^{c-\epsilon} \quad \forall\, t \in [0,1],$$

ou seja, $I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon \quad \forall \ t \ \in \ [0,1]$, logo

$$\max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon$$

e sendo, $c = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I(g(t))$, temos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon,$$

visto que $\widetilde{h} \ \in \ \Gamma$. Assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que um absurdo. Portanto, concluímos que c é um valor crítico para I, finalizando assim a demonstração do **Teorema 2.1**. ■

2.2 Aplicação do Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção estudaremos a existência de solução para o seguinte problema:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + p(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue consideraremos $N \geq 3$ e as seguintes hipóteses sobre p :

$(\mathbf{J_1})$ $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(\mathbf{J_2})$ Existe uma constante $a_2 > 0$ tal que

$$|p(x,\xi)| \leq a_2 |\xi|^s, \quad \forall \ x \in \overline{\Omega} \ \text{ e } \ \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } \ 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

$(\mathbf{J_3})$ Existem constantes $2 < \mu \leq 2^*$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu P(x,\xi) \leq \xi p(x,\xi), \qquad \text{para } \ |\xi| \geq r, \ \text{ onde } \ P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt.$$

Além disso, denotaremos por

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

as normas em $E = H_0^1(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ respectivamente, ao longo de toda a dissertação.

Nosso objetivo é mostrar a existência de uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_1})$. O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.2 *Suponha que* $\lambda < \lambda_1$ *e* p *satisfaz as condições* $(J_1) - (J_3)$. *Então o Problema* (P_1) *possui uma solução fraca.*

Demonstração: Vamos mostrar que o funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right] dx - \int_\Omega P(x, u) dx.$$

onde $P(x, \xi) = \displaystyle\int_0^\xi p(x, t) dt$, satisfaz as hipóteses do **Teorema do Passo da Montanha 2.1** e assim, encontrar um ponto crítico para o funcional, pois já sabemos que existe uma relação entre os pontos críticos de I com as soluções fracas do **Problema** $(\mathbf{P_1})$, visto que

$$I'(u)v = \int_\Omega \left[\nabla u \nabla v - \lambda uv \right] dx - \int_\Omega p(x, u) v dx, \quad \forall \; u, \; v \; \in \; H_0^1(\Omega), \quad \textbf{(Ver Apêndice B)}$$

temos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é ponto crítico de I se $I'(u)v = 0$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \left[\lambda uv + p(x, u) v \right] dx, \quad \forall \; v \; \in \; H_0^1(\Omega),$$

de onde segue que u é uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_1})$.

Note que, se $\lambda < \lambda_1$, a função

$$\begin{aligned} \| \, \|_* \; : \; E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_* = \left(\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right] dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

define uma norma em E. De fato, considere em E a seguinte forma bilinear

$$\begin{aligned} \langle \, , \, \rangle_* \; : \; E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle_* = \int_\Omega \left[\nabla u \nabla v - \lambda uv \right] dx. \end{aligned}$$

Note que $\langle\ ,\ \rangle_*$ é um produto interno, pois $\langle\ ,\ \rangle_*$ verifica as seguintes propriedades:

[1] - $\langle u+v,w\rangle_* = \langle u,w\rangle_* + \langle v,w\rangle_* \quad \forall\ u,\ v,\ w\ \in\ E.$

[2] - $\langle u,v\rangle_* = \langle v,u\rangle_* \quad \forall\ u,\ v\ \in\ E.$

[3] - $\langle \alpha u,v\rangle_* = \alpha\,\langle u,v\rangle_* \quad \forall\ u,\ v\ \in\ E$ e $\alpha\ \in\ \mathbb{R}.$

[4] - $\langle u,u\rangle_* \geq 0,\ \ \forall\ \ u\ \in\ E.$

De fato, seja $u\ \in\ E$, então

$$\langle u,u\rangle_* = \int_\Omega \left[\nabla u \nabla u - \lambda u u\right] dx,$$

o que implica

$$\langle u,u\rangle_* = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \lambda \int_\Omega |u|^2\, dx.$$

Sendo $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \dfrac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2\, dx}$, temos

$$\lambda < \lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2\, dx}, \quad \forall\ \ u\ \in\ E\backslash\left\{0\right\},$$

o que implica

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \lambda \int_\Omega |u|^2\, dx, \quad \forall\ \ u\ \in\ E\backslash\left\{0\right\},$$

ou seja,

$$\langle u,u\rangle_* \geq 0, \quad \forall\ \ u\ \in\ E.$$

[5] - $\langle u,u\rangle_* = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$

De fato, considere $u\ \in\ E$ tal que $\langle u,u\rangle_* = 0$, note que:

i) Se $0 \leq \lambda < \lambda_1$,

$$\langle u,u\rangle_* \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2, \quad \forall\ \ u\ \in\ E,$$

de onde segue

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 \leq 0.$$

Por outro lado, temos que $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 \geq 0$, $\forall\ u \ \in\ E$ e $\lambda < \lambda_1$, portanto

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 = 0.$$

Sendo $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) > 0$, segue-se $\|u\| = 0$, o que implica $u = 0$.

ii) Se $\lambda < 0$,

$$\langle u, u \rangle_* = \|u\|^2 + |\lambda| \|u\|_{L^2}^2 = 0,$$

logo

$$\|u\|_{L^2} = 0 \quad \text{e} \quad \|u\| = 0,$$

o que implica $u = 0$.

De [1]-[5], podemos concluir que $\langle\ ,\ \rangle_*$ define um produto interno, assim

$$\|u\|_* = \sqrt{\langle u, u \rangle_*},$$

de onde segue que $\|\ \|_*$ é uma norma.

Afirmação 2: As normas $\|\ \|_*$ e $\|\ \|$ são equivalentes em E.

Temos que $\|u\|_*^2 \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2$, $\forall\ u \ \in\ E$ e $0 \leq \lambda < \lambda_1$. Considerando $C_1 = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{1/2}$,

$$\|u\|_* \geq C_1 \|u\|, \quad \forall\ u\ \in\ E.$$

Observe que para $\lambda < 0$, basta considerar $C_1 = 1$, pois

$$\|u\|_* = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + |\lambda| \int_\Omega |u|^2\, dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

ou seja,

$$\|u\|_* \geq \|u\|, \quad \forall\ u\ \in\ E.$$

Assim, considerando $C_2 = \min\{C_1, 1\}$, mostramos que existe $C_2 > 0$, tal que para $\lambda < \lambda_1$,

$$\|u\|_* \geq C_2 \|u\|, \quad \forall\ u\ \in\ E.$$

Por outro lado, temos

$$\|u\|_*^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \lambda\int_\Omega |u|^2\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + |\lambda|\int_\Omega |u|^2\,dx, \quad \forall\ u\ \in\ E \quad \text{e} \quad \lambda < \lambda_1.$$

o que implica

$$\|u\|_*^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \left(1+\frac{|\lambda|}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

Considerando $C_3 = \left(1+\frac{|\lambda|}{\lambda_1}\right)^{1/2}$,

$$\|u\|_* \leq C_3\,\|u\|\,, \qquad \forall\ u\ \in\ E.$$

Assim, existem C_2 e $C_3 > 0$ tais que

$$C_2\,\|u\| \leq \|u\|_* \leq C_3\,\|u\|\,, \quad \forall\ u\ \in\ E,$$

portanto, $\|\ \|_*$ e $\|\ \|$ são normas equivalentes em E.

Vamos mostrar que o funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right]dx - \int_\Omega P(x,u)dx,$$

onde $P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt$, satisfaz as hipóteses do **Teorema 2.1**.

Observe inicialmente que $E = H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach real. Sendo as condições $(\mathbf{J_1})$ e $(\mathbf{J_2})$ satisfeitas, segue que I está bem definido e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ **(ver Apêndice B)**. Além disso,

$$I'(u)v = \int_\Omega [\nabla u\nabla v - \lambda uv]\,dx - \int_\Omega p(x,u)vdx, \ \ \forall\ u,\ v\ \in\ E.$$

Note ainda que $I(0) = 0$. No que segue vamos mostrar que o funcional I verifica as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Verificação da condição $(\mathbf{I_1})$:

Da condição $(\mathbf{J_2})$, temos que existe uma constante $a_2 > 0$ tal que

$$|p(x,\xi)| \leq a_2\,|\xi|^s\,, \quad \text{onde} \quad 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1,$$

logo

$$|P(x,\xi)| \leq a_2\frac{|\xi|^{s+1}}{s+1},$$

de onde segue

$$|P(x,\xi)| \leq C_1 |\xi|^p, \quad \text{onde } \; 2 < p < 2^*.$$

Sendo

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \int_\Omega P(x,u)dx,$$

obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \int_\Omega C_1 |u|^p \, dx,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - C_1 \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Sendo as normas $\| \;\|$ e $\| \;\|_*$ equivalentes, obtemos

$$I(u) \geq C_2 \|u\|^2 - C_1 \|u\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

e pela imersões contínuas de Sobolev, temos

$$I(u) \geq C_2 \|u\|^2 - C_3 \|u\|^p.$$

Sendo C_2 e C_3 constantes positivas e $p > 2$, podemos encontrar $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \quad \text{para} \quad \|u\| = \rho,$$

mostrando que I satisfaz $(\mathbf{I_1})$.

Verificação da condição $(\mathbf{I_2})$:

De (J_3), temos que existem constantes $2 < \mu \leq 2^*$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu P(x,\xi) \leq \xi p(x,\xi), \quad \text{para} \quad |\xi| \geq r$$

Afirmação 3: Existem constantes positivas C e C_3, tais que $P(x,\xi) \geq C|\xi|^\mu - C_3, \quad \forall \; \xi \in \mathbb{R}$ e $x \in \overline{\Omega}$.

De fato, considerando $P(x,\xi) \neq 0$ e $\xi \neq 0$, vamos analisar os seguintes casos:

1º Caso: Para $\xi > 0$, obtemos

$$0 < \frac{\mu}{\xi} \leq \frac{p(x,\xi)}{P(x,\xi)}, \quad \text{para} \quad \xi \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega},$$

o que implica $\int_r^{\xi} \frac{\mu}{t} dt \leq \int_r^{\xi} \frac{p(x,t)}{P(x,t)} dt$, de onde segue

$$\mu ln\xi - \mu lnr \leq lnP(x,\xi) - lnP(x,r), \quad \text{para} \quad \xi \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega},$$

logo

$$ln\left(\frac{\xi}{r}\right)^{\mu} \leq ln\frac{P(x,\xi)}{P(x,r)}, \quad \text{para} \quad \xi \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Usando o fato da função ln ser uma função crescente, obtemos

$$\left(\frac{\xi}{r}\right)^{\mu} \leq \frac{P(x,\xi)}{P(x,r)}, \quad \text{para} \quad \xi \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega},$$

ou seja,

$$P(x,\xi) \geq \frac{P(x,r)}{r^{\mu}}\xi^{\mu}, \qquad \text{para} \quad \xi \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $M_1 = \min_{x \in \overline{\Omega}} P(x,r)$, observamos que M_1 está bem definido, visto que $P(.,r)$ é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto. Além disso,

$$P(x,\xi) \geq \frac{M_1}{r^{\mu}}\xi^{\mu}, \qquad \text{para} \quad \xi \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, fixado $C_1 = \frac{M_1}{r^{\mu}} > 0$,

$$P(x,\xi) \geq C_1\xi^{\mu}, \qquad \forall \quad \xi \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.3}$$

2º Caso: Para $\xi < 0$, obtemos

$$\frac{p(x,\xi)}{P(x,\xi)} \leq \frac{\mu}{\xi}, \qquad \text{para} \quad \xi \leq -r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega},$$

o que implica $\int_{\xi}^{-r} \frac{p(x,t)}{P(x,t)} dt \leq \int_{\xi}^{-r} \frac{\mu}{t} dt$, de onde segue

$$lnP(x,-r) - lnP(x,\xi) \leq \mu ln\left|-r\right| - \mu ln\left|\xi\right|, \qquad \text{para} \quad \xi \leq -r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega},$$

logo

$$ln\left|\frac{-r}{\xi}\right|^{\mu} \geq ln\frac{P(x,-r)}{P(x,\xi)}, \quad \text{para} \quad \xi \leq -r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Usando o fato da função ln ser uma função crescente, obtemos

$$\left|\frac{-r}{\xi}\right|^{\mu} \geq \frac{P(x,-r)}{P(x,\xi)}, \quad \text{para} \quad \xi \leq -r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega},$$

ou seja,

$$P(x,\xi) \geq \frac{P(x,-r)}{r^{\mu}} \, |\xi|^{\mu}, \quad \text{para} \quad \xi \leq -r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $M_2 = \min\limits_{x \in \overline{\Omega}} P(x,-r)$, observamos que M_2 está bem definido, visto que $P(.,-r)$ é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto. Além disso, tem-se

$$P(x,\xi) \geq \frac{M_2}{r^{\mu}} \, |\xi|^{\mu}, \quad \text{para} \quad \xi \leq -r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, considerando $C_2 = \dfrac{M_2}{r^{\mu}} > 0$,

$$P(x,\xi) \geq C_2 \, |\xi|^{\mu}, \quad \forall \quad \xi \leq -r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.4}$$

Considerando $C = min\,\{C_1, C_2\}$, segue-se de (2.3) e (2.4),

$$P(x,\xi) \geq C \, |\xi|^{\mu}, \quad \forall \quad |\xi| \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Dessa forma,

$$P(x,\xi) \geq C \, |\xi|^{\mu} - C_3, \quad \forall \quad |\xi| \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

onde $C_3 > 0$ é uma constante positiva arbitrária.

Considerando $M = \min\limits_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ \xi \in [-r,r]}} P(x,\xi)$, note que M está bem definido, pois P é contínua e $\overline{\Omega} \times [-r,r] \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ é um compacto, logo

$$P(x,\xi) \geq M, \quad \forall \quad x \in \overline{\Omega} \ \text{ e } \ \xi \in [-r,r]\,.$$

Considere $C_3 > 0$, de modo que

$$C_3 \geq C r^{\mu} - M,$$

logo

$$C_3 \geq C \, |\xi|^{\mu} - M, \ \ \forall \ \ \xi \in [-r,r]\,,$$

ou seja,

$$M \geq C \, |\xi|^{\mu} - C_3, \ \ \forall \ \ \xi \in [-r,r]\,.$$

Assim,

$$P(x,\xi) \geq C \, |\xi|^{\mu} - C_3, \ \ \forall \ \ \xi \in [-r,r] \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega} \tag{2.5}$$

e

$$P(x,\xi) \geq C \, |\xi|^{\mu} - C_3, \quad \forall \quad |\xi| \geq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6), segue

$$P(x,\xi) \geq C\,|\xi|^{\mu} - C_3, \ \ \forall \ \xi \ \in \ \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega},$$

donde concluímos que a **Afimação 3** é verdadeira.

Seja $u \ \in \ E\backslash\{0\}$ e $\varphi = tu$, com $t \ \in \ \mathbb{R}$. Note que, para $t \geq 0$

$$I(tu) = \frac{t^2}{2}\,\|u\|_*^2 - \int_{\Omega} P(x,tu)dx.$$

Sendo as normas $\|\ \|_*$ e $\|\ \|$ equivalentes, obtemos

$$I(tu) \leq C_4 t^2\,\|u\|^2 - \int_{\Omega} \left[C\,|tu|^{\mu} - C_3\right]dx.$$

Desde que $E \hookrightarrow L^{\mu}$, obtemos

$$I(tu) \leq C_4 t^2\,\|u\|^2 - Ct^{\mu}\,\|u\|_{L^{\mu}(\Omega)}^{\mu} + C_3\,|\Omega|\,,$$

onde estamos denotando por $|\Omega|$ a medida de Lebesgue de Ω. Portanto, como $\mu > 2$, temos que $I(tu) \longrightarrow -\infty$ quando $t \to +\infty$, logo existe $e \ \in \ E\backslash\overline{B}_{\rho}$ tal que $I(e) < 0$, mostrando assim que I satisfaz a condição $(\mathbf{I_2})$.

