

Resumo

Neste trabalho, estudamos a geometria de gráficos *Killing* conformes inteiros, isto é, gráficos construídos a partir do fluxo gerado por um campo de vetores V *Killing* conforme completo, os quais estão definidos sobre uma folha integral da folheação V^\perp ortogonal a V . Além disso, estudamos a restrição da norma do gradiente da função z a qual determina tal gráfico $\Sigma(z)$, nesse sentido, apresentamos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral de V^\perp .

Palavras-chave: campos de vetores *Killing* conformes, gráficos *Killing* conformes, hipersuperfícies totalmente umbílicas, r -ésimas curvaturas médias, transformações de Newton.

Abstract

We study the geometry of entire conformal *Killing* graphs, that is, graphs constructed through the flow generated by a complete conformal *Killing* vector field V and which are defined over an integral leaf of the foliation V^\perp orthogonal to V . In this setting, under a suitable restriction on the norm of the gradient of the function z which determines such a graph $\Sigma(z)$, we establish sufficient conditions to ensure that $\Sigma(z)$ is totally umbilical and, in particular, an integral leaf of V^\perp .

Keywords: conformal *Killing* vector fields, conformal *Killing* graphs, totally umbilical hypersurfaces, r th mean curvatures, Newton transformations.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Geometria de Gráficos Killing Conformes Inteiros em Ambientes Riemannianos Folheados

por

Jogli Gidel da Silva Araújo [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Sobre a Geometria de Gráficos Killing Conformes Inteiros em Ambientes Riemannianos Folheados

por

Jogli Gidel da Silva Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada por:

Prof. Dr. José Nazareno Gomes-UFAM

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino-UFPI

Prof. Dr. Joseilson Raimundo de Lima-UFCG

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima-UFCG

Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática**

Março/2014

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus e a minha família. Segundamente, quero ressaltar que, provavelmente não teria alcançado esse nível acadêmico se não fosse a ajuda de muitos.

Agradeço a todos os professores que tive no mestrado: Jefferson, Ângelo, Diogo Diniz, Daniel Cordeiro, Daniel Cibotaru, Marco Antonio, Uberlandio e Henrique. Continuando, agradeço a todos os funcionários do departamento de Matemática (UAMAT) pelo auxílio, aos colegas de mestrado, também agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, a banca examinadora pelas valiosas sugestões e novamente agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima pela orientação e paciência durante esta jornada, muito obrigado mesmo.

Dedicatória

Aos meus pais Josemir e Luciene
e as minhas irmãs Jardilene e Ja-
queline.

Conteúdo

Introdução	6
1 Preliminares	9
1.1 Campos de tensores	9
1.2 Contração de tensores	13
1.3 O pullback e o tensor derivação	15
1.4 A conexão Riemanniana e o tensor curvatura	21
1.5 Gradiente, Hessiano, Divergente e o Laplaciano	23
1.6 Imersões isométricas	24
1.7 Variedades completas e o Teorema de Hopf-Rinow	29
1.8 Variedades integral e folheações	32
1.9 Uma extensão do Teorema de Hopf	34
2 As r-ésimas curvaturas médias e as transformações de Newton	37
2.1 Os polinômios simétricos elementares	37
2.2 As r -ésimas curvaturas médias	40
2.3 As desigualdades de Newton e Gärding	42
2.4 As transformações de Newton	47
3 Gráficos Killing conformes inteiros	58
3.1 Campos Killing conformes	58
3.2 Gráficos Killing conformes	63
3.3 Umbilicidade de gráficos Killing conformes inteiros	65
3.4 Extensões para o caso das r -ésimas curvaturas médias	74

Introdução

Campos de vetores *Killing* conformes são objetos que têm sido bastante estudados, a fim de entender a geometria de hipersuperfícies imersas em ambientes Riemannianos, em particular, a geometria de gráficos *Killing* conformes inteiros. Nesse sentido, Montiel [17] estudou a singularidade de hipersuperfícies compactas com curvatura média constante em uma variedade Riemanniana completa munida de um campo de vetores *Killing* conforme fechado. Segue também a obtenção de resultados análogos para os Teoremas clássicos de Alexandrov [1, 2] e Jellet e Liebmann [15, 16] sobre hipersuperfícies em ambientes Euclidianos.

Após algum tempo, Alías, Dajczer e Ripoll [5] estenderam o clássico Teorema de Bernstein (para maiores detalhes, recomendamos [8]) para o contexto das superfícies mínimas completas em ambientes Riemannianos de curvatura de Ricci não negativa munido de um campo de vetores *Killing*. Isto foi feito sob o pressuposto de que o sinal da função ângulo entre uma aplicação global de Gauss e o campo de vetores *Killing* permanece inalterada ao longo da superfície. Na verdade, seu principal resultado requer apenas a presença de um campo de vetores *Killing* conforme homotético.

Recentemente, Dajczer, Hinojosa e de Lira [13] definiram uma noção de gráfico em uma classe de variedades Riemannianas munido de um campo de vetores *Killing* e resolveram o problema de Dirichlet correspondente para curvatura média prescrita em hipóteses envolvendo dados de domínio e curvatura de Ricci no espaço ambiente.

No artigo [10], Caminha estabeleceu obstáculos à existência de fechados conformes e campos de vetores *Killing* não paralelos sobre uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não positiva, generalizando um teorema devido a Pan [20]. Além disso, o autor obteve teoremas gerais do tipo Benstein para certas

hipersuperfícies completas de variedades Riemannianas munidas de campos de vetores *Killing* conformes fechados.

Mais recentemente, Dajczer e de Lira [12] estenderam alguns resultados de [13], considerando os gráficos que são construídos através do fluxo gerado por um campo de vetores *Killing* conforme globalmente definida em uma variedade Riemanniana. De acordo com a terminologia estabelecida em [12], esses gráficos são chamados gráficos *Killing* conformes.

Motivado pelos trabalhos acima e de acordo com o artigo [16], desenvolvido nesta dissertação, vamos analisar a geometria de gráficos *Killing* conformes em ambientes Riemannianos munidos de campos de vetores *Killing* conformes V , que estão definidos sobre uma folha integral da folheação V^\perp ortogonal ao campo V . Neste trabalho, sob certas restrições da norma do gradiente da função z que determina tal gráfico $\Sigma(z)$, apresentamos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral da folheação V^\perp . Nossa abordagem é baseada no uso da divergência das transformações de Newton junto com uma versão do Teorema de Stokes para o contexto das variedades Riemannianas não compactas completas obtidas por Yau em [22] e recentemente generalizada por Caminha em [10].

Observamos também que Alías, Impera e Rigoli estudaram recentemente em [6] o problema da singularidade para hipersuperfícies compactas e completas com alguma curvatura média r -ésima constante em produtos warped Riemannianos, em que constituem um caso particular importante de ambientes Riemannianos munidos de campos de vetores *Killing* conformes fechados. Além disso, eles determinaram condições suficientes para tal hipersuperfície contida em um slab. Por outro lado, assumindo uma comparação natural entre as desigualdades das r -ésimas curvaturas médias da hipersuperfície e os da fatia do slab onde tal hipersuperfície está contida, Aquino e de Lima [7] estabeleceram caracterizações do resultado relativo às fatias de um produto warped. Em ambos os trabalhos, a abordagem é baseada no uso de uma extensão adequada do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau para um operador diferencial adequado do tipo traço.

O nosso trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1 apresentamos os preliminares necessários para o entendimento dos resultados, no Capítulo 2,

abordamos alguns fatos com respeito as r -ésimas curvaturas médias e algumas propriedades referentes às transformações de Newton para as hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana e no Capítulo 3, o caso em que a variedade Riemanniana é munida de um campo de vetores *Killing*, estabelecemos condições para o conceito de gráfico *Killing* conforme inteiro. Logo depois, veremos os primeiros resultados em termos da curvatura média dos gráficos em estudo. Finalmente, apresentamos a extensão para o caso das r -ésimas curvaturas médias.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Campos de tensores

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos que serão necessários para o entendimento dos principais resultados descritos neste trabalho. Para maiores detalhes sobre o assunto, recomendamos ao leitor as referências [14] e [22].

Considere V um módulo sobre o anel K e denote por V^* o conjunto de todas as aplicações lineares de V em K e que munido com as operações usuais, é chamado o módulo dual de V . Se $V_i = V$ para $1 \leq i \leq s$, denotamos $V_1 \times \cdots \times V_s$ por V^s .

Definição 1.1 *Para inteiros $r \geq 0, s \geq 0$ não ambos nulos, uma aplicação K -multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$ é chamada um tensor do tipo (r, s) sobre V .*

Observação 1.1 *No contexto da definição acima, particularmente, as aplicações serão denotadas por $A : V^s \rightarrow K$ se $r = 0$ e $A : (V^*)^r \rightarrow K$ se $s = 0$.*

O conjunto $\mathfrak{T}_s^r(V)$ de todos os tensores do tipo (r, s) sobre V é um módulo sobre K , com as operações usuais.

Observação 1.2 *Por convenção, um tensor do tipo $(0, 0)$ sobre V é um elemento de K .*

Para maiores detalhes, confira capítulo 2 de [22].

No que segue, $\mathfrak{F}(M)$ denota o anel das funções diferenciáveis sobre a variedade diferenciável M e $\mathfrak{X}(M)$ é o conjunto dos campos de vetores tangentes diferenciáveis sobre M .

Um campo de tensor A sobre M é um tensor sobre o $\mathfrak{F}(M)$ -módulo $\mathfrak{X}(M)$, onde $\mathfrak{X}(M)$ representa o módulo sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$. Na maioria das vezes, por um abuso de linguagem, vamos chamar A de tensor em vez de um campo de tensor.

Exemplo 1 Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, então

$$A : \mathfrak{X}^*(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$$

definida por $A(\theta, X) = \theta(X)$ é um tensor do tipo $(1, 1)$.

Sendo A um tensor do tipo (r, s) , a sua representação é dada por

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M),$$

onde A é uma aplicação $\mathfrak{F}(M)$ -multilinear.

O conjunto $\mathfrak{T}_s^r(M)$ de todos os campos de tensores sobre M do tipo (r, s) é um módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$. Em particular, um campo de tensor sobre M do tipo $(0, 0)$ é uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$. Ver observação 1.2.

Definição 1.2 Se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$, definimos

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \rightarrow \mathfrak{F}(M) \quad \text{por}$$

$$(A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}).$$

Observe que $A \otimes B$ é um tensor do tipo $(r+r', s+s')$, chamado o tensor produto de A por B . Note que se $r' = s' = 0$, então pela Observação (1.2), B é uma função suave em M .

Definimos agora

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Por um argumento relativamente simples, segue que se A é um tensor do tipo $(0, 0)$, o tensor produto reduz a uma multiplicação ordinária em $\mathfrak{F}(M)$. De posse da definição 1.2, temos o seguinte

Proposição 1.3 Se $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $A' \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$ então

$$(fA + gA') \otimes B = fA \otimes B + gA' \otimes B.$$

Verifica-se facilmente a validade da última proposição, basta usar a definição de produto de tensores e propriedades de álgebra elementar. Identificamos $\mathfrak{T}_1^0(M) \equiv \mathfrak{X}^*(M)$ e $\mathfrak{T}_0^1(M) \equiv \mathfrak{X}(M)$, pois a cada $V \in \mathfrak{X}(M) \setminus \{0\}$ associamos $\bar{V} = A : \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ da forma $\bar{V}(\theta) = \theta(V)$. Para maiores detalhes, ver Capítulo 2 de [22].

Os tensores do tipo $(0, s)$ são chamados de covariantes enquanto os do tipo $(r, 0)$ são chamados contravariantes. Note que, se A e B são tensores covariante e contravariante, respectivamente, então $A \otimes B = B \otimes A$. No entanto, a comutatividade com respeito a operação \otimes , em geral, não vale. Por exemplo, se ∂_1 e ∂_2 representam dois campos coordenados de uma variedade diferenciável M e dx^1, dx^2 são seus duais, então

$$\begin{aligned} (dx^1 \otimes dx^2)(\partial_1, \partial_2) &= dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = \delta_1^1\delta_2^2 = 1, \\ (dx^2 \otimes dx^1)(\partial_1, \partial_2) &= dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = \delta_1^2\delta_2^1 = 0, \end{aligned}$$

e daí $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$.

Em vez de observar o tensor avaliado num ponto, pela definição abaixo, podemos expressar um tensor em termos de coordenadas locais.

Definição 1.4 *Seja $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas sobre alguma vizinhança coordenada $\mathcal{U} \subset M$. Se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, as componentes de A relativas a ξ são dadas por*

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})$$

sobre \mathcal{U} , onde todos os índices variam de 1 até $n = \dim M$.

Para um $(0, 1)$ tensor, que é uma 1-forma, as componentes são exatamente as componentes da fórmula $\theta = \sum \theta(\partial_i)dx^i$. Similarmente, quando um $(1, s)$ campo de tensor é dado na forma $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, suas componentes são determinadas pela equação abaixo

$$A(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s}) = \sum_j A_{i_1 \dots i_s}^j \partial_j,$$

e sendo $\bar{A} \in \mathfrak{T}_s^1(M)$, onde

$$\begin{aligned} \bar{A}(dx^j, \partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s}) &= dx^j(A(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s})) \\ &= \sum_k A_{i_1 \dots i_s}^k dx^j(\partial_k) \\ &= A_{i_1 \dots i_s}^j. \end{aligned}$$

Exemplo 2 Sejam $\theta = \sum_{k=1}^n \theta_k dx^k$, $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j$ 1-forma e campos de vetores arbitrários, respectivamente, e observe que

$$\begin{aligned} A(\theta, X, Y) &= A\left(\sum_{k=1}^n \theta_k dx^k, \sum_{i=1}^n X^i \partial_i, \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j\right) \\ &= \sum_{i,j,k} A(dx^k, \partial_i, \partial_j) \theta_k X^i Y^j \\ &= \sum_{i,j,k} A_{ij}^k \theta_k X^i Y^j. \end{aligned}$$

No caso de um produto $A \otimes B$, temos que suas coordenadas são dadas por

$$(A \otimes B)_{j_1 \dots j_{s+s'}}^{i_1 \dots i_{r+r'}} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+s'}}^{i_{r+1} \dots i_{r+r'}},$$

onde todos os índices variam de 1 até $n = \dim M$.

Exemplo 3 Se A é um tensor do tipo $(1, 2)$ e B é um tensor do tipo $(1, 1)$. Então $A \otimes B$ é um tensor do tipo $(2, 3)$ cujas componentes são:

$$\begin{aligned} (A \otimes B)_{ijp}^{kq} &= (A \otimes B)(dx^k, dx^q, \partial_i, \partial_j, \partial_p) \\ &= A(dx^k, \partial_i, \partial_j) B(dx^q, \partial_p) \\ &= A_{ij}^k B_p^q. \end{aligned}$$

Exemplo 4 Se $r = 1$ e $s = 2$, então $\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$ é um $(1, 2)$ tensor sobre \mathcal{U} para todos $1 \leq i, j, k \leq n$. Se A é um $(1, 2)$ tensor, então

$$A = \sum_{i,j,k=1}^n A_{ij}^k \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j,$$

sobre \mathcal{U} , onde cada índice varia de 1 até n .

O Lema abaixo é uma generalização do exemplo anterior.

Lema 1.1 Sejam x^1, \dots, x^n um sistema de coordenadas sobre $\mathcal{U} \subset M$. Se A é um (r, s) campo de tensor, então sobre \mathcal{U} ,

$$A = \sum A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

onde os índices variam de 1 até n .

1.2 Contração de tensores

Nesta seção, provaremos a existência de uma operação chamada contração de tensores que transforma (r, s) tensores em $(r - 1, s - 1)$ tensores.

Lema 1.2 *Existe uma única aplicação linear $C : \mathfrak{T}_1^1(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$, chamada $(1, 1)$ contração, tal que $C(X \otimes \theta) = \theta X$ para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Prova. Suponha que C existe com as condições estabelecidas. Sobre uma vizinhança coordenada $\mathcal{U} \subset M$, um campo de tensor A pode ser escrito como

$$\sum A_j^i \partial_i \otimes dx^j.$$

Sendo

$$C(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_i^j, \quad \text{temos}$$

$$C(A) = \sum_{i=1}^n A_i^i = \sum_{i=1}^n A(dx^i, \partial_i). \quad (1.1)$$

Observe que se a aplicação C existe com as condições exigidas, então a mesma é única. Para mostrar a existência, defina C por (1.1). Primeiramente note que C é linear. Além disso,

$$C(X \otimes \theta) = \sum_{i=1}^n (X \otimes \theta)(dx^i, \partial_i) = \sum_{i=1}^n dx^i(X) \theta(\partial_i),$$

isto é,

$$C(X \otimes \theta) = \sum_{i=1}^n \theta(X_i \partial_i) = \theta \left(\sum_{i=1}^n X_i \partial_i \right) = \theta(X).$$

Para obter uma função global é suficiente mostrar que esta definição é independente da escolha do sistema de coordenadas. De fato, observe que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n A \left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m} \right) &= \sum_{m=1}^n A \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j,m=1}^n \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} A \left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta_i^j A \left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_m A \left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m} \right) = \sum_i A \left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

■

Exemplo 5 Se A é um $(2, 3)$ campo de tensor, então $C_3^1(A)$ é um $(1, 2)$ campo de tensor dado por

$$(C_3^1(A))(\theta, X, Y) = CA(., \theta, X, Y, .).$$

Relativamente a um sistema de coordenadas de $C_3^1(A)$ temos

$$\begin{aligned} (C_3^1(A))_{ij}^k &= (C_3^1 A)(dx^k, \partial_i, \partial_j) \\ &= C\{A(., dx^k, \partial_i, \partial_j, .)\} \\ &= \sum_m A(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m), \quad \text{ou seja,} \end{aligned}$$

$$(C_3^1(A))_{ij}^k = \sum_m A_{ijm}^{mk}.$$

Não é imediato ver que, se um determinado elemento de $\mathfrak{X}^*(M)$ ou $\mathfrak{X}(M)$ se anular em algum $p \in M$, o tensor $A : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ avaliado nesse ponto é zero. Mostremos isso no resultado abaixo.

Lema 1.3 Se alguma das 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^r$ ou campos de vetores X_1, \dots, X_s se anula em $p \in M$, então $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0$.

Prova. Suponha sem perda de generalidade que $X_s|_p = 0$ para algum $s \in \{1, \dots, n\}$. Sejam x^1, \dots, x^n um sistema de coordenadas sobre uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$ de p . Então $X_s = \sum X^i \partial_i$ sobre \mathcal{U} , onde $X^i = X_s x^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$. Sabemos que existe uma função f , chamada de função *bump* tal que f é identicamente igual a 1 numa vizinhança de p e cujo suporte está contido em \mathcal{U} . Para maiores detalhes, ver Capítulo 2 de [22]. Então $fX^i \in \mathfrak{F}(M)$ e $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, usando as propriedades de A , temos

$$\begin{aligned} f^2 A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, f^2 X_s) \\ &= A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, f^2 \sum X^i \partial_i) \\ &= A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \sum fX^i f\partial_i) \\ &= \sum fX^i A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, f\partial_i). \end{aligned}$$

Sendo $X_s|_p = 0$, cada $X^i(p) = 0$; pois $\{\partial_i|_p\}$ é uma base, em particular, é um conjunto linearmente independente, além disso, $f(p) = 1$, logo avaliando em p , obtemos

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0.$$

■

O resultado abaixo é uma consequência quase imediata do lema 1.3.

Teorema 1.5 *Dados $p \in M$ e $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, suponha que $\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r$ e $\theta^1, \dots, \theta^r$ são 1-formas tais que $\bar{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$ onde $1 \leq i \leq r$; e suponha que $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s$ e X_1, \dots, X_s são campos de vetores tais que $\bar{X}_j|_p = X_j|_p$ onde $1 \leq j \leq s$. Então*

$$A(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s)(p) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p).$$

Prova. Por simplicidade, suponha $r = 1$ e $s = 2$. Considere a seguinte identidade telescópica

$$A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) - A(\theta, X, Y) = A(\bar{\theta} - \theta, \bar{X}, \bar{Y}) + A(\theta, \bar{X} - X, \bar{Y}) + A(\theta, X, \bar{Y} - Y).$$

Por hipótese, $\bar{\theta} - \theta$, $\bar{X} - X$ e $\bar{Y} - Y$ se anulam em p . Assim, pelo Lema anterior,

$$A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y})(p) = A(\theta, X, Y)(p).$$

O caso geral segue por linearidade. ■

1.3 O pullback e o tensor derivação

Considere uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$ e um referencial de vetores tangentes $\{v_1, \dots, v_n\}$ avaliado num determinado ponto de N . É possível, num certo sentido, definir um referencial em M , que eventualmente depende de ϕ .

Definição 1.6 *Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se $A \in \mathfrak{T}_s^0(N)$ com $s \geq 1$, temos*

$$(\phi^*A)(v_1, \dots, v_s) = A(d\phi v_1, \dots, d\phi v_s),$$

para todos $v_i \in T_pM$, $p \in M$.

A aplicação $\phi^*(A)$ é chamada o pullback de A por ϕ e $\phi^*(f) = f \circ \phi \in \mathfrak{F}(M)$ por definição.

Uma consequência imediata da definição anterior é dada pelo seguinte resultado.

Lema 1.4 (1) Se $\phi : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, então $\phi^* : \mathfrak{T}_s^0(N) \rightarrow \mathfrak{T}_s^0(M)$ é linear para cada $s \geq 0$, e

$$\phi^*(A \otimes B) = \phi^*(A) \otimes \phi^*(B)$$

para tensores covariantes de tipos arbitrários $(0, s)$ e $(0, t)$.

(2) Se $\psi : N \rightarrow P$ é também uma aplicação diferenciável, então

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{T}_s^0(P) \rightarrow \mathfrak{T}_s^0(M)$$

para todo $s \geq 0$.

No que segue abaixo, será apresentado um tipo de operador sobre tensores que, num certo contexto, generaliza o conceito de derivada usual para funções diferenciáveis reais.

Definição 1.7 Um tensor derivação \mathfrak{D} sobre uma variedade diferenciável M é um conjunto de aplicações lineares

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M),$$

onde $r, s \geq 0$ tal que para tensores A e B :

$$(1) \mathfrak{D}(A \otimes B) = \mathfrak{D}A \otimes B + A \otimes \mathfrak{D}B,$$

$$(2) \mathfrak{D}(CA) = C(\mathfrak{D}A) \text{ para cada contração } C.$$

A definição anterior nos permite obter o seguinte resultado.

Teorema 1.8 Se \mathfrak{D} é um tensor derivação sobre M e \mathcal{U} é um conjunto aberto de M , então existe um único tensor derivação $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ sobre \mathcal{U} tal que

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}(A|_{\mathcal{U}}) = (\mathfrak{D}A)|_{\mathcal{U}}$$

para todos os tensores A sobre M . ($\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ é chamado a restrição de \mathfrak{D} para \mathcal{U})

Prova. Primeiramente note que se $f \equiv c$ localmente, onde c é uma constante, então $\mathfrak{D}(f) = 0$. De fato, suponha inicialmente que f é a função identicamente nula, logo, temos

$$\mathfrak{D}(0) = \mathfrak{D}(0.0) = \mathfrak{D}(0).0 + 0.\mathfrak{D}(0) = 0.$$

Lembrando que nesse caso, a operação \otimes se reduz a multiplicação ordinária de funções. Se $c = 1$ obtemos de modo análogo $\mathfrak{D}(1) = 2\mathfrak{D}(1)$ e daí $\mathfrak{D}(1) = 0$. Seja agora c arbitrário, assim temos $\mathfrak{D}(c) = \mathfrak{D}(c.1) = c\mathfrak{D}(1) = 0$ e conseqüentemente $\mathfrak{D}(c) = 0$.

Suponha agora que f é localmente constante em p . Note que podemos supor que esta constante é nula pois se $f(V_p) = \{c\}$ temos que $\tilde{f} = f - c$ é localmente nula e $\mathfrak{D}(\tilde{f})_q = \mathfrak{D}(f)_q, \forall q \in M^n$. Considere g uma função tal que seja identicamente 1 numa vizinhança de p e suportada em V_p e assim $fg \equiv 0$. Logo,

$$0 = \mathfrak{D}(fg)_p = \mathfrak{D}(f)_p g(p) + f(p) \mathfrak{D}(g)_p = \mathfrak{D}(f)_p.$$

Sejam $B \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{U})$ e f uma função que seja identicamente 1 numa vizinhança de p e suportada em \mathcal{U} e $f = 1$ numa vizinhança de p fixado em \mathcal{U} , então $fB \in \mathfrak{T}_s^r(M)$. Logo

$$(\mathfrak{D}_{\mathcal{U}} B)_p = \mathfrak{D}(fB)_p.$$

Mostraremos que a definição não depende da escolha da função f nestas condições. Sejam f, g funções *bump* suportadas em \mathcal{U} . Então, para $p \in \mathcal{U}$, temos

$$\mathfrak{D}(fgB)_p = g(p) \mathfrak{D}(fB)_p + \mathfrak{D}(g)_p f(p) B|_p = \mathfrak{D}(fB)_p,$$

mostrando a independência da função f devido a comutatividade do produto de funções. Não é difícil verificar os itens abaixo.

- i) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}} B$ é um tensor em \mathcal{U} ,
- ii) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ é uma derivação tensorial em \mathcal{U} ,
- iii) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}(B|_{\mathcal{U}}) = \mathfrak{D}(B)_{\mathcal{U}}$ para todo tensor B em M ,
- iv) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ é único. ■

Apresentaremos agora uma propriedade de tensores que será muito útil em alguns resultados.

Teorema 1.9 *Seja \mathfrak{D} um tensor derivação sobre M . Se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ então*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)] &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) + \\ &\quad \sum_{i=1}^r A(\theta^1, \dots, \mathfrak{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) + \\ &\quad \sum_{j=1}^s A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathfrak{D}X_j, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Prova. Por simplicidade consideramos $r = s = 1$. Daí,

$$A(\theta, X) = \overline{C}(A \otimes \theta \otimes X),$$

onde \overline{C} é a composição de duas contrações.

De fato, relativo a um sistema de coordenadas $A \otimes \theta \otimes X$ tem componentes $A_j^i \theta_k X^l$, onde $A(\theta, X) = \sum_{i,j=1}^n A_j^i \theta_i X^j$. Então

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(A(\theta, X)) &= \mathfrak{D}\overline{C}(A \otimes \theta \otimes X) \\ &= \overline{C}\mathfrak{D}(A \otimes \theta \otimes X) \\ &= \overline{C}(\mathfrak{D}A \otimes \theta \otimes X) + \overline{C}(A \otimes \mathfrak{D}\theta \otimes X) + \overline{C}(A \otimes \theta \otimes \mathfrak{D}X) \\ &= (\mathfrak{D}A)(\theta, X) + A(\mathfrak{D}\theta, X) + A(\theta, \mathfrak{X}). \end{aligned}$$

■

Definição 1.10 Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$, o tensor derivação \mathcal{L}_V tal que

$$\begin{aligned} (i) \mathcal{L}_V(f) &= V(f), \forall f \in \mathfrak{F}(M), \\ (ii) \mathcal{L}_V(X) &= [V, X], \forall X \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

é chamado Derivada de Lie com relação a V .

Observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(fX) &= [V, fX] = V(fX) - (fX)V = V(f)X + fVX - fXV \\ &= V(f)X + f(VX - XV), \quad \text{ou seja,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(fX) &= V(f)X + f[V, X] \\ &= \mathcal{L}_V(f)X + f\mathcal{L}_V X. \end{aligned}$$

Os próximos resultados dessa seção requerem a noção de curvas integrais, que passamos a definir.

Definição 1.11 Sejam M uma variedade diferenciável e $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma curva $\gamma : J \rightarrow M$ determina um vetor tangente $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para cada ponto da curva.

Definição 1.12 Seja V um campo de vetores diferenciável sobre M . Uma curva integral de V é uma curva diferenciável $\gamma : J \rightarrow M$ tal que $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$ para todo $t \in J$. A curva integral γ é maximal quando a aplicação γ não pode ser estendida a um intervalo maior com as mesmas propriedades que definem uma curva integral.

Será apresentado agora um resultado que garante a existência de campos coordenados em torno de alguma vizinhança coordenada, tal que, num determinado ponto p dessa vizinhança, um deles seja igual a um vetor tangente fixado em p .

Lema 1.5 *Se V é um campo de vetores em uma variedade M e p um ponto tal que $V_p \neq 0$, então existe um sistema de coordenadas x^1, \dots, x^n em p tal que $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$ sobre alguma vizinhança coordenada.*

Apresentaremos agora uma caracterização do Colchete de *Lie* via o fluxo local de um determinado campo $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.13 *Se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, seja ψ o fluxo local de V em torno de $p \in M$. Então*

$$[V, W]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\psi_{-t}(W_{\psi_t p}) - W_p].$$

Prova. Escreva $F_p(t) = d\psi_{-t}(W_{\psi_t p})$. Então o lado direito da equação acima é $F'_p(0)$. Temos dois casos a considerar.

Caso 1: $V_p \neq 0$. Escolha um sistema de coordenadas x^1, \dots, x^n como no Lema acima de modo que $V = \partial_1$. Portanto o fluxo de V somente muda a coordenada x^1 dos pontos q próximos de p :

$$x^1(\psi_t q) = x^1(q) + t \quad , \quad x^j(\psi_t q) = x^j(q)$$

para $2 \leq j \leq n$.

Daí segue que $d\psi_t(\partial_i) = \partial_i$ para todo i e t . Se $W = \sum_{i=1}^n W^i \partial_i$, então

$$F_p(t) = \sum_{i=1}^n W^i(\psi_t p) \partial_i|_p.$$

Por conveniência, omitimos p e calculemos

$$F'_p(0) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (W^i \circ \alpha_p)(0) \partial_i = \sum_{i=1}^n V_p(W^i) \partial_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W^i}{\partial x^1}(0) \partial_i,$$

isto é,

$$F'_p(0) = [\partial_1, W]_p = [V, W]_p.$$

Caso 2. $V = 0$ sobre uma vizinhança de p . Então $[V, W]_p = 0$. Além disso, as curvas integrais numa determinada vizinhança de p são constantes, assim $\psi_t = id$ para todo t . Portanto F_p é constante, assim $F'_p(0) = 0$.

Caso 3. $V_p = 0$, mas p é o limite de uma sequência $\{p_i\}$ com $V_{p_i} \neq 0$ para todo i .

As expressões acima em termos de coordenadas mostra que $F'_p(0)$ e $[V, W]_p$ depende continuamente de p , assim o resultado segue pelo caso 1. ■

O próximo resultado caracteriza a derivada de *Lie* em termos do fluxo de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.14 *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$, então*

$$\mathcal{L}_X A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\psi_t^*(A) - A],$$

onde $\{\psi_t\}$ é o fluxo de X . (Quando o fluxo é local, a equação vale localmente.)

Prova. Por simplicidade, consideramos $s = 2$. Desde que \mathcal{L}_X é um tensor derivação, vale

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X A)(V, W) &= \mathcal{L}_X A(V, W) - A(\mathcal{L}_X V, W) - A(V, \mathcal{L}_X W) \\ &= XA(V, W) - A([X, V], W) - A(V, [X, W]). \end{aligned}$$

Trabalhamos agora com o lado direito da fórmula acima e por economia de notação, denotamos $\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{1}{t})$ por \mathfrak{L} num ponto fixado p . Então

$$\mathfrak{L}(\psi_t^* A - A)(V_p, W_p) = \mathfrak{L}\{A(d\psi_t(V_p), d\psi_t(W_p)) - A(V_p, W_p)\}.$$

Somando e subtraindo um termo adequado, obtemos

$$\mathfrak{L}\{A(d\psi_t(V_p), d\psi_t(W_p)) - A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p})\} + \mathfrak{L}\{A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p}) - A(V_p, W_p)\}.$$

Chamamos esses dois limites de *I* e *II*. Se α é uma curva integral de X a partir de p , então $\psi_t(p) = \alpha(t)$, e

$$II = \left(\frac{d}{dt} \right) \langle V_\alpha, W_\alpha \rangle|_0 = \alpha'(0) \langle V, W \rangle = X_p \langle V, W \rangle.$$

Para *I* usando a identidade telescópica

$$A(v', w') - A(v, w) = A(v' - v, w') + A(v, w' - w) \quad \text{obtemos}$$

$$I = \mathfrak{L}\{A(d\psi_t(V_p) - V_{\psi_t p} d\psi_t(W_p))\} + \mathfrak{L}\{A(V_{\psi_t p}, d\psi_t(W_p) - W_{\psi_t(p)})\}.$$

Sendo A bilinear e $\psi_t \psi_{-t} = \psi_0 = id$, o primeiro termo pode ser reescrito usando a Proposição 1.9 como segue

$$\mathfrak{L}\{A(d\psi_t(V_p - d\psi_{-t}(V_{\psi_t p})), d\psi_t(W_{\psi_t(p)}))\} = -A(d\psi_t \mathfrak{L}\{d\psi_{-t}(V_{\psi_t p}) - V_p\}, \lim_{t \rightarrow 0} d\psi_t(W_{\psi_t(p)}))$$

ou seja,

$$\mathfrak{L}\{(A(d\psi_t(V_p - d\psi_{-t}(V_{\psi_t p})), d\psi_t(W_{\psi_t(p)}))\} = -A([X, V]_p, W_p).$$

De forma análoga, o segundo termo acima é $-A(V_p, [X, W]_p)$. Então, $I + II = (\mathcal{L}_X A)(V_p, W_p)$. ■

1.4 A conexão Riemanniana e o tensor curvatura

No que segue, sempre podemos admitir que uma variedade Riemanniana esteja munida de uma conexão afim, conforme o teorema de Levi-Civita. Primeiramente, começaremos com a seguinte definição.

Definição 1.15 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades

- i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
 - ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
 - iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
- para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Enunciamos agora o teorema fundamental dessa seção cuja validade segue da fórmula de Koszul e cuja demonstração, recomendamos ao leitor o capítulo 2 de [14].

Definição 1.16 *Uma conexão afim ∇ é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e é dita compatível com a métrica quando

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_X Z \rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 1.17 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- i) ∇ é simétrica,
- ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Observação 1.3 *Uma conexão afim que cumpre as condições i) e ii) é chamada conexão Riemanniana ou conexão de Levi-Civita.*

De agora em diante, exceto quando explicitamente mencionadas, sempre vamos admitir que uma variedade Riemanniana está munida de uma conexão Riemanniana.

Apresentaremos agora uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana, ou ainda, mede o quanto uma geometria de uma variedade Riemanniana deixa de ser equivalente a geometria do espaço Euclidiano.

Definição 1.18 *O tensor curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

A curvatura seccional está intimamente relacionada com o tensor curvatura, como podemos perceber pelo seguinte resultado.

Teorema 1.19 *Sejam $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores x e y .

Definição 1.20 *Dado $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$, o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .*

O próximo resultado permite caracterizar uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante, cuja demonstração pode ser encontrada em [14].

Lema 1.6 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .

Definição 1.21 A curvatura de Ricci em p nas direções de x e y é dada por:

$$Ric_p(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, e_i)y, e_i \rangle.$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_pM$ é um referencial ortonormal.

De fato, defina uma forma bilinear em T_pM como se segue: sejam $x, y \in T_pM$ e ponhamos

$$Q(x, y) = tr(z \mapsto R(x, z)y).$$

Note que Q é bilinear. Escolhendo x unitário e uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n\}$ para T_pM temos

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^n \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle = Q(y, x),$$

isto é, Q é simétrica e $Q(x, y) = (n-1)Ric_p(x, y)$; o que demonstra que $Ric_p(x, y)$ está intrinsecamente definida. Iremos denotar por

Notação: $Ric_p(x) = Ric_p(x, x)$ por definição.

1.5 Gradiente, Hessiano, Divergente e o Laplaciano

Em ambientes Euclidianos, o produto interno natural induz um isomorfismo entre \mathbb{R}^n e seu dual $(\mathbb{R}^n)^*$.

Se considerarmos uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, definimos o *gradiente* de f em $a \in U$ como o vetor $\nabla f(a)$, que corresponde ao funcional $df(a)$ segundo o isomorfismo anteriormente descrito.

Isto significa que

$$\langle \nabla f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = df(a).v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \alpha_i$$

para todo $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Particularmente,

$$\langle \nabla f(a), e_i \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

e isto nos permite concluir que

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

A definição de campo gradiente no contexto de variedades é definida com base na definição usual em espaços Euclidianos.

Definição 1.22 Para cada $f \in \mathfrak{F}(M)$, definimos o gradiente de f como sendo o campo ∇f tal que $X(f) = df(X) = \langle \nabla f, X \rangle$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $f \in \mathfrak{F}(M)$. Sabemos que hessiano $Hessf$ de f em $p \in M$ é um operador linear $Hessf : T_pM \rightarrow T_pM$ definido por $(Hessf)Y = \nabla_Y(\nabla f)$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Considere agora a seguinte definição.

Definição 1.23 Para $f \in \mathfrak{F}(M)$ o Hessiano de f , denotado por $Hessf$, é o campo tensorial $Hessf : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ dado por

$$(Hessf)(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle.$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Em Cálculo Vetorial, o operador divergência pode ser entendido como um escalar que mede a dispersão ou divergência dos vetores do campo num determinado ponto. No contexto de variedades, temos a seguinte definição.

Definição 1.24 Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, o divergente de X é uma função

$$div(X) = tr(Y \mapsto \nabla_Y X).$$

No espaço Euclidiano, o operador Laplaciano avaliado em uma determinada função diferenciável f é definido como sendo o traço da matriz Hessiana associada a f .

Definição 1.25 Para $f \in \mathfrak{F}(M)$ definimos o Laplaciano Δf como sendo

$$\Delta f = tr(Hessf).$$

1.6 Imersões isométricas

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{k=n+m}$ uma imersão. A métrica Riemanniana de \overline{M} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M : se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle.$$

Nesta situação, f é uma imersão isométrica de M em \overline{M} .

Definição 1.26 *Sejam M^n e \overline{M}^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\psi : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ é chamada uma imersão se a diferencial $d\psi_p : T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} \overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M^n$. Se, além disto, ψ é um homeomorfismo sobre $\psi(M^n) \subset \overline{M}^m$, onde $\psi(M)$ tem a topologia induzida por \overline{M}^m , dizemos que ψ é um mergulho. Se $M^n \subset \overline{M}^m$ e a aplicação inclusão $\iota : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ é um mergulho, então dizemos que M^n é uma subvariedade de \overline{M}^m .*

Vale observar que se $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$ é uma métrica em \overline{M} , podemos definir uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ em M via *pullback*.

Teorema 1.27 *Seja $\psi : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ uma imersão isométrica. Em torno de cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que $\psi|_U$ é um mergulho sobre $\psi(U)$.*

Prova.

Sejam $x_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ e $x_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{M}$ sistemas de coordenadas em p e em $\psi(p)$, respectivamente, e indiquemos por (x_1, \dots, x_n) as coordenadas de \mathbb{R}^n e por (y_1, \dots, y_m) as coordenadas de \mathbb{R}^m . Nestas coordenadas, a expressão de ψ , isto é, a aplicação $\overline{\psi} = x_2^{-1} \circ \psi \circ x_1$ pode ser escrita por

$$\overline{\psi} = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Seja $q = x_1^{-1}(p)$. Como ψ é uma imersão, podemos supor, renumerando as coordenadas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , se necessário, que

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Para aplicar o Teorema da Aplicação Inversa, definimos uma aplicação (supostamente diferenciável) $\phi : U_1 \times \mathbb{R}^{m-n=k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_k) &= (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n), y_{n+1}(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ t_1, \dots, y_{n+k}(x_1, \dots, x_n) + t_k), \end{aligned}$$

onde $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{m-n=k}$. Verifica-se que ϕ restrito a $U_1 \times \{0\}$ coincide com $\overline{\psi}$ e que

$$\det(d\psi_q) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem vizinhanças $W_1 \subset U_1 \times \mathbb{R}^k$ de q e $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ de $\psi(q)$ tais que a restrição $\phi|_{W_1}$ é um difeomorfismo sobre W_2 . Sejam $\bar{V} = W_1 \cap (U_1 \times \{0\})$ e $\tilde{V} = \tilde{W}_1 \cap U_1$, onde \tilde{W}_1 é o conjunto das n primeiras entradas de W_1 . Como $\phi|_{\bar{V}} = \bar{\psi}|_{\tilde{V}}$ e x_i é um difeomorfismo, $i = 1, 2$, concluímos que a restrição a $V = x_1(\tilde{V})$ da aplicação $\phi = x_2 \circ \bar{\psi} \circ x_1^{-1} : V \rightarrow \psi(V) \subset \bar{M}$ é um difeomorfismo, em particular, é um mergulho. ■

De acordo com o teorema anterior, podemos identificar U com a sua imagem $\psi(U)$, isto é, ψ é localmente a aplicação inclusão. Assim podemos considerar o espaço tangente de M em p com um subespaço do espaço tangente de \bar{M} em p e escrevemos

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\bar{M}$.