Verificação da condição (PS):

Seja (u_n) uma sequência (PS), isto é,

$$|I(u_n)| \leq M, \ \ \forall \ n \ \in \ \mathbb{N} \tag{2.7}$$

e

$$I'(u_n) \longrightarrow 0, \ \ \text{quando} \ \ n \to +\infty.$$

Vamos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente, ou seja, existe uma subsequência (u_{n_j}) tal que $u_{n_j} \to u$ em E. Note que $I'(u_n) \longrightarrow 0$ implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_{\circ} \ \in \ \mathbb{N}$ tal que

$$\|I'(u_n)\|_{E'} < \epsilon, \qquad \forall \ n \geq n_{\circ},$$

ou seja,

$$\sup_{\substack{\varphi \in E \\ \|\varphi\| \neq 0}} \frac{|I'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|} < \epsilon, \qquad \forall \ n \geq n_{\circ}.$$

Assim,

$$\frac{|I'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|} < \epsilon, \qquad \forall \ n \geq n_\circ \ \text{e} \ \varphi \ \in \ E\backslash \{0\},$$

isto é,

$$|I'(u_n)\varphi| \leq \epsilon \|\varphi\|, \qquad \forall \ n \geq n_\circ \ \text{e} \ \varphi \ \in \ E.$$

Sendo $u_n \ \in \ E$, obtemos

$$|I'(u_n)u_n| \leq \epsilon \|u_n\|, \qquad \forall \ n \geq n_\circ. \tag{2.8}$$

Observe agora que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_\Omega \lambda \, |u_n|^2 \, dx\right] - \int_\Omega P(x,u_n)dx -$$

$$-\frac{1}{\mu}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_\Omega \lambda \, |u_n|^2 \, dx\right] + \frac{1}{\mu}\int_\Omega p(x,u_n)u_n dx,$$

portanto

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_*^2 + \int_\Omega \left[\frac{1}{\mu}p(x,u_n)u_n - P(x,u_n)\right] dx.$$

Sendo $\| \ \|_*$ e $\| \ \|$ equivalentes,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 + \int_\Omega \left[\frac{1}{\mu}p(x,u_n)u_n - P(x,u_n)\right] dx.$$

Considerando $A_n = \{x \in \Omega \ ; \ \ |u_n(x)| \geq r\}$, tem-se

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 +$$

$$\int_{A_n} \left[\frac{1}{\mu}p(x,u_n)u_n - P(x,u_n)\right] dx + \int_{A_n^c} \left[\frac{1}{\mu}p(x,u_n)u_n - P(x,u_n)\right] dx.$$

Da condição $(\mathbf{J_3})$, segue

$$\frac{1}{\mu}p(x,u_n)u_n - P(x,u_n) \geq 0, \qquad \forall \ x \ \in \ A_n,$$

o que implica

$$\int_{A_n} \left[\frac{1}{\mu}p(x,u_n)u_n - P(x,u_n)\right] dx \geq 0,$$

logo

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 + \int_{A_n^c} \left[\frac{1}{\mu}p(x,u_n)u_n - P(x,u_n)\right] dx,$$

e consequentemente

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - \int_{A_n^c} \left|\frac{1}{\mu} p(x,u_n)u_n - P(x,u_n)\right| dx.$$

Sendo p e P funções contínuas, $g(x,t) = \left|\frac{1}{\mu} p(x,t)t - P(x,t)\right|$ é uma função contínua. Assim, uma vez que $\overline{\Omega} \times [-r,r]$ é um conjunto compacto, segue-se que g é limitada neste compacto, logo existe $C > 0$ tal que

$$|g(x,t)| \leq C, \quad \forall \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-r,r],$$

o que implica

$$\left|\frac{1}{\mu} p(x,u_n)u_n - P(x,u_n)\right| \leq C, \quad \forall \ x \in \overline{A_n^c}.$$

Assim,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - \int_{\overline{A_n^c}} C dx,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C \left|\overline{A_n^c}\right|.$$

Além disso,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C |\Omega|,$$

isto é,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C_2. \tag{2.9}$$

Por outro lado, de (2.7) e (2.8), segue-se

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \leq \left|I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n\right|,$$

o que implica

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \leq |I(u_n)| + \frac{1}{\mu} |I'(u_n)u_n|,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \leq |I(u_n)| + \frac{1}{\mu} \|I'(u_n)\|_{E'} \|u_n\|,$$

logo exite $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \leq M + \frac{1}{\mu} \epsilon \|u_n\|, \ \ \forall \ n \geq n_\circ. \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10), tem-se

$$M + \frac{1}{\mu}\epsilon \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C_2, \quad \forall \ n \geq n_\circ.$$

Fixando $\widetilde{M} = M + C_2 > 0$, $\widetilde{K} = \dfrac{\epsilon}{\mu}$ e $\widetilde{C} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mu}\right) C_1 > 0$, obtemos

$$\widetilde{M} + \widetilde{K} \|u_n\| \geq \widetilde{C} \|u_n\|^2, \quad \forall \ n \geq n_\circ,$$

mostrando que (u_n) é limitada em E.

Para provarmos que (u_n) possui uma subsequência convergente, aplicaremos a **Proposição C.1 (Ver Apêndice C)**. Portanto, no que segue mostraremos que I satisfaz as suas hipóteses. Considere $f(x,\xi) = \lambda\xi - p(x,\xi)$. Vamos mostrar que f satisfaz as condições $(\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{1})$ e $(\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{2})$ da **Proposição C.1**.

Verificação da condição $(\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{1})$:

Temos que p satisfaz $(\mathbf{J_1})$ e $\xi,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Logo, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Verificação da condição $(\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{2})$:

Pela condição $(\mathbf{J_2})$, obtemos

$$|f(x,\xi)| \leq |\lambda|\,|\xi| + |p(x,\xi)| \leq |\lambda|\,|\xi| + a_2 |\xi|^s, \quad \text{onde } \ 1 < s < 2^* - 1.$$

Observe que

$$\frac{|\lambda|\,|\xi| + a_2 |\xi|^s}{|\xi|^{s+\epsilon}} = \frac{|\lambda|}{|\xi|^{s+\epsilon-1}} + \frac{a_2}{|\xi|^{\epsilon}} \longrightarrow 0, \ \text{ quando } \quad |\xi| \to +\infty,$$

logo existe $R > 0$ tal que

$$|\lambda|\,|\xi| + a_2 |\xi|^s \leq \begin{cases} |\xi|^{s+\epsilon}, & \text{se } \ |\xi| > R \\ A, & \text{se } \ |\xi| \leq R \end{cases}$$

o que implica

$$|\lambda|\,|\xi| + a_2 |\xi|^s \leq A + |\xi|^{s+\epsilon}, \quad \text{onde } \ 1 < s < 2^* - 1.$$

Considerando $\alpha = s + \epsilon$, segue-se

$$|f(x,\xi)| \leq A + |\xi|^{\alpha}, \quad \text{onde } \ 1 < \alpha < 2^* - 1,$$

ou seja, f satisfaz $(\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{2}})$ para $s = \alpha$.

Portanto, mostramos que f satisfaz $(\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{1}})$ e $(\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{2}})$, logo podemos aplicar a **Proposição C.1**, para o funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} u^2 - P(x,u) \right) dx$$

donde concluímos que (u_n) possui uma subsequência convergente. Mostrando assim, que I satisfaz a **condição (PS)**.

Finalmente, podemos aplicar o **Teorema 2.1** e concluir a existência de um ponto crítico de I, isto é, uma solução fraca para o **problema** $(\mathbf{P_1})$, finalizando a demonstração do **Teorema 2.2**. $\blacksquare$

Capítulo 3

Teorema do Ponto de Sela

Nosso objetivo neste capítulo, é demonstrar o Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz [11] e mostrar uma aplicação de tal teorema.

3.1 Teorema do Ponto de Sela

Nesta seção, vamos demonstrar o Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz [11].

Definição 3.1 *Se D é uma vizinhança de 0 em X; a classe de deformação de $\overline{D}$ em X que fixa ∂D, denotada por Γ, é definida como sendo*

$$\Gamma = \left\{ h \in C(\overline{D}, X); \;\; h(u) = u, \;\; \forall \;\; u \in \partial D \right\}.$$

Teorema 3.2 *Seja $X = V \oplus W$ um espaço de Banach, com $V \neq \{0\}$ e $dim(V) < +\infty$, e seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ uma aplicação satisfazendo a condição de Palais-Smale-(PS). Se D é uma vizinhança limitada de 0 em V tal que*

$$a = \max_{\partial D} \phi < \inf_{W} \phi = b, \tag{3.1}$$

então

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u))$$

é um valor crítico de ϕ com $c \geq b$.

Idéia Geométrica:

Figura 3.1: Ponto de Sela

Demonstração: Primeiramente, vamos verificar que $h(D) \cap W \neq \emptyset$ qualquer que seja $h \in \Gamma$. De fato, defina

$$\begin{array}{rcl} P \,:\, X & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & P(x) = x_1, \end{array}$$

onde $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in V$, ou seja, P é a projeção X sobre V. Assim, $Ph \in C(\overline{D}, V)$ e $Ph(u) = Pu = u \neq 0, \quad \forall\ u \in \partial D$.

Portanto, uma vez que podemos indentificar V com $\mathbb{R}^N$, o grau de Brouwer $d(Ph, D, 0)$ está bem definido e pelas propriedades do grau **(Ver Apêndice D)**, segue

$$d(Ph, D, 0) = d(Id, D, 0) = 1.$$

Logo, existe $u_0 \in D$ tal que $Ph(u_0) = 0$, isto é, $h(u_0) \in W$, donde concluímos que

$$h(D) \cap W \neq \emptyset.$$

Assim, sendo $b = \inf\limits_{W} \phi = \inf \{\phi(w); \ \ w \in W\}$ e $h(u_0) \in W$,

$$b \leq \phi(h(u_0))$$

de onde segue

$$b \leq \phi(h(u_0)) \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)), \quad \forall\ h \in \Gamma,$$

portanto, pela definição de ínfimo, concluímos que $c \geq b$.

Suponha por contradição que c não é um valor crítico para ϕ. Então, pelo **Teorema de Deformação 1.5**, temos que dado $0 < \epsilon < \dfrac{b-a}{2}$, existe $\eta \in C([0,1]\times X, X)$ tal que

$$\eta(t,u) = u \ \text{ se } \ u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]), \quad \forall \ t \in [0,1] \tag{3.2}$$

e

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}. \tag{3.3}$$

Considere $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)) \leq c + \epsilon \tag{3.4}$$

e defina $\widehat{h}(u) = \eta(1, h(u))$. Sendo $2\epsilon < b - a$, ou seja, $a < b - 2\epsilon$, temos que

$$\phi(u) \leq \max_{u \in \partial D} \phi(u) = a,$$

o que implica

$$\phi(u) < b - 2\epsilon \leq c - 2\epsilon, \ \ \forall \ \ u \in \partial D,$$

e portanto

$$\phi(u) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon], \ \ \forall \ \ u \in \partial D,$$

isto é,

$$u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]).$$

Logo, por (3.2),

$$\widehat{h}(u) = \eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u, \ \ \forall \ \ u \in \partial D,$$

donde concluímos que $\widehat{h} \in \Gamma$. Além disso, de (3.3) e (3.4), obtemos

$$\phi(h(u)) \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica

$$h(u) \in \phi^{c+\epsilon}.$$

Assim, por (3.3)

$$\eta(1, h(u)) = \widehat{h}(u) \in \phi^{c-\epsilon}, \quad \forall \ \ u \in \overline{D},$$

isto é,

$$\max_{u \in \overline{D}} \phi(\widehat{h}(u)) \leq c - \epsilon.$$

Sendo $c \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)), \ \forall \ h \in \Gamma$, obtemos

$$c \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(\widehat{h}(u)) \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo. Assim, mostramos que $c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u))$ é um valor crítico para ϕ. ■

3.2 Aplicação do Teorema do Ponto de Sela

Nesta seção estudaremos a existência de solução para problemas do tipo

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + p(x,u), & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e λ é um autovalor associado ao problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta v &= \lambda v, & x \in \Omega \\ v &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue consideraremos $N \geq 3$ e as seguintes hipóteses sobre p:

$(\mathbf{H_1})$ $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(\mathbf{H_2})$ Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|p(x,\xi)| \leq M, \qquad \forall \ x \in \overline{\Omega} \ \text{ e } \ \xi \in \mathbb{R};$$

$(\mathbf{H_3})$ $P(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi p(x,t)dt \longrightarrow +\infty$, quando $|\xi| \to +\infty$ uniformemente para $x \in \Omega$.

Nosso objetivo é mostra a existência de uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_1})$. O principal resultado desta seção é o seguinte:

Teorema 3.3 *Suponha que $\lambda = \lambda_k \leq \lambda_{k+1}$ e p satisfaz as condições* $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_3})$. *Então o* **Problema** $(\mathbf{P_1})$ *possui uma solução fraca.*

Demonstração: Considere o funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$I(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \frac{\lambda_k}{2} u^2 - P(x,u) \right) dx.$$

Observe inicialmente que sendo as condições $(\mathbf{H_1})$ e $(\mathbf{H_2})$ satisfeitas, segue que I está bem definido e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ **(ver Apêndice B)**. Além disso, temos

$$I'(u)v = \int_\Omega [\nabla u \nabla v - \lambda_k uv]\, dx - \int_\Omega p(x,u)v dx, \quad \forall\ u,\ v\ \in\ E.$$

Seja $V \equiv \oplus_{j=1}^{k} V_{\lambda_j} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$, onde V_{λ_j} é o espaço gerado pelas autofunções v_n^j do **Problema** $(\mathbf{P_2})$ associadas ao autovalor λ_j, e normalizadas de modo que

$$\int_\Omega \left|\nabla v_n^j\right|^2 dx = 1 = \lambda_j \int_\Omega (v_n^j)^2 dx.$$

Seja $W \equiv \oplus_{j=k+1}^{\infty} V_{\lambda_j}$, com $W = V^\perp$, onde denotamos por $V^\perp$ o complementar ortogonal de V. Note que $E = V \oplus W$. Vamos mostrar que I satisfaz as seguintes condições:

$(\mathbf{I_1})$ Existe uma constante β tal que $I\Big|_W \geq \beta$.

$(\mathbf{I_2})$ Existe uma constante $\alpha < \beta$ e uma vizinhança limitada D de 0 em V tal que

$$I\Big|_{\partial D} \leq \alpha.$$

Condição (PS): Qualquer sequência (u_n) tal que $I(u_n)$ é limitada e $I'(u_n) \to 0$, possui uma subsequência convergente.

Uma vez demonstrado $(\mathbf{I_1})$, $(\mathbf{I_2})$ e a condição $(\mathbf{PS})$, pelo **Teorema do Ponto de Sela 3.2**, segue o **Teorema 3.3**.

Verificação da condição $(\mathbf{I_1})$:

Seja $u \in W$. Então $u = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j$, onde $\phi_j = \displaystyle\sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j$ e os v_i^j são as autofunções associadas a λ_j e s=dimV_{λ_j}. Usando o fato dos v_n^j serem ortonormais em E, segue

$$\left\langle v_n^i, v_m^j \right\rangle = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad n = m \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j \quad \text{ou} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Logo, $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$, se $i \neq j$, pois

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{p} a_n^i v_n^i, \sum_{m=1}^{s} a_m^j v_m^j \right\rangle = \sum_{n=1}^{p} \sum_{m=1}^{s} a_n^i a_m^j \left\langle v_n^i, v_m^j \right\rangle,$$

de onde segue

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0, \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

Note que

$$\left\langle \sum_{i=k+1}^{n} \phi_i, \sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right\rangle = \sum_{i=k+1}^{n} \left\langle \phi_i, \sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right\rangle = \sum_{i,j=k+1}^{n} \langle \phi_i, \phi_j \rangle ,$$

ou seja,

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right\|^2 = \sum_{j=k+1}^{n} \|\phi_j\|^2 . \tag{3.5}$$

Observe também que

$$\int_\Omega \lambda_k \left(\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right) \left(\sum_{i=k+1}^{n} \phi_i \right) dx = \sum_{j,i=k+1}^{n} \lambda_k \int_\Omega \phi_i \phi_j dx.$$

Usando novamente o fato dos v_n^j serem ortonormais, obtemos:

$$\int_\Omega \phi_i \phi_j dx = 0, \quad \text{se} \quad i \neq j,$$

visto que, sendo v_n^j ortonormais, temos que

$$\int_\Omega v_n^i v_m^j dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_j}, & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad n = m \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j \quad \text{ou} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Assim,

$$\int_\Omega \phi_i \phi_j dx = \int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{p} a_n^i v_n^i \right) \left(\sum_{m=1}^{s} a_m^j v_m^j \right) dx = \sum_{n=1}^{p} \left(\sum_{m=1}^{s} a_n^i a_m^j \int_\Omega v_n^i v_m^j dx \right),$$

o que implica

$$\int_\Omega \phi_i \phi_j dx = 0, \quad \text{se} \quad i \neq j,$$

logo

$$\int_\Omega \lambda_k \left(\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right) \left(\sum_{i=k+1}^{n} \phi_i \right) dx = \sum_{j,i=k+1}^{n} \lambda_k \int_\Omega \phi_i \phi_j dx = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_k \int_\Omega \phi_j \phi_j dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \lambda_k \left(\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right) \left(\sum_{i=k+1}^{n} \phi_i \right) dx = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_k \int_\Omega \phi_j^2 dx. \tag{3.6}$$

Por outro lado, sendo v_n^j soluções fracas do problema

$$(P_3) \qquad \begin{cases} -\Delta v^j &= \lambda_j v^j, & \Omega \\ v^j &= 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

segue

$$\int_\Omega \nabla v_n^j \nabla h dx = \int_\Omega \lambda_j v_n^j h dx, \quad \forall \ h \in E.$$

Fixando $h = v_n^j$, obtemos

$$\left\|v_n^j\right\|^2 = \int_\Omega \left|\nabla v_n^j\right|^2 dx = \int_\Omega \lambda_j \left(v_n^j\right)^2 dx.$$

Note que, $\phi_j = \sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j$ também é solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_3})$. De fato, pois

$$-\Delta\left(\sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j\right) = \sum_{n=1}^{s} a_n^j \left(-\Delta v_n^j\right) = \sum_{n=1}^{s} a_n^j \lambda_j v_n^j,$$

o que implica

$$\begin{cases} -\Delta\left(\sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j\right) & = & \lambda_j\left(\sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j\right), & \Omega \\ \sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j & = & 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta\phi_j & = & \lambda_j\phi_j, & \Omega \\ \phi_j & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo ϕ_j uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_3})$, temos

$$\|\phi_j\|^2 = \int_\Omega |\nabla\phi_j|^2 dx = \lambda_j \int_\Omega \phi_j^2 dx,$$

de onde segue

$$\frac{\|\phi_j\|^2}{\lambda_j} = \int_\Omega \phi_j^2 dx. \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7), obtemos

$$\int_\Omega \lambda_k \left(\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n} \phi_i\right) dx = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_k \frac{\|\phi_j\|^2}{\lambda_j} = \sum_{j=k+1}^{n} \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda_k}{\lambda_j}. \tag{3.8}$$