Definição 1.28 *Sejam \bar{M} uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ e $\psi : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica. Então dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\bar{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^\top + (\nabla_X Y)^\perp.$$

Segue da unicidade da conexão de Levi-Civita que $(\nabla)^\top$ é a conexão de Levi-Civita de M e denotamos por ∇ . Assim obtemos a Fórmula de Gauss

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \quad \text{para todos } X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

a qual define uma aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ chamada a segunda forma fundamental da imersão ψ .

Teorema 1.29 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por $\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

Prova. Primeiramente mostremos que α é uma forma bilinear. De fato, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, temos por um lado,

$$\begin{aligned} \alpha(X + fY, Z) &= \bar{\nabla}_{X+fY} Z - \nabla_{X+fY} Z \\ &= \bar{\nabla}_X Z + f\bar{\nabla}_Y Z - \nabla_X Z - f\nabla_Y Z \\ &= \bar{\nabla}_X Z - \nabla_X Z + f(\bar{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z), \quad \text{isto é,} \\ \alpha(X + fY, Z) &= \alpha(X, Z) + f\alpha(Y, Z). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 \alpha(X, Y + fZ) &= \bar{\nabla}_X(Y + fZ) - \nabla_X(Y + fZ) \\
 &= \bar{\nabla}_X Y + f\bar{\nabla}_X Z + X(f)Z - \nabla_X Y - f\nabla_X Z - X(f)Z \\
 &= \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y + f(\bar{\nabla}_X Z - \nabla_X Z),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha(X, Y + fZ) = \alpha(X, Y) + f\alpha(X, Z),$$

o que mostra que α é uma forma bilinear. Para a simetria, observe que

$$\begin{aligned}
 \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) &= \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - (\bar{\nabla}_Y X - \nabla_Y X) \\
 &= \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - \bar{\nabla}_Y X + \nabla_Y X \\
 &= [X, Y] - [X, Y] = 0,
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que quando restritos a M os campos são iguais. ■

Consideramos agora campos de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, e denotemos por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\bar{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Uma vez que para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vale

$$0 = X\langle \xi, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_X Y \rangle$$

pela Equação de Gauss, temos

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y).$$

Daí,

$$0 = \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \rangle \Rightarrow \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle + \langle \nabla_X Y, \xi \rangle + \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle = 0.$$

Sendo $\langle \nabla_X Y, \xi \rangle = 0$ então

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle &= \langle -\bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle \\
 &= \langle -(\bar{\nabla}_X \xi)^T - (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp, Y \rangle \\
 &= \langle -(\bar{\nabla}_X \xi)^T, Y \rangle + \langle -(\bar{\nabla}_X \xi)^\perp, Y \rangle \quad \text{e sabendo que } A_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top,
 \end{aligned}$$

temos, $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle$.

Observe que a aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X, \xi) = A_\xi X$ é bilinear sobre $\mathfrak{F}(M)$. Consequentemente, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $\mathfrak{F}(M)$ e também auto-adjunta, isto é, $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A aplicação A_ξ é chamada operador de forma ou operador de Weingarten da imersão ψ . Dizemos que ∇^\perp é a conexão normal de ψ , além disso, vale a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi.$$

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$, temos em cada $p \in M$ a decomposição

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

que varia diferenciavelmente com p .

A seguir, serão apresentadas algumas equações envolvendo campos de vetores e o tensor curvatura de uma variedade Riemanniana M . Para verificar a validade dessas equações, recomendamos ao leitor o Capítulo 6 de [14].

Proposição 1.30 *As seguintes equações se verificam:*

(a) *Equação de Gauss*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle \alpha(Y, T), \alpha(X, Z) \rangle + \langle \alpha(X, T), \alpha(Y, Z) \rangle.$$

para quaisquer $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) *Equação de Ricci*

$$\langle \overline{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = \langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y \rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta, \zeta \in (T_p M)^\perp$, onde $[S_\eta, S_\zeta]$ indica o operador $S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M . A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ definido por

$$\alpha(X, Y, \eta) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle.$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\top$. A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural:

$$(\bar{\nabla}_X \alpha)(Y, Z, \eta) = X(\alpha(Y, Z, \eta)) - \alpha(\nabla_X Y, Z, \eta) - \alpha(Y, \nabla_X Z, \eta) - \alpha(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta).$$

Proposição 1.31 (*Equação de Codazzi*). *Com a notação acima temos que*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y \alpha)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X \alpha)(Y, Z, \eta).$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M), \eta \in (T_p M)^\perp$.

1.7 Variedades completas e o Teorema de Hopf-Rinow

No contexto de superfícies regulares, uma curva $\gamma : I \rightarrow S$ é uma geodésica em I se o campo γ' é paralelo ao longo de γ ; isto é,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0.$$

No caso de variedade diferenciável, a definição é a mesma com as devidas adaptações.

Definição 1.32 *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é uma geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.*

Apresentaremos agora um resultado de Equações Diferenciais Ordinárias.

Proposição 1.33 *Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\epsilon_1 > 0$ e uma aplicação suave*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M \quad , \quad \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_q M, |v| < \epsilon_1\}$$

tais que a curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v), t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_q M$ com $|v| < \epsilon_1$.

Conforme iremos definir, geometricamente a aplicação $v \mapsto \exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$. Nas mesmas condições da proposição acima, segue a

Definição 1.34 A aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right),$$

$(q, v) \in \mathcal{U}$, é chamada a aplicação exponencial em \mathcal{U} .

Proposição 1.35 Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U_0 \subset T_p M$ na qual \exp_p é um difeomorfismo sobre uma vizinhança V_p em M .

Em Geometria Diferencial, uma superfície regular conexa S é denominada completa quando para qualquer $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S$ de S , começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre toda a reta real \mathbb{R} . Em variedades segue a mesma definição.

Definição 1.36 Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial \exp_p , está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, se toda geodésica $\gamma(t)$ começando em p está definida para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

O fato que torna mais preciso o conceito de completeza é o seguinte resultado.

Teorema 1.37 (Hopf-Rinow). Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) \exp_p está definida em todo o $T_p M$,
 - b) Os limitados e fechados de M são compactos,
 - c) M é completa como espaço métrico,
 - d) M é geodesicamente completa,
 - e) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = M$, tais que $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \rightarrow \infty$. (Aqui $\text{int}A$ indica o interior do conjunto A).
- Além disso, cada uma das afirmações acima implica que
- f) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica minimizante γ ligando p a q .

Definição 1.38 Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva $\alpha : [0, a) \rightarrow M$ é divergente se $\alpha([0, a))$ não está contida em nenhum compacto K de M , onde a é um número real positivo ou $a = \infty$.

Observação 1.4 A propriedade de uma curva α ser divergente não depende de sua parametrização e sim do seu traço.

Observação 1.5 Evidentemente não existe curvas divergentes em variedades Riemannianas compactas.

O próximo resultado caracteriza a noção de variedade Riemanniana completa.

Lema 1.7 *Uma variedade Riemanniana M é completa se, e somente se, toda curva divergente $\alpha : [0, a) \rightarrow M$ satisfaz*

$$\int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = +\infty.$$

Prova. Suponha que a variedade Riemanniana M é completa. Pelo Teorema de Hopf-Rinow, podemos ver M no sentido de ser completa como espaço métrico e mostremos que toda curva divergente tem comprimento infinito.

Suponha que α é uma curva divergente de comprimento finito, ou seja,

$$\int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = L < +\infty,$$

Daí,

$$d(\alpha(0), \alpha(t)) \leq \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau \leq \int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = L.$$

Assim $\alpha([0, a))$ é limitado e pelo Teorema de Hopf-Rinow, segue que o conjunto $\overline{\alpha([0, a))}$ é compacto e conseqüentemente o traço da curva α está contido num compacto, mas isso contradiz o fato da curva α ser divergente.

Suponha agora que toda curva divergente tem comprimento infinito, mostremos que M é completa. Suponha que o item *i*) do Teorema de Hopf-Rinow não vale, equivalentemente, M não é completa. Então existem $p \in M$, $0 < t_0 < +\infty$ e $v \in T_p M$ com $|v| = 1$ tais que $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ está definida para $t \in [0, t_0)$, mas não pode ser definida para t_0 . Mostremos que γ é uma curva divergente. Se $\gamma([0, t_0))$ está contida num compacto K , considere $t_n \in [0, t_0)$ tal que $t_n \nearrow t_0$ e seja $\gamma_n = \gamma(t_n)$. Portanto

$$d(\gamma_n, \gamma_m) \leq |t_n - t_m|.$$

Daí, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy num compacto K , portanto, γ_n converge para $y_0 \in K \subset \Sigma^n$. Seja (V, δ) uma vizinhança totalmente normal de y_0 , isto é, dado $r \in V$ existe $\delta > 0$ tal que $\exp_r : B_\delta(0) \rightarrow \exp_r(B_\delta(0)) \supset V$ é um difeomorfismo.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$ então $|t_n - t_m| < \delta$ e $\gamma_n, \gamma_m \in V$. Logo existe uma única geodésica g ligando γ_n a γ_m nessa vizinhança totalmente normal. E g coincide com γ , onde está definida. Usando que $\exp_{\gamma(t_n)}$ é um difeomorfismo entre

B_0 e sua imagem que contém V podemos estender γ além de t_0 , absurdo. Assim, γ é uma curva divergente mas

$$\int_0^{t_0} |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^{t_0} 1 d\tau = t_0 < +\infty.$$

o que é uma contradição com a hipótese que toda curva divergente tem comprimento infinito. ■

1.8 Variedades integral e folheações

Nessa seção apresentaremos alguns conceitos sobre variedades integral e folheações que serão muito úteis no estudo de gráficos *Killing* descritos no Capítulo 3.

Definição 1.39 *Um campo de vetores diferenciável é completo se cada uma das suas curvas integrais maximais estão definidas em toda a reta \mathbb{R} .*

Seja M uma variedade diferenciável. Uma escolha de um subespaço linear k -dimensional $\mathcal{D}_p \subset T_p M$ em cada $p \in M$ é chamado uma distribuição tangente k -dimensional sobre M . A distribuição é chamada diferenciável se a união de todos os subespaços formam um subfibrado diferenciável

$$\mathcal{D} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{D}_p \subset TM.$$

Lema 1.8 *Seja M uma variedade diferenciável, e suponha que $\mathcal{D} \subset TM$ é uma distribuição tangente k -dimensional. Então \mathcal{D} é diferenciável se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U em que os campos de vetores diferenciáveis $Y_1, \dots, Y_k : U \rightarrow TM$ tais que $Y_1|_q, \dots, Y_k|_q$ formam uma base para \mathcal{D}_q para cada $q \in U$.*

Suponha que $\mathcal{D} \subset TM$ seja uma distribuição diferenciável. Uma subvariedade imersa $N \subset M$ é chamada uma subvariedade integral de \mathcal{D} se $T_p N = \mathcal{D}_p$ para cada $p \in N$.

Exemplo 6 *Em \mathbb{R}^n , os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}$ geram uma distribuição diferenciável k -dimensional. Os subespaços afins paralelos k -dimensionais em \mathbb{R}^n são subvariedades integral.*

Definição 1.40 Dizemos que \mathcal{D} é involutiva se, para cada par de seções locais diferenciáveis de \mathcal{D} (isto é, campos de vetores diferenciáveis X, Y definidos sobre um subconjunto aberto de M tais que $X_p, Y_p \in \mathcal{D}_p$ para cada p), o Colchete de Lie é também uma seção local diferenciável de \mathcal{D} .

Definição 1.41 Dizemos que \mathcal{D} é integrável se cada ponto de M pertence a uma subvariedade integral de \mathcal{D} .

Apresentamos um resultado que mostra que a Definição 1.37 implica a Definição 1.36. Para a demonstração, recomendamos Capítulo 19 de [18].

Proposição 1.42 Cada distribuição integrável é involutiva.

O próximo lema mostra que a condição de ser involutiva não precisa ser verificado para cada par de campos de vetores diferenciáveis em M , mas apenas para um referencial local diferenciável em torno de cada ponto. Para a demonstração, ver Capítulo 19 de [18].

Lema 1.9 Seja $\mathcal{D} \subset TM$ uma distribuição. Se em cada vizinhança de cada ponto de M existe um referencial local diferenciável (V_1, \dots, V_k) a \mathcal{D} tal que $[V_i, V_j]$ é uma seção de \mathcal{D} para cada $i, j = 1, \dots, k$, então \mathcal{D} é involutivo.

Definição 1.43 Uma folheação de dimensão k sobre uma variedade n -dimensional M é uma coleção disjunta de subvariedades de M k -dimensionais e conexas (chamada as folhas da folheação) cuja união é M e tal que em uma vizinhança de cada $p \in M$ existe uma carta suave (U, φ) com a propriedade que $\varphi(U)$ é um produto de conjuntos abertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, e a interseção de U com cada folha da folheação é o conjunto vazio ou uma união enumerável de slices k -dimensionais da forma $x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n$.

Exemplo 7 A coleção de todas as esferas centradas em 0 é uma folheação $(n-1)$ -dimensional de $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$.

Definição 1.44 Uma subvariedade N conexa é dita integral maximal se N não está contida propriamente em nenhuma subvariedade integral conexa.

O Teorema global de Frobenius fornece uma condição suficiente para que uma coleção de subvariedades integrais formem uma folheação de M . A demonstração desse teorema recomendamos Capítulo 19 de [18].

Teorema 1.45 Seja \mathcal{D} uma distribuição involutiva sobre uma variedade diferenciável M . A coleção de todas as subvariedades integrais conexas maximais de \mathcal{D} formam uma folheação de M .

1.9 Uma extensão do Teorema de Hopf

Yau estabeleceu a seguinte versão do Teorema de Stokes sobre uma variedade Riemanniana completa Σ^n não compacta. Para maiores detalhes, ver [24] e [25].

Teorema 1.46 *Se $\omega \in \Omega^{n-1}(\Sigma)$ é uma $(n-1)$ -forma diferencial integrável sobre Σ então existe uma sequência B_i de domínios sobre Σ tal que $B_i \subset B_{i+1}$, $\Sigma^n = \bigcup_{i \geq 1} B_i$ e*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Prova. Fixe $p \in M$ e considere uma função Lipschitziana $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r(q) = d(p, q),$$

onde d é a função distância. Para cada $R > 0$, seja $B_R(p)$ a bola de raio R centrada em p . Por um lado, inspirado no artigo de Gaffney [18], em $B_R(p)$, é possível aproximar a função r por uma função suave e não-negativa g_R tal que:

(1) Para quase todo $t < R$, a menos de um número finito, $g_R^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície compacta regular,

$$(2) |dg_R| \leq \frac{3}{2} \text{ em } g_R^{-1}([0, R]),$$

$$(3) g_R^{-1} \subset B(t+1) - B(t-1) \text{ para } t \leq R.$$

Por outro lado, usando um Teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas, temos que

$$\int_{g_R^{-1}([0, R])} |dg_R| |\omega| = \int_0^R \left(\int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt$$

Juntamente com (2), segue que

$$\int_0^R \left(\int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|,$$

ou ainda

$$\int_{\frac{R}{2}}^R \left(\int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|.$$

Usando (1) e o Teorema do Valor Médio para integrais, temos para algum $t_R \in [\frac{R}{2}, R]$, onde $g_R^{-1}(t_R)$ é uma hipersuperfície compacta regular,

$$\int_{g_R^{-1}(t_R)} |\omega| \leq \frac{3}{R} \int_M |\omega|.$$

Usando o Teorema de Stokes e a relação acima, constatamos que

$$\left| \int_{g_R^{-1}([0, t_R])} d\omega \right| \leq \int_{g_R^{-1}(t_R)} |\omega| \leq \frac{3}{R} \int_M |\omega|. \quad (1.2)$$

Da propriedade (3), vê-se que

$$M = \bigcup_i g_i^{-1}([0, t_i]),$$

e da desigualdade anterior, temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{g_R^{-1}([0, t_R])} d\omega = 0.$$

O que conclui a demonstração. ■

Teorema 1.47 *Sejam M uma variedade Riemanniana orientável compacta e conexa e $f \in \mathfrak{F}(M)$ tal que Δf não muda de sinal. Então f é constante.*

Agora suponha que M é orientada pelo elemento de volume dM . Se $\omega = \iota_X dM$ é a orientação de dM na direção de um campo de vetores X sobre M , então vale o seguinte resultado devido a Caminha [10].

Lema 1.10 *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana completa n -dimensional e orientada, tal que $\text{div} X$ não muda de sinal. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\text{div} X \equiv 0$.*

Prova. Se M é compacta e sem bordo, o resultado segue direto do Teorema da divergência. Portanto, vamos considerar que M não é compacta. Considere a $(n-1)$ -forma $\omega = \iota_X dM$, onde ω é a contração de dM na direção de X . Considerando o referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, em M , obtemos a seguinte igualdade

$$\iota_X dM = \sum_j (-1)^{j-1} \omega_j(X) \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Todavia

$$\omega_j(X) = \omega_j \left(\sum_i x_i e_i \right) = \sum_i x_i \omega_j(e_i) = \sum_i \langle e_j, e_i \rangle = \langle X, e_j \rangle.$$

Assim,

$$\iota_X dM = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \langle X, e_j \rangle \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \dots \wedge \omega_n$$

e

$$|\omega|^2 = |\iota_X dM|^2 = \sum_j \langle X, e_j \rangle^2 = |X|^2.$$

Além disso,

$$d\omega = d(\iota_X dM) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} d\langle X, e_j \rangle \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Porém,

$$d\langle X, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n (\langle \nabla_{e_i} X, e_j \rangle + \langle X, \nabla_{e_i} e_j \rangle) \omega_i,$$

observe que se $i = j$, então $\nabla_{e_i} e_j = 0$ e se $i \neq j$, segue que

$$\omega_i \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \dots \wedge \omega_n = 0.$$

Portanto,

$$d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \langle \nabla_{e_i} X, e_j \rangle \omega_j \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \dots \wedge \omega_n = (\operatorname{div} X) dM.$$

Agora, pelo Teorema 1.42, vê-se que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} \operatorname{div} X dM = 0,$$

e, como $\operatorname{div} X$ não muda de sinal, concluímos que $\operatorname{div} X = 0$. ■

Capítulo 2

As r -ésimas curvaturas médias e as transformações de Newton

Seja Σ uma variedade Riemanniana conexa n -dimensional e orientada, imersa isometricamente sobre uma variedade Riemanniana \overline{M}^{n+1} , isto é, $\Sigma \looparrowright^\psi \overline{M}^{n+1}$, onde ψ é uma imersão (ψ é diferenciável e $d\psi_p : T_p\Sigma \rightarrow T_{\psi(p)}\overline{M}^{n+1}$ é injetiva para todo $p \in \Sigma$) e $\langle u, v \rangle_p = \langle d\psi_p(u), d\psi_p(v) \rangle_{\psi(p)}$, $\forall u, v \in T_p\Sigma$.

Sabemos que A denota o operador forma ou o operador de Weingarten de Σ com respeito a uma orientação N , e para cada $p \in \Sigma$, $A_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ é uma aplicação linear auto-adjunta. O Teorema espectral para operadores auto-adjuntos assegura a existência de uma base ortonormal de autovetores $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $T_p\Sigma$ tal que $[A_p]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal. Além disso, os autovalores de A_p denotados por k_1, \dots, k_n associados aos autovetores v_1, \dots, v_n , respectivamente, são as curvaturas principais de Σ .

2.1 Os polinômios simétricos elementares

O nosso objetivo é estudar polinômios que verificam a identidade abaixo, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = S_0 x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n S_n.$$

Definição 2.1 Os polinômios $S_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ definidos por:

$$\begin{aligned} S_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i, \\ S_2(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \\ &\dots \\ S_k(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \\ &\dots \\ S_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 \dots x_n, \end{aligned}$$

são chamados polinômios simétricos elementares nas indeterminadas x_1, \dots, x_n .

Para $1 \leq r \leq n$, denotamos por $S_r(p)$ a r -ésima função simétrica dos autovalores de A_p , isto é, $S_r = \sigma_r(k_1, \dots, k_n)$, onde k_1, \dots, k_n são os autovalores do operador A_p e $\sigma_r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ é o r -ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas x_1, \dots, x_n . Por um abuso de notação na proposição abaixo, estamos admitindo de forma implícita que A representa a matriz $[A_p]_{\mathcal{B}}$.

Proposição 2.2 O polinômio característico de A em $p \in \Sigma^n$ é dado por

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r}, \quad (2.1)$$

onde $S_0 = 1$ por definição.

Prova. Se $n = 1$, então $\det(tI_1 - A) = \det(t - k_1) = t - k_1$ e

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^1 (-1)^r S_r t^{1-r} &= (-1)^0 S_0 t^{1-0} + (-1)^1 S_1 t^{1-1} \\ &= t - k_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r} \quad \text{para } n = 1.$$

Novamente, para $n = 2$, obtemos $\det(tI - A) = (t - k_1)(t - k_2)$ e

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^2 (-1)^r S_r t^{2-r} &= (-1)^0 S_0 t^{2-0} + (-1)^1 S_1 t^{2-1} + (-1)^2 S_2 t^{2-2} \\ &= t^2 - (k_1 + k_2)t + k_1 k_2 \\ &= (t - k_1)(t - k_2), \end{aligned}$$

onde $S_1 = k_1 + k_2$ e $S_2 = k_1 k_2$.

$$\text{Assim, } \det(tI - A) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r} \quad \text{para } n = 2.$$

Agora suponha por hipótese de indução que a Proposição acima seja válida para um certo $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, e temos que mostrar que a mesma também é válida para $n + 1$, o que concluirá a demonstração. Com efeito,

$$\det(tI_{n+1} - A) = \prod_{r=1}^{n+1} (t - k_r) = \prod_{r=1}^n (t - k_r)(t - k_{n+1}).$$

$$\text{Por hipótese de indução, temos } \prod_{r=1}^n (t - k_r) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r}.$$

$$\begin{aligned} \text{Daí, } \det(tI_{n+1} - A) &= \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r} (t - k_{n+1}) \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r+1} - \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r k_{n+1} t^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r+1} + \sum_{r=0}^n (-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r} \\ &= \sum_{r=-1}^{n-1} (-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-(r+1)+1} + \sum_{r=0}^n (-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r} \\ &= \sum_{r=-1}^{n-1} (-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-r} + \sum_{r=0}^n (-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r}. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, segue-se

$$\begin{aligned} \det(tI_{n+1} - A) &= (-1)^{-1+1} S_{-1+1} t^{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-r} + \\ &\quad \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r} + (-1)^{n+1} S_n k_{n+1} t^{n-n} \\ &= t^{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-r} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} k_{n+1} S_r t^{n-r} + (-1)^{n+1} S_n k_{n+1} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} (S_{r+1} + k_{n+1} S_r) t^{n-r} + t^{n+1} + (-1)^{n+1} k_1 k_2 \cdots k_n k_{n+1}. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \det(tI_{n+1} - A) &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} (S_{r+1} + k_{n+1}S_r) t^{n-r} + t^{n+1} + (-1)^{n+1} k_1 k_2 \cdots k_n k_{n+1} \\ &= t^{n+1} - \left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i \right) t^n + \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j + k_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) \right) t^{n-1} + \cdots + \\ &(-1)^{n+1} k_1 \cdots k_n k_{n+1}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \det(tI_{n+1} - A) &= t^{n+1} + (-1)^1 (S_1 + k_{n+1}) t^n + (-1)^2 (S_2 + k_{n+1}S_1) t^{n-1} + \cdots + \\ &(-1)^{n+1} k_1 \cdots k_n k_{n+1}. \end{aligned}$$

Nas expressões acima, estamos admitindo que $S_r = \sigma_r(k_1, \dots, k_n)$ e por resultados de Álgebra elementar, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_1(k_1, \dots, k_n, k_{n+1}) &= \sigma_1(k_1, \dots, k_n) + k_{n+1}, \\ \sigma_2(k_1, \dots, k_n, k_{n+1}) &= \sigma_2(k_1, \dots, k_n) + k_{n+1}\sigma_1(k_1, \dots, k_n), \\ &\dots \\ \sigma_r(k_1, \dots, k_n, k_{n+1}) &= \sigma_r(k_1, \dots, k_n) + k_{n+1}\sigma_{r-1}(k_1, \dots, k_n), \\ &\dots \\ \sigma_n(k_1, \dots, k_n, k_{n+1}) &= \sigma_n(k_1, \dots, k_n) + k_{n+1}\sigma_{n-1}(k_1, \dots, k_n), \\ \sigma_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k_{n+1}) &= \sigma_n(k_1, \dots, k_n)k_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\det(tI_{n+1} - A) = \sum_{r=0}^{n+1} S_r t^{(n+1)-r},$$

onde na última igualdade, para não carregar a notação, denotamos $S_r = \sigma_r(k_1, \dots, k_n, k_{n+1})$.

O que conclui a demonstração. ■

2.2 As r -ésimas curvaturas médias

No que segue, as r -ésimas curvaturas médias estão relacionadas com os polinômios simétricos elementares.

Definição 2.3 *Seja $1 \leq r \leq n$. A r -ésima curvatura média H_r de Σ^n é dada por*

$$\binom{n}{r} H_r = S_r.$$

Observação 2.1 Em particular, para algum $p \in \Sigma^n$, temos

$$\binom{n}{1} H_1 = S_1 \Rightarrow nH_1 = \sum_{i=1}^n k_i.$$

Além disso,

$$H_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{n} \text{tr}(A) = H$$

é exatamente a curvatura média de Σ^n no ponto p por definição, onde A é o operador forma.

Observação 2.2 A relação entre o quadrado do operador forma A da hipersuperfície Σ e as curvaturas H e H_2 é dada por

$$|A|^2 = S_1^2 - 2S_2 = (nH)^2 - n(n-1)H_2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2. \quad (2.2)$$

De fato, observe que a relação acima equivale a

$$\sum_{i=1}^n k_i^2 = n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \right)^2 - n(n-1) \left(\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j \right),$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n k_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j.$$

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 &= \left(k_1 + \sum_{i=2}^n k_i \right)^2 \\ &= k_1^2 + 2k_1 \sum_{i=2}^n k_i + \left(\sum_{i=2}^n k_i \right)^2 \\ &= k_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n k_1 k_i + \left(k_2 + \sum_{i=3}^n k_i \right)^2 \\ &= k_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n k_1 k_i + k_2^2 + 2k_2 \sum_{i=3}^n k_i + \left(\sum_{i=3}^n k_i \right)^2 \\ &= k_1^2 + k_2^2 + 2 \left(\sum_{i=2}^n k_1 k_i + \sum_{i=3}^n k_2 k_i \right) + \left(\sum_{i=3}^n k_i \right)^2. \end{aligned}$$

O raciocínio anterior nos permite concluir que

$$\left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j.$$

2.3 As desigualdades de Newton e Gårding

A Proposição abaixo mostra uma desigualdade envolvendo as funções $H_i, i = r - 1, r, r + 1$ chamada desigualdade de Newton e que será muito útil na demonstração de alguns resultados no Capítulo 3.

Proposição 2.4 (A desigualdade de Newton) *Seja Σ uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana \overline{M} . Para $1 \leq r \leq n$, temos*

$$H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}.$$

Além disso, a igualdade vale para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$, somente em pontos umbilícos de Σ^n .

Prova. Usamos o princípio de indução sobre $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Para $n = 2, H_1^2 \geq H_0H_2$ é equivalente a $(k_1 - k_2)^2 \geq 0$, com a igualdade ocorrendo somente quando $k_1 = k_2$. De fato,

$$\binom{2}{1}H_1 = S_1 \Rightarrow \frac{2!}{1!}(2-1)!H_1 = k_1 + k_2 \Rightarrow H_1 = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

$$\binom{2}{0}H_0 = S_0 \Rightarrow H_0 = 1 \quad \text{e} \quad \binom{2}{2}H_2 = S_2 \Rightarrow H_2 = k_1k_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Segue-se, } H_1^2 - H_0H_2 &= \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 - 1k_1k_2 \\ &= \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2}{4} - k_1k_2 \\ &= \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 - 4k_1k_2 + k_2^2}{4} \\ &= \frac{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sejam $n \geq 3$ um número natural e $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x + k_1)(x + k_2) \dots (x + k_n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} H_r(k_1, \dots, k_n) x^{n-r}.$$

Daí, resulta que

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} (n-r) \binom{n}{r} H_r(k_1, \dots, k_n) x^{n-r-1}.$$

Afirmamos que existem $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$f'(x) = n(x + \gamma_1)(x + \gamma_2) \cdots (x + \gamma_{n-1}).$$

De fato, sendo $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)S_1x^{n-2} + (n-2)S_2x^{n-3} + \cdots + 2S_{n-2}x + S_{n-1}$, temos

$$f'(x) = n \left(x^{n-1} + \left(\frac{n-1}{n} \right) S_1 x^{n-2} + \left(\frac{n-2}{n} \right) S_2 x^{n-3} + \cdots + \left(\frac{2}{n} \right) S_{n-2} x + \frac{1}{n} S_{n-1} \right).$$

Temos que mostrar que a equação $f'(x) = 0$ possui exatamente $n-1$ raízes, isto é, que existem $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = n(x + \gamma_1)(x + \gamma_2) \cdots (x + \gamma_{n-1})$.

Sejam $-k_1 \leq -k_2 \leq \cdots \leq -k_n$ as raízes reais da equação $f(x) = 0$. Sem perda de generalidade, supomos que $-k_1 < -k_2 < \cdots < -k_n$, pois se alguma raiz r de $f(x) = 0$ tem multiplicidade $m \geq 2$, então por resultados de Álgebra, r é também raiz de $f'(x) = 0$ com multiplicidade $m-1 \geq 1$. Como $f(-k_1) = f(-k_2) = \cdots = f(-k_n) = 0$ então pelo teorema de Rolle existem $c_1 \in (-k_1, -k_2), c_2 \in (-k_2, -k_3), \dots, c_{n-1} \in (-k_{n-1}, -k_n)$ tais que $f'(c_1) = f'(c_2) = \cdots = f'(c_{n-1}) = 0$, assim, por um lado, $f'(x) = 0$ tem no mínimo $n-1$ raízes. Por outro lado, $f'(x) = 0$ tem no máximo $n-1$ raízes, pois o grau da equação $f'(x) = 0$ é $n-1$. Assim, concluímos que $f'(x) = 0$ tem exatamente $n-1$ raízes e que denotamos por $-\gamma_1, \dots, -\gamma_{n-1}$, donde

$$f'(x) = n(x + \gamma_1)(x + \gamma_2) \cdots (x + \gamma_{n-1}).$$

Sendo $(n-r) \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r}$, podemos comparar os coeficientes dados nos $H_r(k_1, \dots, k_n) = H_r(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ para $0 \leq r \leq n-1$. Daí, segue pela hipótese de indução que, para $1 \leq r \leq n-2$, $H_r^2(k_1, \dots, k_n) = H_r^2(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \geq H_{r-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) H_{r+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$. Então,

$$H_r^2(k_1, \dots, k_n) \geq H_{r-1}(k_1, \dots, k_n) H_{r+1}(k_1, \dots, k_n).$$

Além disso, se a igualdade vale para k_i , com $H_{r+1}(k_i) \neq 0$ (Por conveniência, denotamos as $n-1$ uplas (k_1, \dots, k_{n-1}) e $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ por (k_i) e (γ_i) , respectivamente), então também vale para γ_i , com $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Da hipótese de indução, segue que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1}$, e então $k_1 = \cdots = k_{n-1}$.

É suficiente provar que $H_{n-1}^2(k_i) \geq H_{n-2}(k_i) H_n(k_i)$, com a igualdade para $H_n \neq 0$ se, e somente se, os k_i são todos iguais. Se $k_i = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, o resultado

segue. Se $H_n \neq 0$, então

$$H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n \Leftrightarrow \left[\binom{n}{n-1}^{-1} \sum_i \frac{H_n}{k_i} \right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{k_i k_j} \right] H_n.$$

Com efeito, em relação a equivalência acima, basta ver que $S_{n-1} = \sum_i \frac{H_n}{k_i}$ e que $S_{n-2} = \sum_{i<j} \frac{H_n}{k_i k_j}$. Após alguns cálculos, concluímos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{H_n}{k_i} &= H_n \sum_i \frac{1}{k_i} = H_n \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \right) \\ &= k_1 k_2 \cdots k_n \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \frac{H_n}{k_i} = \sum_{i=1}^n k_1 k_2 \cdots \hat{k}_i \cdots k_n = S_{n-1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} \frac{H_n}{k_i k_j} &= H_n \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} = k_1 k_2 \cdots k_n \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} \\ &= \sum_{i<j} k_1 k_2 \cdots \hat{k}_i \cdots \hat{k}_j \cdots k_n = S_{n-2}. \end{aligned}$$

O nosso objetivo agora é mostrar a validade da equivalência abaixo para concluir o pedido.

$$H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n \Leftrightarrow n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \geq 0,$$

onde $\alpha_i = \frac{1}{k_i}$. Observemos que valem as seguintes equivalências.

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n &\Leftrightarrow \left[\binom{n}{n-1}^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{H_n}{k_i} \right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{k_i k_j} \right] H_n \Leftrightarrow \\ H_n^2 \left[\left(\frac{n!}{(n-1)!1!} \right)^{-2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^2 \right] &\geq H_n^2 \left(\frac{n!}{(n-2)!2!} \right)^{-1} \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} \Leftrightarrow \\ n^{-2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^2 &\geq \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^{-1} \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{n^2} \left(\sum_i \frac{1}{k_i} \right)^2 &\geq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} \Leftrightarrow \\ (n-1) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^2 &\geq 2n \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j}. \end{aligned}$$

Deduzimos que a última desigualdade acima é equivalente a

$$(n-1) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \geq 2n \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j.$$

Denotamos $T(\alpha_i) = (n-1) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 - 2n \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j$ e obtemos

$$\begin{aligned} T(\alpha_i) &= n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 - 2n \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \\ &= n \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 - 2 \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \right] - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

em que essa última desigualdade é válida pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Como as expressões obtidas acima são equivalentes, então segue a validade da equivalência desejada.

Também, neste caso, a igualdade vale se, e somente se, todos os α_i (e então todos os k_i) são iguais. ■

Corolário 2.5 Para $1 \leq i, j < n$, temos

$$H_i H_j \geq H_{i+1} H_{j-1} \quad \text{ou} \quad H_i H_j \geq H_{i-1} H_{j+1}.$$

Prova. A ideia da demonstração é a seguinte: Se algum coeficiente H_i é nulo, então o resultado segue. Caso contrário, usando a Proposição anterior, temos que $H_i^2 \geq H_{i-1} H_{i+1}$, conseqüentemente

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} \geq \frac{H_{i+1}}{H_i}.$$

Usando o mesmo procedimento na relação $H_{i-1}^2 \geq H_{i-2} H_i$, obtemos

$$\frac{H_{i-1}}{H_i} \geq \frac{H_{i-2}}{H_{i-1}}.$$

$$\text{Logo, } \frac{H_i}{H_{i+1}} \geq \frac{H_{i-1}}{H_i} \geq \frac{H_{i-2}}{H_{i-1}},$$

e procedendo-se de maneira análoga, concluímos que

$$H_i H_j \geq H_{i+1} H_{j-1}.$$

■

Definição 2.6 Um ponto $p_0 \in \Sigma$ é dito *elíptico* quando todas as curvaturas principais $k_i(p_0)$ são positivas com respeito a uma escolha apropriada da orientação N de Σ .

Apresentamos agora uma desigualdade bastante útil, chamada **desigualdade de Gårding**, cuja demonstração recomendamos [14].

Proposição 2.7 (A desigualdade de Gårding) *Seja Σ^n uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana \bar{M} . Suponha que existe um ponto elíptico em Σ^n . Se H_r é positivo sobre Σ^n , temos que o mesmo vale para H_k , $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$. Além disso,*

$$H_{k-1} \geq H_k^{\frac{(k-1)}{k}} \quad e \quad H \geq H_k^{\frac{1}{k}},$$

para cada $k \in \{1, 2, \dots, r\}$. Se $k \geq 2$, na desigualdade acima, a igualdade vale somente em pontos umbílicos de Σ^n .

Uma aplicação do resultado anterior é a seguinte

$$H_1^2 \geq H_0 H_2 \Rightarrow H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} H_2^2 \geq H_3 H_1 &\Rightarrow H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{4}} H_1^{\frac{1}{4}} \geq H_3^{\frac{1}{4}} H_2^{\frac{1}{8}} \Rightarrow \\ H_2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}} &\geq H_3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow H_2^{\frac{4-1}{8}} \geq H_3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \\ H_2^{\frac{3}{8}} &\geq H_3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow H_2^{\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 3}} \geq H_3^{\frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 3}} \Rightarrow \\ &H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Repetindo o argumento acima, obtemos

$$\begin{aligned} H_3^2 \geq H_4 H_2 &\Rightarrow H_3^{\frac{1}{3}} \geq H_4^{\frac{1}{6}} H_2^{\frac{1}{6}} \geq H_4^{\frac{1}{6}} H_3^{\frac{1}{9}} \Rightarrow \\ H_3^{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}} &\geq H_4^{\frac{1}{6}} \Rightarrow H_3^{\frac{3-1}{9}} \geq H_4^{\frac{1}{6}} \Rightarrow \\ H_3^{\frac{2}{9}} &\geq H_4^{\frac{1}{6}} \Rightarrow H_3^{\frac{2}{3}} \geq H_4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow H_3^{\frac{1}{3}} \geq H_4^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Logo,

$$H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{3}} \geq H_4^{\frac{1}{4}} \geq \dots \geq H_r^{\frac{1}{r}},$$

para algum $1 < k < r$.

2.4 As transformações de Newton

Nesta seção, apresentamos as transformações de Newton e suas principais propriedades, nas quais usamos no próximo capítulo para obtermos resultados referentes a gráficos *Killing* conformes.

Definição 2.8 *De acordo com a definição de r -ésima curvatura média, as transformações de Newton*

$$P_r : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

onde $0 \leq r \leq n$, são dadas por

$$P_r = \binom{n}{r} H_r I + \binom{n}{r-1} H_{r-1} A + \cdots + \binom{n}{1} H_1 A^{r-1} + A^r,$$

onde I denota a identidade em $\mathfrak{X}(M)$, ou indutivamente por

$$P_0 = I \quad e \quad P_r = \binom{n}{r} H_r I + A P_{r-1}. \quad (2.3)$$

No que segue, E_1, \dots, E_n denota um referencial local ortonormal em M .

Definição 2.9 *A divergência da transformação de Newton P_r , $0 \leq r \leq n$, é o vetor $\operatorname{div} P_r$ dada por*

$$\operatorname{div} P_r = \operatorname{tr}(\nabla P_r) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} P_r) E_i.$$

Lema 2.1 *Seja $p \in M$. O operador $P_r : T_p M \rightarrow T_p M$, é linear, auto-adjunto e comuta com o operador de forma A .*

Prova. A linearidade segue diretamente da definição. Observe agora que

$$P_r v = \left(\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} H_i A^{r-i} \right) v.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle P_r v, w \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} H_i A^{r-i} \right) v, w \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} H_i A^{r-i}(v), w \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} H_i \langle A^{r-i}(v), w \rangle, \end{aligned}$$

sendo A auto-adjunto, conseqüentemente, A^{r-i} também o é, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, além disso, a métrica é bilinear, logo

$$\begin{aligned} \langle P_r v, w \rangle &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} H_i \langle v, A^{r-i}(w) \rangle \\ &= \langle v, \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} H_i A^{r-i}(w) \rangle \\ &= \langle v, P_r w \rangle, \forall v, w \in T_p M. \end{aligned}$$

O que mostra que P_r é auto-adjunto.