Assim, de (3.5) e (3.8),

$$\left\|\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j\right\|^2 - \lambda_k \int_\Omega \left(\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n} \phi_i\right) dx = \sum_{j=k+1}^{n} \|\phi_j\|^2 - \sum_{j=k+1}^{n} \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda_k}{\lambda_j},$$

o que implica

$$\left\|\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j\right\|^2 - \lambda_k \int_\Omega \left(\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n} \phi_i\right) dx = \sum_{j=k+1}^{n} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right).$$

Uma vez que $\lambda_{k+1} \leq \lambda_j \quad \forall \quad j \geq k+1$,

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right\|^2 - \lambda_k \int_\Omega \left(\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right) \left(\sum_{i=k+1}^{n} \phi_i \right) dx \geq \sum_{j=k+1}^{n} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right),$$

logo

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right\|^2 - \lambda_k \int_\Omega \left(\sum_{j=k+1}^{n} \phi_j \right) \left(\sum_{i=k+1}^{n} \phi_i \right) dx \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{n} \|\phi_j\|^2 . \tag{3.9}$$

Sendo as funções $f(u) = \|u\|^2$ e $g(u) = \lambda_k \int_\Omega u^2 dx$ contínuas, passando ao limite em (3.5) e (3.9) quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j \right\|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\phi_j\|^2$$

e

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j \right\|^2 - \lambda_k \int_\Omega \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j \right) \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \phi_i \right) dx \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\phi_j\|^2 .$$

Assim,

$$\|u\|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\phi_j\|^2$$

e

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2 \right) dx \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \|u\|^2 , \quad \forall \quad u \in W. \tag{3.10}$$

Considerando $M \equiv \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} |p(x,\xi)|$, o mesmo está bem definido devido a condição $(\mathbf{H_2})$. Então,

$$\left| \int_\Omega P(x,u)dx \right| \leq \int_\Omega |P(x,u)|\, dx = \int_\Omega \left| \int_0^u p(x,t)dt \right| dx,$$

o que implica

$$\left| \int_\Omega P(x,u)dx \right| \leq \int_\Omega M\,|u|\, dx = M \int_\Omega |u|\, dx = M\, \|u\|_{L^1(\Omega)} .$$

Sendo Ω limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, segue

$$\left| \int_\Omega P(x,u)dx \right| \leq M_1 \|u\| , \quad \forall \quad u \in E. \tag{3.11}$$

De (3.10) e (3.11),

$$I(u) \geq \left| \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2 \right) dx \right| - \left| \int_\Omega P(x,u)dx \right| ,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|u\|^2 - M_1 \|u\|\,, \quad \forall \quad u \in W.$$

Considerando $M_2 = \left(1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)$, temos

$$I(u) \geq M_2 \|u\|^2 - M_1 \|u\|\,, \quad \forall \quad u \in W,$$

logo, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$I(u) \geq \beta, \quad \forall \quad u \in W,$$

mostrando assim, a condição $(\mathbf{I_1})$.

Verificação da condição $(\mathbf{I_2})$:

Seja $u \in V$, então $u = u^\circ + u^-$, onde $u^\circ \in E^\circ \equiv V_{\lambda_k}$ e $u^- \in E^- \equiv \oplus_{j=1}^{k-1} V_{\lambda_j}$.

Afirmação 1: $\|u\|^2 = \|u^\circ\|^2 + \|u^-\|^2$.

De fato, note que

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \left\langle u^\circ + u^-, u^\circ + u^- \right\rangle,$$

o que implica

$$\|u\|^2 = \langle u^\circ, u^\circ \rangle + 2 \left\langle u^\circ, u^- \right\rangle + \left\langle u^-, u^- \right\rangle.$$

Sendo $u^\circ \in E^\circ \equiv V_{\lambda_k}$ e $u^- \in E^- \equiv \oplus_{j=1}^{k-1} V_{\lambda_j}$, então u° e u^- são da forma $u^\circ = \phi_k$ e $u^- = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \phi_j$, onde $\phi_j = \displaystyle\sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j$. Assim,

$$\left\langle u^\circ, u^- \right\rangle = \left\langle \phi_k, \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} \langle \phi_k, \phi_j \rangle = 0,$$

pois, já mostramos que $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$, se $i \neq j$, logo

$$\|u\|^2 = \langle u^\circ, u^\circ \rangle + \left\langle u^-, u^- \right\rangle,$$

ou seja,

$$\|u\|^2 = \|u^\circ\|^2 + \left\|u^-\right\|^2,$$

mostrando a **Afirmação 1**.

Agora, sendo $u \in V$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|u\|^2 = \|u^\circ\|^2 + \left\|u^-\right\|^2 = \int_\Omega |\nabla u^\circ|^2\, dx + \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx,$$

o que implica

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega |\nabla u^\circ|^2\, dx + \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx. \tag{3.12}$$

Observe também que

$$\int_\Omega \lambda_k u^2 dx = \int_\Omega \lambda_k uudx = \int_\Omega \lambda_k(u^\circ + u^-)(u^\circ + u^-)dx = \int_\Omega \lambda_k \left[(u^\circ)^2 + (u^-)^2 + 2u^\circ u^-\right] dx.$$

de onde segue

$$\int_\Omega \lambda_k u^2 dx = \lambda_k \int_\Omega (u^\circ)^2 dx + \lambda_k \int_\Omega (u^-)^2 dx + 2\lambda_k \int_\Omega u^\circ u^- dx.$$

Mas,

$$\int_\Omega u^\circ u^- dx = \int_\Omega \phi_k \left(\sum_{j=1}^{k-1} \phi_j\right) dx = \sum_{j=1}^{k-1} \int_\Omega \phi_k \phi_j dx = 0,$$

visto que já mostramos anteriormente que $\int_\Omega \phi_i \phi_j dx = 0$, se $i \neq j$. Logo,

$$\int_\Omega \lambda_k u^2 dx = \lambda_k \int_\Omega (u^\circ)^2 dx + \lambda_k \int_\Omega (u^-)^2 dx. \tag{3.13}$$

De (3.12) e (3.13),

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2\right) dx = \int_\Omega |\nabla u^\circ|^2\, dx - \lambda_k \int_\Omega (u^\circ)^2 dx + \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx - \lambda_k \int_\Omega (u^-)^2 dx,$$

sendo $u^\circ = \phi_k$ uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_3})$ com $j = k$, segue

$$\int_\Omega |\nabla u^\circ|^2\, dx - \lambda_k \int_\Omega (u^\circ)^2 dx = 0,$$

e portanto

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2\right) dx = \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx - \lambda_k \int_\Omega (u^-)^2 dx.$$

Uma vez que $u^- \in E^-$, temos $u^- = \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j$, onde $\phi_j = \sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j$, logo

$$\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx = \left\langle u^-, u^-\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i, \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{k-1} \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \sum_{j=1}^{k-1} \langle \phi_j, \phi_j \rangle,$$

o que implica

$$\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2. \tag{3.14}$$

Observe também que

$$\int_\Omega \lambda_k (u^-)^2 dx = \int_\Omega \lambda_k u^- u^- dx = \int_\Omega \lambda_k \left(\sum_{j=1}^{k-1} \phi_j\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} \phi_j\right) dx = \lambda_k \sum_{j,i=1}^{k-1} \int_\Omega \phi_i \phi_j dx,$$

logo

$$\int_\Omega \lambda_k (u^-)^2 dx = \lambda_k \sum_{j=1}^{k-1} \int_\Omega \phi_j \phi_j dx = \lambda_k \sum_{j=1}^{k-1} \int_\Omega \phi_j^2 dx = \lambda_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|\phi_j\|^2}{\lambda_j},$$

ou seja,

$$\int_\Omega \lambda_k (u^-)^2 dx = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda_k}{\lambda_j}. \tag{3.15}$$

De (3.14) e (3.15),

$$\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx - \lambda_k \int_\Omega (u^-)^2 dx = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda_k}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right).$$

Usando o fato de $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$, obtemos

$$\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx - \lambda_k \int_\Omega (u^-)^2 dx \leq \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right). \tag{3.16}$$

Sendo

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2\right) dx - \int_\Omega P(x,u)dx = \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx - \lambda_k \int_\Omega (u^-)^2 dx - \int_\Omega P(x,u)dx,$$

temos

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) - \int_\Omega P(x,u)dx,$$

o que implica

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) - \int_\Omega P(x,u^\circ)dx - \int_\Omega \left[P(x,u^\circ + u^-) - P(x,u^\circ)\right] dx.$$

Assim,

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) - \int_\Omega P(x,u^\circ)dx + \int_\Omega \left|P(x,u^\circ + u^-) - P(x,u^\circ)\right| dx. \tag{3.17}$$

Afirmação 2: $\displaystyle\int_\Omega \left|P(x,u^\circ + u^-) - P(x,u^\circ)\right| dx \leq M_1 \left\|u^-\right\|$.

De fato, considere sem perda de generalidade que $u^\circ < u^\circ + u^-$ para cada x fixado e defina

$$\begin{aligned} g \ : \ [u^\circ, u^\circ + u^-] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \qquad &\longmapsto g(t) = P(x,t). \end{aligned}$$

Note que g é contínua em $[u^\circ, u^\circ + u^-]$ e derivável em $(u^\circ, u^\circ + u^-)$ com derivada $g'(t) = p(x,t)$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in (u^\circ, u^\circ + u^-)$, tal que

$$g(u^\circ + u^-) - g(u^\circ) = g'(s)\left[(u^\circ + u^-) - u^\circ\right],$$

logo

$$P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ) = p(x,s)u^-, \quad \text{onde} \quad s \in (u^\circ, u^\circ + u^-),$$

o que implica por $(\mathbf{H_2})$

$$\int_\Omega \left|P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)\right| dx \leq M \int_\Omega \left|u^-\right| dx,$$

e portanto

$$\int_\Omega \left|P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)\right| dx \leq M \left\|u^-\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo, Ω limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, temos

$$\int_\Omega \left|P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)\right| dx \leq M_1 \left\|u^-\right\|.$$

mostrando assim a **Afirmação 2**.

Voltando a desigualdade (3.17), obtemos

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) - \int_\Omega P(x, u^\circ)dx + M_1 \left\|u^-\right\|.$$

Considerando $M_2 = \left|1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right|$, temos $-M_2 = 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}$, visto que $1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} < 0$. Assim,

$$I(u) \leq -M_3 \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 - \int_\Omega P(x, u^\circ)dx + M_1 \left\|u^-\right\|, \quad \text{onde} \quad -M_3 = -\frac{1}{2}M_2,$$

isto é,

$$I(u) \leq -M_3 \left\|u^-\right\|^2 - \int_\Omega P(x, u^\circ)dx + M_1 \left\|u^-\right\|, \quad \forall \ u \in V, \tag{3.18}$$

logo, lembrando que $\|u\|^2 = \|u^\circ\|^2 + \|u^-\|^2$, então quando $\|u\| \to +\infty$, temos as seguintes possibilidades:

(1) $\|u^\circ\| \to +\infty$ e $\|u^-\| \to +\infty$;

(**2**) $\|u^\circ\| \to +\infty$ e $\|u^-\|$ limitada;

(**3**) $\|u^-\| \to +\infty$ e $\|u^\circ\|$ limitada.

Supondo sem perda de generalidade que $\|u^-\| > 0$, segue de (3.18)

$$I(u) \leq \left\|u^-\right\|^2 \left(-M_3 + \frac{M_1}{\|u^-\|}\right) - \int_\Omega P(x, u^\circ)dx, \ \ \forall \ \ u \in V.$$

Note que, se (1) ou (2) ocorrer, pelo **Lema (C.1) (Ver Apêndice C)**, segue

$$I(u) \to -\infty.$$

Por outro lado, se (3) ocorrer, então sendo $\|u^\circ\|$ limitada, temos

$$\left|\int_\Omega P(x, u^\circ)dx\right| \leq \int_\Omega |P(x, u^\circ)|\, dx \leq \int_\Omega M\, |u^\circ|\, dx = M\, \|u^\circ\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo Ω limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left|\int_\Omega P(x, u^\circ)dx\right| \leq \widetilde{M}\, \|u^\circ\| \leq \overline{M},$$

logo

$$I(u) \to -\infty.$$

Portanto, concluímos que $I(u) \to -\infty$ quando $u \to +\infty$ em V, mostrando que I satisfaz a condição ($\mathbf{I_2}$).

Verificação da condição (PS):

Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência do tipo (PS), isto é, existe $C > 0$, tal que

$$|I(u_n)| \leq C \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0.$$

Devemos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente, ou seja, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \to u$ em E. Sendo $u_n \in E = V \oplus X = E^\circ \oplus E^- \oplus X$, então $u_n = u_n^\circ + u_n^- + u_n^+$, onde $u_n^\circ \in E^\circ$, $u_n^- \in E^-$ e $u_n^+ \in X$. Assim,

$$\|u_n\|^2 = \|u_n^\circ\|^2 + \left\|u_n^-\right\|^2 + \left\|u_n^+\right\|^2.$$

Agora, sendo

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega u_n^2 dx - \int_\Omega P(x, u_n)dx,$$

segue-se que para cada $h \in E$, temos

$$|I'(u_n)h| = \left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla h dx - \lambda_k \int_\Omega u_n h dx - \int_\Omega p(x,u_n) h dx \right|. \tag{3.19}$$

(i) Considerando $h = u_n^+$ em (3.19), obtemos

$$\left|I'(u_n)u_n^+\right| = \left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^+ dx - \lambda_k \int_\Omega u_n u_n^+ dx - \int_\Omega p(x,u_n) u_n^+ dx \right|. \tag{3.20}$$

Afirmação 3: $|I'(u_n)h| \leq \|h\|, \quad \forall\ h \in E$ e n suficientemente grande.

De fato, sendo $I'(u_n)$ um funcional linear contínuo,

$$|I'(u_n)h| \leq \|I'(u_n)\| \, \|h\|.$$

Por hipótese temos $I'(u_n) \to 0$, o que implica $\|I'(u_n)\| \to 0$. Logo, existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|I'(u_n)\| < 1, \qquad \text{para} \qquad n \geq n_\circ.$$

Portanto,

$$|I'(u_n)h| \leq \|h\|, \quad \text{para} \quad n \geq n_\circ,$$

mostrando assim a **Afirmação 3**.

Voltando a (3.20), obtemos

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^+ dx - \lambda_k \int_\Omega u_n u_n^+ dx - \int_\Omega p(x,u_n) u_n^+ dx \right|,$$

ou seja,

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \int_\Omega \nabla\left(u_n^\circ + u_n^- + u_n^+\right) \nabla u_n^+ dx - \lambda_k \int_\Omega \left(u_n^\circ + u_n^- + u_n^+\right) u_n^+ dx - \int_\Omega p(x,u_n) u_n^+ dx,$$

o que implica

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^2 dx - \lambda_k \int_\Omega (u_n^+)^2 dx - \int_\Omega p(x,u_n) u_n^+ dx.$$

Sendo $u_n^+ \in W$, pela desigualdade (3.10),

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \left\|u_n^+\right\|^2 - \int_\Omega p(x,u_n) u_n^+ dx,$$

o que implica

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \left\|u_n^+\right\|^2 - \int_\Omega |p(x,u_n)| \left|u_n^+\right| dx.$$

Pela condição $(\mathbf{H_2})$, segue

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\left\|u_n^+\right\|^2 - M\left\|u_n^+\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo Ω limitado, pelas imersões contínua de Sobolev, obtemos

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\left\|u_n^+\right\|^2 - M_1\left\|u_n^+\right\|.$$

Considerando $M_2 = 1-\dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}$, temos

$$(1+M_1)\left\|u_n^+\right\| \geq M_2\left\|u_n^+\right\|^2.$$

Note que, para $\|u_n^+\| > 0$, temos $\|u_n^+\| \leq M_3$, onde $M_3 = \dfrac{(1+M_1)}{M_2}$, mostrando que (u_n^+) é limitada.

(ii) Vamos mostrar que (u_n^-) é limitada.

Considerando $h = u_n^-$ em (3.19), obtemos

$$\left|I'(u_n)u_n^-\right| = \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^- dx - \lambda_k\int_\Omega u_n u_n^- dx - \int_\Omega p(x,u_n)u_n^- dx\right|.$$

Pela **Afirmação 3**, temos

$$\left\|u_n^-\right\| \geq \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^- dx - \lambda_k\int_\Omega u_n u_n^- dx - \int_\Omega p(x,u_n)u_n^- dx\right|,$$

de onde segue

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left[\int_\Omega \nabla\left(u_n^\circ + u_n^- + u_n^+\right)\nabla u_n^- dx - \lambda_k\int_\Omega \left(u_n^\circ + u_n^- + u_n^+\right)u_n^- dx - \int_\Omega p(x,u_n)u_n^- dx\right],$$

o que implica

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left[\int_\Omega \left|\nabla u_n^-\right|^2 dx - \lambda_k\int_\Omega (u_n^-)^2 dx\right] + \int_\Omega p(x,u_n)u_n^- dx.$$

Pela desigualdade (3.16), segue

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u_n^-\right\|^2 + \int_\Omega p(x,u_n)u_n^- dx,$$

logo

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u_n^-\right\|^2 - \int_\Omega \left|p(x,u_n)\right|\left|u_n^-\right| dx.$$

e pela condição $(\mathbf{H_2})$, temos

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u_n^-\right\|^2 - M\left\|u_n^-\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo Ω limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u_n^-\right\|^2 - M_1\left\|u_n^-\right\|.$$

Considerando $M_2 = -\left(1-\dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)$ e sendo $M_1,\ M_2 > 0$ temos

$$(1+M_1)\left\|u_n^-\right\| \geq M_2\left\|u_n^-\right\|^2$$

donde concluímos que, para $\|u_n^-\| > 0$, temos $\|u_n^-\| \leq M_3$, onde $M_3 = \dfrac{(1+M_1)}{M_2}$, mostrando que (u_n^-) é limitada.