Para a comutatividade, após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned} P_r \circ A &= \left(\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} H_i A^{r-i} \right) \circ A \\ &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} H_i A^{r-i+1} \\ &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} H_i A \circ A^{r-i} \\ &= A \circ \left(\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} H_i A^{r-i} \right) \\ &= A \circ P_r. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.10 (i) *Seja E_1, \dots, E_n um referencial local ortonormal em M que diagonaliza o operador A , isto é, existem escalares $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tais que $AE_i = k_i E_i$, $i = 1, \dots, n$ então este referencial também diagonaliza cada P_r , e $P_r E_i = \lambda_{i,r} E_i$ com*

$$\lambda_{i,r} = (-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} k_{i_1} \dots k_{i_r} = \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} (-k_{i_1}) \dots (-k_{i_r}).$$

(ii) *Para cada $1 \leq r \leq n-1$,*

$$\text{tr}(P_r) = (r+1) \binom{n}{r+1} H_r \quad e \quad \text{tr}(A \circ P_r) = -(r+1) \binom{n}{r+1} H_{r+1}$$

(iii) *Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ e cada $1 \leq r \leq n-1$,*

$$\text{tr}(P_r(\nabla_V A)) = - \binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, V \rangle.$$

Prova. Aplicamos o método de indução sobre r para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ fixado.

Se $r = 0$, então

$$P_0 E_i = I E_i = E_i = \lambda_{i,0} E_i.$$

Suponha que i) da Proposição seja válido para algum $r \geq 1$ e nosso objetivo é mostrar que também é válido para $r + 1$, o que conclui a demonstração de i). Seja

$$P_r E_i = \lambda_{i,r} E_i, \quad \text{onde} \quad \lambda_{i,r} = (-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r},$$

por hipótese de indução.

Como $P_r E_i = \left(\binom{n}{r} H_r I + A P_{r-1} \right) E_i$, então

$$\begin{aligned} P_{r+1} E_i &= \left(\binom{n}{r+1} H_{r+1} I + A P_r \right) E_i \\ &= \binom{n}{r+1} \left((-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + A \circ P_r E_i \\ &= \binom{n}{r+1} \left((-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + A(\lambda_{i,r} E_i) \\ &= \binom{n}{r+1} \left((-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + \lambda_{i,r} k_i E_i \end{aligned}$$

Novamente, pela hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} P_{r+1} E_i &= \left[(-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i + \left[\left((-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r} \right) \right] E_i \\ &= \left[(-1)^{r+1} \sum_{i_1, \dots, i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} + (-1)^r \sum_{i_1, \dots, i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i \\ &\quad - \left[(-1)^r \sum_{i_1, \dots, i_{r+1}, i_j \neq i} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i, \end{aligned}$$

de onde concluímos que,

$$\begin{aligned} P_{r+1} E_i &= \left[-(-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} + (-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i + \\ &\quad + \left[(-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}, i_j \neq i} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_{r+1}E_i = (-1)^{r+1} \left(\sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}, i_j \neq i} k_{i_1} \dots k_{i_{r+1}} \right) E_i = \lambda_{i,r+1} E_i.$$

ii) Consideramos o mesmo referencial do item anterior. Daí,

$$\text{tr}(P_r) = \sum_{i=1}^n \langle P_r E_i, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda_{i,r} E_i, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,r} \langle E_i, E_i \rangle.$$

Usando agora a expressão de $\lambda_{i,r}$, temos

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_r) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{i,r} = \sum_{i=1}^n (-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} k_{i_1} \dots k_{i_r} \\ &= (n-r)(-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \dots k_{i_r} \\ &= (n-r) \binom{n}{r} H_r \\ &= (r+1) \binom{n}{r+1} H_r. \end{aligned}$$

Pela definição do operador P_r , temos

$$\begin{aligned} \text{tr}(A \circ P_r) &= \text{tr} \left(P_{r+1} - \binom{n}{r+1} H_{r+1} I \right) \\ &= \text{tr}(P_{r+1}) - \binom{n}{r+1} H_{r+1} \text{tr}(I) \\ &= (n-(r+1)) \binom{n}{r+1} H_{r+1} - n \binom{n}{r+1} H_{r+1} \\ &= (n-r-1-n) \binom{n}{r+1} H_{r+1} \\ &= \left((-r-1) \binom{n}{r+1} \right) H_{r+1} \\ &= -(r+1) \binom{n}{r+1} H_{r+1}. \end{aligned}$$

iii) Como A é um operador linear auto-adjunto, então existe um referencial ortonormal local em M E_1, \dots, E_n que diagonaliza A em um determinado $p \in M$, isto é, $AE_i = k_i E_i$, $i = 1, \dots, n$, onde k_i são os autovalores associados aos autovetores E_i .

Então,

$$\begin{aligned}
(\nabla_V A)(E_i) &= \nabla_V(AE_i) - A(\nabla_V E_i) \\
&= \nabla_V(k_i E_i) - A\left(\sum_{j=1}^n \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle E_j\right) \\
&= k_i \nabla_V E_i + V(k_i)E_i - \sum_{j=1}^n \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle A E_j \\
&= k_i \sum_{j=1}^n \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle E_j + V(k_i)E_i - \sum_{j=1}^n \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle k_j E_j \\
&= \sum_{j=1, i \neq j}^n (k_i - k_j) \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle E_j + V(k_i)E_i.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
tr(P_r \circ \nabla_V A) &= \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_V A)E_i, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle P_r \left(V(k_i)E_i + \sum_{j=1, i \neq j}^n (k_i - k_j) \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle E_j \right), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle P_r(V(k_i)E_i) + P_r \left(\sum_{j=1, i \neq j}^n (k_i - k_j) \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle E_j \right), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle P_r(V(k_i)E_i), E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle P_r \left(\sum_{j=1, i \neq j}^n (k_i - k_j) \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle E_j \right), E_i \right\rangle
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
tr(P_r \circ \nabla_V A) &= \sum_{i=1}^n \langle V(k_i)P_r E_i, E_i \rangle + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n (k_i - k_j) \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle \langle P_r E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n V(k_i) \lambda_{r,i} \langle E_i, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n (k_i - k_j) \langle \nabla_V E_i, E_j \rangle \lambda_{r,j} \langle E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n V(k_i) \lambda_{r,i} \quad \text{pois } \langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
tr(P_r \circ \nabla_V A) &= \sum_{i=1}^n V(k_i) \lambda_{i,r} \\
&= - \sum_{i=1}^n V(k_i) \lambda_{i,r} \\
&= - \sum_{i=1}^n V(-k_i) \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} (-k_{i_1}) \dots (-k_{i_r}) \\
&= -V \left(\sum_{i=1}^n (-k_i) \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} (-k_{i_1}) \dots (-k_{i_r}) \right) \\
&= -V \left(\sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}, i_j \neq i} (-k_{i_1}) \dots (-k_{i_{r+1}}) \right).
\end{aligned}$$

Logo, a igualdade anterior nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
tr(P_r \circ \nabla_V A) &= -V \left(\binom{n}{r+1} H_{r+1} \right) \\
&= - \binom{n}{r+1} V(H_{r+1}) \\
&= - \binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, V \rangle,
\end{aligned}$$

onde ∇H_{r+1} denota o gradiente de H_{r+1} . ■

Proposição 2.11 *Seja $P_r : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ um campo de tensores do tipo $(1, 1)$ em M tal que em cada $p \in M$, $P_r : T_p M \rightarrow T_p M$ é um operador linear e auto-adjunto. Então para todo campo $E \in \mathfrak{X}(M)$ o campo de tensores $\nabla_E P_r : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ do tipo $(1, 1)$ em M , em cada $p \in M$, define um operador linear $\nabla_E P_r : T_p M \rightarrow T_p M$ auto-adjunto.*

Prova. Pela definição de diferencial covariante de um tensor e considerando a transformação de Newton P_r , a diferencial covariante ∇P_r é dada por

$$\nabla P_r(X, Y) = (\nabla_X P_r)(Y) = \nabla_X(P_r Y) - P_r(\nabla_X Y) \quad , \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Observe que $\nabla_E P_r$ é linear pela definição de conexão. Mostremos agora que $\nabla_E P_r$ é auto-adjunta

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_E P_r)(X), Y \rangle &= \langle \nabla_E(P_r X) - P_r(\nabla_E X), Y \rangle \\
&= \langle \nabla_E(P_r X), Y \rangle - \langle P_r(\nabla_E X), Y \rangle.
\end{aligned}$$

Agora usando o fato que o operador P_r é auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_E P_r)(X), Y \rangle &= E\langle P_r X, Y \rangle - \langle P_r X, \nabla_E Y \rangle - \langle \nabla_E X, P_r Y \rangle \\
&= E\langle P_r X, Y \rangle - \langle P_r X, \nabla_E Y \rangle - E\langle X, P_r Y \rangle + \langle X, \nabla_E(P_r Y) \rangle \\
&= E\langle X, P_r Y \rangle - \langle P_r X, \nabla_E Y \rangle - E\langle X, P_r Y \rangle + \langle X, \nabla_E(P_r Y) \rangle \\
&= -\langle P_r X, \nabla_E Y \rangle + \langle X, \nabla_E(P_r Y) \rangle \\
&= -\langle X, P_r(\nabla_E Y) \rangle + \langle X, \nabla_E(P_r Y) \rangle \\
&= \langle X, \nabla_E(P_r Y) - P_r(\nabla_E Y) \rangle \\
&= \langle X, (\nabla_E P_r)(Y) \rangle \quad , \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad , \text{isto é,}
\end{aligned}$$

em cada $p \in M$, $\nabla_E P_r$ é auto-adjunto. ■

O Lema abaixo estabelece uma relação entre as divergências das transformações de Newton e o tensor curvatura de M .

Lema 2.2 *A divergência das transformações de Newton é dada por*

$$\langle \text{div}(P_r), X \rangle = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, P_{r-j} E_i) E_i, A^{j-1} X \rangle,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde \bar{R} denota o tensor curvatura de \bar{M} , equivalentemente,

$$\text{div}(P_0) = 0 \quad e \quad \text{div}(P_r) = A(\text{div}(P_{r-1})) + \left(\sum_{i=1}^n (\bar{R}(N, P_{r-1} E_i) E_i) \right)^\top.$$

Prova. Notemos que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale

$$(\nabla_X I)(Y) = \nabla_X(I(Y)) - I(\nabla_X Y) = \nabla_X Y - \nabla_X Y = 0 \in \mathfrak{X}(M),$$

onde I denota o operador identidade em $\mathfrak{X}(M)$. Assim,

$$\text{div}(P_0) = \text{div}(I) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} I, E_i \rangle = 0.$$

Agora se $r \geq 1$, segue da definição de P_r que para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_X P_r)(Y) &= \nabla_X \left(\binom{n}{r} H_r I + A \circ P_{r-1} \right) Y \\
&= \nabla_X \left(\binom{n}{r} H_r(Y) + (A \circ P_{r-1}) Y \right) \\
&= \nabla_X \left(\binom{n}{r} H_r(Y) \right) + \nabla_X (A \circ P_{r-1}) Y \\
&= \left(\binom{n}{r} X(H_r) I \right) (Y) + \binom{n}{r} H_r(\nabla_X I)(Y) + \nabla_X (A \circ P_{r-1}) Y \\
&= \binom{n}{r} \langle \nabla(H_r), X \rangle (Y) + (\nabla_X A)(P_{r-1}) Y + A(\nabla_X P_{r-1}) Y, \quad \text{pois}
\end{aligned}$$

$$\binom{n}{r} H_r(\nabla_X I)(Y) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_r) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} P_r)(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1} \circ E_i) + \sum_{i=1}^n (A(\nabla_{E_i} P_{r-1}))(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1} \circ E_i) + A \left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} P_{r-1}, E_i \rangle \right), \end{aligned}$$

onde

$$\left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} P_{r-1}, E_i \rangle \right) = \operatorname{div}(P_{r-1}).$$

Portanto,

$$\operatorname{div} P_r = \binom{n}{r} \nabla H_r + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1} \circ E_i) + A(\operatorname{div}(P_{r-1})).$$

Uma vez que $\nabla_{E_i} A$ é auto-adjunto, temos que, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, vale

$$\langle (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1} E_i), X \rangle = \langle P_{r-1} E_i, (\nabla_{E_i} A)(X) \rangle,$$

pela Equação de Codazzi

$$(\bar{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_Y A)(X, N) - (\nabla_X A)(Y, N),$$

conclui-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{E_i} A(P_{r-1} E_i), X \rangle &= \langle P_{r-1} E_i, (\nabla_{E_i} A)(X) \rangle \\ &= -\langle \bar{R}(X, E_i)N, P_{r-1} E_i \rangle + \langle P_{r-1} E_i, (\nabla_X A)(E_i) \rangle \\ &= \langle \bar{R}(X, E_i)P_{r-1} E_i, N \rangle + \langle P_{r-1}(\nabla_X A)(E_i), E_i \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle &= \left\langle \binom{n}{r} \nabla H_r + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1}) + A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \right\rangle \\ &= \left\langle \binom{n}{r} \nabla H_r, X \right\rangle + \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1}), X \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \rangle, \end{aligned}$$

da expressão acima e bilinearidade da métrica, temos

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle &= \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i) P_{r-1} E_i, N \rangle + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \langle (P_{r-1} \circ (\nabla_X A))(E_i), E_i \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \rangle. \end{aligned}$$

onde $\sum_{i=1}^n \langle (P_{r-1} \circ (\nabla_X A))(E_i), E_i \rangle = \operatorname{tr}(P_{r-1} \circ (\nabla_X A))$. Pelo item (iii) da Proposição 2.10, segue que

$$\operatorname{tr}(P_r \circ (\nabla_X A)) = - \binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, X \rangle,$$

consequentemente,

$$\operatorname{tr}(P_{r-1} \circ (\nabla_X A)) = - \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, X \rangle.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle &= \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, X \rangle + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i) P_{r-1} E_i, N \rangle - \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, X \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \rangle. \end{aligned}$$

De onde segue-se que

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i) P_{r-1} E_i, N \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i) N, P_{r-1} E_i \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, P_{r-1} E_i) E_i, X \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \rangle. \end{aligned}$$

como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer, então

$$\operatorname{div}(P_r) = (\bar{R}(N, P_{r-1} E_i) E_i)^\top + A(\operatorname{div}(P_{r-1})).$$

Agora, mostremos a equivalência. Primeiramente, observe que $\operatorname{div}(T_1) = (\bar{R}(N, P_{r-1} E_i) E_i)^\top$, pois $A(\operatorname{div}(P_0)) = 0$. Segue-se

$$\langle \operatorname{div}(P_1), X \rangle = \langle (\bar{R}(N, P_{r-1} E_1) E_1)^\top, X \rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Suponhamos que o argumento seja válido para $r-1$, e mostremos que também é válido para r . Seja

$$\langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, T_{r-1} E_i) E_i, A^{j-1} X \rangle,$$

a hipótese de indução. Então,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle (\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^T, X \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X \rangle + \langle \operatorname{div}(P_{r-1}), AX \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=1}^n \langle A^{j-1}(\overline{R}(N, P_{r-1-j}E_i)E_i), AX \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X \rangle.
\end{aligned}$$

Como A é auto-adjunto, então A^i também o é. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle &= \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1-j}E_i)E_i, A^j X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j+1=2}^r \langle \overline{R}(N, P_{r-(j+1)}E_i)E_i, A^j X \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X \rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j+1=2}^r \langle A^{(j+1)-1}(\overline{R}(N, P_{r-(j+1)}E_i)E_i), X \rangle + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \left(\sum_{j+1=2}^r A^{(j+1)-1}(\overline{R}(N, P_{r-(j+1)}E_i)E_i) \right) + \overline{R}(N, P_{r-1}E_i), X \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \langle \overline{R}(N, P_{r-j}E_i)E_i, A^{j-1} X \rangle.
\end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$\langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle = \sum_{j-1=0}^{r-1} \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1-(j-1)}E_i)E_i, A^{j-1} X \rangle,$$

com algumas propriedades,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}(P_r), X \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X \rangle + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-1-j}E_i)E_i, A^{j-1}(AX) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n (\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^T, X \right\rangle + \langle \operatorname{div}(P_{r-1}), AX \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n (\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^T, X \right\rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n (\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^T + A(\operatorname{div}(P_{r-1})), X \right\rangle.
\end{aligned}$$

Como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer, segue que,

$$\operatorname{div}(P_r) = \sum_{i=1}^n \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i^\top + A(\operatorname{div}(P_{r-1})).$$

■

Capítulo 3

Gráficos Killing conformes inteiros

O objetivo neste capítulo é estudar a geometria de gráficos *Killing* conformes imersos num ambiente Riemanniano folheado.

3.1 Campos Killing conformes

Estudamos a noção de campos *Killing* conformes que é mais geral do que a definição de campos de *Killing*. Primeiramente apresentamos a definição de campos de *Killing* via a derivada de *Lie*.

Definição 3.1 *Um campo de vetores de Killing sobre uma variedade Riemanniana (M, g) é um campo de vetores V tal que $\mathcal{L}_V g = 0$.*

Mostremos agora que um campo V de vetores de *Killing* pode ser caracterizado quando o fluxo local gerado por V é uma isometria.

Proposição 3.2 *Um campo de vetores V é Killing se, e somente se, os fluxos locais ψ_t gerados por V são isometrias.*

Prova. Se cada ψ_t é uma isometria, então $\psi_t^*(g) = g$. Assim pela Proposição 1.10 (ver capítulo 1), $\mathcal{L}_X g = 0$. Reciprocamente, se $\mathcal{L}_V g = 0$, seja $\{\psi_t\}$ o fluxo local de V . Se v é um vetor tangente em um ponto no domínio do fluxo, então $w = d\psi_s(v)$ para s suficientemente pequeno. Pela Proposição 1.10 (ver Capítulo 1), temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \right) (g(d\psi_t w, d\psi_t w) - g(w, w)) = 0.$$

Assim,

$$\psi_s \psi_t = \psi_{s+t}, \quad e$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{g(d\psi_{s+t}(v), d\psi_{s+t}(v)) - g(d\psi_s(v), d\psi_s(v))\} = 0.$$

O que mostra que a função a valores reais $s \rightarrow g(d\psi_s(v), d\psi_s(v))$ tem derivada identicamente nula, então a mesma é constante, assim

$$g(d\psi_s(v), d\psi_s(v)) = g(v, v) \quad \text{para todos } v \text{ e } s.$$

■

Definição 3.3 *Um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ é dito um campo Killing conforme cuja distribuição ortogonal \mathcal{D} é integrável se existe $\psi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $\mathcal{L}_V g = 2\psi g$, onde g denota a métrica Riemanniana de M .*

Observação 3.1 *A função ψ na definição acima é chamada o fator conforme de V .*

O próximo lema caracteriza os campos *Killing* conformes.

Lema 3.1 *Um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ cuja distribuição ortogonal \mathcal{D} é integrável é Killing conforme se, e somente se, existe $\psi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que*

$$\langle \nabla_X V, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y V \rangle = 2\psi \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Prova. De fato, sendo \mathcal{L}_V um tensor derivação, podemos usar o Teorema 1.7. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \langle X, Y \rangle &= V \langle X, Y \rangle - \langle \mathcal{L}_V X, Y \rangle - \langle X, \mathcal{L}_V Y \rangle \\ &= \langle \nabla_V X, Y \rangle + \langle X, \nabla_V Y \rangle - \langle [V, X], Y \rangle - \langle X, [V, Y] \rangle \\ &= \langle \nabla_V X, Y \rangle + \langle X, \nabla_V Y \rangle - \langle \nabla_V X - \nabla_X V, Y \rangle - \langle X, \nabla_V Y - \nabla_Y V \rangle \\ &= \langle \nabla_V X, Y \rangle + \langle X, \nabla_V Y \rangle - \langle \nabla_V X, Y \rangle + \langle \nabla_X V, Y \rangle - \langle X, \nabla_V Y \rangle + \langle X, \nabla_Y V \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}_V \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_X V, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y V \rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Como o campo V é *Killing* conforme então $\mathcal{L}_V\langle X, Y \rangle = 2\psi\langle X, Y \rangle$ para alguma $\psi \in \mathfrak{F}(M)$.

$$\text{Portanto, } \langle \nabla_X V, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y V \rangle = 2\psi\langle X, Y \rangle, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A recíproca é imediata. ■

Observação 3.2 *A última equação obtida acima é chamada equação de Killing conforme e quando o fator conforme $\psi \equiv 0$, V é chamado um campo de Killing. De agora em diante, ficará subentendido que a distribuição ortogonal \mathcal{D} do campo V é integrável.*

Definição 3.4 *i) Um campo Killing conforme $V \in \mathfrak{X}(M)$ é fechado quando existe uma função $\psi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $\nabla_X V = \psi X$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.*

ii) No contexto do item i), dizemos que V é homotético quando o fator conforme ψ é constante.

Observação 3.3 *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo Killing conforme fechado então $\nabla\langle V, V \rangle = 2\psi V$.*

De fato, por definição de campo gradiente e usando o fato que V é um campo *Killing* conforme fechado, temos

$$\langle \nabla\langle V, V \rangle, X \rangle = X\langle V, V \rangle = 2\langle \nabla_X V, V \rangle = 2\langle \psi X, V \rangle = \langle 2\psi V, X \rangle, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Logo,

$$\nabla\langle V, V \rangle = 2\psi V.$$

Lema 3.2 *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo Killing conforme fechado então*

$$(Hess_M\langle V, V \rangle)(X, Y) = 2X(\psi)\langle V, Y \rangle + 2\psi^2\langle X, Y \rangle,$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Prova. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} (Hess_M\langle V, V \rangle)(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla\langle V, V \rangle, Y \rangle \quad (\text{por definição}) \\ &= \langle \nabla_X 2\psi V, Y \rangle \quad (\text{observação 1}) \\ &= 2\langle \nabla_X \psi V, Y \rangle + 2\langle X(\psi)V, Y \rangle \\ &= 2\psi\langle \nabla_X V, Y \rangle + 2X(\psi)\langle V, Y \rangle \\ &= 2\psi\langle \psi X, Y \rangle + 2X(\psi)\langle V, Y \rangle \quad (\text{pois } V \text{ é fechado}) \\ &= 2\psi^2\langle X, Y \rangle + 2X(\psi)\langle V, Y \rangle. \end{aligned}$$

■

Mostremos agora que $Hess_M$ é um tensor simétrico. Com efeito, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} Hess_M f(X, Y) - Hess_M f(Y, X) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla_Y \nabla f, X \rangle \\ &= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle - Y \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle, \\ &= X \langle \nabla f, Y \rangle - Y \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla_Y X - \nabla_X Y, \nabla f \rangle. \end{aligned}$$

Em resumo,

$$Hess_M f(X, Y) - Hess_M f(Y, X) = X \langle \nabla f, Y \rangle - Y \langle \nabla f, X \rangle + \langle [Y, X], \nabla f \rangle,$$

ou equivalentemente,

$$Hess_M f(X, Y) - Hess_M f(Y, X) = X(Yf) - Y(Xf) + [Y, X]f = (XY - YX)f + [Y, X]f.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Hess_M f(X, Y) - Hess_M f(Y, X) &= [X, Y]f - [X, Y]f = 0 \Rightarrow \\ Hess_M f(X, Y) &= Hess_M f(Y, X). \end{aligned}$$

Concluimos que $Hess_M$ é um tensor simétrico.

Lema 3.3 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $X(\psi)\langle V, Y \rangle = Y(\psi)\langle V, X \rangle$.*

Prova. Com efeito, como $Hess_M$ é simétrico, então

$$\begin{aligned} (Hess_M \langle V, V \rangle)(X, Y) &= (Hess_M \langle V, V \rangle)(Y, X) \Rightarrow \\ 2X(\psi)\langle V, Y \rangle + 2\psi^2 \langle X, Y \rangle &= 2Y(\psi)\langle V, X \rangle + 2\psi^2 \langle Y, X \rangle \Rightarrow \\ X(\psi)\langle V, Y \rangle &= Y(\psi)\langle V, X \rangle. \end{aligned}$$

■

Agora considere $Y = V$ e observe que $\nabla \psi = \frac{V(\psi)}{|V|^2} V = \nu(\psi)\nu$, onde $\nu = -\frac{V}{|V|}$ e portanto, ψ é constante sobre as folhas de V^\perp . De fato, por um lado, temos que $\langle \nabla \psi, X \rangle = X(\psi)$. Por outro lado, após algumas manipulações, concluimos que

$$\nabla \psi = \frac{V(\psi)}{|V|^2} V, \quad \text{ou equivalentemente,}$$

$$\nabla\psi = \nu(\psi)\nu.$$

Observemos que da equação *Killing* conforme o fator ψ de um campo de vetores *Killing* conforme V pode ser caracterizado por

$$\psi = \frac{1}{n} \operatorname{div} V,$$

onde div denota o divergente em M . De fato, pela equação *Killing* conforme, temos que

$$\langle \nabla_X V, Y \rangle + \langle \nabla_Y V, X \rangle = 2\psi \langle X, Y \rangle, \quad (3.1)$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. No que segue, $\{E_1, \dots, E_n\}$ denota o referencial ortonormal local de M . Assim, pela definição de divergente, ver seção 1.5 do Capítulo 1 deste trabalho e usando (3.1), obtemos

$$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} V, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \psi \langle E_i, E_i \rangle = n\psi.$$

Logo,

$$\psi = \frac{1}{n} \operatorname{div} V. \quad (3.2)$$

De agora em diante, denotemos por $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \overline{M}$ o fluxo gerado por V , onde M é uma folha integral arbitrária de \mathcal{D} avaliada em $t = 0$ e suponha que M é conexa e completa. Assim, sendo $\Phi_t = \Phi(t, \cdot)$ uma aplicação conforme para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, existe uma função positiva $\lambda \in \mathfrak{F}(\mathbb{R} \times M)$ tal que $\lambda(0, u) = 1$ e $\Phi_t^* \overline{g}(u) = \lambda^2(t, u) \overline{g}(u)$, para cada $u \in M$.

Consideremos o caso em que a função λ depende somente da variável t , isto é, $\lambda \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$. Geometricamente, tal como já foi observado em [12], as hipóteses permitem relacionar as métricas induzidas em folhas distintas da folheação ortogonal a V e que é detonada por V^\perp .

Seja $M_t = \Phi_t(M)$ uma folha de V^\perp munida com a métrica induzida. Sabemos que $\overline{\nabla} \langle V, V \rangle = 2\psi V$ então $|V|^2$ é constante nas folhas de V^\perp , onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \overline{M} .

Após alguns cálculos, verifiquemos que o operador forma A_t de uma folha $M_t \in V^\perp$ com respeito a ν é dado por

$$A_t(X) = -\overline{\nabla}_X \nu = \frac{\psi}{|V|} X,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M_t)$ e portanto, as folhas M_t são totalmente umbílicas com curvatura média constante $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ com respeito a ν dado por

$$\mathcal{H} = \frac{\psi}{|V|}.$$

De fato,

$$A_t(X) = -\bar{\nabla}_X \nu = -\bar{\nabla}_X \frac{-V}{|V|} = \frac{1}{|V|} \bar{\nabla}_X V \quad \text{pois } |V|^2 \text{ é constante nas folhas } V^\perp.$$

Como V é *Killing* conforme fechado então existe $\psi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que

$$A_t(X) = \frac{1}{|V|} \psi X = \frac{\psi}{|V|} X.$$

3.2 Gráficos Killing conformes

De acordo com [12], dado um domínio Ω em $M = M_0$, o gráfico *Killing* conforme $\Sigma(z)$ de uma função suave z sobre $\bar{\Omega}$ é a hipersuperfície dada por

$$\Sigma(z) = \{\Phi(z(u), u); u \in \bar{\Omega}\}.$$

Quando $\Omega = M$, $\Sigma(z)$ é dito ser inteiro.

Se atribuímos coordenadas $x_0 = t, x_1, \dots, x_n$ aos pontos em \bar{M} da forma $\bar{u} = \Phi(t, u)$, onde x_1, \dots, x_n são coordenadas locais em M , então os campos vetoriais correspondentes são

$$\partial_0|_{\bar{u}} = V(t) \quad \text{e} \quad \partial_i|_{\bar{u}} = \Phi_{t*} \partial_i|_u \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Donde, o gráfico *Killing* conforme $\Sigma(z)$ é parametrizado em termos de coordenadas locais por $z(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n$ e o espaço tangente para $\Sigma(z)$ é o espaço gerado pelos vetores

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} \partial_0|_{\Phi(z(u), u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u), u)}.$$

A partir da relação acima vemos que a métrica induzida sobre $\Sigma(z)$ é dado por

$$\lambda^2(z(u)) \left(\frac{1}{\gamma} dz^2 + d\sigma^2 \right),$$

onde $\gamma = \frac{1}{|V(0)|^2}$ e $d\sigma^2$ denota a métrica da folha M .

De fato, se denotarmos por \langle, \rangle_M a métrica induzida em M , temos da relação

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} \partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u),u)} \quad \text{que,}$$

dados $x, y \in T_p(\Sigma(z))$, obtemos a seguinte expressão

$$\langle x, y \rangle_{\Sigma(z)} = \left\langle \sum_{i=1}^n g_i \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u),u)} \right), \sum_{k=1}^n g_k \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_k|_{\Phi(z(u),u)} \right) \right\rangle_{\Sigma(z)}.$$

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{\Sigma(z)} &= \lambda^2(z(u)) \frac{1}{\gamma} \sum_{1 \leq i, k \leq n} g_i g_k \left\langle \frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial x_k} \right\rangle + \\ &+ \lambda^2(z(u)) \sum_{1 \leq i, k \leq n} g_i g_k \langle \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_k|_{\Phi(z(u),u)} \rangle_M \\ &= \lambda^2(z(u)) \left(\frac{1}{\gamma} dz^2 + d\sigma^2 \right), \end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned} \langle \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_i|_{\Phi(z(u),u)} \rangle &= 0, \\ \langle \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_0|_{\Phi(z(u),u)} \rangle &= \lambda^2(z(u)) \langle V(0), V(0) \rangle \quad \text{e} \\ \langle \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_k|_{\Phi(z(u),u)} \rangle &= \lambda^2(z(u)) \langle \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_k|_{\Phi(z(u),u)} \rangle_M. \end{aligned}$$

Além disso, denotemos por Dz o gradiente da função z com respeito a métrica $d\sigma^2$. Mostremos que

$$N = \frac{1}{\lambda(z(u)) \sqrt{\gamma + |Dz(z(u))|^2}} (\Phi_{z(u)*} Dz(u) - \gamma \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}) \quad (3.3)$$

é uma orientação sobre $\Sigma(z)$ tal que $\langle N, V \rangle < 0$.

De fato, considerando a aplicação $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, u) = z(u) - t$, temos que a aplicação $G : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G = F \circ \Phi^{-1}$ satisfaz $G \equiv 0$ em $\Sigma(z)$.

Dessa forma, se α é uma curva em $\Sigma(z)$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w \in T_p(\Sigma(z))$, obtemos

$$\frac{d}{ds} (G \circ \alpha)(s) = 0, \quad \text{ou seja,}$$

$$w(G) = \alpha'(G) = 0.$$

Daí, temos $w(G) = \langle \bar{\nabla}G, w \rangle$, segue que $\bar{\nabla}G \perp w$, para todo $w \in T_p\Sigma(z)$. Por resultados de Variedades Diferenciáveis, vale $\bar{\nabla}G = \Phi_{z(u)*}Dz(u) - \gamma\partial_0|_{\Phi(z(u),u)}$, então basta justificar que $|N| = 1$.

De fato, como Φ é uma aplicação conforme e M é uma folha da folheação $\mathcal{D}|_{t=0}$, então segue que

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{z(u)*}Dz(u), \Phi_{z(u)*}Dz(u) \rangle &= \lambda^2|Dz(u)|^2, \\ \langle \Phi_{z(u)*}Dz(u), \gamma\partial_0|_{\Phi(z(u),u)} \rangle &= 0 \quad \text{e} \\ \gamma^2\langle \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_0|_{\Phi(z(u),u)} \rangle &= \gamma\lambda^2(z(u)).\end{aligned}$$

Portanto, $|N| = 1$, isto é, N é um vetor normal a $\Sigma(z)$ tal que

$$\langle N, V \rangle < 0. \tag{3.4}$$

Neste trabalho vamos supor que a orientação em $\Sigma(z)$ é dada por (3.1).

3.3 Umbilicidade de gráficos Killing conformes inteiros

Sob uma restrição adequada na norma do gradiente da função z que determina o gráfico $\Sigma(z)$, apresentamos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral da folheação V^\perp . Iniciamos essa seção com o seguinte resultado.

Teorema 3.5 *Sejam \bar{M} uma variedade de Einstein munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \bar{M} , que está entre duas folhas da folheação V^\perp . Suponha que H é constante e que H_2 é limitada por baixo sobre $\Sigma(z)$. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.*

Prova. Afirmamos que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície completa. De fato, como $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação V^\perp e γ é uma constante positiva, a partir da métrica induzida sobre $\Sigma(z)$, existe uma constante positiva C_0 tal que

$$|X|_{\Sigma(z)}^2 \geq C_0|X^*|_M^2,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma(z))$, onde $X^* = X - \langle X, \nu \rangle \nu$ denota a projeção de X sobre a folha M e $|\cdot|_M$ denota a norma com respeito a métrica $d\sigma^2$. Com efeito, sendo

$$X = X^* + \langle X, \nu \rangle \nu,$$

temos,

$$|X|_{\Sigma(z)}^2 = \langle X, X \rangle_{\Sigma(z)} = \langle X^* + \langle X, \nu \rangle \nu, X^* + \langle X, \nu \rangle \nu \rangle_{\Sigma(z)}$$

isto é,

$$|X|_{\Sigma(z)}^2 = |X^*|^2 + 2\langle X^*, \langle X, \nu \rangle \nu \rangle + \langle X, \nu \rangle^2.$$

Note que $2\langle X^*, \langle X, \nu \rangle \nu \rangle = 0$ e $\langle X, \nu \rangle^2 \geq 0$. Daí,

$$|X|_{\Sigma(z)}^2 \geq |X^*|^2 \geq \lambda^2(z(u))|X^*|_M^2,$$

ou seja,

$$|X|_{\Sigma(z)}^2 \geq \lambda^2(z(u))|X^*|_M^2.$$

Como $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação então existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$|X|_{\Sigma(z)}^2 \geq \lambda^2(t)|X^*|_M^2,$$

para todo $t \in [t_1, t_2]$.

Sendo $\lambda > 0$ uma função contínua e $[t_1, t_2]$ compacto, então pelo Teorema de Weierstrass, existe $t_0 \in [t_1, t_2]$ tal que $0 < \lambda^2(t_0) \leq \lambda^2(t)$, para todo $t \in [t_1, t_2]$. Portanto,

$$|X|_{\Sigma(z)}^2 \geq \lambda^2(t_0)|X^*|_M^2 \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma(z)).$$

Para concluir o pedido, considere $C_0 = \lambda^2(t_0) > 0$. Isso implica que

$$L(\alpha) \geq \sqrt{C_0}L_M(\alpha^*),$$

onde $L(\alpha)$ denota o comprimento da curva $\alpha_{\Sigma(z)}$ com respeito a métrica induzida sobre $\Sigma(z)$ e $L_M(\alpha^*)$ denota o comprimento da projeção α^* de α sobre a folha M com respeito a métrica $d\sigma^2$. Consequentemente, como a métrica $d\sigma^2$ é completa, pois M é completa, usando o Teorema de Hopf-Rinow, temos que M é geodesicamente completa. Da última desigualdade acima, concluímos que $\Sigma(z)$ é geodesicamente completa, usando novamente o Teorema de Hopf-Rinow, temos que $\Sigma(z)$ com a métrica induzida é também completa e assim fica mostrado nossa afirmação.

Agora a partir da fórmula obtida para o vetor normal N e usando o fato que $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação V^\perp , temos que existe uma constante positiva C_1 tal que

$$|N^*|_M \leq C_1 |Dz|_M,$$

onde $N^* = N - \langle N, \nu \rangle \nu$ denota a projeção de N sobre a folha M .

De fato, sendo $N^* = N - \langle N, \nu \rangle \nu$, temos

$$\begin{aligned} |N^*|_M^2 &= \langle N - \langle N, \nu \rangle \nu, N - \langle N, \nu \rangle \nu \rangle_M \\ &= |N|^2 - 2\langle N, \nu \rangle \langle N, \nu \rangle + \langle N, \nu \rangle^2 \\ &= |N|^2 - \langle N, \nu \rangle^2 \leq |N|_M^2, \end{aligned}$$

e o resultado segue usando a expressão que define o vetor normal N de $\Sigma(z)$.

Agora, considere a projeção V^\top de V sobre $\Sigma(z)$, que é dado por

$$V^\top = V - \langle V, N \rangle N.$$

Mostremos que $(V^\top)^* = -\langle N, V \rangle N^*$.

De fato, pela relação acima, resulta

$$\begin{aligned} (V^\top)^* &= V^\top - \langle V^\top, \nu \rangle \nu \\ &= V - \langle V, N \rangle N - \langle V - \langle V, N \rangle N, \nu \rangle \nu \\ &= V - \langle V, N \rangle N - \langle V, \nu \rangle \nu + \langle V, N \rangle \langle N, \nu \rangle \nu \\ &= V - \langle V, N \rangle (N - \langle N, \nu \rangle \nu) - \langle V, \nu \rangle \nu \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (V^\top)^* &= V - \langle V, N \rangle N^* - \langle V, \nu \rangle \nu \\ &= V - \left\langle V, \frac{-V}{|V|} \right\rangle \frac{-V}{|V|} - \langle V, N \rangle N^* \\ &= V + \frac{1}{|V|} |V|^2 \left(\frac{-V}{|V|} \right) - \langle V, N \rangle N^*. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned} (V^\top)^* &= -\langle V, N \rangle N^* \\ &= -\langle N, V \rangle N^*. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(V^\top)^* = -\langle N, V \rangle N^*.$$

Mostremos agora que $|(V^\top)^*|_M \leq \frac{1}{\lambda^2}|V||N^*|_M$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} |(V^\top)^*|_M &= |-\langle N, V \rangle N^*|_M \\ &= |\langle N, V \rangle N^*|_M \\ &= |\langle N, V \rangle||N^*|_M \leq |N|_M|V|_M|N^*|_M. \end{aligned}$$

Como $\lambda^2|V|_M^2 = |V|^2$ e $\lambda^2|N|_M^2 = |N|^2 = 1$, segue-se que

$$|(V^\top)^*|_M \leq \frac{1}{\lambda} \frac{|V|}{\lambda} |N^*|_M = \frac{1}{\lambda^2} |V||N^*|_M \quad \text{e}$$

$$\text{conclui-se } |(V^\top)^*|_M \leq \frac{1}{\lambda^2} |V||N^*|_M.$$

Assim, tendo em conta mais uma vez que $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação V^\perp , a partir das relações $|N^*|_M \leq C_1|Dz|_M$ e $|(V^\top)^*|_M \leq \frac{1}{\lambda^2}|V||N^*|_M$ vemos que existe uma constante positiva C_2 tal que

$$|(V^\top)^*|_M \leq C_2|Dz|_M.$$

Assim, a partir da métrica induzida sobre $\Sigma(z)$ e da relação acima, concluímos que as hipóteses que $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$ garante que $|V^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$.