(iii) Vamos mostrar que (u_n°) é limitada.

Sendo $I(u_n) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \dfrac{\lambda_k}{2}\displaystyle\int_\Omega u_n^2 dx - \displaystyle\int_\Omega P(x,u_n)dx$, tem-se que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n^\circ\|^2 - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega (u_n^\circ)^2 dx + \frac{1}{2}\left\|u_n^-\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|u_n^+\right\|^2 - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega \left[(u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right]dx - \int_\Omega P(x,u_n)dx.$$

Sendo u_n° uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_3})$ com $j=k$, segue

$$\frac{1}{2}\|u_n^\circ\|^2 - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega (u_n^\circ)^2 dx = 0,$$

portanto

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2 - \lambda_k\left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right)\right]dx - \int_\Omega P(x,u_n)dx,$$

o que implica

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2 - \lambda_k\left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right)\right]dx$$

$$-\int_\Omega \left[P(x,u_n) - P(x,u_n^\circ)\right]dx - \int_\Omega P(x,u_n^\circ)dx.$$

Logo,

$$\left|\int_\Omega P(x,u_n^\circ)dx\right| = \left|\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2\right]dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda_k\left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right)dx - \right.$$

$$\left.\int_\Omega \left[P(x,u_n) - P(x,u_n^\circ)\right]dx - I(u_n)\right|,$$

de onde segue

$$\left|\int_\Omega P(x,u_n^\circ)dx\right| \leq \left|\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2\right] dx\right| +$$

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega \lambda_k \left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right) dx\right| + \left|\int_\Omega \left[P(x,u_n) - P(x,u_n^\circ)\right] dx\right| + \left|I(u_n)\right|. \qquad (3.21)$$

Agora observe o seguinte:

(iii-1) Sendo (u_n^-) e (u_n^+) limitadas, temos

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2\right] dx\right| = \frac{1}{2}\left\|u_n^-\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|u_n^+\right\|^2 \leq \frac{1}{2}K_1^2 + \frac{1}{2}K_2^2 = K_3.$$

(iii-2) Sendo $\left|\frac{1}{2}\int_\Omega \lambda_k \left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right) dx\right| \leq \frac{|\lambda_k|}{2}\int_\Omega \left|(u_n^-)^2\right| dx + \frac{|\lambda_k|}{2}\int_\Omega \left|(u_n^+)^2\right| dx$, obtemos,

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega \lambda_k \left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right) dx\right| \leq \frac{|\lambda_k|}{2}\left[\left\|u_n^-\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|u_n^+\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right].$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega \lambda_k \left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right) dx\right| \leq C\left[\left\|u_n^-\right\|^2 + \left\|u_n^+\right\|^2\right] \leq C\left[K_1^2 + K_2^2\right] = K_4.$$

(iii-3) Sendo $\left|\int_\Omega \left[P(x,u_n) - P(x,u_n^\circ)\right] dx\right| \leq \int_\Omega \left|P(x,u_n) - P(x,u_n^\circ)\right| dx$, usando o Teorema do Valor Médio e pela condição $(\mathbf{H_2})$, obtemos

$$\int_\Omega \left|P(x,u_n) - P(x,u_n^\circ)\right| dx \leq M\left\|u_n - u_n^\circ\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo $u_n = u_n^\circ + u_n^- + u_n^+$, segue que $u_n - u_n^\circ = u_n^+ + u_n^-$. Assim,

$$\int_\Omega \left|P(x,u_n) - P(x,u_n^\circ)\right| dx \leq M\left\|u_n^+ + u_n^-\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Agora, sendo Ω limitado, pelas imersões de Sobolev, obtemos

$$\int_\Omega \left|P(x,u_n) - P(x,u_n^\circ)\right| dx \leq M_1\left\|u_n^+ + u_n^-\right\| \leq M_1\left(\left\|u_n^+\right\| + \left\|u_n^-\right\|\right) \leq M_1\left(K_1 + K_2\right) = K_5,$$

(iii-4) Por hipótese temos que, existe $C > 0$, tal que $|I(u_n)| \leq C, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Logo, de (iii-1)-(iii-4) e (3.21), concluímos que

$$\left|\int_\Omega P(x,u_n^\circ)dx\right| \leq K_3 + K_4 + K_5 + C = K, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

e sendo $\int_\Omega P(x, u_n^\circ)dx$ limitada, segue pelo **Lema C.1 (Ver Apêndice C)**, que a menos de subsequência temos que (u_n°) é limitada. Portanto, de (i)-(iii), concluímos que (u_n) é limitada em E.

Repetindo o mesmo tipo de argumento utilizado no **Capítulo 2**, mostra-se que I satisfaz as condições $(\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{1})$ e $(\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{2})$ da **Proposição C.1**, donde concluímos que (u_n) possui uma subsequência convergente, mostrando assim que I satisfaz a **condição (PS)**. Finalmente, podemos aplicar o **Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz 3.2** e concluir a existência de um ponto crítico de I, isto é, uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_1})$, demonstrando o **Teorema 3.3**. ■

Capítulo 4

Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Neste capítulo, demonstraremos uma versão mais generalizada do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [11]. Em seguida fazemos uma aplicação do mesmo, mostrando a existência de uma solução fraca para um determinado problema.

4.1 Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Nesta seção vamos demonstrar a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha:

Teorema 4.1 *Seja* $E = V \oplus X$ *um espaço de Banach real, onde* $dim V < +\infty$. *Considere* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale-(PS) e as seguintes condições:*
$(\mathbf{I_1})$ *Existem constantes* $\alpha,\ \rho > 0$ *tais que* $I\Big|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$, *e*
$(\mathbf{I_2})$ *Existe* $e \in \partial B_1 \cap X$ *e* $R > \rho$ *tais que, se* $Q \equiv \{B_R \cap V\} \oplus \{re\ ;\ \ 0 < r < R\}$, *então* $I\Big|_{\partial Q} \leq 0$.
Então, I *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$, *com*

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} I(h(u)),$$

onde $\Gamma = \left\{h \in C\left(\overline{Q}, E\right);\ \ h = id \ \ em\ \ \partial Q\right\}$.

Demonstração: Seja $c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{u\in\overline{Q}} I(h(u))$. Vamos provar inicialmente que c está bem definido. De fato, sendo $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ e $h \in C\left(\overline{Q}, E\right)$, tem-se que $I \circ h$ é uma função contínua e sendo $\overline{Q}$ um conjunto compacto, então $I \circ h$ possui máximo em $\overline{Q}$.

Afirmação 1: Se $h \in \Gamma$, então

$$h(Q) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

De fato, se P denota a projeção de E sobre V, então (4.1) é equivalente a

$$\begin{cases} Ph(u) & = & 0 \\ \|(id - P)h(u)\| & = & \rho \end{cases}$$

para algum $u \in Q$. Se $u \in \overline{Q}$, então $u = v + re$, onde $v \in \overline{B}_R \cap V$ e $0 \leq r \leq R$. Defina

$$\phi(r, v) = \left(\|(id - P)\, h(v + re)\|\, , Ph(v + re)\right).$$

Note que $\phi \in C(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R} \times V)$, pois ϕ é composição de funções contínuas. Além disso, sendo $h\Big|_{\partial Q} = id$ para $u \in \partial Q$, tem-se

$$\phi(r, v) = \left(\|(id - P)\,(v + re)\|\, , P(v + re)\right),$$

o que implica

$$\phi(r, v) = \left(\|(v + re) - v\|\, , v\right),$$

de onde segue

$$\phi(r, v) = \left(\|re\|\, , v\right).$$

Assim,

$$\phi(r, v) = \left(|r|\, \|e\|\, , v\right),$$

e sendo $e \in \partial B_1 \cap X$, obtemos

$$\phi(r, v) = (r, v)\, , \quad \forall \;\; u \in \partial Q, \tag{4.2}$$

isto é, $\phi = id$ em ∂Q. Em particular, de $(\mathbf{I_2})$, temos $\phi(r, v) \neq (\rho, 0)$ para $u \in \partial Q$ e $(\rho, 0) \in Q$. De fato, sendo $0 < \rho < R$, temos que $(\rho, 0) \notin \partial Q$, pois para que $(\rho, 0) \in \partial Q$, deveríamos ter $\rho = 0$ ou $\rho = R$, mas isto não é possível. Por outro lado, sendo $0 \in \overline{B}_R \cap V$ e $0 < \rho < R$, segue-se $(\rho, 0) \in Q$.

Identificando $\mathbb{R} \times V$ com $\mathbb{R}^N$, onde $dim(\mathbb{R} \times V) = N$, tem-se que o grau de Brouwer $d(\phi, Q, (\rho, 0))$ está bem definido e pelas propriedades do Grau Topológico **(Ver Apêndice D)**, obtemos que

$$d(\phi, Q, (\rho, 0)) = d(id, Q, (\rho, 0)) = 1.$$

Logo, existe $u \in Q$ tal que $\phi(u) = (\rho, 0)$, ou seja,

$$(\|(id - P)\, h(u)\|, Ph(u)) = (\rho, 0),$$

o que implica

$$\begin{cases} \|(id - P)\, h(u)\| & = & \rho \\ Ph(u) & = & 0 \end{cases}$$

mostrando assim a **Afirmação 1.**

Afirmação 2: $c \geq \alpha$.

De fato, pela **Afirmação 1**, temos que existe $u \in Q$ tal que $h(u) \in \partial B_\rho \cap X$. Da condição $(\mathbf{I_1})$, segue-se $I(h(u)) \geq \alpha$, o que implica, $\max\limits_{u \in \overline{Q}} I(h(u)) \geq \alpha, \ \ \forall \ h \in \Gamma$. Assim, o conjunto $H = \left\{ \max\limits_{u \in \overline{Q}} I(h(u)); \ \ h \in \Gamma \right\}$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, logo pelo Postulado de Dedekind existe o ínfimo de H em $\mathbb{R}$, isto é, c está bem definido.

Note ainda que, α é uma cota inferior para o conjunto H, então pela definição de c, segue-se $c \geq \alpha$, mostrando assim a **Afirmação 2**.

Agora, suponha por contradição que c não é um valor crítico de I, então pelo **Teorema de Deformação 1.5**, temos que dado $0 < \epsilon < \dfrac{c - \alpha}{2}$, existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que

(i) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin I^{-1}(c - 2\epsilon, c + 2\epsilon)$ e $t \in [0,1]$;

(ii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definição de c, existe $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in \overline{Q}} I(h(u)) \leq c + \epsilon. \tag{4.3}$$

Considere $\widetilde{h}(u) = \eta(1, h(u))$. Sendo $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ e $h \in C\left(\overline{Q}, E\right)$, segue-se que $\widetilde{h} \in C\left(\overline{Q}, E\right)$. Note ainda que sendo $u \in \partial Q$, temos que $I(u) \leq 0 < \alpha < c - 2\epsilon$, logo $I(u) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, o que implica $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$. Assim, por (i), se $u \in \partial Q$,

$$\widetilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u,$$

de onde segue que $\widetilde{h} \in \Gamma$. De (4.3),

$$I(h(u)) \leq \max_{u \in \overline{Q}} I(h(u)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica $h(u) \in I^{c+\epsilon}, \quad \forall\, u \in \overline{Q}$. Além disso, de (ii) segue

$$\widetilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) \in I^{c-\epsilon}, \quad \forall\, u \in \overline{Q},$$

ou seja, $I(\widetilde{h}(u)) \leq c - \epsilon, \quad \forall \quad u \in \overline{Q}$. Logo,

$$\max_{u \in \overline{Q}} I(\widetilde{h}(u)) \leq c - \epsilon,$$

e sendo $c = \inf\limits_{h \in \Gamma} \max\limits_{u \in \overline{Q}} I(h(u))$, tem-se que

$$c \leq \max_{u \in \overline{Q}} I(\widetilde{h}(u)) \leq c - \epsilon,$$

visto que $\widetilde{h} \in \Gamma$. Assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que um absurdo. Portanto, concluímos que c é um valor crítico para I, demonstrando o **Teorema 4.1**. ■

Observação: Note que se $V = \{0\}$ e $I(0) = 0$, temos que as condições do Teorema 4.1 coincidem com as condições do Teorema 2.1. Assim, o Teorema 4.1 é uma generalização do Teorema do Passo da Montanha.

4.2 Aplicação do Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Nesta seção estudaremos a existência de solução para o seguinte problema:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + p(x,u), & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $\lambda \geq \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue consideraremos $N \geq 3$ e as seguintes hipóteses sobre p :

$(\mathbf{G_1})$ $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(\mathbf{G_2})$ Existem constantes $a_1,\ a_2 > 0$ tais que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s, \quad \forall\ x \in \overline{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

$(\mathbf{G_3})$ $p(x,\xi) = o(|\xi|)$ quando $\xi \to 0$;

$(\mathbf{G_4})$ Existem constantes $2 < \mu \leq 2^*$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu P(x,\xi) \leq \xi p(x,\xi), \quad \text{para } |\xi| \geq r, \text{ onde } P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt;$$

$(\mathbf{G_5})$ $\xi p(x,\xi) \geq 0$, para $\xi \in \mathbb{R}$.

Nosso objetivo é mostrar a existência de uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_1})$. Para isto, iremos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.2 *Suponha que $\lambda \geq \lambda_1$ e p satisfaz as condições $(G_1) - (G_5)$. Então o Problema (P_1) possui uma solução fraca.*

Demonstração: Considere $E = H_0^1(\Omega)$ e $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Vamos mostrar que o funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right] dx - \int_\Omega P(x,u)dx,$$

onde $P(x,u) = \displaystyle\int_0^\xi p(x,t)dt$, satisfaz as hipóteses do **Teorema 4.1**.

Observe inicialmente que $E = H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach real. Sendo as condições $(\mathbf{G_1})$ e $(\mathbf{G_2})$ satisfeitas, segue que I está bem definido e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ **(ver Apêndice B)**. Além disso,

$$I'(u)v = \int_\Omega [\nabla u \nabla v - \lambda uv]\, dx - \int_\Omega p(x,u)v dx, \quad \forall\ u,\ v\ \in\ E.$$

Seja $V \equiv \oplus_{j=1}^k V_{\lambda_j} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$, onde V_{λ_j} é o espaço gerado pelas autofunções v_n^j do **Problema** $(\mathbf{P_2})$ associadas ao autovalor λ_j, e normalizadas de modo que

$$\int_\Omega \left|\nabla v_n^j\right|^2 dx = 1 = \lambda_j \int_\Omega (v_n^j)^2 dx.$$

Seja $X \equiv \oplus_{j=k+1}^{\infty} V_{\lambda_j}$, com $X = V^{\perp}$, onde denotamos por $V^{\perp}$ o complementar ortogonal de V. Segue das definições de V e X que $E = V \oplus X$.

Verificação da Condição ($\mathbf{I_1}$):

Seja $u \in X$. Então $u = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j$, onde $\phi_j = \displaystyle\sum_{n=1}^{s} a_n^j v_n^j$, os v_i^j são as autofunções associadas a λ_j e $\dim V_{\lambda_j} = s$. Assim, pelos argumentos usados no **Capítulo 3**, segue

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right) dx \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \|u\|^2, \quad \forall \quad u \in X. \tag{4.4}$$

Afirmação 3: $\displaystyle\int_{\Omega} P(x,u)dx = o\left(\|u\|^2\right)$ quando $u \to 0$.