Defina sobre $\Sigma(z)$ um campo de vetores tangente

$$X = -P_1V^\top + (n-1)HV^\top.$$

Sendo H constante e H_2 limitado por baixo, a partir da relação

$$|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2$$

obtemos que $|A|$ é limitada. Para ver isso, observe que $C \leq H_2$ para alguma constante C e $H_2 \leq \frac{n}{n-1}H^2$ implica que H_2 é limitada. Novamente, pela relação que envolve $|A|$, concluímos que $|A|$ é limitada. Portanto, a partir das relações que definem as transformações de Newton, vemos que $|P_1|$ é também limitada. Consequentemente,

$$|X| \leq (|P_1| + (n-1)|H|)|V^\top|$$

e segue que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$, pois $|V^\top| \in \mathcal{L}(\Sigma(z))$. Por outro lado, inspirado no artigo [2], afirmamos que

$$\operatorname{div} V^\top = n(\psi + \langle V, N \rangle H) \quad (3.5)$$

e

$$\operatorname{div} P_1 V^\top = \langle \operatorname{div} P_1, V^\top \rangle + n(n-1)(\psi H + \langle V, N \rangle H_2). \quad (3.6)$$

Com efeito,

$$\operatorname{div}(P_r V^\top) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} P_r V^\top, E_i \rangle = \langle \operatorname{div} P_r, V^\top \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} V^\top, P_r E_i \rangle.$$

Escolhendo um referencial local ortonormal sobre M que diagonaliza o operador A pois A é auto-adjunto, obtemos

$$\langle \nabla_{E_i} V^\top, P_r E_i \rangle = \langle \nabla_{E_i} V^\top, \lambda_{i,r} E_i \rangle = \lambda_{i,r} \langle \nabla_{E_i} V^\top, E_i \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i} V^\top, P_r E_i \rangle = \langle \lambda_{i,r} \nabla_{E_i} V^\top, E_i \rangle = \langle \nabla_{\lambda_{i,r} E_i} V^\top, E_i \rangle = \langle \nabla_{P_r E_i} V^\top, E_i \rangle.$$

Usando a equação de *Killing* conforme e a relação $V^\perp = V - \langle V, N \rangle N$, vale a seguinte relação

$$\frac{1}{2}(\langle \nabla_X V^\top, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y V^\top \rangle) = \psi \langle X, Y \rangle + \langle V, N \rangle \langle AX, Y \rangle,$$

e daí,

$$\langle \nabla_{E_i} V^\top, P_r E_i \rangle = \psi \langle E_i, P_r E_i \rangle - \langle V, N \rangle \langle E_i, A P_r E_i \rangle.$$

Pelas relações obtidas na seção 2.4 do Capítulo 2,

$$\operatorname{tr}(P_r) = b_r H_r \quad \text{e} \quad \operatorname{tr}(A \circ P_r) = -b_r H_{r+1},$$

deduzimos que

$$\operatorname{div}(P_r V^\top) = \langle \operatorname{div} P_r, V^\top \rangle + \psi \operatorname{tr}(P_r) - \langle V, N \rangle \operatorname{tr}(A \circ P_r) \quad (3.7)$$

$$= \langle \operatorname{div} P_r, V^\top \rangle + b_r(\psi H_r + \langle V, N \rangle H_{r+1}) \quad (3.8)$$

onde

$$b_r = (r + 1) \binom{n}{r + 1}.$$

Fazendo $b = 0$ e depois $b = 1$, fica mostrado a nossa afirmação.

Sendo \overline{M}^{n+1} uma variedade de Einstein, a partir da relação

$$\langle \operatorname{div} P_r, X \rangle = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-j} E_i) E_i, A^{j-1} X \rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

conclui-se

$$\langle \operatorname{div} P_1, V^\top \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, E_i) E_i, V^\top \rangle = -\overline{\operatorname{Ric}}(N, V^\top) = -\lambda \langle N, V^\top \rangle = 0,$$

onde $\overline{\operatorname{Ric}}$ denota o tensor de Ricci de \overline{M} . Consequentemente, a partir das relações que envolvem $\operatorname{div} P_1 V^\top$ e $\operatorname{div} V^\top$ mostradas acima, vale a seguinte implicação

$$X = -P_1 V^\top + (n - 1) H V^\top \Rightarrow \operatorname{div} X = -\operatorname{div} P_1 V^\top + (n - 1) H \operatorname{div} V^\top,$$

pois H é constante. Daí,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= -(\langle \operatorname{div} P_1, V^\top \rangle + n(n - 1)(\psi H + \langle V, N \rangle H_2)) + n(n - 1) H(\psi + \langle V, N \rangle H) \\ &= -\langle \operatorname{div} P_1, V^\top \rangle - n(n - 1)(\psi H + \langle V, N \rangle H_2) + H(n - 1)n(\psi + \langle V, N \rangle H) \\ &= -\langle \operatorname{div} P_1, V^\top \rangle - n(n - 1)\psi H - n(n - 1)\langle V, N \rangle H_2 + H(n - 1)n\psi + \\ &\quad + H(n - 1)n\langle V, N \rangle H \\ &= n(n - 1)(H^2 - H_2)\langle V, N \rangle, \end{aligned}$$

isto é, $\operatorname{div} X = n(n - 1)(H^2 - H_2)\langle V, N \rangle$. Observe que $n(n - 1) > 0$, $\langle V, N \rangle < 0$ e $H^2 - H_2 \geq 0$ implica que $\operatorname{div} X \leq 0$. Como $\Sigma(z)$ é uma variedade Riemanniana completa orientada tal que $\operatorname{div} X \leq 0$ e $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$, então pelo Lema 1.10, segue que $\operatorname{div} X \equiv 0$ e consequentemente $H^2 = H_2$. Portanto, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

O Teorema abaixo garante sob certas condições que, se a curvatura média positiva de um gráfico *Killing* conforme inteiro não ultrapassa pontualmente a curvatura média de uma folha M_t para $t \in [a, b]$, em que $[a, b]$ é um intervalo conveniente, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação V^\perp .

Teorema 3.6 *Sejam \overline{M} uma variedade Riemanniana munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \overline{M} , que está entre duas folhas da folheação V^\perp . Suponha que a curvatura média H de $\Sigma(z)$ satisfaz*

$$0 < H \leq \mathcal{H}$$

Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação V^\perp .

Prova. A partir de (3.3) juntamente com a relação $\mathcal{H} = \frac{\psi}{|V|}$, resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V^\top &= n(\psi + \langle V, N \rangle H) \\ &= n(\mathcal{H}|V| - |V||N|H \cos \theta) \\ &= n(\mathcal{H}|V| - |V|H \cos \theta) \\ &= n|V|(\mathcal{H} - H \cos \theta). \end{aligned}$$

Por hipótese, $0 < H \leq \mathcal{H}$ e por conseguinte,

$$\operatorname{div} V^\top = n|V|(\mathcal{H} - H \cos \theta) \geq n|V|(H - H \cos \theta) = n|V|H(1 - \cos \theta) \geq 0.$$

onde θ é o ângulo entre ν e N . Portanto,

$$\operatorname{div} V^\top \geq nH|V|(1 - \cos \theta) \geq 0.$$

Por outro lado, como na demonstração do Teorema anterior, temos que $\Sigma(z)$ é completo e $|V^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Portanto, aplicando o Lema do Caminha, garantimos que $\operatorname{div} V^\top \equiv 0$. Assim, $\cos \theta \equiv 1$, isto é, $N = \nu$, pois $H > 0$. Concluimos daí que $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação V^\perp . ■

Na definição abaixo, denotamos a curvatura média de Σ por H .

Definição 3.7 *Dizemos que uma hipersuperfície Σ é minimal quando $H \equiv 0$.*

Sob as condições do Teorema acima, se a curvatura média H da hipersuperfície $\Sigma(z)$ é uma constante não negativa, então há duas possibilidades: Se $H \neq 0$ em algum ponto de $\Sigma(z)$, então evidentemente $H > 0$ e assim o resultado segue diretamente do teorema anterior. Caso contrário, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície minimal, conforme comprova o seguinte.

Corolário 3.8 *Sejam \overline{M} uma variedade Riemanniana munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \overline{M} , que está entre duas folhas da folheação de V^\perp . Suponha que a curvatura média H de $\Sigma(z)$ é constante, satisfazendo*

$$0 \leq H \leq \mathcal{H}.$$

Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície minimal ou uma folha da folheação V^\perp .

Prova. Usando um raciocínio inteiramente análogo ao anterior, resulta que

$$nH|V|(1 - \cos \theta) \equiv 0.$$

Como H é constante, então pela relação acima, segue que $H|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ ou $(\cos \theta)|_{\Sigma(z)} \equiv 1$, mostrando que $\Sigma(z)$ é minimal ou uma folha da folheação V^\perp . ■

No teorema abaixo estabelecemos algumas condições sobre o gráfico $\Sigma(z)$ que mostra um resultado envolvendo a curvatura de Ricci de tal gráfico.

Teorema 3.9 *Sejam \overline{M} uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa munida de um campo de vetores V Killing conforme homotético completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \overline{M} , que está entre duas folhas da folheação V^\perp . Suponha que a curvatura média H de $\Sigma(z)$ é limitada, satisfazendo*

$$0 \leq H \cos \theta \leq \mathcal{H},$$

onde θ o ângulo entre N e ν , e que $H_2 \geq C$ para alguma constante C . Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica e $\overline{\text{Ric}}(N, N) \equiv 0$.

Prova. Definimos sobre $\Sigma(z)$ a função suave dada por

$$f_V = \langle V, N \rangle.$$

Observe que $f_V < 0$, pois a orientação N construída anteriormente satisfaz essa propriedade. Encontremos agora o campo gradiente da função f_V . Para todo $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma(z))$, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_V, Y \rangle &= Y(f_V) \\ &= Y \langle V, N \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_Y V, N \rangle + \langle V, \overline{\nabla}_Y N \rangle \end{aligned}$$

Observe que $\overline{\nabla}_Y V = \psi Y$ pois V fechado, $A(Y) = -(\overline{\nabla}_Y N)^\top$ é a fórmula de Weingarten e $V^\top = V - \langle V, N \rangle N$.

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f_V, Y \rangle &= \psi \langle Y, N \rangle - \langle V^\top, A(Y) \rangle \\ &= \langle -A(V^\top), Y \rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla f_V = -A(V^\top).$$

Por outro lado, a partir da Proposição 6, de [3](ver também Proposição 2.1 de [5]),

$$\Delta f_V = -n \langle \nabla H, V \rangle - (\overline{Ric}(N, N) + |A|^2) f_V - nH\psi - nN(\psi).$$

Como V é homotético, então ψ é constante, conseqüentemente, $N(\psi) = 0$. Logo

$$\Delta f_V = -n \langle \nabla H, V \rangle - (\overline{Ric}(N, N) + |A|^2) f_V - nH\psi.$$

Agora, considere o campo de vetores tangente sobre $\Sigma(z)$ dado por

$$X = \nabla f_V + nHV^\top.$$

Sendo H limitada e $C \leq H_2$ para alguma constante C , como anteriormente, a norma da forma fundamental $|A|$ é limitada. Então, a partir da relação $\nabla f_V = -A(V^\top)$, obtemos

$$|X| \leq (|A| + nH)|V^\top|,$$

e, assim, uma demonstração similar ao Teorema anterior, concluímos que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$.

Além disso, a partir de (8.4) de [2] juntamente com as relações

$$|A| = n^2 H^2 - n(n-1)H_2 \quad \text{e} \quad \Delta f_V = -n \langle \nabla H, V \rangle - (\overline{Ric}(N, N) + |A|^2) f_V - nH\psi,$$

resulta que

$$X = \nabla f_V + nHV^\top \Rightarrow \operatorname{div} X = \operatorname{div}(\nabla f_V) + \operatorname{div}(nHV^\top) \quad \text{e conseqüentemente,}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \Delta f_V + n\langle \nabla H, V \rangle + nH \operatorname{div} V^\top \\
&= -n\langle \nabla H, V \rangle - (\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) + |A|^2) f_V - nH\psi + n\langle \nabla H, V \rangle + nH(n\psi + n\langle V, N \rangle H) \\
&= -n\langle \nabla H, V \rangle - \overline{\operatorname{Ric}}(N, N) f_V - |A|^2 f_V - nH\psi + n\langle \nabla H, V \rangle + n^2 H\psi + n^2 H^2 f_V \\
&= -\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) f_V - (n^2 H^2 - n(n-1)H_2) f_V - nH\psi + n^2 H\psi + n^2 H^2 f_V,
\end{aligned}$$

após algumas manipulações, concluímos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= -\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) f_V - n^2 H^2 f_V + n(n-1)H_2 f_V - nH\psi + n^2 H\psi + n^2 H^2 f_V \\
&= -(\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) - n(n-1)H_2) f_V + n(n-1)H\psi.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{H} = \frac{\psi}{|V|}$, então a relação acima se reduz a

$$\operatorname{div} X = -(\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) - n(n-1)H_2) f_V + n(n-1)H\mathcal{H}|V|.$$

Por hipótese, $0 \leq H \cos \theta \leq \mathcal{H}$ e tendo em conta que $f_V = -|V| \cos \theta$, resulta que

$$\operatorname{div} X \geq -(\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) + n(n-1)(H^2 - H_2)) f_V.$$

Note que $f_V < 0$, $\overline{\operatorname{Ric}} \geq 0$ por hipótese e $H^2 - H_2 \geq 0$, com a igualdade valendo somente em pontos umbílicos de $\Sigma(z)$ (confira Proposição 2.1), logo $(\operatorname{div} X)|_{\Sigma(z)} \geq 0$. Então, pelo Lema do 1.10 segue que $(\operatorname{div} X)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, isto é, $(\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) + n(n-1)(H^2 - H_2))|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ pois $f_V < 0$.

Portanto, $\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) \equiv 0$ e $(H^2 - H_2)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, ou seja, $\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) \equiv 0$ e $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

3.4 Extensões para o caso das r -ésimas curvaturas médias

Nessa seção, apresentamos as extensões para o caso das r -ésimas curvaturas médias dos resultados da seção anterior desenvolvidas em [15].

Teorema 3.10 *Sejam \overline{M}_c uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c , munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \overline{M}_c , que está entre duas folhas da folheação de V^\perp . Suponha que $\Sigma(z)$ tem segunda forma fundamental A limitada e que, para algum $1 \leq r < n$, H_{r-1} e H_r são constantes. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.*

Prova. Primeiramente notemos que, como \overline{M}_c tem curvatura seccional constante c , a partir da relação

$$\langle \operatorname{div} P_r, X \rangle = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{r-j} E_i) E_i, A^{j-1} X \rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma(z)),$$

temos

$$\langle \operatorname{div} P_r, V^\top \rangle = c \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n (\langle N, E_i \rangle \langle P_{r-j} E_i, A^{j-1} V^\top \rangle - \langle P_{r-j} E_i, E_i \rangle \langle N, A^{j-1} V^\top \rangle).$$

Como $\langle N, E_i \rangle = 0$ e $\langle N, A^{j-1} V^\top \rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, r\}$, então

$$\langle \operatorname{div} P_r, V^\top \rangle = 0.$$

Consequentemente, a partir de (3.5), conclui-se

$$\operatorname{div} P_r V^\top = b_r (\psi H_r + \langle V, N \rangle H_{r+1}), \quad (3.9)$$

onde $b_r = (n-1) \binom{n}{r} = (r+1) \binom{n}{r+1}$. Agora, consideremos o seguinte campo de vetores tangente sobre $\Sigma(z)$ dado por

$$X = b_r H_r P_{r-1} V^\top - b_{r-1} H_{r-1} P_r V^\top.$$

Logo,

$$|X| \leq (b_r |H_r| |P_{r-1}| + b_{r-1} |H_{r-1}| |P_r|) |V^\top|.$$

Supondo que $|A|$ é limitada e que H_{r-1} e H_r são constantes, similar ao teorema 3.5 podemos ver que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Além disso, a partir de (3.5), Proposição 2.4 e assumindo o fato que H_{r-1} e H_r são constantes, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= b_r H_r \operatorname{div}(P_{r-1} V^\top) - b_{r-1} H_{r-1} \operatorname{div}(P_r V^\top) \\ &= b_r H_r [(b_{r-1} (\psi H_{r-1} + \langle V, N \rangle H_r))] - b_{r-1} H_{r-1} [(b_r (\psi H_r + \langle V, N \rangle H_{r+1}))] \\ &= b_r H_r (\psi b_{r-1} H_{r-1} + b_{r-1} \langle V, N \rangle H_r) - b_{r-1} H_{r-1} (\psi b_r H_r + b_r \langle V, N \rangle H_{r+1}) \\ &= \psi b_{r-1} b_r H_{r-1} H_r + b_r b_{r-1} H_r^2 \langle V, N \rangle - b_{r-1} b_r H_{r-1} H_r \psi - b_{r-1} b_r H_{r-1} H_{r+1} \langle V, N \rangle \\ &= b_{r-1} b_r \langle V, N \rangle (H_r^2 - H_{r-1} H_{r+1}). \end{aligned}$$

Observe que $b_{r-1} > 0$, $b_r > 0$, $\langle V, N \rangle < 0$ e $H_r^2 - H_{r-1} H_{r+1} \geq 0$. Logo,

$$(\operatorname{div} X)|_{\Sigma(z)} \leq 0.$$

Aplicando o Lema 1.10, segue que $(\operatorname{div}X)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, isto é, $[b_r b_{r-1} \langle V, N \rangle (H_r^2 - H_{r-1} H_{r+1})]|_{\Sigma(z)} \equiv 0$. Portanto, $(H_r^2 - H_{r-1} H_{r+1})|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ pois $b_r > 0$, $b_{r-1} > 0$ e $\langle V, N \rangle < 0$. Assim, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

Apresentamos agora um resultado muito importante que estabelece a existência de pontos elípticos assumindo algumas hipóteses.

Lema 3.4 *Sejam \overline{M} uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores V conforme fechado completo, e Σ uma hipersuperfície completa em \overline{M} . Suponha que $\operatorname{div}V(p) \neq 0$ para algum $p \in \Sigma(z)$, onde a restrição $|V|_{|\Sigma(z)}$ de $|V|$ para Σ atinge um máximo local. Então existe um ponto elíptico em Σ .*

Prova. Assuma que existe um ponto $p_{\max} \in \Sigma$ onde a função positiva $|V|_M$, ou equivalentemente, a função $u = \langle V, V \rangle|_M$, atinge um máximo local, com $\operatorname{div}_{\overline{M}}V(p_{\max}) \neq 0$ (ou equivalentemente, $\psi(p_{\max}) \neq 0$). Assim.

$$\nabla_u(p_{\max}) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 u_{p_{\max}}(v, v) \leq 0,$$

para todo $v \in T_{p_{\max}}M$. Usando que $\overline{\nabla}_X V = \psi X$ para todo campo de vetores X , mostra-se que o gradiente de u é dado por

$$\nabla u = 2\psi V^\top.$$

Além disso, para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(X, X) &= \langle \nabla_X(\nabla u), X \rangle \\ &= 2X(\psi)\langle X, V^\top \rangle + 2\psi\langle \nabla_X V^\top, X \rangle \\ &= 2X(\psi)\langle X, V^\top \rangle + 2\psi^2|X|^2 - 2\psi\langle V, N \rangle\langle AX, X \rangle, \end{aligned}$$

pois $\langle \nabla_V^\top, X \rangle = \psi\langle X, X \rangle - \langle V, N \rangle\langle AX, X \rangle$. Portanto, no ponto p_{\max} , temos

$$V^\top(p_{\max}) = 0 \quad , \quad \langle V, N \rangle(p_{\max}) = -\sqrt{u(p_{\max})} \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 u_{p_{\max}}(v, v) = \psi^2(p_{\max})|v|^2 + \psi(p_{\max})\sqrt{u(p_{\max})}\langle A_{p_{\max}}v, v \rangle \leq 0, \quad (3.10)$$

para todo $v \in T_{p_{\max}}M$. Assumamos que $\operatorname{div}_{\overline{M}}V(p_{\max})$ (ou equivalentemente, que $\psi(p_{\max})$) é negativa (a demonstração para o caso onde $\operatorname{div}_{\overline{M}}V(p_{\max})$ é positiva é

análoga). Escolhendo agora uma base de direções principais $\{e_1, \dots, e_n\}$ em p_{\max} , concluímos de (1.3) que

$$k_i(p_{\max}) \geq \frac{-\psi(p_{\max})}{\sqrt{u(p_{\max})}} > 0, i = 1, \dots, n.$$

■

Como aplicação do Lema 3.4 temos o seguinte.