De fato, considere $J(u) = \displaystyle\int_{\Omega} P(x,u)dx$. De ($\mathbf{G_3}$), temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|\xi| \leq \delta$ temos

$$|p(x,\xi)| \leq \epsilon\, |\xi|\,, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega}.$$

Segue da estimativa acima que

$$|P(x,\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2}\, |\xi|^2\,, \qquad \text{para} \qquad |\xi| \leq \delta.$$

De fato:

(i) Considere $0 \leq \xi \leq \delta$. Assim,

$$|P(x,\xi)| = \left|\int_0^{\xi} p(x,t)dt\right| \leq \int_0^{\xi} |p(x,t)|\, dt \leq \int_0^{\xi} \epsilon\, |t|\, dt,$$

o que implica

$$|P(x,\xi)| \leq \int_0^{\xi} \epsilon t dt = \epsilon\frac{\xi^2}{2},$$

logo

$$|P(x,\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2}\, |\xi|^2\,, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega} \;\; \text{e} \;\; \delta \geq \xi \geq 0. \tag{4.5}$$

(ii) Considere $-\delta \leq \xi < 0$. Assim,

$$|P(x,\xi)| = \left|\int_0^{\xi} p(x,t)dt\right| = \left|-\int_{\xi}^{0} p(x,t)dt\right| = \left|\int_{\xi}^{0} p(x,t)dt\right| \leq \int_{\xi}^{0} |p(x,t)|\, dt \leq \int_{\xi}^{0} \epsilon\, |t|\, dt,$$

o que implica

$$|P(x,\xi)| \leq \int_{\xi}^{0} \epsilon\,(-t)\,dt = -\left(-\epsilon\frac{\xi^2}{2}\right),$$

logo

$$|P(x,\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2}\,|\xi|^2\,, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega} \;\; \text{e} \;\; -\delta \leq \xi < 0. \tag{4.6}$$

De (4.5) e (4.6),

$$|P(x,\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2}\,|\xi|^2\,, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega} \;\; \text{e} \;\; |\xi| \leq \delta. \tag{4.7}$$

Por outro lado, de ($\mathbf{G_2}$), temos que existem $a_1,\; a_2 > 0$ tais que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2\,|\xi|^s\,, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega} \;\; \text{e} \;\; \xi \in \mathbb{R}, \;\; \text{onde} \;\; 1 < s < 2^* - 1.$$

Logo, para $\xi \geq 0$

$$|P(x,\xi)| \leq \int_0^{\xi} |p(x,t)|\,dt \leq \int_0^{\xi} (a_1 + a_2\,|t|^s)\,dt \leq \int_0^{\xi} (a_1 + a_2 t^s)\,dt,$$

o que implica

$$|P(x,\xi)| \leq a_1\xi + a_2\frac{\xi^{s+1}}{s+1},$$

ou seja,

$$|P(x,\xi)| \leq a_1\,|\xi| + a_2\frac{|\xi|^{s+1}}{s+1}, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega} \;\; \text{e} \;\; \xi \geq 0. \tag{4.8}$$

Da mesma maneira, se considerarmos $\xi < 0$, obtemos

$$|P(x,\xi)| \leq \int_{\xi}^{0} |p(x,t)|\,dt \leq \int_{\xi}^{0} (a_1 + a_2\,|t|^s)\,dt \leq \int_{\xi}^{0} (a_1 + a_2(-t)^s)\,dt,$$

o que implica

$$|P(x,\xi)| \leq -\left(a_1\xi + a_2(-1)^s\frac{\xi^{s+1}}{s+1}\right) = a_1(-\xi) + a_2\frac{(-\xi)^{s+1}}{s+1},$$

de onde segue

$$|P(x,\xi)| \leq a_1\,|\xi| + a_2\frac{|\xi|^{s+1}}{s+1}, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega} \;\; \text{e} \;\; \xi < 0. \tag{4.9}$$

De (4.8) e (4.9),

$$|P(x,\xi)| \leq a_1\,|\xi| + a_2\frac{|\xi|^{s+1}}{s+1}, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega} \;\; \text{e} \;\; \xi \in \mathbb{R},$$

o que implica

$$|P(x,\xi)| \leq \left(\frac{a_1}{|\xi|^s} + \frac{a_2}{s+1}\right)|\xi|^{s+1}\,, \;\; \text{para} \;\; |\xi| \neq 0.$$

Sendo $|\xi| \geq \delta > 0$, segue $\dfrac{1}{|\xi|} \leq \dfrac{1}{\delta}$. Assim,

$$|P(x,\xi)| \leq \left(\frac{a_1}{\delta^s} + \frac{a_2}{s+1}\right) |\xi|^{s+1}, \quad \text{para} \quad |\xi| \geq \delta.$$

Considerando $A = A(\delta) = \left(\dfrac{a_1}{\delta^s} + \dfrac{a_2}{s+1}\right)$, obtemos

$$|P(x,\xi)| \leq A\,|\xi|^{s+1}, \qquad \text{para} \quad |\xi| \geq \delta \;\; \text{e} \;\; x \in \overline{\Omega}. \tag{4.10}$$

De (4.7) e (4.10),

$$|P(x,\xi)| \leq \epsilon\frac{|\xi|^2}{2} + A\,|\xi|^{s+1}, \qquad \forall \;\; \xi \in \mathbb{R} \;\; \text{e} \;\; x \in \overline{\Omega},$$

consequentemente

$$|J(u)| \leq \int_\Omega |P(x,u)|\,dx \leq \int_\Omega \left(\epsilon\frac{|u|^2}{2} + A\,|u|^{s+1}\right) dx,$$

mostrando que

$$|J(u)| \leq \frac{\epsilon}{2}\,\|u\|_{L^2}^2 + A\,\|u\|_{L^{s+1}}^{s+1}, \;\; \text{onde} \;\; 1 < s < 2^* - 1.$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$|J(u)| \leq A_1\frac{\epsilon}{2}\,\|u\|^2 + A_2\,\|u\|^{s+1}, \;\; \text{onde} \;\; 1 < s < 2^* - 1,$$

o que implica

$$|J(u)| \leq A_3\left(\frac{\epsilon}{2} + A_4\,\|u\|^{s-1}\right)\|u\|^2.$$

Note agora, que para obtermos $|J(u)| \leq A_3\epsilon\,\|u\|^2$, devemos ter $\dfrac{\epsilon}{2} + A_4\,\|u\|^{s-1} \leq \epsilon$, o que implica $\|u\|^{s-1} \leq \dfrac{\epsilon}{2A_4}$, ou seja, $\|u\| \leq \left(\dfrac{\epsilon}{2A_4}\right)^{1/s-1}$. Logo, para $\|u\| \leq \left(\dfrac{\epsilon}{2A_4}\right)^{1/s-1} \equiv \delta_*$

$$|J(u)| \leq A_3\epsilon\,\|u\|^2,$$

mostrando assim que

$$J(u) = o\left(\|u\|^2\right) \;\; \text{quando} \;\; u \to 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega P(x,u)dx = o\left(\|u\|^2\right) \;\; \text{quando} \;\; u \to 0,$$

finalizando a demonstração da **Afirmação 3**.

Segue da **Afirmação 3**, que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\int_\Omega P(x,u)dx\right| \leq \epsilon \|u\|^2 \quad \text{para} \quad \|u\| < \delta.$$

Assim, considerando $0 < \rho < \delta$, obtemos

$$\left|\int_\Omega P(x,u)dx\right| \leq \epsilon \|u\|^2, \quad \forall\ u \in \partial B_\rho. \tag{4.11}$$

De (4.4) e (4.11),

$$I(u) \geq \int_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right)dx - \left|\int_\Omega P(x,u)dx\right| \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2 - \epsilon\|u\|^2, \quad \forall\ u \in X \cap \partial B_\rho.$$

Considerando $C_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)$, note que $C_2 > 0$, visto que estamos considerando $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Logo,

$$I(u) \geq C_2\|u\|^2 - \epsilon\|u\|^2, \quad \forall\ u \in X \cap \partial B_\rho.$$

Escolhendo $\epsilon = \dfrac{C_2}{2} > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{C_2}{2}\|u\|^2, \quad \forall\ u \in X \cap \partial B_\rho.$$

Sendo $u \in \partial B_\rho$, obtemos $I(u) \geq \dfrac{C_2}{2}\rho^2$, $\forall\ u \in X \cap \partial B_\rho$. Considerando $\alpha = \dfrac{C_2}{2}\rho^2 > 0$, tem-se

$$I(u) \geq \alpha, \quad \forall\ u \in X \cap \partial B_\rho,$$

mostrando que I satisfaz a condição $(\mathbf{I_1})$.

Verificação da condição $(\mathbf{I_2})$:

De fato, vamos mostrar inicialmente que $I\Big|_V \leq 0$. Seja $u \in V = \oplus_{j=1}^k V_{\lambda_j}$, então $u = \displaystyle\sum_{j=1}^k \phi_j$, onde $\phi_j = \displaystyle\sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j$, os v_i^j são as autofunções associadas a λ_j e $\dim V_{\lambda_j} = s$. Assim,

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^k \|\phi_j\|^2 \tag{4.12}$$

e

$$\int_\Omega \lambda u^2 dx = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda}{\lambda_j}\|\phi_j\|^2. \tag{4.13}$$

De (4.12) e (4.13),

$$\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega u^2 dx = \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda}{\lambda_j},$$

o que implica

$$\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega u^2 dx = \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right).$$

Sendo $\lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq ...$, obtemos

$$\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega u^2 dx \leq \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right),$$

e consequentemente

$$\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega u^2 dx \leq \|u\|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

Considerando $K = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$, temos que $K \geq 0$, visto que estamos trabalhando com $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$, logo

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega u^2 dx \leq -K \|u\|^2, \ \ \forall \ \ u \in V. \tag{4.14}$$

Pela condição $(\mathbf{G_5})$, temos

$$\xi p(x, \xi) \geq 0, \quad \forall \ \xi \in \mathbb{R},$$

o que implica

$$\begin{cases} p(x,\xi) & \geq & 0, & \text{se} & \xi \geq 0 \\ p(x,\xi) & \leq & 0, & \text{se} & \xi \leq 0, \end{cases}$$

portanto $P(x, \xi) \geq 0, \ \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}$; pois:

(i) Para $\xi < 0$, temos $P(x, \xi) = -\int_\xi^0 p(x,t)dt$. Note que no intervalo $[\xi, 0)$, pela condição $(\mathbf{G_5})$, segue-se $p(x, \xi) \geq 0$, consequentemente $\int_\xi^0 p(x,t)dt \leq 0$, o que implica $-\int_\xi^0 p(x,t)dt \geq 0$, ou seja, $P(x, \xi) \geq 0, \ \ \forall \ \xi < 0$.

(ii) Para $\xi \geq 0$, temos $P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt$. Note que no intervalo $[0, \xi]$, pela condição $(\mathbf{G_5})$, segue-se $p(x, \xi) \geq 0$, consequentemente $\int_0^\xi p(x,t))dt \geq 0$, ou seja, $P(x, \xi) \geq 0, \ \ \forall \ \xi \geq 0$.

Portanto, de (i) e (ii), concluímos que $P(x,\xi) \geq 0, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}$, logo

$$\int_\Omega P(x,u)dx \geq 0. \tag{4.15}$$

De (4.14) e (4.15), tem-se

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega P(x,u)dx \leq -K\|u\|^2 - \int_\Omega P(x,u)dx \leq 0, \qquad \forall\ u \in V,$$

ou seja,

$$I\Big|_V \leq 0. \tag{4.16}$$

Afirmação 4: Existem $e \in \partial B_1 \cap X$ e $\overline{R} > \rho$ tais que $I(u) \leq 0$ para $u \in V \oplus span\{e\}$ com $\|u\| > \overline{R}$.

De fato, note que para cada $u \in E$, temos

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \int_\Omega P(x,u)dx.$$

Desde que $\lambda > 0$

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega P(x,u)dx.$$

De $(\mathbf{G_4})$, já mostramos anteriormente que existem $C,\ C_3 > 0$ tais que

$$P(x,\xi) \geq C|\xi|^\mu - C_3, \quad \forall\ \ \xi\ \in\ \mathbb{R}\ \ \text{ e }\ \ x \in \overline{\Omega},\ \ \textbf{(Ver Capítulo 2)}$$

onde $2 < \mu \leq 2^*$. Consequentemente,

$$\int_\Omega P(x,u)dx \geq C\int_\Omega |u|^\mu dx - \int_\Omega C_3 dx,$$

o que implica

$$\int_\Omega P(x,u)dx \geq C\|u\|_{L^\mu}^\mu - C_3|\Omega|,$$

logo

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|_{L^\mu}^\mu + C_4, \quad \forall\ u \in E.$$

Considerando $e = v_{k+1}$, temos que $e \in X = \oplus_{j=k+1}^\infty V_{\lambda_j}$ e $\|e\| = \|v_{k+1}\| = 1$, de onde segue $e \in \partial B_1 \cap X$.

Considere agora, $V_1 = V \oplus span\{e\}$. Note que sendo $dimV < +\infty$ e $dim(span\{e\}) < +\infty$, segue $dimV_1 < +\infty$. Desde que em espaços de dimensão finita, quaisquer duas normas são equivalentes, existem constantes C_5, C_6 tais que

$$C_5 \|u\| \leq \|u\|_{L^\mu} \leq C_6 \|u\|, \quad \forall \ u \in V_1, \tag{4.17}$$

logo

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \widetilde{C} \|u\|^\mu + C_4, \quad \forall \ u \in V_1.$$

Portanto, para $\overline{R}$ suficientemente grande, obtemos

$$I(u) \leq 0, \quad \forall \ u \in V_1 \ \text{ e } \ \|u\| \geq \overline{R},$$

visto que $\mu > 2$, mostrando a **Afirmação 4**.

Agora, considerando $R = 2\overline{R} + 2 > \rho$, segue de (4.16) e da **Afirmação 4** que $I(u) \leq 0 \ \forall \ u \in \partial Q$ onde $Q = \{B_R \cap V\} \oplus \{re \ ; \ \ 0 < r < R\}$. De fato, se $u \in \partial Q$, então u é da forma

$$u = v + Re \ \text{ ou } \ u = v, \ \text{ onde } \ v \in \overline{B}_R \cap V \ \text{ e } \ R = 2\overline{R} + 2.$$

ou

$$u = v + re, \ \text{ onde } \ \|v\| = R \ \text{ e } \ 0 < r < R.$$

Vamos analisar os casos mencionados acima:

1º Caso: Se $u = v$, sendo $v \in V$, segue de (4.16) que $I(u) \leq 0$.

2º Caso: Se $u = v + Re$, temos que $u \in V_1$ e

$$\|u\|^2 = \|v + Re\|^2 = \langle v + Re, v + Re \rangle = \|v\|^2 + 2 \langle v, Re \rangle + \|Re\|^2,$$

sendo $\langle v, Re \rangle = 0$, obtemos

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + R^2 \geq R^2,$$

ou seja,

$$\|u\| \geq R > \overline{R}.$$

Logo, pela **Afirmação 4**, temos que $I(u) \leq 0$.

3º Caso: Se $u = v + re$, com $0 < r < R$ e $\|v\| = R$, temos que $u \in V_1$ e

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + r^2 = R^2 + r^2 > R^2 \geq \overline{R}^2.$$

Logo, pela **Afirmação 4**, temos que $I(u) \leq 0$.

Analisando todos os casos, concluímos que $I(u) \leq 0, \quad \forall\, u \in \partial Q$, mostramos que I satisfaz a condição $(\mathbf{I_2})$.

Verificação da condição (PS):

Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência **(PS)**, isto é, existe $M > 0$, tal que

$$|I(u_n)| \leq M \quad \text{ e } \quad I'(u_n) \to 0, \;\text{ quando }\; n \to +\infty. \tag{4.18}$$

Afirmação 5: (u_n) é limitada em E.

Tendo $I'(u_n) \to 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que

$$|I'(u_n)u_n| \leq \epsilon \|u_n\|, \quad \forall \;\, n \geq n_\circ. \tag{4.19}$$

Considere $\beta \in \left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right)$, onde $\mu > 2$. Sendo

$$I(u) - \beta I'(u)u = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \lambda \int_\Omega |u|^2\, dx\right] - \int_\Omega P(x,u)dx -$$
$$\beta\left[\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \lambda \int_\Omega |u|^2\, dx\right] + \beta \int_\Omega p(x,u)udx,$$

obtemos

$$I(u) - \beta I'(u)u = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \lambda\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\int_\Omega |u|^2\, dx + \int_\Omega \left[\beta p(x,u)u - P(x,u)\right] dx.$$

Considere $A = \{x \in \Omega;\;\; |u(x)| \geq r\}$, logo

$$I(u) - \beta I'(u)u = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_A \left[\beta p(x,u)u - P(x,u)\right] dx +$$
$$+ \int_{A^c} \left[\beta p(x,u)u - P(x,u)\right] dx.$$

Da condição $(\mathbf{G_4})$, obtemos

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_A \left[\beta\mu P(x,u) - P(x,u)\right] dx +$$
$$+ \int_{A^c} \left[\beta p(x,u)u - P(x,u)\right] dx,$$

de onde segue

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (\beta\mu - 1)\int_\Omega P(x,u)dx -$$
$$-(\beta\mu - 1)\int_{A^c} P(x,u)dx + \int_{A^c} \left[\beta p(x,u)u - P(x,u)\right] dx.$$

Assim,

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (\beta\mu - 1) \int_\Omega P(x,u)dx-$$

$$- \int_{\overline{A^c}} |\mu\beta P(x,u) + \beta p(x,u)u|\, dx.$$

Sendo p e P funções contínuas, $g(x,t) = |\mu\beta P(x,t) + \beta p(x,t)t|$ é uma função contínua. Assim, uma vez que $\overline{\Omega} \times [-r,r]$ é um conjunto compacto, segue que g é limitada neste compacto. Logo, existe $K > 0$ tal que

$$|g(x,t)| \leq K, \quad \forall\ (x,t)\ \in\ \overline{\Omega} \times [-r,r],$$

de onde segue

$$|\mu\beta P(x,u) + \beta p(x,u)u| \leq K, \quad \forall\ x\ \in\ \overline{A^c}.$$

Assim,

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (\beta\mu - 1) \int_\Omega P(x,u)dx - \int_{\overline{A^c}} K dx,$$

o que implica

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (\beta\mu - 1) \int_\Omega P(x,u)dx - \overline{K},$$

com $\overline{K} = K\,|\Omega|$. Assim,

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (\beta\mu - 1) \int_\Omega P(x,u)dx - \overline{K}.$$

Da condição $(\mathbf{G_4})$, mostramos anteriormente que

$$P(x,\xi) \geq C\,|\xi|^\mu - C_3, \quad \forall\ \ \xi\ \in \mathbb{R}\ \ \text{e}\ \ x \in \overline{\Omega}, \quad \textbf{(Ver Capítulo 2)}$$

onde $2 < \mu \leq 2^*$. Assim,

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (\beta\mu - 1) \int_\Omega \left[C\,|u|^\mu - C_3\right] dx - \overline{K}.$$

visto que $(\beta\mu - 1) > 0$, logo

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (\beta\mu - 1)\, C\, \|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} - a_7, \quad \forall\ u \in E, \tag{4.20}$$

onde $a_7 = \overline{K} + C_3\,(\beta\mu - 1)\,|\Omega|$.

Por outro lado, considerando n suficientemente grande, de (4.18) e (4.19), obtemos

$$I(u_n) - \beta I'(u_n)u_n \leq |I(u_n)| + \beta\, |I'(u_n)u_n|\,,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \beta I'(u_n)u_n \leq M + \beta\epsilon\, \|u_n\|\,.$$

Considerando $\epsilon = 1$ e $n > n_\circ(\epsilon)$, tem-se

$$I(u_n) - \beta I'(u_n)u_n \leq M + \beta\, \|u_n\|\,, \qquad \forall\;\, n \geq n_\circ. \tag{4.21}$$

De (4.20) e (4.21), segue-se

$$M + \beta\, \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u_n\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + (\beta\mu - 1)\, C\, \|u_n\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} - a_7. \tag{4.22}$$

Da desigualdade de Young, temos que, dados $a,\; b \geq 0$ e $\epsilon > 0$, segue

$$a.b \leq \epsilon a^p + K(\epsilon) b^q, \quad \text{onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\text{ e }\; K(\epsilon) \longrightarrow +\infty \;\text{ quando }\; \epsilon \to 0.$$

Agora, sendo $\mu > 2$ e $|\Omega| < +\infty$, temos que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{K}\, \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)} \leq \epsilon\, \|u_n\|^{\mu/2}_{L^\mu(\Omega)} + K(\epsilon)\widehat{K}^q, \quad \text{onde } \frac{1}{\mu/2} + \frac{1}{q} = 1,$$

o que implica

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon\, \|u_n\|^{\mu/2}_{L^\mu(\Omega)} + \overline{C} K(\epsilon).$$

De (4.22), obtemos

$$M + \beta\, \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u_n\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \left[\epsilon\, \|u_n\|^{\mu/2}_{L^\mu(\Omega)} + \overline{C} K(\epsilon)\right]^2 +$$

$$+ (\beta\mu - 1)\, C\, \|u_n\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} - a_7, \qquad \forall\;\, n \geq n_\circ,$$

de onde segue

$$M + \beta\, \|u_n\| \geq C_1\, \|u_n\|^2 - C_2\epsilon^2\, \|u_n\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} - C_3 K(\epsilon)^2 + C_4\, \|u_n\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} - a_7.$$

Escolhendo $\epsilon = \left(\dfrac{C_4}{2C_2}\right)^{1/2}$, tem-se

$$M + \beta\, \|u_n\| \geq C_1\, \|u_n\|^2 + \frac{C_4}{2}\, \|u_n\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} - \widetilde{a}_7 \geq C_1\, \|u_n\|^2 - \widetilde{a}_7, \qquad \forall\;\, n \geq n_\circ,$$

ou seja, existem constantes $C > 0$ e $a > 0$ tais que

$$M + \beta \|u_n\| \geq C \|u_n\|^2 - a, \qquad \forall \ n \geq n_\circ,$$

mostrando assim que (u_n) é limitada em E.

Repetindo os mesmos argumentos utilizados no **Capítulo 2**, mostra-se que I satisfaz as condições $(\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{1})$ e $(\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{2})$ da **Proposição C.1**, donde concluímos que (u_n) possui uma subsequência convergente, mostrando assim que I satisfaz a **condição (PS)**. Portanto, podemos aplicar o **Teorema 4.1** e garantir a existência de um ponto crítico de I, isto é, uma solução fraca para o **Problema** $(\mathbf{P_1})$, finalizando a demonstração do **Teorema 4.2**. ■

Apêndice A

Resultados Gerais

Neste apêndice, enunciaremos algumas definições e os principais teoremas utilizados nas demonstrações deste trabalho.

Definição A.1 *(Ver [9]) Uma família $F = (\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ de subconjuntos de um espaço métrico M chama-se localmente finita quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança que intercepta apenas um número finito de conjuntos σ_λ.*

Observação: Em outras palavras, F é localmente finita se, e somente se, para cada $x \in M$ existir índices $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Gamma$ e uma vizinhança V de x tais que $V \cap \sigma_\lambda \neq \emptyset \Longrightarrow \lambda \in \{\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Definição A.2 *(Ver [9]) Seja M um espaço métrico. Uma partição da unidade em M é uma família $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ de funções contínuas $\phi_\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:*
(1) *Para todo $x \in M$ e todo $\lambda \in \Gamma$, tem-se $\phi_\lambda(x) \geq 0$;*
(2) *A família $F = (supp\,(\phi_\lambda))_{\lambda\in\Gamma}$, é localmente finita em M;*
(3) *Para todo $x \in M$ tem-se $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Gamma} \phi_\lambda(x) = 1$.*

Definição A.3 *(Ver [9]) Um espaço métrico M chama-se paracompacto quando toda cobertura aberta de M pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita.*

Teorema A.4 *(Ver [9]) Todo espaço métrico é paracompacto.*

Teorema A.5 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *(Ver [2]) Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que convergem em quase toda parte para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que*

$$|f_n| \leq g, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema A.6 (Desigualdade de Hölder) *(Ver [2]) Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p < +\infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \;\; e \;\; \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema A.7 *(Ver [3]) Seja E um espaço de Banach e X e Y dois subespaços vetoriais fechados tais que $X + Y$ é fechado. Então, existe uma constante $C \geq 0$ tal que todo $z \in X + Y$ admite uma decomposição da forma $z = x + y$ com $x \in X$, $y \in Y$, $\|x\| \leq C\|z\|$ e $\|y\| \leq C\|z\|$.*

Corolário A.8 *(Ver [3]) Se X é um espaço vetorial normado e $X = V \oplus W$, então*

$$\begin{array}{rcl} P \; : \; X & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & P(x) = x_1; \;\; x_1 \in V \end{array}$$

é contínua.

Teorema A.9 (Teorema de Fubini) *(Ver [1]) Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad e \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para todo $y \in \Omega_2$, temos

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad e \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx.$$

Teorema A.10 (Critério de Compacidade) *(Ver [6]) Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se, e somente se, toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ tem a propriedade que a sequência $(T(x_n)) \subset Y$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema A.11 *(Ver [6]) Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Se $(x_n) \subset X$ verifica*

$$x_n \rightharpoonup x \;\; em \;\; X,$$

então

$$T(x_n) \longrightarrow T(x_n) \;\; em \;\; Y.$$

Teorema A.12 *(Ver [3]) Sejam (x_n) uma sequência fracamente convergente em um espaço normado X, isto é, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X. Então,*
(1) O limite fraco x de (x_n) é único;
(2) Toda subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ converge fraco para x;
(3) A sequência (x_n) é limitada.

Teorema A.13 (Teorema da Representação Riesz) *(Ver [3]) Todo funcional linear limitado f sobre um espaço de Hilbert, pode ser representado em termos do produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle z, x \rangle$$

onde z é unicamente determinado e verifica $\|f\| = \|z\|$.

Teorema A.14 *(Ver [3]) Seja H um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma sequência limitada em H, então existem uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \ \text{ em } \ H.$$

Teorema A.15 *(Ver [3]) Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$f_n \longrightarrow f \ \text{ em } \ L^p(\Omega).$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_j}) tal que
(1) $f_{n_j}(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω;
(2) $\left|f_{n_j}(x)\right| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω, $\forall\ j$, onde $g \in L^p(\Omega)$.

Apêndice B

Funcionais Diferenciáveis

Definição B.1 *Considere um funcional $I : U \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um espaço normado. O funcional I é Fréchet Diferenciável em $u \in U$, se existir $T : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional linear contínuo verificando*

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{|I(u+\varphi) - I(u) - T(\varphi)|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Dizemos que o funcional $I \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada a Fréchet I' é contínua sobre U.

Observações:

$i)$ Se H é um espaço de Hilbert e I tem derivada a Fréchet em $u \in U$, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único vetor $\nabla I(u) \in H$, tal que

$$I'(u)\varphi = \langle \nabla I(u), \varphi \rangle, \quad \forall \quad \varphi \in H$$

e

$$\|\nabla I(u)\|_H = \|I'(u)\|_{H'}.$$

onde denotamos $\nabla I(u)$ o gradiente de I em u.

$ii)$ A derivada de Gateaux é dada por

$$I'(u)\varphi = \lim_{t \to 0} \frac{[I(u+t\varphi) - I(u)]}{t}.$$

$iii)$ Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Agora, enunciaremos resultados envolvendo imersões nos espaços de Sobolev, os quais foram de fundamental importância para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Definição B.2 *Considere o seguinte espaço*

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ para } i = 1, 2, ..., N \right\},$$

com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_* = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv)\, dx,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 0$. Este espaço com o produto interno indicado é de Hilbert.

Fixado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, o espaço $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $D(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, onde $D(\Omega)$ é o espaço das funções testes (funções de classe $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω). O espaço $H_0^1(\Omega)$ com o produto interno definido por

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

é um espaço de Hilbert.

Teorema B.3 (Imersões de Sobolev) *(Ver [1]) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ for limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são contínuas:*

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $N = 1$ *ou* $N = 2$;

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq 2^*$, $N \geq 3$, *onde* $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Teorema B.4 (Imersões de Rellich) *(Ver [1]) Se Ω for limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são compactas:*

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq p < 2^*$, $N \geq 3$, *onde* $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

A partir de agora, nosso objetivo é mostrar que o funcional I definido em $H_0^1(\Omega)$ por

$$I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} u^2 - P(x, u) \right] dx$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, $\lambda \geq \lambda_1$, $P(x, \xi) = \displaystyle\int_0^\xi p(x, t) dt$ e p satisfaz as seguintes condições:

($\mathbf{H_1}$) $p(x, \xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

($\mathbf{H_2}$) Existem constantes $a_1,\ a_2 > 0$ tais que

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s,\ \ \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \text{ com } 1 < s < \frac{N+2}{N-2}.$$

Inicialmente, vamos mostrar que I está bem definido. De fato, note que:

(**i**) Sendo $u \in H_0^1(\Omega)$, temos $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2 < +\infty$.

(**ii**) Além disso, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos:

$$\left| \int_\Omega \frac{\lambda}{2} u^2 dx \right| \leq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u|^2 dx = \frac{\lambda}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

(**iii**) Note que,

$$\left|\int_\Omega P(x,u)dx\right| = \left|\int_\Omega \left[\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right] dx\right| \leq \int_\Omega \left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| dx.$$

Vamos analisar os seguintes casos:

1º Caso: Considerando $u \geq 0$, pela condição $(\mathbf{H_2})$, segue-se

$$\left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| \leq \int_0^u |p(x,\xi)|\, d\xi \leq \int_0^u [a_1 + a_2 |\xi|^s]\, d\xi, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2},$$

logo

$$\left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| \leq \int_0^u [a_1 + a_2 \xi^s]\, d\xi = a_1 u + a_2 \frac{u^{s+1}}{s+1}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2},$$

ou seja,

$$\left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| \leq a_1 |u| + a_3 |u|^{s+1}, \;\; \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2}.$$

2º Caso: Considerando $u < 0$, pela condição $(\mathbf{H_2})$, segue-se

$$\left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| = \left|-\int_u^0 p(x,\xi)d\xi\right| \leq \int_u^0 |p(x,\xi)|\, d\xi \leq \int_u^0 [a_1 + a_2 |\xi|^s]\, d\xi,$$

logo

$$\left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| \leq \int_u^0 [a_1 + a_2(-\xi)^s]\, d\xi = \int_u^0 [a_1 + a_2(-1)^s \xi^s]\, d\xi = a_1(-u) + a_2(-1)^{s+1}\frac{u^{s+1}}{s+1},$$

ou seja,

$$\left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| \leq a_1(-u) + a_2\frac{(-u)^{s+1}}{s+1} = a_1 |u| + a_3 |u|^{s+1}, \;\; \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2}.$$

Observe que em ambos os casos, obtemos

$$\left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| \leq a_1 |u| + a_3 |u|^{s+1}, \qquad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2},$$

ou seja,

$$\left|\int_0^u p(x,\xi)d\xi\right| \leq a_1 |u| + a_3 |u|^{p}, \qquad \text{onde } 1 < p < \frac{N+2}{N-2} + 1 = 2^*.$$

Sendo Ω limitado, temos que $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^r(\Omega)$, para $r \in [1, 2^*]$, logo

$$\left|\int_\Omega P(x,u)dx\right| \leq \int_\Omega [a_1 |u| + a_3 |u|^p]\, dx \leq a_1 \|u\|^1_{L^1(\Omega)} + a_3 \|u\|^p_{L^p(\Omega)} < +\infty,$$

portanto de (i)-(iii), mostramos que I está bem definida.

Consideremos os funcionais I_1, I_2 e I_3 no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ definidos por

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2, \quad I_2(u) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx \ \text{ e } \ I_3(u) = \int_\Omega P(x,u)dx,$$

onde $\|.\|$ é a norma proveniente do produto interno definido em $H_0^1(\Omega)$.

Afirmação 1: O funcional I_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Existência da derivada de Gateaux de I_1:

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\left[\|u+tv\|^2 - \|u\|^2\right]}{t},$$

de onde segue

$$\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[2\langle u,v\rangle + t\|v\|^2\right] = \frac{1}{2}2\langle u,v\rangle,$$

logo

$$\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} = \langle u,v\rangle$$

é a nossa candidata a ser a derivada de I_1.

Existência da diferencial a Fréchet de I_1:

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\left|\frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u,v\rangle\right|}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|v\|^2}{2\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0}\frac{1}{2}\|v\| = 0,$$

mostrando assim, que I_1 é diferenciável em $H_0^1(\Omega)$ com

$$I_1'(u)v = \langle u,v\rangle.$$

Continuidade de I_1':

Considere uma sequência $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Devemos mostrar que $I_1'(u_n) \longrightarrow I_1'(u)$ em H^{-1}, ou equivalentemente,

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty,$$

onde H^{-1} denota o dual do $H_0^1(\Omega)$. Dado $\epsilon > 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| \leq 1$, temos que para n suficientemente grande

$$|(I_1'(u_n) - I_1'(u))v| = |\langle u_n - u, v\rangle| \leq \|u_n - u\| \, \|v\| < \epsilon,$$

o que implica

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} |(I_1'(u_n) - I_1'(u))v| \leq \epsilon,$$

ou seja,

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty,$$

donde conclímos que I_1' é contínua. Consequentemente, $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 2: O funcional I_2 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Existência da derivada de Gateaux de I_2:

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\frac{\partial I_2(u)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \frac{[(u + tv)^2 - u^2]}{t} dx,$$

de onde segue

$$\frac{\partial I_2(u)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{\lambda}{2} \int_\Omega (2uv + tv^2) dx,$$

logo

$$\frac{\partial I_2(u)}{\partial v} = \lambda \int_\Omega uv dx$$

é a nossa candidata a ser a derivada de I_2.