Teorema 3.11 *Sejam \overline{M}_c uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c , munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \overline{M}_c , que está entre duas folhas da folheação V^\perp . Suponha que a curvatura média H é limitada, H_r é constante, para algum $2 \leq r \leq n$, e que $\operatorname{div}V(p) \neq 0$ para algum ponto de $\Sigma(z)$ onde $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.*

Prova. Consideramos o campo de vetores sobre $\Sigma(z)$ definido por

$$X = b_r H_r V^\top - n P_r V^\top.$$

Como M tem curvatura seccional constante, então vale a relação abaixo

$$\operatorname{div}(P_r V^\top) = b_r (\psi H_r + \langle V, N \rangle H_{r+1}),$$

e usando o fato que H_r é constante, concluímos que,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}X &= b_r H_r \operatorname{div}(V^\top) - n \operatorname{div}(P_r V^\top) \\ &= n \psi b_r H_r + n b_r H_r \langle N, V \rangle - n b_r (\psi H_r + \langle N, V \rangle H_{r+1}) \\ &= n b_r \langle V, N \rangle (H H_r - H_{r+1}). \end{aligned}$$

Afirmamos que $H H_r - H_{r+1} \geq 0$ com a igualdade somente em pontos umbílicos.

De fato, desde que $\operatorname{div}V(p) \neq 0$ para algum $p \in \Sigma(z)$, onde a restrição de $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local, o Lema 3.4 garante que existe um ponto elíptico em $\Sigma(z)$. Sendo H_r constante, temos que $H_r > 0$. Então pelo Corolário 2.7 deduzimos que $H_k > 0$, para $k \in \{1, \dots, r-1\}$, e

$$H_{r-1} \geq H_r^{\frac{(r-1)}{r}}, H \geq H_{r-1}^{\frac{1}{(r-1)}},$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. Além disso, a Proposição 2.4 assegura que

$$H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1} > 0.$$

Assim,

$$H_{r+1} \leq \frac{H_r^2}{H_{r-1}}.$$

Então, a partir dessas desigualdades, podemos concluir que

$$HH_r - H_{r+1} \geq HH_r - \frac{H_r^2}{H_{r-1}} = \frac{H_r}{H_{r-1}}(HH_{r-1} - H_r) \geq \frac{H_r}{H_{r-1}}(HH_{r-1} - H_{r-1}^{\frac{r}{r-1}})$$

ou seja,

$$HH_r - H_{r+1} \geq H_r(H - H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}}) \geq 0,$$

com a igualdade valendo somente em pontos umbílicos.

Por outro lado, sendo H limitado e $H_2 > 0$, pelos passos da demonstração do Teorema 3.5 concluímos que $|A|$ é limitada. Ademais,

$$|X| \leq (b_r H_r + n|P_r|)|V^\top|,$$

e que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Então, a partir de (5.3) e (5.4) temos que $(\operatorname{div} X)|_{\Sigma(z)}$ não muda de sinal, e pelo Lema 1.10, garantimos que $(\operatorname{div} X)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, equivalentemente, $[nb_r \langle V, N \rangle (HH_r - H_{r+1})]|_{\Sigma(z)} \equiv 0$. Portanto, $(HH_r - H_{r-1})|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ pois $n > 0$, $b_r > 0$ e $\langle V, N \rangle < 0$. Daí, concluímos que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

Teorema 3.12 *Sejam \overline{M}_c uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c , munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \overline{M}_c , que está entre duas folhas da folheação V^\perp . Suponha que H é limitada, e para $0 \leq r < s < n$ ou $0 < r < s \leq n$*

$$H_s = a_r H_r + \cdots + a_{s-1} H_{s-1}, \quad (3.11)$$

para alguns números não negativos a_r, \dots, a_{s-1} e que $\operatorname{div} V$ não se anula em algum ponto de $\Sigma(z)$, onde $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.

Prova. Analisamos dois casos.

Caso 1: Primeiramente, supomos que $0 \leq r < s < n$. Usando as relações (3.3) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_s V^\top) &= b_s(\psi H_s + \langle V, N \rangle H_{s+1}) \\ &= b_s \psi H_s + b_s \langle V, N \rangle H_{s+1} \\ &= b_s \psi \left(\sum_{j=r}^{s-1} a_j H_j \right) + b_s \langle V, N \rangle H_{s+1}. \end{aligned}$$

Observe que é crucial supor $s < n$, pois caso contrário, usando essa técnica de demonstração, H_{s+1} não estaria definido para $s = n$ nas relações acima. Usando a relação (3.6) e após algumas manipulações algébricas, concluímos que

$$\operatorname{div} P_s V^\top = b_s \sum_{j=r}^{s-1} a_j \left(\frac{1}{b_j} \operatorname{div} P_j V^\top - \langle V, N \rangle H_{j+1} \right) + b_s \langle V, N \rangle H_{s+1}.$$

Logo,

$$\operatorname{div} P_s V^\top = b_s \sum_{j=r}^{s-1} \frac{a_j}{b_j} \operatorname{div} P_j V^\top + b_s \langle V, N \rangle \left(H_{s+1} - \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1} \right). \quad (3.12)$$

Por outro lado, desde que $\operatorname{div} V$ não se anula em algum ponto de $\Sigma(z)$ onde $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local, o Lema 3.4 garante que existe um ponto elíptico em $\Sigma(z)$. Consequentemente, se $0 \leq r < s < n$, como na demonstração do Teorema 6.1 de [1], temos

$$H_{s+1} \leq \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1}, \quad (3.13)$$

com a igualdade ocorrendo somente em pontos umbílicos. Assuma sem perda de generalidade que $\operatorname{div} V < 0$. Então novamente pelo Lema 3.4, existe um ponto $p_0 \in \Sigma(z)$ onde todas as curvaturas principais são positivas. Denote por Σ_s a componente conexa de $G = \{p \in \Sigma(z) : H_s(p) > 0\}$ contendo um ponto elíptico p_0 .

Observe que Σ_s é um conjunto aberto não vazio de $\Sigma(z)$ pois $p_0 \in \Sigma_s$, sendo G aberto e $\Sigma(z)$ uma variedade Riemanniana, então por resultados de Variedades Diferenciáveis, segue que, em particular, a componente conexa Σ_s de G é aberto. Mostremos agora que Σ_s é um conjunto fechado.

De fato, desde que $H_s(p_0) > 0$, existe um coeficiente positivo a_l , para algum $l \in \{r, \dots, s-1\}$ pois caso contrário, teríamos $a_j \leq 0$, para todo $j \in \{r, \dots, s-1\}$ e por

hipótese, $a_j \geq 0$, para todo $j \in \{r, \dots, s-1\}$. Logo $a_j = 0$ para todo $j \in \{r, \dots, s-1\}$ implicaria que $H_s(p_0) = 0$, o que é uma contradição.

O Corolário 2.7 assegura que, para cada $p \in \Sigma_s$, vale

$$H_j^{\frac{s}{j}} \geq H_s(p) > 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq s-1.$$

Em particular, sendo $a_j \geq 0$, em cada $p \in \Sigma_s$, segue que

$$H_s(p) \geq a_l H_l(p). \quad (3.14)$$

Se $l = 0$, então $H_s \geq a_0 > 0$ sobre Σ_s , o que mostra que Σ_s é fechado. Se $l \geq 1$, então temos sobre Σ_s a seguinte desigualdade usando o Corolário 2.7.

$$H_l^{\frac{s}{l}} \geq H_s \geq a_l H_l > 0.$$

Assim $H_l^{\frac{(s-l)}{l}} \geq a_l$ sobre $\Sigma(z)$, temos

$$H_s \geq a_l a_l^{\frac{l}{(s-l)}} = a_l^{\frac{s}{(s-l)}} > 0,$$

mostrando neste caso que Σ_s é fechado.

Portanto, Σ_s é um conexo não vazio aberto e fechado em G , logo $\Sigma_s = \Sigma(z)$ e (3.12) vale em cada $p \in \Sigma(z)$. Em particular, $H_j > 0$ para cada j , $1 \leq j \leq s$. Além disso, pela Proposição 2.4 obtemos

$$H_j^2 - H_{j-1}H_{j+1} \geq 0,$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. Sendo cada $H_j > 0$, para $1 \leq j \leq s$, pelo Corolário (2.5), segue a seguinte cadeia de desigualdades

$$\frac{H_{s+1}}{H_s} \leq \frac{H_s}{H_{s-1}} \leq \dots \leq \frac{H_{j+1}}{H_j} \leq \dots \leq \frac{H_2}{H_1} \leq H_1 \quad (3.15)$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. Observe que a primeira desigualdade vale independentemente do sinal de H_{s+1} . A partir de (3.14), e usando (3.9), obtemos

$$\frac{H_{s+1}}{H_s} \leq \frac{H_s}{H_{s-1}} = \sum_{j=r}^{s-1} a_j \frac{H_j}{H_{s-1}} \leq \sum_{j=r}^{s-1} a_j \frac{H_{j+1}}{H_s}.$$

Agora, considerando sobre $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangente

$$X = P_s V^\top - b_s \sum_{j=r}^{s-1} \frac{a_j}{b_j} P_j V^\top.$$

O Corolário 2.7 garante que $(H_2)|_{\Sigma(z)} > 0$. Então, supondo que H é limitado, e usando os passos da demonstração do Teorema 3.5 concluímos que $|A|$ é limitado. Então, de acordo com a seção 2.4 do Capítulo 2 concluímos que $|P_r|$ é também limitado, para cada $1 \leq r \leq n$. Conseqüentemente, sendo

$$|X| \leq \left(|P_s| + b_s \sum_{j=r}^{s-1} \frac{a_j}{b_j} |P_j| \right) |V^\top|.$$

podemos ver como na demonstração do Teorema 3.5, que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Então, usando o fato que $\langle V, N \rangle < 0$, obtemos a partir de (3.3) e (3.12) que

$$\operatorname{div} X = b_s \langle V, N \rangle \left(H_{s+1} - \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1} \right) \geq 0.$$

Donde, pelo Lema 1.10, temos que $(\operatorname{div} X)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$. Como $b_s > 0$ e $\langle V, N \rangle < 0$, então $H_{s+1} = \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1}$ e, assim, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.

Caso 2: Agora, assuma que $s = n$ e $r > 0$. Nesse caso, usando as relações (3.8) e (3.10), resulta que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} P_{n-1} V^\top &= b_{n-1} \psi H_{n-1} + b_{n-1} \langle V, N \rangle H_n \\ &= b_{n-1} \psi H_{n-1} + b_{n-1} \langle V, N \rangle \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_j. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\operatorname{div} P_{n-1} V^\top = b_{n-1} \psi H_{n-1} + b_{n-1} \sum_{j=r}^{n-1} a_j \left(\frac{1}{b_{j-1}} \operatorname{div} P_{j-1} V^\top - \psi H_{j-1} \right).$$

Observe que é fundamental que $r > 0$, pois caso contrário, P_{j-1} não faz sentido para $j = r = 0$. Portanto,

$$\operatorname{div} P_{n-1} V^\top = b_{n-1} \sum_{j=r}^{n-1} \frac{a_j}{b_{j-1}} \operatorname{div} P_{j-1} V^\top + b_{n-1} \psi \left(H_{n-1} - \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1} \right).$$

Como antes, existe um ponto elíptico em $\Sigma(z)$ e $0 < r < s \leq n$, donde

$$H_{n-1} \geq \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1}, \quad (3.16)$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. Para demonstrar a desigualdade anterior, segue as ideias da demonstração de (6.6) em [1] e assumamos que $\operatorname{div} V < 0$. Então pelo

Lema anterior existe um ponto $p_0 \in \Sigma(z)$ onde todas as curvaturas principais são positivas. Pela mesma razão do **Caso 1** mostra-se que $\Sigma_s = \{p \in \Sigma(z) : H_s(p) > 0\} = \Sigma(z)$ e $H_j^{\frac{n}{j}} \geq H_n(p) > 0$ em cada ponto $p \in \Sigma(z)$, para $1 \leq j \leq n-1$.

Pelo Corolário 2.5 segue que

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} \leq \frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \leq \dots \leq \frac{H_j}{H_{j-1}} \leq \dots \leq \frac{H_2}{H_1} \leq H_1,$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. De (3.10) e usando as relações acima, obtemos

$$\frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \geq \frac{H_n}{H_{n-1}} = \sum_{j=r}^{n-1} a_j \frac{H_j}{H_{n-1}} \geq \sum_{j=r}^{n-1} a_j \frac{H_{j-1}}{H_{n-2}}.$$

Agora, considere sobre $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangente dado por

$$Y = P_{n-1}V^\top - b_{n-1} \sum_{j=r}^{n-1} \frac{a_j}{b_{j-1}} P_{j-1}V^\top.$$

Daí, temos $|Y| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$ pois $|Dz| \in \mathcal{L}(M)$ e pelas ideias da demonstração do Teorema 3.5, segue que $|V^\top| \in \mathcal{L}(\Sigma(z))$, além disso, sabemos que $|P_r|$ é limitado, para cada $1 \leq r \leq n$.

Assim, $|Y| \in \mathcal{L}(\Sigma(z))$.

Supondo que $\operatorname{div}V|_{\Sigma(z)} < 0$, usando (3.2) e a partir de (3.16) obtemos

$$\operatorname{div}Y = b_{n-1}\psi \left(H_{n-1} - \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1} \right) \leq 0.$$

Então, observando que, como antes, $(|A|)$ é limitada, o Lema 1.10 assegura que $\operatorname{div}Y \equiv 0$. Portanto, $H_{n-1} = \left(\sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1} \right)$ e, assim, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

Teorema 3.13 *Sejam \overline{M}_c uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c , munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \overline{M}_c , que está entre duas folhas da folheação V^\perp . Suponha que a segunda forma fundamental A de $\Sigma(z)$ é limitada e, para algum $1 \leq r \leq n$,*

$$0 < H_{r+1} \leq H_r \mathcal{H}.$$

Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação V^\perp .

Prova. Como $|A|$ é limitada e $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$ então seguindo as ideias da demonstração do Teorema 3.5 concluímos que $|V^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Daí, deduzimos que $|P_r V^\top| \in \mathcal{L}(\Sigma(z))$. Ademais, usando a relação $0 < H_{r+1} \leq H_r \mathcal{H}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} P_r V^\top &= b_r \psi H_r + b_r \langle V, N \rangle H_{r+1} \\
&= b_r \psi H_r + b_r (-|V| |N| \cos \theta) H_{r+1} \\
&= b_r \psi H_r - b_r |V| \cos \theta H_{r+1} \\
&= b_r |V| \mathcal{H} H_r - b_r |V| \cos \theta H_{r+1} \\
&= b_r |V| (\mathcal{H} H_r - \cos \theta H_{r+1}) \geq b_r |V| (H_{r+1} - \cos \theta H_{r+1}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{div} P_r V^\top \geq b_r |V| H_{r+1} (1 - \cos \theta) \geq 0,$$

onde $b_r = (r+1) \binom{n}{r+1}$ e θ denota o ângulo entre ν e N . Pelo Lema 1.10 segue que $(\operatorname{div} P_r V^\top)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, isto é, $[b_r |V| H_{r+1} (1 - \cos \theta)]|_{\Sigma(z)} \equiv 0$. Como $b_r > 0$, $|V| > 0$ e $H_{r+1} > 0$ então $(\cos \theta)|_{\Sigma(z)} \equiv 1$ e, assim, $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação V^\perp . ■

Definição 3.14 *Uma hipersuperfície Σ é dita r -minimal se $(H_{r+1})|_\Sigma \equiv 0$.*

Corolário 3.15 *Sejam \overline{M}_c uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c , munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em \overline{M}_c , que está entre duas folhas da folheação V^\perp . Suponha que a segunda forma fundamental A de $\Sigma(z)$ é limitada e, para algum $1 \leq r \leq n$, H_{r+1} é uma constante satisfazendo*

$$0 \leq H_{r+1} \leq H_r \mathcal{H}.$$

Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície r -minimal ou uma folha da folheação V^\perp .

Prova. Se $H_{r+1} = 0$ em algum ponto de $\Sigma(z)$ e sendo H_{r+1} uma constante, então evidentemente $(H_{r+1})|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ e assim, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície r -minimal. Caso contrário, o resultado segue diretamente do Teorema 3.13. ■

Bibliografia

- [1] Alexandrov, A.D.: *Uniqueness theorems for surfaces in the large I.* Vestn, Leningrad Univ. **11**, 5-17(1956)
- [2] Alexandrov, A.D.: *A characteristic property of spheres.* Ann. Mat. Pura Appl. **58**, 303-315(1962)
- [3] Alias, L.J., Brasil, A. Jr, Colares, A.G.: *Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications,* Proc. Edinb. Math. Soc.46, 465-488(2003).
- [4] Alias, L.J., de Lira, J.H., Malacarne, J.M.: *Constant higher order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces.*J. Inst. Math. Jussieu 5, 527-562(2006).
- [5] Alias, L.J., Dajczer, M., Ripoll, J.B.: *A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field.* Ann. Glob.Anal.Geom.31,363-373(2007).
- [6] Alías, L.J., Impera, D., Rigoli, M.: *Hypersurfaces of constant higher order mean curvature in warped products.* Trans. Am. Math. Soc.**365**,591-621(2013)
- [7] Aquino, C.P., de Lima, H.F.: *On the unicity of complete hypersurfaces immersed in a semi Riemannian warped product.* Geom. Anal. (2012)
- [8] Bernstein, S.: *Sur les surfaces d'efinies au moyen de leur courboure moyenne ou totale.* Ann. Ec. Norm. Super. **27**, 233-256(1910)
- [9] Caminha, A.: *A rigidity theorem for complete CMC hypersurfaces in Lorentz manifolds.* Differ. Geom. Appl. 24,652-659(2006).
- [10] Caminha, A.: *The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces.* Bull. Braz. Math. Soc. **42**, 277-300(2011)

- [11] Caminha, A., de Lima, H.F.: *Complete vertical graph with constant mean curvature in Semi-Riemannian warped products*. Bull. Belg. Math. Soc. **16**, 91-105(2009).
- [12] Dajczer., de Lira, J.H.: *Conformal Killing graphs with prescribed mean curvature*. J. Geom. Anal. **22**, 780-799(2012).
- [13] Dajczer, M., Hinojosa, P., de Lira, J.H.: *Killing graphs with prescribed mean curvature*. Calc. Var. Partial Differ. Equ. **33**, 231-248(2008)
- [14] do Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática pura e aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, (2008).
- [15] Garding, L.: *An inequality for hyperbolic polynomials*. J.Math. Mech. **8**. 957-965(1959).
- [16] H.F. de Lima, J.R. de Lima and M.A.L.Velásquez, Entire conformal Killing graphs, to appear in The Journal of Geometric Analysis.
- [17] Jellet, J.J.: *Sur la surface dont la courbure moyenne est constant*. J. Math. Pures Appl. **18**, 163-167 (1853)
- [18] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 218, Ed. Board, (2003)
- [19] Liebmann, H.: *Eine neue Eigenschaft der Kugel*. Nachr. Kg. Ges. Göttingen, Math. Phys. Kl., 44-55(1899)
- [20] M. Gaffney, *A special Stokes theorem for complete Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **60** (1954), 140-145.
- [21] Montiel, S.: *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*. Indiana Univ. Math. J. **48**, 711-748(1999)
- [22] Montiel, S., Ros, A.: *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*. In: Lawson, B., Tenenblat, K.(eds.) Differential Geometry, pp. 279-296. Longman, New York (1991).
- [23] Omori, H.: *Isometric immersions of Riemannian manifolds*. J.Math. Soc. Jpn. **19**, 205-214(1967)

- [24] B.O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, New York: Academic Press (1983)
- [25] Pan, T.K.: *Conformal vector fields in compact Riemannian manifolds*. Proc. Am. Math. Soc. **14**, 653-657(1963)
- [26] Yau, S.T.: *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*. Commun. Pure Appl. Math. **28**, 201-228(1975)
- [27] Yau, S.T.: *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*. Indiana Univ. Math.J.**25**, 659-670(1976)