Existência da diferencial a Fréchet de I_2:

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\frac{|I_2(u+v) - I_2(u) - I_2'(u)v|}{\|v\|} = \frac{\left|\frac{\lambda}{2} \int_\Omega \left[(u+v)^2 - u^2\right] dx - \lambda \int_\Omega uv dx\right|}{\|v\|},$$

o que implica

$$\frac{|I_2(u+v) - I_2(u) - I_2'(u)v|}{\|v\|} = \frac{\left|\lambda \int_\Omega v^2 dx\right|}{2\|v\|} \leq \frac{\lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\|v\|}.$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{|I_2(u+v) - I_2(u) - I_2'(u)v|}{\|v\|} \leq C\frac{\lambda \|v\|^2}{2\|v\|} = C\frac{\lambda}{2}\|v\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \|v\| \to 0,$$

logo

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{|I_2(u+v) - I_2(u) - I_2'(u)v|}{\|v\|} = 0,$$

mostrando que I_2 é diferenciável em $H_0^1(\Omega)$ com

$$I_2'(u)v = \lambda \int_\Omega uvdx.$$

Continuidade de I_2':

Considere uma sequência $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. devemos mostrar que

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty,$$

Sendo

$$|(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq \lambda \int_\Omega |(u_n - u)|\,|v|\,dx \qquad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

pelas imersões contínuas de Sobolev, segue-se $|v|$ e $|(u_n - u)| \in L^2(\Omega)$. Assim, pela desigualdade de Holder,

$$|(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq C\lambda \|(u_n - u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Novamente, segue das imersões contínuas de Sobolev,

$$|(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq \widetilde{C}\lambda \|(u_n - u)\|\,\|v\|.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| \leq 1$, temos que para n suficientemente grande

$$|(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq \epsilon,$$

o que implica

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} |(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq \epsilon \qquad \forall \quad n \geq n_\circ,$$

logo

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty,$$

donde concluímos que I_2' é contínua. Consequentemente, $I_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 3: O funcional I_3 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Mostraremos que I_3 é Fréchet diferenciável com derivada contínua. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ e para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ considere

$$r(v) = I_3(u+v) - I_3(u) - \int_\Omega p(x,u)v dx. \tag{B.1}$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0,$$

ou equivalentemente, que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\|v\| < \delta$ temos $|r(v)| \leq \epsilon \|v\|$. Pela definição de I_3, obtemos

$$r(v) = \int_\Omega \left[P(x,u+v) - P(x,u)\right] dx - \int_\Omega p(x,u)v dx.$$

Considere a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(t) = P(x, u+tv)$, onde x está fixado. Note que, g é contínua e com derivada $g'(t) = p(x, u+tv)v$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_0^1 g'(t)dt = g(1) - g(0),$$

ou seja,

$$\int_0^1 p(x,u+tv)vdt = P(x,u+v) - P(x,u),$$

consequentemente

$$r(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 p(x,u+tv)vdt\right] dx - \int_\Omega p(x,u)v dx.$$

o que implica

$$r(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 \left(p(x,u+tv) - p(x,u)\right) vdt\right] dx,$$

logo

$$|r(v)| \leq \int_\Omega \left[\int_0^1 |p(x,u+tv) - p(x,u)|\, |v|\, dt\right] dx.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_\Omega |p(x,u+tv) - p(x,u)|\, |v|\, dx\right] dt. \tag{B.2}$$

Seja $q = 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $r = \dfrac{2N}{N+2}$, onde $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r} = 1$. Das imersões contínuas de Sobolev, temos que $v \in L^q(\Omega)$. Note ainda, que $p \in L^r(\Omega)$. De fato, pois desde que p satisfaz a condição $(\mathbf{H_2})$, obtemos

$$\int_\Omega |p(x,u)|^r\, dx \leq \int_\Omega [a_1 + a_2 |u|^s]^r\, dx \leq K_1 \int_\Omega [a_1^r + a_2^r |u|^{sr}]\, dx \leq K_2 |\Omega| + K_3 \int_\Omega |u|^{sr}\, dx. \tag{B.3}$$

Por hipótese, temos que $1 < s < \dfrac{N+2}{N-2}$, logo

$$1 < 1.\frac{2N}{N+2} \leq sr \leq \frac{N+2}{N-2}\frac{2N}{N+2} = \frac{2N}{N-2} = 2^*, \quad \text{para} \;\; N \geq 3,$$

ou seja, $1 < sr \leq 2^*$. Assim, das imersões contínuas de Sobolev, sendo $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \in L^{sr}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |u|^{sr}\, dx < +\infty.$$

De (B.3), obtemos

$$\int_\Omega |p(x,u)|^r\, dx < +\infty,$$

mostrando que $p \in L^r(\Omega)$. Assim, aplicando a desigualdade de Hölder em (B.2), com os expoentes conjugados r e s, segue

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|p(.,u+tv) - p(.,u)\|_{L^r(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}\, dt. \tag{B.4}$$

Vamos provar agora que $p(.,u+tv) \to p(.,u)$ em $L^{q/s}(\Omega)$ uniformemente em t, ou equivalentemente, $p(.,u+tv_n) \to p(.,u)$ em $L^{q/s}(\Omega)$ uniformemente em t, onde $v_n \to 0$, quando $n \to +\infty$. Considere

$$(v_n) \subset H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \varphi_{n,t}(x) = p(x, u + tv_n(x)), \tag{B.5}$$

onde $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Das imersões contínuas de Sobolev, segue-se $v_n \to 0$ em $L^q(\Omega)$, e a menos de subsequência, temos

$$|v_n(x)| \leq g(x), \quad \text{onde} \quad g \in L^q(\Omega)$$

e

$$(u + tv_n) \to u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega).$$

Assim, a menos de subsequência temos

$$(u + tv_n)(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega$$

e

$$|(u+tv_n)(x)| \leq |u(x)| + t\,|v_n(x)| \leq |u(x)| + g(x), \ \ \forall\ t \in [0,1] \quad \text{e} \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

onde $|u| + g \in L^q(\Omega)$. Por hipótese tem-se $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, logo

$$p(x, u + tv_n(x)) \longrightarrow p(x, u(x)) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Considerando $\varphi(x) = p(x, u(x))$, obtemos

$$\varphi_{n,t}(x) \longrightarrow \varphi(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

o que implica

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Além disso,

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq \left(|p(x, u + tv_n(x))| + |p(x, u(x))|\right)^{q/s}.$$

Pela condição $(\mathbf{H_2})$, segue

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq \left(a_1 + a_2\,|u + tv_n|^s + a_1 + a_2\,|u|^s\right)^{q/s},$$

o que implica

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq M_1 + M_2\,|u + tv_n|^q + M_3\,|u|^q.$$

Sendo $t \in [0,1]$, tem-se

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq M_1 + \overline{M}_2\,|u|^q + |u|^q + \widetilde{M}_2 M_3\,|v_n|^q + M_3\,|u|^q,$$

de onde segue

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq M_1 + \overline{M}_2\,|u|^q + |u|^q + \widetilde{M}_2 M_3 g(x)^q + M_3\,|u|^q \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_\Omega |\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s}\, dx \right) = 0, \tag{B.6}$$

isto é, $\varphi_{n,t} \longrightarrow \varphi$ em $L^{q/s}(\Omega)$. Para mostrarmos que $\varphi_{n,t} \longrightarrow \varphi$ em $L^{q/s}(\Omega)$ uniformemente em $t \in [0,1]$, suponha por contradição que não ocorre convergência uniforme. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ e $t_{nj} \subset [0,1]$ verificando,

$$\left\|\varphi_{n_j, t_{n_j}} - \varphi\right\|_{L^{q/s}(\Omega)} \geq \epsilon_0 \quad \forall\ n_j \in \mathbb{N}. \tag{B.7}$$

Repetindo os mesmos argumentos que fizemos de (B.5) até (B.6) para t_{nj}, chegaremos que a menos de subsequência, dado $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\varphi_{n_j,t_{nj}} - \varphi\right\|_{L^{q/s}(\Omega)} < \epsilon \quad \forall\, n_j \geq n_0,$$

o que contradiz (B.7), portanto a menos de subsequência $p(.,u+tv_n) \to p(.,u)$ em $L^{q/s}(\Omega)$ uniformemente em t, onde $v_n \to 0$, em $H_0^1(\Omega)$, donde concluímos que

$$p(.,u+tv) \to p(.,u) \ \text{ em } \ L^{q/s}(\Omega) \quad \text{uniformemente em } \ t.$$

Sendo $r < \dfrac{q}{s}$ e Ω limitado, temos que

$$p(.,u+tv) \to p(.,u) \ \text{ em } \ L^{r}(\Omega) \quad \text{uniformemente em } \ t.$$

Assim, pela definição de Convergência Uniforme, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|p(.,u+tv) - p(.,u)\|_{L^r(\Omega)} < \epsilon \ \text{ sempre que } \ \|v\|_{L^r(\Omega)} < \delta, \qquad \forall \quad t \in [0,1]\,.$$

De (B.4), obtemos

$$|r(v)| \leq \epsilon\,\|v\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{sempre que} \quad \|v\|_{L^r(\Omega)} < \delta.$$

Usando novamente imersões contínuas de Sobolev, tem-se

$$|r(v)| \leq C\epsilon\,\|v\| \quad \text{sempre que} \quad \|v\| < \delta.$$

mostrando assim que I_3 é Fréchet diferenciável e

$$I_3'(u)v = \int_\Omega p(x,u)v\,dx, \quad \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Continuidade de I_3':

Para isto, devemos mostrar que $\|I_3'(u+v_n) - I_3'(u)\|_{H^{-1}} \to 0$ sempre que $v_n \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Considere $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $J_n(x) = p(x,u+v_n(x))$, onde $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Das imersões contínuas de Sobolev, segue que $v_n \to 0$ em $L^q(\Omega)$, logo

$$(u+v_n) \to u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega)$$

e a menos de subsequência,

$$(u+v_n)(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega$$

e

$$|(u+v_n)(x)| \leq g(x), \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega, \quad \text{onde } g \in L^q(\Omega).$$

Por hipótese temos que $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, assim

$$p(x, u+v_n(x)) \longrightarrow p(x, u(x)) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Considerando $J(x) = p(x, u(x))$, tem-se

$$J_n(x) \longrightarrow J(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

portanto

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Além disso,

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \leq (|p(x, u+v_n(x))| + |p(x, u(x))|)^{q/s}.$$

Pela condição $(\mathbf{H_2})$, segue-se

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \leq (a_1 + a_2 |u+v_n|^s + a_1 + a_2 |u|^s)^{q/s},$$

o que implica

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \leq M_1 + M_2 |u+v_n|^q + M_3 |u|^q.$$

Assim,

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \leq M_1 + \overline{M}_2 |u|^q + \widetilde{M}_2 |v_n|^q + M_3 |u|^q,$$

de onde segue

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq M_1 + \overline{M}_2 |u|^q + \widetilde{M}_2 g(x)^q + M_3 |u|^q \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_\Omega |J_n(x) - J(x)|^{q/s} \, dx \right) = 0, \tag{B.8}$$

isto é, $p(., u+v_n) \longrightarrow p(., u)$ em $L^{q/s}(\Omega)$.

Uma vez que $r < \dfrac{q}{s}$ e Ω é limitado, temos que $p(.,u+v_n) \longrightarrow p(.,u)$ em $L^r(\Omega)$, de onde segue que dado $\epsilon > 0$, existe $n_\circ \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|p(.,u+v_n) - p(.,u)\|_{L^r(\Omega)} < \epsilon, \qquad \forall \quad n \geq n_\circ.$$

Uma vez que $h \in H^1_\circ(\Omega)$, segue-se

$$|(I_3'(u+v_n) - I_3'(u))h| \leq \int_\Omega |p(x,u+v_n) - p(x,u)|\,|h|\,dx,$$

e sendo $|h| \in L^q(\Omega)$ e $|p(.,u+v_n) - p(.,u)| \in L^r(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$|(I_3'(u+v_n) - I_3'(u))\,h| \leq \|p(.,u+v_n) - p(.,u)\|_{L^r(\Omega)} \|h\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Novamente, segue-se das imersões contínuas de Sobolev,

$$|(I_3'(u+v_n) - I_3'(u))h| \leq \widetilde{C}\,\|p(.,u+v_n) - p(.,u)|\|_{L^r(\Omega)} \|h\| \leq \epsilon, \text{ para } \|h\| \leq 1 \text{ e} \,\forall\, n \geq n_\circ,$$

o que implica

$$\|I_3'(u+v_n) - I_3'(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{v \in H^1_0(\Omega) \\ \|h\| \leq 1}} |(I_3'(u+v_n) - I_3'(u))h| \leq \epsilon \qquad \forall \quad n \geq n_\circ,$$

logo

$$\|I_3'(u+v_n) - I_3'(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty,$$

donde conclímos que I_3' é contínua. Consequentemente, $I_3 \in C^1(H^1_0(\Omega), \mathbb{R})$, finalizando a demonstração da **Afirmação 3**.

Portanto, das **Afirmações 1-3**, concluímos que $I \in C^1(H^1_0(\Omega), \mathbb{R})$, consequentemente os funcionais definidos, nos **Capítulos 2** e **3** são também de classe $C^1(H^1_0(\Omega), \mathbb{R})$.

Apêndice C

Resultados Importantes

Neste apêndice enunciaremos e demonstraremos alguns resultados importantes, utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho.

Lema C.1 *Seja* $P(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi p(x,t)dt$, *de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:*
$(\overline{\mathbf{H}}_1)$ $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$*;*
$(\overline{\mathbf{H}}_2)$ *Existem constantes* a_1*,* $a_2 > 0$ *tais que*

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2\,|\xi|^s \qquad \forall\ x \in \overline{\Omega}\ \ e\ \ \xi \in \mathbb{R}, \quad onde\ \ 0 \leq s < \frac{N+2}{N-2}\ \ e\ \ N \geq 3;$$

$(\overline{\mathbf{H}}_3)$ $P(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi p(x,t)dt \longrightarrow +\infty$, *quando* $|\xi| \to +\infty$ *uniformemente para* $x \in \Omega$.
Então,

$$\int_\Omega P(x,v)dx \longrightarrow +\infty, \quad quando \quad v \to +\infty, \quad uniformemente\ para\ v \in E^\circ, \tag{C.1}$$

onde $E^\circ = V_{\lambda_k}$*.*

Demonstração: Considerando $I_3(u) = \displaystyle\int_\Omega P(x,u)dx$, com $u \in E = H_0^1(\Omega)$, segue-se que $I_3 \in C^1(E,\mathbb{R})$ **(Ver Apêndice B)**. Pela condição $(\overline{\mathbf{H}}_3)$, temos que dado $K > 0$, existe $d_K = d(K)$, tal que se $|\xi| \geq d_K$ temos $P(x,\xi) \geq K, \quad \forall \quad x \in \overline{\Omega}$. Seja $v \in E^\circ$ com $v = t\varphi$, onde $\varphi \in \partial B_1 \subset E_\circ$. Assim, considerando $\Omega_K = \Omega_K(t\varphi) = \{x \in \Omega \ \setminus\ P(x,t\varphi) \geq K\}$, segue

$$\int_\Omega P(x,t\varphi)dx = \int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx + \int_{\Omega\,\setminus\,\Omega_K} P(x,t\varphi)dx \tag{C.2}$$

Afirmação 1: Podemos definir $\inf\limits_{\substack{x\,\in\,\overline{\Omega}\\ \xi\,\in\,\mathbb{R}}} P(x,\xi)$.

De fato, analisando a condição ($\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{3}}$) temos que $P(x,\xi) \to +\infty$ quando $|\xi| \to +\infty$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$. Assim, dado $K = 1$, existe d_1 tal que

$$|P(x,\xi)| \geq 1 \text{ para } |\xi| \geq d_1 \text{ e } \forall\ x \in \overline{\Omega}. \tag{C.3}$$

Por outro lado, existe M_1 tal que

$$|P(x,\xi)| \leq M_1 \quad \forall\ (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times [-d_1, d_1]\,,$$

o que implica

$$P(x,\xi) \geq -M_1, \quad \forall\ (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times [-d_1, d_1]\,. \tag{C.4}$$

De (C.3) e (C.4), concluímos que

$$P(x,\xi) \geq min\,\{1, -M_1\} = -M_1 \qquad \forall\ (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

mostrando que a função P é limitada inferiormente em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, logo P possui ínfimo, finalizando a demonstração da **Afirmação 1**.

Sendo $P(x,t\varphi) \geq \inf\limits_{\substack{x\,\in\,\overline{\Omega}\\ \xi\,\in\,\mathbb{R}}} P(x,\xi)$, de (C.2), segue-se

$$\int_\Omega P(x,t\varphi)dx \geq \int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_K} \inf_{\substack{x\,\in\,\overline{\Omega}\\ \xi\,\in\,\mathbb{R}}} P(x,\xi)dx,$$

logo

$$\int_\Omega P(x,t\varphi)dx \geq \int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx - \int_{\Omega\backslash\Omega_K} \left|\inf_{\substack{x\,\in\,\overline{\Omega}\\ \xi\,\in\,\mathbb{R}}} P(x,\xi)\right| dx,$$

o que implica

$$\int_\Omega P(x,t\varphi)dx \geq \int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx - \left|\inf_{\substack{x\,\in\,\overline{\Omega}\\ \xi\,\in\,\mathbb{R}}} P(x,\xi)\right| \int_{\Omega\backslash\Omega_K} dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega P(x,t\varphi)dx \geq \int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx - \left|\inf_{\substack{x\,\in\,\overline{\Omega}\\ \xi\,\in\,\mathbb{R}}} P(x,\xi)\right| |\Omega\backslash\Omega_K|\,,$$

onde estamos denotando $|\Omega\backslash\Omega_K|$ a medida de Lebesgue de $\Omega\backslash\Omega_K$. Assim,

$$\int_\Omega P(x,t\varphi)dx \geq \int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx - \left|\inf_{\substack{x\,\in\,\overline{\Omega}\\ \xi\,\in\,\mathbb{R}}} P(x,\xi)\right| |\Omega|\,.$$

Considerando $M_\circ \geq \left| \inf_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x,\xi) \right| |\Omega|$, tem-se

$$\int_\Omega P(x,t\varphi)dx \geq \int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx - M_\circ. \tag{C.5}$$

Observe agora, que sendo $\varphi \in \partial B_1 \subset E^\circ$, então $\varphi \not\equiv 0$ e $\varphi = \sum_{j=1}^{s} a_j^k v_j^k$, onde cada $v_j^k \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R})$, pois prova-se que as autofunções do problema

$$\begin{cases} -\Delta v^k &= \lambda_k v^k, & \Omega \\ v^k &= 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

são de classe $C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R})$, logo φ é contínua. Portanto, existe $x_\circ = x_\circ(\varphi)$ e $r > 0$ tais que $\varphi \neq 0$ em $B_r(x_\circ)$, ou seja, $|\varphi(x)| > 0 \quad \forall\, x \in B_r(x_\circ)$.

Considerando $t_\circ > 0$, tal que

$$d_K \leq t_\circ \inf_{x \in B_r(x_\circ)} |\varphi(x)|\,.$$

Assim,

$$d_K \leq t_\circ\, |\varphi(x)| \qquad \forall \quad x \in B_r(x_\circ),$$

o que implica

$$d_K \leq |t|\, |\varphi(x)| \qquad \forall \quad x \in B_r(x_\circ) \;\text{ e }\; |t| \geq t_\circ,$$

ou seja,

$$d_K \leq |t\varphi(x)| \qquad \forall \quad x \in B_r(x_\circ) \;\text{ e }\; |t| \geq t_\circ.$$

Pela condição ($\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{3}$), tem-se

$$P(x,t\varphi) \geq K \qquad \forall \quad x \in B_r(x_\circ) \;\text{ e }\; |t| \geq t_\circ,$$

portanto $B_r(x_\circ) \subset \Omega_K$, para $|t| \geq t_\circ$. E mais, dado $K > 0$, existe $t_\circ > 0$ tal que se $|t| \geq t_\circ$ temos $P(x,t\varphi) \geq K$, $\forall\, x \in B_r(x_\circ)$, isto é,

$$P(x,t\varphi) \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad |t| \to +\infty \quad \text{uniformemente em} \;\; B_r(x_\circ).$$

Agora sendo $P(x,t\varphi) \geq K > 0$ e $B_r(x_\circ) \subset \Omega_K$, segue-se

$$\int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx \geq \int_{B_r(x_\circ)} P(x,t\varphi)dx \geq K_1 > 0, \;\; \text{para} \quad |t| \geq t_\circ, \tag{C.6}$$

logo

$$\int_{\Omega_K} P(x,t\varphi)dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad |t| \to +\infty, \ \text{ uniformemente.}$$

De (C.5), temos que

$$\int_{\Omega} P(x,t\varphi)dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad |t| \to +\infty, \ \text{ uniformemente em } \ \Omega. \tag{C.7}$$

Sendo ∂B_1 compacto, podemos fazer a seguinte afirmação:

Afirmação 2: $\displaystyle\int_{\Omega} P(x,v)dx \longrightarrow +\infty$, quando $v \to +\infty$, uniformemente para $v \in E^{\circ}$.

De fato, considere $f(t,\varphi) = \displaystyle\int_{\Omega} P(x,t\varphi)dx$. Suponha por contradição que $f(t,\varphi) \not\longrightarrow +\infty$, quando $v = t\varphi \to +\infty$ uniformemente em $v \in E^{\circ}$, isto é, existe $M_{\circ} > 0$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}$ com $t_n \to +\infty$ e $(\varphi_n) \subset \partial B_1$ tal que

$$f(t_n,\varphi_n) \leq M_{\circ}, \quad \forall \ n \in \mathbb{N} \tag{C.8}$$

Sendo ∂B_1 um compacto e $(\varphi_n) \subset \partial B_1$ limitada, existe $(\varphi_{n_j}) \subset (\varphi_n)$ tal que $\varphi_{n_j} \to \varphi$ em ∂B_1.

Por outro lado, sendo $dim E^{\circ} < +\infty$, as seguintes normas são equivalentes

$$\|\varphi\|_* = \max_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)| \quad \text{e} \quad \|\varphi\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, sendo $\varphi \not\equiv 0$ e contínua, existe $x_{\circ} = x_{\circ}(\varphi)$ e $r_{\circ} > 0$ tais que $|\varphi(x)| > 0$, em $B_{r_{\circ}}(x_{\circ})$, então existe $\eta > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| \geq \eta \quad \text{em} \ \ B_{r_{\circ}}(x_{\circ}),$$

o que implica

$$\left|\varphi_{n_j}(x)\right| \geq \frac{\eta}{2} \quad \text{em} \ \ B_{r_{\circ}}(x_{\circ}), \quad \forall \ \ n_j \geq n_{\circ},$$

portanto

$$\left\|\varphi_{n_j}\right\|_* \geq \frac{\eta}{2} \qquad \forall \ \ n_j \geq n_{\circ},$$

de onde segue pela equivalência das normas

$$\left\|t_{n_j}\varphi_{n_j}\right\| = t_{n_j}\left\|\varphi_{n_j}\right\| \geq t_{n_j}\frac{\eta}{2C}, \qquad\quad \forall \ \ n_j \geq n_{\circ},$$

logo

$$\left\|t_{n_j}\varphi_{n_j}\right\| \longrightarrow +\infty \qquad \text{quando} \qquad n_j \to +\infty.$$

Assim, pela condição $(\overline{\mathbf{H}}_3)$

$$P(x, t_{n_j}\varphi_{n_j}) \longrightarrow +\infty, \quad \text{quando} \quad n_j \to +\infty,$$

o que implica

$$f(t_{n_j}, \varphi_{n_j}) \longrightarrow +\infty, \quad \text{quando} \quad n_j \to +\infty,$$

o que é um contradição por (C.8), portanto a **Afimação 2** é verdadeira, finalizando a demonstração do **Lema C.1** . ■

Proposição C.1 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e seja p satisfazendo*
$(\overline{\mathbf{H}}_1)$ $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e*
$(\overline{\mathbf{H}}_2)$ *Existem constantes a_1, $a_2 > 0$ tais que*

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s \qquad \forall \ x \in \overline{\Omega} \ \ e \ \ \xi \in \mathbb{R}, \qquad onde \ \ 0 \leq s < \frac{N+2}{N-2} \ \ e \ \ N \geq 3.$$

Considere $I(u) = \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u)\right) dx$, onde $P(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi p(x,t)dt$. Se (u_n) é uma sequência limitada em E tal que $I'(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$, então (u_n) possui uma subsequência convergente.

Demonstração: Seja $I(u) = \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u)\right) dx$, onde $u \in E = H_0^1(\Omega)$ e $P(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi p(x,t)dt$ e p satisfaz $(\overline{\mathbf{H}}_1)$ e $(\overline{\mathbf{H}}_2)$. Note que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ **(Ver Apêndice B)** e

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega p(x,u)\varphi dx, \quad \text{onde} \ \ I'(u) \in E'.$$

Sabendo que $E = H_\circ^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, temos $I'(u)\varphi = \langle \nabla I(u), \varphi \rangle$ $\forall \ \varphi \in E$ e $\|I'(u)\|_{E'} = \|\nabla I(u)\|$. Considerando $J'(u)\varphi = \displaystyle\int_\Omega p(x,u)\varphi dx$, obtemos $I'(u)\varphi = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - J'(u)\varphi \ \forall \ u, \ \varphi \in E$.

Usando novamente o Teorema da Representação de Riesz, para $J'(u) \in E'$, segue-se

$$J'(u)\varphi = \langle \nabla J(u), \varphi \rangle, \ \ \forall \ \ \varphi \in E \ \ \text{e} \ \ \|J'(u)\|_{E'} = \|\nabla J(u)\|,$$

logo

$$\langle \nabla I(u), \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle - \langle \nabla J(u), \varphi \rangle,$$

o que implica

$$\langle \nabla I(u), \varphi \rangle = \langle u - \nabla J(u), \varphi \rangle, \ \ \forall \ \ \varphi \in E,$$

donde concluímos

$$\nabla I(u) = u - \nabla J(u).$$

Considerando $T(u) = \nabla J(u)$, onde $T : E \longrightarrow E$, tem-se

$$\nabla I(u) = u - T(u).$$

Afirmação 3: O operador $T : E \longrightarrow E$ é compacto.

De fato, considere $(u_n) \subset E$ uma sequência limitada. Devemos mostrar que $T(u_{nj}) \rightarrow T(u)$ em E. Sendo E reflexivo, então existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em E. Das imersões compacta de Sobolev, temos que

$$u_{n_j} \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^r(\Omega) \ \ \forall \ \ r \in [1, 2^*)\,, \ \text{ onde } \ 2^* = \frac{2N}{N-2}. \tag{C.9}$$

Agora, fixando r com $s + 1 \leq r < 2^*$ e considerando q o conjugado de r, isto é, $q = \dfrac{r}{r-1}$, vamos provar que $p(., u_n(.)) \rightarrow p(., u(.))$ em $L^q(\Omega)$. De fato, segue de (C.9) que a menos de subsequência

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x), \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega, \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}, \ \text{ onde } \ g \in L^r(\Omega).$$

Desde que p satisfaz a condição $(\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{1}})$, temos

$$p(x, u_n(x)) \rightarrow p(x, u(x)), \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega,$$

e portanto

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega.$$

Além disso,

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \leq C\left[|p(x, u_n(x))|^{r/s} + |p(x, u(x))|^{r/s}\right].$$

Pela condição $(\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{2}})$, obtemos

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \leq C\left[(a_1 + a_2\,|u_n|^s)^{r/s} + (a_1 + a_2\,|u|^s)^{r/s}\right],$$

de onde segue

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \leq M_1\,|u_n|^r + M_2\,|u|^r + M_3.$$

Sendo (u_n) uma sequência limitada em q.t.p. por g, tem-se

$$|p(x,u_n(x)) - p(x,u(x))|^{r/s} \leq (M_1\,|g|^r + M_2\,|u|^r + M_3) \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |p(x,u_n(x)) - p(x,u(x))|^{r/s}\,dx = 0,$$

o que implica

$$p(.,u_n(.)) \to p(.,u(.)) \;\text{ em }\; L^{r/s}(\Omega).$$

Sendo $1 < q < \dfrac{r}{s}$ e Ω limitado, obtemos

$$p(.,u_n(.)) \to p(.,u(.)) \;\text{ em }\; L^q(\Omega),$$

ou seja,

$$\|p(.,u_n(.)) - p(.,u(.))\|_{L^q(\Omega)} \to 0, \;\text{ quando }\; n\to+\infty. \tag{C.10}$$

Agora, note que

$$\|T(u_n) - T(u)\| = \|J'(u_n) - J'(u)\|_{E'} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1}|(J'(u_n) - J'(u))\,\varphi|\,.$$

Mas,

$$|(J'(u_n) - J'(u))\,\varphi| \leq \int_\Omega |p(x,u_n(x)) - p(x,u(x))|\,|\varphi|\,dx.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$|(J'(u_n) - J'(u))\,\varphi| \leq \|p(.,u_n(.)) - p(.,u(.))\|_{L^q(\Omega)}\,\|\varphi\|_{L^r(\Omega)}\,.$$

Das imersões contínuas de Sobolev, segue

$$|(J'(u_n) - J'(u))\,\varphi| \leq C\,\|p(.,u_n(.)) - p(.,u(.))\|_{L^q(\Omega)}\,\|\varphi\|\,.$$

Assim, para $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$|(J'(u_n) - J'(u))\,\varphi| \leq C\,\|p(.,u_n(.)) - p(.,u(.))\|_{L^q(\Omega)}\,,$$

logo

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_{E'} \leq C\,\|p(.,u_n(.)) - p(.,u(.))\|_{L^q(\Omega)}\,,$$

ou seja,

$$\|T(u_n) - T(u)\| \leq C\,\|p(.,u_n(.)) - p(.,u(.))\|_{L^q(\Omega)}\,. \tag{C.11}$$

De (C.10) e (C.11), obtemos que a menos de subsequência

$$\|T(u_n) - T(u)\| \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

mostrando que T é compacto.

Por outro lado, Tendo $I'(u_n) \to 0$, segue que $\|I'(u_n)\|_{E'} \to 0$. Mas, $\|I'(u_n)\|_{E'} = \|\nabla I(u_n)\|$, logo $\|\nabla I(u_n)\| \to 0$, o que implica, $\nabla I(u_n) \to 0$. Assim, sendo $\nabla I(u_n) = u_n - T(u_n)$, tem-se $u_n = \nabla I(u_n) - T(u_n)$. Portanto, a menos de subsequência, temos $u_n \to T(u)$ em E, isto é, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ convergente, de onde segue a demonstração da **Proposição C.1**. ■

Apêndice D

Teoria do Grau

Neste apêndice, recordamos a definição de Teoria do Grau de Brouwer e a do Grau de Leray-Schauder e suas propriedades, tendo como refêrencia o livro do Costa [4].

Seja $\phi \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto limitado. Dado $b \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial U)$ o problema consiste em resolver a equação

$$\phi(x) = b, \tag{D.1}$$

em U. Isto pode ser feito em certos casos usando-se o chamado Grau de Brouwer da aplicação ϕ (relativo a U no ponto b), $d(\phi, U, b)$, o qual é um inteiro que garante a existência (e algumas vezes a multiplicidade) de soluções do Problema **(D.1)**.

Inicialmente, consideraremos o caso regular, no qual $\phi \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial U)$ é um valor regular de ϕ, isto é, $\phi'(\xi)$ é inversível qualquer que seja $\xi \in \phi^{-1}(b)$ e definimos

$$d(\phi, U, b) = \sum_{\xi \in \phi^{-1}(b)} sgn(det(\phi'(\xi))),$$

onde

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t > 0 \\ -1, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Afirmação: O conjunto $\phi^{-1}(b)$ é finito.

De fato, observe primeiramente que $\phi^{-1}(b)$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$. Logo,

$\phi^{-1}(b)$ é compacto . Para cada $\xi \in \phi^{-1}(b)$ considere a bola

$$B_{r_\xi}(\xi) \subset U_\xi.$$

Assim,

$$\phi^{-1}(b) \subseteq \bigcup_{\xi \in \phi^{-1}(b)} B_{r_\xi}(\xi)$$

e pelo Teorema de Borel-Lebesgue, obtemos

$$\phi^{-1}(b) \subseteq B_{r_{\xi_1}}(\xi_1) \cup B_{r_{\xi_2}}(\xi_2) \cup ... \cup B_{r_{\xi_p}}(\xi_p).$$

Então, desde que $B_{r_{\xi_i}}(\xi_i) \cap \phi^{-1}(b) = \{\xi_i\}$ para cada $i = 1, 2, ..., p$, com $p \in \mathbb{N}$, temos que $\phi^{-1}(b)$ é finito. ∎

A função $d(\phi, U, b)$ tem as seguintes propriedades:

(i) (Normalização) Se $Id : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade, então

$$d(Id, U, b) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad b \in U \\ 0, & \text{se} \quad b \notin U \end{cases}$$

(ii) (Existência) Se $d(\phi, U, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in U$ tal que $\phi(x_0) = b$.

(iii) (Aditividade) Se $U = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e $b \notin \phi(\partial U_1) \cup \phi(\partial U_2)$, então $d(\phi, U, b) = d(\phi, U_1, b) + d(\phi, U_2, b)$.

(iv) (Continuidade) Se ψ está próxima de ϕ, então $d(\phi, U, b) = d(\psi, U, b)$.

(v) (Invariância por homotopia) Se $H \in C^1([0, 1] \times U, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H([0, 1] \times \partial U)$, então $d(H(t, .), U, b) =$constante $\forall \; t \in [0, 1]$.

(vi) (Dependência na fronteira) Se $\psi \equiv \phi$ em ∂U, então $d(\phi, U, b) = d(\psi, U, b)$.

Observação: Se $b \notin \phi(\overline{\Omega})$, então $d(\phi, U, b) = 0$.

A definição de $d(\phi, U, b)$ pode ser estendida a uma aplicação geral $\phi \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial U)$ através dos seguintes passos:

(a) Dada $\phi \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial U)$, não necessariamente um valor regular, o Teorema de Sard implica a existência de uma sequência $b_k \to b$ onde cada b_k é um valor regular, define-se então $d(\phi, U, b)$ mostrando-se que o limite abaixo existe e é independente da escolha de (b_k):

$$d(\phi, U, b) = \lim_{k \to +\infty} d(\phi, U, b_k).$$

(b) Dada $\phi \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial U)$, consideremos uma sequência $\phi_k \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_k \to \phi$ em $C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ e definimos $d(\phi, U, b)$ mostrando que o limite abaixo existe e é independente da escolha de (ϕ_k):

$$d(\phi, U, b) = \lim_{k \to +\infty} d(\phi_k, U, b).$$

Finalmente, segue-se que o grau assim definido ainda satisfaz as propriedades **(i)-(vi)**. Entretanto, devemos mencionar que existe também uma teoria do grau no caso de dimensão infinita, devido a Leray e Schauder, a qual lida com aplicações $\phi \in C(\overline{U}, X)$, onde $U \subset X$ é um conjunto aberto e limitado de um espaço de Banach X e ϕ é da forma $\phi(u) = u - T(u)$ com T uma aplicação compacta. O grau correspondente de Leray-Schauder também satisfaz as propriedades **(i)-(vi)**.

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] BARTLE, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley, 1995.

[3] BRÉZIS, Haim, *Analyse fonctionelle.* 2ª ed. MASSON, 1987.

[4] COSTA, David Goldstein, *Tópicos em Análise não-linear e Aplicações às Equações Difereniciais.* CNPq-IMPA, 1986.

[5] CAVALCANTE, Luíz Paulo de Lacerda, *Existência de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos não lineares em domínio não limitados.* Dissertação de Mestrado. UFCG, 2004.

[6] KREYSZING, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, 1989. Mech. Anal., 46, 82-95 (1981).

[7] LIMA, E. L., *Curso de Análise.* Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[8] LIMA, E. L., *Curso de Análise.* Vol. 2 (6ª Edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[9] LIMA, E. L., *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 1977.

[10] LANG, *Analysis II.* Addison-Wesley, 1969.

[11] RABINOWITZ, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.* American Mathematical Society, 1988.

[12] SOTOMAYOR, Jorge,*Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[13] WILLEM, Michel, *Lectures on Critical Point Theory*. Trabalho de Matemática 199, UnB, Brasilia, 1983.